

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS**  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

***CONTATO E VÉRTICES DE  
CURVAS EM VARIEDADES DE  
CURVATURA CONSTANTE***

**Claudia Candida Pansonato**

**Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>a</sup> Sueli Irene Rodrigues Costa**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTORA EM MATEMÁTICA.

Fevereiro-2001  
Campinas-SP

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

# CONTATO E VÉRTICES DE CURVAS EM VARIEDADES DE CURVATURA CONSTANTE

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Claudia Candida Pansonato e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 01 de março de 2001



---

Prof.ª. Dr.ª Sueli I. R. Costa  
Orientadora

Banca examinadora:  
Prof.ª. Dr.ª Sueli Irene Rodrigues Costa  
Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira  
Prof. Dr. Marcelo Firer  
Prof.ª. Dr.ª Maria Aparecida Ruas  
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTORA EM MATEMÁTICA.

UNIDADE 30  
L. CHAMADA: T/ UNICAMP  
P195c  
/ Ex.  
TOMBO BC/ 44434  
PROC. 16.892/01  
C  D   
PREC. R\$ 11,00  
DATA 13/05/01  
N.º CPD

CM-00155050-9

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Pansonato, Claudia Candida

~~P195p~~ Contato e vértices de curvas em variedades de curvatura constante  
P195c / Claudia Candida Pansonato -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

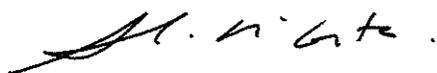
Orientador : Sueli Irene Rodrigues Costa

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Curvas. 2. Curvatura. 3. Singularidades (Matemática). I. Costa,  
Sueli Irene Rodrigues. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

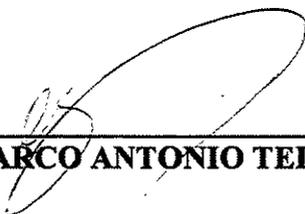
**Tese de Doutorado defendida em 22 de fevereiro de 2001**

**e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA**



---

**Prof (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA**



---

**Prof (a). Dr (a). MARCELO FIRER**



---

**Prof (a). Dr (a). MARIA APARECIDA SOARES RUAS**



---

**Prof (a). Dr (a). RONALDO ALVES GARCIA**

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Prof. Dr<sup>a</sup> Sueli I. R. Costa pela competência e dedicação na orientação deste trabalho.

Agradeço a CAPES pela concessão da bolsa.

Agradeço ao Departamento de Matemática do IMECC-Unicamp pelo amparo e suporte e ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) pela concessão do meu afastamento.

Agradeço ao grupos responsáveis pelos projetos L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e MiK<sub>T</sub>E<sub>X</sub> por disponibilizarem gratuitamente os softwares que garantiram a qualidade gráfica deste texto.

Finalmente agradeço à minha família e aos amigos pelo apoio e incentivo.

# Resumo

## Contato e Vértices de Curvas em Variedades de Curvatura Constante

Neste trabalho alguns conceitos e resultados relacionando singularidades de ordem mais alta e contato entre curvas e subvariedades são estendidos para variedades riemannianas de curvatura constante. Isto é feito através de uma abordagem riemanniana intrínseca de curvaturas, contato e vértice via parametrizações conformes. A caracterização de vértice de uma curva aqui considerada é a que generaliza a definição euclidiana de maior contato com o círculo osculador. Dentre os resultados obtidos estão o estabelecimento da relação entre o anulamento das curvaturas riemannianas de uma curva e o contato com subvariedades totalmente geodésicas e que a correspondência total entre vértices riemannianos e vértices euclidianos ocorre se, e somente se, a variedade tiver curvatura constante. Como consequência é obtido um teorema dos quatro vértices para curvas esféricas em variedades de curvatura constante. São também obtidos resultados específicos para variedades tridimensionais, como a caracterização de vértices como eixos cuspidais da superfície evoluta e a extensão do teorema da torção total para curvas esféricas.

# Abstract

## Contact and Vertices of Curves on Constant Curvature Manifolds

In this work some concepts and results relating higher order singularities and curve contact with curves and submanifolds are extended to constant curvature manifolds. This is an intrinsic Riemannian approach to curvatures, vertices and contact via conformal parametrizations. The vertex characterization considered here generalizes the Euclidean notion of higher order contact with the osculating circle. The results here include relations between the vanishing of Riemannian curvatures of a curve and its contact with totally geodesic submanifolds and the statement that Riemannian vertices are correspondent to the Euclidean ones via conformal parametrization if and only if the manifold is of constant curvature. As a consequence a four-vertex theorem for spherical curve on constant curvature manifold is proved. It is also shown some specific statements for three-dimensional manifolds like a characterization of vertices as cuspidal edges of the conformal pre-image evolute surface and a Riemannian extension of the total torsion theorem for spherical curves.

# Sumário

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Alguns Conceitos sobre Curvas e Variedades Riemannianas</b>	<b>4</b>
1.1 Variedades Riemannianas: Notação e Conceitos Fundamentais . . . . .	4
1.2 Fórmulas de Frenet em Variedades Riemannianas . . . . .	6
1.3 Variedades de Curvatura Constante . . . . .	8
<b>2 Curvaturas e Contato</b>	<b>13</b>
2.1 Expressões Gerais para Curvaturas Riemannianas . . . . .	13
2.2 Curvaturas de Curvas em Variedades de Curvatura Constante . . . . .	22
2.3 Contato entre Curvas e Subvariedades Totalmente Geodésicas . . . . .	25
<b>3 Vértices de Curvas em Variedades de Curvatura Constante</b>	<b>36</b>
3.1 Correspondência entre Vértices Riemannianos e Euclidianos . . . . .	36
3.2 Teorema dos Quatro Vértices . . . . .	41
3.2.1 Uma Família de Curvas Convexas e sem Vértices em $\mathbb{R}^3$	43
<b>4 Curvas em Variedades Tridimensionais de Curvatura Constante</b>	<b>47</b>
4.1 Vértices de Curvas em Variedades Tridimensionais . . . . .	48
4.2 Segunda Curvatura Total . . . . .	59
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>65</b>

# Lista de Figuras

1.1	Superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ . . . . .	11
2.1	Círculo de centro $C$ e raio $r$ ortogonal ao bordo do disco de Poincaré; $OA = \sqrt{-\frac{4}{K}}$ ; $AC = r$ . . . . .	30
3.1	Curva convexa no toro em $\mathbb{R}^3$ gerada no toro de Clifford ( $n = 2$ , $\text{sen } \theta = \frac{1}{4}$ ) e sua projeção no plano $x_1x_2$ . . . . .	46
4.1	Curva $\beta(t) = (2 \cos t, 2 \text{sen } t, 4(\cos^2 t - \text{sen}^2 t))$ dada pela intersecção de um cilindro com uma sela . . . . .	55
4.2	Centros de curvatura e superfície evoluta da curva $\beta(t) = (2 \cos t, 2 \text{sen } t, 4(\cos^2 t - \text{sen}^2 t))$ . . . . .	55
4.3	Curva ante-projeção estereográfica de uma elipse $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \text{sen } t)$ . . . . .	58
4.4	Centros de curvatura e superfície evoluta da curva dada pela ante-projeção estereográfica de uma elipse . . . . .	59

# Lista de Símbolos

$M^n$	Variedade riemanniana $n$ -dimensional
$\mathbb{H}^n$	Espaço hiperbólico $n$ -dimensional — Modelo de Lobachevsky
$\mathbb{D}^n$	Espaço hiperbólico $n$ -dimensional — Modelo de Poincaré
$S^n$	Esfera $n$ -dimensional
$\partial(\mathbb{D}^n)$	Fronteira do espaço hiperbólico $n$ -dimensional
$\nabla_X Y$	Conexão riemanniana de $X$ por $Y$
$\frac{D'V}{dt}$	Derivada covariante do campo de vetores $V$ ao longo da curva $\alpha(t)$
$\Gamma_{ij}^k$	Símbolos de Christoffel da conexão
$k_{g_1}, k_{g_2}$	Curvaturas (riemannianas) da curva em $M^n$
$\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n\}$	Referencial de Frenet da curva em $M^n$
$k_1, k_2$	Curvaturas euclidianas da curva em $\mathbb{R}^n$
$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$	Referencial de Frenet da curva em $\mathbb{R}^n$
$k_g$	Curvatura geodésica da curva esférica em $\mathbb{R}^3$
$g_{ij} = \delta_{ij}G^2$	Coefficientes da métrica conforme em $\mathbb{R}^n$
$K$	Curvatura da variedade de curvatura constante $M^n$
$s$	Comprimento de arco da curva em $M^n$
$s_e$	Comprimento de arco euclidiano
$\langle, \rangle$	Produto interno em $M^n$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_e$	Produto interno euclidiano
$\theta_k$	Ângulo que a curva faz com as curvas coordenadas
$\mathcal{D}$	Envoltória de uma família de funções $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$

UNICAMP  
 BIBLIOTECA CENTRAL  
 SEÇÃO CIRCULANTE

# Introdução

Este trabalho é uma extensão de alguns conceitos e resultados que relacionam singularidades de ordem superior e contato de curvas em variedades de curvatura constante. A abordagem dos conceitos aqui obtidos está centrada num tratamento riemanniano intrínseco de curvaturas, contato e vértices via parametrizações conformes.

A versão clássica do teorema dos quatro vértices estabelecendo que toda curva plana simples fechada tem pelo menos quatro pontos extremos para a função curvatura (vértices), foi inicialmente provada por S. Mukhopadhaya em 1909 [20] para curvas convexas e em 1912 por A. Kneser [17]. Desde então, várias extensões e resultados relacionados têm sido provados através de diferentes abordagens como, por exemplo, o resultado de R. Osserman [24] que estabelece que uma curva que toca seu círculo circunscrito  $n$  vezes tem pelo menos  $2n$  vértices. H. Gluck [15] provou (sob certas restrições) inclusive uma recíproca para este teorema para curvas planas.

Versões espaciais deste teorema derivam, em parte, da observação de A. Kneser que, a vértices de curvas planas correspondem pontos de torção nula na ante-projeção estereográfica [17]. Assim, na versão espacial, vértices também aparecem na literatura definidos como pontos de torção nula. Neste caso existem versões mais gerais do teorema dos quatro vértices para curvas fechadas simples convexas (isto é, curvas contidas no bordo de seu fecho convexo) [10], [29]. Para curvas em  $\mathbb{R}^n$  esta caracterização de vértice corresponde aos chamados “flattening points” que são pontos em que a última curvatura da curva se anula, o que é equivalente a dizer que as derivadas da curva até ordem  $n$  são linearmente dependentes, ou seja, uma singularidade de ordem  $n$  no conceito introduzido por W. Pohl [25]. Em tais pontos a curva tem contato de ordem maior a  $n$  com o hiperplano osculador, isto é, o hiperplano gerado por  $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}\}$ . Em um trabalho recente V. Arnold [2] mostra que “se uma curva em  $\mathbb{R}^{2k+1}$  é levada, por uma projeção  $\mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ , a uma curva convexa, então esta curva tem pelo menos  $2k + 2$  flattening points”.

A conexão entre singularidades de ordem superior da função altura e da função distância, contato de curvas com planos, círculos e esferas, tem sido abordada por muitos autores como, por exemplo, [3], [5], [30], [2], [10], [26].

Em [13] singularidades da função altura, estudadas na linha da teoria de Pohl-Feldman [25], bem como a análise de campos de vetores em direções assintóticas, são utilizados na obtenção de uma versão do teorema dos quatro vértices para subvariedades em  $\mathbb{R}^4$ : qualquer 2-esfera genericamente mergulhada como uma superfície localmente convexa em  $\mathbb{R}^4$ , tem pelo menos quatro pontos de inflexão no sentido de J. A. Little [18].

Versões riemannianas do teorema dos quatro vértices aparecem desde 1944 ([16], para o plano hiperbólico). Uma versão mais completa para variedades bidimensionais aparece em G. Thorbergson ([33], 1976). Em [9] é demonstrado que a equivalência entre vértices riemannianos em variedades bidimensionais e vértices euclidianos, via parametrização conforme, ocorre se, e somente se, a variedade tem curvatura constante. Neste trabalho estendemos este teorema para variedades  $n$ -dimensionais. A noção de vértice aqui adotada (ponto crítico da primeira curvatura e anulamento da segunda curvatura) é a que generaliza o caso bidimensional. Tal definição no caso euclidiano é equivalente à curva ter contato de ordem maior ou igual a três com seu círculo osculador. Observamos que vértices riemannianos assim definidos são singularidades de curvas quando se trabalha com comprimento de arco conforme. São em geral excluídos para a obtenção de resultados na chamada geometria diferencial conforme ([7], [1]). É importante notar que esta extensão do conceito de vértice parte novamente do trabalho de A. Kneser, pois para curvas esféricas pontos de torção nula são pontos críticos da curvatura.

Este trabalho está disposto da seguinte forma. No capítulo 1 é feito um resumo de alguns conceitos e resultados envolvendo variedades riemannianas que serão utilizados no decorrer do trabalho, sendo dado destaque especial a variedades de curvatura constante. No capítulo 2 deduzimos expressões gerais para a primeira e segunda curvaturas de uma curva numa  $n$ -variedade riemanniana com parametrização conforme e as especializamos para o caso de curvatura constante. Definimos contato riemanniano e estabelecemos uma relação entre o anulamento da primeira e segunda curvaturas de uma curva e o contato com subvariedades totalmente geodésicas. No capítulo 3 definimos vértice e, através dos cálculos feitos no capítulo 2, obtemos a equivalência entre vértices riemannianos de uma curva numa  $n$ -variedade e vértices euclidianos da pré-imagem conforme se, e somente se, a variedade tem curvatura constante. Como consequência obtemos um teorema dos quatro vértices para curvas esféricas em variedades de curvatura constante. O capítulo 4 é dedicado a curvas em variedades tridimensionais de curvatura constante. Especializando os cálculos anteriores para 3-variedades, obtemos versões mais fortes de alguns resultados do capítulo 3. Para curvas esféricas estabelecemos um teorema que garante quatro pontos de mudança de sinal da segunda curvatura. Neste caso caracterizamos os vértices como eixos cuspidais da superfície evoluta da curva pré-imagem. Finalmente,

obtemos uma generalização do teorema da torção total para curvas contidas em esferas geodésicas.

Existem algumas perspectivas claras de continuidade deste trabalho. A primeira delas seria a extensão do estudo feito aqui para singularidades e contatos associados a curvaturas de ordem superior. Os vários resultados sobre a existência de vértices de curvas são ligados a contatos com círculos ou com hiperplanos e hiperesferas. (Por exemplo, [2] e [34]). Uma possibilidade seria utilizar uma abordagem conforme como a feita em [26] para, numa versão riemanniana, analisar a existência de vértices associados a contatos de ordem superior com esferas de dimensões intermediárias.

Outra perspectiva é a utilização de resultados aqui obtidos e extensões destes na análise, via geometria integral, de propriedades globais de curvas em variedades riemannianas, como por exemplo, na busca de possíveis extensões do teorema da torção total.

Um outro aspecto do qual já temos alguns resultados preliminares no caso euclidiano é o estudo da função energia de um nó ([12], [22],[21]) possivelmente relacionado a convexidade local. Acreditamos que este trabalho juntamente com [23] nos dêem uma base sólida para a busca de resultados em variedades de curvatura constante.

# Capítulo 1

## Alguns Conceitos sobre Curvas e Variedades Riemannianas

Neste capítulo resumimos os conceitos e resultados referentes a curvas em variedades riemannianas, com ênfase especial a expressões específicas para as variedades de curvatura constante, que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

### 1.1 Variedades Riemannianas: Notação e Conceitos Fundamentais

Nesta seção introduzimos alguns conceitos sobre variedades riemannianas também com o objetivo de fixar a notação. As principais referências utilizadas aqui são [11] e [31].

Denotaremos por  $\mathbb{M}^n$  uma variedade riemanniana  $n$ -dimensional cujo produto interno associado é dado por  $\langle, \rangle$ . O espaço tangente a  $\mathbb{M}^n$  em  $p \in \mathbb{M}^n$  será denotado por  $T_p\mathbb{M}^n$ .

Dados campos de vetores diferenciáveis tangentes a  $\mathbb{M}^n$   $X$  e  $Y$ , a conexão riemanniana de  $X$  por  $Y$  é denotada por  $\nabla_X Y$ .

Se  $(x_1, \dots, x_n)$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p \in \mathbb{M}^n$  e  $X, Y$  são campos de vetores em  $\mathbb{M}^n$ , podemos representá-los localmente por

$$X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Logo,

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (y_j) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$  e  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel da conexão.

Se a métrica for dada neste sistema de coordenadas por uma matriz  $(g_{ij})$ ,  $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$  com inversa  $(g^{ij})$ , então os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  têm a seguinte forma

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1.1)$$

Uma curva parametrizada em uma variedade riemanniana  $\mathbb{M}^n$  é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  diferenciável, onde  $I$  é um intervalo da reta. Admitiremos durante o texto curvas de classe  $C^4$ . A curva  $\alpha$  é regular se  $|\alpha'(t)| \neq 0 \forall t \in I$ , onde  $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  é norma riemanniana. Dizemos que  $\alpha$  é uma curva regular fechada se  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{M}^n$  for uma imersão de classe  $C^4$ . Se nas mesmas condições anteriores  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{M}^n$  for um mergulho, dizemos que  $\alpha$  é curva regular simples fechada.

Dado  $t \in I$ , o *comprimento de arco* de uma curva regular parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$ , do ponto  $t_0$  é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Assim, dada qualquer curva regular  $\alpha$  sempre podemos reparametrizá-la pelo comprimento de arco.

A derivada covariante de um campo de vetores  $\mathbf{V}$  ao longo de uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  é definida pela conexão  $\nabla_{\alpha'(t)} \mathbf{V}$  e denotada por  $\frac{D'\mathbf{V}}{dt}$ . Se  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  é a expressão local de  $\alpha(t)$  e  $\mathbf{V} = \sum v^j \frac{\partial}{\partial x_j}$  é campo de vetores ao longo de  $\alpha$ , a derivada covariante de  $\mathbf{V}$  é dada por

$$\frac{D'\mathbf{V}}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1.2)$$

Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  em que  $\frac{D'\alpha'}{ds} = 0$  para todo  $t \in I$  é chamada *geodésica*.

Uma subvariedade  $N \subset \mathbb{M}^n$  é dita ser *totalmente geodésica* se toda geodésica em  $N$  (com a métrica induzida) é também uma geodésica em  $\mathbb{M}^n$ .

## 1.2 Fórmulas de Frenet em Variedades Riemannianas

Colocamos aqui um resumo de resultados sobre referencial de Frenet de curvas em variedades riemannianas que nos serão úteis no decorrer do texto e cujos detalhes podem ser encontrados em [31].

Considere uma variedade riemanniana  $\mathbb{M}^n$  e uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ .  $\mathbf{V}_1 = \alpha'$  denotará o vetor unitário tangente de  $\alpha$ . Desde que  $\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1 \rangle = 1$ , temos que

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_1(s) \rangle = 2 \langle \mathbf{V}_1(s), \frac{D'\mathbf{V}_1(s)}{ds} \rangle.$$

Definimos a primeira curvatura (curvatura geodésica ou riemanniana)  $k_{g_1}$  de  $\alpha$  por

$$k_{g_1}(s) = \left| \frac{D'\mathbf{V}_1(s)}{ds} \right|,$$

e se  $k_{g_1} \neq 0 \forall s$ , definimos

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{1}{k_{g_1}(s)} \frac{D'\mathbf{V}_1(s)}{ds},$$

de modo que  $\mathbf{V}_2$  é um campo vetorial unitário ao longo de  $\alpha$  que é perpendicular a  $\mathbf{V}_1$ . Temos então a Fórmula de Frenet

$$\frac{D'\mathbf{V}_1(s)}{ds} = k_{g_1}(s) \mathbf{V}_2(s). \quad (1.3)$$

De  $\langle \mathbf{V}_2(s), \mathbf{V}_2(s) \rangle = 1$ , tem-se que

$$\langle \mathbf{V}_2(s), \frac{D'\mathbf{V}_1(s)}{ds} \rangle = 0.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s) \rangle = 0 \Rightarrow 0 &= \left\langle \frac{D'\mathbf{V}_1(s)}{ds}, \mathbf{V}_2(s) \right\rangle + \left\langle \mathbf{V}_1(s), \frac{D'\mathbf{V}_2(s)}{ds} \right\rangle \\ &= k_{g_1}(s) + \left\langle \mathbf{V}_1(s), \frac{D'\mathbf{V}_2(s)}{ds} \right\rangle, \text{ por (1.3)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{D'\mathbf{V}_2(s)}{ds} = -k_{g_1}(s) \mathbf{V}_1(s) + \text{vetor perpendicular a } \mathbf{V}_1(s) \text{ e } \mathbf{V}_2(s).$$

Definimos a segunda função curvatura  $k_{g_2}$  por

$$k_{g_2}(s) = \left| \frac{D'\mathbf{V}_2(s)}{ds} + k_{g_1}(s)\mathbf{V}_1(s) \right|,$$

e se  $k_{g_2}(s) \neq 0 \forall s$ , temos

$$\mathbf{V}_3(s) = \frac{1}{k_{g_2}(s)} \left[ \frac{D'\mathbf{V}_2(s)}{ds} + k_{g_1}(s)\mathbf{V}_1(s) \right],$$

de modo que  $\mathbf{V}_3$  é um campo vetorial unitário ao longo de  $\alpha$  que é perpendicular a  $\mathbf{V}_1$  e a  $\mathbf{V}_2$ . Assim,

$$\frac{D'\mathbf{V}_2(s)}{ds} = -k_{g_1}(s)\mathbf{V}_1(s) + k_{g_2}(s)\mathbf{V}_3(s).$$

Suponha que para  $j \leq n$  obtemos  $j$  campos vetoriais ortonormais  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_j$  ao longo de  $\alpha$  e  $j - 1$  funções curvatura  $k_{g_1}, \dots, k_{g_{j-1}}$  que não se anulam, tais que

$$\frac{D'\mathbf{V}_1(s)}{ds} = k_{g_1}(s)\mathbf{V}_2(s)$$

$$\frac{D'\mathbf{V}_2(s)}{ds} = -k_{g_1}(s)\mathbf{V}_1(s) + k_{g_2}(s)\mathbf{V}_3(s)$$

⋮

$$\frac{D'\mathbf{V}_{j-1}(s)}{ds} = -k_{g_{j-2}}(s)\mathbf{V}_{j-2}(s) + k_{g_{j-1}}(s)\mathbf{V}_j(s).$$

Então,

$$\langle \mathbf{V}_j, \mathbf{V}_j \rangle = 1 \Rightarrow \left\langle \frac{D'\mathbf{V}_j(s)}{ds}, \mathbf{V}_j \right\rangle = 0.$$

Para  $i < j$  temos

$$\langle \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \mathbf{V}_i(s), \frac{D'\mathbf{V}_j(s)}{ds} \right\rangle = -\left\langle \frac{D'\mathbf{V}_i}{ds}, \mathbf{V}_j \right\rangle.$$

Logo,

$$(*) \quad \frac{D'\mathbf{V}_j(s)}{ds} = -k_{g_{j-1}}(s)\mathbf{V}_{j-1}(s) + \text{vetor perpendicular a } \mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_j(s).$$

Se  $i < n$  definimos

$$k_{g_j}(s) = \left| \frac{D'\mathbf{V}_j(s)}{ds} + k_{g_{j-1}}(s)\mathbf{V}_{j-1} \right|,$$

e se  $k_{g_j} \neq 0 \forall s$ , temos

$$\mathbf{V}_{j+1} = \frac{1}{k_{g_j}} \left[ \frac{D'\mathbf{V}_j(s)}{ds} + k_{g_{j-1}}(s)\mathbf{V}_{j-1}(s) \right].$$

Portanto, temos

$$\frac{D'\mathbf{V}_j(s)}{ds} = -k_{g_{j-1}}(s)\mathbf{V}_{j-1}(s) + k_{g_j}(s)\mathbf{V}_{j+1}(s).$$

Se  $j = n$ , então somente o vetor nulo é perpendicular a  $\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_n(s)$ , e a equação (\*) fica

$$\frac{D'\mathbf{V}_n(s)}{ds} = -k_{g_{n-1}}(s)\mathbf{V}_{n-1}(s)$$

Observe que o referencial de Frenet  $\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_j(s)$  nada mais é do que o referencial obtido a partir de  $\alpha'(t), \frac{D'\alpha'(s)}{ds}, \dots, \frac{D'^{j-1}\alpha'(s)}{ds}$  através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, quando estes vetores são linearmente independentes.

No caso particular em que  $j = n - 1$ , ou seja, em que todas as curvaturas até a ordem  $n - 2$  não se anulam, podemos definir a  $n - 1$  curvatura geodésica com sinal tomando  $\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_n$  como sendo o único campo unitário ortogonal a  $\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_{n-1}(s)$  tal que  $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_n(s)\}$  é base positiva de  $T_{\alpha(s)}\mathbb{M}^n$  e então

$$\begin{aligned} k_{g_{n-1}}(s) &= \left\langle \frac{D'\mathbf{V}_{n-1}(s)}{ds} + k_{g_{n-2}}(s)\mathbf{V}_{n-2}(s), \mathbf{V}_n(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D'\mathbf{V}_{n-1}(s)}{ds}, \mathbf{V}_n(s) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.3 Variedades de Curvatura Constante

Como os principais resultados obtidos neste trabalho dizem respeito a variedades de curvatura constante, colocamos aqui algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer do texto. As referências utilizadas aqui foram [11], [31] e [36].

**Teorema 1.** *Seja  $\mathbb{M}^n$  uma variedade riemanniana completa e de curvatura seccional constante  $K$ . Então o recobrimento universal  $\tilde{\mathbb{M}}^n$  de  $\mathbb{M}^n$ , com a métrica do recobrimento, é isométrico a:*

1.  $\mathbb{H}^n$ , se  $K = -1$ ,

2.  $\mathbb{R}^n$ , se  $K = 0$ ,

3.  $\mathbb{S}^n$ , se  $K = 1$ ,

onde  $\mathbb{S}^n$  é a esfera euclidiana em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$  com a métrica  $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$  é o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional.

Em muitos casos será conveniente dispor de um outro modelo do espaço hiperbólico, o modelo do “ $n$ -disco de Poincaré”, que é dado pela bola de raio 2 e centro na origem

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x|_e < 2\},$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $|\cdot|_e$  indica a norma euclidiana, com a métrica

$$g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 - \frac{1}{4}|x|_e^2\right)^2}. \quad (1.5)$$

Temos que  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  dada por

$$f(x) = 4 \frac{x - x_0}{|x - x_0|_e^2} - (0, \dots, 1), \quad \text{onde } x_0 = (0, \dots, -2)$$

é uma isometria entre  $\mathbb{D}^n$  e  $\mathbb{H}^n$ . No texto, quando não for necessária a distância, confundiremos as notações de  $\mathbb{D}^n$  e de  $\mathbb{H}^n$ .

As isometrias de  $\mathbb{D}^n$ ,  $n \geq 3$ , são dadas pelas aplicações conformes  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  de  $\mathbb{D}^n$  sobre ele mesmo.

No caso de  $\mathbb{S}^n$  as isometrias com a métrica induzida do  $\mathbb{R}^{n+1}$  são as restrições a  $\mathbb{S}^n$  das transformações lineares ortogonais de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Vamos agora identificar algumas subvariedades importantes de  $\mathbb{D}^n$  e de  $\mathbb{S}^n$ .

**Proposição 1.** *As subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{D}^n$  são as intersecções de  $\mathbb{D}^n$  com planos ou esferas que interceptam o bordo de  $\mathbb{D}^n$  ortogonalmente.*

**Proposição 2.** *As subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{S}^n$  são as grandes esferas de  $\mathbb{S}^n$ , isto é, as esferas em  $\mathbb{S}^n$  de raio máximo.*

Consideremos a aplicação exponencial  $\exp_q : B_\epsilon \subset T_q M \rightarrow M$  definida num aberto do espaço tangente. Dado um vetor  $v$  do espaço tangente,  $\exp_q(v)$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo um comprimento igual a  $|v|$ , a partir de  $q$ , sobre a geodésica que passa por  $q$  com velocidade igual a  $v/|v|$ . Dado  $q \in M$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\epsilon \subset T_q M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de  $B_\epsilon$  sobre um aberto

de  $\mathbb{M}^n$ . Dada uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $T_qM$  tal que  $\exp_q$  é um difeomorfismo, se  $B_\epsilon(0)$  é tal que  $\overline{B_\epsilon(0)} \subset V$ ,  $\exp_q B_\epsilon(0)$  é chamada *bola geodésica*. Pelo Lema de Gauss [11], a fronteira de uma bola geodésica é uma hipersuperfície em  $\mathbb{M}^n$  ortogonal às geodésicas que partem de  $q$ , chamada *esfera geodésica*.

Como a métrica (1.5) é simétrica em relação à origem, temos que se  $S$  é uma hiperesfera euclidiana com centro (euclidiano) na origem, então  $S$  é uma hiperesfera geodésica de  $\mathbb{D}^n$ . Como as hiperesferas centradas na origem são levadas, por isometrias de  $\mathbb{D}^n$ , em hiperesferas inteiramente contidas em  $\mathbb{D}^n$ , estas são hiperesferas geodésicas de  $\mathbb{D}^n$ . No caso de  $\mathbb{S}^n$ , as hiperesferas geodésicas são todas as  $(n-1)$ -esferas euclidianas de  $\mathbb{S}^n$ .

Seja  $S$  uma hiperesfera euclidiana tangente a  $\partial(\mathbb{D}^n)$  em  $p$  tal que  $S - \{p\} \subset \mathbb{D}^n$ .  $S - \{p\}$  é chamada *horo esfera* e é uma subvariedade de curvatura constante de  $\mathbb{D}^n$ .

Dada uma hiperesfera euclidiana  $S$  que corta  $\partial(\mathbb{D}^n)$  segundo um ângulo  $\theta$ ,  $S \cap \mathbb{D}^n$  é chamada *hipersuperfície equidistante*.

As hipersuperfícies acima descritas são caracterizadas pelo fato de terem, em cada ponto, todas as curvaturas principais iguais, isto é, elas são *totalmente umbílicas*. Mais precisamente, dizemos que uma imersão  $g : N^n \rightarrow \mathbb{M}^{n+k}$  é (totalmente) *umbílica* se para todo  $p \in N^n$ , a segunda forma fundamental  $B$  de  $g$  em  $p$  satisfaz:

$$\langle B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \eta \rangle = \lambda(p) \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo par  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  de campos de vetores em  $N^n$  e todo campo unitário  $\eta$  normal a  $g(N)$ ; estamos usando aqui  $\langle, \rangle$  para indicar a métrica  $g$  em  $\mathbb{M}^{n+k}$  e a métrica induzida por  $g$  em  $N^n$ . Assim tem-se que:

**Proposição 3.** *Seja  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma  $n$ -esfera. Para  $m \geq 2$ , seja  $N^m$  uma subvariedade conexa e imersa em  $\mathbb{S}^n$  tal que todos os seus pontos são umbílicos. Então  $N^m$  é parte de uma  $m$ -esfera.*

**Proposição 4.** *Para  $m \geq 2$ , seja  $N^m$  uma subvariedade conexa e imersa em  $\mathbb{H}^n$  tal que todos os seus pontos são umbílicos. Então  $N^m$  é uma subvariedade totalmente geodésica, ou  $N^m$  é uma esfera geodésica, uma horoesfera, ou uma hipersuperfície equidistante em alguma  $(m+1)$ -subvariedade totalmente geodésica de  $\mathbb{H}^n$ . (Figura 1.1)*

Finalmente consideraremos alguns fatos relacionados com parametrizações conformes.

Consideremos, em uma vizinhança do  $\mathbb{R}^n$ , a métrica

$$g_{ij} = \delta_{ij} G^2,$$

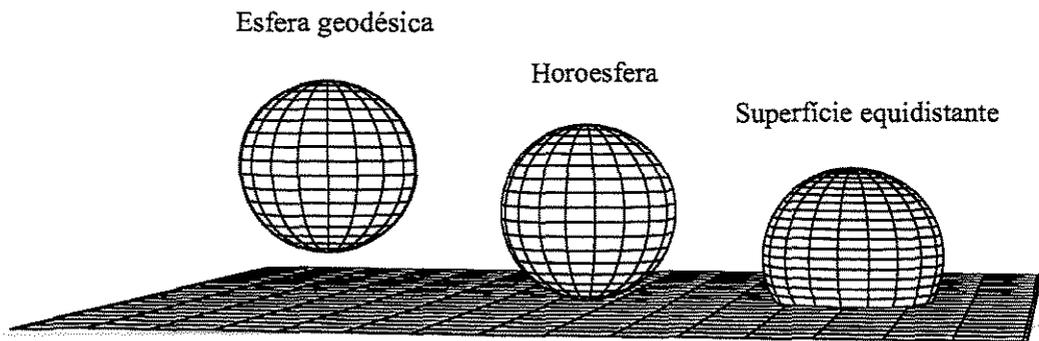


Figura 1.1: Superfícies totalmente umbílicas de  $\mathbb{H}^3$ .

onde  $G \neq 0$  é uma função de  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Então a métrica tem curvatura constante  $K$  se, e somente se, as equações abaixo são satisfeitas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right) \equiv 0, & i \neq j \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{1}{G} \right) \equiv 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Mas isto é equivalente a dizer que a função  $\frac{1}{G}$  satisfaz

$$\frac{1}{G} = \sum_{i=1}^n (Ax_i^2 + B_i x_i + C_i),$$

onde  $A$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são constantes e  $K = \sum_{i=1}^n (4AC_i - B_i^2)$ .

Se fizermos  $A = K/4$ ,  $B_i = 0$  e  $C_i = 1/n$ , obtemos a *Fórmula de Riemann*

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}. \quad (1.7)$$

Observamos que se  $K < 0$ , a métrica  $g_{ij}$  é definida numa bola de raio  $\sqrt{\frac{4}{-K}}$ . Para  $K = -1$ , temos, por (1.5), que esta é a métrica do  $n$ -disco de Poincaré de raio 2. Se  $K > 0$ , a métrica (1.7) é definida em todo  $\mathbb{R}^n$  e não é completa. Neste caso temos que esta é a métrica obtida num sistema de coordenadas dado pela projeção estereográfica  $\pi : S_r^n(C) - \{(0, \dots, 0, \frac{2}{\sqrt{K}})\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de uma esfera de

raio  $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$  centrada em  $C = (0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{K}})$ .

Reciprocamente, dada uma variedade de curvatura constante  $K$ , é sempre possível encontrarmos uma parametrização conforme tal que a métrica é dada por (1.7).

No decorrer do texto denotaremos por  $S^n$  as esferas de raios quaisquer e por  $\mathbb{H}^n$  ou  $\mathbb{D}^n$  o espaço hiperbólico de curvatura  $K < 0$ .

## Capítulo 2

# Curvaturas e Contato

Neste capítulo deduzimos expressões gerais para as curvaturas de uma curva numa  $n$ -variedade riemanniana,  $n \geq 3$ , assumindo que a variedade admite uma parametrização conforme. Para a primeira curvatura, obtemos uma expressão (2.9) que estende o que é conhecido como *Fórmula de Liouville* no caso bidimensional, expressando a curvatura da curva em termos das curvaturas das curvas coordenadas. Para a segunda curvatura, embora não seja obtida uma expressão explícita, são desenvolvidas expressões que serão necessárias no decorrer do trabalho, em especial no Capítulo 3.

Em 2.2 são deduzidas expressões para a primeira e segunda curvaturas de uma curva no caso específico de variedades de curvatura constante.

A seção 2.3 é dedicada ao estudo do contato de uma curva com subvariedades totalmente geodésicas e os principais resultados obtidos são a equivalência entre contato euclidiano e riemanniano via parametrização conforme (Proposição 8) e a caracterização de contato quando ocorre o anulamento da primeira e segunda curvaturas (Proposição 9).

### 2.1 Expressões Gerais para Curvaturas Riemannianas

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  denotará uma curva regular de classe  $C^4$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  numa variedade riemanniana  $n$ -dimensional,  $n \geq 3$ .

Dada uma parametrização conforme  $\psi : U \rightarrow \mathbb{M}^n$ , onde  $U$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , denotamos por  $g_{ij} = \delta_{ij}G^2$  os coeficientes da métrica.

Vamos obter expressões para as curvaturas riemannianas de  $\alpha$  em termos de sua pré-imagem conforme  $\beta = \psi^{-1}(\alpha)$  cujas coordenadas em  $U$  são dadas por  $(x_1(s), \dots, x_n(s)) \cdot s_e$  e  $\langle , \rangle_e$  denotarão, respectivamente, o comprimento de arco e o produto interno euclidiano. Usaremos  $k_1, \dots, k_{n-1}$  para as curvaturas

e  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  para o referencial de Frenet da curva  $\beta \subset \mathbb{R}^n$ . Observamos que o referencial de Frenet é univocamente determinado se as curvaturas  $k_1, \dots, k_{n-2}$  são não nulas, ou equivalentemente, se  $\gamma = [\beta', \dots, \beta^{(n-1)}]$  é L.I. Caso isto ocorra podemos ainda ter um referencial de Frenet (não único) a partir do “completamento” da base ortonormal gerada por  $\gamma$ . No caso riemanniano a situação é análoga, substituindo as derivadas por derivadas covariantes.

Como em 1.2,  $k_{g_1}, \dots, k_{g_{n-1}}$  e  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$  denotarão as curvaturas e os vetores do referencial de Frenet da curva  $\alpha$ .

De  $g_{ij} = \delta_{ij}G^2$ , tem-se que  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = 2G\delta_{ik}\frac{\partial G}{\partial x_j}$ . Logo para o cálculo dos símbolos de Christoffel dados em (1.1), obtemos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{km} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} \frac{1}{G^2} \\ &= \frac{1}{G} \left\{ \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} G + \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_j} G - \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} G \right\},\end{aligned}$$

e portanto,  $\Gamma_{ij}^k = 0$  se os três índices são distintos, e

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii}^i &= \frac{G_{x_i}}{G} = -G \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right), & \Gamma_{ii}^j &= -\frac{G_{x_j}}{G} = G \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right), \\ \Gamma_{ij}^i &= \frac{G_{x_j}}{G} = -G \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco e  $\frac{d\alpha}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i}$ , temos que  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{dx_i}{ds} \right)^2 = \frac{1}{G^2}$ , e portanto temos a relação

$$\frac{ds_e}{ds} = \frac{1}{G}.$$

A derivada covariante de  $\frac{d\alpha}{ds}$  é dada por

$$\frac{D'\alpha'}{ds} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{ds} \frac{dx_i}{ds} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{ds} \frac{dx_i}{ds} &= \sum_i \Gamma_{ii}^k \left( \frac{dx_i}{ds} \right)^2 + 2 \frac{dx_k}{ds} \sum_{i \neq k} \Gamma_{ki}^k \frac{dx_i}{ds} \\
&= -G \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \left( \frac{dx_k}{ds} \right)^2 + G \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \sum_{i \neq k} \left( \frac{dx_i}{ds} \right)^2 \\
&\quad - 2G \left( \sum_{i \neq k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \frac{dx_i}{ds} \right) \frac{dx_k}{ds} \\
&= G \frac{dx_k}{ds} \left[ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \frac{dx_i}{ds} - \sum_{i \neq k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \frac{dx_i}{ds} \right] \\
&\quad + G \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \sum_{i \neq k} \left( \frac{dx_i}{ds} \right)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{D'\alpha'}{ds} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d^2 x_k}{ds^2} - G \frac{dx_k}{ds} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \frac{dx_i}{ds} + \sum_{i \neq k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \frac{dx_i}{ds} \right] \right. \\
&\quad \left. + G \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \sum_{i \neq k} \left( \frac{dx_i}{ds} \right)^2 \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Sejam  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  os ângulos que a curva  $\alpha$  faz com as curvas coordenadas, isto é, curvas  $\psi(x_1, \dots, x_n)$ , onde apenas a  $i$ -ésima coordenada é não constante. Então:

$$\cos \theta_k = G \frac{dx_k}{ds} \quad \text{e} \quad -\sin \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} = G \left( \frac{d^2 x_k}{ds^2} - G \frac{dx_k}{ds} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \frac{dx_i}{ds} \right).$$

Substituindo estes valores em (2.2), tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{D'\alpha'}{ds} &= \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{1}{G} \sin \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - \frac{\cos \theta_k}{G} \sum_{i \neq k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \sum_{i \neq k} \cos^2 \theta_i \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.3} \\
&= \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n \left\{ -\sin \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - \cos \theta_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_k},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que  $\sum_{i \neq k} \cos^2 \theta_i = 1 - \cos^2 \theta_k$ .

Considerando a curva  $\beta$ , temos que

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\beta}{ds_e} = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{ds_e} = \frac{d\beta}{ds} G = (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n). \quad (2.4)$$

Observando que  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i = \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e$  em (2.3), temos

$$\begin{aligned} \frac{D'\alpha'}{ds} &= \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n \left\{ -\operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - \cos \theta_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ -\operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - \cos \theta_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right\} \mathbf{t}_k, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{t}_k = \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x_k}$ .

Derivando ambos os lados de (2.4) com relação a  $s_e$ , obtemos

$$\frac{d^2\beta}{ds_e^2} = G \left( -\operatorname{sen} \theta_1 \frac{d\theta_1}{ds}, \dots, -\operatorname{sen} \theta_n \frac{d\theta_n}{ds} \right). \quad (2.6)$$

Além disto, a primeira curvatura euclidiana é dada por

$$k_1 = G \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \operatorname{sen} \theta_i \frac{d\theta_i}{ds} \right)^2}, \quad (2.7)$$

e, se  $k_1 \neq 0$ ,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{G}{k_1} \left( -\operatorname{sen} \theta_1 \frac{d\theta_1}{ds}, \dots, -\operatorname{sen} \theta_n \frac{d\theta_n}{ds} \right). \quad (2.8)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{D'\alpha'}{ds} \right| &= \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \left( \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 + \cos^2 \theta_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \cos \theta_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e - 2 \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cos \theta_k \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{k_1^2}{G^2} - 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) + \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|_e^2 - \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

obtendo, então, uma extensão da *Fórmula de Liouville* para variedades  $n$ -dimensionais.

$$k_{g_1} = \left( \frac{k_1^2}{G^2} - 2 \sum_{k=1}^n \text{sen } \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) + \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|_e^2 - \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 \right)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Se  $k_1 \neq 0$  temos de (2.8) que  $k_{g_1}$  pode ser expresso da seguinte forma

$$k_{g_1} = \left( \frac{k_1^2}{G^2} + \frac{2k_1}{G} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_2 \rangle_e + \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|_e^2 - \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

No cálculo que será feito agora, observamos que não será obtida uma expressão explícita para a segunda curvatura da curva  $\alpha$ . Isto será feito apenas para o caso de variedades de curvatura constante na seção 2.2.

Como foi visto em 1.2,  $k_{g_2} = \left| \frac{D'\mathbf{V}_2}{ds} + k_{g_1} \mathbf{V}_1 \right|$ , onde:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{k_{g_1}} \frac{D'\alpha'}{ds}.$$

Observamos que no caso tridimensional o cálculo acima da segunda curvatura nos dá apenas o valor absoluto de  $k_{g_2}$ , visto que, neste caso  $k_{g_2}$  pode ser considerada com sinal. No capítulo 4 trataremos especialmente de curvas em variedades tridimensionais.

Como  $\frac{D'\mathbf{V}_2}{ds} = -\frac{1}{k_{g_1}^2} \frac{dk_{g_1}}{ds} \frac{D'\alpha'}{ds} + \frac{1}{k_{g_1}} \frac{D'^2\alpha'}{ds^2}$ , segue que

$$k_{g_2} = \left| -\frac{1}{k_{g_1}^2} \frac{dk_{g_1}}{ds} \frac{D'\alpha'}{ds} + \frac{1}{k_{g_1}} \frac{D'^2\alpha'}{ds^2} + k_{g_1} \mathbf{V}_1 \right|. \quad (2.11)$$

Vamos então determinar  $\frac{D'^2\alpha'}{ds^2}$ .

Chamando de  $(u_1, \dots, u_n)$  as coordenadas de  $\frac{D'\alpha'}{ds}$  na base  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  temos de (1.2) que

$$\frac{D'^2\alpha'}{ds^2} = \frac{D'}{ds} \left( \frac{D'\alpha'}{ds} \right) = \sum_k \left\{ \frac{du_k}{ds} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k u_j \frac{dx_i}{ds} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$u_k = -\frac{1}{G} \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - \frac{\cos \theta_k}{G} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \text{ por (2.5).}$$

Desde que

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{G} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e, \quad (2.12)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{du_k}{ds} &= \frac{1}{G} \left[ -\cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 - \operatorname{sen} \theta_k \frac{d^2\theta_k}{ds^2} - \cos \theta_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta_k \left( -\langle \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} \theta_i \frac{d\theta_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) + \frac{1}{G} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Utilizando os valores de  $\Gamma_{ij}^k$  obtidos em (2.1), concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k u_j \frac{dx_i}{ds} &= \frac{1}{G} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k u_j \cos \theta_i \\ &= -u_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i - \cos \theta_k \sum_{i \neq k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) u_i \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \sum_{i \neq k} u_i \cos \theta_i. \end{aligned}$$

Como  $\langle \frac{D'\alpha'}{ds}, \alpha' \rangle = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n u_i \cos \theta_i = 0$  e, portanto,  $\sum_{i \neq k} u_i \cos \theta_i = -u_k \cos \theta_k$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k u_j \frac{dx_i}{ds} &= -u_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e - \cos \theta_k \left( \sum_{i \neq k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) u_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) u_k \right) \\ &= -u_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e - \cos \theta_k \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right). \end{aligned}$$

Como  $u_k = \frac{1}{G} \left( -\operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - \cos \theta_k \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right)$ , temos

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) = \frac{1}{G} \left[ - \sum_{i=1}^n \text{sen } \theta_i \frac{d\theta_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) - \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 + \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|_e^2 \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k u_j \frac{dx_i}{ds} &= \frac{1}{G} \left[ \text{sen } \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + 2 \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 \cos \theta_k \right. \\ &\quad - \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) + \cos \theta_k \sum_{i=1}^n \text{sen } \theta_i \frac{d\theta_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \\ &\quad \left. - \cos \theta_k \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|_e^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De (2.13) e (2.14), segue que

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \alpha'}{ds^2} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{du_k}{ds} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k u_j \frac{dx_i}{ds} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n \left\{ - \cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 - \text{sen } \theta_k \frac{d^2 \theta_k}{ds^2} + \text{sen } \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e \right. \\ &\quad - \cos \theta_k \left[ -2 \sum_{i=1}^n \text{sen } \theta_i \frac{d\theta_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) + \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|_e^2 - \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 \right] \\ &\quad \left. - \cos \theta_k \langle \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

De (2.9) temos que

$$-2 \sum_{i=1}^n \text{sen } \theta_i \frac{d\theta_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) + \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|_e^2 - \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 = k_{g_1}^2 - \frac{k_1^2}{G^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{D'^2 \alpha'}{ds^2} &= \sum_{k=1}^n \left\{ -\cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 - \operatorname{sen} \theta_k \frac{d^2 \theta_k}{ds^2} \right. \\
&\quad - \cos \theta_k \left( k_{g_i}^2 - \frac{k_1^2}{G^2} \right) + \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e \\
&\quad \left. - \cos \theta_k \langle \frac{d}{ds} \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \right\} \mathbf{t}_k.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Para os cálculos que faremos adiante será útil desenvolvermos a expressão  $\cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 + \operatorname{sen} \theta_k \frac{d^2 \theta_k}{ds^2}$ . Para isto consideraremos separadamente os casos  $k_1 \neq 0$  e  $k_1 = 0$ .

Se  $k_1 \neq 0$ , temos por (2.8) que

$$\mathbf{v}_2 = \frac{G}{k_1} \left( -\operatorname{sen} \theta_1 \frac{d\theta_1}{ds}, \dots, -\operatorname{sen} \theta_n \frac{d\theta_n}{ds} \right).$$

Observamos que  $\frac{dG}{ds_e} = \sum_i G_{x_i} \frac{dx_i}{ds} \frac{ds}{ds_e} = \sum_i G_{x_i} \cos \theta_i = -G^2 \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e$ .

Logo, denotando por  $\left( \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right)_k$  a  $k$ -ésima coordenada de  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right)_k &= \left( -\frac{G^2}{k_1} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e - \frac{G}{k_1^2} \frac{dk_1}{ds_e} \right) \left( -\operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \right) \\
&\quad + \frac{G}{k_1} \left( -\cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 - \operatorname{sen} \theta_k \frac{d^2 \theta_k}{ds^2} \right) \frac{ds}{ds_e},
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
\cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 + \operatorname{sen} \theta_k \frac{d^2 \theta_k}{ds^2} &= \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \left( \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{1}{G k_1} \frac{dk_1}{ds_e} \right) \\
&\quad - \frac{k_1}{G^2} \left( \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right)_k
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Analisemos agora o caso  $k_1 = 0$ . Desde que por (2.6)  $\left( \frac{d^2 \beta}{ds_e^2} \right)_k = -G \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds}$ , segue que

$$\left( \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right)_k = G \left( -\frac{dG}{ds} \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - G \left( \cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 + \operatorname{sen} \theta_k \frac{d^2 \theta_k}{ds^2} \right) \right).$$

Por (2.7) temos que  $k_1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen } \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} = 0 \forall k$ . Logo,

$$\cos \theta_k \left( \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 + \text{sen } \theta_k \frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{1}{G^2} \left( \frac{d^3\beta}{ds^3} \right)_k. \quad (2.17)$$

Vamos agora desenvolver a parte da expressão de  $\frac{D'^2\alpha'}{ds^2}$  em(2.15) que envolve derivadas parciais de segunda ordem da função  $\frac{1}{G}$ .

Temos:

$$\nabla \left( \frac{1}{G} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right) \mathbf{e}_j.$$

Logo,

$$\frac{d}{ds} \nabla \left( \frac{1}{G} \right) = \frac{1}{G} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \right\} \mathbf{e}_j,$$

e

$$\left\langle \frac{d}{ds} \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e = \frac{1}{G} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \right\} \cos \theta_j$$

Assim,

$$\begin{aligned} & -\cos \theta_k \left\langle \frac{d}{ds} \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e + \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i = \\ & \frac{1}{G} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{1}{G} \right) (-\cos^3 \theta_k + \cos \theta_k) + \sum_{i \neq k} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{1}{G} \right) (-\cos \theta_k \cos^2 \theta_i) \right. \\ & \left. + \sum_{i \neq k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) (\cos \theta_i - 2 \cos^2 \theta_k \cos \theta_i) \right. \\ & \left. + \cos \theta_k \sum_{\substack{i,j \neq k \\ i \neq j}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \cos \theta_j \right]. \end{aligned}$$

Como  $-\cos^3 \theta_k + \cos \theta_k = \cos \theta_k (1 - \cos^2 \theta_k) = \cos \theta_k \sum_{i \neq k} \cos^2 \theta_i$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& -\cos \theta_k \left\langle \frac{d}{ds} \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e + \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i = \\
& \frac{1}{G} \left\{ \sum_{i \neq k} \left[ \cos \theta_k \cos^2 \theta_i \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{1}{G} \right) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i (1 - 2 \cos^2 \theta_k) \right] + \cos \theta_k \sum_{\substack{i,j \neq k \\ i \neq j}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \cos \theta_j \right\}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{D^2 \alpha'}{ds^2} &= \sum_{k=1}^n \left\{ -A_k - \cos \theta_k \left( k_{g_1}^2 - \frac{k_1^2}{G^2} \right) + \sin \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e \right. \\
&+ \frac{1}{G} \left\{ \sum_{i \neq k} \left[ \cos \theta_k \cos^2 \theta_i \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{1}{G} \right) \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i (1 - 2 \cos^2 \theta_k) \right] \right. \\
&\left. \left. + \cos \theta_k \sum_{\substack{i,j \neq k \\ i \neq j}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right) \cos \theta_i \cos \theta_j \right\} \right\} \mathbf{t}_k, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

onde:

$$A_k = \begin{cases} \sin \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \left( \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e + \frac{1}{G k_1} \frac{dk_1}{ds_e} \right) - \frac{k_1}{G^2} \left( \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right)_k & \text{se } k_1 \neq 0, \\ -\frac{1}{G^2} \left( \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right)_k & \text{se } k_1 = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

## 2.2 Curvaturas de Curvas em Variedades de Curvatura Constante

Nesta seção obteremos as expressões para a primeira e segunda curvaturas de uma curva numa variedade de curvatura constante.

Como foi mencionado na seção 1.3, dada uma variedade  $\mathbb{M}^n$  de curvatura constante  $K$ , é sempre possível encontrarmos uma parametrização tal que a métrica é dada por

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}.$$

Logo,  $\frac{1}{G} = 1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2$  e, portanto,

$$\nabla \left( \frac{1}{G} \right) (s) = \frac{K}{2} (x_1(s), \dots, x_n(s)) = \frac{K}{2} \beta(s). \quad (2.21)$$

Utilizando essa expressão em (2.9) tem-se que

$$k_{g_1} = \left[ \frac{k_1^2}{G^2} - K \sum_{k=1}^n x_k \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} + \frac{K^2}{4} (|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2) \right]^{1/2}, \quad (2.22)$$

e quando  $k_1 \neq 0$ ,

$$k_{g_1} = \left[ \frac{k_1^2}{G^2} + \frac{K k_1}{G} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e + \frac{K^2}{4} (|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2) \right]^{1/2}, \quad (2.23)$$

Vamos agora obter expressões explícitas para a segunda curvatura de uma curva numa variedade de curvatura constante.

**Proposição 5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  uma curva regular  $C^4$  numa variedade  $n$ -dimensional de curvatura constante e  $k_{g_1} \neq 0$ . Então, sob a parametrização conforme dada por 1.7, sua segunda curvatura geodésica,  $k_{g_2}$ , é dada por:*

1. Se  $k_1 \neq 0$ ,

$$k_{g_2} = \frac{1}{k_{g_1} G^2} \left\{ k_1^2 \left| \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right|_e^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - k_1^4 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left[ \frac{K}{2} k_1 \langle \beta, \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \rangle_e + \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) + \frac{K}{2} k_1^2 \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.24)$$

2. Se  $k_1 = 0$ ,

$$k_{g_2} = \frac{1}{k_{g_1} G^2} \left[ -\frac{1}{k_{g_1}^2} \frac{K^2}{4} \langle \beta, \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \rangle_e^2 + \left| \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_e^2 \right]^{1/2}. \quad (2.25)$$

*Demonstração.* Observamos inicialmente que  $\langle \frac{D'\mathbf{V}_1}{ds}, \mathbf{V}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \frac{D'^2\mathbf{V}_1}{ds^2}, \mathbf{V}_1 \rangle = -k_{g_1}^2$ . Diferenciando  $k_{g_1}^2 = \langle \frac{D'\mathbf{V}_1}{ds}, \frac{D'\mathbf{V}_1}{ds} \rangle$  com respeito a  $s$ , também temos,

$$\frac{dk_{g_1}}{ds} = \frac{1}{k_{g_1}} \langle \frac{D'\mathbf{V}_1}{ds}, \frac{D'^2\mathbf{V}_1}{ds^2} \rangle. \quad (2.26)$$

Logo, de (2.11) e das observações acima, segue que

$$\begin{aligned} k_{g_2} &= \left( \frac{1}{k_{g_1}^2} \left( \frac{dk_{g_1}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{k_{g_1}^2} \left| \frac{D'^2\alpha'}{ds^2} \right|^2 + k_{g_1}^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1}{k_{g_1}^3} \frac{dk_{g_1}}{ds} \langle \frac{D'^2\alpha'}{ds^2}, \frac{D'\alpha'}{ds} \rangle + 2 \langle \frac{D'^2\alpha'}{ds^2}, \mathbf{V}_1 \rangle \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{k_{g_1}} \left( \left| \frac{D'^2\mathbf{V}_1}{ds^2} \right|^2 - \left( \frac{dk_{g_1}}{ds} \right)^2 - k_{g_1}^4 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por outro lado, segue de (1.6) e de (2.19) que do fato de  $\mathbb{M}^n$  ter curvatura constante,  $\frac{D'^2\alpha'}{ds^2}$  é dado por

$$\frac{D'^2\alpha'}{ds^2} = \sum_{k=1}^n \left\{ -A_k - \cos \theta_k \left( k_{g_1}^2 - \frac{k_1^2}{G^2} \right) + \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e \right\} \mathbf{t}_k. \quad (2.28)$$

Se  $k_1 \neq 0$  temos por (2.20) que

$$\frac{D'^2\alpha'}{ds^2} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k_1}{G^2} \left( \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right)_k - \frac{1}{Gk_1} \frac{dk_1}{ds_e} \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} - \cos \theta_k \left( k_{g_1}^2 - \frac{k_1^2}{G^2} \right) \right\} \mathbf{t}_k. \quad (2.29)$$

Como  $k_1 = G \left[ \sum_i \left( \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \right)^2 \right]^{1/2}$ ,  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} = -k_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^\perp$  e  $\mathbf{v}_2 = \frac{G}{k_1} (-\operatorname{sen} \theta_1 \frac{d\theta_1}{ds}, \dots, -\operatorname{sen} \theta_n \frac{d\theta_n}{ds})$ , temos

$$\left| \frac{D'^2\alpha'}{ds^2} \right|^2 = \frac{k_1^2}{G^4} \left| \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right|^2 + \frac{1}{G^4} \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 + k_{g_1}^4 - \frac{k_1^4}{G^4}.$$

Além disto, substituindo (2.5) e (2.29) em (2.26), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dk_{g_1}}{ds} &= \frac{1}{k_{g_1}G^2} \left[ k_1 \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right\rangle_e + k_1^2 \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e \right. \\ &\quad \left. + \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_2 \right\rangle_e \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Assim, utilizando estes cálculos em (2.27), tem-se

$$\begin{aligned} k_{g_2} &= \frac{1}{k_{g_1}G^2} \left[ k_1^2 \left| \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right|_e^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - k_1^4 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left( k_1 \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right\rangle_e \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_2 \right\rangle_e \right) + k_1^2 \left\langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \right\rangle_e \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando (2.21) na expressão acima concluímos a primeira parte da Proposição.

Para a parte 2, temos, substituindo a segunda parte de (2.20) em (2.28) que

$$\frac{D'^2 \alpha'}{ds^2} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{G^2} \left( \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right)_k - k_{g_1}^2 \cos \theta_k \right\} \mathbf{t}_k.$$

Logo, desde que quando  $k_1 = 0$ ,  $\left\langle \frac{d^3 \beta}{ds_e^3}, \mathbf{v}_1 \right\rangle_e = 0$ , segue que

$$\left| \frac{D'^2 \alpha'}{ds^2} \right|^2 = \frac{1}{G^4} \left| \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_e^2 + k_{g_1}^4.$$

Também, substituindo a expressão de  $\frac{D'^2 \alpha'}{ds^2}$  obtida acima em (2.26) e usando o fato que  $k_1 = 0$  em (2.5), obtemos

$$\frac{dk_{g_1}}{ds} = \frac{1}{G^2 k_{g_1}} \left\langle \frac{d^3 \beta}{ds_e^3}, \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right\rangle_e.$$

Assim, utilizando estes resultados em (2.27) e a expressão (2.21) concluímos a segunda parte.  $\square$

## 2.3 Contato entre Curvas e Subvariedades Totalmente Geodésicas

No caso de variedades de curvatura constante, um importante resultado envolvendo as curvaturas de uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  e as subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{M}^n$  de dimensão  $j$  é o seguinte

**Proposição 6.** [31] *Seja  $\mathbb{M}^n$  uma variedade de curvatura constante. Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvaturas  $k_{g_1}, \dots, k_{g_{j-1}}$  nunca nulas e  $k_j \equiv 0$ . Então  $\alpha$  está contida numa  $j$ -subvariedade totalmente geodésica de  $\mathbb{M}^n$ .*

Nesta seção estabeleceremos um resultado local envolvendo o anulamento da primeira e segunda curvaturas de uma curva numa variedade de curvatura constante e o contato com subvariedades totalmente geodésicas. Para isto estenderemos a definição clássica de contato entre curvas no  $\mathbb{R}^n$ , que é caracterizada em termos das derivadas de ordem superior:

Duas curvas  $\alpha$  e  $\gamma$  têm contato de ordem  $m$  num ponto  $P$  se suas derivadas de ordem até  $m$  (com relação ao respectivos comprimentos de arco) são coincidentes em  $P$  e as derivadas de ordem  $m + 1$  diferem em  $P$ . Quando  $\gamma$  é uma curva no  $\mathbb{R}^n$  e  $S$  é uma subvariedade,  $\gamma$  e  $S$  têm contato de ordem  $m$  num ponto  $P$  em comum se existir uma curva  $\beta$  em  $S$  que tem contato de ordem  $m$  com  $\gamma$  em  $P$  e não existir nenhuma outra curva em  $S$  que tem um contato de ordem maior ou igual a  $m$  com  $\gamma$  em  $P$ . A partir destas definições tem-se que a reta tangente tem contato de ordem pelo menos um com a curva, o círculo e o plano osculador têm contato de ordem pelo menos dois com a curva e a esfera osculatriz tem contato de ordem pelo menos três com a curva. No caso de uma curva e uma hipersuperfície  $F^{-1}(0)$  no  $\mathbb{R}^n$  dada como imagem inversa de valor regular vale o seguinte resultado

**Proposição 7.** [32]. *Dizemos que  $\gamma$  e  $F^{-1}(0)$  têm contato de ordem  $m$  em  $P = \gamma(s_0)$  se a função  $g$  definida por*

$$g(s) = F(\gamma(s))$$

*satisfaz  $g(s_0) = g'(s_0) = \dots = g^m(s_0) = 0, g^{(m+1)}(s_0) \neq 0$ .*

No caso de curvas em variedades estabelecemos uma definição análoga de contato utilizando derivadas covariantes:

**Definição 1.** *Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  e  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  curvas regulares de classe  $C^{m+1}$  numa  $n$ -variedade de curvatura constante parametrizadas pelos seus respectivos comprimentos de arco  $s$  e  $t$ . Dizemos que  $\alpha$  e  $\gamma$  têm **contato riemanniano** de ordem  $m$  (exatamente) num ponto em comum  $P$  se*

$$\begin{aligned}
\alpha(s_0) &= \gamma(t_0) = P \\
\left. \frac{d\alpha}{ds} \right|_{s=s_0} &= \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=t_0} \\
\left. \frac{D'\alpha'}{ds} \right|_{s=s_0} &= \left. \frac{D'\gamma'}{dt} \right|_{t=t_0} \\
&\vdots \\
\left. \frac{D'^{m-1}\alpha'}{ds^{m-1}} \right|_{s=s_0} &= \left. \frac{D'^{m-1}\gamma'}{dt^{m-1}} \right|_{t=t_0} \\
&e \\
\left. \frac{D'^m\alpha'}{ds^m} \right|_{s=s_0} &\neq \left. \frac{D'^m\gamma'}{dt^m} \right|_{t=t_0}
\end{aligned}$$

De fato, para variedades de curvatura constante a noção de contato é preservada sob parametrização conforme, a saber

**Proposição 8.** *Sob as mesmas condições da definição 1,  $\alpha$  e  $\gamma$  têm contato riemanniano de ordem  $m$  (exatamente) num ponto  $P$  se, e somente se, suas pré-imagens conformes têm mesma ordem de contato em  $\psi^{-1}(P)$ .*

*Demonstração.* Para demonstrar o resultado observamos que se  $\mathbf{u}(s) = (u_1, \dots, u_n)$  são as coordenadas de um campo de vetores ao longo de uma curva  $\alpha$  em  $\mathbb{M}^n$ , então utilizando a expressão da métrica dada em (1.7) (pois  $\mathbb{M}^n$  tem curvatura constante) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{D'\mathbf{u}}{ds} &= \sum_{i=k}^n \left\{ \frac{du_k}{ds} - \frac{KG}{2} \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i \frac{dx_i}{ds} \right) u_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \sum_{i \neq k} x_i u_i \right) \frac{dx_k}{ds} - \left( \sum_{i \neq k} \frac{dx_i}{ds} u_i \right) x_k \right] \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Partindo desta expressão e lembrando que  $\frac{ds_e}{ds} = \frac{1}{G}$  obtemos por um processo recursivo que igualdade entre as derivadas covariantes (com relação ao parâmetro  $s$ ) é equivalente à igualdade entre derivadas comuns (com relação ao parâmetro  $s_e$ ), visto que a derivada covariante de um campo  $\mathbf{u}$  ao longo de uma curva  $\alpha$  envolve apenas as coordenadas de  $\alpha$ ,  $\alpha'$ , as coordenadas de  $\mathbf{u}$  e as coordenadas de  $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ .  $\square$

A Proposição 8 nos permite não fazer distinção entre contato euclidiano e contato riemanniano. Portanto, diremos somente contato quando nos referirmos a variedades de curvatura constante.

**Definição 2.** *Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  tem contato de ordem  $m$  (exatamente) com uma subvariedade  $N$  de  $\mathbb{M}^n$  num ponto  $P$  se existe pelo menos uma curva  $\gamma$  em  $N$  que tem contato de ordem  $m$  com  $\alpha$  em  $P$  e não existe uma curva em  $N$  que tem contato de ordem maior que  $m$  com  $\alpha$  em  $P$ .*

Temos então o seguinte resultado

**Proposição 9.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  curva regular de classe  $C^4$  parametrizada pelo comprimento de arco numa variedade de curvatura constante e  $k_{g_1}, k_{g_2}$  a primeira e segunda curvaturas, respectivamente, da curva  $\alpha$ . Então tem-se que*

1.  $k_{g_1} = 0$  em  $P$  se, e somente se,  $\alpha$  tem contato de ordem maior ou igual a dois com a geodésica de  $\mathbb{M}^n$  em  $P$ ;  
E, se  $k_{g_1} \neq 0$  em  $P$ ,
2.  $k_{g_2} = 0$  em  $P$  se, e somente se,  $\alpha$  tem contato de ordem maior ou igual a três com a 2-subvariedade totalmente geodésica de  $\mathbb{M}^n$  osculadora em  $P$ .

Aqui chamamos de subvariedade totalmente geodésica osculadora em  $P$  à 2-subvariedade dada pela imagem da aplicação exponencial do “plano osculador” gerado por  $\frac{d\alpha}{ds}$  e  $\frac{D'\alpha'}{ds}$ .

Para a demonstração desta Proposição será necessário caracterizar as  $j$ -subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{M}^n$  através do resultado que demonstramos a seguir que, embora seja possivelmente conhecido, não foi encontrado na literatura.

**Lema 1.** *Seja  $\mathbb{M}^n = \mathbb{H}^n$  ou  $\mathbb{S}^n$  com parametrização conforme e a métrica de curvatura constante  $K$*

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}.$$

*Então as  $j$ -subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{M}^n$  são imagens dos  $j$ -planos pela origem em  $\mathbb{R}^n$  e das  $j$ -esferas contidas em  $(j+1)$ -planos pela origem em  $\mathbb{R}^n$  cujos centro  $C$  e raio  $r$  satisfazem*

$$|C|_e^2 = r^2 - \frac{4}{K}. \quad (2.31)$$

*Demonstração.* Quando  $K < 0$  temos, conforme visto na Proposição 1, que as  $j$ -subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{D}^n$  são os  $j$ -planos pela origem e as  $j$ -esferas em  $\mathbb{D}^n$  que interceptam o bordo de  $\mathbb{D}^n$  ortogonalmente. De acordo com a figura 2.1 isto significa que  $|C|_e^2 = r^2 - \frac{4}{K}$ , onde  $\sqrt{-\frac{4}{K}}$  é o raio do  $n$ -disco de Poincaré.

Quando  $K > 0$  temos, de acordo com a Proposição 2, que as  $j$ -subvariedades de  $\mathbb{S}^n$  com a métrica induzida do  $\mathbb{R}^{n+1}$  são as grandes esferas  $j$ -dimensionais. Considerando a projeção estereográfica  $\pi : \mathbb{S}^n - \{(0, \dots, 0, \frac{2}{\sqrt{K}})\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de uma esfera de raio  $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$  e centro  $(0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{K}})$  temos que os  $j$ -planos pela origem em  $\mathbb{R}^n$  correspondem às grandes esferas  $j$ -dimensionais em  $\mathbb{S}^n$  dadas por  $\mathbb{S}^n \cap P^{j+1}$ , onde  $P^{j+1}$  é um plano  $(j+1)$ -dimensional passando pelo pólo. Logo, os  $j$ -planos pela origem em  $\mathbb{R}^n$  são subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{S}^n$  com a métrica conforme acima. Além disto, as esferas  $S^j$  contidas em  $(j+1)$ -planos pela origem em  $\mathbb{R}^n$  correspondem a esferas  $\bar{S}^j$  contidas numa grande esfera  $\bar{S}^{j+1}$  em  $\mathbb{S}^n$  passando pelo pólo. Vamos mostrar que  $\bar{S}^j$  é uma grande esfera se, e somente se, o centro  $C$  e o raio  $r$  da esfera correspondente  $S^j$  satisfazem a condição (2.31).

De fato, restringindo a projeção estereográfica a  $\bar{S}^{j+1}$  temos que

$$\pi^{-1}(x_1, \dots, x_{j+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^{j+1} x_i^2}, \dots, \frac{x_{j+1}}{1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^{j+1} x_i^2}, \frac{\frac{\sqrt{K}}{2} \sum_{i=1}^{j+1} x_i^2}{1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^{j+1} x_i^2} \right). \quad (2.32)$$

Pelas propriedades da projeção estereográfica,  $\bar{S}^j = \bar{S}^{j+1} \cap P^{j+1}$ , onde  $P^{j+1}$  é um  $(j+1)$ -plano que não passa pelo pólo cuja equação é  $\sum_{i=1}^{j+2} A_i X_i + D = 0$ . Logo, de (2.32) temos

$$\sum_{i=1}^{j+1} A_i x_i + \frac{1}{4} (2\sqrt{K} A_{j+2} + DK) \sum_{i=1}^{j+1} x_i^2 + D = 0,$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{j+1} \left( x_i + \frac{2A_i}{2\sqrt{K}A_{j+2} + DK} \right)^2 = -\frac{4D}{2\sqrt{K}A_{j+2} + DK} + 4 \sum_{i=1}^{j+1} \frac{A_i^2}{(2\sqrt{K}A_{j+2} + DK)^2}.$$

Logo,  $(x_1, \dots, x_{j+1})$  pertence uma  $j$ -esfera de centro  $C$  e raio  $r$  satisfazendo (2.31) se, e somente se,  $D = -\frac{1}{\sqrt{K}}A_{j+2}$ , o que significa que o plano  $P_{j+1}$  passa pelo centro da esfera  $(0, \dots, 0, 1/\sqrt{K})$  e, portanto,  $\bar{S}^j$  é uma grande esfera.  $\square$

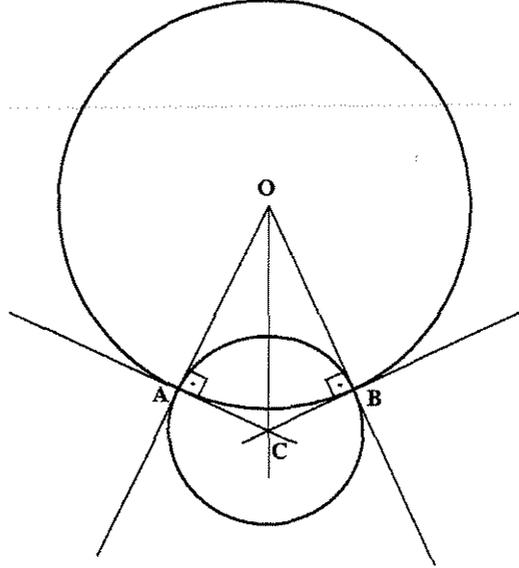


Figura 2.1: Círculo de centro  $C$  e raio  $r$  ortogonal ao bordo do disco de Poincaré;  $OA = \sqrt{-\frac{4}{K}}$ ;  $AC = r$

Vamos agora fazer a demonstração da Proposição 9

*Demonstração.* Observamos, inicialmente que, como  $\mathbb{M}^n$  tem curvatura constante seu recobrimento universal é isométrico a  $\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$  (Teorema 1).

**Parte 1.** A prova será subdividida em dois casos:

a.  $k_1 \neq 0$ .

Como  $\mathbb{M}^n$  tem curvatura constante, podemos expressar  $k_{g_1}$  dado em (2.23) da seguinte forma

$$k_{g_1} = \left[ \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right)^2 + \frac{K^2}{4} (|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2) \right]^{1/2}, \quad (2.33)$$

$\beta = \psi^{-1}(\alpha)$ . Logo,  $k_{g_1} = 0 \Leftrightarrow$

$$1. |\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e^2 = 0 \text{ e}$$

$$2. \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e = \frac{-2k_1}{GK}$$

A primeira condição significa que  $\beta = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \mathbf{v}_2$ , ou seja, o plano osculador (euclidiano) passa pela origem.

Observamos que o centro  $C$  do círculo osculador (euclidiano) a  $\beta$  é dado por  $C = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2$ . Logo,

$$|C|_e^2 = |\beta|_e^2 + \frac{2}{k_1} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e + \frac{1}{k_1^2}$$

Pela segunda condição temos que  $|C|_e^2 = |\beta|_e^2 - \frac{4}{KG} + \frac{1}{k_1^2}$  e, pela expressão da métrica dada em (1.7),  $|\beta|_e^2 - \frac{4}{KG} = -\frac{4}{K}$ . Logo, a segunda condição significa que o centro  $C$  do círculo osculador (euclidiano) satisfaz

$$|C|_e^2 = -\frac{4}{K} + \frac{1}{k_1^2},$$

e pelo Lema 1 significa que a imagem do círculo osculador é geodésica de  $\mathbb{M}^n$ . Como o círculo osculador tem contato de ordem maior ou igual a dois com a curva  $\beta$ , temos que a curva  $\alpha$  tem contato de ordem maior ou igual a dois com geodésica.

**b.**  $k_1 = 0$ .

Temos por (2.22) que

$$k_{g_1} = \frac{K}{2} [|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2]^{1/2}. \quad (2.34)$$

Logo,  $k_{g_1} = 0 \Leftrightarrow \beta = \xi \mathbf{v}_1$ , isto é, a reta tangente passa pela origem, o que significa pelo Lema 1 que a imagem da reta tangente é geodésica de  $\mathbb{M}^n$ . Como a reta tangente tem contato de ordem pelo menos dois com a curva quando  $k_1 = 0$ , o resultado segue.

**Parte 2.** A prova deste item será subdividida em 3 casos.

**a.**  $k_1 \neq 0$  e  $k_2 \neq 0$ .

Observamos inicialmente que como  $k_2 \neq 0$ , o terceiro vetor do referencial de Frenet da curva  $\beta$  está bem definido. Logo, de (2.33) temos

$$k_{g_1} = \left[ \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right)^2 + \frac{K^2}{4} (\langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e^2 + \langle \beta, \mathbf{V} \rangle_e) \right]^{1/2},$$

onde  $\mathbf{V} = 0$  se  $\mathbb{M}^n$  tem dimensão 3 e  $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{W}}{|\mathbf{W}|_e}$ ,  $\mathbf{W} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]^\perp$  se  $n > 3$ .

Substituindo  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds} = -k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_3$  e utilizando a expressão acima de  $k_{g_1}$  em (2.24) obtemos

$$\begin{aligned}
k_{g_2} &= \frac{1}{k_{g_1}G^2} \left\{ k_1^2k_2^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left[ \frac{K}{2}k_1k_2\langle\beta, \mathbf{v}_3\rangle_e \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2}\langle\beta, \mathbf{v}_2\rangle_e \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \\
&= \frac{1}{k_{g_1}^2G^2} \left\{ k_1^2k_2^2 \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2}\langle\beta, \mathbf{v}_2\rangle_e \right)^2 + k_1^2k_2^2\frac{K^2}{4}\langle\beta, \mathbf{V}\rangle_e^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 \frac{K^2}{4} (\langle\beta, \mathbf{v}_3\rangle_e^2 + \langle\beta, \mathbf{V}\rangle_e^2) \right. \\
&\quad \left. - Kk_1k_2\frac{dk_1}{ds_e}\langle\beta, \mathbf{v}_3\rangle_e \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2}\langle\beta, \mathbf{v}_2\rangle_e \right) \right\}^{1/2} \\
&= \frac{1}{k_{g_1}^2G^2} \left\{ \left[ k_1k_2 \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2}\langle\beta, \mathbf{v}_2\rangle_e \right) - \frac{K}{2}\frac{dk_1}{ds_e}\langle\beta, \mathbf{v}_3\rangle_e \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{K^2}{4}\langle\beta, \mathbf{V}\rangle_e^2 \left[ k_1^2k_2^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Logo,  $k_{g_2} = 0 \Leftrightarrow$

1.  $\langle\beta, \mathbf{V}\rangle_e^2 \left[ k_1^2k_2^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 \right] = 0$  e
2.  $k_1k_2 \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2}\langle\beta, \mathbf{v}_2\rangle_e \right) - \frac{K}{2}\frac{dk_1}{ds_e}\langle\beta, \mathbf{v}_3\rangle_e = 0$

Como  $k_2 \neq 0$ , a condição (1) significa que  $\langle\beta, \mathbf{V}\rangle_e = 0$ . Logo, o 3-plano  $H : \mathbf{X} = \beta + \xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2 + \xi_3\mathbf{v}_3$  passa pela origem.

Como  $k_2 \neq 0$ , a 2-esfera oscultriz está bem definida e está contida neste 3-plano. Seu centro  $C$  satisfaz

$$C = \beta + \frac{1}{k_1}\mathbf{v}_2 - \frac{dk_1}{ds_e} \frac{1}{k_1^2k_2}\mathbf{v}_3.$$

Logo, pela condição (2) e pelo fato que  $|\beta|_e^2 - \frac{4}{KG} = -\frac{4}{K}$ , temos

$$\begin{aligned}
|C|_e^2 &= |\beta|_e^2 + \frac{2}{k_1} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e - \frac{2}{k_1^2 k_2} \frac{dk_1}{ds_e} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e + \frac{1}{k_1^2} + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 \frac{1}{k_1^4 k_2^2} \\
&= |\beta|_e^2 - \frac{4}{KG} + \frac{1}{k_1^2} + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 \frac{1}{k_1^4 k_2^2} \\
&= -\frac{4}{K} + \frac{1}{k_1^2} + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 \frac{1}{k_1^4 k_2^2} \\
&= -\frac{4}{K} + r^2.
\end{aligned}$$

Como a 2-esfera oscultriz tem contato de ordem pelo menos 3 com a curva, o resultado segue do Lema 1

b.  $k_1 \neq 0$  e  $k_2 = 0$ .

Substituindo  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} = -k_1 \mathbf{v}_1$  e utilizando (2.33) em (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}
k_{g_2} &= \frac{1}{k_{g_1} G^2} \left\{ \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left[ \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \\
&= \frac{K}{2G^2 k_{g_1}^2} \left| \frac{dk_1}{ds_e} \right| (|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2).
\end{aligned}$$

Portanto,  $k_{g_2} = 0 \Leftrightarrow$

1.  $|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e^2 = 0$  ou
2.  $\frac{dk_1}{ds_e} = 0$

Como vimos antes, a primeira condição é equivalente ao plano osculador passar pela origem, isto é a imagem do plano osculador é subvariedade totalmente geodésica de  $\mathbb{M}^n$ . Além disto  $k_2 = 0$  significa que o plano osculador tem contato de ordem maior ou igual a 3 com a curva, pois expressando o plano osculador como intersecção dos  $n - 2$  hiperplanos  $H_i = \langle (x_1, \dots, x_n), \mathbf{u}_i \rangle_e - \langle \beta, \mathbf{u}_i \rangle_e$ , onde os vetores  $\mathbf{u}_i$  formam, juntamente com os vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^n$ , temos utilizando a Proposição 7, que cada hiperplano  $H_i$  tem contato de ordem maior ou igual a 3 com a curva.

Se ocorre somente a condição (2) temos, conforme será visto na seção 3.1 (página 37), que a curva tem contato de ordem maior ou igual a três com o círculo osculador. Além disto, o plano osculador não passa pela origem. Vamos mostrar

que neste caso é sempre possível construir uma 2-subvariedade  $S$  contendo este círculo tal que a imagem de  $S$  em  $\mathbb{M}^n$  é 2-subvariedade totalmente geodésica e, portanto, pela definição 2 tal subvariedade tem contato de ordem maior ou igual a 3 com a curva.

Seja  $H : \mathbf{X} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \mathbf{v}_2 + \xi_3 \beta$  o 3-plano passando pela origem e contendo o plano osculador. Uma esfera neste 3-plano contendo o círculo osculador tem seu centro na reta passando pelo centro do círculo osculador e paralela ao vetor normal do plano osculador. Portanto, tomamos o centro  $C$  nesta reta e o raio  $r$  desta esfera de modo que

$$|C|_e^2 = -\frac{4}{K} + r^2,$$

e pelo Lema 1 concluímos o resultado.

c.  $k_1 = 0$ .

Temos de (2.25) e de (2.34) que

$$\begin{aligned} k_{g_2} &= \frac{1}{k_{g_1} G^2} \left[ -\frac{K^2}{4} \frac{1}{k_{g_1}^2} \left\langle \beta, \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right\rangle_e^2 + \left| \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_e^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{K}{2k_{g_1}^2 G^2} \left[ -\left\langle \beta, \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right\rangle_e^2 + \left| \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_e^2 (|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\beta$  e  $\frac{d^3 \beta}{ds_e^3}$ . Logo, da expressão acima temos que

$$k_{g_2} = 0 \Leftrightarrow |\beta|_e^2 \left| \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_e^2 \cos^2 \theta = \left| \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_e^2 (|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2).$$

Se  $\frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \neq 0$ ,

$$k_{g_2} = 0 \Leftrightarrow |\beta|_e^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\beta|_e^2 \cos^2 \nu,$$

onde  $\nu = \angle(\beta, \mathbf{v}_1)$ . Portanto, neste caso,  $\cos^2 \theta + \cos^2 \nu = 1$  e isto significa que  $\beta = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \frac{d^3 \beta}{ds_e^3}$ . Observamos que  $\mathbf{v}_1$  e  $\frac{d^3 \beta}{ds_e^3}$  são ortogonais, pois  $\langle d\beta/ds_e, d\beta/ds_e \rangle_e = 1 \Rightarrow \langle d^2 \beta/ds_e, d\beta/ds_e \rangle_e = 0$ ; derivando novamente a equação anterior e usando o fato que  $k_1 = 0$ , obtemos  $\langle d^3 \beta/ds_e^3, d\beta/ds_e \rangle_e = 0$ .

Assim, neste caso o 2-plano  $X = \beta + \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \frac{d^3 \beta}{ds_e^3}$  passa pela origem, o que significa que sua imagem é subvariedade totalmente geodésica de  $\mathbb{M}^n$ . Além disto, como  $k_1 = 0$  temos, por um argumento semelhante ao feito no caso b, que

este plano tem contato de ordem maior ou igual a 3 com a curva  $\beta$  e concluímos o resultado quando  $\frac{d^3\beta}{ds_e^3} \neq 0$ .

Quando  $\frac{d^3\beta}{ds_e^3} = 0$ , o 2-plano  $X = \xi_1 v_1 + \xi_2 \beta$  é subvariedade totalmente geodésica de  $M^n$  e tem contato de ordem maior ou igual a 3 com  $\beta$  pelo mesmo argumento usado no caso b.  $\square$

## Capítulo 3

# Vértices de Curvas em Variedades de Curvatura Constante

Um vértice de uma curva plana é um ponto extremo de sua função curvatura. Esta mesma definição pode ser estendida às variedades riemannianas bidimensionais e em [9] foi mostrado que os vértices riemannianos correspondem sempre aos vértices euclidianos de sua pré-imagem conforme se, e somente se, a variedade tem curvatura constante.

Com o objetivo de estender este resultado para as variedades riemannianas  $n$ -dimensionais, assumimos uma definição de vértice (Definição 3) que generaliza a definição dada no caso bidimensional. Tal definição no caso euclidiano é equivalente à curva ter contato de ordem maior ou igual a três com seu círculo osculador.

Partindo de resultados obtidos no capítulo 2, obtemos na seção 3.2 um teorema dos quatro vértices para curvas esféricas em variedades de curvatura constante (Teorema 3). Mostramos ainda que tal teorema, mesmo no caso do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , não pode ser generalizado para curvas convexas.

### 3.1 Correspondência entre Vértices Riemannianos e Euclidianos

**Definição 3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^n$  uma curva regular  $C^4$  numa  $n$ -variedade riemanniana. Um vértice é um ponto onde  $k_{g_2} = \frac{dk_{g_1}}{ds} = 0$ .*

Observamos que, no caso euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , vértices são pontos em que a curva tem contato de ordem maior ou igual a três com o círculo osculador.

De fato, tomando uma parametrização pelo comprimento de arco  $t$  do círculo osculador à curva  $\beta$  em  $\beta(s_{e_0})$ , obtém-se

$$\gamma(t) = \beta(s_{e_0}) + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2 + \frac{1}{k_1} [\cos(k_1 t) \mathbf{v}_1 + \text{sen}(k_1 t) \mathbf{v}_2], \quad (3.1)$$

onde  $k_1 = k_1(s_{e_0})$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(s_{e_0})$  e  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(s_{e_0})$ .

Temos:

$$\left. \frac{d^3 \gamma}{dt^3} \right|_{t=\frac{3\pi}{2k_1}} = -k_1^2 \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_{s_e=s_{e_0}} = -k_1^2 \mathbf{v}_1 + \frac{dk_1}{ds_e} \mathbf{v}_2 + k_1 \mathbf{V},$$

onde  $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} + k_1 \mathbf{v}_1$ ,  $V = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0$  e  $V = k_2 \mathbf{v}_3$  se  $k_2 \neq 0$ . Assim, tem-se que

$$\left. \frac{d^3 \gamma}{dt^3} \right|_{t=\frac{3\pi}{2k_1}} = \left. \frac{d^3 \beta}{ds_e^3} \right|_{s_e=s_{e_0}} \iff k_2 = \frac{dk_1}{ds_e} = 0.$$

Outro fato importante é que, com esta definição, vértices euclidianos são preservados por transformações conformes de  $\mathbb{R}^n$  (pois transformações conformes levam círculos em círculos e preservam a ordem de contato) e são singularidades de curvas quando se trabalha com comprimento de arco conforme. Portanto, pontos de vértice são em geral excluídos para a obtenção de resultados na chamada geometria diferencial conforme [7], [1].

Utilizaremos os cálculos feitos na seção 2.1 para a obtenção do seguinte resultado.

**Lema 2.** *Sob uma parametrização conforme, vértices euclidianos de qualquer curva em  $\mathbb{R}^n$  correspondem aos vértices riemannianos da curva na variedade se, e somente se, as equações abaixo são satisfeitas:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right) \equiv 0, & i \neq j \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{1}{G} \right) \equiv 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Observamos que estaremos sempre supondo  $k_{g_1} \neq 0$  e  $k_1 \neq 0$ . Se as equações (3.2) são satisfeitas temos, de acordo com os resultados da seção 1.3, que  $\mathbb{M}^n$  tem curvatura constante. Portanto, podemos utilizar as expressões para  $k_{g_2}$  dadas na Proposição 5.

Por (2.30) e (2.21) temos que

$$\frac{dk_{g_1}}{ds} = \frac{1}{k_{g_1}G^2} \left[ \frac{K}{2}k_1 \langle \beta, \frac{d\mathbf{v}_2}{ds} \rangle_e + \frac{K}{2}k_1^2 \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e + \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) \right].$$

Utilizando a expressão acima em (2.24), obtemos

$$k_{g_2}^2 = \frac{1}{k_{g_1}^2 G^4} \left[ k_1^2 \left| \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right|^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - k_1^4 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left( \frac{dk_{g_1}}{ds} \right)^2 \right].$$

Como  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} = -k_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^\perp$ ,

$$k_{g_2}^2 = \frac{1}{k_{g_1}^2 G^4} \left[ k_1^2 |\mathbf{V}|_e^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left( \frac{dk_{g_1}}{ds} \right)^2 \right].$$

Logo,  $k_{g_2} = \frac{dk_{g_1}}{ds} = 0 \Leftrightarrow k_1 |\mathbf{V}|_e = \frac{dk_1}{ds_e} = 0 \Leftrightarrow k_2 = \frac{dk_1}{ds_e} = 0$  e os vértices se correspondem.

A recíproca não é direta. Vamos mostrar que se as equações (3.2) não forem satisfeitas, existirão curvas para as quais os vértices riemannianos não se correspondem aos vértices euclidianos.

Suponhamos inicialmente, que  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{G} \right) \neq 0$  para algum  $i \neq j$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left( \frac{1}{G} \right) \neq 0$  num ponto  $P$ .

Para qualquer vetor unitário  $\mathbf{v}_1 = (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  e qualquer número positivo  $r$ , existe um círculo de raio  $r$  através de  $P$ , tangente a  $\mathbf{v}_1$ . Vamos escolher um tal círculo de modo que  $k_{g_1} \neq 0$ . Consideraremos direções no plano  $x_1 x_2$ ,  $\mathbf{v}_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0)$ . Logo, o segundo vetor do referencial de Frenet do círculo tangente a  $\mathbf{v}_1$  é  $\mathbf{v}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, \dots, 0)$ .

Para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , temos de (2.10) que:

$$\begin{aligned} k_{g_1}^2 &= \frac{k_1^2}{G^2} - \frac{2k_1}{G} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{G} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{G} \right) \right]^2 + \left| \nabla \left( \frac{1}{G} \right) \right|^2 \\ &= \left[ \frac{k_1}{G} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{G} \right) \right]^2 + \sum_{i=3}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{G} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Podemos, então, variar o raio  $r$  ( $r = \frac{1}{k_1}$ ) dos círculos contidos no plano  $x_1x_2$ , com vetor tangente  $\mathbf{v}_1$  ( e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) de modo a obter  $\frac{k_1}{G} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{G} \right) \neq 0$  e, conseqüentemente,  $k_{g_1} \neq 0$ .

Desde que para círculos  $k_2 = \frac{dk_1}{ds_e} = 0$ , obtemos de (2.20) e de  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} = -k_1\mathbf{v}_1$ , que

$$A_k = \frac{k_1^2}{G^2} \cos \theta_k + \operatorname{sen} \theta_k \frac{d\theta_k}{ds} \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_1 \rangle_e.$$

Utilizando esta expressão em (2.19) temos que

$$\frac{D'^2 \mathbf{V}_1}{ds^2} = -k_{g_1}^2 \mathbf{V}_1 + \frac{1}{G} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right\} \mathbf{t}_k,$$

Portanto, de (2.11), temos

$$\begin{aligned} k_{g_2} &= \left| -\frac{1}{k_{g_1}^2} \frac{dk_{g_1}}{ds} \frac{D'\alpha'}{ds} + \frac{1}{k_{g_1}} \frac{D'^2 \alpha'}{ds^2} + k_{g_1} \mathbf{V}_1 \right| \\ &= \left| -\frac{1}{k_{g_1}^2} \frac{dk_{g_1}}{ds} \frac{D'\alpha'}{ds} + \frac{1}{Gk_{g_1}} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right\} \mathbf{t}_k \right|, \end{aligned}$$

e se  $\frac{dk_{g_1}}{ds} = 0$ ,

$$k_{g_2} = \frac{1}{Gk_{g_1}} \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_k} \left( \frac{1}{G} \right) \right]^2} \neq 0,$$

desde que  $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left( \frac{1}{G} \right) \neq 0$ . Logo, não há correspondência entre vértices euclidianos e riemannianos.

Suponhamos agora que  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1}{G} \right) \right) \neq 0$  num ponto  $P$ . Como no caso anterior vamos considerar círculos através de  $P$  no plano  $x_1x_2$  e tangentes a  $\mathbf{v}_1$  com  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Como antes, podemos tomar  $r = \frac{1}{k_1}$  de modo que  $k_{g_1} \neq 0$ .

Neste caso

$$\begin{aligned} \frac{D'^2 \alpha'}{ds^2} &= -k_{g_1}^2 \mathbf{V}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2G} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1^2} \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1}{G} \right) \right) \mathbf{t}_1 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2^2} \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{1}{G} \right) \right) \mathbf{t}_2 \\ &\quad \left. + \sum_{k=3}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k x_1} \left( \frac{1}{G} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_k x_2} \left( \frac{1}{G} \right) \right) \mathbf{t}_k \right], \end{aligned}$$

e portanto se  $\frac{dk_{g_1}}{ds} = 0$ ,

$$\begin{aligned} k_{g_2} &= \frac{\sqrt{2}}{2Gk_{g_1}} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1^2} \left( \frac{1}{G} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1}{G} \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=3}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k x_1} \left( \frac{1}{G} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_k x_2} \left( \frac{1}{G} \right) \right)^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

o que significa que  $k_{g_2} \neq 0$  devido à hipótese inicial.  $\square$

Como foi estabelecido na seção 1.3, uma variedade riemanniana  $\mathbb{M}^n$  tem curvatura constante se, e somente se, as equações (3.2) são satisfeitas. Logo, como consequência direta do Lema 2, temos o seguinte

**Teorema 2.** *Sob uma parametrização conforme de uma variedade  $\mathbb{M}^n$ , vértices de curvas  $C^4$  em  $\mathbb{M}^n$  correspondem aos vértices euclidianos de suas pré-imagens se, e somente se,  $\mathbb{M}^n$  tem curvatura constante.*

No capítulo 4 mostraremos que no caso tridimensional esta correspondência pode ser estabelecida de uma maneira mais forte.

**Observação.** Tomando curvas em  $\mathbb{R}^n$  com primeira curvatura euclidiana nunca nula, temos que a imagem dos vértices destas curvas numa variedade de curvatura constante (via parametrização conforme) são vértices em  $\mathbb{M}^n$  se  $k_{g_1} \neq 0$ , ou pontos em que  $k_{g_1} = 0$ . Neste último caso, a curva tem contato de ordem maior ou igual a dois com geodésica (Proposição 9). Reciprocamente, se  $\alpha \subset \mathbb{M}^n$  é curva com primeira curvatura nunca nula numa variedade de curvatura constante, a pré-imagem conforme dos vértices de  $\alpha$  são vértices da curva  $\beta$  se  $k_1 \neq 0$  ou pontos em que  $k_1 = 0$ .

Observamos também que no Teorema 2 não podemos tirar a hipótese de parametrização conforme como foi feito para o caso bidimensional em [9], visto que para  $n > 2$  não é verdade que toda  $n$ -variedade admite parametrização conforme.

### 3.2 Teorema dos Quatro Vértices

O teorema dos quatro vértices é o resultado clássico da teoria global de curvas que afirma que toda curva fechada plana simples tem pelo menos quatro pontos extremos para a sua curvatura (vértices). Este resultado foi inicialmente provado para curvas convexas por S. Mukhopadhaya [20] em 1909. Em 1912, A. Kneser [17] provou o teorema para curvas fechadas simples, não necessariamente convexas. Desde então, muitas extensões e resultados correlatos têm sido estabelecidos. Em [9], são feitas algumas extensões do teorema dos quatro vértices para curvas numa variedade riemanniana bidimensional de curvatura constante, através de um teorema análogo ao Teorema 2 para o caso bidimensional.

Em seu artigo [17] A. Kneser observou que os vértices de uma curva plana correspondem a pontos de torção nula de sua ante-projeção estereográfica. Portanto, curvas fechadas simples na esfera  $\mathbb{S}^2$  têm pelo menos quatro pontos de torção nula. Assim, na versão espacial, vértices também aparecem na literatura definidos como pontos de torção nula. Neste caso existem versões mais gerais do teorema dos quatro vértices para curvas fechadas simples convexas (isto é, curvas contidas no bordo de seu fecho convexo) ([10], [29]). Para curvas em  $\mathbb{R}^n$  esta caracterização de vértice corresponde aos chamados “flattening points” que são pontos em que a última curvatura da curva se anula, o que é equivalente a dizer que as derivadas da curva até ordem  $n$  são linearmente dependentes, ou seja, uma singularidade de ordem  $n$  no conceito introduzido por W. Pohl [25]. Em tais pontos a curva tem contato de ordem maior a  $n$  com o hiperplano osculador, isto é o hiperplano gerado por  $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}\}$ . Em um trabalho recente V. Arnold [2] mostra que “se uma curva em  $\mathbb{R}^{2k+1}$  é levada, por uma projeção  $\mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ , a uma curva convexa, então esta curva tem pelo menos  $2k+2$  flattening points”. Em [35] é obtido resultado envolvendo flattening points de uma curva no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{2k+1}$ .

Para estabelecermos uma versão riemanniana do teorema dos quatro vértices com a caracterização que trabalhamos aqui, partimos novamente do trabalho de A. Kneser e observamos que para toda curva na esfera, pontos de torção nula são também pontos críticos da curvatura, pois como será deduzido em (4.12),

$$\frac{dk_1}{ds_e} = k_2 k_1 k_g r,$$

onde  $k_g$  é a curvatura geodésica da curva em  $\mathbb{S}^2$ ,  $r$  é o raio da esfera e  $k_1$  e  $k_2$  são a curvatura e a torção, respectivamente, da curva (vista como curva em  $\mathbb{R}^3$ ). Assim, tem-se, pelo resultado de A. Kneser que *curvas esféricas fechadas simples têm pelo menos quatro vértices euclidianos no sentido da Definição 3.*

Estabelecemos aqui um resultado análogo para curvas em variedades de curvatura constante. Ao invés curvas fechadas em esferas, consideraremos curvas

$\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{M}^n$  numa 2-subvariedade totalmente umbílica de  $\mathbb{M}^n$ . De acordo com os resultados da seção 1.3, uma 2-subvariedade totalmente umbílica de  $\mathbb{S}^n$  é parte de uma 2-esfera (Proposição 3), e no caso de  $\mathbb{H}^n$ , tem-se, pela Proposição 4, que uma 2-subvariedade totalmente umbílica é uma 2-subvariedade totalmente geodésica, ou uma esfera geodésica, uma horoesfera, ou uma hipersuperfície equidistante (figura 1.1) em alguma 3-subvariedade totalmente geodésica de  $\mathbb{H}^n$ . Chamaremos de *curvas esféricas* às curvas contidas em 2-subvariedades totalmente umbílicas em variedades de curvatura constante.

Finalmente observamos que dada uma curva  $\beta \subset \mathbb{S}^2$ ,  $\beta$  tem curvatura (euclidiana) nunca nula, pois pela expressão que será dada em (4.8), temos que  $\langle \beta - C, \frac{d^2\beta}{ds_e^2} \rangle_e = -1$ , onde  $C$  é o centro da esfera.

**Teorema 3. (Teorema dos Quatro Vértices)** *Seja  $\mathbb{M}^n$  uma variedade  $n$ -dimensional completa de curvatura constante e  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{M}^n$  uma curva esférica fechada simples homotópica a zero com primeira curvatura nunca nula. Então  $\alpha$  tem pelo menos quatro vértices.*

*Demonstração.* Consideramos inicialmente  $n = 3$ . Como  $\alpha$  é uma curva esférica homotópica zero, ela pode ser levantada, via aplicação de recobrimento universal  $\pi : \tilde{\mathbb{M}}^3 \rightarrow \mathbb{M}^3$ , a uma curva esférica  $\tilde{\alpha}$  de  $\tilde{\mathbb{M}}^3$ . Como  $\mathbb{M}^3$  tem curvatura constante, temos, pelo Teorema 1, que seu recobrimento universal é isométrico a  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ . A pré-imagem conforme da 2-subvariedade totalmente umbílica de  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$  está contida numa esfera ou num plano. Isto implica, pela observação acima e pelo Teorema 2, que  $\tilde{\alpha}$  tem pelo menos quatro vértices. A isometria local entre  $\mathbb{M}^3$  e  $\tilde{\mathbb{M}}^3$  completa a prova para  $n = 3$ . A extensão para  $n > 3$  é feita considerando-se a identificação da 3-subvariedade totalmente geodésica do espaço de recobrimento que contém a 2-subvariedade totalmente umbílica com  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ .  $\square$

**Observação.** Se tirarmos a hipótese de primeira curvatura nunca nula no Teorema 3 ainda podemos garantir um teorema dos quatro “vértices” afirmando que a curva terá pelo menos quatro singularidades (entre vértices e pontos de primeira curvatura nula).

Uma questão natural é se este teorema pode ser estendido para outras superfícies, por exemplo superfícies convexas, como ocorre com o resultado que garante a existência de quatro pontos de torção nula. Na próxima subseção mostraremos que isto não ocorre, mesmo para curvas em  $\mathbb{R}^3$ , utilizando o Teorema 2 para exibir uma família de curvas convexas e sem vértices no nosso sentido.

### 3.2.1 Uma Família de Curvas Convexas e sem Vértices em $\mathbb{R}^3$

Consideremos inicialmente a família de curvas em  $\mathbb{S}^3$  dadas por

$$\alpha_\theta(t) = \cos \theta (\cos t, \sin t, 0, 0) + \sin \theta (0, 0, \cos(nt), \sin(nt)),$$

onde  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $n = \frac{p}{q}$  com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $t$  varia num intervalo de comprimento  $2q\pi$ .

Estas curvas estão nos toros de Clifford que são uma folheação da esfera  $\mathbb{S}^3$  [4] cap. 18. Para  $p$  e  $q$  primos entre si elas correspondem, via projeção estereográfica, a nós no toro em  $\mathbb{R}^3$  do tipo  $(q, p)$ . Além disto, para  $n \neq 1$ , estas curvas são hélices no  $\mathbb{R}^4$ , isto é, são curvas fechadas com as três curvaturas euclidianas constantes e não nulas [8]. Mostraremos que isto implica que tais curvas (vistas como curvas do  $\mathbb{S}^3$ ) têm as duas curvaturas (riemannianas) constantes e não nulas. Para isto necessitamos calcular as curvaturas riemannianas de  $\alpha_\theta$  com a métrica induzida do  $\mathbb{R}^4$ .  $k_1, k_2, k_3$  denotarão as curvaturas euclidianas de  $\alpha$  vista como curva no  $\mathbb{R}^4$ .

Observamos que, como estamos usando a métrica induzida do  $\mathbb{R}^4$ , utilizaremos  $s$  para denotar o comprimento de arco de  $\alpha$  vista como curva do  $\mathbb{R}^4$  ou de  $\mathbb{S}^3$ , o mesmo ocorrendo para o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Proposição 10.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^3$  curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então:*

1.  $k_{g_1} = \sqrt{k_1^2 - 1}$ ;
2.  $k_{g_2} = -\frac{1}{k_{g_1}^2} \det \left( \alpha, \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \frac{d^3\alpha}{ds^3} \right)$ .

*Demonstração.* Como estamos usando a métrica induzida do  $\mathbb{R}^4$ , temos

$$\frac{D'\alpha'}{ds} = \frac{d^2\alpha}{ds^2} - \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \mathbf{N} \right\rangle \mathbf{N}, \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{N}$  é o vetor normal de  $\mathbb{S}^3$ .

Escolhemos em  $\mathbb{S}^3$  a orientação do vetor normal para fora. Logo,  $\mathbf{N} = \alpha$ .

De  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ , temos que  $\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \alpha \right\rangle = 0$  e  $\left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \alpha \right\rangle = -1$ . Utilizando estes fatos em (3.3) obtemos

$$\frac{D'\alpha'}{ds} = \frac{d^2\alpha}{ds^2} + \alpha.$$

Como  $k_{g_1} = \left| \frac{D'\alpha'}{ds} \right|$  temos das fórmulas de Frenet que

$$k_{g_1} = \sqrt{k_1^2 - 1}.$$

De acordo com os resultados da seção 1.2,  $k_{g_2} = \langle \frac{D'\mathbf{V}_2}{ds}, \mathbf{V}_3 \rangle_e$ , onde  $\mathbf{V}_2 = \frac{1}{k_{g_1}} \frac{D'\alpha'}{ds}$  e  $\mathbf{V}_3$  é tal que  $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3\}$  é base ortonormal positiva de  $T_{\alpha(s)}\mathbb{S}^3$ .

$$\begin{aligned} \frac{D'\mathbf{V}_2}{ds} &= \frac{d\mathbf{V}_2}{ds} - \langle \frac{d\mathbf{V}_2}{ds}, \alpha \rangle \alpha \\ &= -\frac{1}{k_{g_1}^2} \frac{dk_{g_1}}{ds} \left( \frac{d^2\alpha}{ds^2} + \alpha \right) + \frac{1}{k_{g_1}} \left( \frac{d^3\alpha}{ds^3} + \frac{d\alpha}{ds} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde usamos o fato que  $\langle \frac{d^3\alpha}{ds^3}, \alpha \rangle = 0$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_3 &= -\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \alpha \\ &= -\frac{d\alpha}{ds} \times \frac{1}{k_{g_1}} \left( \frac{d^2\alpha}{ds^2} + \alpha \right) \times \alpha \\ &= -\frac{1}{k_{g_1}} \frac{d\alpha}{ds} \times \frac{d^2\alpha}{ds^2} \times \alpha \end{aligned} \quad (3.5)$$

Portanto, de (3.4) e de (3.5) obtemos

$$k_{g_2} = -\frac{1}{k_{g_1}^2} \det \left( \alpha, \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \frac{d^3\alpha}{ds^3} \right).$$

□

Da primeira parte da Proposição 10 segue diretamente que se a primeira curvatura euclidiana de  $\alpha_\theta$  é constante, então  $k_{g_1}$  também é constante. Resta mostrarmos que  $k_{g_1} \neq 0$ .

De fato,  $k_{g_1} \neq 0 \Leftrightarrow k_1 \neq 1$ . Mas isto significaria que  $\alpha_\theta$  é um grande círculo. Mas,

$$\alpha_\theta \text{ é grande círculo} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 0, \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ n = 1, \end{cases}$$

o que não ocorre devido às hipóteses iniciais.

Também temos que para  $\alpha = \alpha_\theta$ ,

$$\det \left( \alpha, \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \frac{d^3\alpha}{ds^3} \right) = \frac{1}{\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|^6} \frac{n}{4} (n^2 - 1)^2 \sin^2(2\theta),$$

e pela segunda parte da Proposição 10 significa que  $k_{g_2}$  é constante, visto que  $\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|$  é constante. Dos cálculos acima vê-se claramente que  $k_{g_2}$  é não nulo quando  $n \neq 1$  e  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Consideremos agora a projeção estereográfica  $\pi : \mathbb{S}^3 - \{(0, 0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  das curvas  $\alpha_\theta$ . Observamos que tais curvas não passam pelo pólo. Logo, as curvas

$$\beta_\theta(t) = \pi(\alpha_\theta(t)) = \left( \frac{\cos \theta \cos t}{1 - \sin \theta \sin(nt)}, \frac{\cos \theta \sin t}{1 - \sin \theta \sin(nt)}, \frac{\sin \theta \cos(nt)}{1 - \sin \theta \sin(nt)} \right)$$

são curvas simples e fechadas no toro em  $\mathbb{R}^3$  gerado pela rotação, em torno do eixo  $x_3$ , do círculo no plano  $x_2 = 0$  de centro  $(\sec \theta, 0, 0)$  e raio  $\tan \theta$ . Estas são curvas sem nó quando  $n \in \mathbb{Z}$ . Mostraremos que são convexas, isto é, contidas no bordo do fecho convexo, quando

$$|1 - n^2| |\sin \theta| < 1, \quad (3.6)$$

$n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 1$ .

De fato, tomando a projeção ortogonal  $\gamma_\theta$  de  $\beta_\theta$  no plano  $x_1x_2$  temos:

$$\det \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right) = \frac{\cos^2 \theta [-1 + \sin \theta \sin(nt)(1 - n^2)]}{(-1 + \sin \theta \sin(nt))^3}.$$

Portanto,  $\gamma_\theta$  tem curvatura nula se, e somente se

$$\sin(nt) = \frac{1}{(1 - n^2) \sin \theta}.$$

Logo,  $\gamma_\theta$  têm curvatura nunca nula quando (3.6) é satisfeito; neste caso as curvas  $\gamma_\theta$  são convexas, pois para  $n \in \mathbb{Z}$  não possuem auto-intersecção e a curvatura euclidiana é não nula.

Tomando o cilindro cuja base é uma curva  $\gamma_\theta$  satisfazendo a condição (3.6), tem-se que este cilindro contém a curva  $\beta_\theta$  correspondente e todo ponto  $x$  pertencente a  $\beta_\theta$  terá como plano suporte o plano tangente ao cilindro em  $x$  e, portanto, toda a curva ficará contida no semi-espço determinado pelo plano tangente. Logo, as curvas  $\beta_\theta$  satisfazendo (3.6) são curvas convexas no espaço (Figura 3.1).

Além disto, como as curvas  $\alpha_\theta$  não têm vértices ( $k_{g_2}$  é constante e não nula) e  $\beta_\theta$  são curvas com curvatura nunca nula, temos pelo Teorema 2 que  $\beta_\theta$  não possuem vértices.

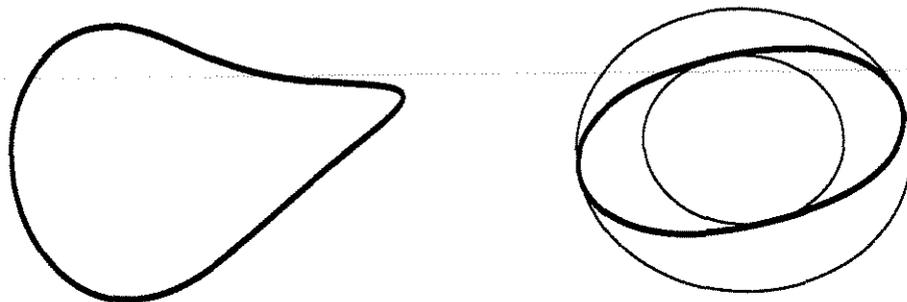


Figura 3.1: Curva convexa no toro em  $\mathbb{R}^3$  gerada no toro de Clifford ( $n = 2$ ,  $\text{sen } \theta = \frac{1}{4}$ ) e sua projeção no plano  $x_1x_2$ .

## Capítulo 4

# Curvas em Variedades Tridimensionais de Curvatura Constante

Neste capítulo obtemos alguns resultados especiais para curvas em variedades tridimensionais de curvatura constante. No caso euclidiano, vértices são pontos em que a curva tem contato de ordem maior ou igual a três com seu círculo osculador. Chamamos de *vértice ordinário* de uma curva em  $\mathbb{R}^n$  um ponto em que este contato é exatamente três. Em variedades tridimensionais estes vértices são caracterizados por uma condição que envolve derivadas de ordem maior das funções curvatura. Obtemos então o Teorema 4 que relaciona vértices ordinários de uma curva numa variedade tridimensional de curvatura constante com os vértices ordinários de sua pré-imagem conforme. Para isto estabelecemos expressões específicas para curvaturas em variedades tridimensionais.

Em [10] é mostrado que curvas convexas no espaço têm pelo menos quatro pontos de mudança de sinal da torção. Mostramos que tal resultado se estende para curvas esféricas numa 3-variedade de curvatura constante, resultando numa versão mais forte do do Teorema 3 para o caso tridimensional. Como consequência podemos garantir a correspondência destes pontos a eixos cuspidais da superfície evoluta da curva na ante-imagem conforme (Teorema 5).

Finalmente, na seção 4.2 obtemos uma generalização para curvas fechadas contidas em esferas geodésicas em variedades de curvatura constante, do resultado que afirma que a torção total de uma curva fechada na esfera em  $\mathbb{R}^3$  é zero (Teorema 7).

## 4.1 Vértices de Curvas em Variedades Tridimensionais

Dada uma curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  com primeira curvatura nunca nula, chamamos de *vértice ordinário* um ponto em que a ordem de contato da curva com o círculo osculador é exatamente três.

Quando  $\beta$  é uma curva no espaço  $\mathbb{R}^3$ , vértices ordinários são pontos que satisfazem:

$$k_2(s_{e_0}) = \left. \frac{dk_1}{ds_e} \right|_{s_e=s_{e_0}} = 0$$

e

$$\left. \frac{d^2k_1}{ds_e^2} \right|_{s_e=s_{e_0}} \neq 0 \text{ ou } \left. \frac{dk_2}{ds_e} \right|_{s_e=s_{e_0}} \neq 0.$$

De fato, tomando a parametrização  $\gamma$  pelo comprimento de arco  $t$  do círculo osculador dada em (3.1) obtém-se num ponto de vértice que

$$\left. \frac{d^4\gamma}{dt^4} \right|_{t=\frac{3\pi}{2k_1}} = -k_1^3 \mathbf{v}_2 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^4\beta}{ds_e^4} \right|_{s_e=s_{e_0}} = \left( \frac{d^2k_1}{ds_e^2} - k_1^3 \right) \mathbf{v}_2 + k_1 \frac{dk_2}{ds_e} \mathbf{v}_3,$$

e, portanto,  $\beta$  e  $\gamma$  têm contato de ordem exatamente três em  $\beta(s_{e_0})$  se, e somente se, a condição acima é satisfeita. Assim estabelecemos a seguinte definição.

**Definição 4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^3$  curva regular  $C^4$  numa 3-variedade de curvatura constante com primeira curvatura nunca nula. Um vértice ordinário é um vértice tal que*

$$\frac{d^2k_{g_1}}{ds^2} \neq 0 \text{ ou } \frac{dk_{g_2}}{ds} \neq 0.$$

Para 3-variedades de curvatura constante podemos estabelecer uma correspondência entre vértices ordinários.

**Teorema 4.** *Para uma curva regular  $C^4$  numa 3-variedade de curvatura constante vértices ordinários correspondem a vértices ordinários euclidianos de sua pré-imagem conforme.*

Antes de demonstrarmos o Teorema 4, obteremos expressões específicas para as curvaturas de uma curva numa 3-variedade de curvatura constante.

**Lema 3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^3$  curva regular  $C^4$  numa variedade tridimensional de curvatura constante com primeira curvatura  $k_{g_1}$  nunca nula. Então:*

$$k_{g_2} = \pm \frac{1}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ k_2 \left( \frac{k_1^2}{G} + \frac{K}{2} k_1 \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) - \frac{K}{2} \frac{dk_1}{ds_e} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e \right] \quad (4.1)$$

$$\frac{dk_{g_1}}{ds} = \frac{1}{G^2 k_{g_1}} \left[ \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) + \frac{K}{2} k_1 k_2 \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e \right]. \quad (4.2)$$

*Demonstração.* Como  $k_{g_1} \neq 0$ , temos de (2.24) que a segunda curvatura é dada por

$$k_{g_2} = \frac{1}{k_{g_1} G^2} \left\{ k_1^2 \left| \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \right|_e^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - k_1^4 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left[ \frac{K}{2} k_1 \langle \beta, \frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} \rangle_e + \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) + \frac{K}{2} k_1^2 \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

No caso tridimensional, o terceiro vetor  $\mathbf{v}_3$  do referencial de Frenet é obtido de tal modo que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  seja uma base ortonormal positiva. Logo,  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds_e} = -k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_3$  e substituindo na expressão acima, resulta em

$$k_{g_2} = \frac{1}{k_{g_1} G^2} \left\{ k_1^2 k_2^2 + \left( \frac{dk_1}{ds_e} \right)^2 - \frac{1}{k_{g_1}^2} \left[ \frac{K}{2} k_1 k_2 \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e + \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.3)$$

Neste caso podemos expressar a primeira curvatura  $k_{g_1}$  dada em (2.23) do seguinte modo

$$\begin{aligned} k_{g_1}^2 &= \frac{k_1^2}{G^2} + \frac{K k_1}{G} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e + \frac{K^2}{4} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e^2 \\ &= \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right)^2 + \frac{K^2}{4} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituindo a expressão (4.4) de  $k_{g_1}$  em (4.3), obtemos

$$k_{g_2} = \pm \frac{1}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ k_2 \left( \frac{k_1^2}{G} + \frac{K}{2} k_1 \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) - \frac{K}{2} \frac{dk_1}{ds_e} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e \right].$$

Para a expressão de  $\frac{dk_{g_1}}{ds}$  em (4.2) temos, substituindo  $\frac{d\mathbf{v}_2}{ds} = -k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_3$  em (2.30) que

$$\frac{dk_{g_1}}{ds} = \frac{1}{k_{g_1}G^2} \left[ \frac{dk_1}{ds_e} \left( \frac{k_1}{G} + \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) + k_1k_2 \langle \nabla \left( \frac{1}{G} \right), \mathbf{v}_3 \rangle_e \right].$$

Como  $M^3$  tem curvatura constante,  $\nabla \left( \frac{1}{G} \right) (s) = \frac{K}{2}\beta(s)$  por (2.21), e então obtemos (4.2).  $\square$

**Observação.** Como no caso euclidiano, a segunda curvatura de uma curva numa variedade tridimensional tem sinal. Este sinal é positivo se o vetor  $\mathbf{V}_3$ , obtido de modo a tornar a base  $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3\}$  ortonormal positiva, tem a mesma orientação do vetor obtido através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt aplicado aos vetores  $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ ; caso contrário, é negativo. Sem perda de generalidade, vamos tomar o sinal + em (4.1).

Vamos fazer agora a demonstração do Teorema 4.

*Demonstração.* Derivando (4.1) e (4.2) com respeito a  $s$  num ponto de vértice riemanniano (e, portanto euclidiano pelo Teorema 2) e lembrando que  $\frac{ds_e}{ds} = \frac{1}{G}$ , temos:

$$\frac{dk_{g_2}}{ds} = \frac{1}{k_{g_1}^2G^3} \left[ \frac{dk_2}{ds_e} \left( \frac{k_1^2}{G} + \frac{K}{2}k_1 \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2k_1}{ds_e^2} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e \right] \quad (4.5)$$

e

$$\frac{d^2k_{g_1}}{ds^2} = \frac{1}{k_{g_1}G^3} \left[ \frac{d^2k_1}{ds_e^2} \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) + \frac{K}{2} \frac{dk_2}{ds_e} k_1 \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e \right]. \quad (4.6)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left( k_{g_1} \frac{dk_{g_2}}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d^2k_{g_1}}{ds^2} \right)^2 &= \frac{1}{k_{g_1}^2G^6} \left[ \left( \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{K^2}{4} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e^2 \right] \left[ k_1^2 \left( \frac{dk_2}{ds_e} \right)^2 + \left( \frac{d^2k_1}{ds_e^2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

E, por (4.4),

$$\left(k_{g_1} \frac{dk_{g_2}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d^2 k_{g_1}}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{G^6} \left[ k_1^2 \left(\frac{dk_2}{ds_e}\right)^2 + \left(\frac{d^2 k_1}{ds_e^2}\right)^2 \right],$$

o que conclui a prova.  $\square$

**Observação.** No caso de uma curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , vértices ordinários correspondem a cúspides na curva formada pelos centros de curvatura de  $\beta$ .

De fato, dada a curva  $\gamma = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2$ , temos:

$$\frac{d\gamma}{ds_e} = -\frac{1}{k_1^2} \frac{dk_1}{ds_e} \mathbf{v}_2 + \frac{k_2}{k_1} \mathbf{v}_3,$$

o que significa que os vértices de  $\beta$  são pontos não regulares da curva  $\gamma$ .

Sejam:

$$\mathbf{U}_1 = \lim_{s_e \rightarrow s_{e_0}^-} \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds_e}\right|} \frac{d\gamma}{ds_e} \quad \text{e} \quad \mathbf{U}_2 = \lim_{s_e \rightarrow s_{e_0}^+} \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds_e}\right|} \frac{d\gamma}{ds_e}.$$

Escrevendo  $k'_1 = \frac{dk_1}{ds_e}$ , temos

$$\frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{ds_e}\right|} \frac{d\gamma}{ds_e} = \frac{-k'_1}{\sqrt{(k'_1)^2 + k_1^2 k_2^2}} \mathbf{v}_2 + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{(k'_1)^2 + k_1^2 k_2^2}} \mathbf{v}_3. \quad (4.7)$$

Suponhamos que  $k''_1 \neq 0$ . Logo,  $k'_1$  muda de sinal em  $s_{e_0}$ . Vamos supor que  $k'_1 < 0$  para  $s_e < s_{e_0}$  e  $k'_1 > 0$  para  $s_e > s_{e_0}$ . Dividindo a primeira parte de (4.7) por  $|k'_1|$  e aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{s_e \rightarrow s_{e_0}^-} \frac{-k'_1}{\sqrt{(k'_1)^2 + k_1^2 k_2^2}} \mathbf{v}_2 = \frac{|k''_1|_e}{\sqrt{(k''_1)^2 + k_1^2 (k'_2)^2}} \mathbf{v}_2(s_{e_0})$$

e

$$\lim_{s_e \rightarrow s_{e_0}^+} \frac{-k'_1}{\sqrt{(k'_1)^2 + k_1^2 k_2^2}} \mathbf{v}_2 = \frac{-|k''_1|_e}{\sqrt{(k''_1)^2 + k_1^2 (k'_2)^2}} \mathbf{v}_2(s_{e_0}).$$

Supondo que  $k_2$  não se anula numa vizinhança de  $s_{e_0}$ , temos, dividindo a segunda parte de (4.7) por  $k_2$  e aplicando a regra de L'Hospital, que

$$\lim_{s_e \rightarrow s_{e_0}^-} \frac{k_1 k_2}{\sqrt{(k'_1)^2 + k_1^2 k_2^2}} \mathbf{v}_3 = \frac{\pm |k''_2|_e k_1}{\sqrt{(k''_1)^2 + k_1^2 (k'_2)^2}} \mathbf{v}_3(s_{e_0}),$$

onde o sinal  $\pm$  depende do sinal de  $k_2$ . Observamos que podemos ter  $k'_2(s_{e_0}) = 0$ . Para o limite à direita, temos um cálculo semelhante, sendo que no caso  $k'_2 \neq 0$

o sinal é o oposto do sinal obtido no limite à esquerda. Portanto, em qualquer caso temos que  $\langle \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \rangle_e = -1$ , o que significa que a curva  $\gamma$  tem cúspide no ponto  $s_{e_0}$ .

Em [10] é mostrado que curvas fechadas convexas em  $\mathbb{R}^3$  têm pelo menos quatro pontos de mudança de sinal da torção ( $k_2$ ). Quando  $\alpha$  é uma curva numa variedade riemanniana tridimensional, a segunda curvatura tem sinal. Portanto, gostaríamos de saber se um resultado semelhante ocorre para uma curva fechada esférica numa 3-variedade de curvatura constante.

Da mesma forma como foi feito na demonstração do Teorema 3, dada uma curva esférica  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{M}^3$  numa variedade de curvatura constante, temos que  $\alpha$  pode ser levantada, via aplicação de recobrimento universal, a uma curva esférica em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ . Portanto sua pré-imagem conforme  $\beta = \psi^{-1}(\alpha)$  é uma curva numa esfera em  $\mathbb{R}^3$ . Se esta esfera tem centro  $C$  e raio  $r$ ,  $\langle \beta - C, \beta - C \rangle = r^2$ ; logo,

$$\langle \beta - C, \frac{d\beta}{ds_e} \rangle_e = 0 \quad \text{e} \quad \langle \beta - C, \frac{d^2\beta}{ds_e^2} \rangle_e = -1. \quad (4.8)$$

Observamos que, como  $\beta : I \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , estaremos utilizando  $s_e$  para o comprimento de arco de  $\beta$  vista tanto como uma curva esférica (com a métrica induzida do  $\mathbb{R}^3$ ) como também como uma curva do espaço  $\mathbb{R}^3$ , o mesmo ocorrendo para o produto interno  $\langle, \rangle_e$ .

De (4.8) e das equações de Frenet, segue que  $\beta - C = -\frac{1}{k_1}\mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3$  e  $|\beta - C|^2 = \frac{1}{k_1^2} + \lambda^2$ , o que significa que  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{k_1^2 r^2 - 1}}{k_1}$ . Veremos que a escolha do sinal acima depende do sinal da curvatura geodésica  $k_g$  de  $\beta$  vista como curva da esfera  $\mathbb{S}^2$ .

De fato, como  $\mathbb{S}^2$  é uma variedade riemanniana bidimensional, temos, de acordo com os resultados da seção 1.2, que  $k_g = \langle \frac{D'\beta'}{ds_e}, \mathbf{V}_2 \rangle_e$ , onde  $\beta' = \frac{d\beta}{ds_e}$  e  $\{\beta', \mathbf{V}_2\}$  é base ortonormal positiva de  $\mathbb{S}^2$ . De maneira análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 10, temos, escolhendo a orientação do vetor normal a  $\mathbb{S}^2$  para fora que,  $\mathbf{N} = \frac{\beta - C}{|\beta - C|} = \frac{\beta - C}{r}$  e

$$\frac{D'\beta'}{ds_e} = \frac{d^2\beta}{ds_e^2} - \langle \frac{d^2\beta}{ds_e^2}, \mathbf{N} \rangle_e \mathbf{N} = k_1 \mathbf{v}_2 + \frac{1}{r} \mathbf{N} \quad (4.9)$$

Além disto  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{N} \times \beta'$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
k_g &= \left\langle \frac{D'\beta'}{ds_e}, \mathbf{V}_2 \right\rangle_e = \left\langle k_1 \mathbf{v}_2 + \frac{1}{r} \mathbf{N}, \mathbf{N} \times \beta' \right\rangle_e \\
&= k_1 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{N} \times \beta' \rangle_e = -k_1 \langle \mathbf{N}, \mathbf{v}_2 \times \beta' \rangle_e \\
&= \frac{k_1}{r} \langle \beta - C, \mathbf{v}_3 \rangle_e,
\end{aligned}$$

$$e \lambda = \langle \beta - C, \mathbf{v}_3 \rangle_e = k_g \frac{r}{k_1}.$$

Portanto

$$k_g = \pm \frac{\sqrt{k_1^2 r^2 - 1}}{r}, \quad (4.10)$$

e

$$\beta - C = -\frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2 + k_g \frac{r}{k_1} \mathbf{v}_3. \quad (4.11)$$

Por outro lado, derivando a segunda equação em (4.8) e utilizando as equações de Frenet de  $\beta \subset \mathbb{R}^3$ , obtemos que  $\langle \beta - C, -k_1^2 \mathbf{v}_1 + \frac{dk_1}{ds_2} \mathbf{v}_2 + k_2 k_1 \mathbf{v}_3 \rangle_e = 0$ . Assim,  $k_2 \langle \beta - C, \mathbf{v}_3 \rangle_e = \frac{1}{k_1^2} \frac{dk_1}{ds_e}$  e, como  $\langle \beta - C, \mathbf{v}_3 \rangle_e = k_g \frac{r}{k_1}$ ,

$$\frac{dk_1}{ds_e} = k_2 k_g k_1 r. \quad (4.12)$$

Utilizaremos estes cálculos para o cálculo de  $k_{g_2}$ . Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.1), temos:

$$\begin{aligned}
k_{g_2} &= \frac{1}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ k_2 \left( \frac{k_1^2}{G} + \frac{K}{2} k_1 \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e \right) - \frac{K}{2} \frac{dk_1}{ds_e} \langle \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e \right] \\
&= \frac{k_2 k_1}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \left( \langle C, \mathbf{v}_2 \rangle_e - \frac{1}{k_1} - r k_g \langle C, \mathbf{v}_3 \rangle_e - \frac{r^2}{k_1} k_g^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

e de (4.10), obtemos

$$\begin{aligned}
k_{g_2} &= \frac{k_2 k_1}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ \frac{k_1}{G} + \frac{K}{2} \left( \langle C, \mathbf{v}_2 \rangle_e - r k_g \langle C, \mathbf{v}_3 \rangle_e - k_1 r^2 \right) \right] \\
&= \frac{k_2 k_1}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ \frac{k_1}{G} - \frac{K}{4} k_1 \left( -\frac{2}{k_1} \langle C, \mathbf{v}_2 \rangle_e + 2 k_g \frac{r}{k_1} \langle C, \mathbf{v}_3 \rangle_e + r^2 + |C|_e^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{K}{4} k_1 \left( |C|_e^2 - r^2 \right) \right] \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (4.10) e de (4.11), tem-se que

$$|\beta|_e^2 = |C|_e^2 + r^2 - \frac{2}{k_1} \langle C, \mathbf{v}_2 \rangle_e + 2k_g \frac{r}{k_1} \langle C, \mathbf{v}_3 \rangle_e.$$

Utilizando isto em (4.13), obtemos

$$k_{g_2} = \frac{k_2 k_1^2}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ \frac{1}{G} - \frac{K}{4} |\beta|_e^2 + \frac{K}{4} \left( |C|_e^2 - r^2 \right) \right].$$

Da Fórmula de Riemann dada em (1.7) temos que

$$\frac{1}{G} = 1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 + \frac{K}{4} |\beta|_e^2.$$

Logo,

$$k_{g_2} = \frac{k_2 k_1^2}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ 1 + \frac{K}{4} \left( |C|_e^2 - r^2 \right) \right], \quad (4.14)$$

o que significa que as mudanças de sinal de  $k_{g_2}$  correspondem às mudanças de sinal de  $k_2$ . Como para uma curva esférica  $k_2$  muda de sinal pelo menos quatro vezes [10], obtém-se que curvas esféricas em 3-variedades de curvatura constante têm pelo menos quatro pontos de mudança de sinal da segunda curvatura.

Finalmente veremos que, para curvas esféricas, mudanças de sinal de  $k_2$  correspondem a eixos cuspidais na superfície evoluta, isto é, a superfície dada pela envoltória de planos normais à curva.

Dada uma aplicação diferenciável  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos pensar  $F$  como uma família de funções de  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$  parametrizada por  $t$ . Supondo que para cada  $t \in \mathbb{R}$ , 0 seja valor regular de  $F_t(\mathbf{x}) = F(t, \mathbf{x})$ , tem-se que  $F_t^{-1}(0)$  é uma  $(r - 1)$ -variedade parametrizada numa vizinhança de cada ponto. A envoltória da família  $F$  é definida [6] pelo conjunto

$$\mathfrak{D} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ com } F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0 \}.$$

Quando  $r = 2$ , tem-se, tomando para  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $F(s_e, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - \beta(s_e), \beta'(s_e) \rangle_e$ , onde  $\beta$  é curva plana parametrizada pelo comprimento de arco e  $\beta' = \frac{d\beta}{ds_e}$ , que 0 é valor regular de  $F$ . Além disto, pelas equações de Frenet,  $\partial F / \partial t = \langle \mathbf{x} - \beta, \frac{d\mathbf{v}_1}{ds_e} \rangle_e - 1 = \langle \mathbf{x} - \beta, k_1 \mathbf{v}_2 \rangle_e - 1$ , de forma que o conjunto  $\mathfrak{D}$  é dado por  $\mathbf{x} = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2$ . Portanto, a evoluta de uma curva plana é dada pela envoltória das retas normais à curva.

Quando  $\beta$  é uma curva no espaço podemos considerar  $F$  como acima e obter uma família de planos normais à curva. Procedendo de modo análogo ao caso bidimensional, temos que neste caso o conjunto  $\mathfrak{D}$  é dado pela superfície  $x = (s_e, \lambda) = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2 + \lambda \mathbf{v}_3$  chamada *superfície evoluta*. Observamos que a superfície evoluta é uma superfície regrada gerada pelos centros de curvatura da curva  $\beta$ . As figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 ilustram algumas curvas e as respectivas superfícies evolutas.

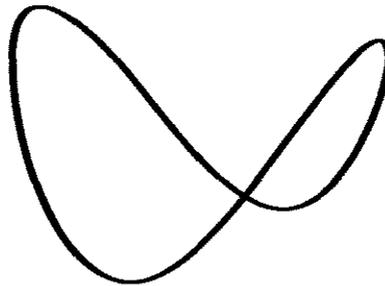


Figura 4.1: Curva  $\beta(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 4(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t))$  dada pela intersecção de um cilindro com uma sela

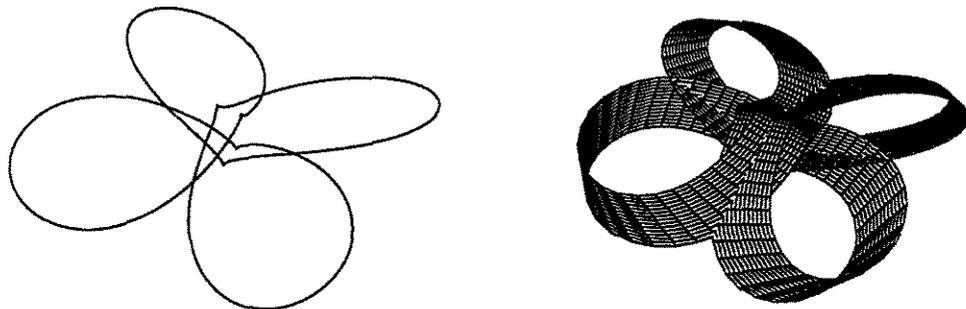


Figura 4.2: Centros de curvatura e superfície evoluta da curva  $\beta(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 4(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t))$

Analisando a estrutura local da envoltória de uma família  $F$ , tem-se que  $\mathfrak{D}$  é uma  $(r - 1)$ -variedade parametrizada numa vizinhança de um ponto para o qual  $\partial^2 F / \partial t^2 \neq 0$  [6]. Um ponto  $P = (t, x)$  em que  $\partial^2 F / \partial t^2 = 0$  é chamado *ponto*

de regressão. Os pontos de regressão são de grande interesse para a teoria de singularidades.

Tomando a família  $F(s_e, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - \beta(s_e), \beta'(s_e) \rangle_e$  quando  $\beta$  é uma curva plana, temos que  $\partial^2 F / \partial t^2 = \langle \mathbf{x} - \beta, k_1' \mathbf{v}_2 \rangle_e + \langle \mathbf{x} - \beta, k_1^2 \mathbf{v}_1 \rangle_e$ , de modo que os pontos para os quais  $F = \partial F / \partial t = \partial^2 F / \partial t^2 = 0$ , são os pontos da evoluta com  $k' = 0$ . Quando  $\beta$  é uma curva no espaço, tem-se que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = k_1' \langle \mathbf{x} - \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e - k_1^2 \langle \mathbf{x} - \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e + k_1 k_2 \langle \mathbf{x} - \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e.$$

Logo,  $F = \partial F / \partial t = \partial^2 F / \partial t^2 = 0$  é dado por  $\mathbf{x}(s_e, \lambda) = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2 + \lambda \mathbf{v}_3$ , com  $\frac{k_1'}{k_1} + k_2 k_1 \langle \mathbf{x} - \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e = 0$ .

$$\frac{k_1'}{k_1} + k_2 k_1 \langle \mathbf{x} - \beta, \mathbf{v}_3 \rangle_e = 0 \quad \text{quando:}$$

1.  $k_2 = k_1' = 0$ ;

2. se  $k_2 \neq 0$ ,  $\lambda = -\frac{k_1'}{k_1^2 k_2}$  e, neste caso,  $\mathbf{x} = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2 - \frac{k_1'}{k_1^2 k_2} \mathbf{v}_3$ .

Portanto, os pontos de regressão da superfície evoluta de uma curva  $\beta$  são os vértices de  $\beta$  juntamente com os centros das esferas osculatrizes. Veremos que quando  $\beta \subset \mathbb{S}^2$ , os pontos de mudança de sinal de  $k_2$  (que também são vértices) dão origem a eixos cuspidais na superfície evoluta  $\mathbf{x} = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2 + \lambda \mathbf{v}_3$ . Para isto vamos calcular o vetor normal da superfície evoluta de uma curva esférica. Temos:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_e} = \left( -\frac{k_1'}{k_1^2} - k_2 \lambda \right) \mathbf{v}_2 + \frac{k_2}{k_1} \mathbf{v}_3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} = \mathbf{v}_3,$$

e então  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_e} = \left( \frac{k_1'}{k_1^2} + k_2 \lambda \right) \mathbf{v}_1$ . Como  $\beta$  é curva na esfera substituímos (4.12) na expressão acima e obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_e} = k_2 \left( k_g \frac{r}{k_1} + \lambda \right) \mathbf{v}_1.$$

Observamos que o vetor normal se anula quando  $k_2 = 0$  ou quando  $\lambda = -k_g \frac{r}{k_1}$ . Olhando a parametrização da superfície evoluta obtemos neste último caso que  $\mathbf{x} = \beta + \frac{1}{k_1} \mathbf{v}_2 - k_g \frac{r}{k_1} \mathbf{v}_3$ . Isto significa, por (4.11), que  $\mathbf{x}$  é o centro da

esfera. Tomando  $\lambda > -k_g \frac{r}{k_1}$  num ponto de mudança de sinal de  $k_2$  ( $s_e = s_{e_0}$ ), e supondo que  $k_2 < 0$  para  $s_e < s_{e_0}$  e  $k_2 > 0$  para  $s_e > s_{e_0}$ , tem-se que

$$\lim_{s_e \rightarrow s_{e_0}^-} \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} \times \frac{\partial x}{\partial s_e}}{\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \times \frac{\partial x}{\partial s_e} \right|_e} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{s_e \rightarrow s_{e_0}^+} \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} \times \frac{\partial x}{\partial s_e}}{\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \times \frac{\partial x}{\partial s_e} \right|_e} = 1,$$

e, portanto temos eixo cuspidal. De modo análogo, também temos eixo cuspidal ao longo da superfície em  $s_e = s_{e_0}$  quando  $\lambda < -k_g \frac{r}{k_1}$ .

De onde se conclui o seguinte teorema.

**Teorema 5.** *Seja  $M^3$  uma 3-variedade de curvatura constante e  $\alpha : S^1 \rightarrow M^3$  uma curva regular  $C^4$  fechada esférica homotópica a zero com primeira curvatura nunca nula. Então  $\alpha$  tem pelo menos quatro pontos de mudança de sinal da segunda curvatura. Estes pontos correspondem a eixos cuspidais na superfície evoluta na ante-imagem conforme.*

**Observação.** Naturalmente no enunciado do Teorema 5 a superfície totalmente umbílica considerada não é uma superfície totalmente geodésica.

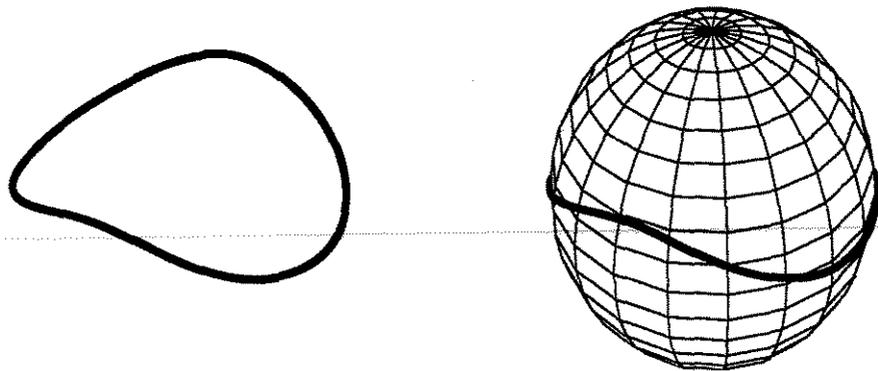


Figura 4.3: Curva ante-projeção estereográfica de uma ellipse  $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$

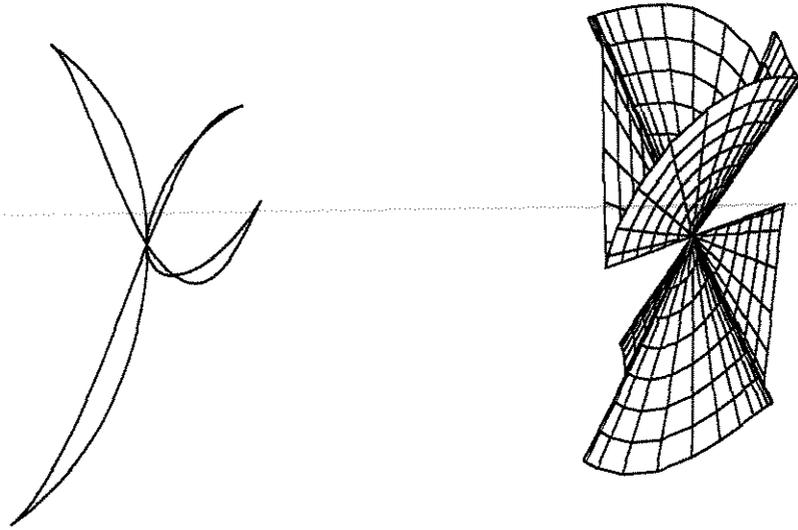


Figura 4.4: Centros de curvatura e superfície evoluta da curva dada pela ante-projeção estereográfica de uma elipse

## 4.2 Segunda Curvatura Total

Um resultado clássico da geometria diferencial é que a torção total de uma curva fechada na esfera é zero [19], isto é, dada uma curva fechada esférica  $\beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^1} k_2 ds_e = 0.$$

Existe também uma espécie de recíproca deste resultado: “se uma superfície é tal que a torção total de todas suas curvas fechadas é igual a zero, então esta superfície é parte de uma esfera ou plano”. [27], [14].

O principal resultado em [28] para curvas regulares pode ser enunciado da seguinte forma

**Teorema 6.** [28] *Sejam  $\beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva regular fechada esférica e  $f(k_1, k_2)$  uma função da curvatura e da torção. Se a relação*

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(k_1, k_2) ds_e = 0 \tag{4.15}$$

ocorre para toda curva fechada esférica, então  $f = \varphi(k_1)k_2$ , onde  $\varphi(k_1)$  é uma função arbitrária de  $k_1$ . Reciprocamente, se a função  $f(k_1, k_2)$  tem a forma  $f = \varphi(k_1)k_2$ , então (4.15) ocorre para toda curva regular fechada esférica.

Através deste resultado, obteremos nesta seção uma generalização do teorema da torção total para curvas em esferas geodésicas contidas em 3-variedades de curvatura constante.

Conforme visto na seção 1.3, as esferas geodésicas de  $\mathbb{D}^3$  são esferas ordinárias completamente contidas em  $\mathbb{D}^3$ ; tais esferas são isométricas (em  $\mathbb{D}^3$ ) às esferas com centro euclidiano na origem.

No caso de  $\mathbb{S}^3$  qualquer esfera  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^3 \cap H$ , onde  $H$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^4$ , é esfera geodésica. Quando o hiperplano  $H$  é horizontal (paralelo ao hiperplano  $x_1x_2x_3$ ), tal esfera é levada, pela projeção estereográfica, numa esfera centrada na origem em  $\mathbb{R}^3$ . Como toda esfera em  $\mathbb{S}^3$  é isométrica a uma esfera obtida pela intersecção com um hiperplano horizontal, segue que as esferas geodésicas de  $\mathbb{S}^3$  são imagens de esferas centradas na origem em  $\mathbb{R}^3$ .

Portanto, dada uma curva  $\alpha$  numa esfera geodésica em  $\mathbb{D}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ , sempre podemos aplicar uma isometria (em  $\mathbb{D}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ ) de forma que sua pré-imagem conforme seja uma curva numa esfera centrada na origem em  $\mathbb{R}^3$ .

Em (4.14), é obtida uma expressão para a segunda curvatura geodésica de uma curva quando sua pré-imagem é uma curva numa esfera em  $\mathbb{R}^3$  de centro  $C$  e raio  $r$ . Tomando o centro  $C$  igual à origem, obtemos

$$k_{g_2} = \frac{k_2 k_1^2}{G^2 k_{g_1}^2} \left[ 1 - \frac{K}{4} r^2 \right]. \quad (4.16)$$

Neste caso também temos de (1.7) que a métrica é dada por

$$\frac{1}{G} = 1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 + \frac{K}{4} r^2. \quad (4.17)$$

Logo, neste caso,  $G$  é constante nos pontos da curva.

Veremos agora o que ocorre com  $k_{g_1}$  quando  $\beta$  é uma curva numa esfera centrada na origem. De (2.23), temos que numa variedade de curvatura constante  $k_{g_1}$  é dado por:

$$k_{g_1} = \left[ \frac{k_1^2}{G^2} + \frac{K k_1}{G} \langle \beta, \mathbf{v}_2 \rangle_e + \frac{K^2}{4} (|\beta|_e^2 - \langle \beta, \mathbf{v}_1 \rangle_e^2) \right]^{1/2}.$$

Utilizando (4.11) com  $C = (0, 0, 0)$  na expressão acima, obtém-se

$$k_{g_1} = \left[ \frac{k_1^2}{G^2} - \frac{K}{G} + r^2 \frac{K^2}{4} \right]^{1/2}. \quad (4.18)$$

Como  $|\beta|_e = r^2$  temos da Fórmula de Riemann (1.7) que

$$\frac{1}{G} = 1 + \frac{K}{4}r^2.$$

Utilizando a equação acima em (4.18), obtemos

$$k_{g_1} = \left[ \frac{k_1^2}{G^2} - K \right]^{1/2}. \quad (4.19)$$

Logo, de (4.16) e de (4.19) temos que

$$k_{g_2} = \frac{k_2 k_1^2}{k_1^2 - KG^2} \left[ 1 - \frac{K}{4}r^2 \right],$$

e do fato de  $G$  ser constante nos pontos de  $\beta$ , segue que

$$k_{g_2} = \varphi(k_1)k_2, \quad (4.20)$$

onde  $\varphi(k_1)$  é uma função da curvatura.

Estes cálculos juntamente com o Teorema 6, resultam em

**Teorema 7.** *Seja  $\mathbb{M}^3$  uma variedade tridimensional de curvatura constante. Então dada uma curva regular fechada  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{M}^3$  de classe  $C^4$  contida numa esfera geodésica em  $\mathbb{M}^3$  com primeira curvatura nunca nula temos que*

$$\int_{\mathbb{S}^1} k_{g_2} ds = 0.$$

*Demonstração.* A demonstração está quase completa. Como  $\mathbb{M}^3$  tem curvatura constante, seu recobrimento universal,  $\tilde{\mathbb{M}}^3$ , é isométrico a  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$  (Teorema 1). Seja  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{M}^3$  uma curva fechada contida numa esfera geodésica. Consideramos a isometria local, restrição da aplicação de recobrimento, dada pela aplicação exponencial, onde o espaço tangente está munido da métrica de curvatura constante. Então  $\alpha$  pode ser levantada globalmente para o espaço de recobrimento  $\tilde{\mathbb{M}}^3$ . Além disto, considerando a parametrização conforme e a métrica (1.7) como vimos anteriormente, obtemos que a pré-imagem  $\beta$  está contida numa esfera centrada na origem em  $\mathbb{R}^3$ . Logo, por (4.20)  $k_{g_2} = \varphi(k_1)k_2$  e  $\int k_{g_2} ds = \int k_{g_2} G ds_e$ , pois  $ds/ds_e = G$  e pelo Teorema 6, esta integral é zero.  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Montesinos Amilibia, M. C. Romero Fuster, and E. Sanabria Codesal, *Conformal curvatures of curves in  $\mathbb{R}^{n+1}$* , preprint.
- [2] V. Arnold, *On the number of flattening points on space curves*, Amer. Math. Soc. Transl. **171** (1996), no. 2, 11–22.
- [3] M. Barner, *Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegeebenen bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1956), 196–215.
- [4] M. Berger, *Geometry*, vol. 1-2, Springer, New York, 1996.
- [5] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Generic isotopies of space curves*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 41–63.
- [6] ———, *Curves and singularities*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [7] G. Cairns, R. Sharpe, and L. Webb, *Conformal invariants for curves and surfaces in three dimensional space forms*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **24** (1994), no. 3, 933–959.
- [8] S. I. R. Costa, *On closed twisted curves*, Proc. Amer. Math. Soc (1990), 205–214.
- [9] S. I. R. Costa and M. Firer, *Four-or-more-vertex theorems for constant curvature manifolds*, Research in Mathematics Series, Ed. J. Bruce and F. Tari, Champman & Hall/CRC **412** (2000), 164–172.
- [10] S. I. R. Costa and M. C. Romero-Fuster, *Nowhere vanishing torsion closed curves always hide twice*, Geom. Dedicata **66** (1997), 1–17.
- [11] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*, 2nd ed., Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.

- [12] M. H. Freedman, Z-X He, and Z. Wang, *Möbius energy of knots and unknots*, Ann. of Math **139** (1994), 1–50.
- [13] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster, and M. A. S. Ruas, *Inflection points and topology of surfaces in 4-space*, Transactions of the American Mathematical Society **352** (2000), 3029–3043.
- [14] H. Geppert, *Sopra una caratterizzazione della sfera*, Annali di Matematica **4** (1941), 59–66.
- [15] H. Gluck, *The converse of the four-vertex theorem*, L'Enseignement Math. **17** (1971), 295–309.
- [16] S. B. Jackson, *Vertices of plane curves*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 564–578.
- [17] A. Kneser, *Bemerkungen über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie*, Festschrift Heinrich Weber, Teubner (1912), 170–180.
- [18] J. A. Little, *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean space*, Ann. Mat. Pura Appl. **83** (1969), 261–335.
- [19] R. S. Millman and G. D. Parker, *Elements of differential geometry*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [20] S. Mukhopadhyaya, *New methods in the geometry of a plane arc*, Bull. Calcutta Math. Soc. **1** (1909), 31–37.
- [21] J. O'Hara, *Energy of knots*, Preprint.
- [22] ———, *Energy of a knot*, Topology **30** (1991), 241–247.
- [23] ———, *Energy of knots in a 3-manifold; the spherical and the hyperbolic cases*, Proceedings of Knots'96, S. Suzuki ed., World Scientific (1997), 449–464.
- [24] R. Osserman, *The four-or-more vertex theorem*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 331–337.
- [25] W. F. Pohl, *Differential geometry of higher order*, Topology **1** (1962), 170–211.

- [26] M. C. Romero-Fuster and E. Sanabria-Codesal, *Generalized evolutes, vertices and conformal invariants of curves in  $\mathbb{R}^{n+1}$* , *Indag. Mathem., N. S.* **10** (1999), no. 2, 297–305.
- [27] L. A. Santaló, *Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de la esfera*, *Revista Mat. Hispano-Americana* **10**, 1–4.
- [28] ———, *Sobre unas propiedades características de la esfera*, *Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A.* **14** (1962), 287–297.
- [29] V. D. Sedykh, *Four vertices of a convex space curve*, *Bull. London Math. Soc.* **26** (1994), 177–180.
- [30] ———, *Connection of Lagrangian singularities with Legendrian singularities under stereographic projection*, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* **83** (1995), no. 2, 533–540.
- [31] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 1-5, Publish or Perish, Inc., Houston, 1979.
- [32] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1961.
- [33] G. Thorbergson, *Vierscheitelsatz auf Flächen nichtpositiver Krümmung*, *Math. Z.* **149** (1976), 47–56.
- [34] R. Uribe-Vargas, *On the higher dimensional four-vertex theorem*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **321** (1995), 1353–1358.
- [35] ———, *On the  $(2k + 2)$ -vertex and  $(2k + 2)$ -flattening theorems in higher dimensional Lobatchevskian space*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **325** (1997), 505–510.
- [36] J. A. Wolf, *Space of constant curvature*, Publish or Perish, Inc., 1974.

# Índice Remissivo

- aplicação exponencial, 9
- bola geodésica, 10
- centro de curvatura, 51
- comprimento de arco, 5
- conexão riemanniana, 4
- contato
  - entre curva e hipersuperfície de  $\mathbb{R}^n$ , 26
  - entre curva e subvariedade, 28
  - entre curva e subvariedade totalmente geodésica, 28
  - entre curvas em  $\mathbb{R}^n$ , 26
  - riemanniano, 26
- curva, 5
  - convexa, 41, 45
  - coordenada, 15
  - esférica, 42
  - regular, 5
    - fechada, 5
    - simples fechada, 5
- derivada covariante, 5
- envoltória de uma família de funções, 54
- esfera geodésica, 10
  - de  $\mathbb{D}^n$ , 10
  - de  $\mathbb{S}^n$ , 10
- espaço hiperbólico  $n$ -dimensional, 9
  - modelo de Poincaré, 9
- fórmula de Liouville, 17
- fórmula de Riemann, 11
- flattening points, 41
- geodésica, 5
- hipersuperfície equidistante, 10
- horoesfera, 10
- métrica de curvatura constante, 11
- parametrização conforme, 10
- ponto de regressão, 56
  - da superfície evoluta, 56
- primeira curvatura riemanniana, 6
- projeção estereográfica, 11, 29
- recobrimento universal, 8
- referencial de Frenet, 6
- símbolos de Christoffel, 5
- segunda curvatura riemanniana, 7
- subvariedade totalmente geodésica, 5
  - caracterização em  $\mathbb{H}^n$  e  $\mathbb{S}^n$ , 28
  - de  $\mathbb{H}^n$ , 9
  - de  $\mathbb{S}^n$ , 9
- subvariedade totalmente umbflica, 10
  - de  $\mathbb{H}^n$ , 10
  - de  $\mathbb{S}^n$ , 10
- superfície evoluta, 54, 55
- teorema dos quatro vértices, 42
- torção total, 59
- toro de Clifford, 43
- vértice, 36
  - correspondência entre euclidianos e riemannianos, 40

ordinário, 48  
correspondência entre euclidi-  
anos e riemannianos, 48