UNICAMP - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Tese de Doutorado

HOMOTOPIA DE SEMIGRUPOS

Alexandre José Santana

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Campinas, outubro de 2000

HOMOTOPIA DE SEMIGRUPOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Alexandre José Santana e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 outubro de 2000.

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

Banca Examinadora:
1 Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (orient.)
2 Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros
3 Prof. Dr. Alcibiades Rigas
4 Prof. Dr. Frank Michael Forger
5 Prof. Dr. Janey Antonio Daccach

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação – Científica, UNICAMP,** como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Santana, Alexandre José

Sa59h Homotopia de semigrupos / Alexandre José Santana -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Grupos de. 2. Semigrupos. 3. Fibras. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 27 de outubro de 2000 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

Prof (a). Dr (a). ALCIBÍADES RIGAS

Prof (a). Dr (a). FRANK MICHAEL FORGER

Prof (a). Dr (a). JANEY ANTONIO DACCACH

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a realização deste trabalho.

Especialmente:

- Ao Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin pelo competente trabalho de orientação, amizade, paciência e dedicação.
- Aos membros da banca examinadora pelas sugestões para versão definitiva.
- Aos meus pais e irmãos pelo vital empurrão inicial, em especial ao meu pai e minha mãe, pela árdua luta em prol da educação de seus filhos.
- À minha esposa e companheira Ana Rute pela dedicação e força.
- Aos amigos Rodrigo e Daniel pela amizade e acolhida na república.
- Aos amigos Claudião e Ryuichi pelo companherismo.
- Ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá pela sua política de capacitação, que propiciou a realização deste trabalho.
- Ao Programa PICDT-CAPES da Universidade Estadual de Maringá pelo suporte financeiro no período do curso de doutorado.
- À Universidade Estadual de Campinas, através do IMECC- Departamento de Matemática, que me propiciou condições e conhecimentos Matemáticos para a realização deste trabalho.

Índice

Abstract

Let G be a noncompact semi-simple Lie group. Making use of Iwasawa decomposition of G, $G = KAN$, we can reduce the topology of G to the compact part of this decomposition, K. But if consider $S \subset G$ a Lie semigroup with nonempty interior, we do not have a similar decomposition. So in order to study the homotopy groups $\pi_n(S), n \geq 1$, of S, that is, to generalize this well known fact, we apply an important concept of the control theory for semigroups, the invariant control set for S. We prove that the homotopy type of S is a compact subgroup of K. From this result we get interesting consequences about the topology of semigroups and their orbits.

The main subject of the present thesis can be described as follows.

(1) Describe homotopy type of the above semigroup. Unlike to Lie groups, it is not available good decompositions, providing a natural compact space which is a deformation retract of S. Instead we get the topology of S from its action in compact homogeneous spaces of G, making use of invariant control sets. In order to study this, some preliminary results were derived, concerning, for instance, reversibility of semigroups, contractibility of invariant control sets and other orbits, the parabolic type of a semigroup, free group of G on S,and so on.

(2)Study this theory in some important semigroups, as semigroup of positive matrices, semigroup of totally positive matrices, Ol'shanskiĭ semigroups and semigroups of rank one groups.

In the main part of this work, we consider G a semi-simple Lie group and S a semigroup of G with nonempty interior and admiting a exp-generated semigroup.

Resumo

Seja G um grupo de Lie semi-simples não campacto, sabemos que através da decomposição de Iwasawa de G, $G = KAN$, a topologia de G é reduzida à K, em particular os grupos de homotopia de G e de K são isomorfos. Já no caso de semigrupos, não existem boas decomposições que forneçam um espaço compacto o qual é um retrato de deformação de S. Ao invés disso, usamos a ação de S no espaço homogêneo G/AN. Num dos principais resultados, mostramos que os grupos de homotopia de S são isomorfos aos grupos de homotopia do conjunto de controle invariante para S em G/AN. Para se ter uma idéia do que foi feito, consideremos $P(S)$ o subgrupo parabólico de G tal que S é do tipo $P(S)$. Temos que os conjuntos de controle invariantes para S na variedade flag maximal G/MAN é dado por $\pi^{-1}(C_{P(S)})$, onde π é a projeção canônica sobre $G/P(S)$, e $C_{P(S)}$ é o conjunto de controle invariante em $G/P(S)$. No caso especial onde S é gerado por semigrupos a um parâmetro, $C_{P(S)}$ é contrátil. Assim, tomando a imagem inversa novamente, $\pi^{-1}(C_{P(S)})$, pela fibração canônica $G/AN \to G/MAN$, segue que qualquer conjunto de controle invariante $C \subset G/AN$ contrai para a componente conexa de $P(S)/AN$. Essa componente conexa é difeomorfa ao subgrupo compacto $K(S)$ de K.

A partir desse resultado, surgem consequências interessantes como o estudo do tipo de homotopia de conjuntos de controle invariantes em G/P_i, onde os subgrupos parabólicos $P_i \supset MAN$ não são o tipo de S, e ainda mais, estabelecemos o retrato de deformação do CW-complexo int$S$ e do semigrupo S, os grupos de homotopia relativos, o tipo homotópico do semigrupo inverso, o tipo homotópico de algumas órbitas pelo semigrupo, mostramos que semigrupos de mesmo tipo tem os mesmos grupos de homotopia e calculamos o tipo de homotopia de alguns semigrupos importantes, como o semigrupo das matrizes positivas, das matrizes de posto um, semigrupos de Ol'shanskiĭ e o semigrupo do grupo de posto um.

Dois outros desdobramentos interessantes tratam do grupo livre de G em S, onde conseguimos obter uma melhor descrição desse grupo livre, e do estudo da propriedade do levantamento de caminhos, usando a fibração de Serre, para o caso de semigrupos. Propriedade essa fundamental no caso de grupos, no entanto, sua aplicação em semigrupos encontra dificuldades.

Introdução

Um fato básico no estudo dos grupos de Lie semi-simples não compactos é a possibilidade de decompô-los como produto cartesiano de duas componentes, uma das quais é um subgrupo compacto e outra é um espaço euclidiano. Isso acarreta, entre outras coisas, que a topologia de um grupo semi-simples está toda concentrada num subgrupo compacto. Para ser mais exato, um grupo de Lie G semi-simples, não compacto admite uma decomposição de Iwasawa $G = KAN$, que torna G difeomorfo a $K \times A \times N$. O subgrupo solúvel AN é difeomorfo a um espaço euclidiano e, caso o centro de G seja finito, K é um subgrupo compacto. Assim, G e K têm o mesmo tipo de homotopia, o que reduz a topologia de G à topologia de K

No caso de um semigrupo S essa importante ferramenta não existe, ou seja, em geral não existem boas decomposições para semigrupos, que forneçam uma parte contrátil e uma compacta, de tal forma que a parte compacta seja retrato de deformação de S. Um dos principais resultados desse trabalho (veja seção 7) é conseguir uma redução semelhante da topologia de semigrupos com interior não vazio para um subgrupo compacto, onde o grupo G tem centro finito.

A técnica que utilizamos para descrever a topologia de S como a topologia de um grupo compacto, consiste em estudar a suas ações em espaços homogêneos compactos de G. Desses ações emergem os conjuntos de controle invariantes, que foram a principal ferramenta usada para compensar, no estudo do tipo de homotopia do semigrupo, a falta de decomposições satisfatórias do semigrupo.

Os conjuntos de controle foram inicialmente estudados por Colonius e Kliemann, do ponto de vista de sistema de controle, onde o estudo do comportamento assintótico das trajetórias de controle são dados através da ação do semigrupo de controle. Um dos principais conceitos utilizados no entendimento dos aspectos dinâmicos dos sistemas de controle são os conjuntos de controle, e nessa direção um conjunto de controle é um subconjunto onde o semigrupo de controle age transitivamente. Dentre os conjuntos de controle se destacam os conjunto de controle invariante, que são invariantes pela ação do semigrupo de controle (ver [7]).

Quando se trabalha com semigrupos a um-parâmetro em tempo positivo gerado por uma família de campos de vetores sobre uma variedade diferenciável M, sempre podemos restringir nossa análise ao grupo a um parâmetro gerado pela mesma família de campo de vetores. Como o interior do semigrupo a um-parâmetro é não vazio no grupo a um-parâmetro, é natural assumir o seu interior não nulo. Uma outra questão, é que trabalhamos com os conjuntos de controle invariantes para S, cuja teoria é construida em cima do fato do interior do semigrupo ser não nulo, e mais, usamos o fato de que o interior do semigrupo é um CW-complexo.

Os conjuntos de controle invariantes e muitas outras questões relacionadas ao sistema de controle foram abstraídas por San Martin para um contexto mais geral onde se consideram ações arbitrárias de subsemigrupos (de interior não vazio) de grupos de Lie semi-simples em espaços homogêneos. Quando esses conjuntos de controle são estudados muitas questões sobre esses semigrupos são respondidas como também são obtidas propriedades geométricas dos mesmos (ver [28], [29] e [33]). Em particular, obtemos neste trabalho uma descrição da homotopia do semigrupo bem como outras de suas propriedades topológicas através dos conjuntos de controle invariantes.

A noção de conjunto de controle foi usada precisamente da seguinte forma. Seja AN a componente solúvel da decomposição de Iwasawa de G e considere o espaço homogêneo G/AN, o qual é difeomorfo à componente compacta K da decomposição de Iwasawa. O semigrupo S age em G/AN pela restrição da ação de G. Essa ação de S não é transitiva pois se $S \neq G$ existem subconjuntos compactos próprios de G/AN invariantes por S, os conjuntos de controle invariantes. Seja C um conjunto de controle invariante para S em G/AN. Num dos principais resultados da tese provamos que os grupos de homotopia de S são isomorfos aos grupos de homotopia de C, que é essencialmente uma órbita de S. Provamos também que, por sua vez, os grupos de homotopia de C são isomorfos aos de um subgrupo compacto $K(S) \subset K$. Consequentemente, estabelecemos o isomorfismo entre os grupos de homotopia de S e os de $K(S)$. Esses resultados são reforçados com a demonstração de que $K(S)$ é um retrato de deformação tanto de $\mathrm{int}S$ quanto de S.

Uma técnica forte no estudo de topologia de grupos e espaços homogêneos é a sequência de uma fibração (sequência exata de grupos de homotopia). Mas no caso de semigrupos o uso dessa técnica encontra dificuldades, como verificamos na seção 12. Na demonstração do isomorfismo entre os grupos de homotopia de S e o conjunto de controle invariante, foi usada a aplicação avaliação $e : S \to Sx$, onde Sx é um subconjunto de transitividade do conjunto controlável invariante $C \subset G/AN$. A dificuldade técnica na demonstração dos resultados está no fato de que a aplicação avaliação em questão nem sempre é uma fibração (como ilustramos na seção 12).

No estudo da topologia dos semigrupos com interior não vazio, um conceito muito importante foi o de tipo parabólico do semigrupo S, desenvolvido por San Martin em [30] e [31]. Apesar de ser difícil obter, em geral, os conjuntos de controle invariantes dos semigrupos, seus possíveis tipos homotópicos podem ser descritos (pelo menos quando S é gerado por semigrupos a um parâmetro) usando a classificação dos semigrupos com interior não vazio de acordo com sua ação nas variedades flag de G. Essa classificação divide os semigrupos em tipos, chamados tipos parabólicos, cada tipo dado por um subgrupo parabólico de G.

Para se ter uma idéia do que foi feito, temos que o tipo parabólico de S é dado por um subgrupo parabólico, digamos $P(S) \subset G$, ou pela correspondente variedade flag $G/P(S)$, de tal maneira que a geometria da ação por S na variedade flag depende apenas da ação em $G/P(S)$. Isso é expresso, por exemplo, pelo fato de que os conjuntos de controle invariantes para S na variedade flag maximal G/MAN é dado por $\pi^{-1}(C_{P(S)})$, onde π é a projeção canônica sobre $G/P(S)$, e $C_{P(S)}$ é o conjunto de controle invariante em $G/P(S)$. No caso especial onde S é gerado por semigrupos a um parâmetro, $C_{P(S)}$ é contrátil. Assim, considerando novamente a imagem inversa, $\pi^{-1}(C_{P(S)})$, pela fibração canônica $G/AN \to G/MAN$, segue que qualquer conjunto de controle invariante $C \subset G/AN$ contrai para a componente conexa de $P(S)/AN$. Essa componente conexa é difeomorfa ao subgrupo compacto $K(S)$ de K, o subgrupo compacto maximal da componente semi-simples de Levi de $P(S)$.

Em resumo, C pode ser continuamente deformado sobre $K(S)$, implicando que o tipo parabólico de S é o grupo compacto $K(S) \subset K$. Portanto, a classificação dos semigrupos de Lie pelas variedades flags resulta na classificação dos seus tipos de homotopia.

No estudo do tipo de homotopia do semigrupo e do conjunto de controle invariante, surge uma pergunta natural, acerca do tipo de homotopia de outros conjuntos de controle invariantes C_i, ou seja, considerando outros subgrupos parabólicos $P_i \supset MAN$ que não é o tipo de S, e tomando a fibração $G/MAN \to G/P_i$ com C_i conjunto de controle invariante em G/P_i, mostramos que o tipo de homotopia desses outros conjuntos de controle são dados por quocientes de $K(S)$.

A demonstração desses resultados não se restringem a semigrupos de Lie (no sentido da definição 5.2). Essa generalização permite trabalhar alguns semigrupos clássicos os quais não são infinitesimalmente gerados, como o semigrupo das matrizes positivas. Também, se considerarmos o interior de S ao invés de S, os resultados ainda valem, com a vantagem de que no caso do interior de S temos que int$S$ é um CW-complexo o que implica em int$S$ ser homotopicamente equivalente a $K(S)$.

A seguir fazemos uma descrição da estrutura da tese.

Na seção 1 estabelecemos notações básicas, para as seções subsequentes, sobre grupos de Lie e álgebras de Lie e suas estruturas. Nessa seção encontra-se uma descrição sobre as importantes decomposições de Cartan, Iwasawa e Levi, bem como um estudo sobre as variedades flag, os subgrupos parabólicos, a célula aberta de Bruhat e a dinâmica que envolve esses conceitos. Conceitos esses que serão essenciais nas seções seguintes.

Na seção 2, trazemos um resumo das definições sobre conjuntos de controle e semigrupos, como também alguma coisa sobre sua ação nas variedades homogêneas e alguns resultados necessários sobre conjuntos de controle. Os conjuntos de controle, como comentamos acima, é uma ferramenta fundamental no cáculo do tipo de homotopia do semigrupo.

Na seção 3, estudamos os tipos parabólicos do semigrupo, esses estudos foram feitos por San Martin em [30] e [31], nessa seção nos preocupamos em mostrar a equivalência entre as definições usadas nos artigos citados. A importância dessa seção não se resume a isso, o tipo parabólico do semigrupo é dado pela geometria dos seus conjuntos de controle invariantes. E quando tomamos S do tipo $G/P(S)$ temos que seu conjunto de controle invariante em $G/P(S)$ está em alguma célula aberta de Bruhat $\sigma \subset G/P(S)$ e o fibrado $\pi : G/MAN \to G/P(S)$ é trivial sobre σ, fato esse vital para os principais resultados da tese.

Na seção 6, desenvolvemos um estudo sobre reversibilidade, conceito esse necessário na demonstração da seção principal. Trazemos alguns resultados que garantem reversibilidade e mostramos que conjuntos compáctos podem ser transladados dentro de semigrupos reversíveis por um elemento do semigrupo. Ainda nessa seção, trazemos o lema de Furstemberg que garante a reversibilidade módulo um subgrupo, de um semigrupo, no caso de espaço simétrico. Esse lema propicia demonstrar a contractibilidade das órbitas de semigrupos de Lie em espaços simétricos Riemannianos.

Na seção 4, descrevemos os conjuntos de controle invariantes em G/AN e discutimos a topologia dos conjuntos de controle invariantes no espaço homogêneo G/AN, onde mostramos que tal topologia reduz à topologia de um subgrupo compacto em K.

Na seção 5, um dos objetivos foi introduzir algumas definições e notações referentes a semigrupos, bem como demonstrar alguns resultados sobre semigrupos, num deles mostramos a contractibilidade dos conjuntos de controle invariantes para um semigrupo que é gerado por semigrupos a um parâmetro, esse resultado permite mostrar que o conjunto controlável invariante em G/AN contrai para uma fibra, seção 7. Um outro objetivo é introduzir as notações de homotopia para semigrupos e demonstrar que os grupos de homotopia de int$S$ e S são isomorfos, fato esse importante para os resultados das seções seguintes.

Na seção 7, encontra-se a parte principal da tese, a demonstração de que, como havíamos comentado, os grupos de homotopia se S são isomorfos aos grupos de homotopia do conjunto de controle invariante $C \subset G/AN$, e mais o tipo de homotopia de S é igual ao de um subgrupo compacto $K(S) \subset K$. Gostaríamos de observar que o isomorfismo foi realizado pela aplicação avaliação. Fixe $x \in C_\circ$, $C_\circ$ o conjunto de transitividade de C, e defina a aplicação avaliação $e : S \to C_\circ$ por $e(g) = gx$, lembrando que Sx é denso em C e considere a aplicação induzida $e_* : \pi_n(S) \to \pi_n(C_\circ)$. A sobrejetividade de e_* foi demonstrada construindo uma seção para a aplicação avaliação. Já a injetividade, é demonstrada tomando γ, um representante da classe de homotopia $[\gamma]$, em S tal que $e_*[\gamma] = 1$ e mostrando que $[\gamma] = 1$. O que não é feito diretamente, mas construindo homotopias dentro de S levando γ sucessivamente em pequenos grupos, e nessas etapas usamos fortemente propriedades de reversibilidade.

Na seção 8 trabalhamos alguns tópicos que são consequências do isomorfismo da seção anterior. Um desses tópicos é o estabelecimento de um retrato de deformação do semigrupo S. Por outro lado, a identificação dos grupos de homotopia de S com os de $K(S)$ sugerem também a identificação dos grupos de homotopia relativo. Mostramos ainda que dois semigrupos de mesmo tipo parabólico tem grupos de homotopia isomorfos. Respondemos também uma pergunta natural que se faz após calcular o tipo de homotopia dos conjuntos de controle invariantes, que é sobre o tipo de homotopia de outros conjuntos de controle invariantes de outros espaços G/P_i, onde $G/MAN \to G/P_i$ é uma fibração equivariante canônica. Uma outra pergunta que surge é sobre o tipo de homotopia de S^{-1}, que procuramos responder no último tópico dessa seção.

Na seção 9, discutimos aplicações da seção 7 em alguns semigrupos importantes. Primeiro consideramos o semigrupo das matrizes em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, com entradas positivas, a qual é parte da classe de semigrupos de compressão de cones em $\mathbb{R}^n$. Concluimos que estes semigrupos são do mesmo tipo de homotopia do grupo compacto $\mathrm{SO}(n-1)$.

Outra classe de semigrupos cujo grupo de homotopia pode ser calculado são aqueles contidos em grupos de posto um. Nesse caso, existe apenas um tipo de homotopia o qual é a componente conexa do grupo M, na decomposição $P = MAN$ de um subgrupo parabólico. Os outros semigrupos são ilustrativos para os nossos cálculos, ou seja, nós já conhecemos suas propriedades estruturais. Esses são o semigrupo das matrizes totalmente positivas que é contrátil e os semigrupos de Ol'shanskiĭ os quais tem decomposições polar, de onde o tipo de homotopia segue.

Na seção 10, somamos os nossos resultados aos resultados da seção 3.4 de [12], para obtermos uma melhor visualização do maior recobrimento de G onde é possível levantar S. Observamos também que existem exemplos pertinentes que mostram que os resultados originais podem ser um pouco mais geral.

Na seção 11, mostramos que certas órbitas no espaço $G/K(S)$ é contrátil, se considerarmos o semigrupo exp-gerado e do tipo Θ, isso vem complementar o estudo das órbitas no espaço simétrico G/K. Lembramos que na seção 6 mostramos que, no espaço homogêneo G/P_Θ, a órbita Sx é contrátil para qualquer x no conjunto de controle invariante de G/P_Θ.

Finalmente, na seção 12 estudamos a técnica fundamental em grupos, propriedade do levantamento de caminhos (PLP), ou equivalentemente, a propriedade de fibração, aplicada aos semigrupos, e às suas órbitas.

Seção 1

Preliminares de grupos e álgebras de Lie

1.1 Introdução

O propósito dessa seção é introduzir algumas notações e decomposições de grupos e álgebras de Lie, semi-simples, não compactas e de centro finito.

Como é conhecido, por uma álgebra de Lie entende-se um espaço vetorial munido de um produto (colchete de Lie) que tem as propriedades de ser bilinear, anti-simétrico e satisfazer a identidade de Jacobi.

Seja G um grupo de Lie (variedade com uma estrutura de grupo), a aplicação translação à esquerda de G, $E_g : h \mapsto gh$, é um difeomorfismo analítico. Um campo vetorial X em G é chamado invariante á esquerda se $dE_g X = X$ para todo $g \in G$. Dado um vetor tangente $X_1 \in G_e$ (espaço tangente a G na identidade), pode-se provar que existe exatamente um campo vetorial invariante à esquerda $\tilde{X}$ em G tal que $\tilde{X}_e = X_1$. Identificando G_e com os campos invariantes à esquerda, G_e fica munido de um colchete de Lie e, portanto, é uma álgebra de Lie.

Observemos que a aplicação exponencial $X \in G_e \to \exp X \in G$ é essencial no estudo da relação entre G e sua álgebra de Lie.

Consideremos $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo $\mathbb{K}$. Introduziremos algumas notações e um pouco sobre a estrutura das álgebras de Lie, cujo aprofundamento pode ser encontrado em [27].

Definindo a transformação linear

$$\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

por $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. A aplicação da subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, (subespaço vetorial fechado pelo colchete), $\mathfrak{h}$ na álgebra de Lie das transformações lineares de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$,

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

definida por $X \mapsto \mathrm{ad}(X)$ é um homomorfismo e é denominada representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$.

Temos que um funcional linear de uma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$, cujo subespaço

$$\{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

é não nulo é chamado peso da representação adjunta ad. E mais, se esses pesos são não nulos eles são denominados de raízes de $\mathfrak{g}$ (em relação à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$).

Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é chamada de subálgebra de Cartan se ela é nilpotente e se seu normalizador em $\mathfrak{g}$ coincide com ela mesmo (equivalentemente, se ela é nilpotente e se $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ implicar em $X \in \mathfrak{h}$).

Temos que a álgebra $\mathfrak{g}$ se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k},$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha$ é o espaço das raízes definido como acima, e os α_i são os pesos não nulos da representação adjunta de $\mathfrak{h}$.

Ainda continuando numa conduta introdutória, faremos algumas construções objetivando a importante decomposição de Iwasawa.

Definição 1.1 *Considere* ad *a representação adjunta da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *a forma bilinear simétrica dada por*

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$$

é chamada de forma de Cartan-Killing.

Seja $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan, definimos a forma de Cartan-Killing no dual $\mathfrak{h}^*$ da seguinte maneira: considere a aplicação $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$,

$$H \mapsto \alpha_H(.) = \langle H, . \rangle,$$

definida pela forma bilinear $\langle ., . \rangle$. Como a forma de Cartan Killing restrita a $\mathfrak{h}$ é não degenerada, temos que essa aplicação é um isomorfismo. Para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, sua imagem inversa, por esse isomorfismo, será denotada por H_α, ou seja,

$$\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H) \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}.$$

Usando esse isomorfismo, pode-se passar a forma de Cartan-Killing a $\mathfrak{h}^*$, definindo

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha),$$

onde α e β são funcionais lineares em $\mathfrak{h}$. Essa forma bilinear simétrica e semi-simples em $\mathfrak{h}^*$ muitas vezes é também denominada de forma de Cartan-Killing.

Agora considere V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\{v_1, \ldots, v_l\}$ base ordenada de V, sejam $v, w \in V$ escritos como

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l$$

$$w = b_1 v_1 + \cdots + b_l v_l$$

A ordem lexicográfica com relação a essa base é definida por

$$v \leq w \leftrightarrow v = w \text{ ou } a_i < b_i,$$

onde i é o primeiro índice em que as coordenadas de v e w são diferentes.

Seja Π o conjunto das raízes de $\mathfrak{h}$, uma raiz $\alpha \in \Pi$ é simples em, relação à ordem lexicográfica fixada, se $\alpha > 0$ e não existe β e γ em Π tal que β e γ são positivos e $\alpha = \beta + \gamma$.

O conjunto das raízes simples será denotado por Σ. Pode-se mostrar que Σ é não vazio.

Definição 1.2 *Um subconjunto $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ do conjunto de raízes simples satisfazendo:*

a) *Σ é uma base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, onde $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ é o espaço vetorial racional.*

b) *Toda raiz β pode ser escrita como*

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l,$$

com coeficientes inteiros e todos eles de mesmo sinal.

recebe o nome de sistema simples de raízes.

Definição 1.3 *Uma reflexão em relação a uma raiz α é uma transformação linear inversível $r : F(\mathfrak{h}, \mathfrak{k}) \to F(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ ($F(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$-espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dos funcionais lineares de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{k}$) que satisfaz*

1) $r(\alpha) = -\alpha$.

2) $F_r = \{\beta \in F(\mathfrak{h}, \mathfrak{k}) : r(\beta) = \beta\}$ *- conjunto dos pontos fixos é um hiperplano de $F(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$.*

O grupo de Weyl de um sistema de raízes Π, denotado por W, é o grupo gerado pelas reflexões $r_\alpha, \alpha \in \Pi$. Observe que o grupo de Weyl está intimamente ligado a subálgebra de Cartan.

1.2 Algumas decomposições de grupos de Lie

Seja G grupo de Lie conexo e semi-simples (isto é, sua álgebra não contém ideais solúveis além de 0) com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{k}$ uma subálgebra maximal compacta mergulhada e seu complemento ortogonal com relação a forma de Cartan Killing.

Tomando um subespaço abeliano maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ e considerando

$$\overline{\mathfrak{a}} = \{\beta \in \mathfrak{a} : \langle \alpha, \beta \rangle \neq \emptyset, \text{ para todo } \alpha \in \Pi\},$$

onde Π é um sistema de raízes. As componentes conexas de $\overline{\mathfrak{a}}$ são cones convexos em $\mathfrak{a}$ e cada um desses é chamado de câmara de Weyl. Selecionemos uma dessas, digamos

$\mathfrak{a}^+$. Associado a essa câmara existe um conjunto de raízes positivas positivas Π^+, e mais, podem-se estabelecer bijeções entre o grupo de Weyl, os conjuntos de sistemas de raízes simples e as câmaras de Weyl (ver [27] capítulo 9 para mais detalhes).

O subespaço vetorial $\mathfrak{s}$ da decomposição de Cartan pode ser reescrito como $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, com $\mathfrak{n}$ sendo a álgebra nilpotente definida por

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha$ é o espaço das raízes, definido anteriormente e Π^+ é o conjunto das raízes positivas. Assim temos uma nova decomposição,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

chamada decomposição de Iwasawa.

Dessa decomposição temos a decomposição de Iwasawa global

$$G = KAN,$$

onde $K = \exp\mathfrak{k}$ é o subgrupo compacto maximal de G (se G tem centro finito), $A = \exp\mathfrak{a}$ é um subgrupo abeliano split de G (no sentido de que para cada $h \in A$, $\mathrm{Ad}_G(h)$ pode ser diagonalizado sobre $\mathbb{R}$) e $N = \exp\mathfrak{n}$ é um subgrupo nilpotente de G. Colocamos também $A^+ = \exp\mathfrak{a}^+$.

Denotando
$$M = \{u \in K : uh = hu, \text{ para todo } h \in A\}$$

e

$$M^* = \{u \in K : uAu^{-1} = A\}$$

como sendo centralizador e normalizador, respectivamente, de A em K, pode-se mostrar que o quociente
$$M^*/M$$

é o próprio grupo de Weyl dado pela câmara $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{g}$ (ver [10], capítulo VII)

1.3 Variedades flag

Faremos agora um rápido estudo das variedades flag, seguindo as notações do livro [34]. Representando por $\mathfrak{m}$ a álgebra de Lie de M, o subespaço

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

é chamado de subálgebra parabólica minimal (de $\mathfrak{g}$) e o grupo de Lie $P = MAN$ (cuja álgebra é $\mathfrak{p}$) é chamado de subgrupo parabólico minimal.

O espaço homogêneo $\mathbb{B} = G/P$ pode ser caracterizado nas formas:

1) Considerando $\varphi : G \times \mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g}), (g, \xi) \mapsto \varphi(g, \xi) = \mathrm{Ad}(g)\xi$, a ação adjunta de G na Grassmanniana dos subespaços de $\mathfrak{g}$. Podemos então, caracterizar $\mathbb{B}$ como as órbitas de $\mathfrak{p}$ sobre a ação adjunta de G em $\mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ tem a mesma dimensão que $\mathfrak{p}$, através da aplicação

$$\psi : G/P \to O(\mathfrak{p}) = \{\varphi(g, \mathfrak{p}) : g \in G\}, gP \mapsto \varphi(g, \mathfrak{p}) = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}.$$

2) Já a aplicação $G/P \to \tilde{G}, gP \mapsto gPg^{-1}$ realiza $\mathbb{B}$ como subconjunto de subgrupos de G conjugados a P.

Com essas realizações podemos pensar os elementos de $\mathbb{B}$ ou como subálgebras parabólicas minimais ou subgrupos parabólicos minimais, e $b \in G/P$ é identificado ou como seu subgrupo de isotropia ou como sua subálgebra de isotropia.

Observação Uma outra denominação para o espaço homogêneo G/P é variedade flag do grupo G. Para um dado grupo de Lie G existe apenas um número finito de variedades flag, ou fronteiras de Furstenberg, e existe uma maximal $\mathbb{B}$ que fibra sobre as outras, maximal no sentido de que dado uma outra variedade flag $\mathbb{B}_1$ existe uma fibração equivariante de $\mathbb{B}$ em $\mathbb{B}_1$.

Existem alguns elementos especiais em $\mathbb{B}$, a origem $b_\circ$ ($= P \in G/P$) e $\tilde{w}b_\circ$, onde $w \in W$ e $\tilde{w}$ denota seu representante em M^* (lembrando que $W = M^*/M$). Observemos que se $b_\circ = MAN^+$ é a origem em $G/MAN^+ = G/P$ então a ação de M^* em $b_\circ$ depende somente de W, pois $Mb_\circ = b_\circ$. E é através do isomorfismo $W = M^*/M$ que o grupo de Weyl age em $b_\circ$, dando origem ao subconjunto finito $\{wb_\circ : w \in W\}$.

Dado $\Theta \subset \Sigma$, definimos a correspondente subálgebra parabólica como sendo

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p},$$

onde $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ é a subálgebra gerada pelos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{-\alpha}, \alpha \in \langle\Theta\rangle$. Aquí $\langle\Theta\rangle$ é o conjunto de raízes positivas gerado por Θ. Notemos que $\mathfrak{p}_{\Theta_1} \subset \mathfrak{p}_{\Theta_2}$ se $\Theta_1 \subset \Theta_2$. Também temos que $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{g}$ e daí $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_\Theta$ para qualquer $\Theta \in \Sigma$.

Da mesma forma que vimos anteriormente, o conjunto das subálge- bras parabólicas conjugadas a $\mathfrak{p}_\Theta$ identifica-se com o espaço homogêneo G/P_Θ, onde P_Θ é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G:

$$P_\Theta = \{g \in G : \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}.$$

E temos também que $P \subset P_\Theta$ para qualquer $\Theta \in \Sigma$ e $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$ se $\Theta_1 \subset \Theta_2$.

A partir dessa construção, temos o espaço homogêneo $\mathbb{B}_\Theta$, definido por G/P_Θ e chamado de variedade flag.

Dados dois subconjuntos $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$, vimos que os correspondentes subgrupos parabólicos satisfazem $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$, e mais existe uma fibração canônica $G/P_{\Theta_1} \to G/P_{\Theta_2}, gP_{\Theta_1} \mapsto gP_{\Theta_2}$. Alternativamente, a fibração associa a subálgebra parabólica $\mathfrak{q} \in \mathbb{B}_{\Theta_1}$ à única subálgebra parabólica em $\mathbb{B}_{\Theta_2}$, contendo $\mathfrak{q}$. Em particular, $\mathbb{B} = \mathbb{B}_\emptyset$ projeta sobre cada variedade flag $\mathbb{B}_\Theta$.

Da estrutura de subgrupo parabólico P_Θ a fibra P_Θ/P de $\mathbb{B} \to \mathbb{B}_\Theta$ é obtida. Lembremos que estamos usando a notação do Warner [34], seção 1.2. Denote por $\mathfrak{a}_\Theta$

o anulador de Θ em $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a}_\Theta = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \Theta\}.$$

Seja L_Θ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em G e coloque $M_\Theta(K) = L_\Theta \cap K$ para o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K. A álgebra de Lie $\mathfrak{l}_\Theta$ de L_Θ é redutível (isto é, a representação adjunta de $\mathfrak{l}_\Theta$ em $\mathfrak{g}$, $X \mapsto \mathrm{ad}(X)$, é semi-simples) e decompõe-se como $\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta$ com $\mathfrak{m}_\Theta$ semi-simples. Seja M_Θ^0 o subgrupo conexo cuja ágebra de Lie é $\mathfrak{m}_\Theta$ e coloque $M_\Theta = M_\Theta(K)\, M_\Theta^0$. Segue que a componente identidade de M_Θ é M_Θ^0. O teorema de Bruhat-Moore (see [34], teorema 1.2.4.8), dá as seguintes decomposições:

1. $P_\Theta = M_\Theta A_\Theta N_\Theta$, onde $A_\Theta = \exp \mathfrak{a}_\Theta$ e N_Θ é o radical unipotente de P_Θ, isto é, $N_\Theta = \exp \mathfrak{n}_\Theta$, com $\mathfrak{n}_\Theta$ o nilradical de $\mathfrak{p}_\Theta$.

2. $P_\Theta = M_\Theta(K)\, AN$.

Essa segunda decomposição afirma que a fibra $P_\Theta/P = M_\Theta(K)/M$. Isso resulta em $M_\Theta(K)/M = M_\Theta/(M_\Theta \cap P)$, que é a variedade flag maximal de M_Θ, pois $M_\Theta \cap P$ é o subgrupo parabólico minimal de M_Θ.

Denotaremos por $K(\Theta)$ componente identidade de $M_\Theta(K)$. Desde que P_Θ/P é conexo, temos que $P_\Theta/P = K(\Theta)/(K(\Theta) \cap M)$. Como veremos, os subgrupos $K(\Theta)$, $\Theta \subset \Sigma$, têm uma participação decisiva na determinação dos grupos de homotopia dos semigrupos.

Faremos agora um breve estudo da dinâmica da ação de uma classe especial de elementos de $\mathfrak{g}$. Seja

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0 \text{ para todo } \alpha \in \Sigma\}$$

a câmara de Weyl associada a Σ. Dizemos que $X \in \mathfrak{g}$ é regular real no caso de $X = \mathrm{Ad}(g)(H)$ para algum $g \in G$, $H \in \mathfrak{a}^+$. Analogamente, $x \in G$ é chamado de regular real no caso de $x = ghg^{-1}$ com $h \in A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$, isto é, $x = \exp X$, com X regular real em $\mathfrak{g}$.

Seja $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ a subálgebra nilpotente oposta a $\mathfrak{n}$. Coloque $N^- = \exp \mathfrak{n}^-$. Então em qualquer variedade flag $\mathbb{B}_\Theta$, a órbita (chamada célula aberta de Bruhat) $\mathrm{Ad}(N^-)\,\mathfrak{p}_\Theta$ é aberta e densa. E mais, se $h \in A^+$ então $\lim h^k y = \mathfrak{p}_\Theta$ para qualquer $y \in \mathrm{Ad}(N^-)\,\mathfrak{p}_\Theta$. Em outras palavras, $\mathfrak{p}_\Theta$ é um atrator em $\mathbb{B}_\Theta$ para qualquer $h \in A^+$, tendo $\mathrm{Ad}(N^-)\,\mathfrak{p}_\Theta$ como variedade estável. Semelhantemente, $\mathrm{Ad}(g)\,\mathfrak{p}_\Theta$ é o ponto atrator fixado em $\mathbb{B}_\Theta$ do regular real $g = xhx^{-1}$ tal que $\mathrm{Ad}(xN^-x^{-1})$ é a variedade aberta e densa.

Toda essa dinâmica pode ser estudada a partir de grupo de Weyl. Recordemos que em notações anteriores, os elementos de $\mathbb{B}$ foram identificados como subgrupos de isotropia. A "tradução" por meio de grupos de Weyl é feita usando o fato de que $h \in A^+$ pode ser visto como difeomorfismo de $\mathbb{B}_\Theta$, o qual tem tantos pontos fixos quanto a ordem de W. Estes são os elementos da órbita de $b_\circ$ pela ação à direita de W em $\mathbb{B}_\Theta$.

A variedade estável para $b_\circ w, w \in W$ é a célula de Bruhat $N^- b_\circ w$. Estas variedades estáveis são disjuntas uma da outra e cobrem $\mathbb{B}_\Theta$, existe apenas uma delas que é aberta e densa, $N^- b_\circ$.

Dizemos que $b_\circ w$ é o ponto fixo por h do tipo w, onde $b_\circ$ é o atrator ou elemento fixo por h do tipo principal. O conjunto dos elementos atraídos por $b_\circ$ é denso em $\mathbb{B}$. Similarmente, existe um único repelente, como existe uma única órbita para N.

No que segue, denotaremos ponto atrator fixo por g por $\mathrm{at}\,(g)$, enquanto a correspondente célula aberta, a qual é variedade estável, será denotada por st. Embora essa notação não especifica a variedade flag em consideração, isso se tornará claro no contexto.

Recordemos que uma célula aberta de Bruhat β em $\mathbb{B}_\Theta$ é difeomorfa a um espaço Euclideano. Isso implica que o fibrado principal $\pi_\Theta : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_\Theta$ é trivial sobre β, isto é, $\pi_\Theta^{-1}(\beta) \approx \beta \times (P_\Theta / P)$.

1.4 Exemplo

O grupo simplético definido como

$$\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}(2l,\mathbb{R}) : g^t J g = J\}$$

onde J é a matriz $2l \times 2l$, que escrita em blocos $l \times l$, é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Em $l \times l$ blocos, os elementos de $\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R})$ podem ser escritos como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

com $ba^t = ab^t, dc^t = cd^t$ e $da^t - cb^t = 1$. A álgebra de Lie de $\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$, que pode ser descrita da seguinte forma:

Considere a matriz anti-simétrica J dada acima, essa matriz define uma forma bilinear anti-simétrica não-degenerada (forma simplética) ω em $\mathbb{R}^{2l}$ por $\omega(x,y) = y^t J x, x, y \in \mathbb{R}^{2l}$. Temos que $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$ é a álgebra das matrizes $2l \times 2l$ que são anti-simétricas em relação a ω,

$$\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l,\mathbb{R}) : AJ + JA^t = 0\}.$$

Temos que $M \in \mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$ se e só se M é da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

onde A, B, C são matrizes reais $l \times l$ e B, C são simétricas.

Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

onde

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \right\},$$

com A anti-simétrica e B simétrica, onde

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \right\},$$

com A, B simétricas.

Observemos que a álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ é isomorfa à das matrizes complexas anti-hermitianas $l \times l$. Desde que $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$ é uma forma normal real da álgebra de Lie complexa simples $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{C})$, as subálgebras abelianas maximais de $\mathfrak{s}$ são subálgebras de Cartan. Uma dessas subálgebras é a subálgebra $\mathfrak{a}$ das matrizes diagonais em $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$. Seja

$$\mathfrak{a}^+ = \{\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) : a_1 > \cdots > a_l > 0\}$$

uma câmara de Weyl em $\mathfrak{a}$. Se $A = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) \in \mathfrak{a}$, definimos o funcional linear λ_i como sendo $\lambda(A) = a_i$. Um sistema positivo de raízes é

$$\Pi^+ = \{\lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j : 1 \leq i, j \leq l\}.$$

Um sistema de raízes que gera Π^+ é

$$\Sigma = \{\lambda_i - \lambda_j, \ldots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}.$$

Seja Ω o grupo de permutações de $\{1,\ldots,l\}$ e Γ o grupo multiplicativo das l-uplas $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l)$ onde os ε_i são ± 1 e o produto é feito componente a componente.

O grupo Ω age em $\mathfrak{a}$ como grupo de permutações, permutando as entradas dos elementos em $\mathfrak{a}$,

$$\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) \to \mathrm{diag}(a_{i_1},\ldots,a_{i_l},-a_{i_1},\ldots,-a_{i_l})$$

Já Γ age multiplicando cada entrada a_i pelo respectivo ε_i

$$\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) \to \mathrm{diag}(\varepsilon_1 a_1,\ldots,\varepsilon_l a_l,-\varepsilon_1 a_1,\ldots,-\varepsilon_l a_l)$$

O grupo de Weyl é o grupo correspondendo a ação de $\Omega\Gamma = \Gamma\Omega$ em $\mathfrak{a}$ e sua ordem é $2^l l!$. O espaço de raízes associado a $\lambda_i - \lambda_j$ são as matrizes em $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$ tendo entradas i,j e $j+l, i+l$ não nulas. Já o espaço de raízes associado a $\lambda_i + \lambda_j$ são as matrizes em $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ tendo entradas $i, j+l$ e $j, i+l$ não nulas. Assim $\mathfrak{n}^+$ é dado por matrizes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix}$$

onde A é uma matriz triangular superior com zeros na diagonal e B é simétrica. Desde que $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Cartan, o centralizador $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$ é zero. Os flags minimais do grupo simplético estão associados aos subgrupos parabólicos maximais. Esses flags ocorrem quando Θ é maximal, isto é, se Θ é o complemento de um subconjunto unitário de Π. Explicitamente, $\mathfrak{p}_{\Pi-2\lambda_l}$ é a subálgebra das matrizes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix}$$

com B simétrica. Isso acontece pois os espaços das raízes associado a $\lambda_i - \lambda_j$ estão contidos nos blocos diagonais. Desde que $\Pi - 2\lambda_l$ contém todas as raízes simples dessa forma, $\mathfrak{n}^-_{\Pi-2\lambda_l}$ consiste de todas as matrizes onde A é triangular inferior com zeros na diagonal. Também temos que $\mathfrak{p}_{\Pi-\{\lambda_i-\lambda_{i+1}\}}, i \leq l-1$ é a álgebra das matrizes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com B simétrica,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\},$$

α matriz $i \times i$, e

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\},$$

d matriz simétrica $l - i \times l - i$. Portanto, $\mathfrak{p}_{\Pi-\{\lambda_i-\lambda_{i+1}\}}$ é a álgebra das matrizes

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

com α uma matriz $i \times i$. O subgrupo parabólico minimal é $P = MAN$, e neste caso,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

h matriz diagonal $l \times l$, e

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & (a^{-1})^t \end{pmatrix} \right\},$$

a triangular superior com 1 na diagonal e b satisfaz $ba^t = ab^t$. Desde que o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$ é zero, temos que M é discreta. Pode-se mostrar que M é o conjunto das matrizes

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

onde a é diagonal com entradas ± 1.

Denotando por $B_k l$ o conjunto das matrizes $2l \times 2l$ de posto k. Observando que se ω é uma forma simplética então existe uma base β de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que a matriz da forma simplética ω na base β é uma matriz J. Assim, dois elementos p e q em $B_k l$ definem o mesmo subespaço isotrópico se e só se $p = qa$ com a matriz $k \times k$ inversível e $p^t Jp = 0$. O conjunto das classes de equivalência $B_k l/\sim$ está em correspondência bijetiva com $L_k(l)$. A partir daí pode-se mostrar que $L_k(l)$ é invariante pela ação de $Sp(l, \mathbb{R})$ e através da descrição dos subespaços isotrópicos k dimensionais como classes de equivalência em $B_k(l)$ mostra-se que $Sp(l, \mathbb{R})$ é transitivo em $L_k(l)$.

Assim temos que $L_k(l)$ é um espaço homogêneo de $Sp(l, \mathbb{R})$, ou melhor, $L_k(l) = Sp(l, \mathbb{R})/\Theta_k$, onde $\Theta_k = \Pi - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$ se $k \leq l - 1$ e $\Theta_k = \Pi - \{2\lambda_l\}$ se $k = l$. Para qualquer $\Theta \subset \Pi, \mathbb{B}_\Theta$ é realizado como a variedade dos flags $V_1 \subset \cdots \subset V_s$ com V_i um subespaço de dimensão $1 \leq r_i \leq l$ (para mais detalhes ver [3])

Seção 2

Semigrupos e conjuntos de controle

2.1 Introdução

A noção de conjuntos de controle, para sistema de controle, foi introduzida por L. Arnold e W. Kliemann, com o propósito de descrever propriedades dinâmicas e ergódicas de sistemas de equações diferenciais estocásticas. Os conjuntos de controle, um dos principais conceitos desse estudo, representa a região do espaço estado onde o sistema é controlável ou equivalentemente a região onde o semigrupo de controle age transitivamente. Uma referência para um estudo completo sobre isto pode ser encontrada em [7].

A noção de conjuntos de controle pode ser abstraida para ações de semigrupos, e em particular para ações de subsemigrupos de grupos de Lie em seus espaços homogêneos.

Considere um semigrupo S, com int$S \neq \emptyset$, em um grupo de Lie G com centro finito e semi-simples. Foi mostrado em [33] o seguinte fato. Considere a ação de S na variedade flag de G, S não é transitivo em $\mathbb{B}_\Theta$ a menos que $S = G$. E mais, existe apenas um subconjunto C_Θ de $\mathbb{B}_\Theta$ tal que Sx é denso em C_Θ para todo $x \in C_\Theta$. Veremos que esse subconjunto é chamado de conjunto de controle invariante para S em $\mathbb{B}_\Theta$. Temos também que desde que S não é transitivo, $C_\Theta \neq \mathbb{B}_\Theta$.

Quando esses conjuntos de controle são estudados para as ações de semigrupos, de interior não vazio, nas variedades flag (semigrupos estes contidos em um grupo de Lie semi-simples) muitas informações sobre os semigrupos são obtidas, inclusive propriedades geométricas. Essa abstração, como também o estudo de suas consequências constituem o cerne dos trabalhos [28], [29] e [33].

2.2 Conjuntos de controle

Seja M um G-espaço e S um subsemigrupo de um grupo de Lie G. Apesar de que muitos dos resultados a seguir valem em geral, assumiremos que a ação de G em M é transitiva, e portanto poderemos pensar M como um espaço homogêneo de G, onde S age como semigrupo de difeomorfismos (semigrupo no sentido de que as composições desses difeomorfismos, ainda estão em S)

Definição 2.1 *Um conjunto de controle para S em M (ou conjunto controlável para S) é um subconjunto $D \subset M$ satisfazendo*

i) $\mathrm{int}D \neq \emptyset$

ii) $D \subset \mathrm{cl}(Sx)$ *para todo* $x \in D$, *e*

iii) D *é maximal com relação a i) e ii).*

A segunda condição é a que traduz a geometria de D, ela caracteriza a transitividade de S dentro de D, ou seja, para quaisquer dois pontos dentro de D, x e y, existe um g em S com $gx = y$. Note, no entanto, que esta transitividade é apenas aproximada. A transitividade exata é discutida pela proposição abaixo.

Proposição 2.2 *Assumindo que* $\mathrm{int}S \neq \emptyset$, *seja D um conjunto de controle para S e defina*

$$D_\circ = \{x \in D : \exists g \in \mathrm{int}S \text{ com } gx = x\}$$

Então valem:

a) $D_\circ = (\mathrm{int}S)D \cap D$.

b) $D_\circ = \emptyset$ *ou* $D \subset (\mathrm{int}S)^{-1}x$, *para qualquer* $x \in D_\circ$.

c) $D_\circ = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$ *para qualquer* $x \in D_\circ$ *se* $D_\circ \neq \emptyset$.

d) $\mathrm{int}S$ *atua transitivamente em* $D_\circ$.

e) $D_\circ = \emptyset$ *ou* $D_\circ$ *é denso em* D.

f) $D_\circ$ *é invariante para S dentro de D, isto é,*

$$hx \in D_\circ \text{ se } h \in S, x \in D_\circ \text{ e } hx \in D.$$

g) $D_\circ \neq \emptyset$ *se* $SD \subset D$. *No último caso,* $D_\circ = D$.

Demonstração: Ver [33], proposição 2.2. □

Observação 2.3 *Se o semigrupo S é* exp*-gerado, então* $D_0 = \mathrm{int}D$, *para qualquer conjunto de controle D*

O subconjunto $D_\circ$ de D é chamado de conjunto de transitividade de conjunto de controle D. Nas seções que seguem, estaremos considerando apenas os conjuntos de controle em que $D_\circ \neq \emptyset$.

Existe uma ordem parcial natural entre os conjuntos de controle, D_1 é menor que D_2 se for possível atingir D_2 a partir de D_1, isto é, se existem $x \in D_1$ e $g \in S$ tal que $gx \in D_2$, ou ainda, $D_1 < D_2$ se existe $x \in D_1$ tal que $\mathrm{cl}Sx \cap D_2 \neq \emptyset$. Essa ordem é parcial, pois $D_1 < D_2$ e $D_2 < D_1$ implica em $D_1 = D_2$. Com respeito a essa ordem, um conjunto controlável é maximal se ele é invariante para S ($SD \subset D$) e é minimal se ele é S^{-1}-invariante. Aliás, pela propriedade g) da proposição anterior, temos que conjuntos de controle S e S^{-1}- invariantes têm interior não vazio. Pode-se mostrar que, no caso M compacta dizer invariante para S (S^{-1}) é equivalente a dizer maximal (minimal).

Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de G e considere os espaços homogêneos G/L_1 e G/L_2. Existe uma fibração natural

$$\pi : G/L_1 \to G/L_2, gL_1 \mapsto gL_2.$$

Como $L_1 \subset L_2$ temos que a ação de G é equivariante com respeito a essa fibração, isto é, $\pi \circ g = g \circ \pi$, para todo $g \in G$.

Proposição 2.4 *Seja S semigrupo do grupo de Lie G e $\pi : G/L_1 \to G/L_2$ fibração equivariante.*

a) *Suponha que $D \subset G/L_1$ é um conjunto de controle para S em G/L_1 e seja $D_\circ$ seu conjunto de transitividade. Então existe um conjunto de controle $E \subset G/L_2$ com $\pi(D_\circ) \subset E_\circ$.*

b) *Suponha G/L_1 compacto e $C_1 \subset G/L_1$ um conjunto de controle invariante para S. Então $C_2 = \pi(C_1)$ é um conjunto de controle invariante para S em G/L_2.*

c) *Suponha, como anteriormente, G/L_1 compacto e $C_2 \subset G/L_2$ um conjunto de controle invariante para S. Então existe um conjunto de controle invariante $C_1 \subset G/L_1$ com $\pi(C_1) = C_2$.*

d) *Suponha novamente que G/L_1 é compacto, C_1 e C_2 como em b) e que para algum $y \in C_2$ tenhamos $\pi^{-1}(y) \subset C_1$. Então $C_1 = \pi^{-1}(C_2)$.*

Demonstração: a) Dado $x \in D_\circ$ e $g \in \text{int}(S)$ com $gx = x$, $g\pi(x) = \pi(gx) = \pi(x)$ então pela proposição 2.5 em [33] $\pi(x)$ pertence a algum conjunto de controle E. Tome $y \in D_\circ$, pela proposição 2.2 existe $g_1, g_2 \in \text{int}(S)$ com $g_1 y = x, g_2 x = y$, ou seja, $g_1\pi(y) = \pi(x), g_2\pi(x) = \pi(y)$. Pela maximilidade de E, como conjunto de controle temos que $\pi(y) \in E$. E mais, $\pi(y) \in E_\circ$, pois existe $g \in \text{int}(S)$ com $gy = y$ o que implica $g\pi(y) = \pi(y)$. Portanto, $\pi(D_\circ) \in E_\circ$.

b) Pelo ítem a) temos que $\pi(D_\circ) \subset E_\circ$, já a invariança do conjunto de transitividade $D_\circ$ implica que $\pi(D_\circ)$ é um conjunto de controle invariante e daí, o fato de que dois conjuntos de controle invariante ou são disjuntos ou iguais fecha a demonstração desse ítem.

c) O fato de G/L_1 ser compacto implica que $\pi^{-1}(C_2)$ é compacto e invariante para S e portanto contém um conjunto de controle invariante C_1 (ver proposição 2.2 em [29]). Tome $x \in C_1$, a invariança implica em $\pi(C_1) = \pi(\text{cl}Sx) = \text{cl}S\pi(x) = C_2$.

d) Considere o y da hipótese e tome $z \in (C_2)_\circ$. Pela proposição 2.2 existe $g \in \text{int}(S)$ com $gy = z$ tal que $g\pi^{-1}\{y\} = \pi^{-1}\{z\}$. Desde que $\pi^{-1}\{z\} \subset C_1$ e C_1 é invariante, temos que $\pi^{-1}(C_2)_\circ \subset C_1$. Como $(C_2)_\circ$ é denso em C_2 e C_1 é fechado chegamos a conclusão do ítem. □

Veremos agora um exemplo de conjunto de controle.

Exemplo 2.5 *Considere o grupo de Lie $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Tome $S = \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ o semigrupo de matrizes em $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, com entradas positivas, temos que S tem interior não vazio.*

Tomamos a ação de $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}P^{n-1}$ como sendo $g[v] = [gv], v \in \mathbb{R}^n - 0, g \in G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, aqui $[v]$ representa o subespaço gerado por $[v]$. O conjunto

$$C = \{[(x_1, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}P^{n-1} : x_i \geq 0\},$$

que corresponde ao octante positivo em $\mathbb{R}^n$, é um conjunto de controle invariante para S.

De fato, tome $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ com x_i e y_i estritamente positivos. Então considerando $g = \delta \mathrm{diag}(y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n)$, com $\delta = x_1 \cdots x_n / y_1 \cdots y_n$, temos que $g \in S$ e $g[x] = [y]$. Daí, para $[x] \in \mathrm{int} C$ temos $\mathrm{fe} S[x] = C$. Desde que, para todo $[x] \in C$ existe $g \in S$ tal que $g[x] \in \mathrm{int} C$, temos que $\mathrm{fe} S[x] = C$, para todo $[x] \in C$ e C é um conjunto de controle invariante, pois é fechado. E como veremos a seguir, ele é o único conjunto de controle para S em $\mathbb{R}P^{n-1}$.

2.3 Conjuntos de controle em variedades flag

Como havíamos comentado, o estudo dos conjuntos de controle de uma variedade flag revela muitos aspectos e propriedades do semigrupo correspondente aos conjuntos de controle. Essas propriedades serão estudadas em seções posteriores, para isto, faremos uma rápida análise dos resultados que antecedem o estudo das propriedades do semigrupo (para um estudo mais profundo ver [28], [29] e [33]).

Nessa seção, como na maior parte deste trabalho, estaremos considerando G um grupo de Lie semi-simples, conexo e com centro finito. Estaremos trabalhando também com S um semigrupo de G com interior não vazio. Recordemos que existe apenas um número finito de variedades flags (denotadas, na literatura, por fronteiras de Furstenberg, ver [34] para mais detalhes), e existe uma maximal a qual fibra equivariantemente sobre as outras. Essa propriedade permite, de uma certa forma, reduzirmos o nosso estudo às fronteiras maximais, $\mathbb{B} = G/P$. Essa redução é feita numa primeira análise, porque depois podemos extender os resultados para as outras fronteiras, como veremos num dos últimos resultados.

O teorema que vem logo a seguir, cuja demonstração é encontrada em [33], associa os conjuntos de controle de uma fronteira maximal $\mathbb{B}$ a elementos do grupo de Weyl, o que é essencial na contagem dos conjuntos de controle dos espaços homogêneos (cuja existência pode ser mostrada usando o lema de Zorn, ver [2], lema 3.1), no estudo das propriedades estruturais dos semigrupos bem como no estudo da geometria e classificação dos tipos desses semigrupos.

Denote por $b(h, w)$ o ponto fixo por h do tipo w e considere Σ o conjunto dos elementos regulares real em $\mathrm{int} S$, Σ é grande o suficiente para caracterizar os conjuntos de controle para S em $\mathbb{B}$.

Teorema 2.6 *Para cada w no grupo de Weyl W, existe um conjunto de controle D_w*

na fronteira maximal $\mathbb{B}$, *cujo conjunto de transitividade é*

$$(D_w)_\circ = \{b(h,w) : h \in \Sigma\}.$$

Existe apenas um conjunto de controle invariante $C = D_1$, *e seu conjunto de transitividade,* $(D_1)_\circ$, *é o conjunto de atratores dos elementos em* Σ. *Similarmente, existe um único conjunto de controle minimal, o conjunto dos repelentes de* Σ. *E mais, qualquer conjunto de controle é da forma* D_w *para algum* $w \in W$.

Defina $W(S) = \{w \in W : D_w = D_1\}$, foi mostrado em [33] que $W(S)$ é um subgrupo do grupo de Weyl W. O estudo das propriedades desse subgrupo permitiu demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.7 *Seja* A^+ *uma câmara de Weyl intercectando* $\mathrm{int}S$ *e seja* Π *o sistema simples de raízes definido por essa câmara.*

Então $W(S) = W_\Theta$ *para algum* $\Theta \in \Pi$.

E mais, seja P_Θ *o subgrupo parabólico associado a* Θ *e* $\pi : G/P \to G/P_\Theta$ *a projeção canônica. Seja* C *o conjunto de controle invariante para* S *em* G/P. *Então* $C = \pi^{-1}(\pi(C))$.

Um dos fatos usados para demonstrar esse último teorema é a proposição 3.6 em [33], que mostra que S é transitivo em algumas fibras de $\pi : G/P \to G/P_\Theta$, o que implica que C contém as fibras que ele intercepta. Essa proposição citada acima, mostra que o fecho da fibra $\pi^{-1}(\xi_\circ) \cap C_\circ, \xi_\circ = P_\Theta \in (C_\Theta)_\circ$ (onde $(C_\Theta)_\circ$ é o conjunto de controle invariante para S em G/P_Θ) é o conjunto de controle invariante para $S(\Theta)$ na fronteira maximal, $\pi^{-1}\{\xi_\circ\}$, de $G(\Theta)$. O semigrupo $S(\Theta)$ e o grupo de Lie semi-simples $G(\Theta)$ são obtidos a partir da intersecção de S e G com a fibra de $G \to G/P_\Theta$, para mais detalhes ver [33].

Voltando nossa atenção ao subgrupo $W(S)$, temos que as propriedades desse subgrupo, permite contar os conjuntos de controle , o que é feito a seguir

Teorema 2.8 $D_{w_1} = D_{w_2}$ *se e somente se* $W(S)w_1 = W(S)w_2$. *Então os conjuntos de controle para* S *em* $\mathbb{B}$ *estão em bijeção com* $W(S)\backslash W$, *onde esse último representa o conjunto das classes laterais à direita, do tipo* $W(S)w$, *com* $w \in W$.

Como o conjunto controlável minimal para S é invariante para S^{-1}, temos como corolário desse teorema

Corolário 2.9 $W(S^{-1}) = W(S)$.

Esses resultados, na fronteira maximal, podem ser extendidos para outras fronteiras projetando os conjuntos de controle.

Proposição 2.10 *Seja* Q *um subgrupo parabólico,* $P \subset Q$ *um subgrupo parabólico minimal e* $\pi : G/P \to G/Q$ *uma fibração equivariante canônica. Seja* $E \subset G/Q$ *um conjunto controlável para* S. *Então*

a) *Existe um conjunto controlável* $D \subset G/P$ *satisfazendo* $\pi(D_\circ) = E_\circ$.

b) $\pi(D_\circ') = E_\circ$ *se* D' *é um conjunto controlável tal que* $D_\circ' \cap \pi^{-1}(E_\circ) \neq \emptyset$.

c) *Se* E *é invariante* $\pi^{-1}(E)$ *contém o conjunto controlável invariante e vice-versa.*

E a partir disto, o teorema 2.8 implica no seguinte resultado,

Corolário 2.11 *O número de conjuntos controláveis em* G/P_Θ *é igual ao número de elementos em* $W(S)\backslash W/W_\Theta$, *ou seja, o número de órbitas para* $W(S)$ *em* W/W_Θ.

Da proposição anterior, temos que os conjuntos controláveis em outras fronteiras são obtidos por projeções dos conjuntos controláveis na fronteira maximal. Quando se faz a projeção alguns conjuntos controláveis coincidem, de tal forma que o número desses conjuntos em tal fronteira é reduzido ao número de elementos de $W(S)\backslash W/W_\Theta$. E assim, temos que o número de conjuntos de controle para S em G/P_Θ é no máximo $\mid W \mid / \mid W_\Theta \mid$.

2.4 Exemplos

Veremos agora dois exemplos da contagem dos conjuntos controláveis, para uma leitura mais completa indicamos [5].

2.4.1 Sp$(n, \mathbb{R})$

A álgebra $\mathfrak{sp}(n)$ é a álgebra das matrizes $2n \times 2n$ dadas por

$$\mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{sl}(2n) : AJ + JA^t = 0\},$$

com

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde 1 representa a identidade $n \times n$. Temos que $M \in \mathfrak{sp}(n)$ se e somente se

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

onde A, B e C são matrizes com B e C simétricas.

Uma decomposição de Cartan é dado por

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \right\},$$

onde A é anti-simétrica e B é simétrica.

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \right\},$$

onde A e B são simétricas.

Um abeliano maximal em $\mathfrak{s}$ é dado pelas matrizes diagonais,

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix},$$

com Λ matriz diagonal $n \times n$.

As raízes são $\lambda_i - \lambda_j, i \neq j$ e $\lambda_i + \lambda_j$ (onde λ_i é a i-ésima coordenada de Λ) e um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}.$$

O grupo de Weyl tem $2^n n!$ elementos e sua ação em $\mathfrak{a}$ é dada pela permutação das entradas de Λ seguido por multiplicação por $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Agora, $\mathbb{R}P^{d-1}$ é uma variedade flag de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ a qual é associada ao subconjunto

$$\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}$$

tal que o subgrupo W_Θ é o subgrupo que fixa a primeira entrada de Λ e tem $2^{n-1}(n-1)!$ elementos. Assim, o número máximo de conjuntos controláveis é

$$2^n n!/2^{n-1}(n-1)! = 2n = d.$$

2.4.2 $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$

A álgebra de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ é $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ com a representação canônica em $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^d, d = 2n$. Uma matriz complexa $n \times n, g = A + iB$ induz uma aplicação linear em $\mathbb{R}^d$ dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Pode-se mostrar que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & R \end{pmatrix} \right\}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e R uma matriz complexa $(n-1) \times (n-1)$, é a isotropia da ação transitiva de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{d-1}$. Assim, temos que G/H é isomorfo a $\mathbb{R}P^{d-1}$.

Por outro lado, o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{n-1}$ é uma fronteira de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ (ver [8]). Considere a decomposição de Cartan de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ dada por

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : X + X^* = 0\}$$

e

$$\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : X - X^* = 0\}.$$

Agora escolhamos a subálgebra abeliana $\mathfrak{a}$ como sendo a algebra das matrizes diagonais reais $n \times n$ em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Com essa escolha, um sistema simples de raizes pode ser tomado como

$$\Sigma = \{\lambda_j - \lambda_{j+1} : 1 \leq j \leq n-1\}$$

com λ_j tendo o mesmo significado do exemplo anterior. O grupo de Weyl é o grupo de permutação de $\{1, \ldots, n\}$ e a fronteira $\mathbb{C}P^{n-1}$ é associada ao subgrupo P_Θ, com

$$\Theta = \{\lambda_j - \lambda_{j+1} : 2 \leq j \leq n-1\}$$

tal que W_Θ é o grupo de permutação de $\{2, \ldots, n\}$. E mais,

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right\},$$

com $z \in \mathbb{C}$ e Q uma matriz complexa $(n-1) \times (n-1)$. Portanto, a proposição 2.10 aplicada a fibração $G/H \to G/P_\Theta$ com H normal em P_Θ (e $P_\Theta/H \approx S^1$), mostra que o número de conjuntos controláveis de um semigrupo $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ com $\mathrm{int} S \neq \emptyset$ é no máximo $n!/(n-1)! = n = d/l$.

Seção 3

Tipo parabólico de um semigrupo

3.1 Introdução

Nas seções posteriores, faremos uso da definição do tipo de S, esse conceito é central no estudo dos semigrupos. E foi introduzido em [30], [31] e [32] de diferentes formas. O que faremos aquí, é mostrar a equivalência dessas definições e assim uniformizar o conceito.

3.2 Semigrupo do tipo Θ

Considere o flag maximal $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\emptyset}$. Em [33], proposição 4.1, foi mostrado que para cada $w \in W$, existe um conjunto controlável $D(w)$ (ou D_w) tal que $x \in D(w)_0$ se e somente se x é um ponto fixo do tipo w por h , onde h é um elemento regular real em int$S$. Ainda mais, foi mostrado que qualquer conjunto controlável D é da forma $D(w)$ para algum $w \in W$. (Ver a seção 1 para maiores detalhes).

A bijeção $w \mapsto D(w)$ permite-nos distinguir os semigrupos S através de subconjuntos $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é o sistema simples de raízes associado a $\mathfrak{a}^+$, ou através da variedade homogênea $\mathbb{B}_{\Theta}$. No caso de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, um subconjunto do sistema simples é dado por um conjunto de multi-índices (que podem ser definidos pelas raízes Θ do espaço homogêneo em questão).

Podemos ainda dizer que, os semigrupos em G podem ser diferenciados de acordo com a geometria dos seus conjuntos controláveis invariantes.

Ainda no artigo [33], encontra-se a demonstração que

$$W(S) = \{w \in W : D(w) = D(1)\}$$

é um subgrupo de W gerado pelas reflexões com repeito às raízes em $\Theta(S) \subset \Sigma$. Observando que $D(1)$ é o conjunto de controle invariante para S, vemos que faz sentido usar S na notação do subgrupo $W(S)$. Neste mesmo artigo, foi mostrado também que $W(S)$ deixa invariante um cone em $\mathfrak{a}$, se S é próprio. Como $W(S)$ é finito temos que existe $H \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$, onde $\mathfrak{a}^+$ é uma câmara em $\mathfrak{a}$, tal que H é fixo pontualmente por $W(S)$, isto é, $wH = H$, para todo $w \in W(S)$. Sabemos de [34], teorema 1.1.2.8, que o grupo que deixa H fixo pontualmente é da forma W_Θ, onde $\Theta \subset \Sigma$ e W_Θ é gerado por reflexões definidas por elementos em Θ. Assim, podemos enunciar o seguinte teorema, cuja demonstração encontra-se em [33], teorema 4.3 .

Teorema 3.1 *Seja A^+ a câmara de Weyl que intercepta* $\mathrm{int}(S)$ *e seja Σ o sistema simples de raízes definido por A^+. Então $W(S) = W_\Theta$ para algum $\Theta \subset \Sigma$. E mais, seja P_Θ o subgrupo parabólico associado a Θ, $\pi : G/P \to G/P_\Theta$ a projeção canônica e C o conjunto de controle invariante por S em G/P. Então $C = \pi^{-1}(\pi(C))$.*

Existe um Θ maximal satisfazendo esta propriedade, isto é, existe um Θ maximal tal que $\pi^{-1}(C_\Theta) \subset \mathbb{B}$ é o conjunto controlável invariante em $\mathbb{B}$. De fato, a existência é encontrada em [33], teorema 4.3. Para mostrar a unicidade, suponhamos que existem Θ_1 e Θ_2 satisfazendo a propriedade acima, então temos que $W_{\Theta_1} = W(S)$ e $W_{\Theta_2} = W(S)$ pelo mesmo teorema acima citado, assim temos que $W_{\Theta_1} = W_{\Theta_2}$. Como esses dois subgrupos são parabólicos, temos que o conjunto das reflexões definidas por Θ_1 e o conjunto das reflexões definidas por Θ_2 são iguais, pois existe uma correspondência um a um entre os conjuntos de reflexões definidas por Θ e W_Θ (ver [16] seção 1.2, para mais detalhes). Daí, $\Theta_1 = \Theta_2$.

Assim, podemos mostrar a equivalência entre as definições do tipo de S usadas por San Martin em [30], [31] e [32].

Proposição 3.2 *Existe $\Theta \in \Sigma$ tal que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset G/P$ é o conjunto de controle invariante para S e tal que C_Θ está contido na variedade estável para algum elemento regular real, se e somente se, esse Θ é o subconjunto maximal tal que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset G/P$ é o conjunto de controle invariante para S.*

Demonstração: Primeiro suponhamos que Θ é o maximal, então pela proposição 6.8 em [33] temos que $W(S) = W_\Theta$, daí usando a proposição 4.8 em [33] concluimos que C_Θ está contido na variedade estável acima.

Agora supondo que existe Θ_1 contendo Θ tal que $\pi_{\Theta_1}^{-1}(C_{\Theta_1})$ é o conjunto de controle invariante para S no flag maximal, chegaremos a seguinte contradição: C_Θ não pode estar contido numa variedade estável. De fato, se o conjunto de controle invariante para S no flag maximal é $\pi_{\Theta_1}^{-1}(C_{\Theta_1})$ então o conjunto de controle invariante para S no flag $\mathbb{B}_\Theta$ é $C_\Theta = \pi_\Theta\left(\pi_{\Theta_1}^{-1}(C_{\Theta_1})\right)$. Como $\Theta \subset \Theta_1$, segue que $C_\Theta = \left(\pi_{\Theta_1}^{\Theta}\right)^{-1}(C_{\Theta_1})$, onde $\pi_{\Theta_1}^{\Theta} : \mathbb{B}_\Theta \to \mathbb{B}_{\Theta_1}$ é a projeção. Mas uma imagem inversa de uma projeção dessas não pode estar contida numa variedade estável.

Isso mostra que Θ é maximal. E no comentário logo acima foi mostrado que este maximal é único. □

Definição 3.3 *Denotamos tal Θ por $\Theta(S)$ e dizemos que ele é o tipo parabólico de S. Lembramos que qualquer semigrupo próprio com interior não vazio é do tipo parabólico Θ para algum Θ, (ver [33]).*

Esse último teorema pode também ser escrito de maneira mais completa,

Teorema 3.4 *Seja $S \subset G$ um semigrupo próprio com* $\text{int}S \neq \emptyset$. *Então existe um subconjunto $\Theta(S) \subset \Sigma$ tal que o conjunto controlável invariante para S, $C_{\Theta(S)} \subset \mathbb{B}_{\Theta(S)}$ é admissível, isto é, está contido na célula aberta de Bruhat, $\sigma(h)$, para algum h regular real em* $\text{int}S$. *E mais, se $\Theta \subset \Theta(S)$ e $\pi : \mathbb{B}_\Theta \to \mathbb{B}(S)$ é a fibração canônica então $\pi^{-1}(C_{\Theta(S)})$ é o conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{B}_\Theta$.*

Faz sentido também, denotar o tipo parabólico de S pela correspondente variedade flag $\mathbb{B}(S) = \mathbb{B}_{\Theta(S)}$, e é claro que da mesma forma garante-se a existência e unicidade de $\mathbb{B}_{\Theta(S)}$.

Observação Qualquer semigrupo do tipo parabólico Θ está contido propriamente em um semigrupo do tipo parabólico $\Theta' \supset \Theta$ se $\Theta \neq \Theta'$.

3.3 Exemplos

3.3.1 $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$

No caso particular de semigrupos com interior não vazio em $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$, a classificação deste pode também ser feita usando multi-índices, como veremos.

Considere $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e tome $\mathfrak{a}$ a álgebra das matrizes diagonais com traço zero.

As raízes são $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, onde $\lambda_i(H) = a_i$ se $H = \text{diag}\{a_1, \cdots, a_n\}$. Um sistema simples de raízes é dado por $\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \cdots, n-1\}$ e o grupo de Weyl é o grupo das permutações em n elementos. Ele age em $\mathfrak{a}$ permutando as entradas das matrizes diagonais.

Qualquer $\Theta \in \Sigma$ pode ser descrito como

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \bigcup \cdots \bigcup \Pi(i_k, j_k),$$

com $j_l + 1 < i_{l+1}$ para todo $l = 1, \ldots, k-1$, onde $\Pi(i,j) = \{\alpha_{r,r+1} : i \leq r \leq j\}$. Desta forma, W_Θ pode ser dado como o produto direto dos grupos de permutação dos subconjuntos $\{i_l, \ldots, j_l + 1\}, l = 1, \ldots, k$. Também G/P_Θ é realizado como

$$\mathbb{F}^n(1, \ldots, i_1 - 1, j_1 + 1, \ldots, i_k - 1, j_k + 1, j_k + 2, \ldots, n)$$

que representa a variedade dos flags

$$b = (V_1 \subset \cdots \subset V_{i_1 - 1} \subset V_{j_1+1} \subset \cdots \subset V_{i_k - 1} \subset V_{j_k+1} \subset \cdots \subset V_n)$$

com $V_l \subset \mathbb{R}^n$ sendo um subespaço de dimensão l. Denotando

$$r(S) = (i_1, 1, 1, \ldots, j_1, i_2, 1, 1, \ldots, j_2, \ldots, i_k, 1, 1, \ldots, j_k)$$

o multi-índice devido ao subconjunto $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \bigcup \cdots \bigcup \Pi(i_k, j_k) \subset \Sigma$ e lembrando que

$$W_\Theta = W(S) = \Pi[1, i_1]\Pi[j_1 + 1, i_1 + j_1 + 1] \cdots \Pi[j_k + 1, n],$$

aqui $\Pi[a,b]$ representa o grupo de permutação dos elementos do intervalo $[a,b] = \{a, a+1, \ldots, b\}$, dizemos que o semigrupo é do tipo $r = \{r_1, \ldots, r_l\}$ se $r(S) = r$.

Assim temos que, as definições de tipo r e tipo parabólico Θ são equivalentes para este exemplo e de acordo com o teorema 3.4 temos equivalentemente que um semigrupo é do tipo r se seu conjunto controlável invariante em $Gr_r(n)$ está contido na célula aberta de Bruhat associado ao elemento regular em seu interior.

3.3.2 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$

A álgebra $\mathfrak{sp}(n)$ é a álgebra das matrizes $2n \times 2n$ dadas por $\mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{sp}(2n) : AJ + JA^t = 0\}$, com

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde 1 representa a identidade $n \times n$.

Como vimos na seção 2, $M \in \mathfrak{sp}(n)$ se e somente se

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

onde A, B e C são matrizes com B e C simétricas.

Vimos também que as raízes são $\lambda_i - \lambda_j, i \neq j$ e $\lambda_i + \lambda_j$ (onde λ_i é a i-ésima coordenada de Λ) e um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}.$$

O grupo de Weyl tem $2^n n!$ elementos e sua ação em $\mathfrak{a}$ é dada pela permutação das entradas de Λ seguido por multiplicação por $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Agora, $\mathbb{R}P^{d-1}$ é uma variedade flag de $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ a qual é associada ao subconjunto

$$\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}$$

tal que o subgrupo W_Θ é o subgrupo que fixa a primeira entrada de Λ e tem $2^{n-1}(n-1)!$ elementos.

3.3.3 $\mathrm{S0}(p, p+1)$

Lembremos que $\mathrm{S0}(p, p+1)$ é o subgrupo de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ definido como o grupo de transformações de $\mathbb{R}^n$ de determinante 1 preservando alguma forma bilinear $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ simétrica e não degenerada mas não definida, isto é, ela tem p auto-valores positivos e $p+1$ auto-valores negativos. Sua álgebra de Lie é $\mathfrak{so}(p, p+1)$, que é a forma real normal de sua complexificada, (ver [27]).

Temos que essa é a álgebra das matrizes reais $(2p+1) \times (2p+1)$ tais que

$$XI_{p,p+1} + X^t I_{p,p+1} = 0,$$

onde

$$I_{p,p+1} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_{p+1} \end{pmatrix}$$

e 1_p representa a matriz identidade $p \times p$.

Ou seja, $\mathfrak{so}(p, p+1)$ é a álgebra das matrizes anti-simétricas em relação à forma quadrática cuja matriz é $I_{p,p+1}$. Uma matriz $X \in \mathfrak{so}(p, p+1)$ se escreve em blocos como

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^t & \gamma \end{pmatrix}$$

com α e γ anti-simétricas.

Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{so}(p, p+1)$ é

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^t & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Um abeliano maximal em $\mathfrak{s}$ é dado pelas matrizes em que β é da forma

$$\beta = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

com Λ diagonal $p \times p$. Temos o seguinte sistema simples de raízes:

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n : 1 \leq j \leq n-1\}$$

3.3.4 $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$

A álgebra de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ é $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ com a representação canônica em $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^d, d = 2n$. Uma matriz complexa $n \times n, g = A + iB$ induz uma aplicação linear em $\mathbb{R}^d$ dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Pode-se mostrar que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & R \end{pmatrix} \right\}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e R uma matriz complexa $(n-1) \times (n-1)$, é a isotropia da ação transitiva de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{d-1}$. Assim, temos que G/H é isomorfo a $\mathbb{R}P^{d-1}$.

Por outro lado, o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{n-1}$ é uma fronteira de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ (ver [8]). Como vimos na seção 2, considerando uma decomposição de Cartan temos o seguinte sistema simples de raízes:

$$\Sigma = \{\lambda_j - \lambda_{j+1} : 1 \leq j \leq n-1\}$$

com λ_j tendo o mesmo significado do exemplo anterior. O grupo de Weyl é o grupo de permutação de $\{1, \ldots, n\}$ e a fronteira $\mathbb{C}P^{n-1}$ é associada ao subgrupo P_Θ, com

$$\Theta = \{\lambda_j - \lambda_{j+1} : 2 \leq j \leq n-1\}$$

tal que W_Θ é o grupo de permutação de $\{2, \ldots, n\}$. E mais,

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right\},$$

com $z \in \mathbb{C}$ e Q uma matriz complexa $(n-1) \times (n-1)$.

Seção 4

Conjuntos de controle em G/AN

4.1 Introdução

O objetivo dessa seção é descrever os conjuntos de controle invariantes no espaço homogêneo G/AN, essa descrição é de suma importância nesse trabalho, pois como veremos, a topologia do conjunto de controle invariante em G/AN reduz-se à topologia de um subgrupo compacto, e esse subgrupo compacto que fornece a homotopia do semigrupo.

O estudo dos conjuntos de controle invariantes em G/AN é feito através das fibrações

$$G/AN \to G/MAN \to G/P_\Theta,$$

usando o fato de que a última fibração, da sequência acima, é trivial sobre a célula aberta de Bruhat que contém o conjunto de controle invariante de G/P_Θ.

4.2 Conjuntos de controle

Assumiremos aqui que S é conexo, colocaremos $\Theta = \Theta(S)$ e representaremos C_Θ como sendo o único conjunto controlável invariante de S em $\mathbb{B}_\Theta = G/P_\Theta$. O conjunto de transitividade de C_Θ será representado por C_Θ^0. E ainda, denotaremos por $C(\mathbb{B})$ o único conjunto controlável invariante na variedade flag maximal G/MAN. Ele é dado por $C(\mathbb{B}) = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta)$, onde $\pi_\Theta : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_\Theta$ é a fibração canônica. Denotaremos seu conjunto de transitividade por $C(\mathbb{B})_0 = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta^0)$. Essas imagens inversas, isto é, esses conjuntos de controle invariantes se decompõem como produtos carteseanos da seguinte forma: recordemos que C_Θ está contido em alguma célula de Bruhat aberta, digamos σ, de $\mathbb{B}_\Theta$. Desde que o fibrado $\pi_\Theta : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_\Theta$ é trivial sobre σ, segue que $\pi_\Theta^{-1}(\sigma) \approx \sigma \times F_\Theta$, onde F_Θ é a fibra $F_\Theta = P_\Theta/P$. Portanto, $C(\mathbb{B}) \approx C_\Theta \times F_\Theta$ e $C(\mathbb{B})_0 \approx C_\Theta^0 \times F_\Theta$.

Agora, levantaremos o conjunto controlável invariante $C(\mathbb{B})$ a G/AN. Considere a fibração

$$\pi_1 : G/AN \longrightarrow G/MAN.$$

Como AN é normal em MAN, esse fibrado é principal, sua fibra é o grupo compacto $M \approx MAN/AN$. A projeção π_1 é equivariante com respeito às ações de G nos espaços homogêneos G/AN e G/MAN, isto é, $g \circ \pi_1 = \pi_1 \circ g$ para todo $g \in G$. Também, M tem uma ação à direita natural em G/AN, a qual comuta com a ação à esquerda de G.

A equivariança de π_1 implica que $\pi_1(C)$ é um conjunto controlável invariante por S em $\mathbb{B}$, se $C \subset G/AN$ é um conjunto controlável invariante. Em outras palavras, os conjuntos de controle invariantes por S em G/AN estão contidos em $\pi_1^{-1}(C(\mathbb{B}))$. Analogamente, o conjunto de transitividade C_0 de um conjunto controlável invariante está contido em $\pi_1^{-1}(C(\mathbb{B})_0)$ (ver proposição 2.4).

O fato de termos que S é conexo, implica que seus conjuntos de controle invariantes são também conexos. Em particular se $C \subset G/AN$ é um conjunto controlável invariante para S então ele está contido em uma componente conexa de $\pi_1^{-1}(C(\mathbb{B}))$. Seu conjunto de transitividade C_0 é também conexo e assim está contido em uma componente de $\pi_1^{-1}(C(\mathbb{B})_0)$. Na verdade, temos que

Lema 4.1 *S age transitivamente em qualquer componente conexa de $\pi_1^{-1}(C(\mathbb{B})_0)$.*

Demonstração: Considere a restrição do fibrado principal

$$\pi_1 : G/AN \to G/MAN$$

ao conjunto aberto $C(\mathbb{B})_0$. Seu grupo estrutural é compacto, e S age nele como um semigrupo de automorfismos do fibrado. Também, S age transitivamente na base $C(\mathbb{B})_0$. Assim, o lema segue da proposição 3.9 em [4], o qual afirma que, um semigrupo agindo em um fibrado principal conexo, com fibra compacta, é transitivo se ele é transitivo na base do fibrado. □

Desse lema estabelecemos a seguinte caracterização dos conjuntos controláveis invariantes de S em G/AN.

Proposição 4.2 *Assuma que S é conexo. Denotamos por C_Θ^0 o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante para S em G/P_Θ, onde $\Theta = \Theta(S)$. Considere a fibração canônica $\pi : G/AN \to G/P_\Theta$. Seja $C \subset G/AN$ um conjunto controlável invariante para S. Então C é uma componente conexa de $\pi^{-1}(C_\Theta)$ e C_0 é uma componente conexa de $\pi^{-1}(C_\Theta^0)$. Reciprocamente, o fecho em G/AN de uma componente conexa de $\pi^{-1}(C_\Theta^0)$ é um conjunto controlável invariante para S em G/AN.*

Demonstração: Pela escolha de G/P_Θ segue que $C(\mathbb{B})_0 = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta^0)$ onde π_Θ é a projeção $G/P \to G/P_\Theta$. Também existe uma célula aberta de Bruhat $\sigma \subset G/P_\Theta$ tal que $C_\Theta \subset \sigma$. A restrição de π a σ define um fibrado trivial. Desde que C_Θ é conexo e está contido em σ, segue que as componentes conexas de $\pi^{-1}(C_\Theta)$ estão contidas nas componentes conexas de $\pi^{-1}(\sigma)$. Analogamente, as componentes conexas de $\pi^{-1}(C_\Theta^0)$ estão contidas nas componentes de $\pi^{-1}(\sigma)$. Isto junto com o fato de que C_Θ^0 é denso em C_Θ implica que o fecho de uma componente de $\pi^{-1}(C_\Theta^0)$ é uma componente de $\pi^{-1}(C_\Theta)$ e os fechos de duas componentes diferentes de $\pi^{-1}(C_\Theta^0)$ são disjuntas.

Agora, π decompõe como

$$G/AN \to G/MAN \to G/P_\Theta.$$

Desde que a fibra de G/MAN é conexa, segue que as componentes conexas de $\pi^{-1}(C_\Theta^0)$ são as componentes sobre $C(\mathbb{B})_0$ na fibração

$$G/AN \to G/MAN.$$

Assim, o lema anterior afirma que uma componente conexa de $\pi^{-1}(C_\Theta)$ é um conjunto controlável invariante de S. E mais, isto implica que qualquer conjunto controlável invariante é uma dessas componentes, pois sua união é $\pi^{-1}(C_\Theta)$. □

Note que a trivialidade do fibrado $G/AN \to G/P_\Theta$ sobre C_Θ significa que $\pi^{-1}(C_\Theta)$ é difeomorfo a $C_\Theta \times F$, onde $F = P_\Theta/AN$ é a fibra. Claramente, uma das componentes conexas de F é P_Θ^0/AN, onde P_Θ^0 é a componente da identidade de P_Θ. As outras componentes são obtidas da mesma forma a partir das componentes de P_Θ. Essas componentes são difeomorfas, pois elas são obtidas uma da outra pela ação à direita de M, como segue pelo lema 1.2.4.5 em [34], o qual afirma que $P_\Theta = MP_\Theta^0$. Portanto a proposição anterior junto com o fato que C_Θ é conexo implica a seguinte afirmação

Corolário 4.3 *Com a hipótese de que S é conexo, qualquer conjunto controlável invariante $C \subset G/AN$ é difeomorfo a $C_\Theta \times P_\Theta^0/AN$. E mais, $C_0 \approx C_\Theta^0 \times P_\Theta^0/AN$.*

Lembrando que $P_\Theta = M_\Theta(K)AN$, onde $M_\Theta(K)$ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K (ver [34], teorema 1.2.4.8). Denotamos por $K(\Theta)$ a componente da identidade de $M_\Theta(K)$. Então $P_\Theta^0 = K(\Theta)AN$, portanto a fibra P_Θ^0/AN é difeomorfa a $K(\Theta)$. Daí que obtemos a seguinte versão do corolário acima, o qual enunciaremos para futuras referências.

Corolário 4.4 *Com a hipótese de que S é conexo, qualquer conjunto controlável invariante $C \subset G/AN$ é difeomorfo a $C_\Theta \times K(\Theta)$. E mais, $C_0 \approx C_\Theta^0 \times K(\Theta)$. Aqui, $\Theta = \Theta(S)$.*

Para concluir essa seção, gostaríamos de adiantar um resultado que veremos na próxima seção, o lema 5.1: para o caso de S exp-gerado temos que C_Θ^0 é contrátil e assim a fibra F é difeomorfa a C_0.

Seção 5

Homotopia e semigrupos

5.1 Introdução

Nessa seção demonstraremos alguns resultados sobre grupos de homotopia, os quais serão usados nos principais resultados desse trabalho. Será amplamente usado as construções de homotopias entre caminhos nas demonstrações dessa seção.

5.2 Semigrupos grandes

Antes de iniciar os resultados, gostaríamos de colocar algumas definições e notações sobre semigrupos.

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dizemos que um semigrupo $S \subset G$ é exp-gerado se existe um subconjunto $U \subset \mathfrak{g}$ tal que S é gerado pelos semigrupos a um-parâmetro $\exp(tX)$, $X \in U$, $t \geq 0$, isto é,

$$S = \langle \exp(\mathbb{R}^{+}U) \rangle.$$

Nesse caso dizemos que S é gerado por U.

Por outro lado, um semigrupo é chamado semigrupo de Lie (ou semigrupo infinitesimalmente gerado) se ele é o fecho de um semigrupo exp-gerado (ver Hilgert e Neeb [12] e Neeb [22]). Aqui mudamos a terminologia para enfatizar que não estamos exigindo que S seja fechado, pois não necessitamos dessa hipótese.

Na sequência, as típicas hipóteses sobre um semigrupo é que ele contenha um semigrupo, gerado por um subconjunto na álgebra de Lie, grande o suficiente. Observemos que os semigrupos de Lie contém esse tipo de condição, e é claro, estamos considerando semigrupos com interior não vazio. Observamos que no caso de S ser exp-gerado, temos que $C_{\Theta}^{0} = \mathrm{int} C_{\Theta}$ (ver [33], seção 2).

Gostaríamos de mostrar o seguinte resultado importante para as seções seguintes, onde afirma que para um semigrupo exp-gerado seu conjunto controlável invariante na variedade flag é contrátil. Ese lema foi provado por Mittenhuber [21], lema 2.11. Desde que o resultado de [21] é restrito a grupos de posto um, faremos a demonstração no caso mais geral.

Lema 5.1 *Suponha que T é um semigrupo* exp-gerado *com* $\mathrm{int}T \neq \emptyset$. *Coloque* $\Theta = \Theta(T)$ *e seja* C_Θ *seu conjunto controlável invariante em* G/P_Θ *e* C_Θ^0 *seu interior. Então* C_Θ *e* C_Θ^0 *são contráteis.*

Demonstração: Existe um elemento regular real $h \in \mathrm{int}T$ tal que seu atrator, digamos $x \in G/P_\Theta$, pertence a C_Θ^0, e C_Θ está contido na variedade estável $\mathrm{st}(h)$ de h. Isto implica que $h^k y \to x$ para todo $y \in C_\Theta$. Pela compacidade de C_Θ, para qualquer vizinhança U de x existe k_0 tal que $h^k C_\Theta \subset U$ se $k \geq k_0$. Em particular, podemos escolher U contrátil em x, isto é, existe uma aplicação contínua $\Phi : [0,1] \times U \to U$ tal que $\Phi(0,\cdot) = 1_U$, $\Phi(1,\cdot) = x$. Por outro lado, desde que T é exp-gerado, existe um ciclo continuo $g_t \in T$, $t \in [0,u]$, com $g_0 = 1$ e $g_u = h^k$. Então a aplicação $\Phi_1 : [0,u] \times C_\Theta \to C_\Theta$, $\Phi_1(t,y) = g_t y$ contrai C_Θ sobre U. Unindo estas aplicações, conseguimos uma contração de C_Θ em x. □

Temos agora a seguinte definição que será amplamente usada na seção 7.

Definição 5.2 *Sejam* $T_1 \subset T_2$ *semigrupos com interior não vazio. Dado uma variedade flag* $\mathbb{B}_\Theta = G/P_\Theta$, *dizemos que* T_1 *é* Θ*-grande (ou* $\mathbb{B}_\Theta$*-grande) em* T_2 *se os conjuntos controláveis invariantes para ambos* T_1 *e* T_2, *em* $\mathbb{B}_\Theta$, *coincidem. Também,* T_1 *é grande em* T_2 *se* T_1 *é* Θ*-grande para cada* Θ.

Desde que os conjuntos controláveis invariantes de semigrupo são obtidos projetando os conjuntos controláveis invariantes na variedade flag maximal $\mathbb{B}$ (veja seção 2), segue que T_1 é grande em T_2 se e somente se é $\mathbb{B}$-grande em T_2. Também, T_1 é grande em T_2 no caso $\Theta(T_1) = \Theta(T_2) = \Theta$ e T_1 é Θ-grande in T_2. De fato, neste caso os conjuntos controláveis invariantes em $\mathbb{B}$, para ambos semigrupos, é a imagem inversa, sobre a projeção $\mathbb{B} \to \mathbb{B}_\Theta$, do conjunto controlável invariante comum em $\mathbb{B}_\Theta$.

Observação 5.3 *Suponha que* $S_1 \subset S$ *são semigrupos conexos com* $\mathrm{int}S_1 \neq \emptyset$ *e* S_1 *grande em* S. *Então temos que os conjuntos controláveis em* G/AN, *para ambos os semigrupos, são componentes conexas de* $\pi^{-1}(C_\Theta)$, *onde* C_Θ *é o conjunto controlável em* G/P_Θ. *Então, em* G/AN *os conjuntos controláveis invariantes também coincidem.*

5.3 Homotopia

Recordemos que o n-ésimo grupo de homotopia $\pi_n(X, x_0)$ de um espaço, com ponto base em $x_0 \in X$, é o conjunto das classes de homotopia das aplicações $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x_0)$, onde $\mathbb{S}^n$ representa a n esfera e s_0 é o ponto base em $\mathbb{S}^n$, ou seja, $s_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Gostaríamos também de lembrar a definição de equivalência homotópica fraca para futuras referências.

Definição 5.4 *Sejam* X *e* Y *espaços, uma aplicação* $f : X \to Y$ *é chamada equivalência homotópica fraca se* $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ *é um a um e* $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ *é um isomorfismo para todo* $n \geq 1$ *e todo ponto* $x_0 \in X$.

Os seguintes fatos sobre homotopia de semigrupos são usados extensivamente na sequência.

Proposição 5.5 *Suponha que S é conexo e contém um semigrupo* exp*-gerado T com* $\mathrm{int}T \neq \emptyset$. *Seja $i : \mathrm{int}S \longrightarrow S$ a inclusão. Então o homomorfismo induzido $i_* : \pi_n(\mathrm{int}S) \longrightarrow \pi_n(S)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Desde que S é conexo por caminhos, podemos fixar um ponto base $g_0 \in \mathrm{int}(S)$. Seja $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (\mathrm{int}S, g_0)$ tal que $i_*[\gamma] = [i \circ \gamma] = 1$ em $\pi_n(S)$. Então, existe uma aplicação contínua $\Phi : [0,1] \times \mathbb{S}^n \rightarrow S$ tal que

$$\Phi(0,\tau) = \gamma(\tau),\ \Phi(1,\tau) = g_0$$

para todo $\tau \in \mathbb{S}^n$. Por hipótese, existe um ciclo continuo $\beta : [0,1] \rightarrow S$ tal que $\beta(0) = 1$ e $\beta(]0,1]) \subset \mathrm{int}T \subset \mathrm{int}S$ (ver [12], teorema 3.8). Defina $\Psi : I \times \mathbb{S}^n \rightarrow S$ por

$$\Psi(t,\tau) = \Phi(t,\tau)\beta(t(1-t)).$$

Então, Ψ é uma deformação de γ num caminho constante em g_0. E mais, $\mathrm{im}\Psi \subset \mathrm{int}S$, pois $\mathrm{int}S$ é um semigrupo ideal denso de S e $\beta(t(1-t)) \in \mathrm{int}S$ se $t \neq 0,1$. Assim, $[\gamma] = [g_0]$ em $\mathrm{int}S$, mostrando que i_* é injetora. Por outro lado, tome $[\gamma] \in \pi_n(S)$ com $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (S, g_0)$. Então

$$\Phi : I \times \mathbb{S}^n \rightarrow S, (t,\tau) \mapsto \beta(t)\gamma(\tau)$$

deforma o caminho γ sobre um caminho com ponto base em g_0, o qual está inteiramente em $\mathrm{int}S$. Assim, $[\gamma] \in \mathrm{im}(i_*)$, implicando que i_* é sobrejetora. □

Lema 5.6 *Suponha que $T \subset S$ é* exp*-gerado. Seja $\gamma : X \rightarrow S$ uma aplicação contínua, com X um espaço topológico, e tome $h \in T$. Então $h\gamma$ e γh são homotópicos a γ em S.*

Demonstração: Desde que T é exp-gerado, existe um caminho continuo $h_t \in T \subset S$, $t \in [0,1]$, tal que $h_0 = 1$ e $h_u = h$. Defina $\Phi : [0,u] \times X \rightarrow S$ por

$$\Phi(t,x) = h_t\gamma(x).$$

Claramente, Φ é contínua, devido a continuidade da aplicação produto em G. E mais, $\Phi(0,x) = \gamma(x)$ e $\Phi(u,x) = h\gamma(x)$ para todo $x \in X$. Desde que $\Phi(t,x) \in T \subset S$ para todo $(t,x) \in [0,u] \times X$ segue que Φ é uma homotopia entre γ e $h\gamma$ em S. Para ver que γh é homotópico a γ, tome a homotopia $\gamma(x)h_t$. □

Lema 5.7 *Com as mesmas hipóteses e notações do lema anterior, as aplicações $\pi_n(S,g) \rightarrow \pi_n(S,hg)$, $[\gamma] \mapsto [h\gamma]$ e $\pi_n(S,g) \rightarrow \pi_n(S,gh)$, $[\gamma] \mapsto [\gamma h]$ são isomorfismos.*

Demonstração: O isomorfismo, translação à direita ou à esquerda, coincide com o isomorfismo dado pelo caminho h_tg ou gh_t, onde como antes h_t é o caminho unindo 1 a h em T (ver a demonstração do teorema 7.2.3 em Maunder [20]). □

Seção 6

Reversibilidade

6.1 Introdução

Nas seções que vem a seguir, usamos fortemente a noção de reversibilidade, como alguns resutados a ela ligados, assim, nessa seção trataremos de reversibilidade de um semigrupo.

6.2 Reversibilidade

Recordamos que um subsemigrupo T de um grupo L é reversível à direita [respectivamente, à esquerda] se uma das seguintes condições é satisfeita

i) Para todo $h_1, h_2 \in L$, $Th_1 \cap Th_2 \neq \emptyset$ $[h_1T \cap h_2T \neq \emptyset]$.

ii) $T^{-1}T$ $[TT^{-1}]$ é um subgrupo.

Dizemos que S é reversível se S é reversível à direita e à esquerda.

Claramente, T é reversível se e somente se T^{-1} é reversível a esquerda. No caso de L ser conexo e $\mathrm{int}T \neq \emptyset$ temos que T é reversível a direita [esquerda] se e somente se $T^{-1}T$ $[TT^{-1}]$ coincide com L.

O seguinte lema trata de propriedades básicas e conhecidas de reversibilidade que serão usadas mais tarde.

Lema 6.1 *O subsemigrupo $T \subset L$ é reversível à direita se e somente se para qualquer subconjunto finito $\{h_1, \ldots, h_k\} \subset L$, $k \geq 1$, uma das seguintes condições valem*

1. $(Th_1) \cap \cdots \cap (Th_k) \neq \emptyset$.

2. *Existe $h \in L$ tal que $h_i \in hT$, $i = 1, \ldots, k$ (e assim $h_iT \subset hT$).*

Condições simétricas valem para reversibilidade à esquerda.

Demonstração: Não é difícil ver que a primeira condição é suficiente. Para ver que ela é necessária tome $h_1, \dots, h_k \in L$ $k \geq 3$, e proceda por indução. Assuma que

$$(Th_1) \cap \cdots \cap (Th_{k-1}) \neq \emptyset$$

e tome h nesta intersecção. Então $Th \subset (Th_1) \cap \cdots \cap (Th_{k-1})$. Pela reversibilidade, $Th \cap Th_k \neq \emptyset$, daí o lema segue.

Como na segunda condição, reversibilidade a direita é equivalente a $(h_1T^{-1}) \cap \cdots \cap (h_kT^{-1}) \neq \emptyset$ para algum subconjunto finito. Agora, $h \in L$ pertence a esta intersecção se e somente se $h_i \in hT$, $i = 1, \dots, k$. Assim a equivalencia das condições seguem. □

Outro fato conhecido sobre reversibilidade é que conjuntos compactos podem ser transladados dentro de semigrupos reversíveis (p.ex. [12] , lema 3.37). Reproduziremos a prova aqui para enfatizar que a translação é feita por um elemento do semigrupo e não do grupo como é feito em [12]. Para ser mais exato, o lema 3.37 em [12] mostra que para um semigrupo S exponencialmente gerado satisfazendo $G = S^{-1}S$ tem-se que para qualquer compacto $K \subseteq G$ existe $g_\circ \in G$ tal que $K \subseteq g_\circ S$.

Mas usando o lema anterior podemos mostrar que o resultado também vale para S reversível à direita, e mais, a translação pode ser feita por $g \in S$.

Lema 6.2 *Seja $T \subset L$ um semigrupo contido no grupo conexo L, o qual é reversível à direita [esquerda]. Se $K \subset L$ é compacto então existe $g \in T$ tal que gK [Kg] está contido em T.*

Demonstração: Suponha que T é reversível à direita. Então $L = T^{-1}T$, daí $K \subset \bigcup_{g \in T} g^{-1}T$. Por compacidade existem $g_1, \dots, g_k \in T$ tal que

$$K \subset g_1^{-1}T \cup \cdots \cup g_k^{-1}T.$$

Usando a segunda condição do lema anterior, temos que existe $g \in L$ com $g_i^{-1} \in g^{-1} \in g^{-1}T$, $i = 1, \dots, k$, assim $K \subset g^{-1}T$, isto é, $gK \subset T$. Desde que $g_i \in T$, segue que $g \in T$. □

Um outro fato interessante e importante no estudo do recobrimento de semigrupos exp-gerado, é o isomorfismo entre o grupo fundamental desse semigrupo e o grupo fundamental do grupo que contem esse semigrupo, a demonstração pode ser encontrada em [12], teorema 3.38.

Proposição 6.3 *Considere $T \subset L$ um semigrupo* exp*-gerado e reversível, contido em um grupo de Lie conexo L. Então, o homomorfismo $i_* : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(L)$, induzido pela inclusão $i : S \to G$, é um isomorfismo.*

Agora faremos um estudo de reversibilidade em espaços simétricos. Desta discussão concluiremos que as órbitas de S no espaço simétrico Riemanniano associado a G são contráteis. Este fato mostra que, da mesma forma que acontece com G, a topologia de S está contida na parte compacta de G.

Mas antes precisaremos de um lema provado por Furstemberg que enunciaremos após uma definição. Sua demonstração pode ser encontrada em [9], lema 3.2.

Seja H um grupo, $L \subset H$ um subgrupo e $T \subset H$ um semigrupo. Dizemos que T é reversível módulo L se $Tx \cap Ty \neq \emptyset$ para todo $x, y \in H/L$. É claro que um semigrupo reversível a direita é em particular reversível módulo $L = \{1\}$. Tambem, T é reversível módulo L se e somente se $T^{-1}Tx = H/L$ para todo $x \in H/L$.

Lema 6.4 *Suponha que G é um grupo de Lie semi-simples não compacto e seja G/K o espaço simétrico correspondente, onde K é um subgrupo compacto maximal de G. Seja $T \subset G$ um semigrupo com $\mathrm{int}T \neq \emptyset$. Então T é reversível módulo K.*

Antes de provar a contractibilidade da órbita, precisamos provar um tipo de generalização do teorema 3.38 em [12], que só é possível mostrando que qualquer compacto no espaço em questão pode ser transladado para dentro de qualquer órbita do semigrupo, os dois próxi- mos lemas serão necessários para demonstrar essa translação.

Lema 6.5 *Seja $U \subset G$ um aberto e tome $g \in U$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in G/K$, o conjunto $U^n y$ contém a bola do espaço simétrico de centro $g^n y$ e raio $n\varepsilon$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Em [9], lema 3.2, o aberto U é tomado da forma $U = U_\circ g$, com $U_\circ$ uma vizinhança da identidade de G e ε dependendo apenas de $U_\circ$. De fato, dado $g \in U$, pode-se escrever $U = U_\circ g$ com $U_\circ = Ug^{-1}$. Assim, a escolha de ε depende apenas de U e $g \in U$, ou seja, de $U_\circ$. □

Esse lema, mais o lema 6.4, possibilita mostrar que qualquer bola do espaço simétrico pode ser colocada dentro de uma órbita qualquer do semigrupo.

Lema 6.6 *Seja $S \subset G$ um semigrupo aberto. Tome $x \in G/K$ e seja $B \subset G/K$ uma bola de raio ρ. Então, existe $h \in S$ tal que $hB \subset Sx$.*

Demonstração: Tome $z \in B$. Como S é reversível módulo K, existe $h_\circ \in S$ tal que $h_\circ z \in Sx$. Defina $y = h_\circ x$ e tome um aberto $U \subset S$ e $g \in U$. Pelo lema anterior, existe ε tal que a bola de centro $g^n y$ e raio $n\varepsilon$ está contida em $U^n y$. Como $U^n \subset S$ e $y \in Sx$, segue que $U^n y \subset Sx$. Tomando n suficientemente grande, a bola $B(g^n y, 17\rho)$ de centro $g^n y$ e raio 17ρ fica dentro da órbita Sx.

Dado um n como esses, tome $h = g^n h_\circ$. Então $hB \subset Sx$. De fato, B está contido na bola de centro z e raio 2ρ. Por ser h isometria, $h(B(z, 2\rho)) = B(hz, 2\rho)$. Mas, $hz = g^n y$, portanto, $B(hz, 2\rho) \subset B(hz, 17\rho) \subset Sx$, mostrando que $h(B(z, 2\rho)) \subset Sx$
□

E daí temos o seguinte corolário, que trata da translação comentada acima.

Corolário 6.7 *Se $Q \subset G/K$ é compacto e $x \in G/K$ então existe $h \in S$ tal que $hQ \subset Sx$.*

Usando esse fato podemos provar a seguinte injetividade

Proposição 6.8 *Seja G um grupo de Lie semi-simples e de centro finito e considere também $T \subset G$ um semigrupo* exp*-gerado e com interior não vazio e $K \subset G$ um subgrupo compacto maximal de G. Tome $x \in G/K$ considere a inclusão $i : Tx \to G/K$. Então o homomorfismo induzido $i_* : \pi_n(Tx) \to \pi_n(G/K)$ é injetor.*

Demonstração: Fixe $x_0 \in TX$ e seja $\gamma_0 : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (Tx, x_0)$ um ciclo tal que $i_*[\gamma_0] = 1$ em $\pi_n(G/K)$. Então existe uma homotopia em x_0, $\Phi : I \times \mathbb{S}^n \to G/K$ tal que $\Phi(0, \cdot) = \gamma_0$ e $\Phi(1, \cdot) = x_0$. A imagem Q de Φ é compacta em G/K, assim existe $g \in T$ tal que $gQ \subset Tx$. A aplicação $\Psi(t,s) = g\Phi(t,s)$ é uma homotopia em gx_0 levando o ciclo $g\gamma_0$ sobre gx_0. Assim, $[g_0\gamma_0] = 1$ em $\pi_n(Tx, gx_0)$.

Agora, nós usamos o fato que T é exp-gerado e procedemos como no lema 5.7 para verificar que $\gamma \mapsto g\gamma$ define um isomorfismo entre $\pi_n(Tx, x_0)$ e $\pi_n(Tx, gx_0)$. Implicando que $[\gamma_0] = 1$ em $\pi_n(Tx, x_0)$. □

Usando o lema 6.4, a proposição acima implica imediatamente que as órbitas de semigrupos de Lie em espaços simétricos Riemannianos são contráteis.

Corolário 6.9 *Com as mesmas notações acima, seja $S \subset G$ um semigrupo* exp*-gerado com* int$S \neq \emptyset$. *Então* (int$S$)x *é contrátil para qualquer $x \in G/K$.*

Demonstração: Segue do Lema anterior que int$S$ é reversível módulo K. Então a proposição 6.8 implica que o homomorfismo induzido pela inclusão $i : (\text{int}S)x \to G/K$ é injetivo. Agora, g/K é difeomorfo a um espaço Euclideano. Assim,os grupos de homotopia de (int$S$)x são triviais. Sendo aberto em G/K, (int$S$)x é uma variedade e assim um CW-complexo. Portanto, pelo teorema de Whitehead, segue que (int)x é contrátil. □

Temos ainda os seguintes resultados que garantem reversibilidade, em particular, o lema abaixo é muito importante para a seção 7 .

Lema 6.10 *Suponha que R é um grupo de Lie solúvel e que $U \subset R$ é um semigrupo aberto que contenha um elemento* $\exp X$ *tal que* $\text{Re}\lambda \geq 0$ *para todos autovalores λ de* ad(X). *Então U é reversível à esquerda.*

Demonstração: Ver Ruppert [25], lema 4.6: □

Proposição 6.11 *1. Um subsemigrupo de um grupo nilpotente é sempre reversível*

2. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie compacta e $S \subseteq G$ um subsemigrupo com interior não-vazio. Então S é reversível.

Demonstração: Ver [14], proposição 3.45. □

Seção 7

Isomorfismo

7.1 Introdução

Como antes, S representa um semigrupo com interior não vazio em G. Seja C um conjunto controlável invariante de S em G/AN e C_0 seu conjunto de transitividade. O propósito dessa seção é provar que os grupos de homotopia de S e C_0 são isomorfos. Para isto, necessitaremos que S admita um semigrupo grande e exp-gerado. No entanto, muitas demonstrações serão feitas de forma mais geral, de tal forma que não especificaremos as condições requeridas para S, a não ser $\text{int}S \neq \emptyset$.

O isomorfismo será realizado pela aplicação avaliação. Fixe $x \in C_0$ e denote por e_x (ou simplesmente por e) a aplicação $e : S \to C_0$ dada por $e(g) = gx$. Será provado que os homomorfismos induzidos e_*, entre os grupos de homotopia, são isomorfismos. Gostaríamos de lembrar que as notações serão as mesmas da seção 4.

7.2 Sobrejetividade

Em vista do corolário 4.3, C_0 é difeomórfo a $C_\Theta^0 \times F_0$, onde $F_0 = P_\Theta^0/AN$. Para os semigrupos considerados aqui C_Θ^0 é contrátil, de tal forma que qualquer representante de classe de homotopia em C_0 é homotópico a um em F_0. A sobrejetividade de e_* será provada mostrando a existência de uma seção $\sigma : F \to \text{int}S$ para a aplicação avaliação, lembrando que F é a fibra $F = P_\Theta/AN$ do fibrado $\pi : G/AN \to G/P_\Theta$.

Para conseguir tal seção, alguns resultados serão necessários. Iniciaremos com o seguinte resultado de carater geral.

Proposição 7.1 *Seja $R \subset L$ um subgrupo normal fechado do grupo de Lie L tal que L é o produto semi-direto $L = B \times_s R$. Tome um semigrupo aberto $T \subset L$ e suponha que $T/R = L/R$ e $T \cap R$ é reversível à esquerda. Então é possível levantar qualquer subconjunto compacto $Q \subset L/R$ dentro de T, isto é, existe $z \in T \cap R$ tal que $Q \times \{z\} \subset T$.*

Demonstração: Desde que $T/R = L/R$ e T é aberto, existe, para cada $x \in Q$, uma vizinhaça U_x de x em L/R e $z_x \in R$ tal que $U_x \times \{z_x\} \subset T$. Existe uma liberdade de escolha de z_x. De fato, se $w \in T \cap R$, então $(U_x \times \{z_x\})w \subset T$ e

$$(U_x \times \{z_x\})w = U_x \times \{z_x w\}.$$

Potanto, podemos escolher qualquer elemento em $z_x(T \cap R)$ ao invés de z_x.

Escolha $x_1, \ldots, x_n \in Q$ tal que $\{U_{xi}\}_{i=1,\ldots,n}$ é um recobrimento de Q. Desde que $U_x \times \{z_x(T \cap R)\}$ está contido em T, para concluir a demonstração é suficiente verificar que existem $w_1, \ldots, w_n \in T \cap R$ tal que $z_{x_1}w_1 = \cdots = z_{x_n}w_n$. Note que isto é equivalente a

$$z_{x_1}(T \cap R) \cap \cdots \cap z_{x_n}(T \cap R) \neq \emptyset,$$

o qual pelo lema 6.1 é equivalente a reversibilidade à esquerda de $T \cap R$. □

Agora, aplicaremos esta proposição para levantar a fibra F dentro de int$S$. Fixe $x \in C_0$ e coloque $y = \pi(x)$. Podemos assumir sem perda de generalidade que AN é o subgrupo de isotropia em x e P_Θ é a isotropia de y. Estas hipóteses implicam que int$S$ encontra AN e P_Θ. Tome uma decomposição $P_\Theta = M_\Theta A_\Theta N_\Theta$ de P_Θ, como foi mencionado na seção 1. O subgrupo $A_\Theta N_\Theta$ é fechado e normal e P_Θ torna-se o produto semi-direto de M_Θ por $A_\Theta N_\Theta$.

Seja P_Θ^0 a componente conexa da identidade de P_Θ. Então $P_\Theta^0 = M_\Theta^0 A_\Theta N_\Theta$, como M_Θ tem um número finito de componentes conexas, o mesmo ocorre com P_Θ. Isso acarreta que $(\text{int}S) \cap P_\Theta^0 \neq \emptyset$. E se int$S \cap P_\Theta \neq \emptyset$, segue que int$S$ intercepta P_Θ^0.

Agora, P_Θ^0 é o produto semi-direto de M_Θ^0 e $A_\Theta N_\Theta$, assim a proposição anterior pode ser aplicada para $L = P_\Theta^0$, $R = A_\Theta N_\Theta$ e $T = (\text{int}S) \cap P_\Theta^0$, assim que obtermos os seguintes lemas

Lema 7.2 $T/A_\Theta N_\Theta = P_\Theta^0/A_\Theta N_\Theta$.

Demonstração: Esse lema foi provado em [33]. Eis um esboço da demonstração: desde que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta)$ é o conjunto controlável invariante em G/MAN, segue que T é transitivo na fibra $\pi_\Theta^{-1}(y)$. No entanto, $A_\Theta N_\Theta$ fixa cada ponto desta fibra, de tal forma que a projeção pr(T) de T sobre M_Θ^0 é transitiva em $\pi_\Theta^{-1}(y)$. No entanto, esta fibra é a variedade flag maximal do grupo semi-simples conexo M_Θ^0. Portanto, a transitividade de pr(T) na fibra implica que pr$(T) = M_\Theta^0$. Isto significa que $T/A_\Theta N_\Theta = P_\Theta/A_\Theta^0 N_\Theta$, mostrando assim, esse lema. □

Lema 7.3 $T \cap A_\Theta N_\Theta = (\text{int}S) \cap A_\Theta N_\Theta$ *é reversível à esquerda.*

Demonstração: Observe que $T \cap A_\Theta N_\Theta$ é um subsemigrupo aberto de $A_\Theta N_\Theta$, o qual não é vazio pois T projeta sobre $P_\Theta^0/A_\Theta N_\Theta$.

O semigrupo $T \cap A_\Theta N_\Theta$ satisfaz as hipóteses do lema 6.10. Para verificar isto recordemos que, através da aplicação exponencial, $A_\Theta N_\Theta$ é difeomórfo a $\mathfrak{a}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta$. Tome $h \in T \cap A_\Theta N_\Theta$, e escreva $h = \exp(H+Y)$, $K \in \mathfrak{a}_\Theta$, $Y \in \mathfrak{n}_\Theta$. Desde que $T \cap A_\Theta N_\Theta$ é aberto, podemos assumir que H é regular em $\mathfrak{a}_\Theta$, no sentido em que $\lambda(H) \neq \emptyset$ para qualquer $\lambda \in \Sigma \setminus \langle\Theta\rangle$. Então, é conhecido (ver p. ex. [34, prop.1.2.4.10]) que a aplicação

$$X \mapsto \exp(\text{ad}(X))H - H$$

é um difeomorfismo de $\mathfrak{n}_\Theta$ sobre ele mesmo. Isto implica que existe $n \in N_\Theta$ tal que $\mathrm{Ad}(n)H = H + Y$. Fixando este n, mudamos nosso ponto base x por nx, o qual está ainda em C_0, pois C_0 contém a fibra $\pi_\Theta^{-1}(y)$. Então, tomamos uma nova decomposição de P_Θ tal que o correspondente grupo de vetores contem $h = \exp(H + Y)$. Em outras palavras, podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $h \in T \cap A_\Theta$, $h = \exp H$ com H regular em $\mathfrak{a}_\Theta$.

Agora, podemos verificar que os autovalores de $\mathrm{ad}(H)$ em $\mathfrak{n}_\Theta$ são ≥ 0. Estes autovalores são 0 e $\alpha(H)$ com $\alpha \notin \langle\Theta\rangle$. Se $\alpha(H) < 0$ para algum α, então existe um suficientemente pequeno $Y \in \mathfrak{n}_\Theta^-$ tal que $\exp(\mathrm{ad}(tH))Y \to \infty$ quando $t \to +\infty$. Isto implica que $h^k \exp(Y)y$ acumula fora de $N_\Theta^- y$. No entanto, $y \in C_\Theta^0$ tal que $\exp(Y)y \in C_\Theta^0$ se Y é suficientemente pequeno, contradizendo o fato que $\Theta = \Theta(S)$, i.e., que C_Θ é um subconjunto compacto da célula aberta de Bruhat $N_\Theta^- y$. □

Portanto, provamos que $S \cap P_\Theta$ satisfaz as condições da proposição 7.1, provando assim o seguinte resultado o que vale para um semigrupo arbitrário S com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ e $\Theta = \Theta(S)$.

Proposição 7.4 *Qualquer subconjunto compacto $Q \subset M_\Theta$ pode ser levantado em $(\mathrm{int}S) \cap P_\Theta$, isto é, existe $z \in S \cap A_\Theta N_\Theta$ tal que $Qz \subset (\mathrm{int}S) \cap P_\Theta$.*

Temos também a decomposição $P_\Theta = M_\Theta AN$, de tal forma que P_Θ/AN é identificado com M_Θ. Deste fato e da proposição anterior torna-se possível conseguir a seção transversal desejada para a aplicação avaliação.

Teorema 7.5 *Suponha que $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ e coloque $\Theta = \Theta(S)$. Seja C um de seus conjuntos controláveis invariantes em G/AN, fixe $x \in C_0$ e considere a aplicação avaliação $e : S \to C_0$, $e(g) = gx$. Denote por F a fibra $\pi^{-1}(\pi(x))$, onde $\pi : G/AN \to G/P_\Theta$ é a projeção canônica. Então, existe uma seção continua $\sigma : F \to \mathrm{int}S \cap P_\Theta$, satisfazendo $e\sigma = 1_F$.*

Demonstração: Assuma, sem perda de generalidade, que AN é o subgrupo de isotropia em x. Para qualquer $x_1 \in F$ existe $k \in M_\Theta(K)$ tal que $kx = x_1$. A associação $\xi : x_1 \mapsto k$ fornece um difeomorfismo entre F e $M_\Theta(K)$, pois $F = P_\Theta/AN \approx M_\Theta(K)$. Agora, $M_\Theta(K)$ é compacto em M_Θ. Assim, pela proposição 7.4, existe $z \in AN$ tal que $M_\Theta(K)z \subset (\mathrm{int}S) \cap P_\Theta$. Então $F \to (\mathrm{int}S) \cap P_\Theta$, $\sigma(x_1) = \xi(x_1)z$ é uma aplicação bem definida e é uma seção de e. De fato,

$$e(\sigma(x_1)) = \xi(x_1)zx = x_1$$

porque $zx = x$ e $\xi(x_1)x = x_1$, por definição de ξ. □

Em particular, este teorema assegura o levantamento de qualquer componente conexa F_0 de F. No caso em que S é conexo $C_0 \approx C_\Theta^0 \times F_0$, assim temos a seguinte consequência.

Corolário 7.6 *Suponha que C_Θ^0 é contrátil. Então, os homomorfismos e_* entre os grupos de homotopia induzido por $e : S \to C_0$ e $e : \mathrm{int}S \to C_0$ são sobrejetores.*

Demonstração: Desde que $C_0 \approx C_\Theta^0 \times F$, qualquer representante de classe de homotopia em C_0 é homotópico a um representante em F. Usando a seção σ, vemos que qualquer representante de classe de homotopia em F está na imagem de e, mostrando que e_* é sobrejetora. □

Levando em conta a existência de seção σ no teorema 7.5, o lema 5.1 e também a observação 5.3, conseguimos

Teorema 7.7 *Suponha que S é conexo e contenha um semigrupo* exp*-gerado T e grande em S. Seja C um conjunto controlável invariante em G/AN. Então o homomorfismo $e_* : \pi_n(S) \to \pi_n(C_0)$ induzido pela aplicação avaliação $e : S \to C_0$, $e(g) = gx$, $x \in C_0$, é sobrejetor. O mesmo vale com a aplicação $e : \mathrm{int}S \to C_0$.*

7.3 Injetividade

Para a prova da injetividade da aplicação avaliação, assumimos que S é conexo e contém um semigrupo T, Θ-grande e exp-gerado onde $\Theta = \Theta(S)$.

A prova seguirá o seguinte roteiro: fixe os pontos básicos $x \in C_0$ e $g_0 \in \mathrm{int}S$ tal que $g_0 x = x$. Se $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (S, g_0)$ satisfaz $e_*[\gamma] = [e \circ \gamma] = 1$, provaremos que $[\gamma] = 1$, isto é, existe uma homotopia, baseada em g_0, levando γ sobre g_0. Não construiremos tal homotopia diretamente. Ao invés disso, construiremos homotopias dentro de S carregando γ sucessivamente sobre subgrupos menores até alcançarmos $A_\Theta N_\Theta$. Usando propriedades de reversibilidade de $S \cap A_\Theta N_\Theta$, segue então que existe uma homotopia $\Phi : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to S$ entre o representante de classe de homotopia $[\gamma]$, γ, e um representante de classe de homotopia constante, g_1. Então, um argumento usual mostra que $[\gamma] = 1$. De fato, de Φ temos o caminho, digamos α, dado pela restrição de Φ para $[0,1] \times \{s_0\}$. Este caminho induz um isomorfismo $\alpha_* : \pi_n(S, g_0) \to \pi_n(S, g_1)$, onde $g_1 = \Phi(1, s_0)$, tal que $\alpha_*[\gamma] = [g_1] = 1$ (ver p.ex. [20], teorema 7.2.3). Isto mostra a trivialidade de $\ker e_*$.

Começaremos com o seguinte lema, o qual será usado no final da demonstração do resultado principal desta subseção. Aqui, ao contrário, não podemos assumir que o semigrupo é exp-gerado, pois o lema será aplicado para $S \cap A_\Theta N_\Theta$. Assim, não mostraremos a injetividade do homomorfismo induzido pela inclusão, mas mostraremos apenas que qualquer representante de classe de homotopia trivial no grupo pode ser transladado sobre um representante, o qual é trivial dentro do semigrupo.

Lema 7.8 *Seja L um grupo conexo e $T \subset L$ um semigrupo aberto e conexo. Seja $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (T, g_0)$ um representante em T tal que $i_*[\gamma] = 1$, onde $i : T \hookrightarrow L$ é a inclusão. Suponha que T é reversível à direita [respectivamente, esquerda]. Então existe $g \in T$ tal que o representante $g\gamma$ [respectivamente, γg] é contrátil em T.*

Demonstração: Considere o caso onde T é reversível à direita. Por hipótese, existe uma homotopia $\Phi : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to L$ tal que

$$\Phi(0, \tau) = \gamma(\tau), \qquad \Phi(1, \tau) = g_0$$

para todo $\tau \in \mathbb{S}^n$. Claramente, $\Phi([0,1]\times\mathbb{S}^n)$ é um subconjunto compacto de L. Assim, a reversibilidade à direita de T implica que existe $g \in T$ tal que $g\Phi([0,1]\times\mathbb{S}^n) \subset T$. Portanto, $g\Phi$ é uma homotopia levando $g\gamma$ sobre gg_0 como afirmado. A demonstração no caso de reversibilidade à esquerda segue tomando o semigrupo inverso. □

Agora, provaremos que qualquer representante de classe de homotopia γ em S é homotópico em S a um representante em $S \cap A_\Theta N_\Theta$.

Lema 7.9 *Suponha que S contém um semigrupo T, Θ-grande,* exp-*gerado e com* $\mathrm{int}T \neq \emptyset$*, onde $\Theta = \Theta(S)$. Fixe $y \in C_\Theta^0$ e assuma sem perda de generalidade que P_Θ é a isotropia em y. Então qualquer representante de classe de homotopia $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_0) \longrightarrow (S, g_0)$ com $g_0 y = y$ é homotópico a um representante $\beta : \mathbb{S}^n \longrightarrow P_\Theta$.*

Demonstração: Por hipótese existe um elemento regular real $h \in \mathrm{int}T$ o qual fixa y, tal que $h^k C_\Theta$ contrai a y quando $k \longrightarrow +\infty$. Isto implica que para qualquer vizinhança U de y existe $k > 0$ tal que $h^k C_\Theta \subset U$. Desde que $\gamma(\mathbb{S}^n)\, y \subset C_\Theta$ e $h^k\gamma$ é homotópico a γ (pelo lema 5.6), podemos assumir sem perda de generalidade que $\gamma(\mathbb{S}^n)\, y \subset U$.

Agora, tomemos $g \in \mathrm{int}T^{-1}$ tal que $gy = y$. Escolhemos U como sendo difeomorfo a uma bola aberta em um espaço euclideano e tal que se escrevermos o fibrado $G \longrightarrow G/P_\Theta$ localmente como $U \times P_\Theta$ então $g \in U \times W \subset \mathrm{int}T^{-1}$, para algum aberto $W \subset P_\Theta$. Por esta identificação $U' = \{g\} \times U$ é uma bola euclideana contida em $\mathrm{int}T^{-1}$. Então, exite uma contração contínua $\phi : I \times U' \longrightarrow U'$ tal que $\phi(0,l) = (g,l)$ e $\phi(1,l) = (g,g)$, para todo $l \in U'$. Defina em U' o representante de classe de homotopia $\delta(z) = (g, \gamma(z)\, y)$.

Para $(t,z) \in I \times \mathbb{S}^n$ coloque

$$\Phi(t,z) = \phi(t, \delta(z))^{-1}\gamma(z).$$

Note que, Φ é uma aplicação continua definida em $[0,1]\times\mathbb{S}^n$ assumindo seus valores em S pois $U' \subset S^{-1}$ e $\gamma(z) \in S$. Portanto, $\Phi(0,z) = \delta(z)^{-1}\gamma(z)$ e $\Phi(1,z) = g^{-1}\gamma(z)$, de tal forma que os representantes $\delta(z)^{-1}\gamma(z)$ e $g^{-1}\gamma(z)$ são homotópicos em S. Desde que $g^{-1} \in T$ e T é exp-gerado, segue pelo lema 5.6, que $g^{-1}\gamma(z)$ e $\gamma(z)$ são homotópicos em S. Agora, $\delta(z)^{-1}\gamma(z)\, y = y$ da definição de $\delta(z)$. Portanto, $\delta(z)^{-1}\gamma(z)$ está contido em P_Θ concluindo a demonstração do lema. □

Corolário 7.10 *Seja γ e β como no lema acima e suponha que $e_*[\gamma] = 1$. Então $e(\beta)$ é homotópico a um ponto em C_0.*

Demonstração: De fato, aplicando e à homotopia entre γ e β conseguimos uma homotopia entre $e(\gamma)$ e $e(\beta)$. Desde que $e(\gamma)$ é homotópico a um ponto, isto vale também para $e(\beta)$. □

Lema 7.11 *Seja $\gamma : \mathbb{S}^n \longrightarrow S \cap P_\Theta^0$ um representante de classe de homotopia com $\gamma(s_0) = g_1 \in A_\Theta N_\Theta$. Assuma que $e_*[\gamma] = 1$. Então γ é homotópico em S a um representante β contido em $A_\Theta N_\Theta$.*

Demonstração: Recordemos que $P_\Theta^0 = M_\Theta^0 A_\Theta N_\Theta$ e a ação de P_Θ^0 na fibra $\pi_\Theta^{-1}(y)$ é equivalente à ação em

$$P_\Theta^0/AN = K(\Theta) = M_\Theta^0/A(\Theta)\,N(\Theta).$$

Portanto, dizer que $e_*[\gamma] = 1$ significa que a projeção de γ em $K(\Theta)$ é homotópico a um ponto em $K(\Theta)$. Agora, $M_\Theta^0 = K(\Theta)\,A(\Theta)\,N(\Theta)$ é uma decomposição de Iwasawa de grupo semi-simples M_Θ^0. Desde que, $A(\Theta)\,N(\Theta)$ é difeomorfo a um espaço euclideano , segue que a projeção de γ sobre M_Θ^0, através da decomposição $P_\Theta^0 = M_\Theta^0 A_\Theta N_\Theta$ é homotópico a um ponto. Denote por δ o representante de classe de homotopia projetado . Então $\delta(s_0) = 1$, e $\delta(\tau)^{-1}$ é também homotópico a 1. Seja $\Phi : I \times \mathbb{S}^n \to M_\Theta^0$ uma homotopia tal que $\Phi(0,\tau) = \delta(\tau)^{-1}$ e $\Phi(1,\tau) = 1$, para todo $\tau \in \mathbb{S}^n$. O subconjunto $\Phi(I \times \mathbb{S}^n)$ é compacto em M_Θ^0. Assim, pela proposição 7.4, existe $z \in S \cap A_\Theta N_\Theta$ tal que $\Phi(I \times \mathbb{S}^n)\,z \subset S \cap P_\Theta^0$. Coloque

$$\Gamma(t,\tau) = \gamma(\tau)\,\Phi(t,\tau)\,z.$$

Então $\Gamma(t,\tau) \in S \cap P_\Theta^0$, e é uma homotopia entre $\gamma(\tau)\,\delta^{-1}(\tau)\,z$ e $\gamma(\tau)\,z$. Desde que $\gamma(\tau)\,z$ é homotópico a $\gamma(\tau)$ and $\gamma(\tau)\,\delta^{-1}(\tau)\,z \in A_\Theta N_\Theta \cap S$, para todo τ, o lema segue. □

Podemos agora provar a injetividade da aplicação avaliação.

Teorema 7.12 *Assuma que S é conexo e contenha um semigrupo T* exp-*gerado, grande e com interior não vazio. Como antes, seja C um conjunto controlável S-invariante em G/AN e C_0 seu interior. Então, o homomorfismo $e_* : \pi_n(S) \to \pi_n(C_0)$ induzido por uma aplicação avaliação $e : S \to C_0$, $e(g) = gx$, $x \in C_0$, é injetor. O mesmo resultado vale com e definido em* int$S$ *ao invés de S.*

Demonstração: Observe primeiro que, desde que T é grande em S, podemos assumir sem perda de generalidade que $(\text{int}T) \cap A_\Theta N_\Theta \neq \emptyset$. Agora, pelo lema 7.11 qualquer representante em S projetando em um representante contrátil em C_0 é homotópico em S a um representante γ em $(\text{int}S) \cap A_\Theta N_\Theta$. Pelo lema 6.10 (e a discussão precedente), $(\text{int}T) \cap A_\Theta N_\Theta$ é reversível à esquerda em $A_\Theta N_\Theta$. Assim, pelo lema 7.8 acima, segue que existe $g \in \text{int}T$ tal que γg é homotópico a um ponto em T e assim dentro de S. Usando o lema 5.6, concluimos que γ e γg são homotópicos em S.

Mostramos que, qualquer representante β em S tal que $e(\beta)$ é contrátil em C_0 é homotópico a um ponto em S . Portanto, se reproduzirmos o argumento usual mencionado no início desta subseção concluiremos que $[\beta] = 1$, mostrando assim, que e_* é injetora. □

Seção 8

Consequências do isomorfismo

8.1 Introdução

Nessa seção, trabalharemos algumas consequências da seção 7. Algumas são realmente consequências imediatas, como no caso dos retratos de deformação de int$S$ e de S. Outras, fazem uso de ferramentas da topologia, caso da aplicação que trata da homotopia relativa. Por outro lado, temos outras consequências que fazem uso de conceitos e resultados de álgebras de Lie e semigrupos de controle.

8.2 Equivalência homotópica

Na seção 7, provamos que a aplicação avaliação $e : S \to C_0$ e $e : \mathrm{int}S \to C_0$ induz isomorfismos entre os grupos de homotopia no caso em que S contenha um semigrupo $\Theta(S)$-grande e exp-gerado. Isto implica que, os grupos de homotopia de S e int$S$ são isomórfos aos grupos de homotopia do grupo compacto $K(\Theta(S))$ que é difeomorfo à fibra F_0. Em outras palavras, e é uma equivalência homotópica fraca (ver definição 5.4).

Agora, int$S$ é uma subvariedade aberta de G, e assim um CW-complexo. Analogamente, C_0 é um CW-complexo. Portanto, e é de fato uma equivalência homotópica, ou seja, existe $f : C_0 \to \mathrm{int}S$ tal que ambos ef e fe são homotópicas à aplicação identidade, isto é, f é uma inversa homotopica de e.

Continuaremos a assumir que S admite um semigrupo Θ-grande, $\Theta = \Theta(S)$ e exp-gerado. Com esta hipótese mostraremos que uma inversa homotopica de $e : \mathrm{int}S \to C_0$ é fornecido pela seção transversal $\sigma : F_0 \to \mathrm{int}S$ construida no teorema 7.5. Recordemos que $C_0 = C_\Theta^0 \times F_0$ e que C_Θ^0 é contrátil a um ponto. Denote por p a projeção de C_0 sobre F_0.

Lema 8.1 *$\sigma p : C_0 \to \mathrm{int}S$ é uma inversa homotopica de e.*

Demonstração: Seja f uma inversa homotopica de $e : \mathrm{int}S \to C_0$. Afirmamos que f é homotópica a σp. Note que desde que C_Θ^0 é contrátil a um ponto, existe uma homotopia $\Phi : I \times C_0 \to C_0$ tal que $\Phi(0, x) = x$ e $\Phi(1, x) = p(x)$, isto é, p é homotópica a aplicação identidade i de C_0. Denote por $[X, Y]$ o conjunto das classes de homotopia das aplicações $X \to Y$. Então a aplicação induzida

$$e_* : [C_0, \text{int}S] \longrightarrow [C_0, C_0]$$

é injetiva (ver [20], Corolário 7.5.3). Agora, $e_*[f] = [ef] = [i]$ e $e_*[\sigma p] = [e\sigma p] = [p]$. Desde que $[i] = [p]$, segue que $[\sigma p] = [f]$, isto é, $f \simeq \sigma p$, como afirmado. Potanto, σp é uma inversa homotopica de e. □

Usando a homotopia inversa de e, podemos mostrar que $K(\Theta)$ (ou melhor, uma de suas classes laterais) é um retrato de deformação de int$S$. De fato, recordemos a construção da seção transversal σ feita no teorema 7.5: Seja $\xi : F_0 \to K(\Theta)$ o difeomorfismo dado pela igualdade $\xi(x) = kx_0$, onde x_0 é o ponto base. Então σ é dado por $\sigma(x) = \xi(x) z$ onde $z \in P_\Theta$ é tal que a classe $K(\Theta) z \subset \text{int}S$. Em particular, temos que $\sigma(gx_0) = g$ para qualquer $g \in K(\Theta) z$. Isto significa que $\sigma pe : \text{int}S \to K(\Theta) z$ satisfaz $\sigma pe(g) = g$ para todo $g \in K(\Theta) z$, isto é, σpe é um retrato de int$S$. Desde que σpe é homotópica à aplicação identidade, realmente temos que $K(\Theta) z$ é um retrato de deformação de int$S$. Note que nesta construção podemos tomar a seção σ tomando valores em qualquer classe $K(\Theta) z$ contida em int$S$. Portanto, temos

Teorema 8.2 *Se S adimite um semigrupo* exp-*gerado, grande e com interior não vazio, então existe $z \in \text{int}S \cap P_\Theta$ tal que $K(\Theta) z \subset \text{int}S$. E mais, para qualquer z satisfazendo esta condição, $K(\Theta) z$ é um retrato de deformação de* int$S$.

8.3 Retrato de deformação de S

No teorema 8.2, a discussão foi restringida a int$S$ para poder usar o fato de que int$S$ é uma variedade aberta e assim um CW-complexo. Apesar disso, a propriedade de retrato de deformação ainda vale para S. De fato, seja $T \subset S$ um semigrupo exp-generado, grande e com interior não vazio. Tome $g \in \text{int}T$ e seja $g_t \in T$ uma curva tal que $g_0 = 1$ e $g_1 = g$. Então $Sg \subset \text{int}S$ e S é deformado sobre Sg por g_t. Pelo teorema 8.2, existe um retrato de deformação $r = \sigma pe$ de int$S$ sobre a classe lateral $K(\Theta) zg$, onde z é tal que $K(\Theta) z \subset \text{int}S$. Portanto, se fizermos a composição de r com a translação à esquerda L_g teremos uma aplicação rL_g de S sobre $K(\Theta) zg$, a qual não é um retrato. No entanto, ela aplica $y \in K(\Theta) z$ sobre yg, pois $r(yg) = yg$. Segue que $r' = L_{g^{-1}} r L_g$ aplica S sobre $K(\Theta) z$ e satisfaz $r'(y) = y$ para todo $y \in K(\Theta) z$, isto é, r' é um retrato de S sobre $K(\Theta) z$.

Temos que $L_{g_t^{-1}}$ deforma $K(\Theta) zg$ sobre $K(\Theta) z$ dentro de int$S$, tal que r' é um retrato de deformação de S sobre $K(\Theta) z$.

8.4 Homotopia relativa

Da identificação dos grupos homotopia de S com os grupos de homotpia de $K(\Theta)$ segue a identificação dos grupos homotopia relativos correspondentes às inclusões

$K(\Theta) \subset K$ e $S \subset G$. Para ver isso, considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & \pi_{n+1}(Kz, K(\Theta)z) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_n(K(\Theta)z) & \to & \pi_n(Kz) & \to & \pi_n(Kz, K(\Theta)z) & \to \cdots \\ & \downarrow \delta_* & & \downarrow \delta_* & & \downarrow \delta_* & & \downarrow \delta_* & \\ \cdots \to & \pi_{n+1}(G,S) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_n(S) & \to & \pi_n(G) & \to & \pi_n(G,S) & \to \cdots \end{array}$$

envolvendo as duas sequências exatas de homotopia dos pares

$$(Kz, K(\Theta)z) \text{ e } (G,S).$$

Aqui δ representa a aplicação inclusão e $z \in \text{int}S$ é tal que $K(\Theta)\, z \subset \text{int}S$. Essas duas sequências formam um diagrama comutativo (ver p. ex. [20], teorema 7.2.18). Isso, mais o fato de que $\pi_n(K(\Theta)z) \approx \pi_n(S)$ para todo n, garante que $\delta_* : \pi_n(Kz, K(\Theta)\, z) \to \pi_n(G,S)$ é um isomorfismo. Claramente $\pi_n(Kz, K(\Theta)\, z)$ é isomorfo a $\pi_n(K, K(\Theta))$ pela translação à direita. Assim temos,

Proposição 8.3 *Os grupos de homotopia relativos $\pi_n(G,S)$ e $\pi_n(K, K(\Theta))$ são isomorfos.*

8.5 Deformação entre semigrupos

Dois semigrupos S_1 e S_2 de mesmo tipo parabólico $\Theta(S_1) = \Theta(S_2) = \Theta$ tem os mesmos grupos de homotopia. Eles podem ser deformados um no outro em G. De fato, existe $z_1 \in \text{int}S_1 \cap P_\Theta$ tal que $K(\Theta)z_1$ é um retrato de deformação de $\text{int}S_1$. Analogamente $K(\Theta)z_2$ é retrato de deformação de $\text{int}S_2$ para algum $z_2 \in \text{int}S_2 \cap P_\Theta$. Temos que $K(\Theta)z_1$ pode ser deformado para $K(\Theta)\, z_2$ em G . Compondo essas deformações obtemos a deformação de $\text{int}S_1$ em $\text{int}S_2$.

8.6 Outros conjuntos de controle

Tomando $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto do conjunto das raízes simples e P_Θ o subgrupo parabólico associado a Θ, consideraremos as seguintes fibrações equivariantes:

$$\pi_\Theta : G/P \to G/P_\Theta \text{ e } \pi_{\Theta(S)} : G/P \to G/P_{\Theta(S)}.$$

Sejam $C(\mathbb{B})$, $C_{\Theta(S)}$ e C_{Θ_i} conjuntos de controle invariantes para S em G/P, $G/P_{\Theta(S)}$ e G/P_Θ respectivamente, com $C(\mathbb{B})^\circ$, $C^\circ_{\Theta(S)}$ e C°_Θ os respectivos conjuntos de transitividade. Considere também a fibração equivariante $G/AN \to G/P$, com $C \subset G/AN$ conjunto de controle invariante e o fibrado principal $G \to G/AN$.

Observando que $C_{\Theta(S)}$ é contrátil e $C_\circ \approx C^\circ_{\Theta(S)} \times P^\circ_{\Theta(S)}/AN$ (veja seção 4), mostramos no lema 5.1, que o tipo de homotopia de $C(\mathbb{B})$ é igual ao tipo de homotopia de um subconjunto de $P/P_{\Theta(S)}$. Analogamente, pode-se mostrar o seguinte lema

Lema 8.4 *$C(\mathbb{B})^\circ \approx C^\circ_{\Theta(S)} \times P^\circ_{\Theta(S)}/P$. E mais, $C(\mathbb{B})^\circ$ tem o mesmo tipo de homotopia de $P^\circ_{\Theta(S)}/P$.*

Agora precisamos do seguinte

Lema 8.5 *Suponha que S tenha um semigrupo T, exp-gerado, $\Theta(S)$-grande e com interior não vazio. Fixe $y \in C^\circ_{\Theta(S)}$ e assuma, sem perda de generalidade, que $P_{\Theta(S)}$ é a isotropia em y. Então qualquer ciclo $\eta : (\mathbb{S}^n, s_\circ) \to (C_\Theta, g_\circ x)$, com $g_\circ y = y$, é homotópico a um ciclo $\beta : \mathbb{S}^n \to P_{\Theta(S)}/P_\Theta \cap P_{\Theta(S)}$, onde $x \in C_\Theta \cap (P_{\Theta(S)}/P_\Theta \cap P_{\Theta(S)})$.*

Demonstração: Considere $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_\circ) \to (S, g_\circ)$ tal que $\gamma x = \eta$, observemos que é possível encontrar tal γ usando seção do fibrado principal $G \to G/P_\Theta$.

Agora usaremos algumas colocações do lema 7.9. Tomaremos a vizinhança U de y, consideraremos $U' := \{g\} \times U \subset \text{int}T^{-1}$, definiremos o ciclo $\delta(z) = (g, \gamma(z)y)$ em U' e a contração contínua de U', $\phi : I \times U' \to U'$ com $\phi(0,l) = (g,l)$ e $\phi(1,l) = (g,g)$, para todo $l \in U'$. Notemos que $\delta^{-1}(z)\gamma(z)x$ é um ciclo em $(P_{\Theta(S)}/P_\Theta \cap P_{\Theta(S)})$, pois $\delta^{-1}(z)\gamma(z)$ é um ciclo em $P_{\Theta(S)}$ (ver lema 7.9).

Para $(t,z) \in I \times \mathbb{S}^n$ definimos

$$\Phi(t,z) = \phi(t, \delta(z))^{-1} \gamma(z) x.$$

Note que, Φ é uma aplicação continua definida em $[0,1] \times \mathbb{S}^n$ assumindo seus valores em C°_Θ pois $U' \subset S^{-1}$ e $\gamma(z)x \in C^\circ_\Theta$. Daí temos que $\Phi(0,z) = \delta(z)^{-1}\gamma(z)x$ e $\Phi(1,z) = g^{-1}\gamma(z)x$, de tal forma que os ciclos $\delta(z)^{-1}\gamma(z)x$ e $g^{-1}\gamma(z)x$ são homotópicos em C°_Θ. Mas, $\delta(z)^{-1}\gamma(z)x$ e $\gamma(z)x$ são homotópicos em $C^\circ_{\Theta_i}$, assim basta tomarmos $\beta(z) := \delta(z)^{-1}\gamma(z)x$ □

Consequentemente, o tipo de homotopia de C_Θ é

$$P^0_{\Theta(S)}/(P_\Theta \cap P^0_{\Theta(S)}) \approx P^0_{\Theta(S)}/M_\Theta(K)AN \cap P^0_{\Theta(S)}$$

$$\approx K(\Theta(S))/M_\Theta(K) \cap P^0_{\Theta(S)}.$$

Como $M_\Theta(K) = M_\Theta \cap K$, temos que o tipo de homotopia de C_Θ é $K(\Theta(S))/K \cap M_\Theta \cap K(\Theta(S))$. Mostrando assim o seguinte,

Proposição 8.6 *Considerando as notações acima, temos que o tipo de homotopia do conjunto de controle $C_\Theta \subset G/P_\Theta$ é $K(\Theta(S))/K \cap M_\Theta$.*

8.7 Homotopia de S^{-1}

O homeomorfismo canônico $f(g) = g^{-1}$, restrito a S, garante que o tipo homotópico de S é o mesmo que o de S^{-1}. O que faremos aqui, é olhar a igualdade entre os grupos de homotopia do ponto de vista do teorema do isomorfsmo, mostrando que $K(\Theta(S)) \approx K(\Theta(S^{-1}))$.

Gostaríamos de iniciar observando que se S é conexo, exp-gerado, reversível, com interior não vazio, tem um semigrupo conexo T tal que T é Θ-grande, exp-gerado e com interior não vazio então as mesmas propriedades também valem para S^{-1}.

Assim, os mesmos resultados conseguidos para S na seção 7 valem para S^{-1}.

Necessitaremos da definição de dual de $\Theta \subset \Sigma$, o que faremos a seguir. Lembremos que se um elemento $w \in W$ é uma involução então $w = r_1 \cdots r_k$ é um produto de reflexões simples em relação as raízes simples duas a duas ortogonais. Ela é chamada principal se o comprimento $l(w) = l(r_1 \cdots r_k) = k$ é maximal, ou ainda, se w é o único elemento de W tal que $w(\Sigma) = -\Sigma$. E mais, essa involução principal é igual a $-\iota$, onde ι é um automorfismo do diagrama de Dynkin associado a Σ (ver [27], capítulo 9 para mais detalhes). Denotando a involução principal por w_0, define-se $\Theta^* = -w_0(\Theta)$. A variedade flag $\mathbb{B}_{\Theta^*} = G/P_{\Theta^*}$ é chamada de dual de $\mathbb{B}_\Theta$.

Considerando $\Theta = \Theta(S)$, ou seja, S um semigrupo do tipo parabólico Θ, o que é o mesmo que dizer S um semigrupo do tipo parabólico $\mathbb{B}(S)$, temos o seguinte resultado

Proposição 8.7 $G/P_{\Theta^*} = G/P_{\Theta(S^{-1})}$, *onde* $\Theta = \Theta(S)$.

Demonstração: A demonstração desse resultado é encontrada em [30] e resumidamente é baseada no corolário 4.6 em [33] que afirma que $W(S) = W(S^{-1})$ e como consequência tem-se que $\mathbb{B}(S^{-1})$ é a variedade flag dual de $\mathbb{B}(S)$, ou seja, $G/P_{\Theta^*} = G/P_{\Theta(S^{-1})}$ onde $\Theta = \Theta(S)$. □

Recordando que um conjunto controlável minimal para S é um conjunto controlável maximal (invariante) para S^{-1}, podemos considerar a seguinte sequência,

$$G \to G/AN \to G/P \to G/P_{\Theta^*}.$$

Tome $C_*^0, C(B)_*^0$ e $C_{\Theta^*}^0$ conjuntos controláveis invariantes para S^{-1} dentro de G/AN, G/P e G/P_{Θ^*} respectivamente, observando que $G/P_\Theta^* = G/P_{\Theta(S^{-1})}$. Temos que $K(\Theta^*) \approx P_{\Theta^*}^0/AN$ é um retrato de deformação de $\text{int}S^{-1}$.

Por outro lado, existe a seguinte decomposição,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_{\Theta^*} = \mathfrak{n}^-(\Theta^*) \oplus \mathfrak{p} \text{ e } \mathfrak{p}_{\Theta^*}^- = \mathfrak{n}(\Theta^*) \oplus \mathfrak{p}^-,$$

onde $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}(\Theta^*) = \sum \mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \langle \Theta^* \rangle$, $\mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum \mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in -\langle \Theta^* \rangle$, $\mathfrak{n}^-(\Theta^*) = \sum \mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in -\langle \Theta^* \rangle$.

Chama-se de involução de Cartan o automorfismo θ de $\mathfrak{g}$ tal que $\theta^2 = 1$ e a forma quadrática $B(X, \theta(X)) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(\theta(Y))$, $X \in \mathfrak{g}$ é negativa definida. Existe uma corrrespondência um a um entre as involuções de Cartan de $\mathfrak{g}$ e decomposições de Cartan de $\mathfrak{g}$ (para mais detalhes ver [27], capítulo 12).

Temos que $\mathfrak{p}_{\Theta^*} = -\varphi \mathfrak{p}_{\Theta^*}^-$, onde φ é a involução de Cartan de $\mathfrak{p}_{\Theta^*}$, pois $\varphi(\mathfrak{n}(\Theta^*)) = \mathfrak{n}^-(\Theta^*)$ e $\varphi(\mathfrak{p}^-) = \mathfrak{p}$ (involução de Cartan toma uma raiz α e leva em $-\alpha$).

Tomando agora ζ a extensão do automorfismo w_0 e ψ a composição $\zeta\varphi$, temos que $\mathfrak{p}_\Theta = \psi \mathfrak{p}_{\Theta^*}^-$.

Assim, podemos dizer que $\mathfrak{p}_\Theta$ é o mesmo que $\mathfrak{p}_{\Theta^*}$ exceto por automorfismos, então temos que $K(\Theta^*) \approx K(\Theta)$, onde $K(\Theta^*) \approx P_{\Theta^*}^0/AN$ e $K(\Theta) \approx P_\Theta^0/AN$.Portanto,

Proposição 8.8 *S e S^{-1} tem o mesmo tipo de homotopia. E mais, existe $w \in AN$ tal que $K(\Theta^*)w$ é um retrato de deformação de* $\mathrm{int}S^{-1}$.

Seção 9

Alguns semigrupos

9.1 Introdução

Aqui aplicaremos a seção 7 a alguns semigrupos interessantes. No primeiro deles, o semigrupo das matrizes em $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ com entradas positivas, veremos que o tipo de homotopia é o grupo compacto $\mathrm{SO}(n-1)$. Depois estudaremos o semigrupo das matrizes totalmente positivas, onde veremos que os grupos de homotopia desse semigrupo são triviais. Já no outro caso que estudaremos, os semigrupos contidos em grupos de posto um, o tipo de homotopia é a componente conexa do grupo M, da decomposição de um subgrupo parabólico. E por último o semigrupo de Ol'shanskiĭ, cuja decomposição polar fornece o tipo de homotopia.

9.2 Matrizes positivas

Seja $S = \mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ o semigrupo das matrizes de determinante um e com entradas não negativas. Esse é o semigrupo de compressão do octante positivo $\mathbb{R}^n_+$ em $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \geq 0\}.$$

Em outras palavras,

$$\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) : g\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n_+\}.$$

Temos que o tipo parabólico de $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$, e o conjunto de controle invariante em $\mathbb{P}^{n-1}$ é o conjunto $[\mathbb{R}^n_+]$ das retas contidas em $\mathbb{R}^n_+$. Em nossa notação anterior, $C_\Theta = [\mathbb{R}^n_+]$.

O semigrupo $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ é fechado, mas não é um semigrupo de Lie. Isso é devido ao fato de que seu grupo das unidades $H(S) = S \cap S^{-1}$ não é conexo. De fato, $H(S)$ é o produto semi-direto $P \times D$ onde P [respectivamente D] é o grupo de matrizes de permutação de determinante um [respectivamente matrizes diagonais com entradas positivas]. No entanto, sabemos que o grupo das unidades de um semigrupo de Lie é conexo (ver Neeb [23], proposição III.2). Por outro lado, seja

$$\mathcal{L}(S) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) : \exp(tX) \in \mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R}) \text{ para todo } t \geq 0\}$$

o cone de Lie de $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$. Pode-se verificar que $\mathcal{L}(S) = \{X = (x_{ij}) : x_{ij} \geq 0, i \neq j\}$. Seja $S_{\text{inf}} = \langle \exp \mathcal{L}(S) \rangle$ para o semigrupo exp-gerado correspondente. Desde que $\mathcal{L}(S)$ gera $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, S_{inf} tem interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$. E mais, o conjunto controlável invariante de S_{inf} em $\mathbb{P}^{n-1}$ também é C_Θ. Isso pode ser visto considerando as matrizes da forma

$$H = \mathrm{diag}\{n-1, -1, \ldots, -1\}$$

com respeito a uma base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ tal que $f_1 \in \mathbb{R}^n_+$ e $\mathrm{ger}\{f_2, \ldots, f_n\} \cap \mathbb{R}^n_+ = 0$. Pode-se mostrar que $H \in \mathcal{L}(S)$ (ver [26]), tal que qualquer $x \in C_\Theta$ é o atrator de algum elemento de S_{inf}, implicando que C_Θ é o conjunto controlável invariante para S_{inf}. No caso de $f_1 \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$, $H \in \mathrm{int}(\mathcal{L}(S))$, temos $C^0_\Theta = \mathrm{int}(C_\Theta)$.

Portanto, $S = \mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ contém um semigrupo exp-generado e $\Theta(S)$-grande. Agora, foi provado em [26] que S é conexo. Assim o teorema do isomorfismo vale para $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$. O subgrupo P_Θ pode ser tomado como sendo o grupo das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$, Q uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ e $\lambda \det Q = 1$. Para a componente identidade P^0_Θ deve-se tomar λ e $\det Q$ estritamente positivos. A escolha correspondente de AN é o grupo das matrizes triangulares superior com entradas positivas na diagonal. Assim, P^0_Θ / AN é difeomorfo a $\mathrm{SO}(n-1)$. Assim temos,

Proposição 9.1 *Os grupos de homotopia de* $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ *são isomorfos aos grupos de homotopia do grupo ortogonal especial* $\mathrm{SO}(n-1)$.

Esses fatos estendem para o semigrupo de compressão de um cone em $\mathbb{R}^n$. Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone gerado e pontual e forme o semigrupo

$$S_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) : gW \subset W\}.$$

Foi provado em [26] que S_W é conexo. Novamente o tipo parabólico de S_W é o espaço projetivo, e similarmente a prova de $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$, o semigrupo gerado por $\mathcal{L}(S_W)$ é grande em S_W. Assim temos,

Proposição 9.2 S_W *e* $\mathrm{SO}(n-1)$ *são do mesmo tipo de homotopia.*

9.3 Matrizes totalmente positivas

Seja $\mathcal{T} \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ o semigrupo das matrizes totalmente positivas, isto é, das matrizes tal que todos seus menores são não negativos. Sabemos que $\mathcal{T}$ é um semigrupo de Lie (ver Ando [1], teorema 3.5 e corolário 3.6). O tipo parabólico de $\mathcal{T}$ é o da variedade flag maximal. Isto pode ser visto de diferentes maneiras. Primeiro por [1] , teorema 6.2, qualquer $g \in \mathrm{int}\mathcal{T}$ tem auto-valores reais e diferentes. Assim por [33], corolário 4.4, o tipo parabólico de $\mathcal{T}$ é o conjunto vazio, isto é, a variedade flag maximal. De outra forma, pode-se considerar os semigrupos $\mathcal{T}_k$ de matrizes tendo os k-menores não-negativos . O tipo parabólico de $\mathcal{T}_k$ é da Grassmaniana $\mathrm{Gr}_k(n)$ de subespaços k-dimensionais (ver [30]). Temos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{T}_{n-1}$. Argumentando com subgrupos parabólicos e o grupo de Weyl associado ao tipo parabólico dos semigrupos consegue-se o tipo parabólico de $\mathcal{T}$.

Segue que o tipo de homotopia de $\mathcal{T}$ é o da componente conexa de MAN/AN. Como M é discreto, os grupos de homotopia de $\mathcal{T}$ são triviais, isto é, $\mathcal{T}$ é contrátil.

9.4 Grupos de posto um

No caso de G ter posto real um, existe apenas uma classe de subgrupos parabólicos e assim apenas uma variedade flag G/MAN. Os semigrupos próprios com interior não vazio em G têm todos o mesmo tipo parabólico, $\Theta = \emptyset$. O subgrupo $K(\Theta)$ é a componente identidade de MAN/AN, isto é, $K(\Theta) = M_0$ tal que cada semigrupo S em G admitindo um semigrupo grande e exp-gerado tem os mesmos grupos de homotopia, e eles são isomorfos aos grupos de homotopia de M_0. E mais, $\mathrm{int}S$ pode ser continuamente deformado sobre M_0.

O subgrupo M_0 é conhecido para cada grupo de posto um. Por exemplo se $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ então $M_0 = \{1\}$ assim os grupos de homotopia de S são triviais, e $\mathrm{int}S$ é contrátil. Por outro lado, seja $G = \mathrm{SO}(1,p)_0$, a componente identidade de um grupo hiperbólico. Nesse caso, $M_0 = \mathrm{SO}(p)$, tal que esse é o tipo de homotopia dos semigrupos de Lie em $\mathrm{SO}(1,p)$.

9.5 Semigrupos de Ol'shanskiĭ

O teorema do isomorfismo vale trivialmente para o caso $S = G$. Nesse caso $\Theta(G) = \Sigma$ e a variedade flag $G/P_{\Theta(G)}$ degenera sobre um ponto como $P_{\Theta(G)} = G$. O subgrupo $K(\Theta)$ é todo K, o qual através da decomposição de Iwasawa $G = KAN$, é um retrato de deformação de G.

Para a classe dos semigrupos de Ol'shanskiĭ existe uma decomposição polar, de tal forma que os grupos de homotopia podem ser encontrados diretamente dessa decomposição, ilustrando assim o teorema do isomorfismo. Indicamos Lawson [18] para discussões detalhadas sobre esses semigrupos e suas decomposições.

Seja $(\mathfrak{g}, \tau)$ uma álgebra de Lie simétrica simples, onde τ é um automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$. Denote $\mathfrak{g}_+$ [respectivamente $\mathfrak{g}_-$] como sendo a subálgebra [respectivamente subespaço] dos pontos fixos de τ [respectivamente -1 autovetores]. Existe a soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ e a relação colchete $[\mathfrak{g}_\varepsilon, \mathfrak{g}_\delta] = \mathfrak{g}_{\varepsilon\delta}$, $\varepsilon, \delta = \pm$. Assuma que existe um cone $W \subset \mathfrak{g}_-$

1. $\mathfrak{g}_- = W - W$,

2. W é invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{g}_+$ e

3. $\mathrm{ad}(X)$ tem spectrum real para todo $X \in W$.

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e denote por H o subgrupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_+$. Então H é fechado e o subconjunto $S = (\exp W) H$ é um semigrupo fechado em G tendo interior não vazio. E mais, a aplicação $W \times H \to S$, $(X, h) \mapsto (\exp X) h$ é um difeomorfismo e S é um semigrupo de Lie (ver [18], Teorema 3.4).

Claramente, W é contrátil, de tal forma que H torna-se um retrato de deformação de S.

Para reconhecer a topologia de H em termos dos subgrupos parabólicos de G escolha uma decomposição de Cartan τ-invariante $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ tal que $\mathfrak{g}_\pm = (\mathfrak{g}_\pm \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}_\pm \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{k}_\pm \oplus \mathfrak{s}_\pm$. A álgebra $\mathfrak{g}_+$ é redutível e $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{s}_+$ é uma decomposição de Cartan. A álgebra de Lie de $K(H) = H \cap K$ é $\mathfrak{k}_+$ e $H = K(H) \exp(\mathfrak{s}_+)$ é uma decomposição global de Cartan de H. Desde que assumimos que H é conexo, $K(H)$ é conexo. Também, K e $K(H)$ são compactos se G tem centro finito. Da decomposição global de Cartan de H segue que H, e assim S, é homotopicamente equivalente a $K(H)$.

Agora, a existência do cone invariante $W \subset \mathfrak{g}_-$ implica que a álgebra de Lie simétrica é do tipo regular. Isso significa que o centralizador $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ da subálgebra $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{s}_-$ intercepta $W \cap \mathfrak{s}_-$ de maneira não trivial. A hipótese de que $\mathfrak{g}$ é simples implica que $\mathfrak{c} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{s}_-$ tem dimensão um e $\mathfrak{l}$ torna-se o centralizador de $\mathfrak{c}$ em $\mathfrak{g}$ (ver Hilgert e Neeb [13] teorema V.I e Neeb [24], teorema I.20(3) e proposição IV.1). Desde que $\dim \mathfrak{c} = 1$ existe uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ tal que $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$. Podemos escolher uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$ contendo $W \cap \mathfrak{c}$ em seu fecho. Denote por Σ o sistema simples de raízes definida por $\mathfrak{a}^+$ e seja $\Theta(\mathfrak{c}) \subset \Sigma$ o conjunto de raízes simples que se anulam em $\mathfrak{c}$. Usando novamente que $\dim \mathfrak{c} = 1$, segue que $\Theta(\mathfrak{c})$ é maximal em Σ, isto é, seu complementar é um singleton. Assim $P_{\Theta(\mathfrak{c})}$ é um subgrupo parabólico maximal , i.e., $\mathbb{B}_{\Theta(\mathfrak{c})}$ é minimal. Foi provado em [31] que $\Theta(S) = \Theta(\mathfrak{c})$.

Em particular, seja $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ o semigrupo componente conexa da identidade de expansões de uma forma quadrática não degenerada em $\mathbb{R}^n$ (ver [18] para discussões detalhadas desse semigrupo). Se a matriz da forma quadrática é

$$J = \begin{pmatrix} 1_{k \times k} & 0 \\ 0 & -1_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$$

então, $S = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : g^t J g - J \geq 0\}$, onde $X \geq 0$ significa que a matriz X é positiva semi-definida. Segue que se W é o cone composto das matrizes simétricas $X \geq 0$ então $S = \mathrm{SO}(k, n-k)_0 \exp W$. Aqui $H = \mathrm{SO}(k, n-k)_0$ é a componente identidade do subgrupo das isometrias de J. Seu subgrupo compacto maximal é $K(H) = \mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)$. Por outro lado, o tipo parabólico de S é a Grassmaniana $\mathrm{Gr}_k(n)$ dos subespaços de dimensão k em $\mathbb{R}^n$, pode-se checar isso, observando que o conjunto de controle invariante de S em $\mathrm{Gr}_k(n)$ é o conjunto de $V \in \mathrm{Gr}_k(n)$ tal que a restrição de J a V é positiva semi-definida. O subgrupo $K(\Theta)$ associado a $\mathrm{Gr}_k(n)$ é $\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)$, que é homotopicamente equivalente a S.

Seção 10

Recobrimento de semigrupos

10.1 Introdução

Para um semigrupo infinitesimalmente gerado $S \subset G$, onde G é um grupo de Lie, é feito em [12] um estudo do semigrupo recobrimento de S, ou melhor, do seu recobrimento universal. Considerando a aplicação inclusão $i : S \to G$, um dos principais resultados desse estudo descreve a imagem da aplicação $i_* : \pi_1(S) \to \pi_1(G)$ como sendo o grupo fundamental do maior grupo de recobrimento de G, sobre o qual é possível levantar S. O objetivo dessa seção é conseguir uma melhor visualização desse recobrimento de G. Para isso, aplicamos nossos resultados no teorema 3.30 em [12] e obtemos uma maneira melhor para calcular efetivamente esse recobrimento de G, assim o fato de conhecermos o grupo fundamental de S permite conhecer mais profundamente esse recobrimento.

No entanto, o teorema 3.30 do trabalho citado, como outros resultados, não se aplicam a semigrupos importantes, como é o caso do semigrupo $\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$, devido ao fato desse semigrupo não ser infinitesimalmente gerado. Daí, uma generalização desses resultados, que garantam a inclusão desse semigrupo, não é gratuita e propicia uma aplicação numa gama maior de semigrupos.

Conseguimos manter os resultados originais, no entanto com a hipótese mais fraca, ou seja, para semigrupos conexos que contém subsemigrupos exp-gerados. É interessante observar que o semigrupo todo não precisa ser infinitesimalmente gerado, mas apenas uma parte dele, e mais, essa parte não precisa ser "muito grande", como veremos em exemplos no final da seção.

Um rápido comentário sobre os resultados de [12], é que a hipótese do semigrupo ser infinitesimalmente gerado é usado basicamente para garantir que o semigrupo tenha algumas propriedades topológicas essenciais (ver teorema 3.8, lema 3.10, corolário 3.11 e proposição 3.13 em [12]), que são vitais para a obtenção dos resultados desejados. Assim, iniciaremos essa seção com a demonstração dessas propriedades, com a hipótese mais fraca de existência de semigrupo exp-gerado. O restante dos resultados seguem com a mesma demonstração feita em [12].

Finalizando, gostaríamos de observar que, foi demonstrado, no teorema 3.26 em [12], que o maior recobrimento, onde S levanta, é exatamente o grupo livre de G

em S (definição 10.9), assim, como comentamos, o fato de nós conhecermos o grupo fundamental de S permite conhecer mais profundamente o grupo livre de G em S.

10.2 Resultados

Antes de mais nada, recordemos que o grupo fundamental, $\pi_1(X, x_0)$, de um espaço X baseado em $x_0 \in X$, é o conjunto das classes de homotopia de laços $\gamma : [0,1] \to X$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Gostaríamos de lembrar também que um espaço topológico X é chamado semi-localmente simplesmente conexo quando todo $x \in X$ possui vizinhança V tal que todo caminho fechado em V é homotópico a uma constante em X.

Teorema 10.1 *Seja S um semigrupo conexo, do grupo de Lie conexo G, contendo um semigrupo T exp-gerado e com interior não vazio. Então valem:*

1. *Existe um caminho analítico $\alpha : [0,1] \to G$ tal que*

$$\alpha(0) = 1 e \alpha(]0,1]) \subseteq \mathrm{int}(S).$$

2. *O interior* $\mathrm{int}(S)$ *é um semigrupo ideal denso.*

3. *S e* $\mathrm{int}S$ *são conexos por caminhos.*

4. *S é localmente conexo por caminhos.*

5. *S é semi-localmente simplesmente conexo.*

Demonstração:

1)Usando o teorema 3.8 em [12], essa existência é imediata, de fato, se T é exp-gerado o teorema citado garante a existência de um caminho analítico $\alpha : [0,1] \to G$ tal que $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(]0,1]) \subseteq \mathrm{int}(T) \subseteq \mathrm{int}(S)$.

2)A demonstração desse ítem segue como no lema 3.7 em [12] pois só exige que S seja subsemigrupo de um grupo topológico conexo.

3)Como $\mathrm{int}S$ é uma variedade aberta, ele é denso em S. Mas, S e G são conexos, assim temos que $\mathrm{int}S$ é conexo por caminhos.

Pelo ítem 1), existe $\alpha : [0,1] \to S$ um caminho tal que $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(]0,1]) \subseteq \mathrm{int}(S)$. Para $s \in S$, o caminho

$$\gamma : [0,1] \to S, t \mapsto s\alpha(t)$$

satisfaz $\gamma(0) = s$ e $\gamma(]0,1]) \subseteq s\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(S)$. Assim, S é conexo por caminhos.

4) e 5) Como na proposição 3.13 em [12].

□

Na seção 3.4 de [12], a hipótese de que S é infinitesimalmente gerado é necessária para dar suporte topológico e condições satisfatórias para trabalhar com caminhos, homotopias, deformações, etc, aos resultados que demonstraremos a seguir . Daí, com o teorema anterior, os resultados da seção 3.4 em [12] seguem com demonstrações idênticas. Ou seja, garante-se a existência de um recobrimento de S, homomorfo ao próprio S, conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e com grupo fundamental trivial. E mais, trabalhando com aplicações de homotopia, mostra-se que os grupos fundamentais do semigrupo de recobrimento e do seu interior são isomorfos, o mesmo valendo para o semigrupo propriamente dito.

Dessa forma, considerando $p : \tilde{S} \to S$ o homomorfismo de recobrimento, onde $\tilde{S}$ é o recobrimento de S, podemos mostrar também que o grupo fundamental de S é isomorfo, como grupo, à imagem inversa da identidade pelo homomorfismo p e que, devido ao fato de $\tilde{S} \to S$ ser um $p^{-1}(1)$-fibrado principal, $\tilde{S}/p^{-1}(1)$ é isomorfo a S como semigrupo topológico, e como consequência temos que $\tilde{S}$ é cancelativo.

Outros resultados e propriedades acerca do recobrimento universal de S, seguem como em [12], seção 3.4. Mas daremos um pouco mais de ênfase a alguns deles, pois esses caracterizam o recobrimento a partir do grupo fundamental do semigrupo e dão a relação entre o grupo fundamental do subgrupo maximal contido em S e o grupo fundamental de S, usando o grupo fundamental do subgrupo maximal do recobrimento de S.

Necessitamos de algumas definições e notações.

$H(S) := S \cup S^{-1}$, o maior subgrupo contido em S.

$H(\tilde{S}) := \tilde{S} \cup \tilde{S}^{-1}$, o maior subgrupo contido em $\tilde{S}$ e

$$L(S) := \{X \in \mathfrak{g} : \exp(\mathbb{R}^+ X \subseteq S\},$$

onde, é claro, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G.

Observação $L(S)$ é chamado de cone tangente de S.

Nos resultados a seguir, considerando G um grupo de Lie conexo, estamos supondo que $S \subset G$ é um semigrupo conexo, contendo um semigrupo exp-gerado T com interior não vazio.

Lema 10.2 *Seja $q : \tilde{G} \to G$ o recobrimento universal de G, identifique $\pi_1(G)$ com* $\ker q$ *e $\pi_1(S)$ com $p^{-1}(\mathbf{1})$. Então existe um homomorfismo contínuo $\tilde{i} : \tilde{S} \to \tilde{G}$ tal que $q \circ \tilde{i} = i \circ p, \tilde{i}|_{\pi_1(S)} = i_*$, e a imagem de $\tilde{i}$ é a componente conexa de $\mathbf{1}$ em $q^{-1}(S)$.*

Demonstração: Ver lema 1.12 em [12]. Observe que na demonstração desse lema um fato vital é usado, a indentificação de $\pi_1(S)$ e $\pi_1(G)$ com subgrupos de $\tilde{S}$ e $\tilde{G}$, respectivamente. □

Teorema 10.3 *Seja $j : H(S) \to S$ a aplicação inclusão e*

$$j_* : \pi_1(H(S)) \to \pi_1(S)$$

o homomorfismo induzido. Então $\ker j_* = \pi_1(H(\tilde{S})$ *e* $\mathrm{im} j_* = H(\tilde{S}_\circ) \cup \pi_1(S)$.

Demonstração: Denotando $\tilde{H(S)}$ como sendo recobrimento universal de $H(S)$, temos que um homomorfismo $q : \tilde{H(S)} \to H(\tilde{S}_\circ)$ tal que $p \circ q : \tilde{H(S)} \to H(S)$ é o recobrimento universal de $H(S)$.

Tendo que, $\pi_1(H(S))$ é identificado com um subgrupo de $H(\tilde{S})$ temos, pelo lema anterior, que j_* é igual a q restrito a $\pi_1(H(S))$. Daí, pode-se mostrar que $\ker j_* = \pi_1(H(\tilde{S}))$.

Mostrando que a imagem está contida em $H(\tilde{S})_\circ \cup \pi_1(S)$, podemos concluir que $\mathrm{im} j_* = H(\tilde{S})_\circ \cup \pi_1(S)$. □

Corolário 10.4 *A aplicação $j_* : \pi_1(H(S)) \to \pi_1(S)$ é:*

1. *injetora, se e somente se, $H(\tilde{S})$ é simplesmente conexo.*
2. *sobrejetora, se e somente se, $H(\tilde{S})$ é conexo.*

Na seção 3.5 em [12], que considera semigrupos infinitesimalmente gerados, foi feito uma descrição da imagem $i_*(\pi_1(S))$ da aplicação $i_* : \pi_1(S) \to \pi_1(G)$ (induzida pela inclusão $i : S \hookrightarrow G$). O resultado principal afirma que a imagem de $\pi_1(S)$ por i_* é o grupo fundamental do maior recobrimento de G, no qual S levanta.

Aqui, também usando a hipótese mais fraca de que S é semigrupo fechado, conexo e contendo um semigrupo com interior não vazio e exp-gerado pode-se obter os mesmos resultados citados acima.

Como as demonstrações são análogas, apesar da hipótese sobre S ser mais fraca, daremos apenas uma idéia das mesmas.

Proposição 10.5 *Seja S um semigrupo conexo e fechado contendo um semigrupo T exp-gerado e com interior não vazio. Então*

$$\mathrm{im} i_* = SS^{-1} \cap \pi_1(G).$$

Demonstração: O conjunto $D_1 := SS^{-1} \cup \pi_1(G)$ é um subgrupo de $\pi_1(G)$ (Ver lema 3.27 em [12]). Tomando $\tilde{i} : \tilde{S} \to \tilde{G}$ o homomorfismo do lema 10.2, podemos mostrar que $D_1 = \tilde{i}(\pi_1(S))$. Novamente pelo lema 10.2 temos que $i_*(\pi_1(S)) = D_1$. □

A partir dessa proposição, segue um dos principais resultados dessa seção,

Teorema 10.6 *Seja B o maior recobrimento de G no qual S levanta, então* $\mathrm{im} i_* = \pi_1(B)$.

Demonstração: Seja $D' \subseteq D := \pi_1(G) \subseteq \tilde{G}$ um subgrupo, considere $G' := \tilde{G}/D'$, $q' : \tilde{G} \to G'$ homomorfismo de recobrimento e

$$S' := \overline{< \exp_{G'} \mathrm{L}(S) >} \text{ e } S_1 := \overline{< \exp_{\tilde{G}} \mathrm{L}(S) >}$$

subsemigrupos de Lie de G' e $\tilde{G}$ (respectivamente) gerados por $\mathrm{L}(S)$.

Entao, fazendo uso do lema 3.27 em [12] temos,

$$S'S'^{-1} = \mathrm{int}(S')\mathrm{int}(S')^{-1} \subseteq q'(S_1)q'(S_1)^{-1}.$$

Portanto, $S'S'^{-1} \cup q'(D) = q'(\mathrm{im}i_*)$. Da mesma forma que comentamos anteriormente, a proposição 3.28 em [12], pode ser reescrita, com demonstração semelhante, usando a hipótese mais fraca, ou seja, supondo que S é conexo e contém um semigrupo exp-gerado, ao invés de ter S infinitesimalmente gerado. Assim temos que S levanta em G' se, e somente se, $q'(\mathrm{im}i_*) = \{1\}$. Então o maior grupo de recobrimento de G sobre o qual S levanta é $G/\mathrm{im}i_*$. Assim $\mathrm{im}i_* = \pi_1(B)$. □

10.3 Inclusão do subgrupo compacto no grupo

Como vimos no teorema 10.6, o conhecimento da imagem do grupo fundamental de S pela aplicação inclusão $S \hookrightarrow G$ diz quando S pode ser mergulhado em um dado grupo de recobrimento de G. Como uma consequência do teorema 8.2, essa imagem é descrita pela inclusão do subgrupo $K(\Theta)$ em G.

Proposição 10.7 *Usando as hipóteses e notações do teorema 8.2 temos que a imagem $i_*\pi_n(S)$ em $\pi_n(G)$ coincide com a imagem $j_*\pi_n(K(\Theta))$ onde $j : K(\Theta) \to G$ é a inclusão.*

Demonstração: Pela proposição 5.5, o homomorfismo induzido pela inclusão $\mathrm{int}S \hookrightarrow S$ é um isomorfismo. Assim, é suficiente provar a afirmação com $\mathrm{int}S$ no lugar de S. Desde que $K(\Theta)z$ é um retrato de deformação de $\mathrm{int}S$, segue que a inclusão $K(\Theta)z \hookrightarrow \mathrm{int}S$ induz um isomorfismo. Assim $i_*\pi_n(S)$ é a imagem do homomorfismo induzido por $K(\Theta)z \hookrightarrow G$. Pela translação à direita essa imagem coincide com $j_*\pi_n(K(\Theta))$. □

10.4 Grupo livre

Em [12], teorema 3.26, tem a demonstração de que o recobrimento B, que vimos no teorema 10.6, é o grupo livre em S. Assim, temos a possibilidade de conhecer melhor o grupo livre de G, fazendo uso da $\mathrm{im}i_*$. Segue agora, a definição de grupo livre de um semigrupo, para mais detalhes ver [6].

Definição 10.8 *O par (H, η) é chamado um S-grupo se H é um grupo e η um homomorfismo de S em H tal que $S\eta$ é um conjunto de geradores de grupo de H.*

Definição 10.9 *O par (G, γ) será chamado um grupo livre no semigrupo S se (G, γ) é um S-grupo e se para qualquer S-grupo (H, η), existe um homomorfismo θ de G em H de tal forma que $\gamma\theta = \eta$.*

Assim, temos o seguinte teorema, lembrando que as notações aqui, seguem como nas seções anteriores 5, 6 e 7.

Teorema 10.10 *Considere S um semigrupo conexo e contendo um semigrupo Θ-grande e* exp*-gerado, onde $\Theta = \Theta(S)$. Seja $G(S)$ o grupo livre de G em S e $i : S \to G$ a aplicação inclusão. Então $\pi_1(G(S)) = i_*(K(\Theta))$.*

Demonstração: A verificação desse resultado é imediata, pois, como vimos na seção 7, o tipo de homotopia de S é igual ao de $K(\Theta)$, e daí o resultado segue usando o teorema 10.6. □

10.5 Aplicação

Retornando aos semigrupos da seção 9, temos que esses resultados se aplicam ao semigrupo $\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$, pois ele é conexo e contém o semigrupo exp-gerado $\mathcal{T}$. É interessante notar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{T}_{n-1}$ é um semigrupo razoavelmente pequeno, se comparado com $\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$.

Um outro semigrupo em $\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ que podemos considerar é o semigrupo S_{inf}, como definido na seção 9, temos que S_{inf} é um semigrupo exp-gerado.

Considere o grupo de Lie $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ e o semigrupo $S = \mathrm{Sl}^+(2, \mathbb{R})$, temos, pela decomposição de Cartan, que $\pi_1(\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{SO}(2)) = \mathbb{Z}$. Como vimos na seção 9, $\pi_1(\mathrm{Sl}^+(2, \mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{SO}(1)) = \pi_1(\{1\}) = 1$, daí a imagem $\mathrm{im}\, i_*(\pi_1(S))$ é trivial, e assim temos

Proposição 10.11 *O grupo fundamental de $G(\mathrm{Sl}^+(2, \mathbb{R}))$ é trivial.*

Agora observe que, considerando a aplicação recobrimento

$$p : G(\mathrm{Sl}^+(2, \mathbb{R})) \to \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$$

então o homomorfismo induzido

$$p_* : \pi_1(G(\mathrm{Sl}^+(2, \mathbb{R}))) \to \pi_1(\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}))$$

é injetor, ou seja,

$$p_* : \pi_1(G(\mathrm{Sl}^+(2, \mathbb{R}))) \to \mathbb{Z}$$

é injetor.

Cálculos análogos podem ser feitos para o caso de $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, lembrando que para $n = 3$ teremos que a aplicação

$$p_* : \pi_1(G(\mathrm{Sl}^+(3, \mathbb{R}))) \to \mathbb{Z}_2$$

é injetora.

Seção 11

Órbita em $G/K(\Theta)$

11.1 Introdução

Nessa seção, mostraremos que uma determinada órbita, no espaço homogêneo $G/K(\Theta)$, que se projeta sobre o conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante para S em G/P_Θ, é contrátil. Isso vem complementar o resultado 6.9, onde foi mostrado que as órbitas de S, no espaço simétrico associado a G, são contráteis.

11.2 Contractibilidade

Começaremos revendo algumas notações já introduzidas em seções anteriores. Estamos considerando S exp-gerado. Como vimos, o conjunto de controle invariante, para tal semigrupo, em $G/P_{\Theta(S)}$ é contrátil, bem como seu conjunto de transitividade. No que segue nessa seção, estaremos considerando $\Theta = \Theta(S)$. Tome agora a seguinte sequência de aplicações,

$$G \overset{\pi_{K(\Theta)}}{\to} G/K(\Theta) \overset{\pi_{P_\Theta}}{\to} G/P_\Theta^0.$$

Onde $\pi_{K(\Theta)}$ é a projeção no espaço quociente e π_{P_Θ} é a projeção equivariante canônica.

Tome C_Θ^0 o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante $C_\Theta \subset G/P_\Theta^0$ e fixe $y \in C_\Theta^0$. Recordamos que $Sy = C_\Theta^0$. Tomamos $Sw \subset G/K(\Theta)$, onde w é tal que $\pi_{P_\Theta}(w) = y$. Mostraremos que, Sw em $G/K(\Theta)$ é contrátil. Para isso precisaremos de dois lemas.

Lema 11.1 *Qualquer ciclo $\eta : (\mathbb{S}^n, s_\circ) \to (Sw, g_\circ w)$, é homotópico a um ciclo $\beta : \mathbb{S}^n \to P_\Theta^\circ/K(\Theta) \cap Sw$.*

Demonstração: A verificação desse lema segue de maneira semelhante à do lema 8.5. □

Assim, temos que Sw contrai para $P_\Theta^0/K(\Theta) \cap Sw$, onde $P_\Theta^0 = ANK(\Theta)$ e $P_\Theta^0/K(\Theta)$ é difeomorfo a AN.

Observação 11.2 *Sabendo que $K(\Theta)$ é um compacto em*

$$M_\Theta = K(\Theta)/AN = ANK(\Theta),$$

então, pela proposição 7.4, podemos levantar $K(\Theta)$ a $\mathrm{int}(S) \cap P_\Theta$, isto é, existe $z \in S \cap AN$ tal que $zK(\Theta) \subset \mathrm{int}(S) \cap P_\Theta$.

Lema 11.3 *Para qualquer ciclo $\delta : (\mathbb{S}^n, s_0) \to ((P_\Theta^0/K(\Theta)) \cap Sw, g_0)$, existe $h \in S \cap AN$ tal que $p^{-1}(h\delta) \subset S \cap P_\Theta^0$, onde p é o fibrado principal $p : P_\Theta^0 \to P_\Theta^0/K(\Theta)$.*

Demonstração: Usando a observação 11.2, temos que para cada τ, existe uma vizinhança aberta U_τ de $\delta(\tau, s_0)$ em $P_\Theta^0/K(\Theta)$ e $z_\tau \in S \cap AN$ tal que $p^{-1}(z_\tau U_\tau) \simeq z_\tau U_\tau \times K(\Theta) \subset S \cap P_\Theta$.

Como $\delta(\mathbb{S}^n, s_0)$ é compacto, tomamos uma família finita $\{U_{\tau_i}\}$ com $i = 1, \ldots, n$ que cobre a imagem do ciclo. Por outro lado, como $S \cap AN$ é reversível à esquerda, temos pelo lema 6.1 que

$$\tau_i(S \cap AN) \cap \cdots \cap \tau_n(S \cap AN) \neq \emptyset.$$

Daí, existem $w_1, w_2, \ldots, w_n \in S \cap AN$ tal que

$$\tau_1 w_1 = \tau_2 w_2 = \cdots = \tau_n w_n = h \in S \cap AN.$$

Assim, para esse h, $p^{-1}(h\delta(\mathbb{S}^n, s_0)) \subset S \cap P_\Theta^0$ □

Assim, temos que $p^-(\delta)$ é difeomorfo a $\delta \times K(\Theta)$ e $\delta \times K(\Theta) \subset S \cap AN$, o que implica $\delta \simeq \delta \times 1 \subset S \cap AN$, com $1 \in K(\Theta)$.

Teorema 11.4 *Se $\pi_{P_\Theta}(w) \in C_\Theta^\circ$, então a órbita $Sw \subset G/K(\Theta)$ é contrátil*

Demonstração: Qualquer ciclo em Sw, projetando num ciclo contrátil em Sy, é homotópico em Sw a um ciclo $\delta \subset (\mathrm{int}S)w \cap P_\Theta/K(\Theta)$. Pelo lema anterior, $\gamma \times K(\Theta) \subset S \cap AN$, o que implica que γ é difeomorfa a um ciclo em $S \cap AN$.

Como $S \cap AN$ é reversível à esquerda, temos que existe $g \in S \cap AN$ tal que $g\gamma$ é homotópico a um ponto dentro de $S \cap AN$. Agora, usando o lema 5.6, temos que $g\gamma$ é homotópico a γ e a conclusão segue por argumento semelhante a demonstração do teorema 7.12. □

Seção 12

Fibração

12.1 Introdução

A propriedade de fibração e a sequência de Serre (ver Hu [20], definição 6.5.6), constituem técnicas fundamentais para o estudo de homotopia de grupos e espaços homogêneos, mas que não se aplicam fácilmente a semigrupos. Em [15], seção 12 do capítulo 3, encontra-se a demonstração de que ter a propriedade do levantamento de caminhos (PLP) é equivalente a ter fibração (ACHP). Levando em conta essa equivalência não é difícil imaginar situações onde a propriedade PLP não se aplica para aplicações avaliação obtidas por ações de semigrupos.

No entanto, nos casos onde essa propriedade se aplica, podemos mostrar propriedades interessantes da intersecção do interior do semigrupo com a fibra.

12.2 Contractibilidade no semigrupo

Considere a projeção natural $G \longrightarrow G/H$ de um grupo de Lie semi-simples módulo o subgrupo fechado H. Tome $S \subset G$ um semigrupo conexo de G e $C_\circ$ o conjunto de transitividade de um conjunto de controle invariante $C \subset G/H$.

Recordemos que, uma aplicação $p : E \longrightarrow B$ tem a propriedade do levantamento de caminhos, se para cada $a \in E$ e cada caminho $\gamma : I \longrightarrow B$, com $\gamma(0) = p(a)$, existe um caminho $\alpha : I \longrightarrow E$ tal que $\alpha(0) = a, p\alpha = \gamma$ e tal que α depende continuamente de a e γ.

Nos casos onde a aplicação avaliação $e : \text{int}S \longrightarrow C_\circ$ satisfaz a propriedade do levantamento de caminhos, podemos entender melhor a intersecção do semigrupo com a fibra.

De fato, pelo corolário 6.5.9 de [20], temos que a seguinte sequência é exata

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(C_\circ) \xrightarrow{\delta_*} \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\text{int}S) \xrightarrow{e_*} \pi_n(C_\circ) \longrightarrow \cdots$$

onde $i : F \hookrightarrow \mathrm{int}S$ é a aplicação inclusão da fibra $F := (\mathrm{int})S \cap H$ no $\mathrm{int}S$ (estamos considerando o fibrado $G \to G/H$) e δ é a aplicação fronteira. Supondo $C_\circ$ contrátil temos o seguinte resultado

Proposição 12.1 *Sejam S um semigrupo conexo, contido no grupo de Lie semi-simples G, $H \subset G$ um subgrupo de G e $C_\circ$ o conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante $C \subset G/H$. Supondo que a aplicação avaliação, $e : \mathrm{int}S \to C_\circ$, satisfaz a propriedade do levantamento de caminhos e que $C_\circ$ é contrátil, temos que $\pi_n(F)$ é isomorfo a $\pi_n(\mathrm{int}S)$.*

Agora, suponhamos também que a aplicação e_* é um isomorfismo.

Devido ao fato de S ser conexo, temos que $C_\circ$ é conexo e então $\pi_\circ(\mathrm{int}S) \stackrel{e_*}{=} \pi_\circ(C_\circ) = 0$. Sabendo que e_* é isomorfismo, podemos considerar a sequência exata

$$0 \xrightarrow{e_*} \pi_1(\mathrm{int}S) \to \pi_1(C_\circ) \xrightarrow{\delta_*} \pi_\circ(F) \to 0$$

Observe que $\mathrm{im}\delta_* = \pi_\circ(F)$ e $\pi_1(C_\circ) = \mathrm{im}e_* = \ker\delta_*$, então $\mathrm{im}\delta_* = 0$. Mas δ_* é sobrejetora, assim $\pi_\circ(F) = 0$.

Na sequência longa acima, $\mathrm{im}e_* = \ker\delta_*$, como e_* é isomorfismo, temos que $\ker\delta_* = \pi_n(C_*)$ e portanto $\mathrm{im}\delta_* = 0$. Assim, $\pi_{n-1}(F) = 0$. Daí temos

Corolário 12.2 *Com as mesmas hipóteses da proposição anterior e supondo que e_* é um isomorfismo, temos que $(\mathrm{int}S) \cap H$ é simplesmente conexo.*

12.3 Exemplos

12.3.1 Matrizes totalmente positivas

Tomemos o grupo de Lie semi-simples $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, seja $A \subset G$ subconjunto das matrizes diagonais com entradas positivas, da decomposição de Cartan, temos que AN é o grupo das matrizes triangulares superiores com entradas positivas na diagonal. Consideremos a projeção $G \to G/AN$ e tomemos $\mathbb{B} = G/MAN$, a variedade flag maximal.

Agora, considerando $\mathcal{T} \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ o semigrupo das matrizes totalmente positivas, temos que o tipo de homotopia de $\mathcal{T}$ é igual ao tipo de homotopia da componente conexa de MAN/AN e assim, $\mathcal{T}$ é contrátil (ver seção 9). E ainda, fixemos uma base de $\mathbb{R}^n$ e tomemos $b_\circ \in C_\circ \subset \mathbb{B}$ o elemento canônico para esta base fixada, onde $C_\circ$ é o conjunto de transitividade de $C \subset \mathbb{B}$, o conjunto de controle invariante para $\mathcal{T}$.

Sabemos que $N^- b_\circ$, a célula aberta de Bruhat, é densa em $\mathbb{B}$, mas $N^- \to N^- b_\circ, n \mapsto nb_\circ$ é um difeomorfismo, daí N^- é denso em $\mathbb{B}$. Observando agora que $\mathrm{int}_{N^-}(N^- \cap \mathcal{T})b_\circ$ é difeomorfo a $C_\circ \subset N^- b_\circ$, concluimos que $\mathrm{int}_{N^-}(N^- \cap \mathcal{T})b_\circ$ é difeomorfo a $\mathrm{int}_{N^-}(N^- \cap \mathcal{T})$, ou seja, $C_\circ$ é difeomorfo a $\mathrm{int}_{N^-}(N^- \cap \mathcal{T})$.

Lembrando que $C_\circ = \mathcal{T} b_\circ$, mostraremos

Lema 12.3 *A aplicação avaliação $\mathrm{int}\mathcal{T} \to \mathcal{T} b_\circ$, definida por $g \mapsto gb_\circ$ é uma fibração.*

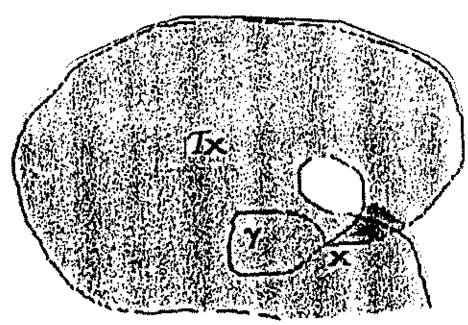
Demonstração: Para isso, basta mostrar que para cada $g \in \mathcal{T}$ e cada ciclo $\gamma : (\mathbb{S}^n, s_\circ) \longrightarrow (\mathcal{T}b_\circ, gb_\circ)$ com $\gamma(s_\circ) = gb_\circ$, existe um ciclo $\delta : (\mathbb{S}^n, s_\circ) \longrightarrow (\text{int}\mathcal{T}, g)$ tal que $\delta(s_\circ) = g$ e $\delta b_\circ = \gamma$.

Considere então, tal δ e tal $b_\circ$. Como $\mathcal{T}b_\circ \approx \text{int}_{N^-}(N^- \cap \mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$, existe $\beta \subset \mathcal{T} \cap N^-$ tal que γ é difeomorfo a β. Mas como $N^- \longrightarrow N^- b_\circ, n \mapsto nb_\circ$ é difeomorfismo, temos que β é difeomorfo a $\beta b_\circ$. Assim, tomamos $\delta = \beta$. □

Daí, pelo corolário 12.2 temos

Corolário 12.4 $\text{int}\mathcal{T} \cap P$ *é contrátil.*

Observação 12.5 *No entanto, não é difícil imaginar uma situação, nesse exemplo, onde a propriedade do levantamento de caminhos não funciona, ou seja, imaginar a existência de um elemento* x $\in \text{int}\mathcal{T}b_\circ$ *tal que* $\text{int}\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}\text{x}, t \mapsto t\text{x}$, *não é fibração, veja a figura abaixo*



Tomando um elemento x $\in \text{int}\mathcal{T}b_\circ$, "longe" o suficiente de $b_\circ$, temos que o semigrupo deve "voltar", a partir de um certo momento como ilustra a figura, pois $\mathcal{T}\text{x} = \mathcal{T}b_\circ$.

12.3.2 Matrizes não negativas em $\text{Sl}(n, \mathbb{R}^n)$

Considere o grupo de Lie semi-simples $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R}^n)$, $S \subset G$ o semigrupo das matrizes não negativas e $A \subset S$ o conjunto das matrizes diagonais em G. Considere também AN como no exemplo anterior. Tome a projeção $G \longrightarrow G/P_\Theta, \Theta = \Pi(2, n-1)$.

O fato de termos $S[x]$ difeomorfo a A, para qualquer $x \in A \approx \text{int}C$, implica que $S \longrightarrow S[x]$ é uma fibração (análogo ao caso $\mathcal{T}$), lembrando que C denota o conjunto de controle invariante para S no espaço projetivo $(n-1)$-dimensional, G/P_Θ, e $[x]$ é como denotado no exemplo 2.5, da seção 2.

Assim, temos pela proposição 12.1

Corolário 12.6 $\pi_n(\text{int}S \cap P_\Theta)$ *é isomorfo a* $\pi_n(C_\circ)$.

Observemos que a diferença entre esse caso e o anterior, é que aqui temos fibração para todo $x \in A$.

Bibliografia

[1] *T. Ando*, Totally positive matrices. Linear Algebra and its Applications **90** (1987), 165-219.

[2] *L. Arnold, W. Kliemann* e *E. Oeljeklaus*, Lyapunov exponents of linear stochastic systems. In: Lyapunov Exponents (L. Arnould, V. Wihstutz, eds.), Lecture Notes in Math. 1186, Springer (1986).

[3] *C.J. Braga Barros* Tese de doutorado, Unicamp.

[4] *C.J. Braga Barros* e *L.A.B. San Martin*, On the action of semigroups in fiber bundles. Mat. Contemp. **13** (1997), 1-19.

[5] *C.J. Braga Barros* e *L.A.B. San Martin*, On the number of control sets on projective space. Systems & Control Letters **29**, Elsevier (1996), 21-26.

[6] *A.H. Clifford* e *G.B. Preston*, The algebraic theory of semigroups. American Math. Soc., Mathematical Surveys **7**, Providence, Rhode Island (1961).

[7] *F. Colonius* e *W. Kliemann*, The Dynamics of control. Preprint

[8] *W. Fulton* e *J. Harris*, Representation theory. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 129 (Springer-Berlin,1991)

[9] *H. Furstenberg*, A Poisson formula for semi-simple Lie groups. Ann. of Math. **77** (1963), 335-386.

[10] *S. Helgason*, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Academic Press (1978).

[11] *J. Hilgert* , *K.H. Hofmann* e *J. Lawson*, Lie groups, convex cones and semigroups. Oxford University Press (1989).

[12] *J. Hilgert* e *K.-H. Neeb*, Lie semigroups and their applications. Lecture Notes in Math. **1552**. Springer-Verlag (1993).

[13] *J. Hilgert* e *K.-H. Neeb*, Maximality of compression semigroups. Semigroup Forum **50** (1995), 205-222.

[14] *J. Hilgert* e *K.-H. Neeb*, Compression semigroups of open orbits on real flag manifolds. Monatsh. Math. **119**, (1995), 187-214.

[15] *S.T. Hu*, Homotopy theory. Academic Press (1959)

[16] *J.E. Humphreys*, Reflection groups and coxeter groups. Cambridge studies in advanced mathematics **29** (1990)

[17] *J.D. Lawson*, Semigroups of Ol'shanskiĭ type. In Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis (Eds. K.H. Hofmann, J.D. Lawson and E.B. Vinberg), De Gruyter Expositions in Mathematics **20** (1995), 121-157.

[18] *J.D. Lawson*, Polar and Ol'shanskiĭ decompositions. J. reine angew. Math. **448** (1994), 191-219.

[19] *G. Lusztig*, Introduction to total positivity. In Positivity in Lie Theory: Open Problems (Eds. J. Hilgert, J.D. Lawson, K.-H. Neeb and E.B. Vinberg). De Gruyter Expositions in Mathematics **26** (1998), 133-145.

[20] *C.R.F. Maunder*, Algebraic Topology. Van Nostrand (1970).

[21] *D. Mittenhuber*, On maximal Lie semigroups in real hyperbolic geometry.

[22] *K.-H. Neeb*, On the fundamental group of a Lie semigroup. Glasgow Math. J. **34** (1992), 379-394.

[23] *K.-H. Neeb*, On the foundations of Lie semigroups. J. reine angew. Math. **431** (1992), 165-189.

[24] *K.-H. Neeb*, A convexity theorem for semisimple symmetric spaces. Pac. J. Math. **162** (1994), 305-349.

[25] *W.A.F. Ruppert*, On open subsemigroups of connected groups. Semigroup Forum **39** (1989), 347-362.

[26] *J. Ribeiro G.* e *L.A.B. San Martin*, The compression semigroup of a cone is connected. Relatório Técnico IMECC /2000

[27] *L.A.B. San Martin*, Álgebras de Lie. Editora da Unicamp (1999).

[28] *L.A.B. San Martin*, Control sets and semigroups in semisimple Lie groups. Semigroups in Agebra, Geometry and Analysis, Eds.: Hofmann/Lawson/Vinberg. Walter de Gruyter (1995).

[29] *L.A.B. San Martin*, Invariant control sets on flag manifolds. Mathematics of Control, Signals, and Systems **6** (1993), 41-61.

[30] *L.A.B. San Martin*, Maximal semigroups in semi-simple Lie groups. Trans. AMS. A ser publicado.

[31] *L.A.B. San Martin*, Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces. Submetido

[32] *L.A.B. San Martin* e *A.J. Santana*, The homotopy type of Lie semigroups in semi-simple Lie groups. Relatório Técnico IMECC 55/99

[33] *L.A.B. San Martin* e *P.A. Tonelli*, Semigroup actions on homogeneous spaces. Semigroup Forum **50** (1995), 59-88.

[34] *G. Warner*, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I. Springer-Verlag (1972).