IMECC-UNICAMP
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Classificação de Pré-ordens e Teoria Reduzida das Formas Quadráticas

Roseli Camargo da Silva de Paula

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Engler

Campinas - 11 de agosto de 2000

Classificação de Pré-ordens e Teoria Reduzida das Formas Quadráticas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Roseli Camargo da Silva de Paula e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de agosto de 2.000.

Prof. Dr. Antonio José Engler

Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Antonio José Engler.
2. Prof. Dr. Antonio Paques.
3. Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Paula, Roseli Camargo da Silva de

P282c Classificação de pré-ordens e teoria reduzida das formas quadráticas / Roseli Camargo da Silva de Paula -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Antonio José Engler

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Formas quadráticas. I. Engler, Antonio José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 11 de agosto de 2000 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof (a). Dr (a). ANTONIO PAQUES

Prof (a). Dr (a). CLOTILZIO MOREIRA DOS SANTOS

Agradecimentos

- Inicialmente, quero agradecer a Deus, por tudo que ele tem feito por mim.

- Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio José Engler, pela imprescindível ajuda, pela orientação , pela paciência, e principalmente pela compreensão nos momentos difíceis.

- Ao meu " orientador" e amigo Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos, pelo incentivo.

- Aos meus pais pela formação , educação e principalmente pelo carinho que me deram.

- Aos amigos que sempre me apoiaram, especialmente à Sandra, pelas orações .

- Dedico esta especialmente, ao meu esposo Rubens e meu filho Rubens Jr., pela compreensão e paciência, pela força que me deram para eu seguir em frente, e principalmente pelo amor e carinho.

- A FAPESP e a CAPES pelo apoio financeiro.

- Aos professores do IMECC, pelo excelente ensino.

Resumo

Para uma pré-ordem T de um corpo formalmente real F, desenvolvemos neste trabalho a teoria das T-formas quadráticas, e suas relações com a aritmética do corpo associada a T.

O estudo de T-formas tem origem em pelo menos dois aspectos. O primeiro, que não será abordado neste trabalho, é evitar a " torção " no estudo do anel de Witt. Esse fato pode ser observado no item (2), da Proposição 3.16.

Outra motivação para desenvolvermos essa teoria é o estudo de propriedades de validade restrita. Isto é, relações que ocorrem entre as ordens contendo a pré-ordem T, mas que não ocorrem entre todas as ordens de F.

Por exemplo, veremos que as propriedades Pasch, SAP, H_nT (para $n \geq 4$) e EDT são equivalentes, o que não ocorre se não considerarmos as propriedades sendo restritas a pré-ordem T.

Abstract

For a preordering T of a formally real field F, we develop in this work the quadratic T-forms theory, and its relations with the aritmethic of the field associated to T.

The study of T-forms has motive in at least two aspects. The first, that will not be boarded in this work is to avoid the " torsion" in the Witt ring study. This fact can be observed in item (2) of the Proposition 3.16.

Other motivation for develop this theory is the study of properties of restricted validity. So, relations that occurred between the orderings contained the preordering T, but that doesn't happen among all ordering of F.

For example, we will see that the properties Pasch, H_nT (for $n \geq 4$) and EDT are equivalents, what doesn't occur if we don't consider the properties being restricted to preordering T.

Índice

1. Introdução

Para uma pré-ordem T de um corpo formalmente real F, desenvolvemos neste trabalho a teoria das T-formas quadráticas, e suas relações com a aritmética do corpo associada a T.

O estudo de T-formas tem origem em pelo menos dois aspectos. O primeiro, que não será abordado neste trabalho, é evitar a " torção " no estudo do anel de Witt. Esse fato pode ser observado no item (2), da Proposição 3.16.

Outra motivação para desenvolvermos essa teoria é o estudo de propriedades de validade restrita. Isto é, relações que ocorrem entre as ordens contendo a pré-ordem T, mas que não ocorrem entre todas as ordens de F.

No próximo parágrafo tratamos das pré-ordens e do espaço de ordens associado. No parágrafo 3 desenvolvemos os pontos básicos da teoria de T-formas e no seguinte estudamos o anel de Witt correspondente. Os parágrafos 5 e 6 são dedicados ao estudo de T-*semiordens* e *índice de estabilidade*, dois instrumentos mais elaborados que são usados no estudo de uma pré-ordem T.

Os principais resultados do trabalho são encontrados nos parágrafos 7 a 9 onde desenvolvemos o estudo de algumas propriedades que valem no subespaço X_T associado a pré-ordem T. Destacamos que as propriedades estudadas são muito restritivas. Elas caracterizam uma pré-ordem T onde as ordens do espaço X_T são independentes.

Finalmente incluimos em um apêndice o estudo dos corpos de séries formais $K((t))$, com o objetivo de construirmos exemplos e contra-exemplos.

2. Ordens e Pré-ordens

Relembremos que um corpo F é chamado *formalmente real* se e somente se $-1 \notin \sum F^2$. Veremos que esses corpos são exatamente os corpos ordenáveis. Isto é, os corpos onde podemos estabelecer uma relação de ordem compatível com as operações do corpo. Vamos por isso estudar os corpos com ordem.

Definição 2.1: Por uma *ordem* em um corpo F entenderemos um subconjunto $P \neq F$ tal que

(1) $P + P \subseteq P$;

(2) $P.P \subseteq P$;

(3) $P \cup -P = F$;

(4) $P \cap -P = \{0\}$.

Decorre da definição que P contém $\sum F^2$, o conjunto de todas somas de quadrados em F.

Definição 2.2: Seja P uma ordem e $a \in \dot{F}$. Definimos a *P-assinatura* de a por

$$sgn_P(a) = \begin{cases} 1 & se \quad a \in \dot{P} \\ -1 & se \quad a \notin \dot{P}. \end{cases}$$

Lema 2.3: sgn_P: $\dot{F} \to \{\pm 1\}$ é um homomorfismo de grupos e tem P como núcleo.

Demonstração:-

Vamos analisar os seguintes casos:

(1) Se $a, b \in P$ então $ab \in P$. Assim $\mathrm{sgn}_P(a)\ \mathrm{sgn}_P(b) = 1 = \mathrm{sgn}_P(ab)$.

(2) Se $a, b \notin P$ então $ab \in P$. Assim $\text{sgn}_P(a)\ \text{sgn}_P(b) = 1 = \text{sgn}_P(ab)$.

(3) Se $a \in P$ e $b \notin P$ ou $a \notin P$ e $b \in P$ então $ab \notin P$.

Assim $\text{sgn}_P(a)\ \text{sgn}_P(b) = -1 = \text{sgn}_P(ab)$.

E obviamente temos que o núcleo de sgn_P é o conjunto $\{a \in \dot{F} : \text{sgn}_P(a) = 1\} = P$. ∎

Vamos denotar o conjunto de todas as ordens em F por X_F. Podemos introduzir uma topologia em X_F. Para todo $a \in \dot{F}$, seja $H(a) = \{P \in X_F : a \in P\}$. Note que $H(1) = X_F$, $H(-1) = \emptyset$ e $H(-a) = X_F \setminus H(a)$.

Consideremos a topologia em X_F com subbase $\mathcal{H} = \{H(a) : a \in F\}$. Um conjunto aberto em X_F é gerado pelos elementos da subbase, isto é, é a união de interseções finitas de conjuntos $H(a)$. Note que $H(a)$ é um conjunto aberto e fechado.

Lema 2.4: X_F é um espaço Booleano, isto é, compacto, Hausdorff e desconexo.

Demonstração:-

Temos que cada ordem P determina uma função sgn_P: $\dot{F} \longrightarrow \{\pm 1\}$ definida como em 2.2. Assim temos um mergulho $X_F \hookrightarrow \{\pm 1\}^{\dot{F}}$, onde $\{\pm 1\}^{\dot{F}}$ é o espaço de funções de $\dot{F}$ em $\{\pm 1\}$. Tomemos $\{\pm 1\}$ com a topologia discreta, e $\{\pm 1\}^{\dot{F}}$ com a topologia produto. Dessa forma $\{\pm 1\}^{\dot{F}}$ é um espaço de Hausdorff e pelo Teorema de Tychonov é compacto. Uma subbase da topologia produto é dada por $H_{a,\epsilon} = \{f : \dot{F} \to \{\pm 1\} | f(a) = \epsilon\}$, que é um conjunto aberto e fechado pois $\{\pm 1\}^{\dot{F}} - H_{a,\epsilon} = H_{a,-\epsilon}$ que é aberto. Logo $\{\pm 1\}^{\dot{F}}$ é um espaço desconexo.

Agora vamos mostrar que X_F é um subconjunto fechado de $\{\pm 1\}^{\dot{F}}$. Tome uma aplicação $s : \dot{F} \to \{\pm 1\}$ que não origina uma ordem. Temos que considerar então uma das três possibilidades:

(1) $s^{-1}(1) + s^{-1}(1) \not\subset s^{-1}(1)$

(2) $s^{-1}(1).s^{-1}(1) \not\subset s^{-1}(1)$

(3) $s^{-1}(1) \cup s^{-1}(-1) \neq \dot{F}$.

Consideremos que ocorre (1), então $a, b \in s^{-1}(1)$ implica que $a + b = c \notin s^{-1}(1)$, e daí $H_{a,1} \cap H_{b,1} \cap H_{c,-1} \ni s$. Mas $(H_{a,1} \cap H_{b,1} \cap H_{c,-1}) \cap X_F = \emptyset$, pois se $P \in X_F$, $\text{sgn}_P(a) = \text{sgn}_P(b) = 1$ então $\text{sgn}_P(c) = 1$.

No caso (2), se $a, b \in s^{-1}(1)$ temos que $c = ab \notin s^{-1}(1)$ e novamente $s \in H_{a,1} \cap H_{b,1} \cap H_{c,-1}$ e $(H_{a,1} \cap H_{b,1} \cap H_{c,-1}) \cap X_F = \emptyset$.

Se ocorre (3) existe $a \in F$ tal que $s(a) = -1(a \notin s^{-1}(1))$ e $s(-a) = -1(-a \notin s^{-1}(1)$ equivalente a $a \notin -s^{-1}(1))$ e assim $s \in H_{a,1} \cap H{-a,1}$ e $(H_{a,1} \cap H_{-a,1}) \cap X_F = \emptyset$.

Logo X_F é um subconjunto fechado de $\{\pm 1\}$. Assim X_F com a topologia induzida de $\{\pm 1\}^{\dot{F}}$ é também um espaço compacto, Hausdorff, e desconexo. Finalmente como para toda $a \in \dot{F}, H_{a,1} \cap X_F = H(a)$ e $H_{a,-1} \cap X_F = H(-a)$ concluímos que a topologia induzida por $\{\pm 1\}^{\dot{F}}$ em X_F coincide com a topologia inicialmente considerada. ∎

Dada uma ordem $P \in X_F$, escrevemos $a \geq_P b$ se $a - b \in P$, e $a >_P b$ se $a - b \in \dot{P} = P \backslash 0$. Portanto podemos falar sobre elementos *positivos* (aqueles em P) e elementos *negativos* (aqueles em $-P$) com respeito a P.

Quando a ordem P está clara no contexto, escreveremos apenas $\geq$ ou $>$ omitindo a referência P. Generalizando a noção de ordem, introduziremos agora o conceito de pré-ordem.

Definição 2.5: Uma *pré-ordem* em um corpo F é um subconjunto $T \neq F$ tal que

(1) $T + T \subseteq T$

(2) $T.T \subseteq T$

(3) $F^2 \subseteq T$.

Note que em vista destas propriedades dizer que $T \neq F$ é equivalente a dizer que $-1 \notin T$. De fato: Se $-1 \in T$, então para $x \in F$, escrevemos $x = y^2 - z^2$ onde $y = \frac{(1+x)}{2}$ e $z = \frac{(1-x)}{2}$. Daí $x \in F^2 + T.F^2 \subseteq T + T.T \subseteq T + T \subseteq T$, ou seja, $x \in T$. Logo $F \subseteq T$. Portanto $F = T$ contrariando a hipótese $T \neq F$. Por outro lado, se $-1 \notin T$ então $T \neq F$. Também aqui $T \cap -T = \{0\}$ se $T \neq F$, pois $x \in T \cap -T$ é equivalente a $x, -x \in T$, assim $-1 = -x.x.(x^{-1})^2 \in T$.

Para uma pré-ordem $T \subset F$, o conjunto $\dot{T} = T \backslash \{0\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo $\dot{F}$. De fato: Sejam $x, y \in \dot{T}$. Temos que $xy \in \dot{T}$ e $x^{-1} = (x^{-1})^2.x \in F^2.\dot{T} \subseteq \dot{T}$. Logo $x^{-1} \in \dot{T}$.

Definição 2.6: Se o índice $[\dot{F} : \dot{T}]$ é finito, o chamaremos de *índice da pré-ordem.*

Lema 2.7: A pré-ordem T é uma ordem se e só se $[\dot{F} : \dot{T}] = 2$.

Demonstração:-

Se T é ordem $T \cup -T = F$, ou seja, existem apenas duas classes laterais de $\dot{T}$ em $\dot{F}$. Portanto $[\dot{F} : \dot{T}] = 2$. Por outro lado, se $[\dot{F} : \dot{T}] = 2$ então existem duas classes laterais de $\dot{T}$ em $\dot{F}$. Como $-1 \notin T$ segue que $F = T \cup -T$. Logo pela Definição 2.1, T é uma ordem. ■

Seja $T \subset F$ uma pré-ordem, e $\{a_i : i \in I\}$ um conjunto de elementos em F. Denotaremos por $T[a_i : i \in I]$ o conjunto

$\{t_0 + \sum t_{i_1 \dots i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n}; a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in \{a_i : i \in I\}, t_{i_1 \dots i_n} \in \dot{T}\}$.

Em particular, $T[a] = T + T.a$. Note que $T[a_i : i \in I]$ é uma pré-ordem em F se e só se não contém -1.

Também $\sum F^2$ é uma pré-ordem se e somente se F é formalmente real. Se $\sum F^2$ é uma pré-ordem, note que ela é a "menor" pré-ordem de F, pois toda pré-ordem contém a soma de quadrados.

Lema 2.8: Seja $T \subset F$ uma pré-ordem e $a \in \dot{F}$. Então $T[a]$ é uma pré-ordem se e somente se $a \notin -T$.

Demonstração:-

Suponha que $a \in -T$. Então $-a \in T$ e $T[a] = T + T.a$ contém $-a.a = -a^2$. Como $F^2 \subseteq T[a].a^2 \subseteq T[a]$, isto implica que $-1 = -a^2(a^2)^{-1} \in T[a]$. Contradizendo o fato de $T[a]$ ser pré-ordem. Por outro lado, suponha que $a \notin -T$. Então $-1 \notin T[a]$, pois caso contrário, poderíamos escrever $-1 = t_1 + t_2.a$ para alguns $t_1, t_2 \in T$. Como $-1 \notin T, t_2 \neq 0$ e $-a = (1 + t_1)t_2^{-1} \in T$ contra a hipótese. Logo $T[a]$ é uma pré-ordem. ■

Proposição 2.9: Se ordenarmos o conjunto das pré-ordens por inclusão então uma pré-ordem T é maximal se e somente se T é uma ordem.

Demonstração:-

Suponha que T é uma pré-ordem maximal. Para todo $a \notin T$, temos que $T[-a]$ é uma pré-ordem. Como $T \subseteq T[-a]$ e T é maximal temos que $T = T[-a]$, isto é, $T = T + T(-a)$. Daí $-a \in T$, ou seja, $a \in -T$. Logo $F = T \cup -T$ e T é ordem em F. Por outro lado, se T é ordem, claramente T também é pré-ordem, e se existe pré-ordem S tal que $T \subseteq S$ como $[\dot{F} : \dot{T}] = 2$ temos $T = S$. ∎

Proposição 2.10: Uma pré-ordem $T \subset F$ está contida em pelo menos uma ordem.

Demonstração:-

Seja $\mathcal{F} = \{P \text{ pré-ordem } | T \subseteq P\}$. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pois $T \in \mathcal{F}$. Ordenando-se $\mathcal{F}$ por inclusão , vemos que $\mathcal{F}$ é uma família indutiva. Pelo Lema de Zorn, existe $P \in \mathcal{F}$ maximal. Vemos que P será maximal entre as pré-ordens. Logo pela Proposição 2.9 P é uma ordem de F. ∎

Vamos agora estabelecer a equivalência entre os conceitos corpo formalmente real e corpo ordenável mencionados no início deste paragráfo.

Teorema (Artin Schreier) 2.11: Um corpo é formalmente real se e somente se tem uma ordem.

Demonstração:-

Seja F um corpo formalmente real. Então $\sum F^2$ é uma pré-ordem de F e pela Proposição 2.10 $\sum F^2 \subset P \subset F$, onde P é uma ordem. Por outro lado, se P é uma ordem de F, então $\sum F^2 \subset P$ e como $-1 \notin P$, temos que $-1 \notin \sum F^2$. Logo F é formalmente real. ∎

Vamos denotar o conjunto de todas ordens contendo a pré-ordem T por X_T.

Em X_T temos a topologia induzida por X_F, onde uma subbase dessa topologia é dada por $H_T(a) = H(a) \cap X_T = \{P \in X_T : a \in P\}$.

Lema 2.12: X_T é um subconjunto fechado de X_F.

Demonstração:-

Seja $P \in X_F \setminus X_T$ e fixe $a \in T \setminus P$. Temos que $-a \in P$ e $H(-a) = \{P \in X_F : -a \in P\}$ é uma vizinhança de P. Por outro lado, para todo $P' \supset T, a \in P'$ então $P' \notin H(-a)$. Logo $H(-a) \cap X_T = \emptyset$. Logo $X_F \setminus X_T$ é aberto e X_T é fechado. ∎

Assim vemos que X_T é compacto.

Teorema 2.13: Para uma pré-ordem $T \subset F$, temos $T = \cap P$ onde P percorre todo X_T.

Demonstração:-

Seja $x \in T$. Como $T \subseteq P$, para todo $P \in X_T$ temos que $x \in \cap_{P \in X_T} P$. Logo $T \subseteq \cap_{P \in X_T} P$. Por outro lado, se $a \notin T$, então pelo Lema 2.5 $T[-a]$ é uma pré-ordem, e pela Proposição 2.10 existe uma ordem $P_0 \supseteq T[-a]$. Mas $-a \in T[-a]$. Logo $-a \in P_0$ e $a \notin P_0$ e portanto $a \notin \cap_{P \in X_T} P$. Logo $\cap_{P \in X_T} P \subseteq T$. ∎

3. T-Formas Quadráticas

Vamos agora desenvolver uma teoria análoga a teoria de formas quadráticas para corpos formalmente reais. Estaremos estudando formas quadráticas em relação ao espaço de ordens X_T, associado a uma pré-ordem. Em particular se $T = \sum F^2$ estaremos trabalhando com todas as ordens e nesse caso essa teoria é chamada de Teoria Reduzida de Formas Quadráticas.

Vamos assumir como conhecidos todos os conceitos e resultados relativos às formas quadráticas usuais, como isotropia, isometria, formas de Pfister, anel de Witt $W(F)$, e etc. Na verdade se trocarmos as expressões " T-formas" por "formas quadráticas" em muitos pontos deste trabalho, teremos exatamente o que é usualmente conhecido para formas quadráticas. Contudo nas demonstrações dos resultados ocorrem diferenças significativas.

Seja T uma pré-ordem fixada em F.

Definição 3.1: Por uma *T-forma* de dimensão n, entenderemos a expressão formal

$$\phi =< a_1, ..., a_n >_T, \ a_1, ..., a_n \in \dot{F}.$$

Chamamos n de dimensão de ϕ e denotamos por $\dim \phi$. Se T estiver clara no contexto, muitas vezes, escreveremos simplesmente $\phi =< a_1, ..., a_n >$.

Definição 3.2: Dada $P \in X_T$ e $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ definimos a *P-assinatura* de ϕ, por

$$\mathrm{sgn}_P(\phi) = \textstyle\sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}_P(a_i).$$

Lema 3.3: Para toda T-forma $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ e toda ordem $P \in X_T$ temos que $\text{sgn}_P(\phi) = 2r - \dim \phi$, onde r é o número de elementos positivos de $\{a_1, ..., a_n\}$.

Demonstração:-

Suponha que existem r elementos de ϕ que estão em $\dot{P}$, e $(n-r)$ elementos de ϕ estão em $-\dot{P}$, ou seja, não estão em P. Assim $\text{sgn}_P(\phi) = r \times 1 + (n - r) \times (-1) = r - n + r = 2r - n$. Portanto $\text{sgn}_P(\phi) = 2r - \dim(\phi)$. ∎

Vamos agora definir a *soma ortogonal* ($\perp$) e o *produto tensorial* ($\otimes$) de T-formas de maneira análoga ao que é feito para formas quadráticas

$$< a_1, ..., a_n >_T \perp < b_1, ..., b_m >_T = < a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >_T$$

$$< a_1, ..., a_n >_T \otimes < b_1, ..., b_m >_T = < a_1b_1, ..., a_ib_j, ..., a_nb_m >_T$$

Vamos agora verificar que valem as leis associativa, comutativa e distributiva para $\perp, \otimes$.

Sejam $< a_1, ..., a_n >_T, < b_1, ..., b_m >_T, < c_1, ..., c_r >_T$ T-formas. Temos que :

(1) $\perp$ é associativa. De fato:

$< a_1, ..., a_n >_T \perp (< b_1, ..., b_m >_T \perp < c_1, ..., c_r >_T) =$

$< a_1, ..., a_n >_T \perp < b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_r >_T =$

$< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_r >_T =$

$< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >_T \perp < c_1, ..., c_r >_T =$

$(< a_1, ..., a_n >_T \perp < b_1, ..., b_m >_T) \perp < c_1, ..., c_r >_T$.

(2) $\otimes$ é associativa. De fato:

$< a_1, ..., a_n >_T \otimes (< b_1, ..., b_m >_T \otimes < c_1, ..., c_r >_T) =$

$< a_1, ..., a_n >_T \otimes < b_1c_1, ..., b_1c_r, ..., b_mc_1, ..., b_mc_r >_T=$

$< a_1(b_1c_1), ..., a_1(b_1c_r), ..., a_1(b_mc_1), ..., a_1(b_mc_r), ...,$

$a_n(b_1c_1), ..., a_n(b_1c_r), ..., a_n(b_mc_1), ..., a_n(b_mc_r) >_T=.$

$< (a_1b_1)c_1, ..., (a_1b_1)c_r, ..., (a_1b_m)c_1, ..., (a_1b_m)c_r, ...,$

$(a_nb_1)c_1, ..., (a_nb_1)c_r), ..., (a_nb_m)c_1, ..., (a_nb_m)c_r >_T=$

$< a_1b_1, ..., a_1b_m, ..., a_nb_1, ..., a_nb_m >_T \otimes < c_1, ..., c_r >_T=$

$(< a_1, ..., a_n >_T \otimes < b_1, ..., b_m >_T) \otimes < c_1, ..., c_r >_T.$

(3) $\perp$ é comutativa. De fato:

$< a_1, ..., a_n >_T \perp < b_1, ..., b_m >_T=$

$< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >_T \simeq < b_1, ..., b_m, a_1, ..., a_n >_T=$

$< b_1, ..., b_m >_T \perp < a_1, ..., a_n >_T.$

(4)$\otimes$ é comutativa. De fato:

$< a_1, ..., a_n >_T \otimes < b_1, ..., b_m >_T=$

$< a_1b_1, ..., a_ib_j, ..., a_nb_m >_T=< b_1a_1, ..., b_ja_i, ..., b_ma_n >_T=$

$< b_1, ..., b_m >_T \otimes < a_1, ..., a_n >_T.$

(5)$\otimes$ é distributiva com relação a $\perp$. De fato:

$< a_1, ..., a_n >_T \otimes (< b_1, ..., b_m >_T \perp < c_1, ..., c_r >_T) =$

$< a_1, ..., a_n >_T \otimes < b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_r >_T=$

$< a_1b_1, ..., a_nb_1, ..., a_1b_m, ..., a_nb_m, ..., a_1c_1, ..., a_nc_1, ..., a_1c_r, ..., a_nc_r >_T=$

$< a_1b_1, ..., a_nb_1, ..., a_1b_m, ..., a_nb_m >_T \perp < a_1c_1, ..., a_nc_1, ..., a_1c_r, ..., a_nc_r >_T=$

$< a_1, ..., a_n >_T \otimes < b_1, ..., b_m >_T \perp < a_1, ..., a_n >_T \otimes < c_1, ..., c_r >_T.$

$(< a_1, ..., a_n >_T \perp < b_1, ..., b_m >_T) \otimes < c_1, ..., c_r >_T =$

$< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >_T \otimes < c_1, ..., c_r >_T =$

$< a_1c_1, ..., a_nc_1, ..., a_1c_r, ..., a_nc_r, ..., b_1c_1, ..., b_mc_1, ..., b_1c_r, ..., b_mc_r >_T =$

$< a_1c_1, ..., a_nc_1, ..., a_1c_r, ..., a_nc_r >_T \perp < b_1c_1, ..., b_mc_1, ..., b_1c_r, ..., b_mc_r >_T =$

$< a_1, ..., a_n >_T \otimes < c_1, ..., c_r >_T \perp < b_1, ..., b_m >_T \otimes < c_1, ..., c_r >_T.$

Lema 3.4: Sejam ϕ e ψ duas T-formas. Então:

(1) $\dim(\phi \perp \psi) = \dim(\phi) + \dim(\psi)$.

(2) $\dim(\phi \otimes \psi) = \dim(\phi).\dim(\psi)$

(3) $\mathrm{sgn}_P(\phi \perp \psi) = \mathrm{sgn}_P(\phi) + \mathrm{sgn}_P(\psi)$ para todo $P \in X_T$.

(4) $\mathrm{sgn}_P(\phi \otimes \psi) = \mathrm{sgn}_P(\phi)\ .\mathrm{sgn}_P(\psi)$ para todo $P \in X_T$.

Demonstração:-

(1) e (2) seguem da definição de $\perp$ e $\otimes$.

(3) Suponha que tenhamos r elementos de ϕ em P e s elementos de ψ em P. Então $r + s$ é o número de elementos de $(\phi \perp \psi)$ em P. Pelo Lema 3.3 temos que $\mathrm{sgn}_P(\phi) = 2r - \dim(\phi)$, $\mathrm{sgn}_P(\psi) = 2s - \dim(\psi)$ e $\mathrm{sgn}_P(\phi \perp \psi) = 2(r + s) - \dim(\phi \perp \psi) = 2r + 2s - \dim(\phi) - \dim(\psi) = 2r - \dim(\phi) + 2s - \dim(\psi) = \mathrm{sgn}_P(\phi) + \mathrm{sgn}_P(\psi)$. Portanto $\mathrm{sgn}_P(\phi \perp \psi) = \mathrm{sgn}_P(\phi) + \mathrm{sgn}_P(\psi)$ para todo $P \in X_T$.

(4) Sejam r o número de elementos de ϕ em P e s o número de elementos de ψ em P. Observemos que os elementos de $\phi \otimes \psi$ que estão em P são obtidos como produto de dois elementos de P ou de $-P$. Então o número de elementos de $(\phi \otimes \psi)$ em P é $r \times s + (n - r) \times (m - s)$.

Daí $\text{sgn}_P(\phi \otimes \psi) = 2(rs + (n-r)(m-s)) - mn = 2rs + 2mn - 2ns - 2rm + 2rs - mn = 4rs - 2ns - 2rm + mn$. Por outro lado $\text{sgn}_P(\phi).\text{sgn}_P(\psi) = (2r-n)(2s-m) = 4rs - 2rm - 2ns + mn$. Portanto $\text{sgn}_P(\phi \otimes \psi) = \text{sgn}_P(\phi)$. $\text{sgn}_P(\psi)$ para todo $P \in X_T$. ∎

Para simplificar a notação, às vezes escreveremos $\phi\psi$ para o produto tensorial $\phi \otimes \psi$, e para um número natural r, escreveremos $r.\phi$ para a r-soma ortogonal $\phi \perp \ldots \perp \phi$.

Definição 3.5: Dizemos que duas T-formas ϕ e ψ são *T-isométricas* e escrevemos $\phi \simeq_T \psi$ se $\dim(\phi) = \dim(\psi)$ e $\text{sgn}_P(\phi) = \text{sgn}_P(\psi)$, para todo $P \in X_T$.

Vemos que T-isometria não implica isometria usual.

Os seguintes exemplos de T-isometria serão úteis em cálculos futuros.

Lema 3.6:

(1) $< a_1, \ldots, a_n >_T \simeq_T < a_1t_1, \ldots, a_nt_n >_T$, onde $a_i \in \dot{F}$, $t_i \in T$.

(2) $< a, b >_T \simeq_T < a+b, ab(a+b) >_T$, onde $a, b, a+b \in \dot{F}$.

Demonstração:-

(1) Claramente essas duas T-formas tem a mesma dimensão. Como $T \subset P$, para todo $P \in X_T$, temos que $a_i \in \dot{P} \Leftrightarrow a_it_i \in \dot{P}$. Assim para todo $i = 1, \ldots, n$ temos que

$$sgn_P(a_i) = \begin{cases} 1 & se \quad a_i \in \dot{P} \Leftrightarrow a_it_i \in \dot{P} \\ -1 & se \quad a_i \notin \dot{P} \Leftrightarrow a_it_i \notin \dot{P}. \end{cases} = sgn_P(a_it_i)$$

Logo $\mathrm{sgn}_P(\phi) = \mathrm{sgn}_P(\psi)$.

(2) Claramente as dimensões são iguais. No cálculo das P-assinaturas, consideremos os três casos possíveis:

<u>1º caso:</u> Sejam $a, b \in \dot{P}$. Então $a + b \in \dot{P}$ e $\mathrm{sgn}_P(< a, b >_T) = 1 + 1 = 2$ e $\mathrm{sgn}_P(< a + b, ab(a + b) >_T) = 1(1 + 1.1) = 2$.

<u>2º caso:</u> Sejam $a, b \notin \dot{P}$. Então $a + b \notin \dot{P}$ e $\mathrm{sgn}_P(< a, b >_T) = (-1) + (-1) = -2$ e $\mathrm{sgn}_P(< a + b, ab(a + b) >_T) = (-1)(1 + (-1).(-1)) = -2$.

<u>3º caso:</u> Se $a \in \dot{P}$ e $b \notin \dot{P}$ ou $a \notin \dot{P}$ e $b \in \dot{P}$, temos $\mathrm{sgn}_P(< a, b >_T) = 1 + (-1) = 0$ ou $\mathrm{sgn}_P(< a, b >_T) = (-1) + 1 = 0$ e $\mathrm{sgn}_P(< a + b, ab(a + b) >_T) = \mathrm{sgn}_P(a + b).(1 - 1) = 0$.

Nos três casos as P-assinaturas são iguais. ∎

Definição 3.7: Uma T-forma ϕ é dita T- *hiperbólica* se $\mathrm{sgn}_P(\phi) = 0$ para todo $P \in X_T$.

Uma T-forma que é T-hiperbólica não necessariamente é hiperbólica no sentido usual. Mas veremos que elas têm propriedades semelhantes.

Lema 3.8: Toda T-forma T-hiperbólica tem dimensão par.

Demonstração:-

Sabemos que $\mathrm{sgn}_P(\phi) = 2r - \dim \phi$. Como ϕ é T-hiperbólica $\mathrm{sgn}_P(\phi) = 0$. Então $0 = 2r - \dim \phi$ e segue que $\dim \phi = 2r$. ∎

Lema 3.9: Seja ϕ uma T-forma T-hiperbólica com $\dim(\phi) = 2n$. Então $\phi \simeq_T n. < 1, -1 >_T$.

Demonstração:-

Temos que $\dim(n. < 1, -1 >_T) = n. \dim(< 1, -1 >_T) = n.2 = \dim \phi$. Também $\mathrm{sgn}_P(n. < 1, -1 >_T) = n \; \mathrm{sgn}_P(< 1, -1 >_T) = n(1 - 1) = 0 = \mathrm{sgn}_P \phi$, pois ϕ é T- hiperbólica. ∎

Portanto a menos de T-isometria, existe uma única T-forma T-hiperbólica de dimensão $2n$.

Definição 3.10: A T-forma T-hiperbólica binária $< 1, -1 >_T$ é chamada *plano T-hiperbólico* e é denotado por $\mathbb{H}_T$.

Lema 3.11: Para toda T-forma ϕ temos que $\phi \otimes \mathbb{H}_T \simeq_T \dim \phi . \mathbb{H}_T$.

Demonstração:-

Por indução sobre $\dim \phi$.

Se $\dim \phi = 1$ então $\phi =< a >_T$ e temos $\phi \otimes \mathbb{H}_T =< a, -a >_T$. Logo $\dim(\phi \otimes \mathbb{H}_T) = 2 = \dim \mathbb{H}_T$ e $\mathrm{sgn}_P(\phi \otimes \mathbb{H}_T) = \mathrm{sgn}_P(< a, -a >_T) = 0 = \mathrm{sgn}_P \mathbb{H}_T$. Portanto $\phi \otimes \mathbb{H}_T \simeq_T \dim \phi \mathbb{H}_T$.

Suponha por hipótese de indução que $\dim \phi > 1$ e que o resultado vale para $\dim \phi = n$. Vamos mostrar que o resultado vale para $n + 1$, portanto vale para todo n.

Considere a T-forma $\phi =< a_1, ..., a_n, a_{n+1} >_T = \phi_1 \perp < a_{n+1} >_T$. Temos que $\phi \otimes \mathbb{H}_T = (\phi_1 \perp < a_{n+1} >_T) \otimes \mathbb{H}_T = (\phi_1 \otimes \mathbb{H}_T) \perp (< a_{n+1} >_T \otimes H_T)$.

Pela hipótese de indução temos que $\phi_1 \otimes \mathbb{H}_T \simeq_T \dim \phi_1.\mathbb{H}_T$ e $< a_{n+1} >_T \otimes \mathbb{H}_T \simeq_T \mathbb{H}_T$. Assim $\phi \otimes \mathbb{H}_T \simeq_T (\dim \phi_1.\mathbb{H}_T) \perp \mathbb{H}_T = n.\mathbb{H}_T \perp \mathbb{H}_T = n + 1.\mathbb{H}_T = \dim \phi.\mathbb{H}_T$. Portanto qualquer que seja a dimensão de ϕ temos que $\phi \otimes \mathbb{H}_T \simeq_T \dim \phi.\mathbb{H}_T$. ∎

Definição 3.12: Uma T-forma $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ é dita *T-isotrópica* se existem $t_1, ..., t_n \in T$ não todos nulos, tais que $a_1t_1 + ... + a_nt_n = 0$. Se tais t_i's não existem, ϕ é dita *T-anisotrópica*.

Novamente T-isotropia não implica isotropia usual.

Para ilustrar esta noção de T-isotropia, considere o caso quando T é a pré-ordem $\sum F^2$ em um corpo formalmente real F. Dizer que $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ é $(\sum F^2)$-isotrópica significa que existe uma equação

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_{i1}^2 + ... + x_{ir_i}^2) = 0,$$

onde os x_{ij}'s não são todos nulos, ou seja, temos a seguinte equação :

$$a_1(x_{11}^2 + ... + x_{1r_1}^2) + a_2(x_{21}^2 + ... + x_{2r_2}^2) + ... + a_n(x_{n1}^2 + ... + x_{nr_n}^2) = 0$$

Completando a equação com variáveis convenientes obtemos:

$(a_1x_{11}^2 + a_2x_{21}^2 + ... + a_nx_{n1}^2) + (a_1x_{12}^2 + a_2x_{22}^2 + ... + a_nx_{n2}^2) + ... + (a_1x_{1r_1}^2 + a_2x_{2r_1}^2 + ... + a_nx_{nr_1}^2) + ... + (a_1x_{1r_n}^2 + a_2x_{2r_n}^2 + ... + a_nx_{nr_n}^2) = 0$. Logo para algum $r \in \mathbb{N}$ temos que $r\phi$ é isotrópica como uma forma quadrática usual. Neste caso, dizemos que a T-forma ϕ é *fracamente isotrópica* .

Observemos que se F é Pitagoreano ($F^2 = \sum F^2$), e ϕ é $\sum F^2$-isotrópica então ϕ é isotrópica como uma forma quadrática usual. Se F não é Pitagoreano, não é sempre verdade que ϕ fracamente isotrópica implica que ϕ é isotrópica.

Por exemplo, sejam $x_1, x_2 \in \dot{F}$ tais que $x_1^2 + x_2^2 \notin F^2$ e considere a T-forma $\phi =< 1, -(x_1^2 + x_2^2) >_T$. Temos que ϕ é fracamente isotrópica pois $1.(x_1^2 + x_2^2) + (-(x_1^2 + x_2^2)).1 = 0$, onde $1, (x_1^2 + x_2^2) \in \sum F^2$, para todos $x_i \in \dot{F}$. Mas como forma quadrática usual ϕ é anisotrópica, pois se $y_1, y_2 \neq 0$ e $1.y_1^2 + (-(x_1^2 + x_2^2)).y_2^2 = 0$ então $x_1^2 + x_2^2 = (y_1 y_2^{-1})^2$, contra a escolha de x_1, x_2.

Lema 3.13: Seja F um corpo tal que para toda forma ϕ fracamente isotrópica, ϕ é também isotrópica. Então F é Pitagoreano.

Demonstração:-

Seja $a = x_1^2 + ... + x_n^2$ com $x_i \in \dot{F}$. A $\sum F^2$-forma $< 1, -a >$ é fracamente isotrópica, pois $1.a + (-a).1 = 0$, onde $1, a \in \sum F^2$. Por hipótese, toda forma fracamente isotrópica é isotrópica. Então $< 1, -a >$ é isotrópica, e existem x, y não nulos tais que $x^2 - ay^2 = 0$ de onde segue que $a = \frac{x^2}{y^2} = (\frac{x}{y})^2 \in F^2$. Portanto $\sum F^2 \subseteq F^2$. Como temos trivialmente $F^2 \subseteq \sum F^2$, segue que $F^2 = \sum F^2$. ■

Definição 3.14: Para uma T-forma $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ definimos o *conjunto de valores de* ϕ por $D_T(\phi) = \{\sum_{i=1}^n a_i t_i \neq 0 : t_1, ..., t_n \in T\} = (\sum_{i=1}^n a_i T) \setminus \{0\}$.

Observemos que $tD_T(\phi) = D_T(\phi)$, para todo $t \in T$, pois $t.t \subset T$.

Definição 3.15: Se $b \in D_T(\phi)$, dizemos que b é *T-representado* por ϕ.

Proposição 3.16: Seja $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$. Então:

(1) Para todo $t_1, ..., t_r \in \dot{T}$, $D_T(< t_1, ..., t_r >_T \phi) = D_T(\phi) = D_T(r.\phi)$.

(2) Para todo $r \in I\!N$, ϕ é T-isotrópica se e só se $r\phi$ é T-isotrópica.

(3) ϕ é T-isotrópica se e só se para convenientes $t_1, ..., t_r \in \dot{T}$, $< t_1, ..., t_r >_T$ ϕ é isotrópica como uma forma quadrática usual.

Demonstração:-

(1) Temos que $< t_1, ..., t_r >_T . < a_1, ..., a_n >_T =< ..., a_i t_j, ... >_T$. Então $D_T(< t_1, ..., t_r >_T \phi) = \{\sum_{i,j}(a_i t_j)t_{ij} \neq 0 : t_{ij} \in T, \forall i, j\} = \{\sum_i a_i(\sum_j t_j t_{ij}) \neq 0 : t_{ij} \in T, \forall i, j\} = \{\sum_i a_i t'_i \neq 0 : t'_i \in T, \forall i\} = D_T(\phi)$. Como $r\phi =< 1, ..., 1 >_T$ e $1 \in T$, segue pelo caso anterior que $D_T(r.\phi) = D_T(\phi)$.

(2) Se ϕ é T-isotrópica então existem $t_1, ..., t_n \in T$ não todos nulos tais que $a_1t_1+...+a_nt_n = 0$. Portanto $r(a_1t_1+...+a_nt_n) = 0$. Daí existem $t_1, ..., t_n \in T$ não todos nulos tais que $(a_1t_1 + ... + a_nt_n) + ... + (a_1t_1 + ... + a_nt_n) = 0$. Assim $r\phi$ é T-isotrópica. Reciprocamente, suponha que $r\phi$ é T-isotrópica. Então existem $t_{11}, ..., t_{1n}, ..., t_{r1}, ..., t_{rn} \in T$ não todos nulos tais que $a_1t_{11} + ... + a_nt_{1n}+...+a_1t_{r1}+...+a_nt_{rn} = 0$. Daí $a_1(t_{11}+...+t_{r1})+...+a_n(t_{1n}+...+t_{rn}) = 0$. Fazendo $t_{1i} + ... + t_{ri} = t'_i \in T$ temos que existem $t'_1, ..., t'_n$ não todos nulos tais que $a_1t'_1 + ... + a_nt'_n = 0$. Portanto ϕ é T-isotrópica.

(3) Suponha que ϕ é T-isotrópica. Então existem $t_1, ..., t_n \in T$ não todos nulos tais que $a_1t_1 + ... + a_nt_n = 0$. Como $< t_1, ..., t_r >_T \phi = < t_1a_1, ..., t_1a_n, t_2a_1, ..., t_2a_n, ..., t_ra_1, ..., t_ra_n >_T$, para mostrar que $< t_1, ..., t_r >_T$ ϕ é isotrópica , basta mostrar que existe uma rn-upla v não nula que satifaz a equação

$$\sum_{i,j} t_i a_j X_{ij}^2 = 0 \qquad 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq r.$$

Tome $v = (v_{11}, ..., v_{1n}, v_{21}, ..., v_{2n}, ..., v_{r1}, ..., v_{rn})$ com

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j. \end{cases}$$

Assim temos que $\sum_{i,j} t_i a_j v^2 = t_1 a_1 + t_2 a_2 + ... + t_n a_n = 0$. Logo $< t_1, ..., t_r > \phi$ é isotrópica. Reciprocamente, suponha que $< t_1, ..., t_r >_T \phi$ é isotrópica. Então existe uma rn-upla $(x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{r1}, ..., x_{rn})$ não nula tal que $t_1 a_1 x_{11}^2 + ... + t_1 a_n x_{1n}^2 + ... + t_r a_1 x_{r1}^2 + ... + t_r a_n x_{rn}^2 = 0$. Daí $a_1(t_1 x_{11}^2 + ... + t_r x_{r1}^2) + ... + a_n(t_1 x_{1n}^2 + ... + t_r x_{rn}^2) = 0$. Fazendo $t_1 x_{1i}^2 + ... + t_r x_{ri}^2 = t_i' \in T$ temos que existem $t_1', ..., t_n' \in T$ não todos nulos tais que $a_1 t_1' + ..., a_n t_n' = 0$. Portanto ϕ é T-isotrópica. ■

Notemos que a afirmação (3) acima relaciona a noção de T-isotropia com a noção de isotropia usual. O próximo resultado dá uma relação análoga para formas hiperbólicas.

Usaremos a notação $<< a_1, ..., a_n >>=< 1, a_1 > \otimes ... \otimes < 1, a_n >$, para a n-forma de Pfister usual. Analogamente, definiremos a T-forma de Pfister por $<< a_1, ..., a_n >>_T =< 1, a_1 >_T \otimes ... \otimes < 1, a_n >_T$ que será também chamada de n-forma de Pfister. E se $\phi =< a_1, ..., a_m >_T$ e $t_1, .., t_m \in \dot{F}$ então $\phi(t_1, ..., t_m) = a_1 t_1 + ... + a_m t_m$.

Teorema 3.17: Para toda T-forma ϕ, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) ϕ é T-hiperbólica.

(2) $< t_1, .., t_r > \phi = 0$ no anel de Witt $W(F)$, para alguns $t_1, ..., t_r \in \dot{T}$.

(3) $<< t_1, .., t_r >> \phi = 0$ em $W(F)$, para alguns $t_1, ..., t_r \in \dot{T}$.

Demonstração:-

(1) $\Rightarrow$ (3) A prova será baseada na seguinte "fórmula de Witt" que vale no anel de Witt $W(F)$ para $a_1, a_2, .., a_n \in \dot{F}$.

$$(*) \qquad 2^n < a_1, ..., a_n >= \sum_\epsilon < \epsilon_1, ..., \epsilon_n ><< \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >> \in W(F),$$

onde ϵ percorre todas as n-uplas $(\epsilon_1, ...\epsilon_n)$ com $\epsilon_i = \{\pm 1\}$.

Para provar (*), primeiro note que $\epsilon_i << \epsilon_i a_i >> \simeq a_i << \epsilon_i a_i >>$ pois

$\epsilon_i < 1, \epsilon_i a_i >=< \epsilon_i, \epsilon_i^2 a_i > \simeq < \epsilon_i, a_i > \simeq < a_i, \epsilon_i >= a_i < 1, \epsilon_i a_i >=$

$= a_i << \epsilon_i a_i >>$.

Assim $< \epsilon_1, ..., \epsilon_n ><< \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >> \simeq < a_1, ..., a_n ><< \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >>$.

Portanto basta provarmos que

$$(**) \quad \sum_\epsilon << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >>= 2^n < 1 > \in W(F) \text{ para todo } a_i \in \dot{F}.$$

Provemos por indução em n.

Para $n = 1$, a soma é $\sum_\epsilon << \epsilon_1 a_1 >>=<< a_1 >> + << -a_1 >>=$ $< 1, a_1 > \perp < 1, -a_1 >=< 1, 1, a_1, -a_1 > \simeq < 1, 1 > \perp a_1 < 1, -1 >$. Logo em $W(F)$ valem as igualdades $<< a_1 >> + << -a_1 >>=< 1, 1 >= 2 < 1 >$.

Suponha por hipótese de indução que (**) vale para $n-1$, ou seja

$$\sum_\epsilon << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_{n-1} a_{n-1} >>= 2^{n-1} < 1 > \in W(F)$$

Então fazendo $\epsilon' = (\epsilon_1, ..., \epsilon_{n-1})$ temos que a soma se quebra em

$\sum'_\epsilon << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_{n-1}a_{n-1}, a_n >> + \sum'_\epsilon << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_{n-1}a_{n-1}, -a_n >>$ $= \sum'_\epsilon << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_{n-1}a_{n-1} >><< a_n >> + \sum'_\epsilon << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_{n-1}a_{n-1} >>$ $<< -a_n >> = \sum'_\epsilon << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_{n-1}a_{n-1} >> (<< a_n >> + << -a_n >>) =$ $= 2^{n-1} < 1 > .2 < 1 >= 2^n < 1 >$.

Portanto vale (**) para todo n.

Voltemos a prova do teorema parte (1) $\Rightarrow$ (3).

Seja $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ uma T-forma T-hiperbólica. Para obtermos (3) vamos aplicar (*). Para uma dada n-upla $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ como acima temos dois casos possíveis:

1º caso: $T[\epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n] \neq F$

Neste caso $T[\epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n]$ é uma pré-ordem e daí existe uma ordem $P \supset T[\epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n]$. Para esta ordem, como $\epsilon_i a_i \in T[\epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n] \subset P$ para todo i temos que $\epsilon_i a_i \in P$. De onde segue que $\mathrm{sgn}_P(\epsilon_i a_i) = 1$. Portanto, para esta ordem P, $\mathrm{sgn}_P(\epsilon_i) = \mathrm{sgn}_P(a_i)$ para todo i. Assim $\mathrm{sgn}_P(< \epsilon_1, ..., \epsilon_n >) = \mathrm{sgn}_P < a_1, ..., a_n >= \mathrm{sgn}_P(\phi) = 0$, pois ϕ é T-hiperbólica. Deste modo n é par e metade dos ϵ_i's é 1 e a outra metade é -1. Isto resulta $< \epsilon_1, ..., \epsilon_n >= 0 \in W(F)$ e então podemos eliminar o termo $< \epsilon_1, ..., \epsilon_n ><< \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >>$ da somatória em (*) e restringir a argumentação ao 2º caso.

2º caso: $T[\epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n] = F$.

Note que $T[\epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n] \setminus \{0\} = D_T(\phi_\epsilon)$ onde $\phi_\epsilon =<< \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >>$. Assim $D_T(\phi_\epsilon) = \dot{F}$. Portanto ϕ_ϵ é universal. Em particular -1$\in D_T(\phi_\epsilon)$. Assim existem $t_1, ..., t_l \in T$ e $l = 2^n$ tais que $\phi_\epsilon(t_1, ..., t_l) = -1$.

Tomemos $e_1, ..., e_n$ tais que $\phi_\epsilon(e_1, ..., e_n) = 1$ e obtemos que 2ϕ é isotrópica no sentido usual. Tais e_i's existem pois em $\phi_\epsilon = << \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >> = < 1, \epsilon_1, a_1 >< < \epsilon_2 a_2, ..., \epsilon_n a_n >>$. Podemos colocar 1 na primeira variável e 0 nas demais, obtendo assim $\phi_\epsilon = 1$.

Como $2\phi_\epsilon$ é isotrópica, pela Proposição 3.16.(2) ϕ_ϵ é T-isotrópica, e pela Proposição 3.16.(3) existem $t_1^\epsilon, ..., t_{m_\epsilon}^\epsilon \in \dot{T}$ tais que $< t_1^\epsilon, ..., t_{m_\epsilon}^\epsilon > \phi_\epsilon$ é isotrópica no sentido usual. Com mais razão, $<< t_1^\epsilon, ..., t_{m_\epsilon}^\epsilon >> \phi_\epsilon = << t_1^\epsilon, ..., t_{m_\epsilon}^\epsilon, \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >>$ é isotrópica. Como esta é uma forma de Pfister, ela é hiperbólica. Portanto, multiplicando os dois lados de (*) por uma forma de Pfister do tipo $<< t_1, ..., t_l >>$ convenientemente escolhida temos

$\phi 2^n << t_1, ..., t_l >> = \sum_\epsilon < \epsilon_1, ..., \epsilon_n >< < t_1', ..., t_p' >>< < t_1^\epsilon, ..., t_{m_\epsilon}^\epsilon, \epsilon_1 a_1, ..., \epsilon_n a_n >> = 0 \in W(F)$ e assim $<< 1, ..., 1, t_1^\epsilon, ..., t_{m_\epsilon}^\epsilon >> \phi = 0 \in W(F)$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Temos que $<< t_1, ..., t_r >> \phi = 0 \in W(F)$ para $t_1, ..., t_r \in T$. Daí $< 1, t_1, ..., t_r, t_1 t_2, ..., t_1 t_r, ..., t_1 ... t_r > \phi = 0 \in W(F)$. Considerando-se que $TT \subset T$, obtemos $t_1', ..., t_s' \in \dot{T}$ tais que $< t_1', ..., t_s' > \phi = 0 \in W(F)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos $< t_1, ..., t_r > \phi = 0 \in W(F)$. Então $< t_1, ..., t_r > \phi \simeq < 1, -1, ..., 1, -1 >$. Logo $\text{sgn}_P(< t_1, ..., t_r > \phi) = \text{sgn}_P(< t_1, ..., t_r >) \text{sgn}_P(\phi) = 0$ para todo $P \supset T$. Como $t_i \in T$ para todo i $\text{sgn}_P < t_1, ..., t_r > = r > 0$. Portanto $\text{sgn}_P(\phi) = 0$ para todo $P \in X_T$. Logo ϕ é T-hiperbólica. ∎

Corolário 3.18: Se ϕ é T-hiperbólica, então ϕ é T-isotrópica. A recíproca é verdadeira se ϕ é uma T-forma de Pfister.

Demonstração:-

Se ϕ é T-hiperbólica, pelo resultado anterior existem $t_1, ..., t_r \in \dot{T}$ tais que $< t_1, ..., t_r > \phi$ é hiperbólica. Como para formas quadráticas usuais , se ϕ é hiperbólica, então ϕ é isotrópica temos que $< t_1, ..., t_r > \phi$ é isotrópica. Assim pela Proposição 3.16(3) ϕ é T-isotrópica.

Reciprocamente, seja $\phi =<< b_1, ..., b_n >>_T$ T-isotrópica. Por definição existem $t_i, t_{ij}, ... \in T$ não todos nulos tais que

$t_0 + t_1 b_1 + ... + t_n b_n + t_{12} b_1 b_2 + ... + t_{123} b_1 b_2 b_3 + ... = 0.$

Considere uma ordem $P \in X_T$. A equação acima implica que os b_i's não podem estar todos em P, suponha que $b_1 \notin P$. Então $\mathrm{sgn}_P(\phi) = \mathrm{sgn}_P(< 1, b_1 >).\ \mathrm{sgn}_P(<< b_2, ..., b_n >>) = 0$, portanto ϕ é T-hiperbólica. ∎

Teorema (Critério de Representação) 3.19: Seja $b_1 \in \dot{F}$ e $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$. Temos que $b_1 \in D_T(\phi)$ se e somente se $\phi \simeq_T < b_1, ..., b_n >_T$ para convenientes $b_2, ..., b_n \in \dot{F}$. Em particular $D_T(\phi)$ depende apenas da classe de T- isometria de ϕ.

Demonstração:-

Assuma que $b_1 \in D_T(\phi)$, ou seja , $b_1 = a_1 t_1 + ... + a_n t_n \neq 0$, onde $t_i \in T$. Podemos supor que para todo $r > 1$, $a_1 t_1 + ... + a_r t_r \neq 0$ (caso contrário trabalhamos com $< a_{r+1} t_{r+1}, ..., a_n t_n >$).

Usando repetidamente o Lema 3.6, obtemos:

$< a_1, ..., a_n >_T \simeq_T < a_1 t_1, ..., a_n t_n >_T = < a_1 t_1, a_2 t_2 >_T \perp < a_3 t_3, ..., a_n t_n >_T$

$\simeq_T < a_1 t_1 + a_2 t_2, a_1 t_1 a_2 t_2 (a_1 t_1 + a_2 t_2) >_T \perp < a_3 t_3, ..., a_n t_n >_T$

$\simeq_T < a_1t_1 + a_2t_2, a_3t_3 >_T \perp < a_1a_2t_1t_2(a_1t_1 + a_2t_2), ..., a_nt_n >_T$

$\simeq_T < a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3, (a_1t_1 + a_2t_2)a_3t_3(a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3) >_T \perp$

$< a_1a_2t_1t_2(a_1t_1 + a_2t_2), ..., a_nt_n >_T$.

Assim chegamos que

$\phi \simeq_T < b_1, ..., b_n >_T$, onde $b_1 = a_1t_1 + a_2t_2 + ... + a_nt_n$.

Reciprocamente, assuma que $\phi \simeq_T < b_1, ..., b_n >_T$. Temos que $\text{sgn}_P(\phi) = \text{sgn}_P(< b_1, ..., b_n >_T)$, para toda ordem $P \in X_T$. Portanto $\text{sgn}_P(\phi \perp < -b_1, ..., -b_n >_T) = 0$, para toda ordem $P \in X_T$. Logo $< a_1, ..., a_n, -b_1, ..., -b_n >_T$ é T-hiperbólica. Pelo Teorema 3.17, existem $t_1, ..., t_r \in T$ tais que

$< t_1, .., t_r >_T < a_1, ..., a_n, -b_1, ..., -b_n >_T = 0 \in W(F)$. Daí

$< t_1, .., t_r >_T < a_1, ..., a_n >_T = < t_1, .., t_r >_T < b_1, ..., b_n >_T \in W(F)$.

Como de ambos os lados, da igualdade acima, temos formas com a mesma dimensão elas devem ser isométricas (como formas quadráticas usuais). Em particular $t_1b_1 \in D_T(< t_1, ..., t_r >_T \phi)$. Pela Proposição 3.16(1), $D_T(< t_1, ..., t_r >_T \phi) = D_T(\phi)$. Portanto $b_1 \in t_1^{-1}D_T(\phi) = D_T(\phi)$. ■

Corolário 3.20: Para toda T-forma ϕ, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) ϕ é T-isotrópica.

(2) $\phi \simeq_T \mathbb{H}_T \perp \psi$ para alguma T-forma ψ.

(3) ϕ é T-universal ($D_T(\phi) = \dot{F}$).

(4) Existe $b \in \dot{F}$ tal que $\pm b \in D_T(\phi)$.

Demonstração:-

(1) $\Rightarrow$ (2) Se $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ é T-isotrópica, existem $t_1, ..., t_n \in T$, não todos nulos, tais que $a_1t_1 + ... + a_nt_n = 0$. Suponha que $t_1 \neq 0$. Então $-a_1t_1 = a_2t_2 + ... + a_nt_n \in D_T(< a_2, ..., a_n >_T)$. Logo, pelo Teorema 3.19 $< a_2, ..., a_n >_T \simeq < -a_1t_1 >_T \perp \psi$ para alguma T-forma ψ. Como $< a_1 >_T$ $\simeq_T < a_1t_1 >_T$ temos que $< a_1, a_2, ..., a_n >_T \simeq < a_1t_1, -a_1t_1 >_T \perp \psi$. Portanto $\phi \simeq < 1, -1 >_T \perp \psi = I\!H_T \perp \psi$ para alguma T-forma ψ.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha que $\phi \simeq I\!H_T \perp \psi$. Seja $x \in \dot{F}$, $x = (\frac{x+1}{2})^2 - (\frac{x-1}{2})^2 \in D_T(I\!H_T \perp \psi) = D_T(\phi)$. Logo $\dot{F} \subset D_T(\phi)$ e $\dot{F} = D_T(\phi)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Óbvio.

(4) $\Rightarrow$ (1) Suponha que existe $\pm b \in D_T(\phi)$. Então $\sum_{i=1}^n a_it_i = b$ e $\sum_{i=1}^n a_is_i = -b$ para $t_i, s_i \in \dot{T}$. Portanto, $\sum_{i=1}^n a_it_i = -\sum_{i=1}^n a_is_i$, assim $\sum_{i=1}^n a_i(t_i + s_i) = 0$. Portanto $\sum_{i=1}^n a_it'_i = 0$, com $t'_i = t_i + s_i$, para todo $i = 1, ..., n$. ∎

Note que as caracterizações, (3) e (4) acima, para T-isotropia são aspectos especiais na teoria relativa a uma pré-ordem T; elas não têm análogas na teoria usual de formas quadráticas.

Teorema (Cancelamento de Witt para T-formas) 3.21: Sejam ϕ, ψ_1, ψ_2 T-formas. Então $\phi \perp \psi_1 \simeq_T \phi \perp \psi_2$ implica que $\psi_1 \simeq_T \psi_2$.

Demonstração:-

Se $\phi \perp \psi_1 \simeq_T \phi \perp \psi_2$, então $\dim(\phi \perp \psi_1) = \dim(\phi \perp \psi_2)$. Mas $\dim(\phi \perp \psi_1) = \dim(\phi) + \dim(\psi_1)$ e $\dim(\phi \perp \psi_2) = \dim(\phi) + \dim(\psi_2)$.

Logo $\dim(\psi_1) = \dim(\psi_2)$. Também $\operatorname{sgn}_P(\phi \perp \psi_1) = \operatorname{sgn}_P(\phi \perp \psi_2)$ implica que $\operatorname{sgn}_P(\phi)+\operatorname{sgn}_P(\psi_1) = \operatorname{sgn}_P(\phi) + \operatorname{sgn}_P(\psi_2)$. Logo $\operatorname{sgn}_P(\psi_1) = \operatorname{sgn}_P(\psi_2)$. Portanto $\psi_1 \simeq \psi_2$. ■

Teorema (Decomposição de Witt para T-formas) 3.22: Para uma dada T-forma ϕ, existe uma "decomposição de Witt" $\phi \simeq_T \phi_a \perp r\mathbb{H}_T$, onde $r \geq 0$ e ϕ_a é T-anisotrópica. Mais ainda, r e a classe de T-isometria de ϕ_a são univocamente determinados por ϕ.

Demonstração:-

Se ϕ é T-anisotrópica não há nada a provar. Supomos que ϕ é T-isotrópica, e usamos indução sobre a dimensão de ϕ.

Se $\dim(\phi) = 1$ então ϕ é T-anisotrópica. Se $\dim(\phi) = 2$ e ϕ é T-isotrópica então pelo Corolário 3.20, $\phi \simeq_T \mathbb{H}_T$. Agora, supomos que $\dim(\phi) = n$ e que a hipótese vale para toda T-forma de dimensão menor que n. Como ϕ é T-isotrópica , pelo Corolário 3.20 $\phi \simeq_T \mathbb{H}_T \perp \psi$. Se ψ é T-anisotrópica, acabou. Agora se ψ é T-isotrópica, como $\dim(\phi) = \dim(\mathbb{H}_T) + \dim(\psi)$, temos que $\dim(\psi) < \dim(\phi) = n$, e por hipótese de indução $\psi \simeq_T s\mathbb{H}_T \perp \psi_a$, onde ψ_a é a parte T-anisotrópica. Daí $\phi \simeq_T \mathbb{H}_T \perp s\mathbb{H}_T \perp \psi_a = (s+1)\mathbb{H}_T \perp \psi_a$.

Para a unicidade, supomos que ϕ tem outra decomposição de Witt, $\phi \simeq_T s\mathbb{H}_T \perp \theta_a$, onde θ_aé T-anisotrópica. Assim $r\mathbb{H}_T \perp \psi_a \simeq_T s\mathbb{H}_T \perp \theta_a$, sem perda da generalidade assumimos que $r \leq s$. Pelo Teorema 3.21 temos $\psi_a \simeq_T (s-r)\mathbb{H}_T \perp \theta_a$. Como ψ_a é T-anisotrópica $s - r = 0$, e $s = r$, portanto $\psi_a \simeq \theta_a$. E a decomposição é única a menos de T-isometria. ■

Observemos que os dois últimos resultados (assim como outros neste parágrafo) têm seus correspondentes exatamente iguais para formas quadráticas usuais, embora no nosso caso as demonstrações sejam bem mais simples.

Definição 3.23: Definimos o *discriminante* de uma T-forma $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ por $\det \phi = a_1...a_n.\dot{T} \in \dot{F}/\dot{T}$.

Proposição 3.24: Para toda T-forma $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$, temos que $\det \phi$ é unicamente determinado pela classe de T-isometria de ϕ.

Demonstração:-

Suponha que $\phi \simeq_T \psi =< b_1, ..., b_n >_T$, e seja $c = a_1...a_n$ e $d = b_1...b_n$. Queremos mostrar que $cd \in \dot{T}$; pelo Teorema 2.13, é suficiente mostrar que $\mathrm{sgn}_P c = \mathrm{sgn}_P d$, para todo $P \in X_T$. Dada a ordem P, suponha que $a_1, ..., a_r \in -\dot{P}, a_{r+1}, ..., a_n \in \dot{P}, b_1, ..., b_s \in -\dot{P}, b_{s+1}, ..., b_n \in \dot{P}$. Como $n-2r = \mathrm{sgn}_P \phi = \mathrm{sgn}_P \psi = n-2s$, temos que $r = s$, assim $\mathrm{sgn}_P(c) = (-1)^r = (-1)^s = \mathrm{sgn}_P(d)$.

■

4. Anel de Witt Relativo

Tendo desenvolvido a teoria relativa de formas quadráticas em sua grande parte, podemos agora iniciar o estudo do anel de Witt, $W_T(F)$, relativo a uma pré-ordem, e suas propriedades básicas.

Na construção que faremos a seguir se trocarmos as T-formas pelas formas quadráticas usuais obteremos a construção do Anel de Witt usual.

Considere $M_T(F) = \{\psi$ tal que ψ é T-forma $\}$. Acrescentamos um novo símbolo, que chamaremos de zero e denotaremos por 0, e definimos as seguintes operações com este símbolo:

$\psi \perp 0 = \psi$; $0.\psi = 0$; para $n \in \mathbb{N}$,

$$n.x = \begin{cases} x \perp \ldots \perp x \quad (n \text{ vezes }) & \text{se } n > 0 \\ \qquad 0 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Definimos também $\dim(0) = 0$ e $sgn_P(0) = 1$ para todo $P \in X_T$.

Para $x, y \in M_T(F) \cup \{0\}$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$x \equiv_T y \Leftrightarrow$ existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $x + r\mathbb{H}_T \simeq_T y + s\mathbb{H}_T$.

Observe que se $\psi \simeq_T \psi'$ então $\psi \equiv_T \psi'$, bastando tomar $r = s = 0$ na definição acima.

Vamos mostrar que esta é de fato uma relação de equivalência.

A reflexividade e simetria são óbvias.

Para provar a transitividade, considere $x \equiv_T y$ e $y \equiv_T z$ então existem $r, s \in I\!N$ tais que $x + rI\!H_T \simeq_T y + sI\!H_T$ e existem $k, l \in I\!N$ tais que $y + kI\!H_T \simeq_T z + lI\!H_T$. Somando membro a membro, temos $x + rI\!H_T + y + kI\!H_T \simeq_T y + sI\!H_T + z + lI\!H_T$ e daí, usando o Teorema 3.21, $x + (r+k)I\!H_T \simeq_T z + (s+l)I\!H_T$. Portanto $x \equiv_T z$.

Ainda, se $x \equiv_T y$ e $x' \equiv_T y'$ então $x + x' \equiv_T y + y'$ e $xx' \equiv_T yy'$. De fato:

Se $x \equiv_T y$ então $x + rI\!H_T \simeq_T y + sI\!H_T$, para algum $r, s \in I\!N$, se $x' \equiv_T y'$ então $x' + kI\!H_T \simeq_T y' + lI\!H_T$. Somando membro a membro temos que $(x + rI\!H_T) + (x' + kI\!H_T) \simeq_T (y + sI\!H_T) + (y' + lI\!H_T)$. Logo $(x + x') + (r+k)I\!H_T \simeq_T (y + y') + (s+l)I\!H_T$. Portanto $x + x' \equiv_T y + y'$.

Multiplicando membro a membro temos que $(x + rI\!H_T) \otimes (x' + kI\!H_T) \simeq_T (y + sI\!H_T) \otimes (y' + lI\!H_T)$. Assim $xx' + xkI\!H_T + x'rI\!H_T + rkI\!H_T \simeq yy' + ylI\!H_T + y'sI\!H_T + slI\!H_T$. Como $xkI\!H_T = k(xI\!H_T) = k \dim xI\!H_T$ segue, pelo Lema 3.11, que $xx' + k\dim xI\!H_T + r\dim x'I\!H_T + rkI\!H_T \simeq_T yy' + l\dim yI\!H_T + s\dim y'I\!H_T + slI\!H_T$. Obtemos então $xx' + (k\dim x + r\dim x' + rk)I\!H_T \simeq_T yy' + (l\dim y + s\dim y' + sl)I\!H_T$. Logo $xx' + r'I\!H_T \simeq_T yy' + s'I\!H_T$. Portanto $xx' \equiv_T yy'$.

Assim se considerarmos o conjunto das classes de equivalência

$\{\overline{x} | x \in M_T(F) \cup \{0\}\}$, onde $\overline{x} = \{y | x \equiv_T y\}$

e definirmos as seguintes operações $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ e $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$, veremos que esse conjunto é um anel que será denotado por $W_T(F)$ e chamado de *Anel de Witt Relativo.*

Teorema 4.1: $W_T(F) = \{\overline{x} | x \in M_T(F) \cup \{0\}\}$ com as operações $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ e $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$, é um anel.

Demonstração:-

Primeiro vamos mostrar que estas operações estão bem definidas. Sejam $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ e $\overline{y_1} = \overline{y_2}$ ou, seja, $x_1 \equiv_T x_2$ e $y_1 \equiv_T y_2$. Então $x_1 + y_1 \equiv_T x_2 + y_2$ e daí $\overline{x_1 + y_1} = \overline{x_2 + y_2}$. Assim $\overline{x_1} + \overline{y_1} = \overline{x_2} + \overline{y_2}$. Também $x_1 y_1 \equiv_T x_2 y_2$ implica que $\overline{x_1 y_1} = \overline{x_2 y_2}$. Assim $\overline{x_1} \cdot \overline{y_1} = \overline{x_2} \cdot \overline{y_2}$.

A associatividade, a comutatividade e a distributividade em $W_T(F)$ seguem da associatividade, da comutatividade e da distributividade de $M_T(F)$.

O elemento neutro é $\overline{0} = \{n\mathbb{H}_T | n \geq 0\}$.

De fato, temos que $\overline{0} = \{x | x \equiv_T 0\}$, ou seja, existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $x + r\mathbb{H}_T \simeq_T 0 + s\mathbb{H}_T = s\mathbb{H}_T$. Assim temos $2s = \dim x + 2r$ então $2(s-r) = \dim x > 0$. Logo $s \geq r$ e $x \simeq_T (s-r)\mathbb{H}_T$. Portanto $0 \equiv_T n\mathbb{H}_T$.

A unidade do anel é o $\overline{<1>}$, pois $\overline{<x>}\overline{<1>} = \overline{<x><1>} = \overline{<x>}$.

O elemento oposto de $x =< a_1, .., a_n >_T$ é $< -a_1, ..., -a_n >_T$. De fato temos que, se $y =< -a_1, ..., -a_n >_T$ então $x+y =< a_1, ..., a_n, -a_1, ..., -a_n >_T \simeq_T n\mathbb{H}_T$.Assim $x + y \equiv_T n\mathbb{H}_T$, daí $\overline{x+y} = \overline{0}$, de onde segue que $\overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$. Portanto $\overline{y} = -\overline{x}$, ou seja, $-\overline{< a_1, ..., a_n >_T} = \overline{< -a_1, ..., -a_n >_T}$. ■

Proposição 4.2: Os elementos de $W_T(F)$ estão em correspondência um a um com as classes de T-isometria das T-formas T-anisotrópicas.

Demonstração:-

Seja ϕ uma T-forma em $M_T(F) \cup \{0\}$. Considerando, conforme o Teorema 3.22, sua decomposição de Witt $\phi \simeq_T n\mathbb{H}_T \perp \psi_a$, onde ψ_a é T-anisotrópica, vemos que $\phi \equiv_T \psi_a$. Assim $\overline{\phi} = \overline{\psi_a}$ em $W_T(F)$. Logo cada elemento em $W_T(F)$ é representado por uma T-forma T-anisotrópica conveniente.

Agora considere ϕ e ψ duas T-formas T -anisotrópicas e suponha que $\overline{\phi} = \overline{\psi}$ em $W_T(F)$, isto é, $\phi \equiv_T \psi$. Então existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $\phi + r\mathbb{H}_T \simeq_T \psi + s\mathbb{H}_T$. Supondo sem perda da generalidade que $r \leq s$ temos que $\phi \simeq_T \psi + (s-r)\mathbb{H}_T$, pelo Teorema 3.21. Mas como ϕ é T-anisotrópica, temos que $s - r = 0$ e portanto $\phi \simeq_T \psi$. ■

Corolário 4.3: Duas T-formas ϕ e ψ representam o mesmo elemento em $W_T(F)$ se e somente se suas partes T-anisotrópicas são T-isométricas.

Corolário 4.4: $\phi \simeq_T \phi'$ se e somente se $\dim(\phi) = \dim(\phi')$ e $\overline{\phi} = \overline{\phi'}$ em $W_T(F)$.

Demonstração:-

Suponha que $\phi \simeq_T \phi'$. Então $\dim(\phi) = \dim(\phi')$, por definição. Também $\phi \equiv_T \phi'$, ou seja, $\overline{\phi} = \overline{\phi'}$ em $W_T(F)$.

Reciprocamente, se $\overline{\phi} = \overline{\phi'}$ em $W_T(F)$, temos que $\phi \equiv_T \phi'$ e por definição existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $\phi \perp r\mathbb{H}_T \simeq_T \phi' \perp s\mathbb{H}_T$. Como $\dim(\phi) = \dim(\phi')$ temos que $r = s$, cancelamento $r\mathbb{H}_T$ teremos $\phi \simeq_T \phi'$. ■

Até agora $W_T(F)$ tem as mesmas propriedades de $W(F)$. Mas existe uma propriedade que os distingue. Sabemos que $W(F)$, não é livre de torção, como grupo abeliano, a menos que F seja formalmente real e Pitagoreano (cf Lam[p.236]). Já $W_T(F)$ sempre é livre de torção, como grupo abeliano.

De fato temos que em $M_T(F) \cup \{0\}$, para uma T-forma ϕ e $r \geq 1 \in \mathbb{N}$, $r\phi$ é T-hiperbólica se e somente se ϕ é T-hiperbólica. Portanto, em $W_T(F)$, $\overline{r\phi} = \overline{0}$ se e somente se $\overline{\phi} = \overline{0}$, ou seja, $r\overline{\phi} = \overline{0}$ se e somente se $\overline{\phi} = 0$, e assim $W_T(F)$ é livre de torção.

Para ver que $W(F)$ não é livre de torção, considere a forma quadrática $< 1, -2 >$ em $M(\mathbb{Q}) \cup \{0\}$. Temos que $< 1, -2 >$ é anisotrópica, pois $1.x_1^2 + (-2).x_2^2 = 0$ com $x_1, x_2 \neq 0$, então $2 = (\frac{x_1}{x_2})^2$, o que é absurdo em $\mathbb{Q}$. Logo $x_1 = x_2 = 0$ e $< 1, -2 >$ é anisotrópica. Então $\overline{< 1, -2 >} \neq \overline{0}$ em $W(\mathbb{Q})$. Mas $2.\overline{< 1, -2 >} = \overline{< 1, 1 >< 1, -2 >} = \overline{< 1, 1, -2, -2 >} = \overline{2\mathbb{H}} = \overline{0}$.

Seja ϕ uma forma quadrática usual e seja $\phi =< a_1, ..., a_n >$ uma diagonalização de ϕ. Definimos $\epsilon_T : W(F) \to W_T(F)$ onde $\epsilon_T(\overline{\phi}) = \overline{< a_1, .., a_n >_T}$.

Vamos mostrar que ϵ_T está bem definida, ou seja,

se $< a_1, ..., a_n > \simeq < b_1, ..., b_n >$ então $< a_1, ..., a_n >_T \simeq_T < b_1, .., b_n >_T$.

Primeiro, considere duas formas quadráticas $< a, b > \simeq < c, d >$. Da isometria segue que $abF^2 = cdF^2$ e que $c, d \in D(< a, b >)$. Analisemos os casos possíveis:

Se $a, b \in P$ então $D(< a, b >) \subset P$. Como $c, d \in D(< a, b >)$ segue que $c, d \in P$. Daí $\mathrm{sgn}_P(< a, b >) = 2 = \mathrm{sgn}_P(< c, d >)$.

Se $a, b \notin P$ então $D(< a, b >) \cap P = \emptyset$. Como $c, d \in D(< a, b >)$ segue que $c, d \notin P$. Logo $\text{sgn}_P(< a, b >) = -2 = \text{sgn}_P(< c, d >)$.

Se $a \in P$ e $b \notin P$ então $\text{sgn}_P(a).\text{sgn}_P(b) = -1$ e como $abF^2 = cdF^2$ segue que -1=$\text{sgn}_P(a).\text{sgn}_P(b)$ =$\text{sgn}_P(c).\text{sgn}_P(d)$. Deste modo $\text{sgn}_P(a)+ \text{sgn}_P(b) = 0$ =$\text{sgn}_P(c)$+$\text{sgn}_P(d)$. Portanto $\text{sgn}_P(< a, b >)$ =$\text{sgn}_P(< c, d >)$. Logo se $< a, b > \simeq < c, d >$ então $\text{sgn}_P(< a, b >)$=$\text{sgn}_P(< c, d >)$.

Agora, dadas $\phi \simeq < a_1, ..., a_n >$ e $\psi \simeq < b_1, ..., b_n >$. Se $\phi \simeq \psi$, temos pelo Teorema 5.2 [L1 p21] que existe uma família de formas quadráticas $q_0, ..., q_m$ com $q_0 = \phi$ e $\psi = q_m$, e para todo $0 \leq i \leq m-1$, temos que q_i é simplesmente equivalente a q_{i+1}, ou seja, se $q_i =< x_1, ..., x_n >$ e $q_{i+1} =< y_1, ..., y_n >$ então existem dois índices r, s tais que $< x_r, x_s > \simeq < y_r, y_s >$ e para todo $t \neq r, s$, $x_t = y_t$. Dessa forma vemos que $\text{sgn}_P(q_i)$=$\text{sgn}_P(q_{i+1})$ para todo $0 \leq i \leq m - 1$. Portanto $\text{sgn}_P\phi$ =$\text{sgn}_P\psi$. Como as dimensões de ϕ e ψ são iguais, concluímos que $\phi \simeq_T \psi$ e ϵ_T está bem definida.

Vamos mostrar que ϵ_T é um homomorfismo sobrejetivo.

$$\epsilon_T(\overline{< a_1, ..., a_n >} \perp \overline{< b_1, ..., b_m >}) = \epsilon_T(\overline{< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >}) =$$
$$= \overline{< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >_T} = \overline{< a_1, ..., a_n >_T} \perp \overline{< b_1, ..., b_m >_T}) =$$
$$= \epsilon_T(\overline{< a_1, ..., a_n >}) \perp \epsilon_T(\overline{< b_1, ..., b_m >}).$$

$$\epsilon_T(\overline{< a_1, ..., a_n >} \otimes \overline{< b_1, ..., b_m >}) = \epsilon_T(\overline{< a_1b_1, ..., a_ib_j, ..., a_nb_m >}) =$$
$$= \overline{< a_1b_1, ..., a_ib_j, ..., a_nb_m >_T} = \overline{< a_1, ..., a_n >_T} \otimes \overline{< b_1, ..., b_m >_T}) =$$
$$= \epsilon_T(\overline{< a_1, ..., a_n >}) \otimes \epsilon_T(\overline{< b_1, ..., b_m >}).$$

Claramente $\epsilon_T(\overline{< 1 >}) = \overline{< 1 >_T}$.

Para toda forma quadrática $\overline{< a_1, .., a_n >_T}$ em $W_T(F)$ podemos tomar $\overline{< a_1, ..., a_n >}$ em $W(F)$ tal que $\epsilon_T(\overline{< a_1, ..., a_n >}) = \overline{< a_1, ..., a_n >_T}$. Portanto ϵ_T é um homomorfismo sobrejetivo.

Se definirmos $I_TF = \{\phi \in W_T(F) | \dim(\phi)$ é par $\}$ temos que $I_TF = \epsilon_T(IF)$.

Realmente, se $\phi \in IF$ então $\phi \simeq \overline{< a_1, ..., a_{2k} >}$ e $\epsilon_T(\phi) = \overline{< a_1, ..., a_{2k} >_T}$ que está em I_TF. Logo $\epsilon_T(IF) \subset I_TF$. Por outro lado, seja $\phi \simeq_T < a_1, ..., a_{2k} >_T \in I_TF$, pela definição e pela sobrejetividade de ϵ_T temos que existe $\psi \simeq < a_1, ..., a_{2k} > \in IF$ tal que $\phi = \epsilon(\psi) \in \epsilon_T(IF)$. Portanto $I_TF \subset \epsilon_T(IF)$.

Como ϵ_T é sobrejetivo temos que I_TF é ideal e $I_T^nF = \epsilon_T(I^nF)$ é gerado pelas T-formas de Pfister $<< a_1, ..., a_n >>_T$.

Vamos calcular o núcleo de ϵ_T.

Teorema 4.5: $\ker(\epsilon_T) = \sum_{t \in T} W(F). < 1, -t >$.

Demonstração:-

Para cada $t \in T$ a T-forma $< 1, -t >_T \simeq_T \mathbb{H}_T$ e assim a classe de $< 1, -t >$ está no $\ker(\epsilon_T)$. Considere o ideal $\sum W(F) < 1, -t >$, ideal de $W(F)$ gerado por $\{< 1, -t >: t \in T\}$. Assim pelo comentário anterior $\sum_{t \in T} W(F) < 1, -t > \subset \ker(\epsilon_T)$.

Reciprocamente, seja $\phi = < a_1, ..., a_n > \in \ker(\epsilon_T)$. Vamos provar por indução que $\phi \in \sum_{t \in T} W(F) < 1, -t >$.

Como $\epsilon_T(\phi) = 0$, temos que ϕ é T-hiperbólica e assim n é par e $\phi \in IF$. Então se $\phi \in \ker(\epsilon_T)$ temos que dimensão de ϕ é par.

Logo suponha $n = 2$. Como $\phi =< a_1, a_2 >\in \ker(\epsilon_T)$ ϕ é T-hiperbólica, e $\mathrm{sgn}_P(a_1) + \mathrm{sgn}_P(a_2) = 0$ $\forall$ $P \in X_T$. Logo temos que ou $a_1 \in P$ e $a_2 \notin P$ ou $a_1 \notin P$ e $a_2 \in P$, nos dois casos $a_1a_2 \notin P$, ou seja, $-a_1a_2 \in P$, para todo $P \in X_T$. Então tome $t = -a_1a_2 \in \cap_{P\in X_T} P = T$. Assim $< a_1, a_2 >\simeq_T$ $< 1, a_2a_1 >< a_1 >\simeq< 1, -t >< a_1 >\in \sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$.

Suponha, $n > 2$ e que para ϕ com dimensão menor que n se $\phi \in \ker \epsilon_T$, então $\phi \in \sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$, e vamos mostrar que isso vale para toda forma de dimensão n. Como $\phi \in \ker(\epsilon_T)$, ϕ é T-hiperbólica , então ϕ é T-isotrópica. Logo existe uma equação $\sum a_it_i = 0$ onde $t_i \in T$ não são todos nulos. Seja

$$a_i' = \begin{cases} a_i & se \quad t_i = 0 \\ t_ia_i & se \quad t_i \neq 0. \end{cases}$$

e consideremos $\phi' =< a_1', ..., a_n' >$. Vamos mostrar inicialmente que $\phi - \phi' \in \sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$. Supondo $t_{i_1} = ... = t_{i_r} = 0$, temos que $\phi - \phi' =< a_1, ..., a_n > - < a_1', ..., a_n' >=< a_{i_1}, ..., a_{i_r} > - < a_{i_1}, ..., a_{i_r} >\perp$ $< a_{j_1}, ..., a_{j_s} > - < t_{j_1}a_{j_1}, ..., t_{j_s}a_{j_s} >\simeq r\mathbb{H} \perp \sum_{k=1}^{s} < a_{j_k} >< 1, -t_{j_k} >$. Logo em $W(F)$, $\phi - \phi' \in \sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$ como queríamos.

A seguir mostraremos que $\phi' \in \sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$ resultando que $\phi \in \sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$. Observemos primeiro que como ϕ e $\phi - \phi' \in \ker \epsilon_T$, resulta que $\phi' \in \ker \epsilon_T$.Observemos agora que $\sum a_i' = \sum a_it_i = 0$ e portanto ϕ' é isotrópica. Pelo Teorerma 3.4 [L1, p.13] , existe forma quadrática ψ tal que $\phi' = \mathbb{H} \perp \psi$ e $\dim \psi = n - 2 < n$. Como $\phi' \in \ker \epsilon_T$, também $\psi \in \ker \epsilon_T$, pois $\phi' = \psi$ em $W(F)$. Logo por hipótese de indução $\psi \in \sum_{t\in T} W(F) <$ $1, -t >$ e assim $\phi' \in \sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$ concluindo a prova. ■

Conclusão : $W_T(F) \cong W(F)/\sum_{t\in T} W(F) < 1, -t >$ e podemos pensar que estamos fazendo uma teoria módulo T.

Vamos a seguir estabelecer um critério para verificar T-isometria que irá ser útil nas demonstrações .

Definição 4.6: Dadas duas T-formas ϕ e ψ, de mesma dimensão n, dizemos que ϕ é *sequencialmente T-equivalente* a ψ se existem T-formas quadráticas $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_m$ tais que $\phi = \phi_0$, $\phi_m = \psi$ e para todo $i = 1, ..., m-1$ se $\phi_i =< a_1, ..., a_n >_T$ e $\phi_{i+1} =< b_1, ..., b_n >_T$ então uma das condições ocorre:

(A) $b_i = t_i a_i$ para todo i com $t_i \in T$, ou seja, $a_i^{-1} b_i \in T$, para todo i,

(B) Existem $r < s$ tais que $b_r = a_r + a_s$, $b_s = a_r a_s (a_r + a_s)$, onde $a_r + a_s \neq 0$ e para todo $i \neq r, s$, $a_i = b_i$.

(C) Existem $r < s$ tais que $b_r = a_s$ e $b_s = a_r$, e para todo $i \neq r, s$, $b_i = a_i$.

Se ϕ é sequencialmente T-equivalente a ψ, escreveremos $\phi \sim_T \psi$. Note que $\sim_T$ é claramente uma relação de equivalência.

Lema 4.7: Se $\phi \sim_T \psi$ então $\phi \simeq_T \psi$.

Demonstração:-

Se ocorre (A) da Definição 4.6, temos $\phi_i =< a_1, ..., a_n >_T$ e $\phi_{i+1} = < t_1 a_1, ..., t_n a_n >_T$ e pelo Lema 3.6 temos que $\phi_i \simeq_T \phi_{i+1}$.

Se ocorre (B), temos

$\phi_i =< a_1, ..., a_r, ..., a_s, ..., a_n >_T =< a_1, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., a_{s-1}, a_{s+1}, ..., a_n >_T \perp < a_r, a_s >_T$

$\phi_{i+1} =< a_1, ..., a_r + a_s, ..., a_r a_s(a_r + a_s), ..., a_n >_T =< a_1, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., a_{s-1}, a_{s+1}, ..., a_n >_T \perp < a_r + a_s, a_r a_s(a_r + a_s) >_T$.

Mas pelo Lema 3.6 temos que $< a_r, a_s >\simeq_T< a_r + a_s, a_r a_s(a_r + a_s) >_T$. Portanto $\phi_i \simeq_T \phi_{i+1}$.

Se ocorre (C), temos

$\phi_i =< a_1, ..., a_r, ..., a_s, ..., a_n >_T =< a_1, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., a_{s-1}, a_{s+1}, ..., a_n >_T \perp < a_r, a_s >_T$

$\phi_i =< a_1, ..., a_s, ..., a_r, ..., a_n >_T =< a_1, ..., a_{s-1}, a_{s+1}, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., a_n >_T \perp < a_s, a_r >_T$. Obviamente temos $< a_r, a_s >_T \simeq_T < a_s, a_r >_T$, portanto $\phi_i \simeq_T \phi_{i+1}$. Como a T-isometria é uma relação de equivalência, segue que $\phi \simeq_T \psi$. ∎

Teorema 4.8: Seja $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ e $\psi =< b_1, ..., b_n >_T$. Se $\phi \simeq_T \psi$ então $\phi \sim_T \psi$.

Demonstração:-

Observemos inicialmente que como o grupo simétrico S_n é gerado por transposições, (C) implica que $< a_1, ..., a_n >_T \sim_T < a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)} >_T$ para toda permutação $\sigma \in S_n$.

Vamos mostrar por indução sobre $n = \dim \phi = \dim \psi$, que $\phi \simeq_T \psi$ então $\phi \sim_T \psi$.

Para $n = 1$ temos que $< a >_T \simeq_T < b >_T$ se e somente se $ba^{-1} \in \dot{T}$ então $< a >_T \sim_T < b >_T$, por (A).

Para $n = 2$ temos que $< a_1, a_2 >_T \simeq_T < b_1, b_2 >_T$ então $b_1 = a_1 t_1 + a_2 t_2$. Se $t_2 = 0$, pelo Lema 3.6 temos que $< b_1, b_2 >_T \simeq_T < a_1, b_2 >_T$. Daí segue que $< a_1 >_T \perp < a_2 >_T \simeq_T < a_1, a_2 >_T \simeq_T < b_1, b_2 >_T \simeq_T < a_1, b_2 >_T \simeq_T$ $< a_1 >_T \perp < b_2 >_T$ e pelo Teorema 3.21 temos que $< a_2 >_T \simeq_T < b_2 >_T$. Então $b_2 a_2^{-1} \in \dot{T}$, ou seja, $b_2 = a_2 t_2'$ com $t_2' \in \dot{T}$ e $< a_1, a_2 >_T \sim_T < b_1, b_2 >_T$ por (A). Se $t_2 \neq 0$ temos pelo Lema 3.6 que $< a_1, a_2 >_T \simeq_T < a_1 t_1, a_2 t_2 >_T \simeq_T$ $< a_1 t_1 + a_2 t_2, (a_1 t_1)(a_2 t_2)(a_1 t_1 + a_2 t_2) >_T \simeq_T < b_1, a_2' >$ onde $a_2' = (a_1 t_1)(a_2 t_2)$ $(a_1 t_1 + a_2 t_2)$. Logo $< a_1, a_2 >_T \sim_T < b_1, a_2' >_T$ e $< b_1, a_2' >_T \simeq_T < a_1, a_2 >_T \simeq_T$ $< b_1, b_2 >_T$. Então $< a_2' > \simeq_T < b_2 >$, daí $b_2 = a_2' t$ com $t \in \dot{T}$. Logo $< b_1, a_2' >_T \sim_T < b_1, b_2 >_T$ e pela transitividade de $\sim_T$ temos que $< a_1, a_2 >_T$ $\sim_T < b_1, b_2 >_T$.

Suponha que para $\dim(\phi) = \dim(\psi) < n$ vale a implicação:

$$\phi \simeq_T \psi \Rightarrow \phi \sim_T \psi.$$

Consideremos agora ϕ e ψ tais que $\phi \simeq_T \psi$, pelo Teorema 3.19 temos que $b_1 \in D_T(\phi)$, assim depois de permutar os a_i's podemos assumir que $b_1 = t_1 a_1 + ... + t_r a_r$, para algum $r \leq n$, onde nenhuma subsoma é igual a zero, e $t_i \in \dot{T}$. Aplicando as transformações (A) e (B) repetidamente, vemos que $\phi = < a_1, ..., a_n >_T \sim_T < b_1, a_2', ..., a_n' >_T$. Como $< a_1, ..., a_n >_T \sim_T$ $< b_1, a_2', ..., a_n' >_T$ então $< a_1, ..., a_n >_T \simeq_T < b_1, a_2', ..., a_n' >_T$. Logo por transitividade $< b_1, ..., b_n >_T \simeq_T < b_1, a_2', ..., a_n' >_T$. Cancelando $< b_1 >_T$, temos que $< b_2, ..., b_n >_T \simeq_T < a_2', ..., a_n' >_T$. Então por hipótese de indução temos que $< b_2, ..., b_n >_T \sim_T < a_2', ..., a_n' >_T$. Mas $< b_2, ..., b_n >_T \sim_T < a_2', ..., a_n' >_T$ implica que $< b_1, b_2, ..., b_n >_T \sim_T < b_1, a_2', ..., a_n' >_T$ pela definição de $\sim_T$. Portanto $\phi \sim_T \psi$. ∎

5. T-Semiordens

Vamos agora estudar uma variante do conceito de ordem que está naturalmente associada ao estudo de T-formas. Iniciamos assim este parágrafo com a seguinte definição :

Definição 5.1: Seja T uma dada pré-ordem em um corpo F. Um conjunto não vazio $M \subset F$ será chamado *T-módulo* se $M+M \subset M$ e $T.M \subset M$.

Como $F^2 \subset T$, se M é T-módulo então $F^2.M \subset M$. Em particular $0 \in M$.

Exemplos:

(1) $M = T$ é um T-módulo.

(2) Seja $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ uma T-forma. Então $M = D_T(\phi) \cup \{0\} = \sum_{i=1}^{n} T.a_i$ é um T- módulo. De fato, se $x, y \in M$ então $x = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$, com $t_i, s_i \in T$ para todo i. Daí $x+y = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_i a_i = \sum_{i=1}^{n}(t_i + s_i)a_i \in M$. Logo $M + M \subset M$.

Se $t \in T, x \in M$ então $x = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, com $t_i \in T$. Assim $tx = t\sum_{i=1}^{n} t_i a_i = \sum_{i=1}^{n}(tt_i)a_i \in M$ pois $tt_i \in T$. Logo $TM \subset M$. Portanto $D_T(\phi) \cup \{0\}$ é um T-módulo.

(3) Se M é um T-módulo então $-M$ também é.

Os T-módulos obtidos em (2) são precisamente os T-módulos "finitamente gerados". Estudaremos T-módulos em geral, e não assumiremos que são finitamente gerados, a menos que afirmemos o contrário.

Proposição 5.2: Para um T-módulo $M \subset F$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $M \neq F$,

(2) $M \cap -M = \{0\}$,

(3) Para $m_1, ..., m_r \in \dot{M}$, a T-forma $< m_1, ..., m_r >_T$ é T- anisotrópica.

Demonstração:-

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que $M \cap -M \neq \{0\}$, então existe um $x \neq 0$ tal que $x, -x \in M$. Como $D_T(< x, -x >) = \dot{F}$ para todo $y \in \dot{F}$ podemos escrever $y = xt_1 - xt_2$ para convenientes $t_1, t_2 \in T$. Logo $y \in TM + TM \subset M + M \subset M$. Assim $F \subset M$, e $M = F$, contrariando (1). Portanto $M \cap -M = \{0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponhamos que $t_1m_1 + ... + t_rm_r = 0$, onde $t_i \in T$ e $m_i \in M \setminus \{0\}$, com t_i's não todos nulos. Sem perda da generalidade, suponha que $t_1 \neq 0$. Então $-t_1m_1 = t_2m_2 + ... + t_rm_r \neq 0$. Claramente $-t_1m_1 \in -M$ e $\sum_{i=2}^{r} t_im_i \in M$. Assim $0 \neq -t_1m_1 \in M \cap -M = \{0\}$. Contradicão . Portanto se $t_1m_1 + ... + t_rm_r = 0$ então $t_1 = t_2 = ... = t_r = 0$, e $< m_1, ..., m_r >_T$ é T-anisotrópica.

(3) $\Rightarrow$ (1) Se $M = F$, então $\pm 1 \in M$. Mas $< 1, -1 >_T$ é T-isotrópica, contradizendo (3). Logo $M \neq F$. ∎

Definição 5.3: Se as condições (1) - (3) da Proposição 5.2 valem para M, dizemos que M é um *T-módulo anisotrópico.*

Lema 5.4: Se M é finitamente gerado, isto é, se $M = \sum_{i=1}^{n} T.a_i$ $(a_i \in \dot{F})$, então M é um T-módulo anisotrópico se e somente se $< a_1, ..., a_n >_T$ é T-anisotrópica.

Demonstração:-

Se $< a_1, ..., a_n >_T$ é T-isotrópica, então existem $t_1, ..., t_n \in T$ não todos nulos tais $\sum_{i=1}^{n} a_i t_i = 0$. Suponha que $t_1 \neq 0$. Daí $a_1 t_1 = -\sum_{i=2}^{n} a_i t_i$. Mas $a_1 t_1 \in M$ e $-\sum_{i=2}^{n} a_i t_i \in -M$, onde $a_1 t_1 \neq 0$. Logo $M \cap -M \neq \{0\}$. Portanto M não é um T-módulo anisotrópico.

Reciprocamente, se $< a_1, ..., a_n >_T$ é T-anisotrópica, como $a_i \in M$ para todo $i = 1, ..., n$, segue pela Proposição 5.2 que M é um T-módulo anisotrópico. ∎

Corolário 5.5: Sejam M um T-módulo anisotrópico, e $a \in \dot{F}$. Então $a \notin -M$ se e somente se $M' := M + T.a$ é um T-módulo anisotrópico.

Demonstração:-

Primeiro vamos mostrar que M' é de fato um T-módulo.

Sejam $x, y \in M'$ temos que $x = m_1 + t_1.a$ e $y = m_2 + t_2.a$ com $t_1, t_2 \in T$ e $m_1, m_2 \in M$. Assim $x+y = (m_1+t_1.a)+(m_2+t_2.a) = (m_1+m_2)+(t_1+t_2)a \in M + T.a = M'$. Logo $M' + M' \subset M'$. Sejam $t \in T, x \in M'$, temos que $x = m + t_1.a$, com $m \in M, t_1 \in T$. Então $tx = t(m + t_1.a) = tm + tt_1 a \in T.M + T.a \subset M + T.a = M'$. Logo $T.M'. \subset M'$.

Agora, suponha que M' não é um T-módulo anisotrópico, ou seja $M' = F$. Então $-a = m + ta$, para algum $m \in M$, $t \in T$. Logo $-m = (t+1)a$ e assim $a = -(t+1)^{-1} m \in -TM \subset -M$. Logo $a \in -M$.

Reciprocamente, suponha que $a \in -M$. Então $-a \in M$, $-a + 0.a \in M + T.a = M'$ e $0 + 1.a \in M + T.a = M'$, ou seja, $a, -a \in M'$. Logo $M \cap -M \neq \{0\}$, contradizendo o fato de M' ser T-módulo anisotrópico. Logo $a \notin -M$. ∎

Corolário 5.6: Um T-módulo anisotrópico $M \neq F$ é maximal entre os T-módulos anisotrópicos se e somente se $M \cup -M = F$.

Demonstração:-

Suponha que M é maximal entre os T-módulos anisotrópicos. Se existe $a \in F$ e $a \notin M \cup -M$ então pelo Corolário 5.5 $M + Ta \neq M$, é um T-módulo anisotrópico, contradizendo a maximalidade de M.

Reciprocamente, se $M \cup -M = F$. Então um T-módulo M', tal que $M' \subset M$, $M' \neq M$, contém algum $a \neq 0$, $a \in -M$. Mas então $M + Ta = F \subset M'$. Assim $F = M'$ e M' não é um T-módulo anisotrópico. ∎

Se o T-módulo M é anisotrópico, mas possivelmente, não é maximal, podemos sempre extendê-lo, pelo Lema de Zorn, a um T-módulo S, que é maximal entre os T-módulos anisotrópicos. Pela importância dos T-módulos anisotrópicos maximais, damos a eles um nome formal.

Definição 5.7: Um T-módulo anisotrópico maximal será chamado de *T-semiordem*.

Seja S uma T-semiordem. Como $S \cup -S = F$, temos que $-1 \in S$, ou $1 \in S$ (mas não ambos). Se $1 \in S$ dizemos que S é uma *T-semiordem normada.* Neste caso, temos que $T = T.1 \subset T.S \subset S$.

Observe, também, que uma T-semiordem normada é "quase" uma ordem, contendo T. Exceto pelo fato que S não é fechada sob multiplicação. O axioma $T.S \subset S$ torna-se um substituto fraco para $S.S \subset S$. Se $S.S \subset S$, então de fato S é uma ordem contendo T, senão, diremos que S é uma T-semiordem normada *própria.*

Do mesmo modo que fizemos para ordens podemos ordenar linearmente os elementos de F, com respeito a uma dada T-semiordem S.

$$a \leq_S b \Leftrightarrow b - a \in S$$
$$a <_S b \Leftrightarrow b - a \in \dot{S} = S \setminus \{0\}.$$

Assim, $a \in S$ se e somente se $0 \leq_S a$. Vemos, também, que se $x \in \dot{S}$, então $x^{-1} = (x^{-1})^2.x \in \dot{F}^2.S \subset T.S \subset S$, isto é, $x^{-1} \in S$.

Com $\leq_S, <_S$ podemos somar desigualdades e multiplicar desigualdades pelos elementos $t \in T$. Porém pela possibilidade de falha do axioma $S.S \subset S$, não podemos predizer o resultado de uma desigualdade se ela for multiplicada por um elemento $a \in S^{\cdot}$.

Deste modo, grande cuidado deve ser tomado quando trabalhamos com $\leq_S$ quando S é T-semiordem normada própria.

Proposição 5.8: Seja S uma T-semiordem normada e seja $<_S$ denotada simplesmente por $<$. Então :

(1) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$,

(2) $1 < b \Rightarrow b < b^2$,

(3) $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$, quando $a \in T$ ou $b \in T$.

Demonstração:-

(1) Se $0 < a$ então $a \in \dot{S}$, e assim $a^{-1} \in \dot{S}$. de $a < b$ temos que $b - a \in \dot{S}$, e $(b-a)^{-1} \in \dot{S}$. Daí $b[a(b-a)]^{-1} = a^{-1} + (b-a)^{-1} \in \dot{S}$. Deste modo, $a(b-a)b^{-1} \in \dot{S}$. Logo $a^{-1} - b^{-1} = (b-a)(ab)^{-1} = a^{-2}.[a(b-a)b^{-1}] \in \dot{S}$ e assim $a^{-1} - b^{-1} > 0$. Portanto $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

(2) Em (1) faça $a = 1$. Então $1 < b$ implica que $b^{-1} < 1$. Daí $b^2 b^{-1} < b^2.1$, ou seja, $b < b^2$.

(3) Suponha que $a \in T$. Mulplicando $a < b$ por a, obtemos $a^2 < ab$. Como $a < b$ implica que $b^{-1} < a^{-1}$. Multiplicamos $b^{-1} < a^{-1}$ por ab^2 e obtemos $ab^2 b^{-1} < ab^2 a^{-1}$, ou seja, $ab < b^2$. Logo $a^2 < ab < b^2$. Do mesmo modo, se $b \in T$, multiplicamos $a < b$ por b,e obtemos $ab < b^2$, e multiplicamos $b^{-1} < a^{-1}$ por $a^2 b$, e obtemos $a^2 < ab$. Logo $a^2 < ab < b^2$. ∎

Vamos agora definir o conceito de valor absoluto de um elemento em F, que será útil em algumas demonstrações :

Definição 5.9: O *valor absoluto de* a é definido por

$$| a |= \begin{cases} a & se \quad a \in S \\ -a & se \quad a \notin S \end{cases}$$

para todo $a \in \dot{F}$

O valor absoluto de a tem as seguintes propriedades:

(1) $| a |= 0$ se e somente se $a = 0$. Isto segue do fato $S \cap -S = \{0\}$.

(2) $| a + b |\leq| a | + | b |$, para todos $a, b \in \dot{F}$.

(3) Para todo $a, b \in \dot{F}$ com $a \in \pm T$ temos que $| ab |=| a || b |$.

Definição 5.10: Uma T-semiordem S em F é dita *arquimediana* se para todo $a \in F$, existe um número natural n, tal que $n >_S a$.

Proposição 5.11: Se uma T-semiordem normada S é arquimediana, então :

(1) Para todo $a <_S b$, o intervalo aberto (a, b) com respeito a S contém um número racional.

(2) S deve ser uma ordem.

Demonstração:-

Observemos inicialmente que todo natural $n \in T$ e assim se $a \in S$, então $na \in S$.

(1) Tome um número natural $n > (b-a)^{-1}$. Então $0 < n^{-1} < b-a$ e assim $1 < n(b-a)$, isto é, $1 + na < nb$. Seja m o primeiro número natural maior que na. Então $m - 1 \leq na$ e assim $m \leq na + 1 < nb$. Logo $na < m < nb$. Deste modo, $a < \frac{m}{n} < b$. Portanto $\frac{m}{n} \in (a, b)$.

(2) Precisamos mostrar que $a, b \in S$ implica que $ab \in S$. Sejam $a, b \in S$. Suponha que $a < b$, assim $0 < b-a < b+a$ (pois $b+a-b+a = 2a \in T.S \subset S$). Usando (1) escolha um número racional r tal que $0 < b - a < r < b + a$.

Pela Proposição 5.8 $(b-a)^2 < r^2 < (b+a)^2$, de onde segue que , $b^2 - 2ab + a^2 < r^2 < b^2 + 2ab + a^2$. Logo $b^2 + 2ab + a^2 - b^2 + 2ab - a^2 > 0$, ou seja, $4ab > 0$. Daí $ab > 0$. Assim $ab \in S$ e $S.S \subset S$. Portanto S é ordem. ∎

Corolário 5.12: Seja F uma extensão algébrica formalmente real de $\mathbb{Q}$. Então uma T-semiordem normada S é arquimediana e assim S é de fato uma ordem.

Demonstração:-

Para mostrar que um elemento $a \in F$ é limitado por um número natural podemos assumir que $a > 1$ ($>$ significa $>_S$). Pela Proposição 5.8 temos que $a < a^2$, multiplicando sucessivamente por potências pares de a, obtemos

$1 < a < a^2 < ... < a^i < a^{i+1} < ...$ assim $0 < \frac{1}{a^i} < 1$ para todo $i \geq 1$.

Seja $a^n + r_{n-1}a^{n-1} + ... + r_0 = 0$ a equação minimal para a, onde $r_i \in \mathbb{Q}$. Então $a = -(r_{n-1} + ... + \frac{r_0}{a^{n-1}})$. Tomando-se os valores absolutos, obtemos

$a \leq \sum_{i<n} |r_{n-1-i}\frac{1}{a^i}| = \sum_{i<n} |r_{n-1-i}||\frac{1}{a^i}| \leq \sum_{i<n} |r_{n-1-i}| \in \mathbb{Q}$. Para completar a prova basta escolher um número natural $n > \sum_{i<n} \mid r_{n-i-1} \mid$. ∎

Para uma dada pré-ordem T, escrevemos Y_T para o conjunto de todas T-semiordens normadas. Então $X_T \subset Y_T$ e $Y_T \setminus X_T$ é o conjunto de todas T-semiordens próprias.

Podemos introduzir uma topologia em Y_T, de maneira análoga a X_F. Para todo $a \in \dot{F}$, seja $H_s(a) = \{S \in Y_T : a \in S\}$. Consideramos a topologia em Y_F dada pela subbase $\mathcal{H}_S = \{H_s(a) : a \in \dot{F}\}$.

Note que $H_s(-a) = Y_T \setminus H_s(a)$, deste modo, $H_s(a)$ é um conjunto aberto e fechado. Analogamente a X_F, temos que Y_T é um espaço Hausdorff, desconexo e compacto.

Para $S \in Y_T$ e uma T-forma diagonal ϕ, podemos definir a assinatura $\mathrm{sgn}_S(\phi) \in \mathbb{Z}$, como no caso de ordens:

$\mathrm{sgn}_S(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sgn}_S(a_i)$, onde

$$sgn_S(a_i) = \begin{cases} 1 & se \quad a_i \in \dot{S} \\ -1 & se \quad a_i \notin \dot{S}, \end{cases}$$

com $a_i \in \dot{F}$, para todo i, $\dim(\phi) = n$.

Teorema 5.13: Duas T-formas ϕ, ψ de mesma dimensão são T-isométricas se e somente se $\mathrm{sgn}_S(\phi) = \mathrm{sgn}_S(\psi)$, para todo $S \in Y_T$.

Demonstração:-

Se $\mathrm{sgn}_S(\phi) = \mathrm{sgn}_S(\psi)$ para todo $S \in Y_T$, em particular para todo $S \in X_T$. Logo $\phi \simeq_T \psi$.

Reciprocamente, se $\phi \simeq_T \psi$, então , pelo Teorema 4.8, ϕ é sequencialmente T-equivalente a ψ. Então existe uma sequência $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_m$ tal que $\phi_0 = \phi$ $\phi_m = \psi$ e para todo $i = 1, ..m-1$ se $\phi_i =< a_1, ..., a_n >_T$ e $\phi_{i+1} =< b_1, ..., b_n >_T$ então algumas das condições (A), (B), (C) da Definição 4.6 ocorre.

Se ocorre (A) $\phi_i =< a_1, ..., a_n >_T$, $\phi_{i+1} =< t_1a_1, ..., t_na_n >_T$. Como $a_i \in \dot{S}$ se e só se $t_ia_i \in \dot{S}$ para todo $S \in Y_T$, temos que $\text{sgn}_S(a_i) = \text{sgn}_S(t_ia_i)$ para todo $S \in Y_T$. Logo $\text{sgn}_S(\phi_i) = \text{sgn}_S(\phi_{i+1})$ para todo $S \in Y_T$.

Se ocorre (B) $\phi_i =< a_1, ..., a_r, ..., a_s, ..., a_n >_T$ e $\phi_{i+1} =< a_1, ..., a_r + a_s, ..., a_ra_s(a_r+a_s), ..., a_n >_T$. Então $\phi_i =< a_1, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., a_{s-1}, a_{s+1}, ..., a_n >_T \perp < a_r, a_s >_T$, e $\phi_{i+1} =< a_1, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., a_{s-1}, a_{s+1}, ..., a_n >_T \perp < a_r + a_s, a_ra_s(a_r + a_s) >_T$. Logo basta mostrar que $\text{sgn}_S(< a_r, a_s >_T) = \text{sgn}_S(< a_r + a_s, a_ra_s(a_r + a_s) >_T)$.

Se $a_r, a_s \in \dot{S}$ então $a_r + a_s \in \dot{S}$ e $a_ra_s(a_r + a_s) = a_r^2a_s + a_ra_s^2 \in \dot{S}$. Por outro lado se $a_ra_s(a_r + a_s), a_r + a_s \in \dot{S}$ então $a_r = \frac{a_r^2}{a_r+a_s} + \frac{a_ra_s}{a_r+a_s} = \frac{a_r(a_r+a_s)}{a_r+a_s} = (\frac{a_r}{a_r+a_s})^2(a_r + a_s) + (\frac{1}{a_r+a_s})^2(a_r + a_s)a_ra_s \in \dot{S}$.

Analogamente, temos $a_s \in \dot{S}$, então $a_r, a_s \in \dot{S}$ se e só se $a_r + a_s, a_ra_s(a_r + a_s) \in \dot{S}$. Logo $\text{sgn}_S(< a_r, a_s >_T) = \text{sgn}_S(< a_r + a_s, a_ra_s(a_r + a_s) >_T$. Portanto $\text{sgn}_S(\phi_i) = \text{sgn}_S(\phi_{i+1})$.

Se ocorre (C) $\phi_i = < a_1, ..., a_r, ..., a_s, ..., a_n >_T$ e $\phi_{i+1} = < a_1, ..., a_s, ..., a_r, ..., a_n >_T$. Obviamente, $\text{sgn}_S(\phi_i) = \text{sgn}_S(\phi_{i+1})$. Logo como $\text{sgn}_S(\phi_i) = \text{sgn}_S(\phi_{i+1})$, para todo i, temos que $\text{sgn}_S(\phi) = \text{sgn}_S(\psi)$, para todo $S \in Y_T$. ∎

Proposição 5.14: Todo T-módulo M é a interseção de todas semiordens contendo M.

Demonstração:-

Se $M = F$, não existem T-semiordens contendo M, (pela Proposição 5.2). Mas o resultado é verdadeiro neste caso pois, por definição , a interseção de um conjunto vazio de T-semiordens em F é F.

Agora assumimos $M \neq F$, e consideramos $a \notin M$. Então $-a \notin -M$, e assim pelo Corolário 5.5, $M + T(-a)$ é um T-módulo anisotrópico. Então pelo Lema de Zorn podemos extendê-lo a uma T-semiordem S. Então $S \supseteq M$ e o fato que $-a \in S$ implicam que $a \notin S$. Logo, se $a \notin M$ também $a \notin \cap S$, $M \subset S \in Y_T$. Portanto, $M = \cap S, S \in Y_T$ tal que $M \subseteq S$. ∎

Corolário 5.15: Para cada T-forma $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ o conjunto $D_T(\phi) \cup \{0\}$ é dado pela intersecção de todas T-semiordens contendo os a_i's. Em particular, ϕ é T-isotrópica se e somente se $| \operatorname{sgn}_S(\phi) |< n$, para todo $S \in Y_T$.

Demonstração:-

Vimos no exemplo (2) do início do parágrafo que $D_T(\phi) \cup \{0\}$ é um T-módulo. Logo pela Proposição 5.14 é a intersecção de todas as T-semiordens que contém $D_T(\phi)$. Finalmente vemos que uma semiordem S contém $D_T(\phi)$ se e somente se contém $a_1, ..., a_n$.

Se ϕ é T-isotrópica, pelo Corolário 3.20, existe $b \in \dot{F}$ tal que $\pm b \in D_T(\phi)$. Logo não existe semiordem $S \in Y_T$ com $D_T(\phi) \subset S$. Vemos que se $S \in Y_T$ e $a_1, ..., a_n \in S$, então $D_T(\phi) \subset S$ contra o que acabamos de ver. Igualmente se $-a_1, ..., -a_n \in S$ para algum $S \in Y_T$, teríamos que $-D_T(\phi) \cup \{0\} \subset S$. Mas para $b \in \dot{F}$ tal que $\pm b \in D_T(\phi)$ também $\pm b \in -D_T(\phi) \cup \{0\}$. Resultaria então $\pm b \in S$, contra o fato de S ser T-semiordem. Portanto também não existe $S \in Y_T$ tal que $-a_1, ..., -a_n \in S$. Assim $| \operatorname{sgn}_S(\phi) |< n$, para todo $S \in Y_T$.

Reciprocamente, assumimos agora que $\mid \mathrm{sgn}_S(\phi) \mid < n$, para todo $S \in Y_T$. Vejamos agora que $M = D_T(\phi) \cup \{0\}$ não é T-anisotrópico. Realmente se M for T-anisotrópico, como já observamos antes, o Lema de Zorn garantirá a existência de uma T-semiordem S contendo M. Se S não for normada ($1 \notin S$) teremos $-M \subset -S$ e $-S$ será normada. Também $S \in Y_T$ ou $-S \in Y_T$. Se $M \subset S \in Y_T$ teremos $\mathrm{sgn}_S(\phi) = n$, contra a hipótese. Igualmente, se $-M \subset -S \in Y_T$ teremos $\mathrm{sgn}_S(\phi) = -n$, contra a hipótese . Logo M não é anisotrópico, como afirmamos. Dessa forma existe $b \in \dot{F}$ tal que $b \in M \cap -M$, pela Proposição 5.2. Assim $\pm b \in D_T(\phi)$ e o Corolário 3.20 garante que ϕ é T-isotrópica. ■

Concluimos este parágrafo observando que os resultados 5.13 e 5.15 estabelecem uma relação entre o estudo de T-formas e o estudo de T-semiordens.

Veremos mais adiante que a ausência de T-semiordens próprias ($X_T = Y_T$) só ocorre em um caso especial, e que as semiordens têm importante papel na classificação aritmética de corpos.

6. Índice de Estabilidade de uma Pré-ordem

Vamos a seguir estabelecer um melhor relacionamento entre o espaço topológico X_F e as formas quadráticas.

Seja $C(X_T, \mathbb{Z})$ o anel da funções contínuas de X_T em $\mathbb{Z}$, onde tomamos $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta. As operações de $C(X_T, \mathbb{Z})$ são definidas ponto a ponto. Dada $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$ observamos que $X_T = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-1}(n)$.

Devido a escolha da topologia discreta para $\mathbb{Z}$ temos que $f^{-1}(n)$ é aberto para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado X_T é compacto, logo existem $n_1, ..., n_s \in \mathbb{Z}$ tais que $X_T = f^{-1}(n_1) \cup ... \cup f^{-1}(n_s)$.

Analisando-se a igualdade acima podemos tirar as seguintes conclusões:

(1) Cada $f^{-1}(n_i)$ é aberto e fechado em X_T, pois $\{n\}$ é aberto e fechado para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Os conjuntos $f^{-1}(n_i)$ e $f^{-1}(n_j)$ com, $i \neq j$, são disjuntos, pois f é uma função . Logo a igualdade acima é uma partição de X_T em conjuntos abertos e fechados.

(3) A imagem de f é finita em $\mathbb{Z}$.

Reciprocamente se $X_T = C_1 \cup ... \cup C_k$ é uma partição de X_T em conjuntos abertos e fechados e escolhemos $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$, podemos definir $g : X_T \to \mathbb{Z}$ por $g(P) = n_i$ se e somente se $P \in C_i$. Claramente g é uma função contínua, isto é, $g \in C(X_T, \mathbb{Z})$.

Particularmente dado um conjunto aberto e fechado $C \subset X_T$, a função característica de C,

$$\chi_C(P) = \begin{cases} 1 & se \quad P \in C \\ 0 & se \quad P \in X_T \setminus C \end{cases}$$

é um elemento de $C(X_T, \mathbb{Z})$. Vemos então que se $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$ e imagem $f = \{n_1, .., n_s\}$ e $C_i = f^{-1}(n_i)$ então $f = n_1\chi_{C_1} + ... + n_s\chi_{C_s}$.

Logo, $C(X_T, \mathbb{Z})$, como grupo abeliano, é gerado pelas funções características dos conjuntos abertos e fechados $C \subset X_T$. Observemos ainda que como $\mathbb{Z}$ é livre de torção , também $C(X_T, \mathbb{Z})$ não tem torção .

Lema 6.1: Seja ϕ uma T-forma em F. Definindo-se $c_T(\phi) : X_T \to \mathbb{Z}$ por $c_T(\phi)(P) = \mathrm{sgn}_P(\phi)$, para todo $P \in X_T$, temos:

(1) $c_T(\phi) \in C(X_T, \mathbb{Z})$.

(2) Se $x \in W_T(F)$ e ϕ é uma T-forma tal que $\phi \in x$, estendemos c_T a $W_T(F)$ definindo $c_T(x) = c_T(\phi)$.

(3) $c_T : W_T(F) \to C(X_T, \mathbb{Z})$ é um homomorfismo injetor de anéis.

Demonstração:-

(1) Vemos que $c_T(\phi)$ é uma função. Mostraremos que é contínua .

Se $\dim(\phi) = 1$ então $\phi = < a >_T$ e temos que $c_T(\phi)(X_T) = \{\pm 1\}$ com $(c_T(\phi))^{-1}\{1\} = H_T(a)$ e $(c_T(\phi))^{-1}\{-1\} = H_T(-a)$. Seja $A \subset \mathbb{Z}$ aberto. Caso $A \cap Im(c_T(\phi)) = \emptyset$ temos que $(c_T(\phi))^{-1}(A) = \emptyset$, ou caso $A \cap Im(c_T(\phi)) \neq \emptyset$ temos os seguintes casos:

(1) $A \cap Im(c_T(\phi)) = \{1\}$ e $(c_T(\phi))^{-1}(A) = H_T(a)$

(2) $A \cap Im(c_T(\phi)) = \{-1\}$ e $(c_T(\phi))^{-1}(A) = H_T(-a)$

(3) $A \cap Im(c_T(\phi)) = \{\pm 1\}$ e $(c_T(\phi))^{-1}(A) = X_T$.

Assim se $\phi =< a >_T$ temos que para todo subconjunto aberto de $\mathbb{Z}$ aberto, $(c_T(\phi))^{-1}(A)$ é aberto. Logo $c_T(\phi))$ é contínua.

Se $\dim(\phi) = n > 1$ então $\phi =< a_1, ..., a_n >_T =< a_1 >_T \perp ... \perp < a_n >_T$. Logo $c_T(\phi)(P) = \text{sgn}_P(\phi) = \sum_{i=1}^n \text{sgn}_P(< a_i >_T) = \sum_{i=1}^n c_T(< a_i >_T)(P)$, para todo $P \in X_T$. Assim $c_T(\phi) = \sum_{i=1}^n c_T(< a_i >)$ é contínua, como soma de contínuas.

(2) Sejam ϕ e ϕ' duas T-formas tais que $\phi, \phi' \in x$. Isto é, existem $r, s \geq 0$ tais que $\phi \perp r\mathbb{H}_T \simeq_T \phi' \perp s\mathbb{H}_T$. Como $\text{sgn}_P(\mathbb{H}_T) = 0$ para todo $P \in X_T$ vemos que $\text{sgn}_P(\phi) = \text{sgn}_P(\phi')$ para todo $P \in X_T$ e assim $c_T(x) = c_T(\phi)$ está bem definida.

(3) Se $\phi =< a_1, ..., a_n >_T \in x \in W_T(F)$, sejam $x_i =$ classe de $< a_i >_T$ em $W_T(F)$. Temos que $x = x_1 + ... + x_n$ e assim $c_T(x) = c_T(\phi) = \text{sgn}_P(\phi) = \sum_{i=1}^n \text{sgn}_P(< a_i >_T) = \sum_{i=1}^n c_T(< a_i >_T) = \sum_{i=1}^n c_T(x_i)$. Podemos deduzir dessa igualdade que c_T é um homomorfismo de anel. Vejamos que é injetor. Temos que $c_T(\phi)(P) = 0$ para todo $P \in X_T$ é equivalente a $\text{sgn}_P(\phi) = 0$ para todo $P \in X_T$. Mas então ϕ é hiperbólica e sua classe é o elemento neutro de $W_T(F)$. ■

Por abuso de linguagem, usaremos sempre $c_T(\phi)$ para indicar $c_T($ classe de ϕ em $W_T(F))$.

A seguir vamos estudar o conúcleo de c_T, $coker(c_T) = \frac{C(X_T, \mathbb{Z})}{Im(c_T)}$

Teorema 6.2: Para toda função $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$ existe um número natural n tal que $2^n f \in c_T(I^n F)$.

Demonstração:-

Dada $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$ vimos no início desta seção que existe uma partição de X_T em conjuntos abertos e fechados $X_T = C_1 \cup .. \cup C_k$ tal que $f = n_1\chi_1 + ... + n_k\chi_k$ onde cada χ_i é a função característica de C_i.

Afirmamos que podemos reduzir a prova ao caso $f = \chi$ para χ função característica de um conjunto aberto e fechado C.

Realmente, suponhamos que C_1, C_2 são dois conjuntos abertos e fechados, χ_1, χ_2 são respectivamente as funções características de C_1, C_2 e que $q_1 \in I^{n_1}F, q_2 \in I^{n_2}F$ são tais que $2^{n_1}\chi_1 = c_T(q_1)$ e $2^{n_2}\chi_2 = c_T(q_2)$.

Seja $n = n_1 + n_2$, então $2^n\chi_1 = 2^{n_2}c_T(q_1) = c_T(2^{n_2}q_1)$ e $2^n\chi_2 = 2^{n_1}c_T(q_2) = c_T(2^{n_1}q_2)$. Como $q_1' = 2^{n_2}q_1 \in I^nF (n = n_1 + n_2)$ e $q_2' = 2^{n_1}q_2 \in I^nF$ podemos assumir sem perda da generalidade que $n_1 = n_2$. Por outro lado se $C = C_1 \cup C_2$ e χ é a função característica de C, temos que $\chi = \chi_1 + \chi_2 - \chi_1\chi_2$. Multiplicando-se essa igualdade por 2^{2n} obtemos $2^{2n}\chi = 2^{2n}\chi_1 + 2^{2n}\chi_2 - (2^n\chi_1)(2^n\chi_2) = 2^n c_T(q_1) + 2^n c_T(q_2) - c_T(q_1)c_T(q_2)) = c_T(2^n q_1 + 2^n q_2 - q_1 q_2)$. Como $q = 2^n q_1 + 2^n q_2 - q_1 q_2 \in I^{2n}F$ obtemos que $2^{2n}\chi \in I^{2n}F$. Repetindo-se esse processo quantas vezes for necessário prova-se o resultado para uma f qualquer. Vamos a seguir verificar que podemos reduzir mais ainda o problema e considerar somente conjuntos abertos e fechados do tipo $H(a_1) \cap ... \cap H(a_m)$ com $a_1, .., a_m \in F$.

Realmente dado um conjunto aberto e fechado C, como C é aberto, para cada $P \in C$ existe uma vizinhança fundamental $V_P = H(a_1^P) \cap ... \cap H(a_m^P)$ tal que $P \in V_P \subset C$. Dessa forma $C = \bigcup_P V_P$.

Mas C é compacto,pois é fechado em X_T que é um espaço compacto de Hausdorff. Logo existem $P_1, ..., P_s \in C$ tais que $C = V_{P_1} \cup ... \cup V_{P_s}$ Usando o raciocínio anterior vemos que basta provarmos a afirmação para todo conjunto aberto e fechado do tipo $H(a_1) \cap ... \cap H(a_m)$, com $a_1, ..., a_m \in F$.

Para χ função característica de $H(a_1) \cap ... \cap H(a_m)$ tomemos $q \simeq_T << a_1, ..., a_m >>_T \in I^m F$. Para $P \in X_T$ temos que $c_T(q)(P) = \text{sgn}_P(q) = \prod_{i=1}^m \text{sgn}_P(< 1, a_i >) = \prod_{i=1}^m (1 + \text{sgn}_P(a_i))$. Temos então que se $a_i \in P$ para todo i, ou equivalentemente, $P \in H(a_1) \cap ... \cap H(a_m)$, então $\text{sgn}_P(a_i) = 1$ e $\text{sgn}_P(q) = 2^m$. Por outro lado, se $P \notin H(a_1) \cap ... \cap H(a_m)$ e $1 \leq j \leq m$ é tal que $P \notin H(a_j)$ então $\text{sgn}_P(a_j) = -1$ e assim $\text{sgn}_P(q) = 0$. Podemos então concluir que $c_T(q)(P) = 2^n \chi(P)$ para todo $P \in X_T$ e assim $c_T(q) = 2^n \chi$ completando a prova da afirmação . ∎

Motivados pelo resultado anterior, vamos introduzir um invariante numérico associado a pré-ordem T.

Definição 6.3: Se $coker(c_T)$ tem um expoente finito 2^k, ou seja, se $2^k f \in c_T(W_T(F))$, para toda $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$, dizemos que T tem *índice de estabilidade* k, e escrevemos $st(T) = k$. Se $coker(c_T)$ não tem expoente finito, escrevemos $st(T) = \infty$. Se s é um inteiro maior ou igual a $k = st(T)$ dizemos que T é *s-estável*.

Proposição 6.4: Para toda pré-ordem T e qualquer inteiro $s \geq 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) T é s-estável (isto é $st(T) \leq s$),

(2) Para toda T-forma de Pfister ϕ T-anisotrópica, de dimensão 2^{s+1}, existe uma T-forma de Pfister ψ de dimensão 2^s tal que $\phi \simeq_T 2\psi$,

(3) $I_T^{s+1}(F) = 2I_T^s(F)$,

(4) $c_T : I_T^s \to C(X_T, 2^s\mathbb{Z})$ é sobrejetora.

Demonstração:-

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja ϕ uma T-forma de Pfister de dimensão 2^{s+1}. Temos que $\phi \simeq_T \phi_1 \otimes ... \otimes \phi_{s+1}$, onde $\phi_i =< 1, x_i >$ para algum $x_i \in \dot{F}$. Logo $c_T(\phi) = c_T(\phi_1).....c_T(\phi_{s+1})$ e para toda $P \in X_T$, $c_T(\phi)(P) = \prod_{i=1}^{s+1} c_T(\phi_i)(P)$.

$$c_T(\phi_i)(P) = sgn_P(< 1, x_i >) = 1 + sgn_P(x_i) = \begin{cases} 2 & se \quad x_i \in P \\ 0 & se \quad x_i \notin P. \end{cases}$$

Para cada $P \in X_T$ temos duas possibilidades:

(1) existe i tal que $c_T(\phi_i) = 0$ e então $c_T(\phi)(P) = 0$.

(2) para todo i, $c_T(\phi_i)(P) = 2$ e então $c_T(\phi)(P) = 2^{s+1}$.

Vemos porém que em qualquer caso $c_T(\phi)(P) \in 2^{s+1}\mathbb{Z}$ para toda $P \in X_T$. Logo $c_T(\phi) \in C(X_T, 2^{s+1}\mathbb{Z})$. Afirmamos que $C(X_T, 2^{s+1}\mathbb{Z}) = 2^{s+1}C(X_T, \mathbb{Z})$. Se $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$ temos que $2^{s+1}f$ é contínua e assume valores em $2^{s+1}\mathbb{Z}$. Logo $2^{s+1}f \in C(X_T, 2^{s+1}\mathbb{Z})$. Seja agora $g : X_T \to 2^{s+1}\mathbb{Z}$ contínua e definimos $f : X_T \to \mathbb{Z}$ por $f(P) = \frac{g(P)}{2^{s+1}} \in \mathbb{Z}$. Vemos que f é contínua e assim $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$. Claramente $2^{s+1}f = g$ e a afirmação fica provada.

Como por hipótese $s \geq st(T)$, $2^sC(X_T, \mathbb{Z}) \subset Im(c_T)$. Logo $c_T(\phi) \in 2Im(c_T)$. Seja τ T-forma anisotrópica tal que $c_T(\phi) = 2c_T(\tau) = c_T(2\tau)$.

Logo $\phi = 2\tau$ em $W_T(F)$, pois vimos no Lema anterior que c_T é injetiva. Como ϕ e τ são anisotrópicas temos que $\phi \simeq_T 2\tau$, pela Proposição 4.2. Observe que $1 \in D_T(\phi) = D_T(2\tau)$ pelo Teorema 3.19. Mas, pela Proposição 3.16, temos que $D_T(2\tau) = D_T(\tau)$ e assim $1 \in D_T(\tau)$. Dessa forma, pelo Teorema 3.19 existe T-forma τ' tal que $\tau \simeq_T < 1 > \perp \tau'$. Igualmente, $\phi \simeq_T < 1 > \perp \phi'$. Dessa forma $< 1 > \perp \phi' \simeq_T \phi \simeq_T 2\tau \simeq_T < 1 > \perp < 1 > \perp 2\tau'$ e obtemos $\phi' \simeq_T < 1 > \perp 2\tau'$. Resultando então que $1 \in D_T(\phi')$.

Usaremos agora o seguinte lema, que é análogo ao Teorema 3.19:

Lema 6.5 Seja $\psi = << a_1, ..., a_n >>_T$ uma T-forma de Pfister e ψ' a T-forma tal que $\psi \simeq_T < 1 > \perp \psi'$. Seja $b \in \dot{F}$. Se $b \in D_T(\psi')$ então existem $b_2, ..., b_n \in \dot{F}$ tais que $\psi \simeq_T << b, b_2, ..., b_n >>$.

Aplicando-se o lema acima na demonstração que estamos fazendo, resulta que existem $b_2, ..., b_{s+1}$ tais que $\phi \simeq_T << 1, b_2, ..., b_{s+1} >> \simeq_T 2 << b_2, ..., b_{s+1} >>$. Concluindo a Prova de (1) $\Rightarrow$ (2).

Vamos agora a prova do lema por indução sobre n.

Se $n = 1$, $\psi \simeq_T < 1, a_1 >$ e $\psi' \simeq_T < a_1 >$. Logo $b \in D_T(\psi')$ é equivalente a $a_1^{-1} b \in T$ e assim $< a_1 > \simeq_T < b >$. Logo $\psi \simeq_T < 1, b >$. Como queríamos.

Supondo que a hipótese é válida para $n-1$, seja $\psi_1 \simeq_T << a_1, ..., a_{n-1} >>$. Então $\psi \simeq_T < 1, a_n > \psi_1 \simeq_T \psi_1 \perp < a_n > \psi_1$. Se $\psi_1 \simeq_T < 1 > \perp \psi_1'$, então $\psi' \simeq \psi_1' \perp < a_n > \psi_1$. Como $b \in D_T(\psi')$ existem $x \in D_T(\psi_1') \cup \{0\}$ e $y \in D_T(\psi_1) \cup \{0\}$, tais que $b = x + a_n y$. Se $y = 0$, $b \in D_T(\psi_1')$ e pela hipótese de indução $\psi_1 \simeq_T << b, b_2, .., b_{n-2} >>$. Portanto $\psi \simeq_T << b, b_2, ..., b_{n-2}, a_n >>$. Completando a prova neste caso.

Assumimos agora $y \neq 0$. Logo existe $y_0 \in D_T(\psi_1') \cup \{0\}$ e $t \in F$ tais que $y = y_0 + t^2$. Como $y \neq 0$, y_0 e t não podem ser ambos nulos.

Vejamos agora que $\psi \simeq_T << a_1, ..., a_{n-1}, ya_n >>$. Se $y_0 = 0$, $y = t^2$ e claramente $\psi \simeq_T << a_1, .., a_{n-1}, t^2 a_n >>$. Se $y_0 \neq 0$, $y_0 \in D_T(\psi_1')$ e por hipótese de indução existem $c_2, .., c_{n-1}$ tais que $\psi_1 \simeq_T << y_0, c_2, ..., c_{n-1} >>$. Assim $\psi \simeq_T < 1, a_n > \psi_1 \simeq_T < 1, a_n > << y_0, c_2, ..., c_{n-1} >> \simeq_T$ $\simeq_T << y_0, c_2, ..., c_{n-1}, a_n >> \simeq_T$

$$<< c_2, ..., c_{n-1} >> \otimes << y_0, a_n >> \qquad (*)$$

Vemos que $<< y_0, a_n >> \simeq_T << y_0, ya_n >>$, pois essas T-formas têm dimensão 4 e para toda $P \in X_T$, temos:

Se $y_0, a_n \in P$, então $y_0, a_n, y_0 a_n, y, y_0 y a_n \in P$. Assim $\text{sgn}_P << y_0, a_n >> =$ $4 = \text{sgn}_P << y_0, ya_n >>$. Se $y_0 \in P$ e $a_n \notin P$ então $y_0, y = y_0 + t^2 \in P$ e $x_n, y_0 a_n, y_0 y a_n \notin P$. Assim $\text{sgn}_P << y_0, x_n >> = 0 = \text{sgn}_P << y_0, ya_n >>$. Se $y_0 \notin P$ e $ya_n \in P$ então $y_0 y a_n \notin P$. Se $y_0 \notin P$ e $ya_n \notin P$ então $y_0 y a_n \in P$ e portanto $\text{sgn}_P(<< y_0, ya_n >>) = 0$. Quanto a $<< y_0, a_n >>$ igualmente $a_n \in P$ implica $y_0 a_n \notin P$, enquanto que $a_n \notin P$ implica que $y_0 a_n \in P$. Logo, para todo $P \in X_T$, $\text{sgn}_P << y_0, a_n >> = \text{sgn}_P << y_0, ya_n >>$ e portanto $<< y_0, a_n >> \simeq_T << y_0, ya_n >>$.

Voltando então a T-isometria (*), obtemos que $\psi \simeq_T << c_2, ..., c_{n-1} >>$ $\otimes << y_0, ya_n >> \simeq_T << y_0, c_2, ..., c_{n-1}, ya_n >> \simeq_T < 1, ya_n > << y_0, .., c_{n-1} >>$ $\simeq_T < 1, ya_n > \psi_1 \simeq_T << a_1, ..., a_{n-1}, ya_n >>$.

Recordemos que $b = x + a_n y$. Se $x = 0$, $b = a_n y$ e pelo que acabamos de mostrar $\psi \simeq_T << a_1, ..., a_{n-1}, b >>$. Como queríamos.

Finalmente, se $x \neq 0$, temos que $x \in D_T(\psi_1')$ e novamente pela hipótese de indução teremos $\psi_1 \simeq_T << x, d_2, ..., d_{n-1} >>$ para $d_2, .., d_{n-1} \in F$. Assim $\psi \simeq_T < 1, ya_n > \psi_1 \simeq_T < 1, ya_n >< x, d_2, .., d_{n-1} >> \simeq << x, d_2, ..., d_{n-1}, ya_n >>$

$$\simeq_T << d_2, .., d_{n-1} >> \otimes << x, ya_n >> \qquad (**)$$

Com o mesmo argumento que usamos acima $<< x, ya_n >> \simeq_T << x+ya_n, xya_n >>$. Substituindo-se em (**) obtemos $\psi \simeq_T << d_2, .., d_{n-1} >> \otimes << b, xya_n >> \simeq_T << b, b_2, .., b_{n-1} >>$. Completando a prova do Lema. ∎

Vamos continuar a prova da Proposição 6.4.

(2) $\Rightarrow$ (3) Óbvio, pois I_T^{s+1} é gerado aditivamente pelas T-formas de Pfister de dimensão 2^{s+1}.

(3) $\Rightarrow$ (4) Tome $f \in C(X_T, 2^s\mathbb{Z})$.Como vimos no início, temos que $f = 2^s f_0$, com $f_0 \in C(X_T, \mathbb{Z})$. Pelo Teorema 6.2, existe $m \geq 1$ tal que $2^m f_0 = c_T(\phi)$ com $\phi \in I_T^m F$. Sejam $n \geq m$ e $n \geq s$. Logo $2^n f_0 = 2^{n-m}(2^m f_0) = 2^{n-m} c_T(\phi) = c_T(2^{n-m}\phi)$. Como $\phi \in I_T^m F$ temos que $2^{n-m}\phi \in I_T^n F$. Portanto $2^n f_0 = c_T(\phi)$ para alguma $\phi \in I_T^n F$, com $n \geq s$. Temos por hipótese que $I_T^{s+1} F = 2 I_T^s F$. Verifica-se recursivamente que $I_T^{s+r} F = 2^r I_T^s F$ para todo $r \geq 0$. Logo $I_T^n F = 2^{n-s} I_T^s F$ e $\phi = 2^{n-s}\psi \in W_T(F)$, para alguma T-forma $\psi \in I_T^s F$. Portanto $2^n f_0 = c_T(\phi)$ e $2^{n-s} 2^s f_0 = 2^{n-s} c_T(\psi)$. Logo $2^s f_0 = c_T(\psi)$ e $f = c_T(\psi) \in c_T(I_T^s F)$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Mostramos no início da prova de (1) implica (2) que $C(X_T, 2^n\mathbb{Z}) = 2^nC(X_T, \mathbb{Z})$. Assim temos que $c_T(I_T^sF) = C(X_T, 2^s\mathbb{Z}) = 2^sC(X_T, \mathbb{Z})$. Logo para toda $f \in C(X_T, \mathbb{Z})$ existe $\phi \in I_T^sF$ tal que $c_T(\phi) = 2^sf$. Portanto T é s-estável. ∎

Corolário 6.6: Seja T uma pré-ordem. Então :

(1) $st(T) = 0$ se e somente se T é uma ordem.

(2) $st(T) \leq 1$ se e somente se $Im(c_T : W_TF \to C(X_T, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + 2C(X_T, \mathbb{Z})$.

Demonstração:-

(1) Fazendo $s = 0$ na Proposição 6.4 parte (1), temos pela parte (2) que para toda 1-forma de Pfister T-anisotrópica ϕ, existe uma 0-forma de Pfister $\psi =< 1 >_T$ tal que $\phi \simeq_T 2\psi$, ou seja, se $a \notin -T$ então $< 1, a >_T \simeq_T < 1, 1 >_T$, isto quer dizer que $a \in T$. Logo $T \cup -T = F$. Portanto T é uma ordem. Reciprocamente se T é uma ordem, $T \cup -T = F$. Tome uma 1-forma $\phi =< 1, a >_T$ T-anisotrópica. Afirmamos que $a \in T$. Realmente se $a \notin T$ então $a \in -T$ pois $F = T \cup -T$. Se $t \in T$ é tal que $a = -t$ então $t + a.1 = 0$ e ϕ é T-isotrópica, contradição . Logo $a \in T$. Por outro lado $X_T = \{T\}$ e assim $\mathrm{sgn}_P\phi = 2$ para todo $P \in X_T$ (isto é $P = T$). Dessa forma $\phi \simeq_T < 1, 1 >_T \simeq 2 < 1 >_T$ e portanto $st(T) = 0$ pela Proposição 6.4.

(2) Se $st(T) \leq 1$ então $c_T(I_TF) = C(X_T, 2\mathbb{Z})$ pela Proposição 6.4. Mas $C(X_T, 2\mathbb{Z}) = 2C(X_T, \mathbb{Z})$ e $c_T(W_T(F)) = c_T(\mathbb{Z}+I_TF) = c_T(\mathbb{Z})+c_T(I_TF) = c_T(\mathbb{Z}) + 2C(X_T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + 2C(X_T, \mathbb{Z})$. Reciprocamente, se $c_T(W_T(F)) = \mathbb{Z} + 2C(X_T, \mathbb{Z})$ então para toda $f \in C(X_T, 2\mathbb{Z}) = 2C(X_T, \mathbb{Z})$, existe uma

T-forma ϕ com $f = c_T(\phi)$. Como para toda $P \in X_T$, $\text{sgn}_P(\phi) = c_T(\phi)(P) = f(P) \in 2\mathbb{Z}$, e pelo Lema 3.3, temos que $\dim(\phi) - \text{sgn}_P(\phi) \in 2\mathbb{Z}$, resultando que $\dim(\phi)$ é par e $\phi \in I_T F$. Logo $c_T : I_T F \to C(X_T, 2\mathbb{Z})$ é sobrejetora e pela Proposição 6.4 T é 1-estável. Logo $st(T) \leq 1$. ∎

7. Pré-ordens Pasch

Definição 7.1: Uma pré-ordem T em um corpo F é chamada *Pasch* se $Y_T = X_T$, ou seja, se toda T-semiordem normada é uma ordem (ver §5). Se a pré-ordem $\sum F^2$ em um corpo (formalmente real) F é Pasch, dizemos que F é um *corpo Pasch.*

Lema 7.2: Se T é uma pré-ordem Pasch, então qualquer pré-ordem $T' \supseteq T$ também é uma pré-ordem Pasch.

Demonstração:-

Se T é Pasch então $Y_T = X_T$. Suponha que S é uma T'-semiordem, então $T'S \subset S$. Como $T \subset T'$ temos que $TS \subset T'S \subset S$, e S é uma T-semiordem. Logo S é uma ordem, portanto T' é Pasch. ■

Lema 7.3: Seja F um corpo formalmente real. F é um corpo Pasch se e somente se todas as pré-ordens em F são Pasch.

Demonstração:-

Se F é um corpo Pasch, $\sum F^2$ é uma pré-ordem Pasch. Como $\sum F^2 \subset T$, para toda pré-ordem T, temos que toda pré-ordem T é Pasch pelo Lema 7.2. Reciprocamente, se todas as pré-ordens são Pasch em F em particular $\sum F^2$ é Pasch. Portanto F é um corpo Pasch. ■

Lema 7.4: Se F é uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}$, então F é um corpo Pasch.

Demonstração:-

Pelo Corolário 5.12, uma $\sum F^2$- semiordem S é uma ordem. Logo $\sum F^2$ é uma pré-ordem Pasch e assim F é um corpo Pasch. ∎

Lema 7.5: Seja $T = P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_r$ $(r < \infty)$, onde P_i são ordens arquimedianas. Então T é uma pré-ordem Pasch.

Demonstração:-

Seja $S \in Y_T$. Afirmamos que S é uma T-semiordem arquimediana e assim S é ordem pela Proposição 5.10 e esta pronto. Para provar a afirmação , seja $x \in F$. Para cada i existe um número natural n_i tal que $n_i - x \in P_i$ (pois P_i são arquimedianas). Seja $n = max\{n_i : 1 \leq i \leq r\}$. Então $n - x \in \bigcap_{i=1}^{r} P_i = T \subseteq S$ e assim $n - x \in S$, ou seja $n \geq_S x$. Logo S é arquimediana. ∎

Teorema 7.6: Para cada pré-ordem T, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) T é Pasch.

(2) $st(T) \leq 1$.

(3) Im $(W_T(F) \to C(X_T, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + 2C(X_T, \mathbb{Z})$.

(4) a T-forma $< 1, a, b, -ab >_T$ é T-isotrópica, quaisquer que sejam $a, b \in \dot{F}$.

Demonstração:-

Nosso esquema de demonstração será (3) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (1)

(3) $\Leftrightarrow$ (2) Corolário 6.6.

(2) $\Rightarrow$ (4) Pela Proposição 6.4 se T é 1-estável a toda 2-forma de Pfister ϕ, existe uma 1-forma de Pfister ψ tal que $\phi \simeq_T 2\psi$. Considere a 2-forma de Pfister $<< -a, -b >>_T$. Então $< 1, -a, -b, ab >_T \simeq_T < 1, 1 >< 1, c >$ para algum $c \in \dot{F}$. Logo $< 1 >_T \perp < -a, -b, ab >_T \simeq_T < 1 >_T \perp < 1, c, c >_T$ e por cancelamento $< -a, -b, ab > \simeq_T < 1, c, c >_T$. Assim $< a, b, -ab >_T \simeq_T < -1, -c, -c >_T$ e somando $< 1 >_T$ temos que $< 1, a, b, -ab >_T \simeq_T < 1, -1, -c, -c >_T$ que é T-isotrópica.

(4) $\Rightarrow$ (2) Sejam $a, b \in F$ e $< 1, -a, -b, ab >_T$ uma 2-forma de Pfister. Como $< 1, a, b, -ab >_T$ é T-isotrópica então pelo Corolário 3.20 temos que $< 1, a, b, -ab >_T \simeq_T < 1, -1 >_T \perp < c, d >_T$, para $c, d \in \dot{F}$. Pela Proposição 3.24 $-cd\dot{F}^2 = -\dot{F}^2$ e assim $c\dot{F}^2 = d\dot{F}^2$. Logo $< c, d > \simeq_T < c, c >$ e então $< 1, a, b, -ab > \simeq_T < 1, -1, c, c >$. Por cancelamento $< a, b, -ab >_T \simeq_T < -1, c, c >_T$ e $< -a, -b, ab >_T \simeq_T < 1, -c, -c >_T$. Somando $< 1 >_T$ temos que $< 1, -a, -b, ab >_T \simeq_T < 1, 1, -c, -c >_T$. Assim $<< -a, -b >>_T \simeq_T 2 << -c >>_T$ e pela Proposição 6.4, T é 1-estável.

(4) $\Rightarrow$ (1) Suponha que T não é Pasch. Então existe uma T-sermiordem normada S que não é ordem. Fixe um par $a, b \in S$ com $ab \notin S$. Assim $\phi = < 1, a, b, -ab >_T$ não é T-isotrópica, pois se ϕ é T-isotrópica, existem $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$ não todos nulos tais que $1t_1 + at_2 + bt_3 - abt_4 = 0$ e daí $abt_4 = t_1 + at_2 + bt_3 \in S$, mas $abt_4 \notin S$. Contradição . Portanto T é Pasch.

(1) $\Rightarrow$ (4) Seja $S \in Y_T = X_T$. Como S é uma ordem temos que $1 \in S$ e que os elementos $a, b, -ab$ não podem estar todos em S. Logo $|\mathrm{sgn}_S(< 1, a, b, -ab >)| < 4$ para todo $S \in Y_T$ e então $< 1, a, b, -ab >$ é T-isotrópica pelo Corolário 5.15.

8. Pré-ordens SAP

Definição 8.1: Seja T uma pré-ordem de um corpo F. Dizemos que T é *SAP* (ou T satisfaz a Propriedade de Aproximação Forte) se para quaisquer dois conjuntos fechados disjuntos, $A, B \subset X_T$, existe um elemento $a \in \dot{F}$ tal que a é positivo em todas as ordens de A e a é negativo em todas as ordens de B, ou seja, $A \subseteq H_T(a)$ e $B \subseteq H_T(-a)$. Se $T = \sum F^2$ é SAP dizemos que F é um *corpo SAP*.

Proposição 8.2: Considere X_T e $\mathcal{H}= \{H_T(a) | a \in \dot{F}\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) T é SAP.

(2) Todo conjunto aberto e fechado contido em X_T pertence a $\mathcal{H}$.

(3) $\mathcal{H}$ é fechado sob interseções finitas.

(4) $\mathcal{H}$ é uma base para a topologia de X_T.

Demonstração:-

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja A qualquer conjunto aberto e fechado. Por (1) existe $H_T(a) \in \mathcal{H}$ tal que $A \subseteq H_T(a)$ e $X_T \setminus A \subseteq H_T(-a)$, pois se A é aberto e fechado então $X_T \setminus A$ também é aberto e fechado. Logo $H_T(a) \subseteq A$ e $A = H_T(a)$, ou seja, todo conjunto aberto e fechado em X_T está em $\mathcal{H}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Todo conjunto $H_T(a) \in \mathcal{H}$ é aberto e fechado. Em particular uma interseção finita de conjuntos em $\mathcal{H}$ também é aberto e fechado e assim pertence a $\mathcal{H}$ por (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) Como $\mathcal{H}$ é uma subbase e é fechado para interseções finitas, temos que $\mathcal{H}$ é uma base.

(4) $\Rightarrow$ (3) Sejam $a_1, ..., a_n \in F$ e $A = H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n)$. Tomando-se uma vizinhança $H_T(b)$ para cada ponto $P \in A$ e levando-se em conta que A é compacto, temos que existem $b_1, ..., b_m \in F$ tais que $A = H_T(b_1) \cup ... \cup H_T(b_m)$. Repetindo-se alguns dos a_i's ou b_j's sem perda da generalidade podemos assumir $m = n$. Agora considerando as imagens das T-formas de Pister $\phi =<< a_1, ..., a_n >>_T$ e $\psi =<< -b_1, ..., -b_n >>_T$ sob $c_T : W_TF \rightarrow C(X_T, \mathbb{Z})$ temos que

$$c_T(\psi)(P) = sgn_P(< 1, -b_1 >)...sgn_P(< 1, -b_n >) = \begin{cases} 2...2 = 2^n & se \quad P \notin A \\ 0 & se \quad P \in A. \end{cases}$$

Igualmente obtemos

$$c_T(\phi)(P) = \begin{cases} 2^n & se \quad P \in A \\ 0 & se \quad P \notin A. \end{cases}$$

Em particular, $c_T(\phi \perp \psi)$ é a função constante 2^n em X_T. Isto é, $c_T(\phi \perp \psi) = c_T(2^n < 1 >)$. Dessa forma pelo Lema 6.1 $\phi \perp \psi = 2^n < 1 >$ em $W_T(F)$. Portanto, existe uma T-isometria $\phi \perp \psi \simeq_T 2^n < 1 >_T \perp 2^{n-1} < 1, -1 >_T$ pois $\dim(\phi \perp \psi) = \dim(\phi) + \dim(\psi) = 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$ e $\dim(2^n < 1 >) = 2^n$.

Em particular, pelo Corolário 3.20, $\phi \perp \psi$ é T-isotrópica. Sejam $t_i, s_i \in T$, $i = 1, ..., 2^n$ tais que $\sum_{i=1}^{2^n} a_i t_i + \sum_{i=1}^{2^n} b_i s_i = 0$ então $\sum_{i=1}^{2^n} a_i t_i = -\sum_{i=1}^{2^n} b_i s_i$, ou seja existe $a \in \dot{F}$ tal que $a \in D_T(\phi)$ e $-a \in D_T(\psi)$. Como $a \in D_T(\phi)$, temos que $a \in P$ para todo $P \in X_T$ tal que $a_1, ..., a_n \in P$. Isto é, $a \in P$ para todo $P \in H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n) = A$.

Igualmente $-a \in D_T(\psi)$ implica que $-a \in P$ para todo $P \in H_T(-b_1) \cap ... \cap H_T(-b_n) = X_T \setminus A$. Dessa forma $H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n) = H_T(a) \in \mathcal{H}$ como queríamos.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sejam A e B conjuntos fechados disjuntos. Temos que $X_T \setminus B$ é um aberto. Como (3)implica (4) sabemos que $\mathcal{H}$ é uma base para a topologia de X_T. Logo para cada $P \in X_T \setminus B$ existe $H_T(a_P) \in \mathcal{H}$ tal que $P \in H_T(a_P) \subset X_T \setminus B$. Dessa forma $X_T \setminus B = \bigcup_P H_T(a_P)$ é uma cobertura de $X_T \setminus B$. Como A é fechado, é compacto e $A \subset X_T \setminus B$, existe um número finito de elementos $a_1, ..., a_n \in \dot{F}$ tais que $A \subset H_T(a_1) \cup ... \cup H_T(a_n)$. Como $H_T(a_1) \cup ... \cup H_T(a_n) \subset \bigcup_P H_T(a_P) = X_T \setminus B$ resulta que $B \subset H_T(-a_1) \cap ... \cap H_T(-a_n)$. Por (3) existe $a \in \dot{F}$ com $H_T(-a_1) \cap ... \cap H_T(-a_n) = H_T(a)$. Dessa forma $B \subset H_T(a)$ e $A \subset H_T(-a) = H_T(a_1) \cup ... \cup H_T(a_n)$. Portanto $H_T(a)$ separa A e B. ∎

Observações 8.3:

(1) Observemos que se $|X_T| \leq 3$, então Té SAP. Se $|X_T| = 1$ ou $|X_T| = 2$ a afirmação é verdadeira. Seja então $X_T = \{P_1, P_2, P_3\}$ e vamos supor que para algum i não podemos separar P_i das outras duas ordens. Sem perda da generalidade vamos ver como separar P_1 de $\{P_2, P_3\}$. Como $[\dot{F} : P_2 \cap P_3] = 4$ entre F e $P_2 \cap P_3$ só temos três subgrupos de $\dot{F}$ com índice 2 que são $P_2, P_3, (P_2 \cap P_3) \cup -(P_2 \cap P_3)$. Dessa forma $P_2 \cap P_3 \not\subset P_1$. Tomando-se $a \in P_2 \cap P_3$ e $a \notin P_1$, teremos $H_T(a) = \{P_2, P_3\}$ e $H_T(-a) = \{P_1\}$. Logo se $|X_T| \leq 3$, então T é SAP.

(2) Podemos separar qualquer conjunto duplo $\{P_1, P_2\}$ de outro conjunto duplo disjunto $\{P_3, P_4\}$.

De fato, fixe um elemento $a \in P_1 \cap P_2 \cap (-P_3)$ e um elemento $b \in P_1 \cap P_2 \cap (-P_4)$($a, b$ existem pela Observação (1)). Se $a \in -P_4$ ou $b \in -P_3$, acabou. Então suponha que $a \in P_4$ e $b \in P_3$. Mas então $ab \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap (-P3) \cap (-P_4)$ e assim ab separa $\{P_1, P_2\}$ de $\{P_3, P_4\}$.

Vamos agora estabelecer um resultado técnico que nos permitirá relacionar SAP com os conceitos das seções anteriores.

Lema 8.4: Para toda pré-ordem T, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) T é SAP.

(2) Toda T-forma de Pfister ϕ de dimensão 2^n é T-isométrica a $2^{n-1} << a >>$ para algum $a \in \dot{F}$.

Demonstração:-

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\phi =<< a_1, ..., a_n >>_T$. Por (1) podemos escrever $\cap_{i=1}^{n} H_T(a_i) = H_T(a)$ para algum $a \in \dot{F}$. Daí como $H_T(a_i) = \{P \in X_T : a_i \in P\}$ e $H_T(a) = \{P \in X_T : a \in P\}$, temos que $a_i \in P$, para todo i, se e somente se $a \in P$. Logo para todo i,

$$sgn_P(\phi) = \begin{cases} 2^n & se \quad a_i \in P \\ 0 & se \quad a_i \notin P. \end{cases}$$

Como

$$sgn_P(2^{n-1} << a >>) = sgn_P(2^{n-1}).sgn_P(<< a >>) = 2^{n-1}. \begin{cases} 2 & se \quad a \in P \\ 0 & se \quad a \notin P. \end{cases}$$

Segue que $\text{sgn}_P(2^{n-1} << a >>) = \text{sgn}_P(\phi)$. Logo $2^{n-1} << a >> \simeq_T \phi$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Pela Proposição 8.2 temos que mostrar que para $a_1, ..., a_n \in F$ existe $a \in F$ tal que $H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n) = H_T(a)$. Considere a T-forma de Pfister $\phi =<< a_1, ..., a_n >>_T$ e $P \in X_T$. Temos que $\text{sgn}_P << a_1, ..., a_n >>_T =$ $(1+ \text{sgn}_P(a_1))...(1+ \text{sgn}_P(a_n)) =$

$$= \begin{cases} 2^n & \text{se} \quad a_i \in P \text{ para todo } i \\ 0 & se \quad \text{existe } i \text{ com } a_i \notin P. \end{cases}$$

Isto é,

$$sgn_P(<< a_1, ..., a_n >>) = \begin{cases} 2^n & se \quad P \in H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n) \\ 0 & se \quad P \notin H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n). \end{cases}$$

Por (2) existe $a \in F$ tal que $\phi \simeq_T 2^{n-1} << a >>$. Logo para todo $P \in X_T$ temos que $\text{sgn}_P(\phi) = \text{sgn}_P(2^{n-1} << a >>)$. Daí teremos $2^{n-1}.(1+\text{sgn}_P(a)) =$

$$= \begin{cases} 2^n & se \quad P \in H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n) \\ 0 & se \quad P \notin H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n) \end{cases}$$

Logo $\text{sgn}_P(a) = 1$ é equivalente a $P \in H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n)$ ou ainda $H_T(a) = H_T(a_1) \cap ... \cap H_T(a_n)$. ∎

Corolário 8.5: Uma pré-ordem T é SAP se e somente se $st(T) \leq 1$.

Demonstração:-

Assumimos primeiro que T é SAP. Seja $\phi =<< a_1, a_2 >>$ uma T-forma de Pfister de dimensão 4. Pelo Teorema anterior existe $a \in F$ tal que $\phi \simeq_T 2 << a >>$. Logo, pela Proposição 6.4, T é 1-estável, e assim $st(T) \leq 1$.

Reciprocamente se T é 1-estável, pela Proposição 6.4 para toda T-forma de Pfister $\phi =<< a_1, a_2 >>$ existe $a \in F$ tal que $\phi \simeq_T 2 << a >>$. Então pelo teorema anterior Té SAP. ■

Teorema 8.6: Uma pré-ordem T é SAP se e somente se T é Pasch.

Demonstração:-

Pelo Teorema 7.6 T é Pasch se e somente se $st(T) \leq 1$ e pelo Corolário anterior $st(T) \leq 1$ se e somente se T é SAP. ■

9. Diagonalização Efetiva de T-Formas

Recordemos que se $\phi =< a_1, ..., a_n >$ é uma T-forma então $\text{sgn}_P(\phi) = \text{sgn}_P(a_1) + ... + \text{sgn}_P(a_n)$. Assim $|\text{sgn}_P(\phi)| \leq n = \dim(\phi)$. Isso nos leva a seguinte definição .

Definição 9.1: Uma T-forma ϕ é *T-indefinida* se $|\ \text{sgn}_P \phi\ | < \dim \phi$ para toda $P \in X_T$ e ϕ é *T-definida* se $|\ \text{sgn}_P \phi\ | = \dim \phi$ para toda $P \in X_T$.

Lema 9.2: Toda forma T-isotrópica é T-indefinida.

Demonstração:-

Seja $\phi =< a_1, ..., a_n >_T$ uma T-forma T-isotrópica. Pelo Corolário 3.20 existe uma T-forma ψ tal que $\phi \simeq_T \mathbb{H}_T \perp \psi$. Dessa forma $|\text{sgn}_P(\phi)| = |\text{sgn}_P(\mathbb{H}) + \text{sgn}_P(\psi)| = |\text{sgn}_P(\psi)| \leq \dim(\psi) = \dim(\phi) - 2 < \dim(\phi)$. ■

Veremos mais adiante por meio de um exemplo que a recíproca desse lema não vale em geral. Mas, surpreendentemente para T-formas de dimensão 2 ou 3 a recíproca vale.

Lema 9.3: Se $\phi =< a_1, a_2 >_T$ é T-indefinida, então ϕ é T-isotrópica.

Demonstração:-

Seja $\phi =< a_1, a_2 >$ uma T-forma T-indefinida. Então para toda $P \in X_T$ temos que $a_1 \in P$ e $a_2 \notin P$ ou $a_1 \notin P$ e $a_2 \in P$, em ambos os casos $a_1 a_2 \notin P$, para toda $P \in X_T$ e $-a_1 a_2 \in P$, para toda $P \in X_T$. Logo $-a_1 a_2 \in T$. Assim $a_1(-a_1 a_2) + a_2(a_1^2) = -a_1^2 a_2 + a_1^2 a_2 = 0$. Logo ϕ é T-isotrópica. ■

Para formas de dimensão três temos que trabalhar um pouco mais.

Observemos inicialmente que dada $\phi =< a_1, a_2, a_3 >_T$ T-forma de dimensão três, se $\psi =< a_1a_2a_3 >_T \phi$ então ϕ é T-isotrópica se e somente se ψ é T-isotrópica. Igualmente ϕ é T-indefinida se e somente se ψ é T-indefinida. Por outro lado como $< a_1a_2a_3 >_T \phi \simeq_T < a_2a_3, a_1a_3, a_1a_2 >_T \simeq_T$ $< a_2a_3, a_1a_3, (a_2a_3)(a_1a_3) >_T$ vemos que podemos restringir nosso estudo a T-formas de dimensão três do tipo $< a, b, ab >_T$.

Lema 9.4: $\phi =< a, b, ab >_T$ é T-indefinida se e somente se $H_T(a) \cap H_T(b) = \emptyset$.

Demonstração:-

Suponha que existe $P \in H_T(a) \cap H_T(b)$. Então $a \in P$ e $b \in P$. Daí $ab \in P$ e ϕ não é T-indefinida.

Reciprocamente, se $H_T(a) \cap H_T(b) = \emptyset$ então não existe $P \in X_T$ tal que $a, b \in P$. Logo para $P \in X_T$ temos três possibilidades:

(1) $a \in P$ e $b \notin P$, então ϕ é T-indefinida.

(2) $a \notin P$ e $b \in P$, então ϕ é T-indefinida.

(3) $a, b \notin P$, então $ab \in P$ e ϕ é T-indefinida. ■

Lema 9.5: $\phi =< a, b, ab >_T$ é T-isotrópica se e somente se $-a \in D_T(< 1, b >_T)$.

Demonstração:-

Temos que ϕ é T-isotrópica se existem $t_1, t_2, t_3 \in T$ não todos nulos tais que $at_1 + bt_2 + abt_3 = 0$. Assim $a(t_1 + bt_3) + bt_2 = 0$ e $-a = bt_2(t_1 + bt_3)^{-1} \in bT + T = D_T(< 1, b >_T)$. Logo $-a \in D_T(< 1, b >_T)$.

Reciprocamente, se $-a \in D_T(< 1, b >_T)$ então $-a = t_1 + bt_2$ e $a + t_1 + bt_2 = 0$, com $t_1t_2 \neq 0$. Multiplicando a equação por ab temos que $a^2b + abt_1 + ab^2t_2 = 0$, como $a^2, t_1, b^2t_2 \in T$ temos que ϕ é T-isotrópica. ∎

Lema 9.6: $-a \in D_T(< 1, b >_T)$ se e somente se $H_T(a) \cap H_T(b) = \emptyset$.

Demonstração:-

Se $-b \in T$, $D_T(< 1, b >) = \dot{F}$ e $H_T(b) = \emptyset$, e nesse caso a afirmação é clara. Assumimos $-b \notin T$. Se $-a \in D_T(< 1, b >)$ então $-a = t_1 + bt_2$. Seja $P \in H_T(b)$. Temos que $b \in P$ e $T \subset P$. Logo $-a \in P$ e $P \in H_T(-a)$. Portanto $H_T(b) \subset H_T(-a) = X_T \setminus H_T(a)$. Logo $H_T(b) \cap H_T(a) = \emptyset$. Reciprocamente, se $H_T(a) \cap H_T(b) = \emptyset$ temos que $H_T(b) \subset H_T(-a)$. Logo para todo $P \in H_T(b)$ temos $-a \in P$. Portanto $-a \in \cap_{P \in H_T(b)} P$. Por outro lado, vemos que $D_T(< 1, b >) \cup \{0\} = T[b]$ e então pelo Lema 2.8 $D_T(< 1, b >) \cup \{0\}$ é uma pré-ordem. Logo $D_T(< 1, b >) \cup \{0\} = \bigcap P$, para toda ordem P contendo $D_T(< 1, b >) \cup \{0\}$, pelo Teorema 2.13. Como claramente $D_T(< 1, b >) \cup \{0\} \subset P$ se e somente se $b \in P$ para toda ordem P, obtemos que $D_T(< 1, b >) \cup \{0\} = \bigcap_{P \in H_T(b)} P$. Concluimos assim que $-a \in D_T(< 1, b >)$. ∎

Reunindo os três últimos lemas com a observação que precede o Lema 9.4 obtemos:

Lema 9.7: Se uma T-forma ϕ de dimensão três é T-indefinida, então ϕ é T-isotrópica.

Para $n = 4$ não vale o princípio: "T-indefinida implica T-isotrópica".

Realmente seja T uma pré-ordem de um corpo F que não é Pasch (equivalentemente não é SAP). Pelo Teorema 7.6 existem $a, b \in F$ tais que $< 1, a, b, -ab >_T$ não é T-isotrópica. Como essa forma é claramente T-indefinida vemos que existem T-formas de dimensão quatro, T-indefinidas e T-anisotrópicas. Para simplificar a linguagem introduziremos a seguinte notação :

Definição 9.8: Seja F um corpo e $n \geq 2$. Dizemos que F satisfaz o princípio H_nT se toda T-forma de dimensão n que for T-indefinida é T-isotrópica.

Observação 9.9:

(1) Por H_nT queremos indicar um *Princípio de Hasse* para T-formas de dimensão n.

(2) Acabamos de ver nos Lemas 9.3 e 9.7 que H_2T e H_3T valem para todo corpo formalmente real F. Para $n \geq 4$ temos ainda o seguinte resultado geral:

Lema 9.10:

(1) Seja $n \geq 4$ fixo. Se vale H_nT, então T é Pasch.

(2) H_4T implica H_nT para todo $n \geq 4$.

Demonstração:-

(1) Seja n um inteiro fixo maior que 3. Considere a T-forma $\phi = (n-3) < 1 > \perp < a, b, -ab >$ onde $\dim(\phi) = n$ e ϕ é T-indefinida. Como vale H_nT, ϕ é T-isotrópica. Sejam $t_1, ..., t_{n-3}, s_1, s_2, s_3 \in T$ tais que $(t_1 + ... + t_{n-3}) + as_1 + bs_2 - abs_3 = 0$. Seja $s_0 = t_1 + ... + t_{n-3} \in T$. Então $s_0 + as_1 + bs_2 - abs_3 = 0$ e portanto $< 1, a, b, -ab >_T$ é isotrópica. Obtemos então do Teorema 7.6 que T é Pasch.

(2) Se vale H_4T pelo item anterior T é Pasch. Dessa forma, por definição toda semiordem normada é uma ordem. Isto é, $X_T = Y_T$. Seja agora ϕ uma T-forma T-indefinida de dimensão n. Então para todo $S \in Y_T = X_T$ temos que $|\mathrm{sgn}_P(\phi)| < n$, e assim, pelo Corolário 5.15 ϕ é T-isotrópica. Logo H_nT vale para F. ∎

Vamos a seguir caracterizar pré-ordens T para os quais H_nT vale para todo n. Para isso introduziremos a seguinte denominação :

Definição 9.11: Uma T-forma ϕ é dita *efetivamente T-diagonalizável* se ϕ admite uma diagonalização $\phi \simeq_T < a_1, ..., a_n >_T$, onde $H_T(a_{i+1}) \subset H_T(a_i)$, para todo $i = 1, ..., n-1$. Dizemos que o corpo F tem a propriedade de efetiva diagonalização para T-formas se toda T-forma ϕ sobre F é efetivamente T-diagonalizável. Nesse caso dizemos que T satisfaz EDT.

Nosso primeiro resultado relaciona T-formas T-indefinidas com a propriedade da diagonalização efetiva.

Lema 9.12: Toda T-forma ϕ que é T-indefinida e efetivamente T-diagonalizável é T-isotrópica.

Demonstração:-

Como ϕ é efetivamente T-diagonalizável temos que $\phi \simeq_T < a_1, .., a_n >_T$, onde $H_T(a_{i+1}) \subset H_T(a_i), i = 1, ..., n-1$. Afirmamos que $H_T(a_1) = X_T$ e $H_T(a_n) = \emptyset$. De fato, seja $P \in X_T$ então $P \in H_T(a_i)$ para algum i senão $a_i \notin P$ para todo i e $|\mathrm{sgn}_P\phi| = \dim \phi$, contrariando a hipótese de ϕ ser T-indefinida. Logo $P \in H_T(a_i) \subset H_T(a_{i-1}) \subset ... \subset H_T(a_1)$. Portanto $X_T = H_T(a_1)$. Agora, $H_T(a_n) = \emptyset$ pois se existe $P \in H_T(a_n) \subset ... \subset H_T(a_1)$ então $a_i \in P$ para todo i e $|\mathrm{sgn}_P\phi| = \dim \phi$ contrariando a hipótese. De $H_T(a_1) = X_T$ segue que $a_1 \in P$, para toda $P \in X_T$ daí $a_1 \in \cap_{P \in X_T} P = T$ e de $H_T(a_n) = \emptyset$ segue que $a_n \notin P$, para toda $P \in X_T$, daí $-a_n \in P$ para toda $P \in X_T$ e $-a_n \in \cap_{P \in X_T} P = T$, assim $-a_n \in T$ assim $a_n \in -T$. Dessa forma temos $\phi \simeq_T < a_1, a_n >_T \perp < a_2, ..., a_{n-1} >_T$ com $a_1 \in T$ e $a_n \in -T$. Como $< a_1, a_n >_T \simeq_T \mathbb{H}_T$, pelo Corolário 3.20 ϕ é T-isotrópica. ∎

Obtemos como consequência imediata do lema anterior que:

Proposição 9.13: Se uma pré-ordem T satisfaz EDT, então H_nT vale para T, para todo $n \geq 2$.

Podemos então concluir da proposição anterior e do Lema 9.10 que se EDT é satisfeita por T, então Té SAP. Mostraremos a seguir que os dois conceitos são equivalentes.

Teorema 9.14: Uma pré-ordem T satifaz EDT se e somente se T satisfaz SAP.

Demonstração:-

Conforme mencionado, EDT implica SAP para uma pré-ordem T. Reciprocamente seja T uma pré-ordem com a propriedade SAP e $\phi \simeq_T$ $< a_1, ..., a_n >_T$ uma T-forma. Para todo $k = 0, ..., n$ seja $Y_k = \{P \in X_T : \text{sgn}_P(\phi) = \dim \phi - 2k\}$. Afirmamos que a família $\{Y_k : k = 0, 1, ..., n\}$ é uma partição de X_T em conjuntos abertos e fechados. Seja $P \in X_T$. Pelo Lema 3.3 $\text{sgn}_P(\phi) = 2r - \dim(\phi)$, onde r é o número de elementos positivos em $\{a_1, ..., a_n\}$. Logo o número de elementos negativos em $\{a_1, .., a_n\}$ é $s = \dim \phi - r$. Ou $r = \dim \phi - s$ e assim $\text{sgn}_P(\phi) = 2r - \dim \phi = 2 \dim \phi - 2s - \dim \phi = \dim \phi - 2s$. Isto é, dado $P \in X_T$ existe s tal que $P \in Y_s$. Assim $X_T = Y_0 \cup Y_1 \cup ... \cup Y_n$. Claramente essa união é disjunta, pois a assinatura de uma T-forma não pode assumir dois valores distintos. Também temos que Y_k é um subconjunto aberto e fechados de X_T. De fato, se $P \in Y_k$ e $\text{sgn}_P(\phi) = n - 2k$, onde k é o número de elementos de $\{a_1, ..., a_n\}$ em $-P$, reordenando se necessário, podemos supor $a_1, ..., a_k \notin P$ e $a_{k+1}, ..., a_n \in P$. Daí $P \in H_T(-a_1) \cap ... \cap H_T(-a_k) \cap H_T(a_{k+1}) \cap ... \cap H_T(a_n) = V$ uma vizinhança de P. Mostremos agora que $V \subset Y_k$.

Realmente, para $Q \in V$, $a_1, ..., a_k \notin Q$ e $a_{k+1}, ..., a_n \in Q$. Logo $\text{sgn}_Q(< a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n >= \sum_{j=1}^n \text{sgn}_Q(a_j) = -k + (n - k) = n - 2k$. Logo $Q \in Y_k$. Dessa forma temos $P \in V \subset Y_k$ e assim Y_k é aberto para todo $k = 0, 1, ..., n$. Como essa família é uma partição de X_T obtemos também que cada Y_k é fechado. Como T é SAP existem $b_1, ..., b_n$ tais que $H_T(b_i) = Y_0 \cup ... \cup Y_{n-i}$ para todo $i = 1, ..., n$. Seja $\psi =< b_1, ..., b_n >$.

Mostraremos agora que $\text{sgn}_P(\psi) = \text{sgn}_P(\phi)$ para toda $P \in X_T$ e dessa forma $\phi \simeq_T \psi$ provando que ϕ é efetivamente T-diagonalizável. Dada $P \in X_T$ existe um único $0 \leq k \leq n$ tal que $P \in Y_k$. Temos então que $\text{sgn}_P(\phi) = n - 2k$. Por outro lado, como $P \in Y_k$ para $k < n$, temos que $P \in H_T(b_{n-k}) \subset H_T(b_{n-k-1}) \subset ... \subset H_T(b_1)$ e $P \notin H_T(b_j)$ para $(n-k)+1 \leq j \leq n$. Assim $\text{sgn}_P(\psi) = (n-k) - k = n - 2k$. Finalmente, se $P \in Y_n$, $P \notin H_T(b_j)$ para todo $1 \leq j \leq n$ e assim $\text{sgn}_P(\psi) = -n = n - 2n$. Dessa forma, para todo k, $\text{sgn}_P(\psi) = n - 2k = \text{sgn}_P(\phi)$. Concluimos assim que $\text{sgn}_P(\psi) = \text{sgn}_P(\phi)$, para todo $P \in X_T$, como queríamos. ∎

Observemos que na teoria de formas quadráticas usuais esse resultado não é válido. Vamos mostrar isso através de um exemplo.

Consideremos o corpo $F = K((t))$, estudado no apêndice. Fazendo $K = \mathbb{Q}$ temos que F tem apenas duas ordens, P_1 e P_2 com $P_1 \cap P_2 = (\sum \mathbb{Q}^2)F^2 = \sum F^2$, pois $\sum \mathbb{Q}^2$ é a única ordem de $\mathbb{Q}$. Portanto, como $|X_T| = 2$, temos que F satisfaz a propriedade SAP. Por outro lado, se considerarmos a forma quadrática $< t, -2t >$ temos que F não satifaz a propriedade ED. De fato, suponha que $< t, -2t >$ é efetivamente diagonalizável. Então existem $a_1, a_2 \in \dot{F}$ tais que $< t, -2t > \simeq < a_1, a_2 >$, com $H(a_2) \subset H(a_1)$. Mas segue da isometria que $-a_1a_2 \in 2F^2 \subset P$, para toda ordem P. Logo $a_2 \in P$ é equivalente a $-a_1 \in P$, ou seja, $a_1 \notin P$. Deste modo, $P \in H(a_2)$ implica que $P \notin H(a_1)$, contradizendo $H(a_2) \subset H(a_1)$, se $H(a_2) \neq \emptyset$.

Se $H(a_2) = \emptyset$ então $a_2 \in \sum \dot{F}^2$. Assim $a_2 = -qz^2$ com $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ e $z \in F$. Como $-a_1a_2 \in 2\dot{F}^2$ temos que $a_1qz^2 \in 2\dot{F}^2$ e portanto $a_1 \in 2q\dot{F}^2$. Sem perda da generalidade podemos assumir que $a_1 = 2q$ e $a_2 = -q$ com $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Por outro lado $t \in D(< t, -2t >)$. Logo $t \in D(< a_1, a_2 >)$ e assim existem $x, y \in \dot{F}$ tais que $t = 2qx^2 - qy^2$. Mas isso não é possível, pois t é uma série iniciando-se em um expoente ímpar e mostraremos que $2qx^2 - qy^2$ inicia-se com um expoente par.

Conforme o apêndice, se $x = \sum_{i=r}^{\infty} x_it^i$ e $y = \sum_{i=s}^{\infty} y_it^i$ com $r, s \in \mathbb{Z}$ então $x^2 = \sum_{i=2r}^{\infty} a_it^i$ e $y^2 = \sum_{i=2s}^{\infty} b_it^i$ onde $a_{2r} = x_r^2$ e $b_{2s} = y_s^2$. Logo, se escrevermos $2qx^2 - qy^2 = \sum_{i=n}^{\infty} c_it^i$ teremos que

$$c_n = \begin{cases} 2qx_r^2 & se \quad r < s \\ -qy_s^2 & se \quad r > s \\ 2qx^2 - qy^2 & se \quad r = s. \end{cases}$$

Observemos que como $2 \notin \mathbb{Q}^2$ temos $2qx^2 - qy^2 \neq 0$, logo teremos que

$$n = \begin{cases} 2r & se \quad r < s \\ 2s & se \quad r > s \\ 2r = 2s & se \quad r = s, \end{cases}$$

conforme afirmamos acima. Logo $H(a_2) \neq \emptyset$.

Portanto $\mathbb{Q}((t))$ não satisfaz ED. Logo a propriedade SAP não é equivalente a propriedade ED, na teoria de formas quadráticas usuais.

Vemos porém que para $T = \sum \dot{F}^2$, $< t, -2t >_T$ é T-isotrópica e portanto $< t, -2t >_T \simeq_T < 1, -1 >_T$. Como $H_T(-1) = \emptyset \subset X_T = H_T(1)$ resultará que $< t, -2t >_T$ é efetivamente T-diagonalizável, conforme assegurado pelo Teorema anterior.

Podemos agora completar nossa discussão sobre os H_nT mostrando a recíproca do Lema 9.10.(2).

Corolário 9.15: Seja T uma pré-ordem. São equivalentes:

(1) Vale H_4T.

(2) Existe $n \geq 4$ tal que vale H_nT.

(3) Para todo $n \geq 4$ vale H_nT.

Demonstração:-

(1) implica (2) trivialmente. Assumindo-se (2) temos pelo Lema 9.10 que T é Pasch. Logo pelo Teorema 8.6 T é SAP e assim pelo Teorema anterior T satisfaz EDT. Finalmente, pela Proposição 9.13, vale H_nT para todo $n \geq 4$.
(3) implica (1) também trivialmente. ∎

Uma outra conclusão imediata é que

Corolário 9.16: Seja T uma pré-ordem. São equivalentes:

(1) $st(T) \leq 1$.

(2) T é Pasch.

(3) T é SAP.

(4) Temos a propriedade H_nT para todo $n \geq 4$.

(5) T verifica EDT.

Demonstração:-

(1) $\Leftrightarrow$ (2) É dada por 7.6.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) É dada por 8.6.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) É dada por 9.14.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) É consequência de 9.10 e 9.13. ∎

Esse último resultado mostra quão especiais são as pré-ordens estudadas nestas últimas seções .

Gostaríamos também de observar que o estudo de princípios do tipo H_nT é muito antigo e iniciou-se com J. J. Sylvester[1814-1897] estabelecendo que toda forma quadrática indefinida sobre os reais é isotrópica. Os professores R. Elman, T.Y. Lam e A.Prestel ([ELP]) introduziram e estudaram os princípios H_n :
" Uma forma quadrática totalmente indefinida de dimensão n é isotrópica".

Observemos que tirando-se o sufixo T do princípio os resultados modificam-se completamente. Assim H_2 é equivalente ao corpo ser Pitagórico e não vale sempre como no caso aqui estudado.

Temos também que os H_n não são equivalentes entre si, mas H_2 implica H_3 que não implica H_4, mas H_4 implica H_5 ..., em geral para $n \geq 4$, H_n implica H_{n+1}.

Contudo, sem o sufixo T ainda temos que Pasch e SAP são equivalentes e são consequência de H_n para algum $n \geq 4$.

O conceito de "efetivamente diagonalizável", ED, foi introduzido pelo Prof. R. Ware [W]. Observemos que sem a restrição a uma pré-ordem T, a propriedade ED implica a propriedade SAP mas não são equivalentes, conforme vimos no exemplo.

10. Apêndice: O Corpo $K((t))$.

Vamos fazer um estudo de $F = K((t))$, corpo de séries de potências formais sobre K.

Temos que
$K((t)) = \{\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i | n \in \mathbb{Z}, a_i \in K, a_n \neq 0, a_i = 0 \text{ para todo } i < n\}$.

Esse conjunto não é vazio, pois se $k \in K, k = 0 + ... + 0 + k.t^0 + 0 ... \in K((t))$ logo $K \subset K((t))$.

Em $K((t))$ a operação de adição é dada por
$\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=l}^{\infty} (a_i + b_i) t^i$, onde $l = \min\{i | a_i + b_i \neq 0\}$.

E a operação de multiplicação é dada por
$(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i)(\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i) = \sum_{i=l}^{\infty} c_i t^i$, onde $l = \min\{i | c_i \neq 0\}$ e $c_i = \sum_{r+s=i} a_r b_s$.

I) Primeiro vamos mostrar que com essas operações $K((t))$ é um corpo.

As propriedades associativas, comutativas e distributivas seguem das mesmas propriedades de K.

O elemento neutro é $0 = \sum_{i=n}^{\infty} 0 t^i$.

O elemento unidade é $1 = ... + 0 + 1.t^0 + 0 + ...$

O elemento oposto para $a = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \in K((t))$ é $-a = -\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i = \sum_{i=n}^{\infty} (-a_i) t^i \in K((t))$.

Vamos mostrar para $a \neq 0$ o inverso de a existe em $K((t))$.

Seja $a = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i$ temos

$a = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i = a_n t^n \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i a_n^{-1} t^{-n} = a_n t^n \sum_{i=n}^{\infty} a_i a_n^{-1} t^{i-n}$.

Fazendo $j = i - n$ temos

$a = a_n t^n \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j = a_n t^n (1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j t^j) = (a_n t^n)(1 + \phi)$, onde $\phi = \sum_{j=1}^{\infty} b_j t^j$.

Temos que

$(1+\phi)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j + \phi + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^{j+1}$ (*).

Se $j + 1 = k$, isto é $j = k - 1$, temos

$\phi + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^{j+1} = \phi + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \phi^k = (-1)^{1-1} \phi^1 + \sum_{k=2} (-1)^{k-1} \phi^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \phi^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)(-1)^k \phi^k = (-1). \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \phi^k$.

Assim voltando a (*) temos que

$(1+\phi)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j + (-1) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j = 1$.

Portanto

$(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j) = 1$, ou seja, $(1+\phi)^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j$ e $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i)^{-1} = a_n^{-1} t^{-n} (1+\phi)^{-1}$.

Resta ver que $1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \phi^j \in K((t))$. Observemos que

$\phi = a_1 t + a_2 t^2 + ...$

$\phi^2 = 0t + a_1^2 t^2 + (a_1 a_2 + a_2 a_1) t^3 + ...$

$\phi^3 = 0t + 0t^2 + a_1^3 t^3 + (3a_1^2 a_2 + 2a_1^2 a_2) t^4 + ...$

$\phi^r = 0t + ... + 0t^{r-1} + a_1^r t^r + ...$

Isto é, para cada r, temos para todo $j \geq r$ que os coeficientes dos termos $t, t^2, ..., t^r$ em ϕ^j são todos nulos. Logo os coeficientes de $t, t^2, ..., t^r$ em $1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \phi^j$ são obtidos como uma soma de no máximo r termos não nulos. Portanto $1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \phi^j = \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^i \in K((t))$, para convenientes $b_i \in K$. Portanto $K((t))$ é um corpo.

Mostraremos a seguir que $K((t))$ admite uma métrica com a qual é completo. Observemos que se considerarmos a sequência (s_n) com $s_n = 1 + \phi + \phi^2 + ... + \phi^n$, então $s_{n+1} - s_n = \phi^{n+1}$. Poderíamos então verificar que essa sequência, sendo de Cauchy, tem como limite $(1+\phi)^{-1}$. Dessa forma o elemento, $1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \phi^j$, que acabamos de construir é exatamente o limite da sequência s_n.

II) Agora, podemos definir uma norma em $K((t))$, tornando-o assim um espaço normado.

Seja $\varphi : K((t)) \to I\!R$, dada por

$$\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i) = \begin{cases} e^{-n} & se \quad \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \neq 0 \\ 0 & se \quad \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i = 0 \end{cases}$$

onde $e > 1$ é um número real.

Vamos provar que φ de fato é uma norma.

(1) $\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i) \geq 0$ e $\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i) = 0$ se e somente se $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i = 0$, que decorre da definição .

(2) $\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i . \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i) = \varphi(\sum_{i=n+m}^{\infty} c_i t^i) = e^{-(n+m)} = e^{-n}.e^{-m} = \varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i)\varphi(\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i)$.

(3) $\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i) = \varphi(\sum_{i=l}^{\infty}(a_i+b_i)t^i) = e^{-l} \leq \max\{e^{-n}, e^{-m}\} = \max\{\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i), \varphi(\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i)\}$, onde $l = \min\{i : a_i + b_i \neq 0\}$.

Mostramos assim $\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i) \leq \max\{\varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i), \varphi(\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i)\}$ que é uma forma mais forte da desigualdade triangular. Decorre dela a desigualdade usual. Essa forma mais forte da desigualdade triangular é chamada de "*desigualdade triangular ultramétrica*".

Podemos ver o quanto essa desigualdade é mais forte pela seguinte afirmação

Se $x, y \in K((t))$ são tais que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, então $\varphi(x+y) = \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

Demonstração:-

Seja $\varphi(x) < \varphi(y)$. Temos que $\varphi(x+y) \leq \varphi(y)$. Por outro lado, $\varphi(y) = \varphi(y + x - x) \leq \max\{\varphi(y+x), \varphi(-x)\}$. Temos que $\varphi(-x) = \varphi(-1)\varphi(x) = \varphi(x)$. Logo $\varphi(-x) < \varphi(y)$ e portanto $\varphi(-x) \neq \max\{\varphi(y+x), \varphi(-x)\}$. Resulta então $\varphi(y) \leq \varphi(y+x) = \max\{\varphi(y+x), \varphi(-x)\}$, e assim $\varphi(x+y) = \varphi(y) = \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$. ■

Através dessa norma podemos definir uma métrica em $K((t))$.

$d : K((t)) \times K((t)) \to I\!R$ dada por

$$d(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i, \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i) = \varphi(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i - \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i)$$

onde $l = \min\{i : a_i - b_i \neq 0\}$.

Realmente d é uma métrica. Sejam $x = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i$, $y = \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i$ e $z = \sum_{i=s}^{\infty} c_i t^i \in K((t))$.

(1) $d(x,y) = \varphi(x-y) \geq 0$.

(2) $d(x,y) = \varphi(x-y) = 0$ se e somente se $x - y = 0$ se e somente se $x = y$.

(3) $d(x,y) = \varphi(x-y) = \varphi(-(y-x)) = \varphi(-1)\varphi(y-x) = e^0\varphi(y-x) = d(y,x)$.

(4) $d(x,z) = \varphi(x-z) = \varphi(x-y+y-z) \leq \varphi(x-y) + \varphi(y-z) = d(x,y) + d(y,z)$.

Observamos que as funções soma e produto são contínuas em relação a essa métrica.

III) Agora podemos ver que $K((t))$ é um espaço métrico completo.

Seja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $K((t))$, com $y_n = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i(n)t^i$, $a_i(n) \in K$ e $\{i | a_i(n) \neq 0\}$ limitado inferiormente.

Como (y_n) é uma sequência de Cauchy temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in I\!N$ tal que

(1) $\qquad \varphi(y_m - y_n) < \varepsilon, \qquad$ para todo $m, n \geq M$

Como $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ podemos considerar somente os ε da forma e^{-N}. Logo para todo $N \geq 1$ existe M_N tal que

(2) $\qquad \varphi(y_m - y_n) < e^{-N}, \qquad$ sempre que $m, n \geq M_N$.

Mas $y_m - y_n = \sum_{-\infty}^{\infty}(a_j(m) - a_j(n))t^j$. Se r é o menor j tal que $a_j(m) - a_j(n) \neq 0$, então $\varphi(y_m - y_n) = e^{-r}$. Por (2) $e^{-r} < e^{-N}$, ou seja, $r > N$. Logo $a_j(m) = a_j(n)$ para todo $j \leq N$ e para todo $m, n \geq M_N$.

Tomemos a sequência $i = 1, 2, ...$ dos naturais e seja (M_i) sequência de números naturais crescente tal que

$$\varphi(y_m - y_n) < e^{-i}, \qquad \text{sempre que } m, n \geq M_i.$$

Vamos definir $y = \sum_{-\infty}^{\infty} b_i t_i$ onde $b_i = a_i(M_{i+1})$. Conforme observamos no parágrafo acima para $n > M_i$, temos $a_i(n) = a_i(M_{i+1})$. Basta fazer $j = i$ e lembrar que $M_{i+1} \geq M_i$ por construção .

Dessa forma $b_i = a_i(n)$ para todo $n \geq M_i$, resultando $b_i - a_i(n) = 0$. Logo $\varphi(y - y_n) = e^{-r}$ com $r > i$ sempre que $n \geq M_i$.

Para completar a prova seja agora $\varepsilon > 0$ e $i > 0$ tal que $e^{-i} < \varepsilon$. Para todo $n \geq M_i$ se $\varphi(y - y_n) = e^{-r}$ com $r > i$, temos $e^{-r} < e^{-i} < \varepsilon$. Logo $\varphi(y - y_n) = \varepsilon$ para todo $n \geq M_i$ e assim $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in K((t))$. Portanto $K((t))$ é completo.

IV) Mostraremos a seguir que todo elemento de $K((t))$ da forma $z = 1 + ty$, com $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ é um quadrado em $K((t))$. Usaremos para isso o chamado "Método de Newton" para obter uma raíz de um polinômio por aproximações sucessivas.

Seja o polinômio $h(X) = X^2 - z$, temos $h(1) = 1 - z = -ty$. Logo $\varphi(h(1)) \leq e^{-1} < 1$. Usando o método seja

$$a_1 = 1 - \frac{h(1)}{h'(1)} \text{ e } a_{i+1} = a_i - \frac{h(a_i)}{h'(a_i)}$$

onde $h'(X) = 2X$ é a derivada formal do polinômio.

Isto é, $a_i = 1 + \frac{1}{2}ty$ e $a_{i+1} = a_i - (a_i^2 - z)/(2a_i)$. Mostraremos indutivamente que $\varphi(a_i) = 1$ e $\varphi(h(a_i)) \leq e^{-2^i}$.

Para $i = 1$, $\varphi(a_1) = \varphi(1 + \frac{1}{2}t) = e^{-0} = 1$ e $h(a_i) = (1 + \frac{1}{2}ty)^2 - (1 + ty) =$ $= \frac{1}{4}t^2y^2$ logo $\varphi(h(a_i)) \leq e^{-2}$.

Vamos assumir que para todo $1 \leq i \leq n$ as afirmações estão verificadas. Tomemos $\varphi(a_{i+1}) = \varphi(a_i - \frac{h(a_i)}{2a_i})$. Por hipótese de indução $\varphi(a_i) = 1$ e $\varphi(\frac{-h(a-i)}{2a_i}) = \varphi(2a_i)^{-1}\varphi(h(a_i)) \leq e^{-2^i} < 1$. Logo, pela observação feita no item II, temos que $\varphi(a_{i+1}) = \max\{\varphi(a_i), \varphi(\frac{-h(a_i)}{2a_i})\} = 1$. Temos também que $h(a_{i+1}) = (a_i - \frac{-h(a_i)}{2a_i})^2 - z = (a_i^2 - z) - h(a_i) + (\frac{h(a_i)}{2a_i})^2 = (\frac{h(a_i)}{2a_i})^2$. Assim $\varphi(h(a_{i+1})) = \varphi(\frac{h(a_i)}{2a_i})^2 = \varphi(2a_i)^{-2}\varphi(h(a_i))^2 \leq (e^{-2^i})^2 = e^{-2^{i+1}}$, e as afirmações estão verificadas.

Mostraremos a seguir que a sequência (a_i) é de Cauchy e que se $x = \lim_{i\to\infty} a_i$, então $x^2 = z$.

Realmente $a_{i+1} - a_i = (h(a_i))/(2a_i)$ e portanto $\varphi(a_{i+1} - a_i) = \varphi((h(a_i))/(2a_i) \leq e^{-2^i}$.

Dessa forma, dado ε, existe N tal que se $i > N$, então $e^{-2^i} < \varepsilon$ para todo $i > N$. Portanto a sequência é de Cauchy.

Seja $x = \lim_{i\to\infty} a_i$. Então $x^2 - z = x^2 - a_i^2 + a_i^2 - z$. Logo $\varphi(x^2 - z) = \varphi((x^2 - a_i^2) + (a_i^2 - z)) \leq \max\{\varphi(x^2 - a_i^2), \varphi(a_i^2 - z)\}$. Recordemos que $a_i^2 - z = h(a_i)$ e que $\varphi(h(a_i)) \leq e^{-2^i}$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Existe N_1 tal que $i > N_1$ implica $e^{-2^i} < \varepsilon$.

Por outro lado, como $x = \lim_{i\to\infty} a_i$, temos que $x^2 = \lim_{i\to\infty} a_i^2$. Logo existe N_2 tal que $i > N_2$ implica $\varphi(x^2 - a_i^2) < \varepsilon$. Tomando-se $i > N_1$ e $i > N_2$ teremos $\varphi(x^2 - z) < \varepsilon$. Vemos então que $\varphi(x^2 - z) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno. Resulta então $\varphi(x^2 - z) = 0$ e $x^2 = z$, como queríamos demonstrar.

V) Vamos agora tomar uma ordem P de K e construir duas ordens de $K((t))$. Sejam

$P_1 = \{\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i | a_n \in P\}$,

$P_2 = \{\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i | (-1)^n a_n \in P\}$.

Observe que $t \in P_1$ e $-t \in P_2$. Vamos mostrar que P_1, P_2 são ordens de $K((t))$.

Sejam $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i$ e $\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i \in P_1$. Então $a_n, b_m \in P$ e temos

(1) $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=l}^{\infty} (a_i + b_i) t^i$ onde $l = \min\{i | a_i + b_i \neq 0\}$. Assim

$$a_l + b_l = \begin{cases} a_n + b_m & se \quad n = m \\ a_n & se \quad n < m \\ b_m & se \quad m < n. \end{cases}$$

está em P. Logo $\sum_{i=l}^{\infty} (a_i + b_i) t^i \in P_1$ e $P_1 + P_1 \subset P_1$.

(2)$(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i)(\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i) = \sum_{i=n+m}^{\infty} c_i t^i$ onde $c_i = \sum_{r+s=i} a_r b_s \in K$.

Assim, como $a_i = 0$ para $i < n$ e $b_j = 0$ para $j < m$,

$c_{n+m} = \sum_{r=s=n+m} a_r b_s = a_n b_m + a_{n-1} b_{m+1} + a_{n-2} b_{m+2} + ... = a_n b_m \in P$. Então $\sum_{i=n+m}^{\infty} c_i t^i \in P_1$, e $P_1 P_1 \subset P_1$.

(3) Seja $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \in K((t))$. Temos que $a_n \in P$ ou $a_n \notin P$. Se $a_n \in P$ então $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \in P_1$. E se $a_n \notin P$, ou seja, $-a_n \in P$ temos que $\sum_{i=n}^{\infty} -a_i t^i \in P_1$. Assim $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \in -P_1$. Então $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \in P_1 \cup -P_1$. Portanto $K((t)) = P_1 \cup -P_1$.

(4) Finalmente, como $P \cap -P = \{0\}$ também $P_1 \cap -P_1 = \{0\}$ e P_1 é ordem de $K((t))$.

Do mesmo modo, sejam $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i$ e $\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i \in P_2$. Então $(-1)^n a_n, (-1)^m b_m \in P$. Daí temos

(1)$\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=l}^{\infty} (a_i + b_i) t^i$ onde $l = \min\{i | a_i + b_i \neq 0\}$.

Assim

se $l = n < m$ então $(-1)^l (a_l + b_l) = (-1)^n a_n \in P$,

se $l = m < n$ então $(-1)^l (a_l + b_l) = (-1)^m b_m \in P$,

se $l = m = n$ então $(-1)^l (a_l + b_l) = (-1)^m (a_n + b_m) = (-1)^n a_n + (-1)^m b_m \in P$.

Portanto $\sum_{i=l}^{\infty} (a_i + b_i) t^i \in P_2$ e $P_2 + P_2 \subset P_2$.

(2)$(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i)(\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i) = \sum_{i=n+m}^{\infty} c_i t^i$ onde $c_i = \sum_{r+s=i} a_r b_s \in K$.

Assim $(-1)^{n+m} c_{n+m} = (-1)^{n+m} \sum_{r=s=n+m} a_r b_s = (-1)^{n+m} (a_n b_m + a_{n-1} b_{m+1} + a_{n-2} b_{m+2} + \ldots) = (-1)^{n+m} a_n b_m = (-1)^n a_n . (-1)^m b_m \in P$.

Então $\sum_{i=n+m}^{\infty} c_i t^i \in P_2$, e $P_2 P_2 \subset P_2$.

Vemos que seguindo os mesmos passos de P_1 completaríamos a verificação de que P_2 é uma ordem de $K((t))$.

VI) Vamos mostrar agora que $P_1 \cap P_2 = PF^2$, onde $F = K((t))$.

Seja $x \in P_1 \cap P_2$. Então $x = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i$ com $a_n \in P$ e $(-1)^n a_n \in P$. Logo $(-1)^n \in P$ e $(-1)^n = 1$ e $n = 2k$ é par.

Assim

$x = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i = a_n t^n (\sum_{i=n}^{\infty} a_i a_n^{-1} t^{i-n}) = a_{2k} t^{2k} (\sum_{i \geq 2k} a_i a_{2k}^{-1} t^{i-2k}) =$

$= a_{2k} t^{2k} (a_{2k} a_{2k}^{-1} t^{2k-2k} + \sum_{i \geq 2k+1} a_i a_{2k}^{-1} t^{i-2k}) = a_{2k} t^{2k} (1 + \sum_{i \geq 1} a_j t^j) =$

$= a_{2k} (t^k)^2 (1 + t(\sum_{i \geq 1} a_i t^{i-1})) = a_{2k} (t^k)^2 (1 + ty)$, com $y = \sum_{i \geq 0} b_i t^i$.

Como vimos anteriormente que $1 + ty \in F^2$ e $a_{2k} \in P$, concluimos que $x \in PF^2$ como queríamos.

Reciprocamente, se Q é uma ordem de $K((t))$ então $Q \cap K$ é ordem de K. Se $Q \cap K = P$ então $Q = P_1$ se $t \in Q$ e $Q = P_2$ se $-t \in Q$.

Realmente se $z = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \in K((t))$ e novamente escrevemos $z = a_n t^n (\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j)$, onde $j = i - n$ e $b_j = a_i a_n^{-1}$. Logo $b_0 = 1$ e assim $\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \in F^2$ como foi mostrado. Portanto, se $t \in Q$, $z \in Q$ se e somente se $a_n \in Q \cap K = P$. Logo $Q = P_1$. Se $t \notin Q$, temos dois casos a considerar: Se n é par, $t^n \in Q$. Logo $z \in Q$ se e somente se $a_n \in Q \cap K = P$. Se n é impar $t^n \notin Q$ e assim $z \in Q$ se e somente se $a_n \notin Q \cap K = P$. Mas nesse caso $(-1)^n = -a_n \in P$ e assim $z \in P_2$ mostrando que $Q = P_2$.

Vemos que a cada ordem P de K correspondem exatamente as duas ordens P_1, P_2 construidas de $K((t))$.

VII) Exemplos:

(1) Seja F uma extensão finita de $\mathbb{Q}$, ordenada, e tal que $2 \notin F^2$. Temos que todas as ordens de F são arquimedianas pelo Corolário 5.12. Por isso F é SAP.

Vemos que $< 1, -2 >$ é indefinida pois $2 = 1 + 1 \in P$ para toda ordem P. Logo $H(-2) = \emptyset$ e $H(1) = X_F$. E se $2 \notin F^2$ então $< 1, -2 >$ é anisotrópica. Mas, claramente, $< 1, -2 >$ é T-isotrópica se $T = \sum F^2$.

(2) Seja $K = \mathbb{Q}$ e $P = \sum \mathbb{Q}^2$ a única ordem de $\mathbb{Q}$. Temos que $F = \mathbb{Q}((t))$ terá somente duas ordens P_1 e P_2. Vemos também que $\sum F^2 = P_1 \cap P_2 = PF^2 = (\sum \mathbb{Q}^2) F^2$.

(3) Seja agora $K = \mathbb{Q}((t_1))$ e $F = K((t_2))$. Temos que $X_K = \{P_1, P_2\}$, onde P_1 e P_2 são as ordens do exemplo anterior. Para cada uma delas obtemos duas outras em F. Logo $X_F = \{P_1^1, P_1^2, P_2^1, P_2^2\}$, onde $P_i^j \cap K = P_i$.

Mostraremos inicialmente que $P_1^1 \cap P_1^2 \cap P_2^1 = \sum F^2$. Temos que $P_1^1 \cap P_1^2 = P_1 F^2$. Logo $P_1^1 \cap P_1^2 \cap P_2^1 = P_1 F^2 \cap P_2^1$. Afirmamos que $P_1 F^2 \cap P_2^1 = (P_1 \cap P_2)F^2 = (PK^2)F^2 = PF^2$.

Seja $w \in P_1 F^2 \cap P_2^1$. Logo existem $x \in P_1 \subset K$, $y \in F$ e $z \in P_2^1$ tais que $w = xy^2 = z$. Como $z \in P_2^1$, temos que $z = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i$ onde $a_n \in P_2$. Por outro lado se $y = \sum_{i=m}^{\infty} b_i t_2^i$, $y^2 = \sum_{i=2m}^{\infty} c_i t_2^i$, com $c_{2m} = b_m^2$. Logo obtemos $w = xy^2 = \sum_{i=2m}^{\infty} (xc_i) t_2^i$. Portanto $2m = n$ e $xb_m^2 = a_n \in P_1 \cap P_2 = PK^2$. Mas $xb_m^2 \in P_1 \cap P_2$ implica que $x \in P_1 \cap P_2 = PK^2$. Logo $w = xy^2 \in PF^2$ como queríamos.

Como $PF^2 \subset P_2^2$, resulta que $P_1^1 \cap P_1^2 \cap P_2^1 \subset P_2^2$. Logo $P_1^1 \cap P_1^2 \cap P_2^1 = P_1^1 \cap P_1^2 \cap P_2^1 \cap P_2^2 = \sum F^2$

Dessa forma não existe $a \in F$ com $H(a) = \{P_1^1, P_1^2, P_2^1\}$ ou equivalentemente não existe $b \in F$ com $H(b) = \{P_2^2\}$. Vemos então que os conjuntos $A = \{P_1^1, P_1^2, P_2^1\}$ e $B = \{P_2^2\}$ são fechados e disjuntos em X_F, mas não podem ser separados por um elemento $a \in F$. Portanto conforme a Definição 8.1, $T = \sum F^2$ não é SAP.

Com igual procedimento podemos mostrar que a interseção de três quaisquer ordens de F é igual a $\sum F^2$.

(4) Consideremos $K = \mathbb{Q}((t_1))$ e $F = K((t_2))$, e seja $S = \{\sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i | a_n \in P$ se n é par e $-a_n \in P$ se n é ímpar $\}$.

Vamos mostrar que S é uma semiordem própria associada a pré-ordem $\sum F^2$.

Realmente, sejam $a = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i$ e $b = \sum_{i=m}^{\infty} b_i t_2^i$. Temos que $a + b = \sum_{i=l}^{\infty} c_i t_2^i$, onde $c_i = a_i + b_i$ e $l = min\{i | c_i \neq 0\}$.

Assim, se $n = m$ é par, temos que $a_n, b_m \in P$ e $c_l = a_n + b_m \in P$ e $a + b \in S$.

Se $n = m$ é ímpar, então $-a_n, -b_m \in P$ e $-c_l = -(a_n + b_m) = -a_n + (-b_m) \in P$ e $a + b \in S$.

Se $n < m$ e n é par, então $a_n \in P$ e $c_l = a_n \in P$ e $a + b \in S$.

Se $n < m$ e n é ímpar, então $-a_n \in P$ e $-c_l = -a_n \in P$ e $a + b \in S$.

O mesmo ocorre se $n > m$. Portanto $S + S \subset S$.

Seja $z \in S \cap -S$. Suponhamos, por absurdo, que $z \neq 0$. Logo $z = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i$ com $a_n \neq 0$. Então se n é par $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i \in S$ implica que $a_n \in P$ e $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i \in -S$ implica que $\sum_{i=n}^{\infty} -a_i t_2^i \in S$ e $-a_n \in P$. Logo $a_n \in P \cap -P = \{0\}$ e $a_n = 0$. Contradição .

Se n é ímpar, $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i \in S$ implica que $-a_n \in P$ e $\sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i \in -S$ implica que $\sum_{i=n}^{\infty} -a_i t_2^i \in S$ e $-(-a_n) \in P$. Logo $a_n \in P \cap -P = \{0\}$ e $a_n = 0$. Novamente contradição . Portanto $S \cap -S = \{0\}$.

Seja $z = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i \in F$. Se n é par e $a_n \in P$ então $z \in S$. Se $a_n \notin P$ então $-a_n \in P$ e $-z \in S$. Igualmente se n é ímpar temos que $z \in S$ se $-a_n \in P$ e $-z \in S$ se $a_n \in P$. Logo $S \cup -S = F$.

Também $1 \in S$, pois $1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t_2^i$ onde $a_0 = 1$ e $a_i = 0$ para todo $i \neq 0$.

Seja $w \in \sum F^2 = (\sum \mathbb{Q}^2)F^2$. Temos que $w = q(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i)^2$ com $q \in \sum \mathbb{Q}^2$ e $(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t_2^i)^2 = \sum_{j=2n}^{\infty} b_j t_2^j$ onde $b_{2n} = a_n^2$.

Seja $z \in S$, ou seja, $z = \sum_{i=m}^{\infty} c_i t_2^i$ com $c_m \in P$ se m é par, e $-c_m \in P$ se m é ímpar.

Assim $wz = \sum_{j=l}^{\infty} d_j t_2^j$, onde $l = m + 2n$ e $d_l = q a_n^2 c_m$. Logo, se l é par então m é par, e como $c_m \in P$ temos que $q a_n^2 c_m \in P$. Se l é ímpar então m é ímpar e como $-c_m \in P$ temos que $-q a_n^2 c_m \in P$. Portanto $wz \in S$ para todo $w \in \sum F^2$ e $z \in S$. Logo $\sum F^2.S \subset S$.

Finalmente, temos que $S \notin X_F$ pois $S \neq P_1^1, P_1^2, P_2^1, P_2^2$. Portanto S é uma semiordem normada própria, associada a $\sum F^2$.

11. Bibliografia

[EP] ELMAN, R.; PRESTEL, A.: Reduced Stability Of The Witt Ring Of A Field And Its Pitagorean Closure. Amer. J. Math. **106** (1984), 1237-1260.

[ELP] ELMAN,R.; LAM, T.Y.; PRESTEL, A.: On Some Hasse Principles Over Formally Real Fields, Math. Z. **134** (1973) 291-301.

[L1] LAM, T.Y.: The Algebraic Theory Of Quadratic Forms. New York: Benjamin 1973.

[L2] LAM, T.Y.: Orderings, Valuations And Quadratic Forms. Conference Board Of The Mathematical Sciences, Nº 52, Providence: American Mathematical Society 1983.

[P] PRESTEL, A.: Lectures on Formally Real Fields. Rio de Janeiro: IMPA 1975 (and Lect. Notes Math., Vol.1093, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1984).

[PW] PRESTEL, A.; WARE,R.: Almost Isotropic Quadratic Forms. J. London Math. Soc. **19** (1979), 595-612.

[W] WARE, R: Hasse Principles And The u-Invariant Over Formally Real Fields. Nagoya Math. J. **61** (1976), 117-125.