

# O Problema da Reconstrução dos Torneios com Quociente Simples Normal

por

**Jones Colombo**

Bacharel em Matemática - Goiânia - Goiás

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Claudina Izepe Rodrigues

Março de 2000

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE



2000 13306

# O Problema da Reconstrução dos Torneios com Quociente Simples Normal

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Jones Colombo, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 04 de abril de 2000



Prof.ª. Dra. Claudina Izepe Rodrigues  
Orientadora

Banca Examinadora:

1. Prof.ª. Dra. Claudina Izepe Rodrigues
2. Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl
3. Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Colombo, Jones

C717p      O problema da reconstrução dos torneios com quociente simples  
normal / Jones Colombo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Claudina Izepe Rodrigues

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Torneios. 2. Teoria dos grafos hamiltonianos. I. Rodrigues,  
Claudina Izepe. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de março de 2000 e aprovada

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES



Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL



Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

---

“ Neste mundo em ordem existem pobres. Existem também  
carneiros de cinco patas, irmãs siamesas, acidentes de  
estrada de ferro: tais anomalias não são culpa de ninguém.”

Jean-Paul Sartre

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

---

A meus familiares.

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

## Agradecimentos

---

À universidade de Campinas, Unicamp, ao instituto de matemática, estatística e computação científica, IMECC, por ter permitido realizar meus estudos de Mestrado.

Ao conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico, CNPq, pela bolsa de mestrado que me foi concedida entre março de 1998 e fevereiro do 2000.

A professora Dra. Claudina Izepe Rodrigues, pela orientação e pela paciência na elaboração deste trabalho.

A meus colegas do predinho, em especial aos Marcelo(a), Yurilev(Yuri), Roberto Carlos, Diana e ao Jesse pelo companheirismo.

Finalmente, quero agradecer de maneira especial a Jusmeire Zanin, pelo seu carinho e paciência.

## Resumo

---

Neste trabalho, o objetivo foi o de estudar o problema da reconstrução para torneios com o quociente simples normal. Com este intuito, introduzimos e desenvolvemos no capítulo 1 diversos conceitos, tais como, o quociente de um torneio e mostramos que torneios hipomorfos tais que ambos sejam não simples possuem o mesmo quociente simples. No capítulo 2 introduzimos os conceitos de ciclo minimais e característico. Ao final mostramos que a existência de quociente simples normal é uma propriedade hipomorfa para torneios de ordem superior ou igual a 7.

No capítulo 3 demonstramos que os torneios hamiltonianos de ordem maior ou igual a 4 que têm quociente simples normal são reconstrutíveis, se excluirmos um torneio de ordem 5 e dois de ordem 6. Além disso, no início deste capítulo verificamos que os torneios exibidos por Stockmeyer são realmente contra exemplos da conjectura da reconstrução, a qual diz que se dois torneios têm as mesmas cartas são isomorfos. E finalmente apresentamos uma análise das relações entre as classes dos torneios reconstrutíveis atualmente conhecidos(1999).

## Abstract

---

In this work, the objective was to study the reconstruction problem for tournaments with simple normal quotient. With this intention, we introduced and developed in chapter one few concepts, so as, quotient of a tournaments which are not both simple have the same simple quotient. In chapter two we introduce the concepts of minimal and characteristic cycles, and ending this topic we show that the existence of a normal simple quotient is a hipomorphic property for tournaments of order seven or higher.

In third chapter we show that hamiltonian tournaments of order four or higher which have normal simple quotient are reconstructible, if we exclude an order five and two of order six tournaments. Moreover, in the beginning of this chapter we check that tournaments showed by Stockmeyer, be really counterexamples of reconstruction conjecture, which says that if two tournaments with the same cards are isomorphic. Finally we present and analyse the relation between the reconstruction classes atually known (1999).

# Conteúdo

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                     | <b>6</b>  |
| <b>1 Grafos e Torneios</b>                                            | <b>8</b>  |
| 1.1 Definições e Resultados Preliminares . . . . .                    | 8         |
| 1.2 Propriedades Hipomorfas . . . . .                                 | 16        |
| <b>2 Quocientes Simples Normais e Propriedades Hipomorfas</b>         | <b>19</b> |
| 2.1 Torneios Normais . . . . .                                        | 19        |
| 2.1.1 Estrutura dos Torneios Normais . . . . .                        | 22        |
| 2.2 Quociente Simples Normal . . . . .                                | 26        |
| <b>3 Problema da Reconstrução</b>                                     | <b>36</b> |
| 3.1 Falsidade da Conjectura de Reconstrução para Torneios . . . . .   | 36        |
| 3.1.1 Score de um torneio . . . . .                                   | 37        |
| 3.1.2 Torneios $M_n$ . . . . .                                        | 38        |
| 3.1.3 Contra Exemplos de Ordem $2^n + 1$ . . . . .                    | 41        |
| 3.1.4 Contra Exemplos de Ordem $2^n + 2$ . . . . .                    | 44        |
| 3.2 Torneios com Quociente Simples Normal São Reestrutíveis . . . . . | 45        |
| 3.3 Conclusões . . . . .                                              | 48        |
| Bibliografia . . . . .                                                | 52        |

# Introdução

A teoria de grafos tem se mostrado útil na resolução de diversos problemas, como por exemplo em computação especificamente análise de algoritmo, em telecomunicações e outras áreas. Entretanto as duas áreas citadas, por si só, já justificam o interesse por esta teoria.

Um problema proposto por P. J. Kelly e S. M. Ulan em 1942, veio a exercer enorme influência na teoria de grafos. O problema pergunta se a conjectura da reconstrução é verdadeira.

Essa conjectura afirmava que dados  $G$  e  $H$  dois grafos com no mínimo 3 vértices, e se existe uma bijeção  $\sigma : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $G - v \simeq H - \sigma(v)$ ,  $\forall v \in G$  ( $G - v$  quer dizer que estamos retirando o vértice  $v$  e todas os arcos que o une com os outros vértices, chamamos  $G - v$  de carta de  $G$  referente ao vértice  $v$ ), então  $G \simeq H$ .

Embora diversos artigos tenham sido publicados tendo como finalidade resolver esta conjectura, até o momento (1999), esta havia sido verificada para poucas classes de grafos as quais são: Árvores(Trees), Unicyclic e grafos desconexos.

Em se tratando de torneios, essa conjectura foi primeiramente considerada por Harary e Palmer em 1967(ver [3]). Apesar de conhecerem contra exemplos de ordem 3 e 4, esperavam que para torneios de ordem  $\geq 5$ , excluindo os torneios fortemente conexos, pudessem ser reconstruídos por suas cartas.

A esperança de que essa conjectura fosse verdadeira era razoável, pois existem nos torneios uma estrutura e uma condição a mais, a saber, orientação dos arcos (a estrutura) e para cada dois vértices há um arco que os liga(a condição).

Esta estrutura somada a esta condição daria aos torneios uma espécie de “rigidez”, tornando assim, os torneios reconstrutíveis. Além disso, esperava-se que com esta diferença fosse possível chegar a uma solução mais rapidamente que na teoria de grafos. E, quem sabe, com os métodos desenvolvidos para torneios, não fosse possível atacar e resolver a conjectura para grafos.

Talvez seja por isso que, apesar de contra exemplos de ordem 5, 6 e 8 terem sido publicados, acreditava-se, pelo menos até 1977, que a conjectura fosse verdadeira para torneios de ordem suficientemente altas. Foi neste ano que surgiu um artigo de Stockmeyer [21], que exibiu contra exemplos para a conjectura de ordens  $2^n + 1$ ,  $n \geq 1$  e  $2^m + 2$ ,  $m \geq 2$ , demonstrando que a conjectura de reconstrução era falsa para torneios (ver capítulo 3.1 deste texto).

Apesar da conjectura se mostrar falsa, surgiu a preocupação de se estabelecer classes de torneios para os quais a conjectura se verifica. Neste sentido, podemos citar as seguintes classes de torneios:

1. Torneios Normais;
2. Torneios de Monn;
3. Torneios Redutíveis;
4. Torneios Simplesmente Desconexos;
5. Torneios que possuem quociente simples normal (tema do presente trabalho);

Um estudo sobre as relações entre estas classes de torneios é um dos objetivos deste texto e encontra-se desenvolvido no capítulo 3.

Os trabalhos que estabeleceram a estrutura destas classes de torneios se mostraram essenciais para a demonstração de que tais classes de torneios eram reconstrutíveis. É exatamente nestes trabalhos que apareceram diversos conceitos chave, tais como: ciclo minimal, ciclo característico, condensação, polos, nome de um torneio, etc. Observe que não é possível estabelecer conceitos correspondentes para grafos.

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Estabelecemos o seguinte resultado: “Sejam  $H_m$  e  $H'_m$  dois torneios hipomorfos, ambos não simples então eles têm o mesmo quociente simples.”;
- **Capítulo 2:** Estabelecemos dois teoremas que nos garante: “que para torneios de ordem  $n \geq 7$  que possuem quociente simples normal a propriedade de ser não simples é uma propriedade hipomórfica.”;
- **Capítulo 3:** Estabelecemos que torneios que possuem quociente simples normal são reconstrutíveis.

# Capítulo 1

## Grafos e Torneios

Começaremos este capítulo introduzindo alguns conceitos e resultados preliminares, com o objetivo de dar autonomia a este texto, no entanto não temos a pretensão de esgotar o assunto e portanto incetivamos o(a) leitor(a) uma ampla consulta do material bibliográfico, principalmente o livro de Moon[14].

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrarmos o seguinte resultado: “Sejam  $T_n$  e  $T'_n$  dois torneios hipomorfos, ambos não simples então eles têm o mesmo quociente simples.”

### 1.1 Definições e Resultados Preliminares

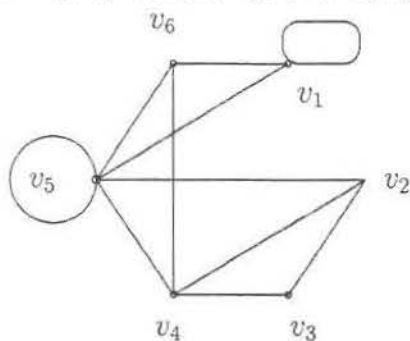
É preciso antes de mais nada, prevenir o(a) leitor(a) sobre o fato de que geralmente na teoria de grafos o nome dos conceitos não gozam de universalidade, pois o que é chamado por um autor de grafo, para outro é digrafo e para um terceiro poderá muito bem ser chamado de multigrafo, e este é apenas um exemplo. Contudo uma vez feitas estas observações, certamente não haverá ambiguidades.

A teoria de torneios faz parte de uma teoria mais ampla que é a teoria de grafos. Por este motivo começaremos introduzindo o conceito de grafo, e tentaremos mostrar como naturalmente se chega ao conceito de torneio.

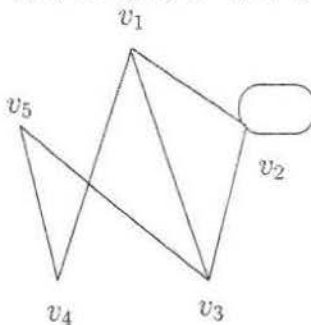
Um **grafo**  $G$  é formado pelo par  $(V(G); A(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto não vazio e finito e  $A(G)$  é o conjunto de pares ordenados formados por elementos de  $V(G)$ , simbolicamente temos  $A(G) \subset V(G) \times V(G)$ , e chamaremos de  $V(G)$  ao conjunto dos vértices de  $G$  e  $A(G)$  é o conjunto dos arcos do grafo  $G$ . Quando não houver ambiguidades vamos denotar  $V(G)$  por  $V$  e  $A(G)$  por  $A$  e então teremos que  $G = (V; A)$ .

**Exemplo 1.1** No exemplo 1.1.a) temos  $G = (V; A)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e  $A = \{(v_1, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_4, v_6), (v_6, v_1), (v_5, v_6), (v_5, v_1), (v_4, v_2), (v_5, v_2)\}$

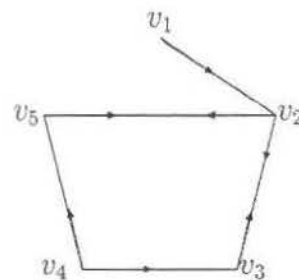
No exemplo 1.1.b) temos  $G = (V; G)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $A = \{(v_1, v_4), (v_5, v_3), (v_4, v_5), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_2), (v_3, v_2)\}$



Exemplo 1.1.a)



Exemplo 1.1.b)



Exemplo 1.1.c)

**Observação 1.2** Dado um grafo  $G = (V; A)$ , se  $(v_i, v_j) \in A$  então  $(v_j, v_i) \in A$ , com  $v_i, v_j \in V$ , e podemos trocar  $(v_i, v_j)$  por  $(v_j, v_i)$ , sem que isto cause diferença.

Agora se além disso exigirmos que  $A(G)$  seja o conjunto de pares ordenados formados por elementos distintos de  $V(G)$ , ou seja,  $A(G) = \{(x, y): x, y \in V(G), x \neq y\}$  e se associarmos a idéia de orientação da seguinte forma para  $(x, y) \in A(G)$  diremos que,  $x$  **precede**  $y$ , ou ainda,  $y$  **suced**e  $x$  e denotaremos por  $x \rightarrow y$ . Então denominaremos  $G = (V; A)$  de **grafo orientado** ou **digrafo**.

**Exemplo 1.3** Veja exemplo 1.1.c) temos o digrafo  $D = (V; A)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_5, v_2), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_2), (v_4, v_5)\}$

**Observação 1.4** Agora  $(v_i, v_j) \in A(G)$  ou  $(v_j, v_i) \in A(G)$  são informações diferentes, e não é mais possível a troca.

Um **torneio** é um grafo orientado com a seguinte propriedade sobre o conjunto de arcos:

" $\forall a, b \in V(G)$ , ocorre uma e apenas uma das seguintes possibilidades  $(a, b) \in A(G)$  ou  $(b, a) \in A(G)$ ".

Assim, torneio é um grafo orientado que não permite arcos múltiplos, mas exige-se exatamente uma arco entre dois vértices distintos.

**Definição 1.5** *Seja  $T = (V; A)$  um torneio, diremos que  $B = (V', A')$  é um subtorneio de  $T$ , ou ainda que  $B$  é gerado por  $V'$  se  $V' \subset V$  e  $A'$  é o maior subconjunto de  $A$  que possua apenas elementos de  $V'$ , e em alguns lugares denominaremos  $B$  por  $\langle V' \rangle$ .*

Sejam então  $B$  e  $D$  subtorneios de  $T$  se quaisquer  $v, w$ , com  $v \in B$  e  $w \in D$ , sempre tivermos  $v \rightarrow w$ , diremos que  $B$  precede  $D$  e denotaremos  $B \rightarrow D$ .

Seja  $B$  subtorneio próprio do torneio  $T$ , diremos  $v \in V(T) - V(B)$  **projeta**  $B$  se, e somente se,  $B \rightarrow v$  ou  $v \rightarrow B$ .

De agora em diante chamaremos de  $T_n$  aos torneios de ordem  $n$ , onde **ordem** de um torneio é a cardinalidade do conjunto  $V(T_n)$ .

Um **homomorfismo** entre os torneios  $T_n$  e  $T'_k$  é uma aplicação  $f : T_n \rightarrow T'_k$  com a seguinte propriedade  $\forall v, w \in T_n$ , com  $v \rightarrow w$ , tem-se ou que  $f(v) = f(w)$  ou que  $f(v) \rightarrow f(w)$ . Um **epimorfismo** é um homomorfismo sobrejetor e um **isomorfismo** é um homomorfismo bijetor. Se existir um isomorfismo  $f : T_n \rightarrow T'_n$  então falaremos que os torneios  $T_n$  e  $T'_n$  são isomorfos e denotaremos  $T_n \simeq T'_n$ .

**Observação 1.6** *Observe que a relação de isomorfismo " $\simeq$ " é uma relação de equivalência sobre o conjunto de todos os torneios de ordem  $n$ , e portanto, segue que podemos particionar o conjunto de torneios de ordem  $n$  em classes disjuntas.*

De agora em diante deveremos considerar um torneio como um representante de uma classes de torneios, e diremos por exemplo que existem apenas 4 torneios de ordem 4, ao invés de falarmos que há 4 torneios distintos (a menos de isomorfismo) de ordem 4.

Observamos que dado um epimorfismo  $f : T_n \rightarrow T'_k$  então  $f$  define uma partição em  $T_n$  de  $k$  classes distintas da seguinte forma: Se  $V(T'_k) = \{a_1, \dots, a_k\}$  e se chamamos  $S^i = f^{-1}(a_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ , onde  $S^i \cap S^j = \emptyset, i \neq j$  e  $V(T_n) = \bigcup_{i=1}^k V(S^i)$ . Agora pelas propriedades de homomorfismo entre torneios segue que se  $a_i \rightarrow a_j, i \neq j$  implica que  $S^i \rightarrow S^j$  para todo  $1 \leq i, j \leq k$ , e chamaremos as  $S^i$  de componentes equivalentes ou simplesmente de  $e$ -componentes.

Apartir desta observação temos a seguinte definição .

**Definição 1.7** *Seja  $T_n, (n \geq 2)$  um torneio e  $S^1, \dots, S^k$   $e$ -componentes disjuntas de  $T_n$  tal que  $V(T_n) = \bigcup_{i=1}^k V(S^i)$  e seja  $Q_k$  um torneio definido da seguinte forma , se  $V(Q_k) = \{a_1, \dots, a_k\}$  e  $a_i \rightarrow a_j \Leftrightarrow S^i \rightarrow S^j, i \neq j, \forall 1 \leq i, j \leq k$ . Chamaremos  $Q_k$  de **torneio quociente** de  $T_n$  pelas  $e$ -componentes  $S^i, i = 1, 2, \dots, k$ .*

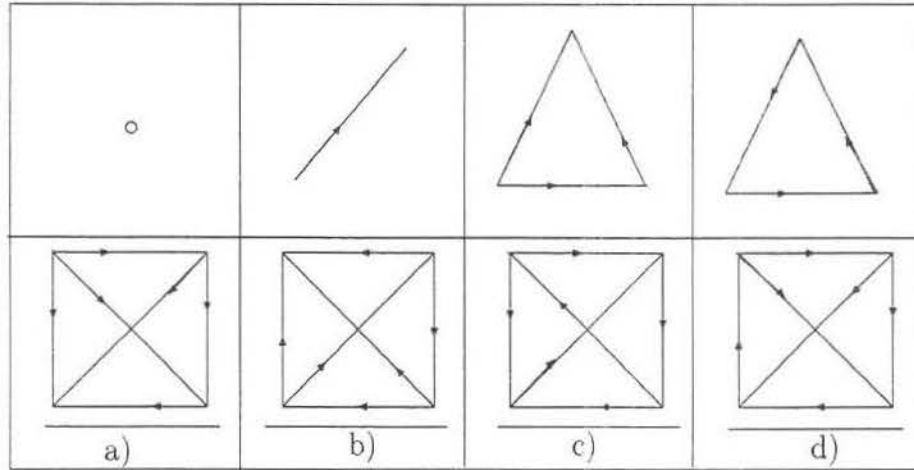


Tabela 1.1

**Observação 1.8** *Se tivermos um epimorfismo teremos então um quociente e vice-versa, ou seja, se tivermos um quociente é fácil definir um epimorfismo.*

Desta observação segue que

$Q_k$  é isomorfo a um subtorneio de  $T_n$ .

Diremos que  $T_n$  é um **torneio simples** se os únicos torneios quocientes possíveis forem  $T_1$  ou o próprio  $T_n$ .

**Definição 1.9** Um torneio  $T_n$ , com  $V(T_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Será chamado de **torneio transitivo** se satisfizer a seguinte relação entre seus vértices:

" $h < k$ , implicar que  $v_h \rightarrow v_k$  ( $v_k \rightarrow v_h$ ) e denotaremos por  $Tr_n$  ( $T^*r_n$ , respectivamente)".

**Proposição 1.10** *Todo torneio  $T_n$ , ( $n \geq 2$ ) admite um torneio quociente  $Q$  simples e distinto de  $T_1$ .*

**Demonstração: (Existência)** Se  $T_n$  for simples, basta tomar  $Q_n = T_n$ . Se  $T_n$  não for simples vai existir um  $k \in \{1, \dots, n\}$  e um epimorfismo  $f_1 : T_n \rightarrow T_k$ , agora se  $T_k$  for simples a demonstração está terminada. Se não, encontramos um  $s \in \{1, \dots, k\}$  e um epimorfismo  $f_2 : T_k \rightarrow T_s$ . Observe agora que  $f_2 \circ f_1 : T_n \rightarrow T_s$  é um epimorfismo e se  $T_s$  for simples não há nada a demonstrar. Se continuamos com o mesmo processo chegaremos a um torneio simples pois  $n$  é finito.

Antes de provarmos a unicidade vamos enunciar uma propriedade de fácil verificação :

**propriedade (\*)** Dados  $B, D$  duas e-componentes de um torneio  $T_n$ . Se  $B \cap D \neq \emptyset$  e  $B \cup D \neq T_n$  então  $A \cup B$  é uma e-componente de  $T_n$ .

**(unicidade)** Suponhamos por absurdo, que existem duas partições distintas de  $T_n$  em e-componentes e sejam  $T_n = P_h(S^1, S^2, \dots, S^h)$  e  $T_n = Q_k(T^1, T^2, \dots, T^k)$  onde  $P_h$  e  $Q_k$  são torneios simples associados as respectivas partições .

Vamos tratar previamente o caso  $h \geq 3$ . Do fato da partição associada a  $Q_k$  ser distinta da partição associada a  $P_h$ , segue que existem pelo menos um  $l$  e um  $s$  tal que  $l \in \{1, \dots, h\}$  com  $s \in \{1, \dots, k\}$  e  $S^l \cap T^s \neq \emptyset$ .

Daí podem ocorrer três casos:

- a)  $S^l \not\subset T^s$  e  $T^s \not\subset S^l$ ;
- b)  $S^l \subset T^s$ ;
- c)  $T^s \subset S^l$ ;

Vamos mostrar que sempre podemos encontrar  $l, s$  tais que recaiam no caso a). Suponhamos  $S^l \not\subset T^s$ . Agora tomemos todas as T e-componentes tais que tenham intersecção não vazia com  $S^l$ , logo existe uma T e-componente que não está contida em  $S^l$ , pois se todas estivessem contidas em  $S^l$  poderíamos substituir todas estas e-componentes por  $S^l$  na decomposição associada a  $Q_k$ , o que contraria a simplicidade de  $Q_k$ .

Logo sempre é possível encontrar  $1 \leq l \leq h$  e  $1 \leq s \leq k$  tais que  $S^l \cap T^s \neq \emptyset$  e  $S^l \not\subset T^s$  e  $T^s \not\subset S^l$ . Agora, se preciso for, podemos reordenar os vértices de  $P_h$  e  $Q_k$  tal que  $l = 1 = s$  e além disso  $S^1, \dots, S^r$  interceptam  $T^1$  e  $S^{r+1}, \dots, S^h$  não interceptam  $T^1$ , então temos dois casos:

- i) Desde que as componentes  $S^1, \dots, S^r$  interceptam  $T^1$  a união  $U = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^r$  em virtude da propriedade(\*) nos fornece uma nova partição de  $T_n$  que é  $(U, S^{r+1}, \dots, S^h)$  o que contradiz a simplicidade de  $P_h$ .
- ii)  $r = h$ , dado  $\forall v \in V(S^1) - V(T^1)$  e  $W = S^2 \cup \dots \cup S^h$ , segue da propriedade(\*) que u projeta W e mais que W é uma e-componente logo obtemos  $(S^1; W)$  uma partição de  $T_n$ , o que contradiz a nossa suposição , ou seja, que  $P_h$  é simples e  $h \geq 3$ .

Finalmente se  $h = 2$ , devemos ter também  $k = 2$ , pois caso contrário podemos trocar  $h$  por  $k$  e repetir o processo acima, donde segue  $P_2 \simeq H_2$ . ■

**Observação 1.11** Para  $h \geq 3$  não é somente o quociente simples de  $T_n$  que é único, mas também as suas componentes são univocamente determinadas. Isso não é verdade para  $h = 2$ . Veja o próximo exemplo.

**Exemplo 1.12** Seja  $Tr_3 = (V; A)$ , onde  $V = \{a, b, c\}$  e  $A = \{a \rightarrow b, a \rightarrow c, b \rightarrow c\}$ . Temos  $Tr_3 = T_2((a, b); (c)) = T_2((a); (b, c))$ .

Um **caminho** é uma sequência de vértices da forma  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k$ , tal que  $a_i \neq a_j$  e além disso, para todo  $1 \leq i \leq k-1$ , temos que  $a_i \rightarrow a_{i+1}$ .

Um **k-ciclo** é um caminho fechado, isto é, com a notação acima,  $a_k \rightarrow a_1$ . Neste caso dizemos que o ciclo tem ordem  $k$ .

**Definição 1.13** Se o torneio  $T_n$ , ( $n \geq 3$ ) possuir um ciclo passante por todos os seus vértices, chamaremos ao torneio  $T_n$  de **torneio hamiltoniano** e denotaremos  $T_n$  por  $H_n$ .

**Proposição 1.14** Seja  $T_n$  um torneio. Então  $T_n$  é hamiltoniano se, e somente se, seu torneio quociente simples  $Q_m \neq T_2$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $T_n$  um torneio hamiltoniano e seja  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_0$  um  $n$ -ciclo. Se houver um epimorfismo  $f : T_n \rightarrow T_2$ , onde  $T_2 = \{(a_1, a_2); a_1 \rightarrow a_2\}$  segue que existe  $i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  com  $f(x_i) = a_2$  e  $f(x_j) = a_1$  e  $j \equiv i+1 \pmod n$ , então  $f(x_j) \rightarrow f(x_i)$  com  $x_i \rightarrow x_j$  contradizendo o fato de  $f$  ser um homomorfismo.

( $\Leftarrow$ ) Em primeiro lugar vamos demonstrar a existência de um 3-ciclo em  $T_n$ . Para isto, tomemos  $w \in T_n$  e sejam  $U = \{v \in T_n : v \rightarrow w\}$  e  $U' = \{v \in T_n : w \rightarrow v\}$ .

Como  $w$  não projeta  $T_n - \{w\}$  isto implica que  $U, U' \neq \emptyset$ . Se  $U \rightarrow U'$ , então temos  $[U \cup \{w\}] \rightarrow U'$  e  $T_n = T_2([U \cup \{w\}]; U')$  o que é um absurdo. Donde segue que existem  $u, u'$  com  $u \in U$  e  $u' \in U'$  tais que  $u' \rightarrow u$ , logo  $u \rightarrow w \rightarrow u' \rightarrow u$  e, portanto existe um 3-ciclo.

Seja  $C$  um  $k$ -ciclo de comprimento máximo em  $T_n$ , o qual existe pela argumentação dos dois parágrafos anteriores.

Todos os vértices de  $T_n - C$  projetam  $C$ , pois se  $v \in T_n - C$  não projetar  $C : a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{k-1} \rightarrow a_0$  podemos encontrar um índice  $i$  tal que  $a_i \rightarrow v$  e  $v \rightarrow a_j$  com  $j \equiv i+1 \pmod k$  donde obtemos um ciclo de comprimento  $k+1$  o que é um absurdo. Seja  $V = \{v \in T_n - C : v \rightarrow C\}$  e  $V' = \{v \in T_n - C : C \rightarrow v\}$ . Queremos mostrar que  $V = V' = \emptyset$ . Se apenas um deles for vazio, por exemplo  $V'$ , então temos  $T_n = T_2(V, C)$  o

que é um absurdo, logo ambos são diferentes de vazio ou ambos são vazios. Suponhamos que ambos são diferentes de vazio, se  $V \rightarrow V'$  novamente teríamos  $T_n = T_2((V \cup C); V')$  o que contradiz a hipótese, logo existem  $v \in V$  e  $v' \in V'$  tais que  $v' \rightarrow v$ . Então  $v \rightarrow a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{k-1} \rightarrow v' \rightarrow v$  o que contraria a maximalidade de  $C$ .

Portanto,  $V = V' = \emptyset$  e disto segue que  $C$  passa por todos os vértices de  $T_n$ . ■

**Definição 1.15** Um vértice  $v \in H_n$  é chamado de **vértice neutro** se, e somente se,  $H_n - v$  ainda é um torneio hamiltoniano. O número de vértices neutros de  $H_n$  é denotado por  $\nu(H_n)$ .

**Proposição 1.16** Dado um torneio hamiltoniano  $H_n$  com  $n \geq 5$  então  $\nu(H_n) \geq 2$ .

**Demonstração:** Sabemos pela recíproca do teorema 1.14 que existe pelo menos um 3-ciclo em  $H_n$ . Seja  $C$  um ciclo de comprimento máximo, tal que  $|C| = r \leq n - 2$  (observe que se  $n = 5$  então  $r = 5 - 2 = 3$  e não precisamos do argumento abaixo).

Queremos mostrar que  $r = n - 2$ , então suponhamos por absurdo que  $r < n - 2$ . Seguindo a idéia da proposição 1.14 sabemos que para  $\forall v \in V(H_n) - V(C)$ , temos que  $v$  projeta  $C$ . Sejam  $U = \{v \in V(H_n) - V(C) : v \rightarrow C\}$  e  $U' = \{v \in V(H_n) - V(C) : C \rightarrow v\}$ . Certamente teremos que  $U, U' \neq \emptyset$  pois  $H_n$  é hamiltoniano. Agora se  $U \rightarrow U'$ , teríamos então que  $T_n = T_2(\{U \cap C\}; U')$  o que é um absurdo, logo devem existir  $v \in U, w \in U'$  tais que  $w \rightarrow v$ . Se  $C : x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_r$ , o ciclo  $v \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_r \rightarrow w \rightarrow v$  é um ciclo de comprimento  $r + 1$ , o que contradiz a maximalidade de  $C$ . Portanto, existe um  $(m - 2)$ -ciclo. Onde  $V(H_n) = V(C) \cup \{v_1, v_2\}$ . E temos os seguintes casos:

- a) Se  $v_1, v_2$  não projetam  $C$ , logo ambos são neutros.
- b) Se  $v_1$  projeta  $C$  e  $v_2$  não o projeta. Logo  $v_2$  é um vértice neutro e podemos supor, sem perda de generalidade que  $C \rightarrow v_1$  ( $v_1 \rightarrow v_2$ , pois do contrário  $H_n = T_2(H_n - v_2, v_2)$ ). Escrevendo  $C : a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{k-1}$ , então vai existir um índice  $i$  e um  $j$  tal que  $j \equiv i + 1 \pmod{k}$ , tal que  $a_i \rightarrow v_2$  e  $v_2 \rightarrow a_j$ . então temos o seguinte ciclo  $a_{i-1} \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow a_j \rightarrow a_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_{i-1}$ , logo  $v_2$  e  $a_i$  são vértices neutros.
- c) Se  $v_1$  e  $v_2$  projetam  $C$ , com um raciocínio análogo obteremos outros dois vértices neutros.

Em qualquer caso obtemos a desigualdade desejada. ■

**Observação 1.17** Com o argumento dado acima é fácil de demonstrar que em um torneio hamiltoniano  $H_n$ ,  $n \geq 5$  existe pelo menos um  $r$ -ciclo não projetado, para todo  $3 \leq r \leq m - 2$ .

**Definição 1.18** Se  $v$  é um vértice de um torneio  $T_n$ , então o subtorneio  $T_n - v$  é chamado de **carta** de  $T_n$  relativo ao vértice  $v$ .

Assim, um torneio de ordem  $n$  possui  $n$  cartas.

**Lema 1.19** Todo torneio  $T_n$  admite um caminho que passa por todos os seus vértices.

**Demonstração:** Vamos demonstrar este lema por indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1, 2, 3$  é trivialmente verdadeiro.

Vamos mostrar para  $n \geq 4$ . Temos por hipótese de indução que a afirmação acima é verdadeira para todo  $1 \leq k < n$ . Se  $T_n$  é um torneio hamiltoniano o seu ciclo máximo já é o caminho pedido, seja então  $T_n$  um torneio não hamiltoniano então por força da proposição 1.14 temos que  $T_n = T_2(S^1; S^2)$  onde  $V(S^1) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  e  $V(S^2) = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$  e  $r + s = n$  então pela hipótese de indução e como  $S^1 \rightarrow S^2$  segue que se reordenarmos os índices, caso necessário, teremos que  $x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_r \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_s$  um caminho em  $T_n$ , e isto conclui a demonstração. ■

**Proposição 1.20** Seja  $T_m$ , ( $m \geq 5$ ) um torneio, então as seguintes afirmações abaixo são equivalentes:

- i)  $T_m$  é hamiltoniano;
- ii) Todos os seus quocientes são hamiltonianos;
- iii)  $T_m$  possui pelo menos duas cartas hamiltonianas;

**Demonstração:**  $i) \Rightarrow ii)$  Suponhamos por absurdo que existe  $Q_n$  quociente de  $T_m$  que não é hamiltoniano e pela observação 1.8 segue que existe um epimorfismo  $f : T_m \rightarrow Q_n$ , e pelo fato de  $Q_n$  não ser hamiltoniano segue pela proposição 1.14 que existe um outro epimorfismo  $g : Q_n \rightarrow T_2$ , e como  $g \circ f : T_m \rightarrow T_2$  é também um epimorfismo e pela observação 1.8 seguido da proposição 1.14, temos que  $T_m$  também não é hamiltoniano contrariando a nossa hipótese.

$ii) \Rightarrow i)$  Se  $T_m$  for simples segue pela proposição 1.14 que ele é hamiltoniano. Agora se ele não for simples temos  $T_m = Q_n(S^1; S^2; \dots; S^n)$ , onde  $Q_n$  é hamiltoniano. Pelo lema

1.19 sabemos que cada  $e$ -componente  $S^i$  possui um caminho passante pelos seus vértices, que denotaremos por  $P(S^i)$ . Reordenando as  $e$ -componentes, se preciso for, teremos que  $P(S^1) \rightarrow P(S^2) \rightarrow \dots \rightarrow P(S^n) \rightarrow P(S^1)$  e, portanto o torneio  $T_m$  é hamiltoniano como queríamos.

$i) \Rightarrow iii)$  Isto segue imediatamente do fato que  $\nu(T_m) \geq 2$ .

$iii) \Rightarrow i)$  Seja  $v, w \in T_m$  os vértices tais que  $T_m - v$  e  $T_m - w$  são hamiltoniano. Sabemos que existem  $u_1, u_2 \in (T_m - v \cap T_m - w)$ , tais que  $u_1 \rightarrow v \rightarrow u_2$ . Seja agora  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-2}$  o ciclo hamiltoniano do torneio  $T_m - w$ , logo pelo fato de  $u_1 \rightarrow v \rightarrow u_2$  segue que existem índices  $i, j$  tais que  $j \equiv i+1 \pmod{(n-2)}$  e  $x_i \rightarrow v \rightarrow x_j$  e portanto podemos contruir o seguinte ciclo  $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_i \rightarrow v \rightarrow x_j \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-2} \rightarrow x_0$  e, portanto  $T_m$  é hamiltoniano. ■

**Definição 1.21** Um **hipomorfismo** entre dois torneios  $T_m$  e  $R_m$  é uma função bijetora  $\phi : T_m \rightarrow R_m$  tal que para todo  $v \in T_m$ , vale  $T_m - v \simeq R_m - \phi(v)$ .

Dois torneios  $T_m$  e  $R_m$  são hipomorfos se existir um hipomorfismo entre eles.

**Definição 1.22** Um torneio  $T_m$  é **reconstrutível** por suas cartas se  $T_m \simeq R_m$  sempre que  $T_m$  e  $Q_m$  são hipomorfos.

Falaremos que “ $P$ ” é uma propriedade hipomorfa, quando dois torneios  $T_m$  e  $Q_m$  são hipomorfos temos que se  $T_m$  possui a propriedade “ $P$ ” então  $Q_m$  também a possui.

**Observação 1.23** Em um torneio hamiltoniano  $H_n$ ,  $\nu(H_n)$  é uma propriedade hipomorfa.

**Observação 1.24** A existência de um ciclo hamiltoniano em um torneio  $T_n$  é uma propriedade hipomorfa se, e somente se,  $n \geq 4$ .

Estas observações seguem da proposição 1.20.

## 1.2 Propriedades Hipomorfas

Vamos começar demonstrando o seguinte lema.

**Lema 1.25** Dado  $T_m$  um torneio e  $T_r$  um subtorneio de  $T_m$ , se  $v \in V(T_m) - V(T_r)$  com  $v$  não projetando  $T_r$ , então  $T_r \cup v$  tem o mesmo quociente simples  $Q_n$  de  $T_r$  se, e somente se,  $v$  se comporta como uma  $e$ -componente de  $T_r$ .

De outra forma o quociente simples de  $T_r \cup v$  tem ordem  $n' > n$

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Segue imediatamente das definições de torneio quociente simples.

( $\Rightarrow$ ) Sabemos que cada e-componente de um quociente simples de  $T_r \cup v$  que não contém  $v$  está contido em alguma e-componente do quociente simples de  $T_r$ . Então, se a e-componente de  $T_r \cup v$  que contém  $v$  não está contida em nenhuma e-componente do quociente simples de  $T_r$ , temos que o quociente simples de  $T_r \cup v$  tem ordem  $n' > n$ . ■

**Observação 1.26** *Segue deste lema que o quociente simples de toda carta de um torneio não simples tem ordem menor ou igual a ordem do quociente simples do torneio.*

**Teorema 1.27** *Sejam  $T_m$  e  $T'_m$ , ( $m \geq 3$ ) dois torneios que não são simples e  $T_m$  é hipomorfo a  $T'_m$ . Então  $T'_m$  tem o mesmo quociente simples de  $T_m$ .*

**Demonstração:** Se  $T_m$  não é hamiltoniano, então temos dois casos:

- 1) Se  $m = 3$ , sabemos que existe apenas dois torneios, que são  $Tr_3$  e  $H_3$ . Agora do fato que ambos devem ser não simples segue que  $T_3 \simeq Tr_3$  assim como  $T'_3 \simeq Tr_3$  disto segue que ambos possuem o mesmo quociente simples que é  $T_2$ ;
- 2) Se  $m \geq 4$ , então pela observação 1.24, segue que  $T'_m$  também não é hamiltoniano, logo ambos tem  $T_2$  como quociente simples.

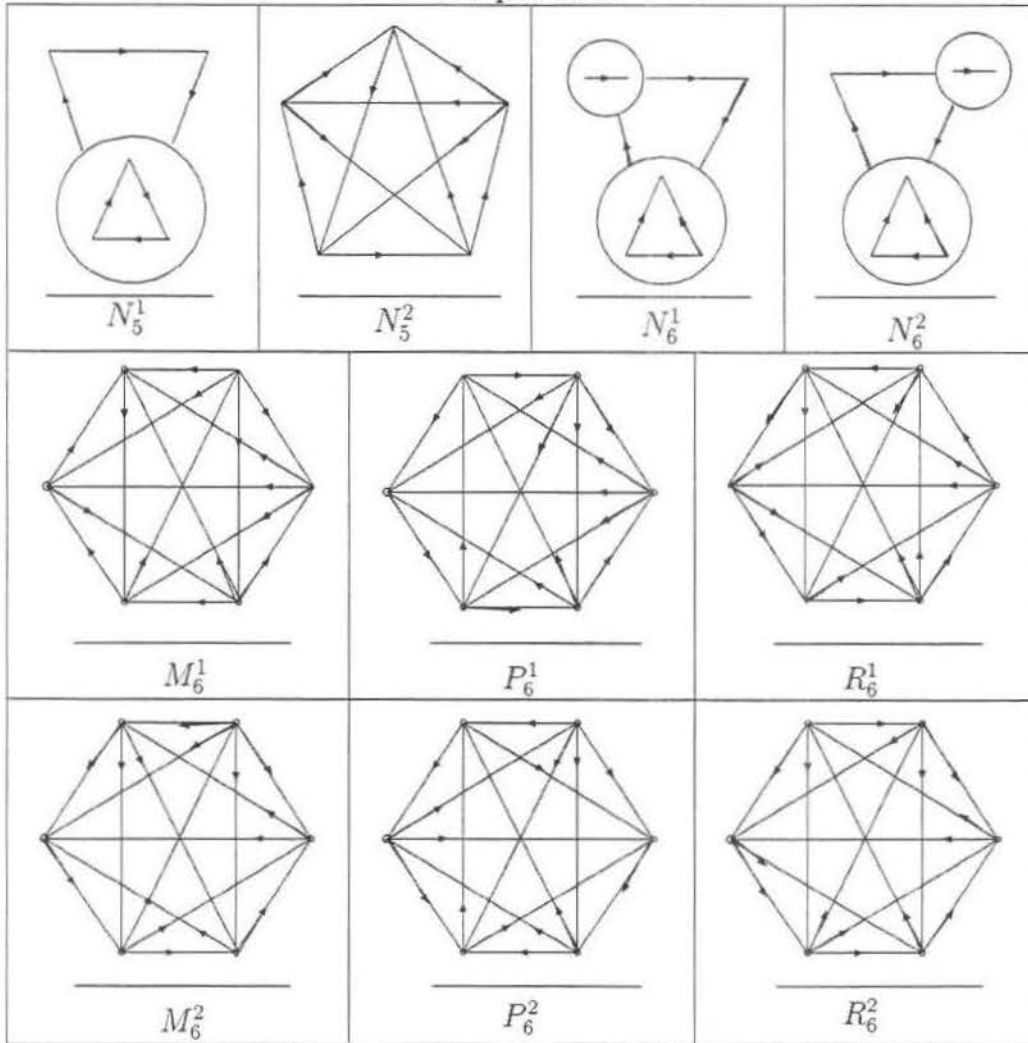
Agora se  $T_m$  é hamiltoniano, certamente  $m \geq 4$  e portanto pela observação 1.24  $T'_m$  também é hamiltoniano. Existem pelo menos 2 cartas que têm o mesmo quociente simples  $Q_n$  de  $T_m$  (estas cartas são tomadas relativas a vértices de e-componentes não triviais de  $T_m$ ). Pelo observação 1.26 segue que a ordem dos quocientes simples das demais cartas não excedem a  $n$ .

Se alguma carta de  $T_m$  tem quociente simples  $Q'_n$  de ordem  $n$ , temos então pelo lema 1.25 que  $Q'_n \simeq Q_n$ . Portanto todas as cartas que possuem quociente de máxima ordem tem como quociente o torneio  $Q_n$ .

Segue o mesmo resultado para  $T'_m$ . E como o quociente simples de máxima ordem das cartas é o mesmo que o quociente simples de  $T_m$  e  $T'_m$ , segue o resultado. ■

A exigência de que  $T_m$  e  $T'_m$  sejam não simples é imprescindível como mostram os exemplos abaixo.

Exemplo 1.28



Observe que o torneio  $N_1^5$  não é simples, no entanto é hipomorfo a  $N_2^5$  que é simples.

## Capítulo 2

# Quocientes Simples Normais e Propriedades Hipomorfias

Neste capítulo demonstraremos dois teoremas que garantirá que para torneios que possuem quociente simples normal a propriedade de ser não simples é uma propriedade hipomorfa.

### 2.1 Torneios Normais

Devido a importância dos conceitos de ciclos minimais, ciclos característicos e de torneios normais para este texto, começaremos este capítulo desenvolvendo estes conceitos e enunciando o teorema da estrutura dos torneios normais demonstrado por Demaria e Gianella em [8].

**Definição 2.1** Um torneio  $T_n$ , ( $n \geq 4$ ) com  $V(T_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e

$$A(T_n) = \{x_i \rightarrow x_j : j < i - 1 \text{ ou } j = i + 1\}$$

é chamado de torneio **bineutral** e é denotado por  $A_n$ .

No exemplo 2.14 exibiremos os torneios  $A_5$  e  $A_7$ , observamos ainda que esta classe de torneios possui este nome pois só existem dois vértices neutros em cada  $A_k$ .

**Proposição 2.2** Um torneio  $T_n$ , ( $n \geq 5$ ) é hamiltoniano se, e somente se, existe um  $m$ -ciclo  $C$  não-projetado, onde  $3 \leq m \leq n - 2$ .

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Se  $T_n$  não é hamiltoniano então possui  $T_2$  como quociente simples. Segue que cada  $m$ -ciclo está contido em uma de suas  $e$ -componentes e portanto os seus  $m$ -ciclos são projetados.

( $\Rightarrow$ ) Segue imediatamente da observação 1.17. ■

**Observação 2.3**  $H_3$  e  $H_4 = A_4$  também contém um  $m$ -ciclo não projetado, no entanto não satisfaz a condição  $m \leq n - 2$ .

**Observação 2.4** Dado um ciclo  $C$  não projetado em  $H_n$ , então para todo  $v \in V(H_n) - V(C)$  é um vértice neutro de  $H_n$ , pois se  $v$  não fosse um vértice neutro, teríamos que  $H_n - v$  não é hamiltoniano, ou seja,  $H_n - v = T_2(S_1; S_2)$ . Logo, como  $C$  é um ciclo,  $C$  deve estar em  $S_1$  ou em  $S_2$ , o que implicaria que  $C$  seria um ciclo projetado, o que é uma contradição.

**Definição 2.5** Seja  $C$  um ciclo não projetado de um torneio hamiltoniano  $H_n$ . O conjunto  $P_C = V(H_n) - V(C)$  é chamado o conjunto de **polos** de  $C$ .

Pela observação 2.4 acima sabemos que os polos de  $C$  são todos vértices neutros.

**Definição 2.6** Um ciclo  $C$  não projetado de um torneio hamiltoniano  $H_n$  é dito **ciclo minimal** se cada subciclo  $C'$ , tal  $V(C') \subset V(C)$  é projetado por no mínimo um vértice de  $H_n$ . Um ciclo é chamado **ciclo característico** se possui o menor comprimento entre todos os ciclos minimais. A ordem de um ciclo característico é chamado de **característica cíclica** de  $H_n$ , e é denotada por  $cc(H_n)$ . E  $cd(H_n) = n - cc(H_n)$  é chamado de **diferença cíclica** de  $H_n$ .

**Observação 2.7** Pode haver mais que um ciclo característico em um torneio.

**Observação 2.8** Se  $C$  é o ciclo característico de  $H_n$ , então  $cd(H_n) = |P_C|$ .

**Proposição 2.9** Um vértice  $v \in H_n$  é neutro se, e somente se, existe um ciclo minimal tal que  $v \in P_C$ .

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Segue da observação 2.4.

( $\Rightarrow$ ) Se  $v$  é um vértice neutro,  $H_n - v$  é hamiltoniano (e não projetado) então existe um ciclo minimal contido em  $H_n - v$  e  $v \in P_C$ . ■

**Observação 2.10** Se  $v \in H_n$  é um vértice neutro, em geral não existe um ciclo característico  $C$  tal que  $v \in P_C$ .

**Observação 2.11** O conjunto dos vértices neutros de  $H_m$  é a união do conjunto dos polos dos ciclos minimais de  $H_m$ , portanto vale a desigualdade  $cd(H_m) \leq \nu(H_m)$ .

**Proposição 2.12** Seja  $H_n$  um torneio hamiltoniano. Então  $cd(H_n) = \nu(H_n)$  se, e somente se, existe um único ciclo minimal.

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Se  $C$  é o ciclo minimal de  $H_n$ , e  $cd(H_n) < \nu(H_n)$  então se existir um vértice neutro  $v \notin P_C$ . Segue pelo proposição 2.9 que existe um outro ciclo minimal  $C'$  tal que  $v \in P_{C'}$ , o que é um absurdo.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $H_n$  tenha exatamente  $m$ -ciclos minimais ( $m > 1$ ). Então no minimo um é o ciclo característico  $C$  e, além disso, se  $C'$  é um ciclo minimal diferente de  $C$ , então existe  $v \in P_{C'}$ , isto é,  $|P_C| = cd(H_n) < \nu(H_n)$  o que contraria a hipótese. ■

**Definição 2.13** Seja  $H_n$  um torneio hamiltoniano. Diremos que  $H_n$  é **normal** se existe um único ciclo minimal.

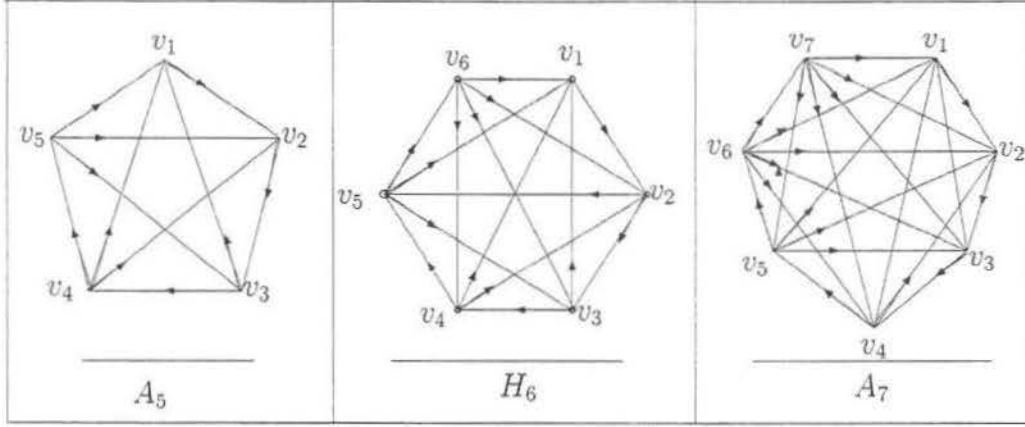
Segue da proposição 2.12 que  $H_n$  é normal se, e somente se,  $cd(H_n) = \nu(H_n)$ .

**Exemplo 2.14** Os torneios  $A_5$  e  $A_7$  são exemplos de torneios bineutrais.

Em  $A_5$  o ciclo característico é  $\{v_2, v_3, v_4, v_2\}$  e portanto  $cc(A_5) = 3$  o que implica  $cd(A_5) = 5 - 3 = 2$ . Os vértices  $v_1$  e  $v_5$  são os vértices neutros deste torneio e, portanto  $\nu(A_5) = 2$  logo este torneio é normal.

Em  $A_7$  o ciclo característico é  $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_2\}$ . Portanto  $cc(A_7) = 5$  o que implica  $cd(A_7) = 7 - 5 = 2$ . Os vértices neutros são  $\{v_1, v_7\}$ , donde  $\nu(A_7) = 2 = cd(A_7)$  e, portanto o torneio é normal.

O torneio  $H_6$  possui 4 ciclos característicos os quais são:  $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_1)$ ;  $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_1)$ ;  $(v_2, v_5, v_3, v_4, v_2)$ ;  $(v_2, v_5, v_6, v_4, v_2)$ . Segue que  $cc(H_6) = 4$ , e  $cd(H_6) = 6 - 4 = 2$  e, assim este não é um torneio normal. O torneio  $H_6$  é igual ao torneio  $A_6$  exceto pelo arco  $(v_2, v_5) \in H_6$ .



### 2.1.1 Estrutura dos Torneios Normais

Vamos apresentar algumas definições e propriedades para tornar compreensível o teorema demonstrado por Demaria e Gianella em [8], que nos dá uma representação dos torneios normais. Esta representação é muito importante, pois só depois de estabelecido esta representação foi possível mostrar que os torneios normais com mais que 4 vértices são reconstrutíveis por suas cartas. Este resultado foi demonstrado por Demaria e Guido em [10], denotaremos por  $\mathcal{N}$  a esta classe de torneios.

Dado um torneio  $H_n$  normal, seja  $C$  o seu  $K$ -ciclo característico. Então  $C$  é isomorfo a  $A_k$  (onde  $A_k$  é o torneio bineutal) se  $k \geq 4$  e se  $k = 3$ ,  $C$  é isomorfo a  $H_3$ . E mais, seja  $V(A_k) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , então qualquer  $z \in P(A_k) = V(H_n) - V(A_k)$ , pode ser classificado em duas categorias que denotaremos por  $x$  ou  $y$  e cada categoria se divide em  $k - 1$  tipos distintos, conforme as adjacências do polo  $z$ , como descritas abaixo:

-  $z = x_i$  se

$$(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_k) \rightarrow z \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_i), \quad i = 1, 2, \dots, k - 1$$

-  $z = y_i$  se

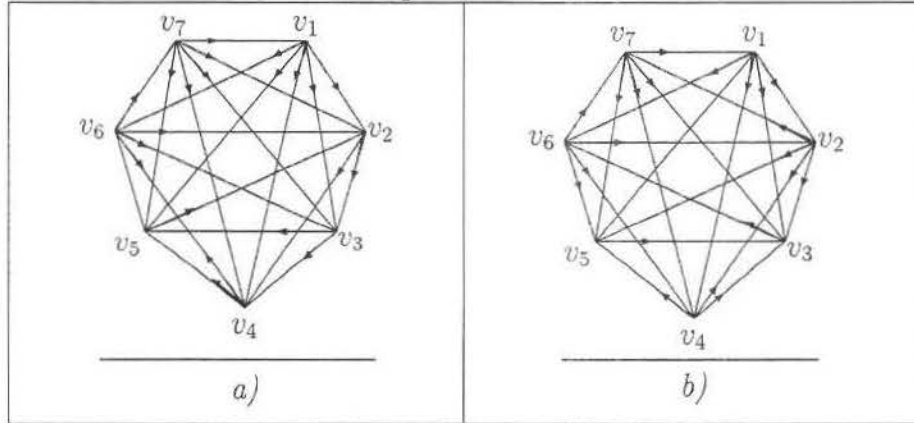
$$(a_i, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_k) \rightarrow z \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, k - 1$$

**Teorema 2.15** (*Estruturas dos Torneios Normais*)  $H_n$ ,  $n \geq 5$  é um torneio normal se, e somente se, seu  $k$ -ciclo característico é o torneio  $A_k$  se  $k \geq 4$  ou  $H_3$  se  $k = 3$  e o subtorneio de seus polos  $P_{n-k}$  é não hamiltoniano e tem uma composição transitiva, isto é,  $P_{n-k} \cong T^* r_{k+1}(T^0, T^1, \dots, T^k)$  cujas componentes satisfazem as seguintes condições :

- $T^0 \neq \emptyset$  contém somente polos do tipo  $x_1$ ;
- $T^1$  pode conter polos do tipo  $x_1, x_2, y_1$ ;
- $T^2$  pode conter polos do tipo  $x_1, x_2, x_3, y_2$ ;
- $\vdots$
- $T^r$  pode conter polos do tipo  $x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, y_r$ ;
- $\vdots$
- $T^{k-1}$  pode conter polos do tipo  $x_{k-2}, x_{k-1}, y_{k-1}$ ;
- $T^k \neq \emptyset$  contém somente polos do tipo  $x_k$ ;

**Demonstração:** ver Demaria e Gianella em [8]. ■

### Exemplo 2.16



Observe que no item a) do exemplo 2.16, existe um único ciclo característico  $C \simeq A_4 = \{v_2, v_4, v_6, v_7, v_2\}$ , onde  $a_1 = v_2, a_2 = v_4, a_3 = v_6$  e  $a_4 = v_7$ . Portanto o torneio é normal e além disso temos que  $cc(H_7) = 4$ , e isto implica que  $cd(H_7) = 7 - 4 = 3$ . Observe que o conjunto dos polos é  $P_C = V(H_7) - V(C) = \{v_1, v_3, v_5\}$ .

Vamos verificar quais são os tipos destes polos:

i) O vértice  $v_1 \in P_C$  é um polo do tipo  $x_3$ , pois:

$$(a_4) \rightarrow v_1 \rightarrow (a_1, a_2, a_3);$$

ii) O vértice  $v_3 \in P_C$  é um polo do tipo  $y_1$ , pois:

$$(a_1, a_3, a_4) \rightarrow v_3 \rightarrow (a_2);$$

iii) O vértice  $v_5 \in P_C$  é um polo do tipo  $x_1$ , pois:

$$(a_2, a_3, a_4) \rightarrow v_5 \rightarrow (a_1).$$

Agora no item b) do exemplo 2.16 , também existe um único ciclo característico  $C \simeq A_3 = \{v_3, v_6, v_7, v_3\}$ , onde  $a_1 = v_3, a_2 = v_6$  e  $a_3 = v_7$ , donde segue que este torneio é normal, e  $cc(H_7) = 3$  e isto implica que  $cd(H_7) = \nu(H_7) = 7 - 3 = 4$ .

O conjunto dos polos deste torneio é  $P_C = v(H_7) - V(C) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ . Vamos verificar quais são os tipos destes polos:

i) O vértice  $v_1 \in P_C$  é um polo do tipo  $x_2$ , pois:

$$(a_3) \rightarrow v_1 \rightarrow (a_1, a_2);$$

ii) O vértice  $v_2 \in P_C$  é um polo do tipo  $y_2$ , pois:

$$(a_2) \rightarrow v_2 \rightarrow (a_1, a_3);$$

iii) O vértice  $v_4 \in P_C$  é um polo do tipo  $x_1$ , pois:

$$(a_2, a_3) \rightarrow v_4 \rightarrow (a_1);$$

iv) O vértice  $v_5 \in P_C$  é um polo do tipo  $x_1$ , pois:

$$(a_2, a_3) \rightarrow v_5 \rightarrow (a_1).$$

**Observação 2.17** No item b) do exemplo 2.16, o vértice  $v_4$ , pode ser colocado tanto em  $T^0$  como  $T^1$  assim como  $T^2$  se colocarmos o vértice  $v_5$  na componente  $T^0$ , ou seja, as componentes  $T^i$  não são univocamente determinadas.

Precisamos escolher uma composição para o subtorneio  $P_{n-k}$  dos polos, tal que as componentes  $T^i$  sejam univocamente determinadas, com isto garantiremos também o seguinte resultado:

“Sejam  $H_n$  e  $H'_n$  dois torneios normais, então  $H_n \simeq H'_n$  se, e somente se, possuem o mesmo ciclo característico e a mesma composição dos polos”.

Para obtermos componentes  $T^i$  univocamente determinadas precisamos das seguintes definições .

**Definição 2.18** Dado um torneio  $T_n$ , definimos como sendo a sua **condensação** por passar o quociente em  $T_n$  por um torneio transitivo, isto é,  $T_n = T^*r_j(S^1, S^2, \dots, S^j)$ , onde as  $e$ -componentes  $S^i$  são hamiltonianas de ordem maximal ou triviais.

**Observação 2.19** A condensação de um torneio hamiltoniano é sempre  $T_1$ .

**Definição 2.20** Seja  $H_n$  um torneio normal e  $T^*r_j(T^0, T^1, \dots, T^j)$  a condensação do subtorneio  $P_{n-k}$  dos polos. Construiremos a composição de  $P_{n-k}$  da seguinte maneira:

Primeiramente façamos o seguinte:

$U^1 = T^2 \cup T^3 \cup \dots \cup T^{r_1}$ , maior união possível formado apenas por componentes que tenham polos do tipo  $x_1, x_2, y_1$ ;

$U^2 = T^2 \cup T^3 \cup \dots \cup T^{r_2}$ , maior união possível formado apenas por componentes que tenham polos do tipo  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$ ;

$\vdots$

$U^i = T^2 \cup T^3 \cup \dots \cup T^{r_i}$ , maior união possível formado apenas por componentes que tenham polos do tipo  $x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, y_1, \dots, y_i$ ;

$\vdots$

$U^{k-2} = T^2 \cup T^3 \cup \dots \cup T^{r_{k-2}}$ , maior união possível formado apenas por componentes que tenham polos do tipo  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-2}$ ;

$U^{k-1} = T^2 \cup T^3 \cup \dots \cup T^{j-1}$ .

Finalmente, tomamos:

$$P^0 = T^1;$$

$$P^1 = U^1;$$

$$P^2 = U^2 - U^1;$$

$\vdots$

$$P^i = U^i - U^{i-1};$$

$\vdots$

$$P^{k-1} = U^{k-1} - U^{k-2};$$

$$P^k = T^j,$$

e chamamos  $T^*r_{k+1}(P^0, P^1, \dots, P^k)$  de **composição canônica** de  $P_{n-k}$ .

**Observação 2.21** Esta composição é única, pois as uniões :  $P^1 \cup P^2 = U^2, \dots, P^1 \cup P^2 \cup \dots \cup P^i = U^i, \dots, P^1 \cup P^2 \cup \dots \cup P^{k-2} = U^{k-2}$  são definidas de forma maximal.

No item b) do exemplo 2.16 a composição canônica do torneio  $H_7$ , obrigará o vértice  $v_4$  a ficar na componente  $T^1$  e em nenhuma outra.

**Teorema 2.22** Dois torneios normais  $H_n$  e  $H'_n$  são isomorfos se, e somente se:

- a) Eles possuem o mesmo ciclo característico;
- b) Eles têm a mesma composição canônica, tal que:
  - 1) Se  $0 \leq i \leq k$ , as componentes  $T^i$  e  $T'^i$  são isomorfas;
  - 2) Os vértices correspondentes da  $i$ -ésima componentes são do mesmo tipo;

**Demonstração:** Se encontra em [8].

## 2.2 Quociente Simples Normal

Nesta seção iremos desenvolver alguns conceitos e demonstrar que possuir quocientes simples normais é uma propriedade hipomorfa.

**Proposição 2.23** Se  $H_m$  é um torneio hamiltoniano e se passarmos ao quociente por  $Q_n$ , isto é,

$$H_m = Q_n(S^1; S^2; \dots; S^n)$$

então temos a seguinte igualdade  $cc(H_m) = cc(Q_n)$ .

**Demonstração:** Se  $C := a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_r \rightarrow a_1$  é um  $r$ -ciclo minimal de  $H_m$ , pela observação 1.8, existe um epimorfismo  $P : V(H_m) \rightarrow V(Q_n)$ . Certamente  $P(C) \not\subseteq S^j, \forall j, 1 \leq j \leq n$ , pois se ele estivesse contido, teríamos que  $P(C)$  seria projetado e portanto  $C$  seria projetado, o que é um absurdo, visto que  $C$  é minimal. Além disso, como  $C$  é um ciclo,  $P(C)$  vai estar contido em pelo menos três  $e$ -componentes distintas.

Vamos mostrar que  $P(C)$  está contido em  $r$   $e$ -componentes distintas. Suponhamos por absurdo que  $P(C)$  está contido em  $s$   $e$ -componentes distintas com  $3 \leq s < r$ . Agora

o torneio  $\langle C \rangle$  é um torneio hamiltoniano e a aplicação  $P : \langle C \rangle \rightarrow \langle P(C) \rangle$  é um epimorfismo. Agora, pela proposição 1.20 segue que  $\langle P(C) \rangle$  é um torneio hamiltoniano, logo existe um ciclo  $C'$ , que passa por todos os vértices de  $\langle P(C) \rangle$ , e este ciclo é um subciclo do torneio  $\langle C \rangle$ , sendo portanto projetado em  $H_n$ . Segue que  $P(C') = P(C)$  é projetado em  $Q_m$  o que é um absurdo. Segue que  $P(C)$  vai em  $r$  e-componentes distintas, e assim  $cc(H_m) \geq cc(Q_n)$ .

Agora se  $C'$  é um ciclo minimal de  $Q_m$ , o qual é isomorfo a um subtorneio de  $H_m$ , temos  $\langle C' \rangle$  é isomorfo a ciclo de  $H_m$  e não é projetado, pois  $C'$  é não projetado em  $Q_n$ . Além disso, qualquer ciclo  $C''$  projetado de  $Q_n$ , tal que  $V(C'') \subset V(C')$ , temos que  $\langle C'' \rangle$  é isomorfo a um subtorneio de  $H_m$  que é projetado. Daí temos  $cc(H_m) \leq cc(Q_n)$  e, portanto podemos concluir que  $cc(H_m) = cc(Q_n)$ . ■

**Teorema 2.24** *Seja  $H_m$  um torneio hamiltoniano normal. Então cada torneio quociente  $Q_n$  é normal e tem o mesmo ciclo característico de  $H_m$ .*

**Demonstração:** Se  $m = 3 = k$ , onde  $k = cc(H_m)$  o resultado segue imediatamente. Vamos provar para  $m \geq 3$ . Como  $H_m$  é normal e o seu ciclo característico é  $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  e sejam  $S^1, S^2, \dots, S^n$  as e-componentes da partição de  $H_m$  tal que  $H_m = Q_n(S^1, S^2, \dots, S^n)$  e  $V(Q_n) = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ .

Sabemos da proposição 2.23 que cada  $a_i \in A_k$  vai em uma componente distinta e que  $cc(H_m) = cc(Q_n)$  e como  $k = cc(Q_n) \leq n - 2$  e disto temos que  $k \leq n - 2$ . E portanto, podemos definir a seguinte função injetora:

$j : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , que  $\forall a_i \in A_k, \{a_i\} = S^{j(i)}$ . Aqui estamos admitindo que as e-componetes que contém os elementos  $a_i \in A_k$ , são constituídas por exatamente estes  $a_i$ . Pois, se supormos por absurdo que exista alguma e-componentes constituída por mais que um elemento, por exemplo  $S^{j(i)} = \{a_i, x\}$  então teremos os seguintes ciclos  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{i-1} \rightarrow a_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$  e  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{i-1} \rightarrow x \rightarrow a_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$  os quais são dois ciclos minimais de mesmo comprimento e portanto  $H_m$  não seria normal, o que é um absurdo. Donde concluímos que  $\{q_{j(1)}, q_{j(2)}, \dots, q_{j(k)}\}$  é o ciclo característico de  $Q_n$ .

Observamos que se  $q_r$  é um vértice remanescente de  $Q_n$ , ele estará na e-componente,  $S^r$  de  $H_m$  que contém somente polos do mesmo tipo que  $q_r$  em  $Q_n$ .

Desta observação segue-se que a composição do subtorneio dos polos de  $H_m$  nos dá a composição do subtorneio dos polos de  $Q_n$  e, portanto  $Q_n$  também é normal. ■

De agora em diante  $H_m$  sempre será um torneio hamiltoniano com quociente simples normal  $Q_n$ . Denotaremos por  $a_1, a_2, \dots, a_k$  os vértices do ciclo característico  $A_k$  de  $Q_n$ . Se  $k = cc(Q_n)$  e seja  $h = n - k$  então  $P_h$  é o subtorneio dos polos de  $Q_n$ .

Como sabemos que  $Q_n$  é isomorfo a um subtorneio de  $H_m$ , então podemos denotar  $S^q = H_m[q], \forall q \in Q_n$ , onde  $S^q$  é e-componente de  $H_m$  que contém o vértice  $q$ .

**Corolário 2.25** *Seja  $H_m$  um torneio não simples que tem  $Q_n$  como quociente simples, o qual é normal então temos o seguinte resultado:*

*$H_m$  é normal se, e somente se,  $|H_m[a_i]| = 1, \forall 1 \leq i \leq k$ .*

*Em cada caso, se o vértice  $q$  é um polo de  $Q_n$  então a e-componente  $H_m[q]$  é formada por polos do mesmo tipo que  $q$  em  $Q_n$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Segue imediatamente do teorema acima.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $H_m$  não é normal. Então existem pelo menos dois ciclos minimais  $C$  e  $C'$  do mesmo comprimento, mas distintos. Seja  $P : H_m \rightarrow Q_n$  um epimorfismo. Então  $P(C)$  e  $P(C')$  são dois ciclos minimais de igual comprimento, mas como  $Q_n$  é normal implica que  $P(C) = P(C')$ , logo existe pelo menos um  $a_i \in A_k$  de  $Q_n$  tal que  $|H_m[a_i]| > 1$  o que é uma contradição. Portanto se  $|H_m[a_i]| = 1, \forall 1 \leq i \leq k$  segue que  $H_m$  é normal. ■

Agora com a notação acima, seja  $H_m$  um torneio não normal. Logo

$$\max\{|H_m[a_i]| : 1 \leq i \leq k\} > 1$$

e existem cartas  $H_{m-1}$  de  $H_m$  (basta tomarmos as cartas relativas ao  $a_i \in A_k$  tais que  $|H_m[a_i]| > 1$ ) tais que

$$\sum_{i=1}^k |H_{m-1}[a_i]| = (\sum_{i=1}^k |H_m[a_i]|) - 1$$

e

$$H_{m-1} \langle \cup \{H_{m-1}[v], v \in P_h\} \rangle \simeq H_m \langle \cup \{H_m[v], v \in P_h\} \rangle$$

Pela observação 1.26 segue que cada carta de  $H_m$  tem quociente simples de ordem  $n' \leq n$ .

E disto temos as seguintes observações :

**Observação 2.26** Se  $n \leq m - 2$  então  $H_m$  possui pelo menos duas  $e$ -componentes não triviais ou uma  $e$ -componente com mais que dois vértices, segue disto que todas as cartas de  $H_m$  são não simples.

**Observação 2.27** Se  $n = m - 1$  e como  $\max\{|H_m[a_i]| : 1 \leq i \leq k\} > 1$ , segue que  $\exists 1 \leq j \leq k$  tal que  $|H_m[a_j]| = 2$  e portanto  $H_m$  possui exatamente duas cartas simples e normais, excluindo estas duas cartas as outras serão cartas não simples e não normais.

A partir destas observação seguem dois teoremas.

**Teorema 2.28** Dado  $H_m (m \geq 7)$  um torneio hamiltoniano não simples, seja  $Q_n$  o quociente simples normal e  $n \leq m - 2$ .

Agora, se  $H'_m$  é hipomorfo a  $H_m$  então  $H'_m$  também não é simples.

**Demonstração:** Se  $H_m$  é normal, segue de [10] ou [20] que  $H'_m$  é isomorfo a  $H_m$  e, portanto não é simples.

Suponhamos que  $H_m$  não é normal e como  $H_m$  é hipomorfo a  $H'_m$ , segue que  $H'_m$  não é normal, e existe uma aplicação  $\varphi : H_m \rightarrow H'_m$  tal que  $H_m - u \simeq H'_m - \varphi(u), \forall u \in H_m$ . Em  $H_m$  tomemos  $Q_n$  como sendo o quociente simples o qual é normal, e  $A_k$  o ciclo característico de  $Q_n$ , pelo corolário 2.25 segue que existe  $j \in [1, 2, \dots, k]$  tal que  $|H_m[a_j]| > 1$ . Tomemos  $u \in H_m[a_j]$  e seja  $v = \varphi(u)$  então temos que:

$$\sum_{i=1}^k |(H'_m - v)[a_i]| = \sum_{i=1}^k |(H_m - u)[a_i]| = (\sum_{i=1}^k |H_m[a_i]|) - 1$$

Assim, temos duas possibilidades para a carta  $H'_m - v$ :

1)  $H'_m - v$  não é normal. Então pelo corolário 2.25 existe  $S^i = (H'_m - v)[a_i]$  uma  $e$ -componente não trivial de  $H'_m - v$ . Vamos dividir novamente em dois casos:

1.1) Se  $v$  projeta  $S^i$ , neste caso a  $e$ -componente  $S^i$ , não se decompõe em  $H'_m$  e como  $S^i$  é uma  $e$ -componente não trivial segue que  $H'_m$  não é simples.

1.2) Agora se  $v$  não projeta  $S^i$ . Afirmamos que  $v$  não pode projetar  $H'_m - \{S^i \cup v\}$ . Suponhamos por absurdo que  $v$  projeta  $H'_m - \{S^i \cup v\}$ . Como  $v$  não projeta  $S^i$  segue que existe  $s' \in S^i$  tal que  $v$  não projeta  $H'_m - \{v; s'\}$ , o qual ainda possui  $Q_n$  como quociente simples. Agora pela observação 1.26, segue que o quociente simples de  $H'_m - s' = H'_m - \{v; s'\} \cup \{v\}$  não pode ter ordem maior que  $n$ , e pelo lema 1.25, segue que uma das  $e$ -componente de  $H'_m - s'$  é  $S \cup v$

onde  $S$  é uma e-componente de  $H'_m - \{s'; v\}$  e as outras e-componentes de  $H'_m - s'$  são as e-componentes restantes de  $H'_m - \{s'; v\}$ .

Se removermos um vértice  $x \in S$ , o subtorneio  $H'_m - \{x; s'\}$  continuará possuindo  $Q_n$  como quociente simples. No entanto, devido ao fato de  $s'$  não poder voltar a  $S^i$ , já que  $v$  não o projeta, segue que a ordem do quociente simples da carta  $H'_m - x$  deverá ter ordem  $n' > n$ , o que é um absurdo pelo lema 1.25, donde segue a nossa afirmação .

*Dado  $s \in S^i$  um vértice tal que  $s \rightarrow v$  ( $v \rightarrow s$ ) se  $i = 1$  ( $i = k$  respectivamente).*

Observe que  $H'_m - \{v; s\}$  também possui  $Q_n$  como quociente simples (pois  $S^i$  não é trivial) e repetindo o raciocínio acima temos que  $v$  é vértice equivalente de alguma e-componente  $S$  de  $H'_m - \{v; s\}$ .

Em primeiro lugar a e-componente  $S$  não pode ser  $(H'_m - \{v; s\})[z]$ , com  $z \in P_h$ , pois se fosse a carta  $H'_m - s$  que possui  $Q_n$  como quociente simples e teríamos

$$\sum_{i=1}^k |(H'_m - s)[a_i]| = \sum_{i=1}^k |(H_m - \psi^{-1}(s))[a_i]| = (\sum_{i=1}^k |(H_m)[a_i]|) - 2$$

mas isto é impossível. (obs: esta igualdade ocorre pois  $v$  saiu a princípio de uma e-componente de  $(H'_m)[a_i]$  e  $s$  também).

Agora se  $S = (H'_m - \{v; s\})[a_j]$ , ( $j \neq i$ ).

Afirmação : Neste caso  $s$  projeta  $S \cup v$ , o qual é uma não trivial e-componente de  $H'_m$ , e, portanto não é simples.

Suponhamos por absurdo que  $s$  não projeta  $S \cup v$ . Isto implica que existe  $t \in S$  e  $s$  não projeta  $H'_m - \{t; s\}$  (o qual tem quociente simples igual a  $Q_n$ ) e como  $s$  não é um vértice equivalente para nenhuma e-componente de  $H'_m - \{t; s\}$ , segue pelo lema 1.25 que o quociente simples de  $H'_m - t$  terá ordem  $n' > n$  o que é um absurdo.

Finalmente, se  $S$  for  $S^i - s$  também teríamos  $H'_m$  não simples pois teríamos a e-componente  $S \cup v$  que é não trivial.

- 2)  $H'_m - v$  é normal, então não só sabemos que  $|H_m[a_i]| > 1$  mas também que  $|H_m[a_i]| = 2$ , e seja  $u' \in H_m[a_i]$  tal que  $u' \neq u$ . Logo  $H'_m - v \simeq H_m - \varphi^{-1}(v) \simeq H_m - u' \simeq H'_m - \varphi(u')$  e, portanto  $H'_m$  possui exatamente duas cartas normais.

Utilizando o fato de  $n \leq m - 2$  sabemos que existe pelo menos um polo  $z \in P_h$

de  $Q_n$  tal que  $Z = (H'_m - v)[z]$  é uma e-componente não trivial, constituída, pelo corolário 2.25, de polos do mesmo tipo de  $z$  em  $H'_m - v$ .

Então temos duas possibilidades para a e-componente  $Z$ :

2.1) Se  $v$  projeta  $Z$ , então  $Z$  é uma e-componente de  $H'_m$ , o qual portanto não é simples.

2.2) Se  $v$  não projeta  $Z$ . Afirmamos então que  $v$  também não projeta  $H'_m - \{v \cup Z\}$ .

Suponhamos por absurdo que  $v$  projeta  $H'_m - \{v \cup Z\}$ . Logo existe  $x' \in Z$  tal que  $v$  não projeta  $H'_m - \{v; x'\}$  o qual possui  $Q_n$  como quociente simples. Nenhum vértice de  $Q_n$  projeta  $A_k \subseteq H'_m - \{v \cup Z\}$ , mas  $v$  o projeta e portanto  $v$  não pode ser vértice equivalente de nenhuma e-componente de  $H'_m - \{x'; v\}$ . Assim, pelo lema 1.25 segue que o quociente simples de  $H'_m - x'$  tem ordem  $n' > n$ , o que é um absurdo. Donde segue a afirmação .

Tomemos  $x \in Z$  tal que  $v \rightarrow x$  (respec.  $x \rightarrow v$ ) se  $Z$  é um polo do tipo  $x_1$  ( respec.  $x_{k-1}$ ) em  $H'_m - v$ .

Observe que  $Q_n$  é o quociente simples de  $H'_m - \{v; x\}$  logo pelo lema 1.25, segue que  $v$  é vértice equivalente de alguma e-componente, digamos  $S$  de  $H'_m - \{v, x\}$ .

$S$  não pode ser  $Z - x$ , pois se  $S = Z - x$  então  $H'_m$  seria normal contrariando a nossa hipótese.

$S$  não pode ser  $Z' = (H' - M - \{v; x\})[p']$  com  $p'$  um polo de  $Q_n$ , pois neste caso teríamos novamente  $H'_m$  normal.

Portanto  $S$  deve ser  $(H'_m - \{v; x\})[a_i] = \{a_i\}$  para algum  $i$ , com  $1 \leq i \leq k$ . Neste caso afirmamos que  $x$  projeta  $\{v, a_i\}$ , e portanto  $H'_m$  não é simples.

Suponhamos por absurdo que  $x$  não projeta  $\{v, a_i\}$ , sabemos que  $Q_n$  é o quociente simples de  $H'_m - \{v; a_i\}$ , logo pelo lema 1.25 o vértice  $x$  é um vértice equivalente de alguma e-componente de  $H'_m - \{x; a_i\}$ , digamos  $S'$ .

Se a e-componente  $S'$  for  $(H'_m - \{x; a_i\})[z']$  para algum  $z' \in P_h$ , então  $z' \neq z$ , pois  $v$  projeta  $Z$ , então  $H'_m - a_i$  é uma carta normal que não é isomorfa a  $H'_m - v$ .

Se a e-componente  $S'$  for  $(H'_m - \{x; a_i\})[a_j]$ , com  $j \neq i$ , então temos duas cartas, a saber,  $H'_m - x$  e  $H'_m - a_i$  que possuem  $Q_n$  como quociente simples e

verificam a seguinte condição

$$\Sigma_{i=1}^k |(H'_m - x)[a_i]| = \Sigma_{i=1}^k |(H_m - a_i)[a_i]| = k + 1$$

( $a_i$  deve ser trocado por  $v$  em  $H'_m - a_i$ ) e os subtorneios  $\cup\{(H'_m - x)[a_r] : 1 \leq r \leq k\}$  e  $\cup\{(H'_m - a_i)[a_r] : 1 \leq r \leq k\}$  não são isomorfos.

Agora se a e-componente  $S'$  for  $(H'_m - \{x; a_i\})[v]$ , então  $x$  e  $a_i$  são vértices equivalentes em  $H'_m - v$ .

No entanto nenhuma destas possibilidades podem ocorrer no conjunto das cartas de  $H'_m$ .

E isto conclui a demonstração . ■

**Teorema 2.29** *Seja  $H_m (m \geq 7)$  um torneio hamiltoniano tendo  $Q_n$  como quociente simples normal e  $n = m - 1$ . Se  $H'_m$  é hipomorfo a  $H_m$ , então  $H'_m$  é também não simples.*

**Demonstração:** Novamente por [10] ou [20] temos que se  $H_m$  é normal então  $H_m \simeq H'_m$  e, portanto  $H'_m$  também não é simples.

Logo podemos supor que  $H_m$  não é normal, e assim  $H'_m$  também não é normal. Vamos dividir a discussão em dois casos:

1. Se  $k \leq n - 3$ , consideremos uma carta de  $H'_m$  que seja não simples, digamos  $H'_m - v$ , com o torneio  $Q_n$  como quociente simples o qual é normal e possui  $A_k$  como ciclo característico.

Denotemos por  $A = \cup\{H'_m[a_i] : a_i \in A_k\}$ .

Sabemos que existe exatamente uma e-componente de  $H'_m - v$  relativo a algum vértice de  $A_k$  que possui exatamente dois vértices, digamos  $a$  e  $a'$ .

Se  $v$  projeta  $\{a, a'\}$ , então  $\{a, a'\}$  é uma e-componente de  $H'_m$  o qual não é portanto simples.

Agora se  $v$  não projeta  $\{a, a'\}$ , então sem perda de generalidade podemos supor que  $a' \rightarrow v \rightarrow a$  e vamos novamente dividir em dois casos:

- (a) Se  $v$  não projeta  $A - \{a, a'\}$ , então os torneios  $H'_m - \{v, a\}$  e  $H'_m - \{v, a'\}$  possuem o mesmo quociente simples e possui as mesmas e-componentes que

$H'_m - v$ , exceto é claro pela e-componente  $\{a, a'\}$  a qual foi substituída por  $\{a\}$  e por  $\{a'\}$  respectivamente.

Dadas as cartas hamiltonianas  $H'_m - a$  e  $H'_m - a'$ , afirmamos que ambas não podem ser simples.

Suponhamos por absurdo que ambas fossem simples e normais. Pela observação 2.27 teríamos que ambas seriam isomorfas, e além disso  $cc(H'_m - a) = k = cc(H'_m - a')$  ( $A - a$  e  $A - a'$  são seus ciclos característicos, respectivamente) mas como  $v$  possui diferentes relações com  $a$  e  $a'$  e portanto  $v$  é um polo em  $H'_m - a$  e outro em  $H'_m - a'$ , pelo teorema 2.22, segue que  $H'_m - a$  não é isomorfo a  $H'_m - a'$ , o que é um absurdo. E portanto pelo menos uma destas cartas não é simples. Sem perda de generalidade podemos supor que  $H'_m - a$  não é simples, ou seja, possui pelo menos uma e-componente não trivial, digamos  $S$ . Se  $v \in S$  então  $H'_m - a$  seria não simples e normal o que é um absurdo pela observação 2.27, logo  $v \notin S$ .

Consequentemente a e-componente  $S$  está contida em alguma e-componente de  $H'_m - v$  a qual é uma e-componente de  $H'_m$  e, portanto, não é simples.

(b) Se  $v$  projeta  $A - \{a, a'\}$ , podemos então assumir sem perda de generalidade que  $v$  não projeta  $A - a'$ . Vamos abrir novamente em dois casos:

- i. Se  $H'_m - a'$  não é simples, pela discussão acima sabemos que  $H'_m$  também não será simples;
- ii. Se  $H'_m - a'$  for simples, então esta é uma das duas cartas isomorfas e normais, além disso possui  $\{a_1, a_2, \dots, a, \dots, a_k\}$  como ciclo característico. Portanto,  $v$  deve ser um polo de  $H' - a'$ . Afirmamos que  $v$  não pode projetar  $T^*r_{k+1}(T^0, T^1, \dots, T^k)$  dos vértices de  $H'_m - v$  os quais são os polos de  $Q_n$ . Suponhamos por absurdo que  $v$  projeta  $T^*r_{k+1}(T^0, T^1, \dots, T^k)$  então ou  $v \cup T^0$  ou  $v \cup T^k$  deve ser uma e-componente do torneio  $H'_m - a'$ , o qual portanto não é simples, o que é um absurdo.

Podemos assumir que  $(A - a) \rightarrow v \rightarrow p$ , onde  $p \in H'_m$  é um polo de  $Q_n$ . Seja  $C = (A - a) \cup \{p\}$  um ciclo não projetado de  $H'_m - a$ . Portanto, os subciclos  $C - p$  (projetado por  $v$ ) e  $C - a_1$  (projetado por  $x_1$ ), se  $p$  não é do tipo  $x_1$ , ou  $C - a_k$  (projetado por  $x_{k-1}$ ) se  $p$  não é do tipo  $x_{k-1}$ ; naturalmente denotaremos  $a' = a_i$ , se  $a_{i-1} \rightarrow a \rightarrow a_{i+1}$  (onde  $i - 1$  e  $i + 1$  se necessário são tomadas módulo  $k$ )

Em cada caso,  $C$  é um ciclo minimal não projetado de ordem  $k - 1$ , o que contradiz a hipótese, desde que as cartas de  $H_m$  possuem um ou dois ciclos minimais não projetados de ordem  $k$ , mas não um ciclo minimal de ordem  $k - 1$ . Isto completa a demonstração para o caso  $k \leq n - 3$ .

2. Se  $k = n - 2$ , como  $n = m - 1$  e  $m \geq 7$  segue que  $k = n - 2 = (m - 1) - 2 = m - 3 \geq 4$ .

Seja  $Q_n = H'_m - v$  uma das cartas normais e simples. Então  $H'_m - \{v, x_1\}$  é simples, desde que  $k \geq 4$ . De fato, se existe uma e-componente  $D$  de  $Q_n = H'_m - v$  tal que  $|D| \geq 2$ , vamos dividir a nossa análise em 2 casos:

- (a) Se  $a_i, a_j \in D$  com  $i < j$ , então temos o seguinte  $a_j \rightarrow a_{j+1} \rightarrow a_i$  e disto segue que  $a_{i-1}, a_{j+1} \in D$  e, por indução, segue que  $a_r \in D$ ,  $\forall 1 \leq r \leq i, j \leq r \leq k$ . Além disso,  $\forall i + 2 \leq r \leq j - 2$  teremos  $a_{j-2} \rightarrow a_{j-1} \rightarrow a_1$ , então  $a_r \in D$ . Finalmente  $a_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow a_{i+2}, a_{j-2} \rightarrow a_{j-1} \rightarrow a_j$  disto segue que  $a_{i+1}, a_{j-1} \in D$  e portanto  $A_k \subseteq D$  e consequentemente  $x_{k-1} \in D$ .
- (b) Se  $a_i, x_{k-1} \in D$  e  $i \neq j$ , então temos  $x_{k-1} \rightarrow a_{i-1} \rightarrow a_i$  e logo  $a_{i-1} \in D$  e consequentemente  $a_r \in D$ ,  $\forall 1 \leq r \leq k$ . Se  $i = 1$ , como  $k \geq 4$  temos  $x_{k-1} \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$ , então  $a_3 \in D$  e novamente  $A_k \subseteq D$ .

Como ambos os casos são impossíveis, segue que  $H'_m - \{v, x_1\}$  é simples e hamiltoniano.

Além do mais,  $v$  não pode projetar  $H'_m - \{v, x_1\}$ . De fato, se  $v$  projetasse, teríamos um dos seguintes casos:

- Se  $x_1 \rightarrow v \rightarrow H'_m - \{v, x_1\}$ , teríamos  $\nu(H'_m) \geq 5$ , a saber,  $x_1, a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k-1}$ ;
- Se  $H'_m - \{v, x_1\} \rightarrow v \rightarrow x_1$ , teríamos somente um vértice neutro, a saber,  $v$ .

No entanto, sabemos pela observação 1.23 que o número de vértices neutros é uma propriedade hipomorfa, mas  $\nu(H_m) = 4$ , e portanto não é possível nenhum dos casos anteriores. Donde segue que  $v$  não pode projetar  $H'_m - \{v, x_1\}$ .

Suponhamos agora que  $H'_m$  seja simples. Consideremos a carta  $H'_m - x_1$ .

Se  $H'_m - x_1$  não for simples, pelo lema 1.25 segue que existe somente uma e-componente trivial em  $H'_m - x_1$ , da forma  $\{v, u\}$ , onde  $u$  é um vértice apropriado de  $H'_m - \{v, x_1\}$ . Vamos analisar todos os tipos possíveis que  $u$  poderia assumir:

- Se  $u = x_{k-1}$ , como  $H'_m$  é simples, segue que  $x_1 \rightarrow v \rightarrow x_{k-1}$  e  $H'_m - x_{k-1}$  será uma carta simples que não é normal de  $H_m$ ;
- Se  $u = a_i, i \neq 1$ , segue que  $a_i \rightarrow x_1$  e  $x_1 \rightarrow v$  e desde que  $H'_m$  é simples, segue que  $\nu(H'_m) \geq 5$ , os quais são  $x_1, x_k, a_i, v, a_1$ ;
- Se  $u = a_1$ , segue que  $x_1 \rightarrow a_1$  e  $v \rightarrow x_1$ , desde que  $H'_m$  é simples. Então  $\nu(H'_m) = 3$ , os quais são  $x_{k-1}, x_1, v$ .

Nenhum desses três casos são possíveis, donde segue que  $H'_m - x_1$  é simples.

De maneira similar se mostra que  $H'_m - x_{k-1}$  é simples (de fato, basta considerar o torneio dual de  $H'_m$ ).

Logo  $H'_m$  deverá ter no mínimo três cartas simples, o que é um absurdo.

E portanto podemos concluir que  $H'_m$  não é simples.

E isto conclui a demonstração deste teorema. ■

**Teorema 2.30** *Dado  $H_m, (m \geq 7)$  um torneio hamiltoniano que possui quociente simples normal  $Q_n$  e dado  $H'_m$  um outro torneio hamiltoniano que é hipomorfo a  $H_m$ , então  $H'_m$  também possui  $Q_n$  como quociente simples.*

**Demonstração:** Se  $H_m$  é normal, por [10] ou [20] segue que  $H_m \simeq H'_m$  e, portanto eles têm o mesmo quociente simples  $Q_n$ .

Se  $H_m$  não é normal, mas possui como quociente simples um torneio normal, então pelos dois teoremas anteriores, temos que  $H'_m$  também não é simples. Daí segue do teorema 1.27, que  $H_m$  e  $H'_m$  têm o mesmo quociente simples. ■

## Capítulo 3

# Problema da Reconstrução

A conjectura que afirmava que os torneios eram reconstrutíveis por suas cartas foi primeiramente considerada por Harary e Palmer em 1967 em [15]. Na época eles conheciam os contra exemplos de ordem 3 e 4, mas acreditavam que os torneios de ordem  $n \geq 5$  não altamente conexos eram reconstrutíveis. Mais tarde em 1970 contra exemplos de ordem 5 e 6 foram publicados por Beineke e Parker em [2]. Posteriormente, a conjectura da reconstrutibilidade foi admitida como verdadeira para torneios de ordem 7, mas contra exemplos de ordem 8 foram encontrados em 1975.

Apesar destes contra exemplos, havia a esperança de que a conjectura fosse verdadeira para torneios de ordem suficientemente altas.

É nesta época (1977) que surgiu o artigo de Stockmeyer[21] que exibiu contra exemplos de ordens  $2^n + 1$ ,  $n \geq 1$  e  $2^m + 2$ ,  $m > 1$ , mostrando definitivamente que a conjectura de reconstrução para torneios era falsa.

Devido a importância deste artigo no problema de reconstrução para a teoria de torneios resolvemos acrescentá-lo a este texto. Fica o(a) leitor(a) convidado(a) a lê-lo devido a sua grande importância, entretanto ele é dispensável para a compreensão do argumento principal deste texto.

### 3.1 Falsidade da Conjectura de Reconstrução para Torneios

Antes de mais nada é preciso que se diga ao leitor(a) que omitimos alguns detalhes que se encontram no artigo, preservando o objetivo de simplesmente verificar que os torneios

exibidos são realmente contra exemplos.

Vamos agora introduzir duas novas funções que utilizaremos para descrever os contra exemplos. Para cada inteiro  $k \neq 0$  definamos  $\text{pow}(k)$  como o maior inteiro positivo  $i$ , tal que  $2^i$  divide  $k$ , que denotaremos por  $2^i | k$ , e  $\text{odd}(k) = \frac{k}{2^{\text{pow}(k)}}$ .

**Exemplo 3.1** Se  $k = 48 = 2^4 \cdot 3$  então

$$\text{pow}(k) = 4,$$

$$\text{odd}(k) = 3.$$

Além disso temos que  $\text{odd}(-1) = -1$ ,  $\text{pow}(-1) = 0$  e  $\text{odd}(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$

### 3.1.1 Score de um torneio

**Definição 3.2** Dado um torneio  $T_n$ ,  $n \geq 2$  para cada vértice  $v_i \in V$  podemos associar um inteiro positivo  $m_i$  que é o número de vértices que são sucessores de  $v_i$ , ou seja,  $m_i = |\{v_j \in V : v_i \rightarrow v_j\}|$ , e fazendo isto para todos os vértices obtemos a seguinte sequência  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  que chamamos de **score** do torneio e cada  $m_i$  é o **score** do vértice  $v_i$ ,  $i \geq 1$ .

**Observação 3.3** É costume, reordenar esta sequência de tal forma que ela se torne uma sequência não decrescente, entretanto neste texto não iremos obedecer este costume deixando na mesma ordem que aparecem os vértices.

Apesar de não discutirmos muito sobre as propriedades do score de um torneio previnimos o leitor(a) que existem diversos resultados importantes tendo como base este conceito. Ao leitor(a) interessado sugerimos a leitura de [16] e [3].

Sobre score de um torneio utilizaremos apenas o seguinte resultado.

**Proposição 3.4** Sejam  $T_n$  e  $T'_n$  dois torneios. Se existir um  $F : T_n \rightarrow T'_n$  um isomorfismo de torneios e dados  $a \in V(T_n)$  e  $b \in V(T'_n)$  tais que  $F(a) = b$ , então o score do vértice  $a$  é igual ao score do vértice  $b$ .

**Demonstração:** Observe que se pegarmos um vértice  $a \in T_n$  que é predecessor de digamos  $j$  outros vértices, logo  $b = F(a) \in T'_n$  vai ser também predecessor de  $j$  vértices em  $T'_n$ , os detalhes deixamos para o leitor(a). ■

### 3.1.2 Torneios $M_n$

Todos os contra exemplos que iremos construir possuem como base os torneios da seguinte família:

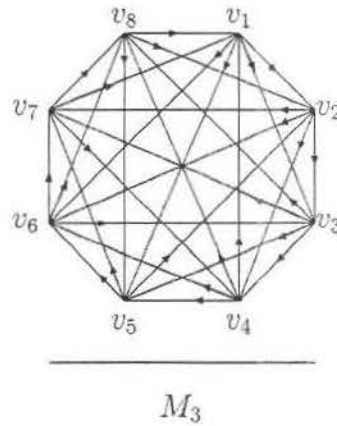
**Definição 3.5** Para cada inteiro positivo  $n$ , o torneio  $M_n$ , com  $V(M_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , onde  $p = 2^n$  e os arcos satisfazem o seguinte:

$$v_i \rightarrow v_j \Leftrightarrow \text{odd}(j - i) \equiv 1 \pmod{4}, \forall i \neq j$$

**Observação 3.6** Sabemos que se  $i \neq j$  seguem as seguintes equivalências  $\text{odd}(j - i) \not\equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow \text{odd}(j - i) \equiv -1 \pmod{4} \Leftrightarrow -\text{odd}(j - i) \equiv \text{odd}(i - j) \equiv 1 \pmod{4}$  e destas equivalências podemos concluir que  $v_i \not\rightarrow v_j \Leftrightarrow v_j \rightarrow v_i$  e isto garante que  $M_n$  está bem definido.

**Observação 3.7** Note que para  $n \geq 2$ , os subtorneios gerados pela primeira metade e pela segunda metade dos vértices são ambos isomorfos a  $M_{n-1}$ .

**Exemplo 3.8**



Demonstraremos algumas propriedades de  $M_n$  que em breve serão muito úteis.

**Lema 3.9** Seja  $M_n$ ,  $n \geq 1$  como definido acima, então temos o seguinte:

- a) Os primeiros  $2^{n-1}$  vértices de  $M_n$  têm score  $2^{n-1}$ , o restante  $2^{n-1}$  dos vértices possuem score igual  $2^{n-1} - 1$ ;

b) Os torneios  $M_n$  têm somente a identidade como automorfismo.

**Demonstração:** a) Para cada inteiro  $1 \leq i \leq 2^n$  fixo, o vértice  $v_i \in M_n$  é predecessor de um dos seguintes vértices  $v_j$  ou  $v_{2i-j}$  (exclusivamente), onde  $j \neq i$  e  $j \neq i + \frac{p}{2}$  (onde, se necessário podemos reduzir mod  $2^n$ ), isto ocorre pois

$$v_i \rightarrow v_j \Leftrightarrow \text{odd}(j - i) \equiv 1 \pmod{4}$$

ou

$$v_i \rightarrow v_{2i-j} \Leftrightarrow \text{odd}(2i - j - i) \equiv \text{odd}(i - j) \equiv -\text{odd}(j - i) \equiv 1 \pmod{4}$$

e, pela observação 3.6 sabemos que apenas um destes casos ocorre, logo  $v_i$  contribui com  $\frac{(2^n-2)}{2} = 2^{n-1} - 1$  e agora vamos mostrar que para  $i \leq 2^{n-1}$  temos  $v_i \rightarrow v_{i+\frac{p}{2}}$ , pois

$$\text{odd}(i + \frac{p}{2} - i) \equiv \text{odd}(\frac{2^n}{2}) \equiv 1 \pmod{4}$$

e, portanto os primeiros  $2^{n-1}$  vértices possuem score igual  $\frac{(2^{n-1}-2)}{2} + 1 = 2^{n-1}$  e os seguintes  $2^{n-1}$  possuem score igual à  $2^{n-1} - 1$ .

b) Vamos demonstrar por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  o resultado é obviamente verdadeiro pois  $M_1 \simeq T_2$ .

Agora para  $n \geq 2$ , a hipótese de indução nos garante que para todo  $M_l, 1 \leq l < n$ ,  $M_l$  possui um único automorfismo, isto é, a identidade. Agora pela letra a) deste lema, concluímos que qualquer automorfismo de  $M_n$  leva os primeiros  $2^{n-1}$  vértices neles mesmos e o mesmo ocorre com os  $2^{n-1}$  vértices restantes, pois automorfismos preservam score.

Da observação 3.7, sabemos que estes dois subtorneios de  $M_n$  são isomorfos a  $M_{n-1}$ , e pela hipótese de indução podemos concluir que existe apenas um automorfismo de  $M_n$ , e isto completa a demonstração. ■

**Teorema 3.10** Para cada inteiro  $k, 1 \leq k \leq 2^n$ , os torneios  $M_n - v_k$  e  $M_n - v_{p+1-k}$  são isomorfos.

**Demonstração:** Para cada inteiro  $i \neq k$ , seja  $p_i = \text{pow}(k - i)$  e  $r_i \equiv i \pmod{2^{p_i+1}}$ . Definamos  $i'$  por  $i' = i + 2^{p_i+1} + 1 - 2r_i$  (reduzindo módulo  $2^n$  quando necessário). Seja

$$\phi : A_n - v_k \longrightarrow A_n - v_{p+1-k}$$

tal que  $\phi(v_i) = v_{i'}$ .

Agora precisamos mostrar que esta aplicação é um isomorfismo de torneios, ou seja, que  $\phi$  é uma aplicação bijetora e que é um homomorfismo de torneios.

A) Agora demonstraremos que  $\phi$  é um homomorfismo de torneios. Sejam  $i$  e  $j$  dois inteiros distintos e diferentes de  $k$ , vamos dividir em dois casos:

- i) Se  $\text{pow}(k - i) = \text{pow}(k - j) = p$ , segue que existem dois inteiros  $m_1$  e  $m_2$  tais que  $k - i = 2^p(2m_1 + 1)$  e que  $k - j = 2^p(2m_2 + 1)$  e, como sabemos que  $r_i \equiv i \pmod{2^{p+1}}$  e  $r_j \equiv j \pmod{2^{p+1}}$  e  $1 \leq r_i, r_j \leq 2^{p+1} - 1$ .

Disto segue que  $k - r_i \equiv k - i \pmod{2^{p+1}}$  e  $k - r_j \equiv k - j \pmod{2^{p+1}}$  e temos

$$(r_j - r_i) \equiv (k - i) - (k - j) \equiv 2^{p+1}(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2^{p+1}}$$

e isto implica que  $r_i = r_j$ . Como temos que  $i' = i + 2^{p_i+1} + 1 - 2r_i$  e  $j' = j + 2^{p_j+1} + 1 - 2r_j$ , fazendo a diferença destas duas equações obtemos que

$$\text{odd}(j' - i') = \text{odd}(j - i).$$

Portanto  $v_i \rightarrow v_j \Leftrightarrow v_{i'} \rightarrow v_{j'}$ .

- ii) Se  $\text{pow}(k - i) \neq \text{pow}(k - j)$ , podemos assumir sem perda de generalidade que  $\text{pow}(k - i) = p_i > p_j = \text{pow}(k - j)$ , e neste caso temos as seguintes igualdades:

$$\text{pow}(j - i) = \text{pow}(r_j - r_i) = p_j$$

pois  $2^{p_j} | (k - i)$  e  $2^{p_j} | (k - j)$  e isto implica que  $p_j$  é a maior potência de 2 tal que  $2^{p_j}$  divide  $j - i = (k - i) - (k - j)$  e, portanto  $\text{pow}(j - i) = p_j$ . Além disso, como  $r_i \equiv i \pmod{2^{p_i+1}}$  e  $r_j \equiv j \pmod{2^{p_j+1}}$  segue que existem  $a, b$  inteiros tais que

$$r_i = i + a2^{p_i+1}$$

e

$$r_j = j + b2^{p_j+1}$$

donde segue que

$$r_j - r_i = j - i + 2^{p_j+1}(b + a2^{p_i-p_j})$$

e temos que  $p_j$  é a maior potência de 2 que divide  $r_j - r_i$  e, portanto  $\text{pow}(r_j - r_i) = p_j$ . Além disso,  $r_j - r_i = 2^{p_j}(2m + 1)$  para algum inteiro  $m$ , e disto segue que

$$j' - i' = j - i + 2^{p_j+1} - 2^{p_i+1} - 2(r_j - r_i)$$

$$\begin{aligned}
&= j - i - 2^{p_j+1}(2^{p_i-p_j} - 1) - 2[2^{p_j}(2m+1)] \\
&= j - i - 2^{p_j+1}(2^{p_i-p_j} - 2m)
\end{aligned}$$

e dividindo por  $2^{p_j}$  obtemos

$$\text{odd}(j' - i') = \text{odd}(j - i) - 4(2^{p_i-p_j-1} - m)$$

e, isto implica que

$$\text{odd}(j' - i') = \text{odd}(j - i) \pmod{4}.$$

Portanto,  $v_i \rightarrow v_j \Leftrightarrow v_{i'} \rightarrow v_{j'}$

**B)** Para mostrarmos que  $\phi$  é bijetora basta mostrarmos que é uma aplicação injetora, pois  $|M_n - v_k| = |M_n - v_{p+1-k}| = p - 1$ .

Suponhamos por absurdo que  $\phi$  não é injetora. Logo existem  $i \neq j$  tal que  $i' = j'$ , mas em ambos os casos acima analisados temos  $0 \equiv \text{odd}(i' - j') \equiv \text{odd}(j - i) \pmod{4}$  mas isto implica que  $4 | \text{odd}(j - i)$  e, portanto  $\text{odd}(j - i) = 0$ . Então  $j - i = 0$  o que é um absurdo, o qual nasceu exatamente por supor que  $\phi$  não era injetora.

Segue de A) e B) que  $\phi$  é um isomorfismo de torneios. ■

Estabelecido estes resultados vamos construir os contra exemplos de ordem  $2^n + 1$ ,  $n \geq 1$ .

### 3.1.3 Contra Exemplos de Ordem $2^n + 1$

**Definição 3.11** Para cada inteiro positivo  $n$ , o torneio  $B_n$  é obtido adicionado o vértice  $v_0$  ao torneio  $M_n$  satisfazendo as seguintes relações

$$(v_1, v_3, \dots, v_{p-1}) \rightarrow v_0 \rightarrow (v_2, v_4, \dots, v_p)$$

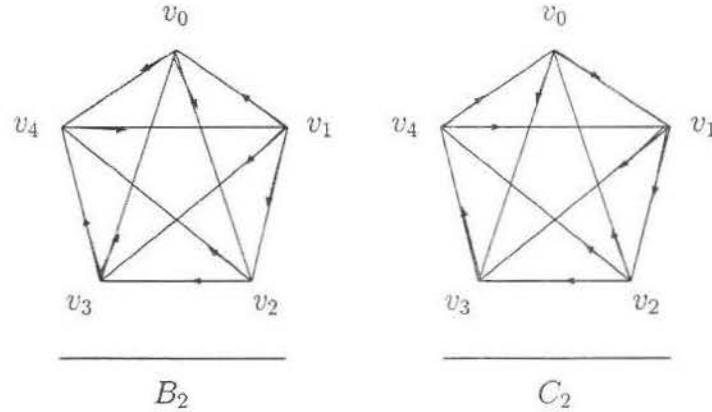
e os torneios  $C_n$  são obtidos de  $M_n$  adicionando um vértice  $v'_0$  que satisfaz as seguintes relações

$$(v_2, v_4, \dots, v_p) \rightarrow v'_0 \rightarrow (v_1, v_3, \dots, v_{p-1})$$

Os vértices de  $C_n$  irão aparecer com um apóstrofo para diferenciá-los dos vértices de  $B_n$ .

**Teorema 3.12** *Os torneios  $B_n$  e  $C_n$  não são isomorfos.*

**Demonstração:** A demonstração será por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  temos que  $B_1 = Tr_3$  e  $C_1 = H_3$  que obviamente não são isomorfos. Para  $n = 2$ , temos os seguintes torneios.



Logo se existir  $\omega : B_2 \rightarrow C_2$  um isomorfismo de torneios, o qual preservará score, temos  $\omega(v_1) = v'_2$  e  $\omega(v_4) = v'_3$ , como  $v_4 \rightarrow v_1$  segue do fato de  $\omega$  ser um isomorfismo que  $\omega(v_4) \rightarrow \omega(v_1)$  o que é um absurdo pois  $v'_2 \rightarrow v'_3$ . Portanto, tal isomorfismo não pode existir.

Para  $n \geq 3$ , lembrando o lema 3.9 e observando  $B_n$  percebemos que os vértices que possuem score igual a  $2^{n-1} + 1$  são  $(v_1, v_3, \dots, v_{\frac{n}{2}-1})$ , os quais geram um subtorneio em  $B_n$  que denotaremos por  $T$  e pelo mesmo motivo em  $C_n$  os vértices que possuem score igual a  $2^{n-1} + 1$  são  $v'_2, v'_4, \dots, v'_{\frac{n}{2}}$  e, estes vértices geram um torneio que denotaremos por  $T'$ .

Suponhamos por absurdo  $\Psi : B_n \rightarrow C_n$  é um isomorfismo de torneios. Então pelo fato de isomorfismos preservarem score, teríamos que  $\Psi$  é a extensão de algum isomorfismo de  $T$  em  $T'$ .

Sejam as aplicações  $\sigma : T \rightarrow M_{n-2}$  com  $\sigma(v_i) = v_{\frac{i+1}{2}}$  e  $\tau : T' \rightarrow M_{n-2}$  com  $\tau(v'_i) = v_{\frac{i}{2}}$ . Como sabemos que  $|T| = |T'| = |M_{n-2}|$ , é imediato pela definição de  $\sigma$  e  $\tau$  que estas aplicações são injetoras e portanto bijetoras. Vamos mostrar que são também homomorfismos de torneios. Para isto, sejam  $v_i, v_j \in T$ . Logo são números ímpares, ou seja, existem  $k_1$  e  $k_2$  inteiros tais que  $i = 2k_1 + 1$  e  $j = 2k_2 + 1$  e, temos o seguinte

$$v_i \rightarrow v_j \Leftrightarrow \text{odd}(j - i) \equiv \text{odd}(2(k_2 - k_1)) \equiv 1 \pmod{4}.$$

Mas

$$\text{odd}(2(k_2 - k_1)) \equiv \text{odd}(k_2 - k_1) \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow v_{\frac{i+1}{2}} \rightarrow v_{\frac{j+1}{2}}$$

Portanto,  $\sigma$  é um homomorfismo de torneios. Com raciocínio análogo se mostra que  $\tau$  também o é. Segue que tanto  $\sigma$  como  $\tau$  são isomorfismos e suas inversas também o são.

Seja  $\tau^{-1} \circ \sigma : T \rightarrow T'$  tal que  $\tau^{-1} \circ \sigma(v_i) = v'_{i+1}$  que é obviamente um isomorfismo. Vamos mostrar que este é o único isomorfismo entre  $T$  e  $T'$ .

Suponhamos por absurdo que exista um outro isomorfismo  $\theta : T \rightarrow T'$ , tal que  $\theta \neq \tau^{-1} \circ \sigma$ .

Observe que o seguinte isomorfismo

$$\tau \circ \theta \circ \sigma^{-1} : M_{n-2} \rightarrow M_{n-2}.$$

Pelo item b) do lema 3.9 temos que  $\tau \circ \theta \circ \sigma^{-1} = id$  e compondo por  $\tau^{-1}$  e  $\sigma$  obtemos que  $\theta = \tau^{-1} \circ \sigma$  o que é um absurdo. Donde segue que  $\tau^{-1} \circ \sigma$  é o único isomorfismo entre  $T$  e  $T'$ .

Agora utilizaremos um argumento semelhante, só que olhando para os vértices de  $B_n$  e  $C_n$  com score igual  $2^{n-1} - 1$ . Obteremos com um raciocínio análogo que existe apenas um isomorfismo entre o subtorneio de  $B_n$  e o subtorneio de  $C_n$  que possuem score igual a  $2^{n-1} - 1$ , e este isomorfismo leva  $v_p$  em  $v'_{p-1}$ . Além disso,  $\Psi$  é necessariamente uma extensão destes dois isomorfismos.

Agora  $v_p \rightarrow v_1$  e  $v'_2 \rightarrow v'_{p-1}$ , mas  $\Psi(v_p) = v'_{p-1} \rightarrow \Psi(v_1) = v'_2$ , o que é um absurdo. Este absurdo surgiu devido ao fato de admitirmos a existência de tal isomorfismo o que demonstra o teorema. ■

Vamos mostrar que  $B_n$  e  $C_n$  são hipomorfos, e portanto são os contra exemplos procurados.

**Teorema 3.13** *Os torneios  $B_n - v_0$  e  $C_n - v_0$  são isomorfos e para  $1 \leq k \leq p$ , os torneios  $B_n - v_k$  e  $C_n - v_{p+1-k}$  são isomorfos.*

**Demonstração:** A primeira afirmação deste teorema segue imediatamente do teorema 3.10 e pelo isomorfismo estabelecido neste teorema. Considerando  $\Phi : B_n - v_k \rightarrow$

$C_n - v_{p+1-k}$  a extensão de tal isomorfismo tal que  $\Phi(v_0) = v_0$ , é imediato que  $\Phi$  continua sendo uma aplicação bijetora. Para verificarmos que é um homomorfismo de torneios precisamos fazer apenas verificar que  $v_0 \rightarrow v_l \Rightarrow \Phi(v_0) \rightarrow \Phi(v_l)$  e também  $v_l \rightarrow v_0 \Rightarrow \Phi(v_l) \rightarrow \Phi(v_0)$ , pois as outras relações são garantidas por  $\phi : M_n - v_k \rightarrow M_n - v_{p+1-k}$ .

Para verificarmos que  $v_0 \rightarrow v_l \Rightarrow \Phi(v_0) \rightarrow \Phi(v_l)$ , onde  $l \neq k$ ,  $1 \leq l \leq p$  e  $v_0 \rightarrow v_l$  e

$$\Phi(v_l) = \phi(v_l) = v_{l'}$$

onde

$$l' = l + 2^{p_l+1} + 1 - 2r_l$$

e  $p_l = \text{pow}(k-l)$  e  $r_l \equiv l \pmod{2^{p_l+1}}$ , mas  $v_l \in B_n$  e isto implica  $l$  inteiro par. Portanto  $l'$  é ímpar e disto segue

$$\Phi(v_0) = v_0 \rightarrow \Phi(v_l) = \phi(v_l) = v_{l'}.$$

Com o mesmo raciocínio mostrar-se que  $v_l \rightarrow v_0 \Rightarrow \Phi(v_l) \rightarrow \Phi(v_0)$  e deixamos ao leitor(a). E isto conclui a demonstração. ■

### 3.1.4 Contra Exemplos de Ordem $2^n + 2$

A partir de  $B_n$  e  $C_n$  obteremos uma outra família  $D_n$  e  $E_n$  de torneios que são os contra exemplos de ordem  $2^m + 2$ ,  $m > 1$ .

**Definição 3.14** Para cada inteiro positivo  $n$ , o torneio  $D_n$  é obtido de  $B_n$  adicionando-se o vértice  $v_{p+1}$  que satisfaz as seguintes relações

$$(v_0, v_2, v_4, \dots, v_p) \rightarrow v_{p+1} \rightarrow (v_1, v_3, \dots, v_{p-1})$$

e o torneio  $E_n$  é obtido de  $C_n$  adicionando-se o vértice  $v_{p+1}$  que satisfaz as seguintes relações :

$$(v_0, v_1, v_3, \dots, v_{p-1}) \rightarrow v_{p+1} \rightarrow (v_2, v_4, \dots, v_p)$$

**Observação 3.15** Sabemos que  $D_1 \simeq E_1 \simeq H_4$ , no entanto existem exemplos de ordem 4 que não são reconstrutíveis e eles são  $\text{Tr}_2(v; H_3)$  e  $\text{Tr}_2(H_3; v)$ .

**Teorema 3.16** Para  $n > 1$ , os torneios  $D_n$  não são isomorfos aos torneios  $E_n$ .

**Demonstração:** Pelo lema 3.9, segue que os vértices que possuem score igual a  $2^{n-1} + 1$  são  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{\frac{n}{2}})$ . Seja  $T$  e  $T'$  os torneios gerados por estes vértices em  $D_n$  e  $E_n$  respectivamente.

Observamos que  $T \simeq B_{n-1}$  e que  $T' \simeq C_{n-1}$ .

Suponhamos por absurdo que exista  $\Psi : D_n \rightarrow E_n$  um isomorfismo de torneios, então  $\Psi$  restrito a  $T$  é um isomorfismo de  $T$  em  $T'$ , mas pelo teorema 3.12  $B_{n-1}$  não é isomorfo ao torneio  $C_{n-1}$ ,  $n > 1$ , o que é um absurdo. Portanto,  $D_n$  e  $E_n$  não são isomorfos. ■

**Teorema 3.17** *Para cada inteiro  $k$ ,  $1 \leq k \leq p+1$ , os torneios  $D_n - v_k$  são isomorfos aos torneios  $E_n - v_{p+1-k}$ .*

**Demonstração:** Para  $k = 0$ , seja  $id : M_n \rightarrow M_n$  e a extensão desta aplicação que leva  $v_{p+1}$  em  $v_0$ . A verificação que isto é um isomorfismo é imediata. Agora para  $k = p+1$  tomemos a extensão da identidade acima que leva  $v_{p+1}$  em  $v_0$  que é também de verificação imediata. Para  $1 \leq k \leq p$ , tomemos a extensão do isomorfismo de  $M_n - v_k$  em  $M_n - v_{p+1-k}$  estabelecido no teorema 3.10 que leva  $v_0$  em  $v_0$  e  $v_{p+1}$  em  $v_{p+1}$ . A verificação que isto é de fato um isomorfismo requer um raciocínio análogo ao desenvolvido no teorema 3.13, o qual deixamos a cargo do(a) leitor(a). ■

## 3.2 Torneios com Quociente Simples Normal São Reconstrutíveis

Voltamos agora ao assunto principal deste texto, ou seja, mostrar que os torneios que possuem quociente simples normal são reconstrutíveis.

Para tornar mais completo o quadro dos torneios que são reconstrutíveis, daremos uma lista completa dos torneios que não são reconstrutíveis  $T_m$ , ( $3 \leq m \leq 6$ ), além disso diremos também quais são os seus quocientes simples e mais precisamente quais possuem quociente simples normal.

- Para  $m = 3$ , existem apenas dois torneios que são:  $Tr_3$  e  $H_3$  que não são reconstrutíveis e  $H_3$  é normal.
- Para  $m = 4$  temos 4 torneios.  $Tr_4$  e  $H_4$  são reconstrutíveis e  $Tr_2(v, H_3)$  e  $Tr_2(H_3, v)$  que não são reconstrutíveis. Além disso  $H_4$  tem o quociente simples normal  $H_3$ .

- Para  $m = 5$  temos 12 distintos torneios dos quais  $N_5^1$  e  $N_5^2$  não são reconstrutíveis (veja exemplo 1.28),  $N_5^1$  tem quociente simples  $H_3$  e  $N_5^2$  é simples e não normal.
- Para  $m = 6$ , temos 56 torneios distintos dos quais 8 torneios são hamiltonianas, mas não são reconstrutíveis, a saber,  $N_6^i, M_6^i, P_6^i, R_6^i$ , com  $i = 1, 2$  (veja exemplo 1.28). Estamos usando a mesma letra para denotar os que são hipomorfos.  $N_6^1$  e  $N_6^2$  tem como quociente simples  $H_3$  que é normal, e  $M_6^i, P_6^i, R_6^i$ , com  $i = 1, 2$  são simples e não normais.

Observemos ainda que os únicos torneios não reconstrutíveis  $H_m$ , ( $4 \leq m \leq 6$ ), com quociente simples são  $N_5^1, N_6^1$  e  $N_6^2$ .

**Observação 3.18** *O resultado da teorema 2.30 é também verdadeiro para  $m = 6$ , pois  $N_6^1$  e  $N_6^2$  têm o mesmo quociente simples normal e este resultado também é verdadeiro para  $n = 5$  se excluirmos o torneio  $N_5^1$ .*

**Teorema 3.19** *Todo torneio hamiltoniano  $H_m$ , com  $m \geq 4$ , excluindo  $N_5^1, N_6^1$  e  $N_6^2$ , com quociente simples normal podem ser reconstruídos por suas cartas.*

**Demonstração:** Se  $H_m$  é normal, então por [10] ele é reconstrutível para  $m \geq 4$ .

Assumamos agora que  $H_m$  não é normal.

Se  $4 \leq m \leq 6$ , então pela argumentação acima segue o resultado.

Dado  $m \geq 7$  e como  $H'_m$  é um torneio hipomorfo a  $H_m$  e, portanto  $H'_m$  também não é normal e pelo teorema 2.30 segue que ambos possuem  $Q_n$  como quociente simples, o qual é normal por hipótese. Seja  $cc(Q_n) = k$  e  $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  o seu ciclo característico e denotemos por  $S^i = H'_m[a_i], 1 \leq i \leq k$ .

Tomemos  $\Omega$  como sendo o conjunto de todas as cartas  $H_{m-1}$  com quociente simples de ordem maximal, (isto é,  $Q_n$  a menos de isomorfismo) que satisfazem a seguinte igualdade

$$\sum_{i=1}^k |H_{m-1}[a_i]| = (\sum_{i=1}^k |S^i|) - 1.$$

Se tomarmos  $H'_m - v \in \Omega$  então  $v$  é um vértice de alguma e-componente  $S^j$ , ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Suponhamos por absurdo que isto não ocorre, ou seja, o vértice  $v$  não saiu de nenhuma e-componente  $S^j$ , então se  $H'_m - v$  for normal segue  $H'_m$  será também normal, o que é um absurdo, logo podemos supor que  $H'_m - v$  não é normal, mas então existe uma outra carta  $H'_{m-1}$  com quociente simples normal, a saber  $Q_n$ , tal que  $\sum_{i=1}^k |H_{m-1}[a_i]| < \sum_{i=1}^k |(H'_m - v)[a_i]| = (\sum_{i=1}^k |S^i|) - 1$  o que é um absurdo. Donde segue a afirmação inicial.

Quando  $H'_m$  possui duas e-componentes  $S^i$  não triviais, se compararmos  $H'_m - v$  com as outras cartas de  $\Omega$  é fácil ver qual foi a e-componente  $S^j$  da qual saiu vértice  $v$ , e podemos reconstruir  $H'_m$  exceto pela e-componente  $S^j$ . Mas a e-componente  $S^j$  pode ser facilmente reconstruída por alguma carta relativa a algum vértice de alguma e-componente não trivial, a qual existe uma vez que estamos admitindo que  $H'_m$  possui pelo menos duas e-componentes não triviais, e portanto neste caso tanto  $H'_m$  pode ser reconstruído.

Suponhamos agora que  $H'_m$  possua apenas uma e-componente  $S^j$  não trivial. Vamos dividir em dois casos:

- 1.) Quando  $Q_n$  possui mais que dois polos, se as cartas de  $\Omega$  não forem o suficiente para determinar qual é a e-componente  $S^j$  não trivial da qual  $v$  saiu, tomemos a carta relativa a um vértice que se encontra em um dos polos (logicamente diferente de  $x_1$  e  $x_{k-1}$ ), e assim podemos determinar qual é a e-componente  $S^j$ , e como ela é.
- 2.) Quando  $Q_n$  possui apenas dois polos. Para a melhor apresentação vamos subdividir este caso em outros dois:
  - 2.1) Se  $k \geq 4$  então a e-componente  $S^j$  é isomorfa a somente um não trivial e-componente de uma carta hamiltoniana cujo quociente simples não é normal, a saber,  $H'_m - x_1$  ou  $H'_m - x_k$ , desde que  $j$  seja  $\neq 1$  ou  $\neq k-1$  respectivamente. E portanto uma destas duas cartas ou ambas podem determinar quem é a e-componente  $S^j$ , e mais como ela é;
  - 2.1) Se  $k = 3$ , então existe no mínimo uma carta  $H'_{m-1}$  e um vértice  $u$  que projeta  $H'_{m-1} - u$  (onde  $H'_{m-1}$  é isomorfo a  $H'_m - a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) e  $H'_{m-1} - u \simeq C_3(S^j; L^1; L^2)$ , onde  $L^1$  e  $L^2$  são e-componentes hamiltonianas ou triviais. Portanto, neste caso podemos determinar a e-componente  $S^j$ , e como ela é.

Logo nestes dois casos podemos reconstruir  $H'_m$ .

Como estes são todos os possíveis casos segue que sempre podemos reconstruir  $H'_m$ , e naturalmente  $H'_m$  é isomorfo a  $H_m$ . ■

De agora em diante denotaremos por  $\mathcal{D}$  a classe dos torneios que possuem quociente simples normal e que sejam reconstrutíveis.

### 3.3 Conclusões

Nesta secção final faremos um breve resumo das classes de torneios reconstrutíveis, que são conhecidos atualmente (1999) e suas relações .

Transcreveremos alguns teoremas e os contextualizaremos para possibilitar ao leitor(a) uma melhor compreensão das conclusões tiradas aqui, entretanto não demonstraremos estes teoremas, pois em geral cada teorema que enunciaremos, se fossemos demonstrá-lo, exigiria a demonstração de diversos outros, aumentando em muito as dimensões deste texto. Ao leitor(a) interessado em se aprofundar em algum dos resultados, daremos as referências de onde se pode encontrar maiores detalhes.

De tudo o que já foi discutido segue, naturalmente que  $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ .

**Definição 3.20** *Seja  $H_n, n \geq 3$  um torneio hamiltoniano. Diremos que  $H_n$  é um torneio de Douglas se admite exatamente um ciclo passante pelos seus vértices. Denotaremos por  $D_n$  um torneio de Douglas de ordem  $n$ , e por  $\mathcal{F}$  esta classe de torneios.*

**Teorema 3.21** *Seja  $H_n$  um torneio hamiltoniano com  $cc(H_n) = k \geq 3$ .  $H_n$  é um torneio de Douglas se, e somente se,*

1.1)  $H_n$  tem o quociente simples  $Q_m, (m \geq 5)$  tal que:

- a)  $Q_m$  é normal;
- b) O subtorneio dos polos de  $Q_m$  é transitivo;
- c) Os polos de  $Q_m$  são todos do tipo  $x_i$ ;
- d) Quaisquer dois polos  $x_i, x_j \in Q_m$ , satisfazem as seguintes relações

$$x_i \rightarrow x_j \Rightarrow j \leq i + 1$$

1.2)  $H_n$  pode ser construído por  $Q_m$  trocando-se todos os vértices de  $Q_m$  por algum torneio transitivo;

2)  $H_n$  é a composição de uma  $e$ -componente com apenas um elemento e dois torneios transitivos por um 3-ciclos.

**Demonstração:** Se encontra em [11]. ■

**Observação 3.22** Temos que  $\mathcal{F} \not\subset \mathfrak{N}$ , No entanto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ ;

**Corolário 3.23** Os torneios de Douglas exceto  $N_6^1$  e  $N_6^2$  são reconstrutíveis.

**Demonstração:** Segue imediatamente do que foi discutido acima. ■

**Definição 3.24** Vamos denotar por  $B_n$  aos torneios hamiltonianos com o menor número de 3-ciclos, e a classe destes torneios denotaremos por  $\mathcal{B}$ .

**Proposição 3.25** Seja  $H_m$  um torneio hamiltoniano, com  $cc(H_m) = k (k \geq 4)$ , então ele pertence a  $\mathcal{B}$ , se e somente se:

1.  $H_m$  é normal;
2. O subtorneio dos polos é transitivo;
3. Todos os seus polos são do tipo  $x_i$ ;
4. Valem as seguintes regras de adjacência entre  $x_i$  e  $x_j, x_i \rightarrow x_j$ , isto implica que  $j \leq i$ .

**Demonstração:** Se encontra em [9]. ■

**Proposição 3.26** Um torneio hamiltoniano  $H_m$  com  $cc(H_m) = 3$  pertence a  $\mathcal{B}$  se, e somente, um dos seguintes casos se verifica:

- 1) Se  $H_m$  é um torneio normal, tal que:
  - a) O subtorneio dos polos é transitivo;
  - b) Os polos de  $H_m$  são todos do tipo  $x_i$ ;
  - c) Todos os polos do tipo  $x_2$  procedem todos os polos do tipo  $x_1$ .
- 2) Se  $H_m$  não é um torneio normal, e neste caso é o quociente de um torneio transitivo e duas e-componentes singletons com quociente  $H_3$ .

**Demonstração:** Se encontra em [9]. ■

**Corolário 3.27**  $\mathcal{B}$  é uma classe reconstrutível.

**Demonstração:** Segue do fato que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ . ■

**Definição 3.28** Seja  $T_n$  um torneio, diremos que ele é redutível se seu quociente simples for  $T_2$  e denotaremos a classe dos torneios redutíveis de ordem maior ou igual 5 por  $\mathfrak{R}$ .

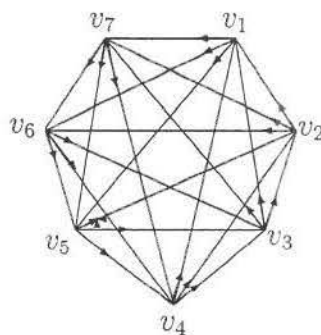
Em [15] Harary e Palmer demonstraram que  $\mathfrak{R}$  é uma classe reconstrutível.

Observe que é imediato da proposição 1.14, que os torneios redutíveis não são hamiltonianos.

**Definição 3.29** Diremos que um torneio é de Moon se todos os seus subtorneios são transitivos ou hamiltonianos.

**Definição 3.30** Um torneio  $R_{2m+1}$  é dito ser altamente regular se existe uma ordenação cíclica  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2m+1}, v_1\}$  dos vértices de  $T_n$  tais que  $v_i \rightarrow v_j$  se e só se  $v_j$  é um dos primeiros  $m$  sucessores de  $v_i$  na ordenação cíclica dos vértices de  $R_{2m+1}$ .

**Exemplo 3.31** Este é o torneio  $R_7$



**Teorema 3.32** Para cada torneio  $T_n$  as seguintes condições são equivalentes:

- a)  $T_n$  é um torneio de Moon;
- b) Cada subtorneio de  $T_n$  é um torneio de Moon;
- c) Cada 4-subtorneio é um torneio de Moon;
- d)  $T_n = R_{2m+1}(S^1; S^2; \dots; S^{2m+1})$  é a composição de  $2m+1$  e-componentes transitivas tendo como quociente simples um torneio altamente regular.

**Demonstração:** Foi demonstrado por De Mitri e Guido em [12]. ■

Guido em [14] demonstrou que os torneios de Moon com no mínimo 4 vértices, se excluirmos  $N_6^1$  e  $N_6^2$  são reconstrutíveis. Seja  $\mathcal{HM}$  os torneios de Moon reconstrutíveis excluindo os torneios transitivos.

Então temos as seguintes relações

$$\mathcal{HM} \cap \mathcal{N} = \mathcal{HM} \cap \mathcal{R} = \mathcal{N} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

**Definição 3.33** *Seja  $T_n$  um torneio. Diremos que  $T_n$  é um torneio simplesmente desconexo se seu grupo fundamental é não trivial.*

**Observação 3.34** *Para se compreender como se associa um grupo a um torneio sugerimos a leitura de [1].*

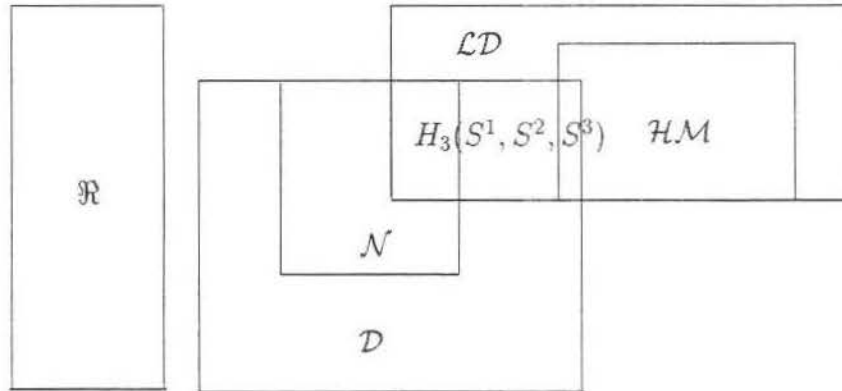
Em [22] Vitolo demonstrou que todos os torneios simplesmente desconexo são reconstrutíveis se excluirmos  $N_5^1, N_6^1$  e  $N_6^2$ , e chamaremos a esta classe de  $\mathcal{LD}$ . A qual contém  $\mathcal{HM}$ . De fato, os torneios de  $\mathcal{LD}$  são composições por torneios arbitrários com quociente altamente regular.

Temos as seguintes relações

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{D} = \emptyset$$

e  $\mathcal{LD} \cap \mathcal{D} = \{C_3(S^1; S^2; S^3)\}$  onde os  $S^i, i = 1, 2, 3$  são torneios arbitrários. Na figura abaixo temos esquematicamente todas estas relações.

Observe que não há nenhuma relação entre o tamanho das classes de torneios e a área das figuras que usamos para os representar.



# Bibliografia

- [1] Barros T. E., *Homotopia Regular de Grafos*, Dissertação de Mestrado, IMECC - Unicamp, Dezembro de 1990.
- [2] Beineke L. W., Parker E. T., *On non-reconstructable tournaments*, J. Comb. Theory 9 (1970) 324-326.
- [3] Beineke. W., Reid K. B., *Selected Topics in Graph Theory*, Edited by L. W. Beineke and R. J. Wilson, Academic Press, New York (1978).
- [4] Burzio M., Demaria D. C., *On simply disconnected tournaments*, Proc. Catania Confer. Ars Combinatoria, 24-A (1988), 149-161.
- [5] Burzio M., Demaria D. C., *Characterization of tournaments by coned 3-cycles*, Acta Univ. Carol. Math. Phys., Prague, Vol. 28, n. 2 (1987), 25-30.
- [6] Burzio M., Demaria D. C., *On a classification of Hamiltonian tournaments*, Acta Univ. Carol. Math. Phys., Prague, Vol. 29, n. 2 (1988), 3-14.
- [7] Burzio M., Demaria D. C., *Hamiltonian tournaments with the least number of 3-cycles*, J. Graph Theory, Vol 14, n. 6 (1990), 663-672.
- [8] Demaria D. C., Gianella G. M., *On normal tournaments*, Conf. Semin. Matem. Univ. Bari, Vol 232 (1989), 1-29.
- [9] Demaria D. C., Gianella G. M., *On normal tournaments with the least number of 3-cycles*, Topics in Combinatorics and Graph Theory(Physica-Verlag, Heidelberg,1990)231-237.
- [10] Demaria D. C., Guido C., *On the reconstruction of normal tournaments*, J. Comb. Inf. and Sys. Sci., Vol 15 (1990), 301-323.

- [11] Demaria D. C., Kiihl J. C. S., *On the simple quotients of tournaments that admit exactly one hamiltonian cycle*, Atti Accad Sci. Torino, Vol 124 (1990), 94-108.
- [12] Mitri De C., Guido C., *A local property of hamiltonian Moon tournaments*, Radio Math. 5(1992)11-17.
- [13] Douglas R. J., *Tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit*, Proc. London Math. Soc. 21 (1970), 716-730.
- [14] Guido C., *Struture and reconstruction of Moon tournaments*, J. Comb. Inf. and Sys. Sci., Vol 19(1) (1994) 47-61.
- [15] Harary F., Palmer E., *On the problem of reconstructing a tournament from subtournaments*, Monatsh. Math. 71(1967) 14-23.
- [16] Moon J. W., *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1968).
- [17] Moon J. W., *Tournaments whose subtournaments are irreducible or transitive*, Can. Math. Bull. 21 (1967), 75-79.
- [18] Nash-Williams C. St. J. A., *The reconstruction problem, no Select Topics in Graph Theory* editado por Beineke L. W. e Wilson R. J., Academic Press, New York, 1978, pp. 205-236.
- [19] Muller V., Nesetril J., Pelant J., *Either tournaments or algebras?*, Discrete Math. 11 (1975), 37-66.
- [20] Souza M. L. V., *Reconstrução de Torneios Normais*, Dissertação de Mestrado, IMECC - Unicamp, Agosto de 1999.
- [21] Stockmeyer P.K., *The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments*, J. Graph Theory 1 (1977) 19-25.
- [22] Vitolo P., *The reconstruction of simply disconnected tournaments*, submitted.