

A EQUAÇÃO DA ONDA
COM UM PONTO DE MASSA
NO INTERIOR

Lorena Ramos Correia

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

200013257

A EQUAÇÃO DA ONDA COM UM PONTO DE MASSA NO INTERIOR

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Lorena Ramos Correia e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de fevereiro de 2000.



Orientador: Prof.Dr. Aloísio José Freiria Neves

Banca Examinadora:

Prof.Dr. Aloísio José Freiria Neves
Prof.Dr. José Luiz Boldrini
Profa.Dra. Hebe de Azevedo Biagioni

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

FEVEREIRO - 2000



UNIDADE	80
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	C817e
V.	Ex.
TOMBO BC	42195
PROC.	16-278100
C	☐
D	☒
PREC.	R\$ 11,00
DATA	21/09/00
N.º CPD	

CM-00145094-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA UNICAMP

C817e

Correia, Lorena Ramos

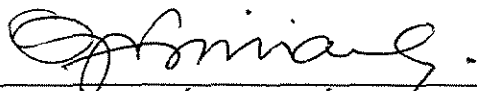
A equação da onda com um ponto de massa no Interior / Lorena Ramos Correia. – Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: Aloisio José Freiria Neves.

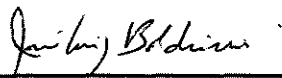
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equação da onda. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Semigrupos de operadores. I. Neves, Aloisio José Freiria. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

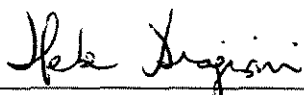
Dissertação de Mestrado defendida em 25 de fevereiro de 2000 e aprovada
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES



Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof (a). Dr (a). HEBE DE AZEVEDO BIAGIONI

APRESENTAÇÃO
(Cecília Meireles)

*Aqui está minha vida- esta areia tão clara
com desenhos de andar dedicados ao vento.*

*Aqui está minha voz- esta concha vazia,
sombra de som curtindo o seu próprio lamento.*

*Aqui está minha dor- este coral quebrado,
sobrevivendo ao seu patético momento.*

*Aqui está minha herança- este mar solitário,
que de um lado era amor e, do outro, esquecimento.*

Ao meu pai, por me ensinar a lutar pela vida.
Ao Sebastian, por fazê-la valer a pena.

Agradecimentos

A Deus, minha fortaleza, sem O qual nada seria possível.

Ao Prof. Dr. Aloísio J. F. Neves, meu orientador, pela paciência e pela amizade que me concedeu, e pela excelente orientação neste tempo em que trabalhamos juntos.

Ao Prof. Dr. Marcelo Santos pela cuidadosa leitura da preliminar deste trabalho.

Aos professores e aos colegas de curso que estiveram comigo nesta caminhada, em especial às amigas Jaqueline B. Nicolau e Valéria Rosa, e aos amigos Jose Minchola e José Carlos de Lima, que foram minha segunda família nestes últimos três anos.

Aos meus pais Aide e Jucy, e aos meus irmãos, pelo incentivo e pelo apoio incondicional que me deram, mesmo estando distantes.

Ao Sebastian pela ajuda despretenciosa e quase acidental.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é realizar o detalhamento matemático de um dos artigos de Hansen e Zuazua, no qual é examinada a regularidade de uma equação da onda unidimensional, com um ponto de massa no interior. O problema consiste de duas cordas, cada uma com comprimento finito, unidas em um ponto de massa comum. Sendo que, quando a onda atravessa o ponto de massa, partindo do dado inicial, parte da onda é transmitida e parte da onda reflete no ponto de massa. A parte que reflete fica com a mesma regularidade do dado inicial; no entanto, a parte que atravessa o ponto de massa é regularizada em um grau.

Abstract

The main subject of this work is to do a detailed study of a Hansen and Zuazua paper where they study a one dimensional wave equation with an interior point mass. The problem consists of two strings in which one end of each string is attached to a common point mass. When a wave crosses the point mass, part of the wave is reflected off and part is transmitted. The part reflected keeps the same regularity of the initial data, but the part that crosses the point mass is regularited by one degree.

Sumário

Resumo/Abstract	vi
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Definições Básicas	3
1.2 Funções Integráveis	4
1.3 Distribuições	5
1.4 Elementos de Análise Funcional	8
1.4.1 Os Espaços L^p	9
1.5 Espaços de Sobolev	13
1.6 Semigrupos de Operadores Lineares	15
1.6.1 O Teorema de Hille-Yosida	17
1.6.2 O Teorema de Lumer-Phillips	17
2 Equação da Onda	19
2.1 Fórmula de D'Alembert	20
2.2 Existência e Unicidade de Soluções	21
2.3 Regularidade de Soluções Fracas	23
3 A Equação da Onda com um Ponto de Massa no Interior	33
3.1 Formulação do Problema e Primeiros Resultados	33
3.2 Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções	35
3.2.1 Condições de Contorno Homogêneas	35
3.2.2 Condições de Contorno Não-Homogêneas	70
Conclusões	83
Referências Bibliográficas	84

Introdução

Ao procurarmos modelar matematicamente fenômenos físicos, muitas vezes utilizamos equações diferenciais. As equações resultantes podem ser equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais.

Uma das equações básicas, que expressa um destes fenômenos físicos, é a *Equação da Onda*,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

equação diferencial parcial de segunda ordem, que modela o problema das vibrações transversais de uma corda, dando a posição $u(x, t)$ de um ponto x da corda, em um instante t .

Muitos métodos de resolução para a Equação da Onda já foram desenvolvidos, cada um contendo vantagens e desvantagens, de acordo com as características de cada problema. Um deles, que estaremos utilizando neste trabalho para obter resultados de existência e unicidade, é a teoria de *Semigrupos de Operadores Lineares*.

A orientação deste trabalho é feita no sentido de examinar a regularidade de uma equação da onda unidimensional, com um ponto de massa no interior. O problema principal consiste de um sistema formado por duas cordas, cada uma com comprimento finito, unidas em um ponto de massa. Se considerarmos que a primeira corda ocupa $\Omega_1 =]-l_1, 0[\subset \mathbb{R}$ e que a segunda corda ocupa $\Omega_2 =]0, l_2[\subset \mathbb{R}$, as deformações em cada corda serão descritas, respectivamente pelas funções

$$\begin{aligned} u &= u(x, t), & x &\in \Omega_1, & t &> 0, \\ v &= v(x, t), & x &\in \Omega_2, & t &> 0. \end{aligned}$$

Os dados iniciais são fornecidos para $t = 0$, e a posição da massa é descrita pela função $z = z(t)$, para $t > 0$. Deste modo, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 u_{tt} = \sigma_1 u_{xx}, & t > 0, \quad x \in \Omega_1, \\ \rho_2 v_{tt} = \sigma_2 v_{xx}, & t > 0, \quad x \in \Omega_2, \\ M z_{tt}(t) + \sigma_1 u_x(0, t) - \sigma_2 v_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(-l_1, t) = v(l_2, t) = 0, & t > 0, \\ u(0, t) = v(0, t) = z(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & x \in \Omega_1, \\ v(x, 0) = v^0(x), \quad v_t(x, 0) = v^1(x), & x \in \Omega_2, \\ z(0) = z^0, \quad z_t(0) = z^1. \end{array} \right.$$

Nosso principal objetivo é realizar o detalhamento matemático deste problema, conforme o trabalho de Hansen e Zuazua, encontrado em [3].

Vale ressaltar que durante o detalhamento do trabalho, foram necessárias algumas importantes mudanças na definição do Espaço dado por [3], para que pudéssemos utilizar a Teoria de Semigrupos.

No capítulo 1, relembremos alguns importantes resultados da Teoria de Integração, damos algumas noções básicas sobre Distribuições e Espaços de Sobolev, e apresentamos alguns resultados clássicos tanto de Análise Funcional quanto da Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares.

No segundo capítulo, examinamos a Equação da Onda. Relembremos a clássica solução de d'Alembert, além de enunciar resultados sobre regularidade de soluções fracas.

No terceiro e último capítulo, analisamos a Equação da Onda com um Ponto de Massa no Interior. Vemos que a presença do ponto de massa introduz algumas mudanças importantes no comportamento do sistema com respeito à observação das propriedades. Por uma computação explícita (Proposição 3.2.5) vemos que, quando a onda atravessa o ponto de massa, partindo do dado inicial

$$u^0 = \varphi^0 \in H_0^1(\Omega_1), \quad u^1 = \varphi^1 \in L^2(\Omega_1), \quad v^0 = v^1 = z^0 = z^1 = 0,$$

parte da onda é transmitida e parte da onda reflete no ponto de massa. A parte que reflete fica com a mesma regularidade do dado inicial, mas a parte que atravessa o ponto de massa é regularizada em um grau (isto é, $v(\cdot, t) \in H^2(\Omega_2)$, para todo $t > 0$). Naturalmente, isto ocorre graças à presença do ponto de massa, o que não acontece se $M = 0$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estaremos apresentando um resumo dos principais resultados necessários para o estudo e a resolução da equação da onda, objetivo deste trabalho, que serão feitos nos Capítulos 2 e 3.

1.1 Definições Básicas

Diremos que um espaço X é de *Banach*, se X for um espaço vetorial normado e completo.

Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, chamaremos comprimento de α ao número $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Denotaremos o operador diferenciação, de ordem α , por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

e para $\alpha = (0, \dots, 0)$, definiremos $D^0 f = f$, para toda função f .

Vamos chamar de $C^m(\Omega)$ o conjunto das funções reais, m vezes continuamente diferenciáveis em Ω . Por $C^\infty(\Omega)$ indicaremos a intersecção de todos os $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. Ou seja, funções que possuem derivadas de todas as ordens.

Consideremos a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Chamaremos de *suporte de f* ao fecho, em Ω , do conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Ou seja, $\text{supp}(f)$ é o menor fechado que contém o conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Ao conjunto das funções de $C^\infty(\Omega)$ que são de suporte compacto em Ω , denotaremos $C_0^\infty(\Omega)$.

Definiremos, agora, uma noção de convergência para seqüências no espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1.1. *Seja ϕ_k uma seqüência de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$, e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que ϕ_k converge para ϕ , e denotamos por $\phi_k \rightarrow \phi$, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- i) *Existe um compacto K contido em Ω tal que, o $\text{supp}(\phi_k)$ está contido em K , $\forall k \in \mathbb{N}$.*
- ii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a seqüência $D^\alpha \phi_k$ converge uniformemente para $D^\alpha \phi$ em Ω .*

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta convergência, é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes em Ω* .

1.2 Funções Integráveis

Consideremos X um espaço de Banach, I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow X$ uma função.

Diremos que uma função f é *mensurável*, se existirem um conjunto $E \subset I$, de medida nula, e uma seqüência $f_n : I \rightarrow X$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C(I, X)$, tais que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ quando $n \rightarrow \infty$, $\forall t \in I \setminus E$.

Observação 1.2.1. *Se $f : I \rightarrow X$ é mensurável, então $\|f\| : I \rightarrow \mathbb{R}$ é também mensurável.*

Uma função f , mensurável, será dita *integrável*, se existir uma seqüência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C(I, X)$ que converge uniformemente para f . Se a medida $\mu(X) < +\infty$, então

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

, e a integral de f em I é o elemento $\int_I f \in X$.

Proposição 1.2.1. *Seja $f : I \rightarrow X$ uma função mensurável. A função f é integrável se, e somente se, $\|f\|$ é integrável. Mais ainda,*

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|.$$

Diremos que uma seqüência $f_n : I \rightarrow X$ converge quase sempre (q.s) para uma função $f : I \rightarrow X$, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f , em $I \setminus E$, para algum conjunto de medida nula $E \in I$.

Teorema 1.2.1. (Convergência Monótona) *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de funções integráveis de I em X tais que $\sup \int f_n < \infty$. Então $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge q.s, em Ω , a um limite finito, denotado por $f(x)$. Mais ainda, f é integrável e*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Teorema 1.2.2. (Convergência Dominada de Lebesgue) *Consideremos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis de I em X , que converge q.s para uma função $f : I \rightarrow X$. Se existe uma função integrável $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\|f_n\| \leq g$, para todo n , então f é integrável e*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Lema 1.2.1. (Lema de Fatou) *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis de I em X tal que, para cada n , $f_n(x) \geq 0$ q.s, em Ω , e $\sup \int f_n < \infty$. Se para cada $x \in \Omega$ definirmos $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Então f é integrável e*

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

1.3 Distribuições

Consideremos X e Y espaços de Banach reais. Dizemos que uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ é um *operador linear* se, para cada $u, v \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(u + v) = Tu + Tv$$

$$T(\lambda u) = \lambda Tu.$$

A imagem de T é o conjunto

$$R(T) = \{v \in Y : v = Tu \text{ para algum } u \in X\}.$$

Definição 1.3.1. Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é dito limitado se

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty.$$

Observação 1.3.1. Todo operador linear limitado é contínuo.

Uma *distribuição* sobre Ω é qualquer forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua no seguinte sentido:

$$\phi_k \rightarrow \phi \implies T(\phi_k) \rightarrow T(\phi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, representaremos $T(\phi)$ por $\langle T, \phi \rangle$.

É fácil verificar que a coleção das distribuições sobre Ω é fechada em relação a soma e em relação ao produto por escalar, sendo portanto, um espaço vetorial o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma função f localmente integrável em Ω , fica bem determinada a distribuição $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sobre Ω dada por

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.3.0.1)$$

Proposição 1.3.1. (Lema de Du Bois Raymond) Seja f uma função localmente integrável em Ω . Então $T_f = 0$ se, e somente se, $f = 0$ quase sempre em Ω .

Definição 1.3.2. Consideremos uma distribuição T sobre Ω e $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem k de T é definida como sendo o funcional linear $D^k T$ definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle T, D^k \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue do Lema de Du Bois Raymond que as distribuições T_f são univocamente determinadas por f .

$\mathcal{D}'(\Omega)$ possui um subespaço que é identificado com o espaço das funções localmente integráveis, através da aplicação injetora $f \mapsto T_f$. Deste modo, identificamos T_f à função f que a define. Podemos, assim, formar classes de equivalência. As funções (classes), que pertencem ao espaço das funções localmente integráveis, possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Há, entretanto, distribuições não definidas por funções localmente integráveis, como é o caso da distribuição δ de Dirac.

Vamos agora relembrar um resultado muito conhecido de análise, bastante útil na resolução de integrais.

Proposição 1.3.2. (Teorema de Green) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado onde vale o Teorema da Divergência e $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dx &= \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \\ \int_{\Omega} (v \Delta u + u \Delta v) dx &= \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma \end{aligned}$$

onde ν denota a normal externa em $\partial \Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu}$ são as derivadas direcionais de u e v na direção normal.

Dem: Ver [4]

Teorema 1.3.1. (Teorema da Divergência) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira de classe C^1 e F um campo vetorial de classe C^1 em $\bar{\Omega}$. Então*

$$\int_{\partial \Omega} F(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx$$

onde $\nu(y)$ denota a normal exterior a $\partial \Omega$ no ponto y e $d\sigma(y)$ é a medida geométrica natural sobre $\partial \Omega$.

1.4 Elementos de Análise Funcional

Nesta seção, relembremos alguns resultados clássicos de análise funcional, que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações que não forem feitas ou indicadas podem ser encontradas em [1].

Teorema 1.4.1. (Teorema de Hahn-Banach) *Seja X um espaço vetorial real e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação tal que*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) & \forall x \in X, \forall \lambda > 0, \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y) & \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Sejam também $Y \subset X$ um subespaço vetorial e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Então, existe uma forma linear f definida sobre X , que estende g , isto é,

$$g(x) = f(x) \quad x \in Y$$

e tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad x \in X.$$

Teorema 1.4.2. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach e T um operador linear de X em Y . Então, o gráfico de T é fechado em $X \times Y$ se, e somente se, T é contínuo.*

Consideremos $\mathbf{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathbf{H}'$ o seu dual (topológico). Se $f \in \mathbf{H}'$ e $x \in \mathbf{H}$ escreveremos $\langle\langle f, x \rangle\rangle$ em lugar de $f(x)$. Neste caso, dizemos que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é o produto escalar na dualidade $\mathbf{H}', \mathbf{H}$.

Sobre o espaço dual de um espaço de Hilbert temos o seguinte resultado.

Teorema 1.4.3. (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet) *Dada $\varphi \in \mathbf{H}'$, existe um único $f \in \mathbf{H}$ tal que*

$$\langle\langle \varphi, \nu \rangle\rangle = \langle f, \nu \rangle, \quad \forall \nu \in \mathbf{H}.$$

Mais ainda,

$$\|f\|_{\mathbf{H}} = \|\varphi\|_{\mathbf{H}'}.$$

1.4.1 Os Espaços L^p

Designaremos por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis sobre Ω , com valores reais. A norma definida neste espaço é a seguinte:

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Como é habitual, se duas funções de L^1 coincidirem em quase toda parte, nós as identificaremos em classes de equivalência. Quando não há ambiguidade, se escreve L^1 em lugar de $L^1(\Omega)$ e $\int f$ em lugar de $\int_{\Omega} f(x) dx$.

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, conjuntos abertos, $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função mensurável.

Teorema 1.4.4. (Toneli) *Suponhamos que*

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty \quad \text{para quase todo } x \in \Omega_1$$

e que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty.$$

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema 1.4.5. (Fubini) *Suponhamos que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Então, para quase todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad e \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Igualmente, para quase todo $x \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad e \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Mais ainda,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Definição 1.4.1. *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

e, neste caso, a norma é

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *essencialmente limitada* se, e somente se, existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, limitada, tal que $f = g$ q.s.

A coleção das classes de equivalência de funções essencialmente limitadas é denotada por $L^\infty(X)$. Se $f \in L^\infty(X)$, podemos definir

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{\sup |g(x)| : g = f \text{ q.s.}\}.$$

Teorema 1.4.6. *O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.4.7. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1$, e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Teorema 1.4.8. (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $f, g \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Então,*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Teorema 1.4.9. *L^p é um espaço de Banach, para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 1.4.10. *L^p é um espaço de Hilbert se, e somente se, $p = 2$.*

Teorema 1.4.11. (Teorema de Representação de Riesz) *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \quad \forall f \in L^p.$$

Mais ainda,

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Teorema 1.4.12. *Seja $\varphi \in (L^1)'$. Então existe $u \in L^\infty$ único tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \quad \forall f \in L^1.$$

Mais ainda,

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$$

Lema 1.4.1. *Consideremos $\alpha(t) \in L^1(0, T; \mathbb{R})$, $\alpha \geq 0$ e $k \geq 0$. Sejam u e v funções contínuas satisfazendo*

$$[u(t)]^2 + [v(t)]^2 \leq k^2 + \int_0^t \alpha(s) [|u(s)| + |v(s)|] ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Então,

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq k + \int_0^t \alpha(s) ds, & \forall t \in [0, T], \\ |v(t)| &\leq k + \int_0^t \alpha(s) ds, & \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{1.4.1.2}$$

Dem: Consideremos $\psi(t) = k^2 + \int_0^t \alpha(s) [|u(s)| + |v(s)|] ds$.

Temos por hipótese que $[u(t)]^2 \leq \psi(t)$ e $[v(t)]^2 \leq \psi(t)$, portanto $|u(t)| \leq \sqrt{\psi(t)}$ e $|v(t)| \leq \sqrt{\psi(t)}$.

Além disso,

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \alpha(t) [u(t) + v(t)] \leq \alpha(t) (|u(t)| + |v(t)|) \leq 2\sqrt{\psi(t)}\alpha(t).$$

Agora, se $\psi(t) > 0$ temos que , $\forall t$

$$\frac{d\sqrt{\psi(t)}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\psi(t)}} \frac{d\psi}{dt} \leq \alpha(t).$$

Integrando de 0 a t , temos

$$\sqrt{\psi(t)} \leq \sqrt{\psi(0)} + \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Assim,

$$|u(t)| \leq \sqrt{\psi(t)} \leq \sqrt{\psi(0)} + \int_0^t \alpha(s) ds = k + \int_0^t \alpha(s) ds$$

e

$$|v(t)| \leq \sqrt{\psi(t)} \leq \sqrt{\psi(0)} + \int_0^t \alpha(s) ds = k + \int_0^t \alpha(s) ds,$$

o que demonstra o lema neste caso.

Se $\psi(t)$ assume o valor zero para algum t_0 , consideremos $\epsilon > 0$ arbitrário. Se definirmos ψ_ϵ por

$$\psi_\epsilon(t) = (k + \epsilon)^2 + \int_0^t \alpha(s) [u(s) + v(s)] ds \geq \frac{1}{2}\epsilon^2 > 0,$$

temos que $|u(t)| \leq \sqrt{\psi_\epsilon(t)}$ e $|v(t)| \leq \sqrt{\psi_\epsilon(t)}$. Além disso,

$$\sqrt{\psi_\epsilon(t)} \leq \sqrt{\psi_\epsilon(0)} + \int_0^t \alpha(s) ds = (k + \epsilon) + \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Já que $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. ■

Lema 1.4.2. *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^n$ e consideremos $x \in \mathbb{R}^n$. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, definiremos a função f_x por $f_x(y) = f(y - x)$. Se $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então $\lim_{x \rightarrow 0} \|f_x - f\|_{L^p} = 0$.*

Dem: Se ϕ é uma função contínua, de suporte compacto, então ϕ é uniformemente contínua. Deste modo, ϕ_x converge uniformemente para ϕ , quando x tende a 0.

Agora, para $|x| \leq 1$, ϕ_x e ϕ são de suporte compacto sobre um mesmo conjunto compacto. Portanto $\lim_{x \rightarrow 0} \|\phi_x - \phi\|_{L^p} = 0$. Ou seja, $\|\phi_x - \phi\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}$, quando x tende a 0, para todo $\epsilon > 0$ arbitrário.

Dada $f \in L^p$, nós podemos encontrar uma função ϕ , contínua e de suporte compacto, tal que $\|f - \phi\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}$. Mas então, $\|f_x - \phi_x\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}$ também é válido. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|f_x - f\|_{L^p} &\leq \|f_x - \phi_x\|_{L^p} + \|\phi_x - \phi\|_{L^p} + \|\phi - f\|_{L^p} \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \|f_x - f\|_{L^p} = 0$. ■

1.5 Espaços de Sobolev

Ao estudarmos funções de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, vimos que elas possuem derivadas de todas as ordens, no sentido de distribuições. No entanto, sabemos que $D^\alpha f$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de L^p . Tal fato nos motiva na definição de um novo espaço, chamado *Espaço de Sobolev*.

Definição 1.5.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço de Sobolev como sendo o espaço vetorial de todas as funções $f \in L^p(\Omega)$ tais que, para cada $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha f$ pertence a L^p . Neste caso, representamos tal espaço por $W^{m,p}(\Omega)$. Escrito de outro modo,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, quando munido da seguinte norma:

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Quando $m = 0$, temos que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Além disso, sabemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas, para $m \geq 1$, $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Motivados por este fato, definiremos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Se $p = 2$, denotaremos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e $W_0^{m,2}(\Omega)$ por $H_0^m(\Omega)$.

Para $H^m(\Omega)$ utilizaremos a norma

$$\|f\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que torna $H^m(\Omega)$ um espaço de Hilbert.

Definição 1.5.2. Suponha $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o Dual Topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Ao Dual Topológico de $H_0^m(\Omega)$ representamos $H^{-m}(\Omega)$.

Tomemos $f \in W^{-m,q}(\Omega)$ e $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções testes que converge a zero em $\mathcal{D}(\Omega)$. Resulta que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a zero em $W_0^{m,p}(\Omega)$, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f, \varphi_k \rangle = 0$, o que nos permite concluir que a restrição de f a $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição.

Consideremos a aplicação linear

$$\sigma : W^{-m,q}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

tal que $\sigma(f) = f|_{\mathcal{D}(\Omega)}$, para cada $f \in W^{-m,q}(\Omega)$. A injeção linear σ nos permite identificar $W^{-m,q}(\Omega)$ a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Escreveremos $W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ para representar tal identificação.

Quando dizemos que uma distribuição T pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$, isto significa que T é definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, estendida como funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ e a esta extensão contínua representaremos por T . O resultado que segue caracteriza as distribuições de $W^{-m,q}(\Omega)$.

Teorema 1.5.1. Seja T uma distribuição sobre Ω , então $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $f_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha.$$

Dem: Ver [7], página 27.

Observação 1.5.1. Quando Ω é limitado, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|f\|_{L^2} \leq C \|\nabla f\|_{L^2}, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega).$$

A desigualdade acima é conhecida como Desigualdade de Poincaré.

Podemos, então, munir o espaço $H_0^1(\Omega)$ com o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \nabla f \nabla g, \quad \forall f, g \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.5.2. (Teorema do Traço) Seja Ω um domínio limitado cuja fronteira, $\partial\Omega$, é Lipschitziana. Então existe uma única transformação T , linear e contínua, de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$, tal que $Tv = v|_{\partial\Omega}$.

Dem: Ver [8], página 15.

1.6 Semigrupos de Operadores Lineares

Consideremos X um espaço de Banach real. Denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ o espaço de todos os operadores lineares contínuos de X em X , munido da norma

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Observação 1.6.1. Todas as demonstrações dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [9].

Definição 1.6.1. Uma família a um parâmetro $\{T(t); 0 \leq t < \infty\} \subset \mathcal{L}(X)$ é chamada um semigrupo de operadores lineares em X se

- (i) $T(0) = I$
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Se além das condições acima tivermos que, para cada $x \in X$

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x,$$

então o semigrupo de operadores lineares será dito *fortemente contínuo*, ou simplesmente, C^0 -semigrupo.

Caso exista $M > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$, diremos que o semigrupo $T(t)$ é *uniformemente limitado*. Se $M = 1$ então $T(t)$ é um *semigrupo de contrações*.

Diremos que um semigrupo é *uniformemente contínuo* se

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0,$$

ou seja, $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$ uniformemente, para $\|x\| \leq 1$.

Definição 1.6.2. Consideremos $T(t)$ um C^0 -semigrupo definido sobre um espaço de Banach X . O gerador infinitesimal A de $T(t)$, é um operador linear definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \text{ para } x \in D(A),$$

onde $D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\}$, denota o domínio do operador A .

Proposição 1.6.1. Um operador linear A é gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo se, e somente se, A é um operador linear limitado.

Proposição 1.6.2. Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo. Então, existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Além disso, $\forall x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é uma função contínua de $\mathbb{R}^+$ em X .

Proposição 1.6.3. Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo e A o seu gerador infinitesimal. Então, $D(A)$ é denso em X e A é um operador fechado. Além disso, para cada $x \in D(A)$ temos que $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax$.

Proposição 1.6.4. Consideremos $T(t)$ e $S(t)$, C^0 -semigrupos de operadores lineares com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$ então $T(t) = S(t)$.

1.6.1 O Teorema de Hille-Yosida

Se A é um operador linear sobre X , não necessariamente limitado, o conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais o operador $\lambda I - A$ é inversível, ou seja, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado definido em todo o espaço X . Chamaremos de *resolvente* de A , à família dos operadores limitados $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$.

Teorema 1.6.1. (Hille-Yosida) *Um operador linear A sobre X é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, se, e somente se,*

- (i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X
- (ii) O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém o intervalo $]\omega, +\infty[$ e, para todo $\lambda > \omega$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Teorema 1.6.2. (Hille-Yosida) *Um operador linear A sobre X é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações $T(t)$, se, e somente se,*

- (i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X
- (ii) O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém o intervalo $]\omega, +\infty[$ e, para todo $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

1.6.2 O Teorema de Lumer-Phillips

Na seção anterior demos a caracterização de Hille-Yosida para o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações. Nesta seção, estaremos vendo uma outra caracterização para geradores infinitesimais.

Sejam X um espaço de Banach e X^* seu dual. Nós denotaremos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para cada $x \in X$, nós definimos o *conjunto dualidade* $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^* \text{ e } \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Definição 1.6.3. *Um operador A é dito dissipativo se, para cada $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que, $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

UNICAMP

BIBLIOTECA CENTRAL

SEÇÃO CIRCULANTE

Uma caracterização bastante usual para operadores dissipativos é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 1.6.3. *Um operador linear A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \forall x \in D(A) \text{ e } \lambda > 0.$$

Teorema 1.6.4. (Teorema de Lumer-Phillips) *Consideremos A um operador, cujo domínio $D(A)$ é denso em X .*

(a) Se A é dissipativo e se existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $(\lambda_0 I - A)$, $R(\lambda_0 I - A)$, é o conjunto X , então, A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações em X .

(b) Se A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Mais ainda, para todo $x \in D(A)$ e todo $x^ \in F(x)$, $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Definição 1.6.4. *Dizemos que um operador A é m -dissipativo, se $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Capítulo 2

Equação da Onda

Introdução

Neste capítulo, estaremos estudando a *Equação da Onda*. Consideremos, primeiramente, o caso de uma corda muito longa (comprimento infinito). Neste caso, não há condições de fronteira a satisfazer e nosso problema consiste em buscar uma função $u(x, t)$ definida no semiplano fechado, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & \quad t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{2.0.2.1}$$

onde f e g são as condições iniciais. Este problema é conhecido como um *Problema de Cauchy*.

O resultado abaixo mostra que a equação da onda tem uma solução geral. Este fato é excepcional entre as equações diferenciais parciais, que dificilmente possuem uma solução geral.

Proposição 2.0.5. *Se (x, t) satisfaz a equação da onda, com c constante, então existem funções $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que*

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Dem: Se considerarmos a mudança de variáveis,

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

e definirmos a função v por

$$v(\xi, \eta) = v(x + ct, x - ct) = u(x, t),$$

vem que,

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \quad u_{tt} = c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}.$$

Substituindo as expressões acima na equação da onda, concluímos que

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Integrando com relação a η , temos que

$$v_{\xi} = F_1(\xi),$$

e integrando com relação a ξ , obtemos

$$v(\xi, \eta) = \int F_1(\xi) d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Portanto,

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

■

2.1 Fórmula de D'Alembert

Para obter a solução do problema de Cauchy para a equação da onda, (2.0.2.1), vamos determinar F e G , usando as condições iniciais. Como $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$, temos que

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \tag{2.1.0.1}$$

e

$$u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x). \tag{2.1.0.2}$$

Integrando a última expressão, obtemos

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + K, \quad (2.1.0.3)$$

onde K é uma constante arbitrária. De (2.1.0.1) e (2.1.0.3), temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + \frac{K}{2}, \\ G(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - \frac{K}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds$$

que implica

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \quad (2.1.0.4)$$

conhecida como *Fórmula de D'Alembert*.

2.2 Existência e Unicidade de Soluções

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto e limitado, de fronteira Γ suave (classe C^2). Para $T > 0$ fixo, consideremos $Q = \Omega \times]0, T[$ e seja $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ u(0, t) = u^0, \quad u_t(0, t) = u^1 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.2.0.1)$$

onde

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

designa o operador Laplaciano.

A primeira equação é chamada *equação da onda*. A segunda equação nos dá *condições de contorno de Dirichlet*. As equações da terceira linha nos dão as *Condições Iniciais*.

O seguinte lema resume alguns importantes resultados sobre a regularidade de soluções do problema (2.2.0.1).

Lema 2.2.1. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2 . Se $u^0, u^1 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ então a solução u é tal que*

$$u \in C(0, T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.2.0.2)$$

Se $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ a solução u de (2.2.0.1) (que pertence à classe (2.2.0.2)) é uma *solução fraca* da equação. Diremos que u é uma *solução fraca* de (2.2.0.1) se u satisfaz:

$$\begin{aligned} \langle u_{tt}(t), v \rangle + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx &= 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) &= u^0, \quad u_t(0) = u^1, \end{aligned} \quad (2.2.0.3)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa a dualidade entre os espaços $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração do lema 2.2.1

Vamos escrever a equação da onda

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

na forma de um sistema de primeira ordem

$$U_t + AU = 0,$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $v = u_t$ e

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}.$$

Consideremos o espaço $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ munido do seguinte produto escalar

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx + \int_{\Omega} v_1 v_2 \, dx,$$

onde

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

O operador linear A de domínio

$$D(A) = (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

é, graças à regularidade C^2 de Γ , monótono maximal em $\mathcal{H}$. ■

2.3 Regularidade de Soluções Fracas

Consideremos a equação da onda não homogênea

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ u(0, t) = u^0, \quad u_t(0, t) = u^1 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.3.0.1)$$

A respeito da equação da onda não homogênea, temos o seguinte resultado.

Lema 2.3.1. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ de classe C^2 . Considere $q = (q_k)$ um campo de vetores de classe $[C^1(\bar{\Omega})]^n$. Então, para cada solução fraca $u = u(x, t)$ (isto é, $\forall (u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$) da equação (2.3.0.1) a seguinte identidade se verifica:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma &= \left\langle u_t, q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt. \\ &+ \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx \, dt - \int_Q f q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (2.3.0.2)$$

onde $q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$

Dem: Multiplicando a primeira equação por $q_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$ temos e integrando em Q :

$$\int_Q (u_{tt} - \Delta u) q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt = \int_Q f q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt.$$

Portanto,

$$\int_Q u_{tt} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt - \int_Q \Delta u q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt = \int_Q f q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt. \quad (2.3.0.3)$$

Fazendo a primeira integral por partes, temos

$$\int_Q u_{tt} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt = \left\langle u_t, q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_0^T - \int_Q u_t q_k \frac{\partial u_t}{\partial x_k} dx dt.$$

Mas, como consequência da fórmula de Green e do fato de que $u_t = 0$ em Σ ,

$$\begin{aligned} \int_Q u_t q_k \frac{\partial u_t}{\partial x_k} dx dt &= \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial |u_t|^2}{\partial x_k} dx dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |u_t|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_Q u_{tt} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt = \left\langle u_t, q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |u_t|^2 dx dt. \quad (2.3.0.4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_Q \Delta u q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt &= - \int_Q \nabla u \nabla \left(q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx dt + \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} d\sigma \\
&= - \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx dt + \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} d\sigma \\
&= - \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + q_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx dt \\
&\quad + \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} d\sigma
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_Q \Delta u q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt &= - \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt - \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} q_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} dx dt \\
&\quad + \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.3.0.5}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
- \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} q_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx dt &= - \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial |\nabla u|^2}{\partial x_k} dx dt \\
&= - \frac{1}{2} \int_\Sigma q_k \nu_k |\nabla u|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla u|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{2.3.0.6}$$

Já que $u = 0$ em Σ , temos uma curva de nível. Portanto, como o gradiente de u é ortogonal à curva de nível, é paralelo ao vetor normal unitário. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad \forall k = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad |\nabla u|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \quad \text{em } \Sigma \tag{2.3.0.7}$$

Donde,

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} d\sigma = \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} q_k \nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Sigma q_k \nu_k \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma. \tag{2.3.0.8}$$

Agora, de (2.3.0.6), (2.3.0.7) e (2.3.0.8)

$$\begin{aligned}
\int_Q \Delta u q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt &= - \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla u|^2 dx dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma + \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma \\
&= - \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla u|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.3.0.9}$$

Substituindo (2.3.0.4) e (2.3.0.9) em (2.3.0.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_Q f q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt &= \left\langle u_t, q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |u_t|^2 dx dt \\
&\quad + \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla u|^2 dx dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma &= \left\langle u_t, q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\
&\quad + \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt - \int_Q f q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt.
\end{aligned} \tag{2.3.0.10}$$

■

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f_t & \text{em } Q \\ u &= 0 & \text{em } \Sigma \\ u(0, t) &= u_t(0, t) = 0. \end{aligned} \tag{2.3.0.11}$$

Onde $f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ (isto é $f_t \in W^{-1,1}(0, T; H_0^1(\Omega))$).

Vamos mostrar que

$$\|u(x, T)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_t(x, T)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}. \tag{2.3.0.12}$$

Por um argumento de densidade, é suficiente provar que (2.3.0.12) vale para $f \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$.

Consideremos a mudança de variável $u = U_t$. Substituindo em (2.3.0.11), temos que

$$\begin{aligned} U_{ttt} - \Delta U_t &= f_t & \text{em } Q \\ U(0, t) &= U_t(0, t) = 0, \end{aligned}$$

já que $u(0, t) = u_t(0, t) = 0 \Rightarrow u_{tt}(0, t) = 0 \Rightarrow U(0, t) = U_t(0, t) = 0$.

Integrando por partes de 0 a t , temos que

$$\begin{aligned} U_{tt}(x, t) - U_{tt}(x, 0) - \Delta U(x, t) + \Delta U(x, 0) &= f(x, t) - f(x, 0) \\ U(x, t) - U(x, 0) &= 0, \text{ em } \Sigma. \end{aligned}$$

Como f é de suporte compacto em $]0, T[$ e é suave, f se anula numa vizinhança de $t = 0$. Em particular, $f(x, 0) = 0$. Além disso, como $u = 0$ em Σ , vem que $u_{tt} = 0$ em Σ e como $\nabla U_t(x, 0) = 0 = \Delta U(x, 0)$, temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
U_{tt} - \Delta U &= f & \text{em } Q \\
U &= 0 & \text{em } \Sigma \\
U(0, t) &= U_t(0, t) = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.0.13}$$

Agora, fazendo o produto escalar por ΔU_t , na equação (2.3.0.13) e integrando em x , obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta U_t U_{tt} dx + \int_{\Omega} \Delta U_t \Delta U dx = -\int_{\Omega} \Delta U_t f dx. \tag{2.3.0.14}$$

Como $f \in C_0^\infty([0, T[; C_0^\infty(\Omega))$, $\frac{\partial U_t}{\partial \nu} = 0$ em $\partial\Omega$. Aplicando o teorema de Green, na primeira e na última integrais, temos

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \Delta U_t U_{tt} dx &= \int_{\Omega} \nabla U_{tt} \nabla U_t dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial U_t}{\partial \nu} U_{tt} dS}_{=0} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |\nabla U_t|^2 dx
\end{aligned}$$

e

$$-\int_{\Omega} \Delta U_t f dx = \int_{\Omega} \nabla f \nabla U_t dx.$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} \Delta U_t \Delta U dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |\Delta U|^2 dx.$$

Assim, a equação (2.3.0.14) fica sendo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla U_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta U\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \langle \nabla f, \nabla U_t \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Como $\nabla U_t(x, 0) = 0 = \Delta U(x, 0)$, temos, integrando de 0 a t ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\nabla U_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta U\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &= \int_0^t \langle \nabla f, \nabla U_t \rangle_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \int_0^t \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla U_t\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned} \quad (2.3.0.15)$$

Assim,

$$\|\nabla U_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \int_0^t \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla U_t\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Pelo Lema (1.4.1), temos que

$$\|\nabla U_t\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \int_0^t \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} ds \leq 2 \int_0^T \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} ds = 2 \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (2.3.0.16)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta U\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_0^t \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla U_t\|_{L^2(\Omega)} ds \leq 2 \int_0^t \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} ds \\ &= 2 \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \int_0^t \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} ds \leq 2 \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Delta U\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (2.3.0.17)$$

Como consequência de (2.3.0.16) e de (2.3.0.17), temos que ΔU e ∇U_t são limitados. De maneira análoga, podemos mostrar que ∇U também é limitado.

Já que ΔU , ∇U_t e ∇U são limitados, temos que

$$U \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \text{ e } U_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2.3.0.18)$$

A aplicação que leva $f \mapsto U$ é contínua de $L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ em $S = \{U \in Q : U \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ e } U_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\}$. Mais ainda,

$$\|U(x, T)\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} + \|U_t(x, T)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}. \quad (2.3.0.19)$$

Agora, $U_t(x, T) = u(x, T)$. Além disso, já que $f = 0$ em uma vizinhança de $t = T$, temos que $u_t(x, T) = U_{tt}(x, T) = \Delta U(x, T)$. Deste modo,

$$\|u(x, T)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|U_t(x, T)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}$$

e, de (2.3.0.17),

$$\|u_t(x, T)\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta U(x, T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U(x, T)\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}.$$

Portanto,

$$\|u(x, T)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_t(x, T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}. \quad (2.3.0.20)$$

Devemos mostrar agora que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}.$$

Multiplicando a primeira equação de (2.3.0.11) por $h_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$, onde $h_k \in C^1(\bar{\Omega})$, $h_k = \nu_k$ em $\partial\Omega$, obtemos pelo lema anterior (2.3.0.10) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma &= \left\langle u_t(x, T), h_k \frac{\partial u(x, T)}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\
&+ \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt - \int_Q f_t h_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt.
\end{aligned} \tag{2.3.0.21}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_Q f_t h_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt &= \left\langle f h_k, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_0^T - \int_Q f h_k \frac{\partial u_t}{\partial x_k} dx dt \\
&= - \int_Q f h_k \frac{\partial u_t}{\partial x_k} dx dt \\
&= \int_Q \frac{\partial(f h_k)}{\partial x_k} u_t dx dt,
\end{aligned} \tag{2.3.0.22}$$

já que $f(0) = f(T) = 0$, por ser de suporte em $]0, T[$.

Reconsideremos nossa mudança de variáveis. Como $u = U_t$, $u_t = U_{tt} = \Delta U + f$. Substituindo em (2.3.0.22), temos

$$\begin{aligned}
\int_Q f_t h_k \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt &= \int_Q \left(\frac{\partial(f h_k)}{\partial x_k} \Delta U + \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |f|^2 + \frac{h_k}{2} \frac{\partial(f^2)}{\partial x_k} \right) dx dt \\
&= \int_Q \left(\frac{\partial(f h_k)}{\partial x_k} \Delta U + \frac{1}{2} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |f|^2 \right) dx dt,
\end{aligned} \tag{2.3.0.23}$$

após integrarmos o último termo por partes.

Substituindo (2.3.0.23) em (2.3.0.21) e como $U_{tt} = \Delta U + f$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma &= \left\langle u_t(x, T), h_k \frac{\partial u(x, T)}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} ((\Delta U)^2 + 2f\Delta U + |f|^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\
&- \int_Q \left(\frac{\partial(f h_k)}{\partial x_k} \Delta U + \frac{1}{2} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |f|^2 \right) dx dt.
\end{aligned}$$

Simplificando a expressão, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma &= \left\langle u_t(x, T), h_k \frac{\partial u(x, T)}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} ((\Delta U)^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\ &+ \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt - \int_Q h_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta U dx dt. \end{aligned}$$

De (2.3.0.18) e (2.3.0.19), temos que o segundo membro da equação é majorado por $C \|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}^2$. Portanto,

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))}.$$

Capítulo 3

A Equação da Onda com um Ponto de Massa no Interior

3.1 Formulação do Problema e Primeiros Resultados

Estaremos considerando o sistema corda-massa formado por duas cordas, unidas em um ponto de massa comum. O comprimento da primeira corda é l_1 e o da segunda é l_2 , onde l_1 e l_2 são positivos. Assim, a primeira corda ocupa $\Omega_1 =]-l_1, 0[\subset \mathbb{R}$ e a segunda ocupa $\Omega_2 =]0, l_2[\subset \mathbb{R}$.

Para simplificar a exposição do problema, suporemos que ambas as cordas são homogêneas. As deformações da primeira e da segunda corda serão descritas, respectivamente, pelas funções

$$\begin{aligned}u &= u(x, t), & x &\in \Omega_1, & t &> 0, \\v &= v(x, t), & x &\in \Omega_2, & t &> 0.\end{aligned}$$

A posição da massa é descrita pela função $z = z(t)$ para $t > 0$.

Para fixar as idéias, consideremos as cordas satisfazendo condições de contorno de Dirichlet, nos pontos $x = -l_1$ e $x = l_2$. Então, o sistema de equações que modela nosso problema é o seguinte:

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} = \sigma_1 u_{xx}, & x \in \Omega_1, & t > 0, \\ \rho_2 v_{tt} = \sigma_2 v_{xx}, & x \in \Omega_2, & t > 0, \\ M z_{tt}(t) + \sigma_1 u_x(0, t) - \sigma_2 v_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(-l_1, t) = v(l_2, t) = 0, & t > 0, \\ u(0, t) = v(0, t) = z(t), & t > 0. \end{cases} \quad (3.1.0.1)$$

As constantes $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$ representam a densidade de cada corda. A massa, no ponto de massa $x = 0$, é dada por $M > 0$. As tensões em cada corda são assumidas positivas e denotadas por σ_1 e σ_2 .

Se as únicas forças que estiverem atuando sobre o ponto de massa forem aquelas provenientes da corda, então $\sigma_1 = \sigma_2$. Caso alguma força externa esteja presente (por exemplo, a ação da gravidade ao longo do eixo x), então $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Naturalmente, para determinar uma solução de (3.1.0.1), temos que acrescentar condições iniciais, para $t = 0$, que serão representadas por

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u^0(x), & u_t(x, 0) &= u^1(x), & x &\in \Omega_1, \\ v(x, 0) &= v^0(x), & v_t(x, 0) &= v^1(x), & x &\in \Omega_2, \\ z(0) &= z^0, & z_t(0) &= z^1. \end{aligned} \quad (3.1.0.2)$$

Para que estejamos nas condições de (3.1.0.1), precisamos impor em (3.1.0.2) a condição de compatibilidade $u^0(0) = v^0(0) = z^0$.

A equação que descreve a energia do sistema é

$$\begin{aligned} E_M(t) &= \frac{1}{2} \int_{-l_1}^0 [\rho_1 |u_t(x, t)|^2 + \sigma_1 |u_x(x, t)|^2] dx + \frac{M}{2} |z_t(t)|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{l_2} [\rho_2 |v_t(x, t)|^2 + \sigma_2 |v_x(x, t)|^2] dx. \end{aligned} \quad (3.1.0.3)$$

Para soluções de (3.1.0.1), esta energia é constante no tempo. Mais tarde, tal fato nos motivará na definição de uma norma conservativa.

Vejam os que $E_M(t)$ é constante, já que sua derivada com relação a t é nula:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_M(t) &= \int_{-l_1}^0 [\rho_1 u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + \sigma_1 u_x(x, t) u_{xt}(x, t)] dx + M z_t(t) z_{tt}(t) \\ &\quad + \int_0^{l_2} [\rho_2 v_t(x, t) v_{tt}(x, t) + \sigma_2 v_x(x, t) v_{xt}(x, t)] dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira ea terceira integrais:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_M(t) &= \int_{-l_1}^0 u_t(x, t) \underbrace{[\rho_1 u_{tt} - \sigma_1 u_{xx}]}_{=0} dx + \sigma_1 u_x(0, t) z_t(t) + M z_t(t) z_{tt}(t) \\ &\quad + \int_{-l_1}^0 v_t(x, t) \underbrace{[\rho_2 v_{tt} - \sigma_2 v_{xx}]}_{=0} dx - \sigma_2 v_x(0, t) z_t(t) \\ &= z_t(t) [M z_{tt}(t) + \sigma_1 u_x(0, t) - \sigma_2 v_x(0, t)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Veremos que a presença do ponto de massa introduz importantes mudanças no comportamento do sistema, com relação à observação das propriedades.

3.2 Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

3.2.1 Condições de Contorno Homogêneas

Vamos introduzir as seguintes variáveis:

$$\hat{u} = u_t, \quad \hat{v} = v_t, \quad \hat{z} = z_t.$$

Assim,

$$\hat{u}_t = \frac{\sigma_1}{\rho_1} u_{xx}, \quad \hat{v}_t = \frac{\sigma_2}{\rho_2} v_{xx}, \quad \hat{z}_t = -\frac{\sigma_1}{M} u_x(0) + \frac{\sigma_2}{M} v_x(0).$$

Consideremos $y = (u, v, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z})$. Precisamos de um espaço $\mathcal{H}$ tal que $y \in \mathcal{H}$. Vamos definir os espaços $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ por

$$\mathcal{W} = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times \mathbb{R}$$

e

$$\mathcal{V} = \{(u, v) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 : u(0) = v(0)\},$$

onde

$$\mathcal{V}_1 = \{u \in H^1(\Omega_1) : u(-l_1) = 0\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \{v \in H^1(\Omega_2) : v(l_2) = 0\}$$

munidos das seguintes normas:

$$\|u\|_{\mathcal{V}_1}^2 = \int_{\Omega_1} |u_x(x)|^2 dx$$

$$\|v\|_{\mathcal{V}_2}^2 = \int_{\Omega_2} |v_x(x)|^2 dx$$

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{V}}^2 = \|u\|_{\mathcal{V}_1}^2 + \|v\|_{\mathcal{V}_2}^2.$$

Observação 3.2.1. Devemos notar que o espaço $\mathcal{V}$ é algebricamente e topologicamente equivalente ao espaço $H_0^1(-l_1, l_2)$ (pela desigualdade de Poincaré).

Consideremos o espaço definido por $\mathcal{H} = \mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Sejam $y_1 = (u_1, v_1, \hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{z}_1) \in \mathcal{H}$ e $y_2 = (u_2, v_2, \hat{u}_2, \hat{v}_2, \hat{z}_2) \in \mathcal{H}$. Motivados pela equação de energia (3.1.0.3), a definição natural para o produto interno de $\mathcal{H}$ é a seguinte:

$$\langle y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-l_1}^0 \sigma_1 u_1' u_2' dx + \int_0^{l_2} \sigma_2 v_1' v_2' dx + \int_{-l_1}^0 \rho_1 \hat{u}_1 \hat{u}_2 dx + \int_0^{l_2} \rho_2 \hat{v}_1 \hat{v}_2 dx + M \hat{z}_1 \hat{z}_2, \quad (3.2.1.1)$$

onde denotamos $\frac{du}{dx} = u'$.

Naturalmente, com este produto interno, $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Além disso, temos a seguinte norma conservativa:

$$\|y\|_{\mathcal{H}}^2 = \sigma_1 \int_{-l_1}^0 |u_x|^2 dx + \sigma_2 \int_0^{l_2} |v_x|^2 dx + \rho_1 \int_{-l_1}^0 |\hat{u}|^2 dx + \rho_2 \int_0^{l_2} |\hat{v}|^2 dx + M |\hat{z}|^2. \quad (3.2.1.2)$$

Tomemos $D(\mathcal{A})$ como sendo

$$D(\mathcal{A}) = \{y \in \mathcal{H} : u \in H^2(\Omega_1), v \in H^2(\Omega_2), (\hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{V}, \hat{u}(0) = \hat{v}(0) = \hat{z}\}.$$

Podemos, agora, definir um operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que

$$\mathcal{A}(u, v, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z}) = \left(\hat{u}, \hat{v}, \frac{\sigma_1}{\rho_1} u'', \frac{\sigma_2}{\rho_2} v'', -\frac{\sigma_1}{M} u'(0) + \frac{\sigma_2}{M} v'(0) \right). \quad (3.2.1.3)$$

Note que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$ e que $\mathcal{A}$ é linear. Além disso, o sistema (3.1.0.1)(3.1.0.2) pode ser visto como o seguinte problema de evolução em $\mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{A}y, \quad y(0) = y^0 = (u^0, v^0, u^1, v^1, z^1). \quad (3.2.1.4)$$

Lema 3.2.1. $\mathcal{A}$ é um operador m -dissipativo.

Dem: Dado $y \in D(\mathcal{A})$, temos que

$$\begin{aligned} \langle y, \mathcal{A}y \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{-l_1}^0 \sigma_1 u' \hat{u}' dx + \int_0^{l_2} \sigma_2 v' \hat{v}' dx + \int_{-l_1}^0 \rho_1 \hat{u} \frac{\sigma_1}{\rho_1} u'' dx + \int_0^{l_2} \rho_2 \hat{v} \frac{\sigma_2}{\rho_2} v'' dx \\ &\quad + M \hat{z} \left(-\frac{\sigma_1}{M} u'(0) + \frac{\sigma_2}{M} v'(0) \right). \end{aligned}$$

Se integrarmos por partes, a terceira e a quarta integrais, obtemos

$$\langle y, \mathcal{A}y \rangle_{\mathcal{H}} = \sigma_1 u'(0) \hat{z} - \sigma_2 v'(0) \hat{z} + \hat{z} (-\sigma_1 u'(0) + \sigma_2 v'(0)) = 0.$$

O que mostra que $\mathcal{A}$ é dissipativo. Na verdade, $\mathcal{A}$ é conservativo.

Vejamos agora que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Im(\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que, para cada $y_0 = (u_0, v_0, \hat{u}_0, \hat{v}_0, \hat{z}_0) \in \mathcal{H}$ dado, a equação

$$(\lambda - \mathcal{A})y = y_0 \quad (3.2.1.5)$$

tem solução $y \in D(\mathcal{A})$.

A equação (3.2.1.5) pode ser escrita como o seguinte sistema

$$\lambda u - \hat{u} = u_0 \quad (3.2.1.6)$$

$$\lambda v - \hat{v} = v_0 \quad (3.2.1.7)$$

$$\lambda \hat{u} - \frac{\sigma_1}{\rho_1} u'' = \hat{u}_0 \quad (3.2.1.8)$$

$$\lambda \hat{v} - \frac{\sigma_2}{\rho_2} v'' = \hat{v}_0 \quad (3.2.1.9)$$

$$\lambda \hat{z} - \frac{\sigma_1}{M} u'(0) - \frac{\sigma_2}{M} v'(0) = \hat{z}_0. \quad (3.2.1.10)$$

Façamos $a^2 = \frac{\sigma_1}{\rho_1}$ e $b^2 = \frac{\sigma_2}{\rho_2}$. Substituindo (3.2.1.6) em (3.2.1.8) e (3.2.1.7) em (3.2.1.9), temos

$$a^2 u'' - \lambda^2 \hat{u} = -\lambda u_0 - \hat{u}_0 \quad (3.2.1.11)$$

$$b^2 v'' - \lambda^2 \hat{v} = -\lambda v_0 - \hat{v}_0. \quad (3.2.1.12)$$

Vamos resolver (3.2.1.11). Considerando $w = u'$, podemos reescrever (3.2.1.11) como o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u' = w \\ w' = \frac{\lambda^2}{a^2} u - \frac{\lambda}{a^2} u_0 + \frac{\hat{u}_0}{a^2}. \end{cases}$$

Ou, ainda,

$$\begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\lambda^2}{a^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda}{a^2} + \frac{\hat{u}_0}{a^2} \end{pmatrix}$$

que pode ser visto como a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$z' = Az + b.$$

A solução de tal equação é, como já sabemos,

$$z(x) = z(x_0)e^{A(x-x_0)} + \int_{x_0}^x e^{A(x-s)}b(s)ds,$$

onde

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda x) & \frac{a}{\lambda} \sinh(\lambda x) \\ \frac{\lambda}{a} \sinh(\lambda x) & \cosh(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Tomando $x_0 = -l_1$, temos que a solução de (3.2.1.11) fica sendo

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = e^{A(x+l_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ u'(-l_1) \end{pmatrix} + \int_{-l_1}^x e^{A(x-s)}b(s)ds. \quad (3.2.1.13)$$

Analogamente, tomando $x_0 = l_2$, a solução de (3.2.1.12) é

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = e^{B(x-l_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ v'(l_2) \end{pmatrix} + \int_{l_2}^x e^{B(x-s)}c(s)ds, \quad (3.2.1.14)$$

onde

$$e^{Bx} = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda x) & \frac{b}{\lambda} \sinh(\lambda x) \\ \frac{\lambda}{b} \sinh(\lambda x) & \cosh(\lambda x) \end{pmatrix}$$

e

$$c(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda}{b^2} + \frac{\hat{v}_0(s)}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Para solucionarmos (3.2.1.11) e (3.2.1.12), precisamos encontrar os valores de $u'(-l_1)$ e $v'(l_2)$. Para tanto, vamos utilizar as condições para as quais $y \in D(\mathcal{A})$

$$u(0) = v(0), \quad (3.2.1.15)$$

$$\hat{u}(0) = \hat{v}(0) = \hat{z}. \quad (3.2.1.16)$$

Calculando os vetores $\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$ no ponto $x = 0$, temos

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = e^{Al_1} \begin{pmatrix} 0 \\ u'(-l_1) \end{pmatrix} + \int_{-l_1}^0 e^{-As} b(s) ds$$

e

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = e^{-Bl_2} \begin{pmatrix} 0 \\ v'(l_2) \end{pmatrix} + \int_{l_2}^0 e^{-Bs} c(s) ds.$$

Usando (3.2.1.10), (3.2.1.15), (3.2.1.16) nas expressões acima, obtemos

$$\frac{a \sinh(\lambda l_1)}{\lambda} u'(-l_1) + \frac{b \sinh(\lambda l_2)}{\lambda} v'(l_2) = \gamma_1 \quad (3.2.1.17)$$

$$\left[a \lambda \sinh(\lambda l_1) + \frac{\sigma_1 \cosh(\lambda l_1)}{M} \right] u'(-l_1) - \frac{\sigma_2 \sinh(\lambda l_2)}{M} v'(l_2) = \gamma_2. \quad (3.2.1.18)$$

Onde

$$\gamma_1 = \frac{1}{b\lambda} \int_{l_2}^0 \sinh(\lambda s) [-\lambda v_o(s) + \hat{v}_0(s)] ds - \frac{1}{a\lambda} \int_{-l_1}^0 \sinh(\lambda s) [-\lambda u_o(s) + \hat{u}_0(s)] ds,$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \hat{z}_0 - \frac{1}{a} \int_{-l_1}^0 \sinh(\lambda s) [-\lambda u_o(s) + \hat{u}_0(s)] ds + \lambda u_0(0) \\ &\quad - \frac{\sigma_1}{a^2 M} \int_{-l_1}^0 \cosh(\lambda s) [-\lambda u_o(s) + \hat{u}_0(s)] ds + \frac{\sigma_2}{b^2 M} \int_{l_2}^0 \cosh(\lambda s) [-\lambda v_o(s) + \hat{v}_0(s)] ds. \end{aligned}$$

O determinante da matriz principal do sistema (3.2.1.17)(3.2.1.18) é

$$\sinh(\lambda l_2) \left[-a \left(\frac{\sigma_2}{\lambda M} + b \right) \sinh(\lambda l_1) - \frac{b\sigma_1}{\lambda M} \cosh(\lambda l_1) \right]. \quad (3.2.1.19)$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, se $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$, então $\sinh(\lambda l_2) \neq 0$ e $\sinh(\lambda l_1) \neq 0$. Além disso, $\sinh(\lambda l_1)$ e $\cosh(\lambda l_1)$ são linearmente independentes. Vemos, assim, que o determinante (3.2.1.19) é não nulo. Portanto, o sistema (3.2.1.17)(3.2.1.18) possui solução única $u'(-l_1)$ e $v'(l_2)$.

Substituindo os valores de $u'(-l_1)$ e de $v'(l_2)$ em (3.2.1.13) e (3.2.1.14), respectivamente, vemos que existe $y \in D(\mathcal{A})$, que é solução de (3.2.1.5).

■

Na verdade, pelo lema 3.2.1 e pelo teorema de Lumer-Phillips, acabamos de provar o seguinte resultado de existência e unicidade de soluções para (3.2.1.4).

Proposição 3.2.1.

(i) *Para cada $y^0 \in \mathcal{H}$ existe uma única solução de (3.2.1.4) tal que*

$$(u, v) \in C([0, T]; \mathcal{V}), \quad (u_t, v_t, z_t) \in C([0, T]; \mathcal{W}) \quad (3.2.1.20)$$

Mais ainda, a energia E_M permanece constante ao longo da trajetória desta solução.

(ii) *Se $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então a solução correspondente tem a seguinte regularidade adicional:*

$$\begin{aligned} u &\in C^0([0, T]; H^2(\Omega_1)) \cap C^1([0, T]; H^1(\Omega_1)), \\ v &\in C^0([0, T]; H^2(\Omega_2)) \cap C^1([0, T]; H^1(\Omega_2)). \end{aligned} \quad (3.2.1.21)$$

Nós chamaremos soluções de energia finita, as soluções que satisfazem (3.2.1.20).

Observação 3.2.2. *A posição do ponto de massa $z(t) = u(0, t) = v(0, t)$ é obtida por:*

$$z(t) = u^0(0) + \int_0^t \hat{z}(s) ds.$$

Para soluções de energia finita, podemos obter o seguinte resultado .

Proposição 3.2.2. *Para todo $T > 0$, existe algum $C(T) > 0$, tal que a seguinte desigualdade é verdadeira, para soluções de energia finita:*

$$\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt \leq CE_M(0) \quad (3.2.1.22)$$

Dem: Consideremos o sistema (3.1.0.1). Multiplicando a primeira equação por $p(x)u_x$ e a segunda por $q(x)v_x$ e integrando, temos

$$\rho_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 p(x)u_x u_{tt} dx dt = \sigma_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 p(x)u_x u_{xx} dx dt \quad (3.2.1.23)$$

e

$$\rho_2 \int_0^T \int_0^{l_2} q(x)v_x v_{tt} dx dt = \sigma_2 \int_0^T \int_0^{l_2} q(x)v_x v_{xx} dx dt. \quad (3.2.1.24)$$

Integrando formalmente por partes com relação a t , o lado esquerdo da equação (3.2.1.23), e com relação a x , o lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_{-l_1}^0 p(x)u_x u_t \Big|_0^T dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 p(x) \frac{d|u_t|^2}{dx} dx dt = \\ & = \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T p(x)|u_x|^2 \Big|_{-l_1}^0 dt - \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 p_x(x)|u_x(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.2.1.25)$$

Integrando por partes, com relação a x , a segunda integral do lado esquerdo de (3.2.1.25), temos

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_{-l_1}^0 p(x)u_x u_t \Big|_0^T dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^T p(x)|u_t|^2 \Big|_{-l_1}^0 dt + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 p_x(x)|u_t|^2 dx dt = \\ & = \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T p(x)|u_x|^2 \Big|_{-l_1}^0 dt - \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 p_x(x)|u_x(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.2.1.26)$$

Do mesmo modo, da equação (3.2.1.24), obtemos

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_0^{l_2} q(x) v_x v_t \Big|_0^T dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^T q(x) |v_t|^2 \Big|_0^{l_2} dt + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^{l_2} q_x(x) |v_t|^2 dx dt = \\ & = \frac{\sigma_2}{2} \int_0^T q(x) |v_x|^2 \Big|_0^{l_2} dt - \frac{\sigma_2}{2} \int_0^T \int_0^{l_2} q_x(x) |v_x(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.2.1.27)$$

Agora, se tomarmos $(p, q) \in C^1(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2)$ e tais que $p(0) = q(0) = 0$, $p(-l_1) = -\frac{2}{\sigma_1}$ e $q(l_2) = \frac{2}{\sigma_2}$, temos como decorrência da soma de (3.2.1.26) e de (3.2.1.27) que

$$\begin{aligned} \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &= \rho_1 \int_{-l_1}^0 p(x) u_x u_t \Big|_0^T dx + \rho_2 \int_0^{l_2} q(x) v_x v_t \Big|_0^T dx \\ &\quad - \underbrace{\left[\frac{\rho_1}{\sigma_1} \int_0^T |u_t(-l_1, t)|^2 dt + \frac{\rho_2}{\sigma_2} \int_0^T |v_t(l_2, t)|^2 dt \right]}_{=0} \\ &\quad + \int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{p_x(x)}{2} [\rho_1 |u_t(x, t)|^2 + \sigma_1 |u_x(x, t)|^2] dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{l_2} \frac{q_x(x)}{2} [\rho_2 |v_t(x, t)|^2 + \sigma_2 |v_x(x, t)|^2] dx dt. \end{aligned}$$

Como $(p, q) \in C^1(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2)$, existe $k > 0$, tal que

$$|p(x)| \leq k, \quad |p_x(x)| \leq k \quad \text{e} \quad |q(x)| \leq k, \quad |q_x(x)| \leq k. \quad (3.2.1.28)$$

Além disso, devemos lembrar que

$$|ab| \leq \frac{|a|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2}.$$

Assim, nossa estimativa passa a ser

$$\begin{aligned}
\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &\leq \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} \int_{-l_1}^0 [\sigma_1 |u_x(x, T)|^2 + \rho_1 |u_t(x, T)|^2] dx \\
&+ \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} \int_{-l_1}^0 [\sigma_1 |u_x(x, 0)|^2 + \rho_1 |u_t(x, 0)|^2] dx \\
&+ \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \int_0^{l_2} [\sigma_2 |v_x(x, T)|^2 + \rho_2 |v_t(x, T)|^2] dx \\
&+ \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \int_0^{l_2} [\sigma_2 |v_x(x, 0)|^2 + \rho_2 |v_t(x, 0)|^2] dx \\
&+ \frac{k}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 [\rho_1 |u_t(x, t)|^2 + \sigma_1 |u_x(x, t)|^2] dx dt \\
&+ \frac{k}{2} \int_0^T \int_0^{l_2} [\rho_2 |v_t(x, t)|^2 + \sigma_2 |v_x(x, t)|^2] dx dt.
\end{aligned}$$

Consideremos $C_1 = \max \left\{ \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}}, \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}}, \frac{k}{2}, k \right\}$.

Então,

$$\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt \leq C_1 E_M(T) + C_1 E_M(0) + C_1 \int_0^T E_M(t) dt.$$

Como $E_M(t) = E_M(0)$, $\forall t$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &= 2C_1 E_M(0) + C_1 \int_0^T E_M(0) dt \\
&= (2 + T)C_1 E_M(0) \\
&= C E_M(0).
\end{aligned}$$

■

Observação 3.2.3. *Reciprocamente, para soluções de energia finita, na ausência de massa, se $T > \left(l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \right)$ existe $C(T) > 0$ tal que*

$$E_0(0) \leq C \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt. \quad (3.2.1.29)$$

Dem: Somando (3.2.1.26) e (3.2.1.27), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 p_x |u_t|^2 + \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 p_x |u_t|^2 + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^{l_2} q_x |v_t|^2 + \frac{\sigma_2}{2} \int_0^T \int_0^{l_2} q_x |v_t|^2 = \\ &= \frac{\rho_1}{2} \int_0^T p |u_t|^2 \Big|_{-l_1}^0 dt + \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T p |u_x|^2 \Big|_{-l_1}^0 dt - \rho_1 \int_{-l_1}^0 p u_x u_t \Big|_0^T dx - \rho_2 \int_0^{l_2} q v_x v_t \Big|_0^T dx + \\ &+ \frac{\rho_2}{2} \int_0^T q |v_t|^2 \Big|_0^{l_2} dt + \frac{\sigma_2}{2} \int_0^T q |v_x|^2 \Big|_0^{l_2} dt. \end{aligned} \quad (3.2.1.30)$$

Se tomarmos $p(x) = x$, $x \in \Omega_1$ e $q(x) = x$, $x \in \Omega_2$, impondo $p(0) = q(0) = 0$, temos que $p_x(x) = 1$, $x \in \Omega_1$ e $q_x(x) = 1$, $x \in \Omega_2$.

Assim, a expressão (3.2.1.30) passa a ser

$$\begin{aligned} & \int_0^T E_0(0) = \\ &= \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 |u_t|^2 + \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T \int_{-l_1}^0 |u_x|^2 + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^{l_2} |v_t|^2 + \frac{\sigma_2}{2} \int_0^T \int_0^{l_2} |v_x|^2 = \\ &= \frac{\rho_1}{2} \int_0^T -p(-l_1) |u_t(-l_1, t)|^2 dt + \frac{\sigma_1}{2} \int_0^T -p(-l_1) |u_x(-l_1, t)|^2 dt - \rho_1 \int_{-l_1}^0 x u_x u_t \Big|_0^T dx + \\ &+ \frac{\rho_2}{2} \int_0^T q(l_2) |v_t(l_2, t)|^2 dt + \frac{\sigma_2}{2} \int_0^T q(l_2) |v_x(l_2)|^2 dt - \rho_2 \int_0^{l_2} x v_x v_t \Big|_0^T dx. \end{aligned}$$

Como $u(-l_1, t) = v(l_2, t) = 0$ temos que $u_t(-l_1, t) = v_t(l_2, t) = 0$. Além disso, $p(-l_1) = -l_1$, $q(l_2) = l_2$ e $x \in \Omega_1 \Rightarrow -l_1 < x < 0 \Rightarrow -x < l_1$, $x \in \Omega_2 \Rightarrow 0 < x < l_2 \Rightarrow x < l_2$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^T E_0(0) &= \frac{\sigma_1 l_1}{2} \int_0^T |u_x(-l_1, t)|^2 dt + \frac{\sigma_2 l_2}{2} \int_0^T |v_x(l_2, t)|^2 dt \\
&+ \frac{\rho_1}{2} \int_{-l_1}^0 (-x) u_x u_t \Big|_0^T dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^{l_2} x v_x v_t \Big|_0^T dx \\
&\leq \frac{\sigma_1 l_1}{2} \int_0^T |u_x(-l_1, t)|^2 dt + \frac{\rho_1 l_1}{\sqrt{\rho_1} \sqrt{\sigma_1}} \int_{-l_1}^0 (|\sqrt{\rho_1} u_x| |\sqrt{\sigma_1} u_t|) \Big|_0^T dx \\
&+ \frac{\sigma_2 l_2}{2} \int_0^T |v_x(l_2, t)|^2 dt + \frac{\rho_2 l_2}{\sqrt{\rho_2} \sqrt{\sigma_2}} \int_0^{l_2} (|\sqrt{\rho_2} v_x| |\sqrt{\sigma_2} v_t|) \Big|_0^T dx.
\end{aligned}$$

Tomando $k = \max \left\{ \frac{\sigma_1 l_1}{2}, \frac{\sigma_2 l_2}{2} \right\}$, temos

$$\begin{aligned}
TE_0(0) &= k \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt + l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} \int_{-l_1}^0 \frac{\rho_1}{2} |u_x(x, T)|^2 dx \\
&+ l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} \int_{-l_1}^0 \frac{\sigma_1}{2} |u_t(x, T)|^2 dx + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \int_0^{l_2} \left[\frac{\rho_2}{2} |v_x(x, T)|^2 + \frac{\sigma_2}{2} |v_t(x, T)|^2 \right] dx \\
&\leq k \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt \\
&+ \left(l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \right) \int_0^{l_2} \left[\frac{\rho_2}{2} |v_x(x, T)|^2 + \frac{\sigma_2}{2} |v_t(x, T)|^2 \right] dx \\
&+ \left(l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \right) \int_{-l_1}^0 \left[\frac{\rho_1}{2} |u_x(x, T)|^2 + \frac{\sigma_1}{2} |u_t(x, T)|^2 \right] dx \\
&\leq k \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt + \left(l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \right) E_0(T) \\
&= k \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt + \left(l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \right) E_0(0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[T - \left(l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \right) \right] E_0(0) \leq k \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt.$$

Como, por hipótese, $T > \left(l_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} + l_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\sigma_2}} \right)$,

$$E_0(0) \leq C \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt.$$

■

É conveniente considerarmos o sistema (3.1.0.1) na presença de forças externas. Neste caso, temos

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} = \sigma_1 u_{xx} + f(x, t), & x \in \Omega_1, & 0 < t < T, \\ \rho_2 v_{tt} = \sigma_2 v_{xx} + g(x, t), & x \in \Omega_2, & 0 < t < T, \\ M z_{tt}(t) + \sigma_1 u_x(0, t) - \sigma_2 v_x(0, t) = h(t), & 0 < t < T, \\ u(-l_1, t) = v(l_2, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0, t) = v(0, t) = z(t), & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3.2.1.31)$$

Neste caso, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.3. *Para cada $y^0 = (u^0, v^0, u^1, v^1, z^1) \in \mathcal{H}$ e $(f, g, h) \in L^1(0, T; \mathcal{W})$, existe uma única solução de (3.2.1.31)(3.1.0.2), na classe (3.2.1.20). Mais ainda, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &\leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))}^2 + \|h\|_{L^1(0, T)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.1.32)$$

Dem: Reescrevendo o problema (3.2.1.31)(3.1.0.2) como uma equação de evolução, temos

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{A}y + b, \quad y(0) = y^0, \quad (3.2.1.33)$$

onde $b(s) = \left(0, 0, \frac{f(x, s)}{\rho_1}, \frac{g(x, s)}{\rho_2}, \frac{h(s)}{M}\right)$.

Pela fórmula da variação de parâmetros, temos que a solução de (3.2.1.33) é única, dada por

$$y = T(t)y^0 + \int_0^t T(t-s)b(s) ds. \quad (3.2.1.34)$$

Além disso, como $T(t)$ é C^0 -semigrupo e $(f, g, h) \in L^1(0, T; \mathcal{W})$, segue (3.2.1.20).

Sabemos que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ e podemos supor, sem perda de generalidade, $\|T(t)\| \leq C$, para $0 < t < T$. Portanto, de (3.2.1.34), temos que

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{H}} &\leq C\|y^0\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^T \|(f, g, h)\|_{\mathcal{W}} \\ &= C\|y^0\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^T \left(\|f\|_{L^2(\Omega_1)} + \|g\|_{L^2(\Omega_2)} + \|h\|_{\mathbb{R}} \right) ds \\ &= C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))} + \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.1.35)$$

Em particular,

$$\|u_x\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))} + \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})} \right] \quad (3.2.1.36)$$

e

$$\|v_x\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))} + \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})} \right]. \quad (3.2.1.37)$$

Consideremos $(p, q) \in C^1(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2)$ e tais que $p(0) = q(0) = 0$, $p(-l_1) = -\frac{2}{\sigma_1}$ e $q(l_2) = \frac{2}{\sigma_2}$. Se em (3.2.1.31), multiplicarmos a primeira equação por $p(x)u_x$ e a segunda por $q(x)v_x$, e integrarmos, como fizemos na proposição anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &= \rho_1 \int_{-l_1}^0 p(x) u_x u_t|_0^T dx + \rho_2 \int_0^{l_2} q(x) v_x v_t|_0^T dx \\
&\quad - \underbrace{\left[\frac{\rho_1}{\sigma_1} \int_0^T |u_t(-l_1, t)|^2 dt + \frac{\rho_2}{\sigma_2} \int_0^T |v_t(l_2, t)|^2 dt \right]}_{=0} \\
&\quad + \int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{p_x(x)}{2} [\rho_1 |u_t(x, t)|^2 + \sigma_1 |u_x(x, t)|^2] dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^{l_2} \frac{q_x(x)}{2} [\rho_2 |v_t(x, t)|^2 + \sigma_2 |v_x(x, t)|^2] dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{-l_1}^0 f(x, t) p(x) u_x(x, t) dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^{l_2} g(x, t) q(x) v_x(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Usando (3.2.1.28), temos a estimativa

$$\begin{aligned}
\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &\leq C \left[E_M(0) + \int_0^T \int_{-l_1}^0 |f(x, t) u_x(x, t)| dx dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T \int_0^{l_2} |g(x, t) v_x(x, t)| dx dt \right].
\end{aligned} \tag{3.2.1.38}$$

Vamos, agora, estimar as duas últimas integrais em (3.2.1.38), usando (3.2.1.36) e (3.2.1.37).

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{-l_1}^0 |f(x, t) u_x(x, t)| \, dx \, dt &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^T \|f(x, t)\|_{L^2(\Omega_1)} \|u_x(x, t)\|_{L^2(\Omega_1)} \, dt \\
&\leq C \int_0^T \|f(x, t)\|_{L^2(\Omega_1)} \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} \right] \, dt \\
&+ C \int_0^T \|f(x, t)\|_{L^2(\Omega_1)} \left[\|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))} + \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})} \right] \, dt \\
&\leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 \right] \\
&+ C \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} \\
&+ C \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))} \\
&\leq C \left[\frac{1}{2} \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 \right] \\
&+ \frac{C}{2} \left[\|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 \right] \\
&+ \frac{C}{2} \left[\|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 \right] \\
&\leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))}^2 + \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})}^2 \right]
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T \int_{-l_1}^0 |f(x, t) u_x(x, t)| \, dx \, dt \leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))}^2 + \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})}^2 \right]. \quad (3.2.1.39)$$

Analogamente,

$$\int_0^T \int_0^{l_2} |g(x, t) u_x(x, t)| \, dx \, dt \leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))}^2 + \|h\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})}^2 \right]. \quad (3.2.1.40)$$

Assim, substituindo (3.2.1.39) e (3.2.1.40) em (3.2.1.38), obtemos

$$\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt \leq C \left[\|y^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_1))}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_2))}^2 + \|h\|_{L^1(0, T)}^2 \right].$$

■

Proposição 3.2.4. *Suponhamos que $y^0 = 0$ e*

$$f = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad g = \frac{\partial G}{\partial t}, \quad h = \frac{dH}{dt},$$

onde $(F, G, H) \in L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})$ e $H(t) = F(0, t) = G(0, t)$. Então a solução (u, v) de (3.2.1.31)(3.1.0.2) é tal que

$$(u, v) = (U_t, V_t)$$

com

$$(U, V, U_t, V_t, Z_t) \in C([0, T]; D(\mathcal{A}))$$

e, portanto, em particular,

$$\begin{cases} (u, v) \in C([0, T]; \mathcal{V}), \\ (u_t, v_t, z_t) \in C([0, T], \mathcal{W}) \cap L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R}), \\ (U, V) \in C([0, T]; H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)). \end{cases} \quad (3.2.1.41)$$

Mais ainda, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt \leq C \| (F, G, H) \|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}^2. \quad (3.2.1.42)$$

Dem: Se usarmos um argumento de densidade, é-nos suficiente mostrar que o resultado vale para $(F, G, H) \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\mathcal{V}) \times \mathbb{R})$.

Fazendo a mudança de variáveis $u = U_t$, $v = V_t$ e $z = Z_t$ no sistema (3.2.1.31), obtemos

$$\rho_1 U_{ttt} = \sigma_1 U_{txx} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (3.2.1.43)$$

$$\rho_2 V_{ttt} = \sigma_2 V_{txx} + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (3.2.1.44)$$

$$M Z_{ttt}(t) + \sigma_1 U_{tx}(0, t) - \sigma_2 V_{tx}(0, t) = \frac{dH(t)}{dt}. \quad (3.2.1.45)$$

e

$$\begin{aligned} u(-l_1, t) = v(l_2, t) = 0 &\Rightarrow u_t(-l_1, t) = v_t(l_2, t) = 0 \Rightarrow U(-l_1, t) = V(l_2, t) = 0 \\ u(0, t) = v(0, t) = z(t) &\Rightarrow u_t(0, t) = v_t(0, t) = z_t(t) \Rightarrow U(0, t) = V(0, t) = Z(t) \end{aligned}$$

Integrando (3.2.1.43) e (3.2.1.45) de 0 a t , temos

$$\rho_1 U_{tt}(x, t) - \rho_1 U_{tt}(x, 0) - \sigma_1 U_{xx}(x, t) + \sigma_1 U_{xx}(x, 0) = F(x, t) - F(x, 0) \quad (3.2.1.46)$$

e

$$M Z_{tt}(t) - M Z_{tt}(0) + \sigma_1 U_x(0, t) - \sigma_1 U_x(0, 0) + \sigma_2 V_x(0, t) - \sigma_2 V_x(0, 0) = H(t) - H(0). \quad (3.2.1.47)$$

Mas $0 = u^1(x) = u_t(x, 0) = U_{tt}(x, 0)$ e, como F é de suporte compacto em $]0, T[$, F se anula numa vizinhança de 0. Donde $F(x, 0) = 0$. Do mesmo modo, concluímos que $G(x, 0) = 0$ e $H(0) = 0$.

Temos, por hipótese, que $y^0 = (u^0, v^0, u^1, v^1, z^1) = (0, 0, 0, 0, 0)$, assim

$$0 = u^1(x) = u_t(x, 0) \Rightarrow u_{tx}(x, 0) = 0 \Rightarrow U_x(x, 0) = 0 \text{ e } U_{xx}(x, 0) = 0$$

e

$$0 = z^1 = z_t(0) = Z_{tt}(0)$$

Voltando a (3.2.1.46) e (3.2.1.47), e fazendo as mesmas contas para (3.2.1.44), temos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho_1 U_{tt} = \sigma_1 U_{xx} + F(x, t), & x \in \Omega_1, & 0 < t < T, \\ \rho_2 V_{tt} = \sigma_2 V_{xx} + G(x, t), & x \in \Omega_2, & 0 < t < T, \\ M Z_{tt}(t) + \sigma_1 U_x(0, t) - \sigma_2 V_x(0, t) = H(t), & & 0 < t < T, \\ U(-l_1, t) = V(l_2, t) = 0, & & 0 < t < T, \\ U(0, t) = V(0, t) = Z(t), & & 0 < t < T. \end{array} \right. \quad (3.2.1.48)$$

Fazendo o produto escalar, da primeira equação por $-U_{xxt}$ e da segunda por $-V_{xxt}$, e integrando por partes em x , temos

$$\begin{aligned} & -\rho_1 U_{xt}(0, t) U_{tt}(0, t) + \rho_1 U_{xt}(-l_1, t) U_{tt}(-l_1, t) + \frac{\rho_1}{2} \int_{-l_1}^0 \frac{d|U_{xt}|^2}{dt} dx = \\ & = -\frac{\sigma_1}{2} \int_{-l_1}^0 \frac{d|U_{xx}|^2}{dt} dx + \int_{-l_1}^0 U_{xt} F_x dx - U_{xt}(0, t) F(0, t) + U_{xt}(-l_1, t) F(-l_1, t). \end{aligned}$$

Agora, como $U(-l_1, t) = V(l_2, t) = 0$, $F(-l_1, t) = G(l_2, t) = 0$, $F(0, t) = G(0, t) = H(t)$ e $U_{tt}(0, t) = V_{tt}(0, t) = Z_{tt}(t)$ temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_1}{2} \int_{-l_1}^0 |U_{xt}|^2 dx + \frac{\sigma_1}{2} \int_{-l_1}^0 |U_{xx}|^2 dx \right) = \int_{-l_1}^0 U_{xt} F_x dx - U_{xt}(0, t) [H(t) - \rho_1 Z_{tt}(t)]. \quad (3.2.1.49)$$

Analogamente, para a segunda equação, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_2}{2} \int_0^{l_2} |V_{xt}|^2 dx + \frac{\sigma_2}{2} \int_0^{l_2} |V_{xx}|^2 dx \right) = \int_0^{l_2} V_{xt} G_x dx + V_{xt}(0, t) [H(t) - \rho_2 Z_{tt}(t)]. \quad (3.2.1.50)$$

Consideremos $\frac{1}{C_1} = \min \left\{ \frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2} \right\}$. Somando (3.2.1.49) e (3.2.1.50), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right) \leq C_1 \left(\int_{-l_1}^0 U_{xt} F_x dx \right. \\ & \left. + H(t) [V_{xt}(0, t) - U_{xt}(0, t)] + Z_{tt}(t) [\rho_1 U_{xt}(0, t) - \rho_2 V_{xt}(0, t)] + \int_0^{l_2} V_{xt} G_x dx \right). \end{aligned} \quad (3.2.1.51)$$

Note que

$$\begin{aligned} H(t) [V_{xt}(0, t) - U_{xt}(0, t)] & \leq C_2 H(t) [\sigma_2 V_{xt}(0, t) - \sigma_1 U_{xt}(0, t)] \\ & = C_2 H(t) \frac{d}{dt} (M Z_{tt}(t) - H(t)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z_{tt}(t)[\rho_1 U_{xt}(0, t) - \rho_2 V_{xt}(0, t)] &\leq C_2 M Z_{tt}(t)[\sigma_1 U_{xt}(0, t) - \sigma_2 V_{xt}(0, t)] \\ &= C_2 M Z_{tt}(t) \frac{d}{dt}(H(t) - M Z_{tt}(t)). \end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (3.2.1.52), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right) &\leq C_3 \left(\int_{-l_1}^0 U_{xt} F_x dx \right. \\ &\left. + \int_0^{l_2} V_{xt} G_x dx - [H(t) - M Z_{tt}(t)] \frac{d}{dt}[H(t) - M Z_{tt}(t)] \right). \end{aligned} \quad (3.2.1.52)$$

Lembremos que

$$U_{xt}(x, 0) = \frac{d}{dx}u(x, 0) = \frac{d}{dx}u^0(x) = 0, \quad V_{xt}(x, 0) = \frac{d}{dx}v(x, 0) = \frac{d}{dx}v^0(x) = 0,$$

$$U_{tt}(x, 0) = U_{xx}(x, 0) = 0, \quad V_{tt}(x, 0) = V_{xx}(x, 0) = 0,$$

$$H(0) = F(0, 0) = G(0, 0) = 0, \quad Z_{tt}(0) = z_t(0) = z^1 = 0.$$

Integrando a equação (3.2.1.52) de 0 à t , resulta

$$\begin{aligned}
& \|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq \\
& \leq C_3 \left(\int_0^t \int_{-l_1}^0 U_{xt} F_x dx dt - \underbrace{\frac{1}{2}(H(t) - MZ_{tt}(t))^2}_{\leq 0} + \int_0^t \int_0^{l_2} V_{xt} G_x dx dt \right) \leq \\
& \leq C_3 \left(\int_0^t \int_{-l_1}^0 U_{xt} F_x dx dt + \int_0^t \int_0^{l_2} V_{xt} G_x dx dt \right) \leq \tag{3.2.1.53} \\
& \leq C_3 \int_0^t \left(\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)} \|F_x\|_{L^2(\Omega_1)} + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)} \|G_x\|_{L^2(\Omega_2)} \right) dt \leq \\
& \leq C_3 \int_0^t \|F, G, H\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} \left(\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)} \right) dt.
\end{aligned}$$

Naturalmente, de (3.2.1.53) vem que

$$\left(\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right) \leq C_3 \int_0^t \|F, G, H\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} \left(\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)} \right) dt \tag{3.2.1.54}$$

e

$$\left(\|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right) \leq C_3 \int_0^t \|F, G, H\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} \left(\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)} \right) dt. \tag{3.2.1.55}$$

Aplicando o Lema (1.4.1) em (3.2.1.54), temos que

$$\begin{aligned}
\|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)} & \leq C \int_0^t \|(F, G, H)\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} dt \\
& \leq C \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{3.2.1.56}$$

e

$$\|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}. \tag{3.2.1.57}$$

Agora, substituindo (3.2.1.56) em (3.2.1.55), obtemos

$$\begin{aligned}
\|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 &\leq 2C \int_0^t \|(F, G, H)\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})} \\
&\leq 2C \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})} \int_0^t \|(F, G, H)\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} \\
&\leq 2C \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})} \quad (3.2.1.58)$$

e

$$\|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}. \quad (3.2.1.59)$$

Já que $(F, G, H) \in L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})$, temos que $F \in H^1(\Omega_1)$, $G \in H^1(\Omega_2)$, portanto $(F, G, H) \in L^1(0, T; \mathcal{W})$. Então, pela Proposição 3.2.3, a solução de (3.2.1.48) está na classe (3.2.1.20). Isto é,

$$(U, V) \in C([0, T]; \mathcal{V}), \quad (U_t, V_t, Z_t) \in C([0, T]; \mathcal{W}). \quad (3.2.1.60)$$

Portanto, $(U, V) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$. Além disso temos, de (3.2.1.58) e (3.2.1.59), que $(U_{xx}, V_{xx}) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$. Agora, de (3.2.1.36) e (3.2.1.37), temos que

$$\begin{aligned}
\|U_x\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C \int_0^T \|(F, G, H)\|_{\mathcal{W}} dt \\
&\leq \int_0^T \|F\|_{H_0^1(\Omega_1)} dt + \int_0^T \|G\|_{H_0^1(\Omega_2)} dt + \int_0^T |H| dt \\
&\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \int_0^T \|(F, G, H)\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} dt \\
&\leq \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}
\end{aligned}$$

e

$$\|V_x\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}.$$

Donde $(U_x, V_x) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$.

Além disso, $(F, G, H) \in L^2(\mathcal{V} \times \mathbb{R})$ e como U, U_x, V, V_x são majoradas por $\|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}$, temos que, pelo lema 1.4.2, $(U, V) \in C([0, T]; H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2))$.

Do fato de $(U_t, V_t, Z_t) \in C([0, T]; \mathcal{W})$ vem que $(U_t, V_t) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, além disso de (3.2.1.56) e (3.2.1.57) temos que $(U_{xt}, V_{xt}) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$. Temos, então, pelo lema 1.4.2, que $(u, v) \in C([0, T]; \mathcal{V})$, $(u_t, v_t, z_t) \in C([0, T]; \mathcal{W}) \cap L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})$.

Como fizemos na proposição anterior, consideremos $(p, q) \in C^1(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2)$ e tais que $p(0) = q(0) = 0$, $p(-l_1) = -\frac{2}{\sigma_1}$ e $q(l_2) = \frac{2}{\sigma_2}$. Já que $f = \frac{\partial F}{\partial t}$, $g = \frac{\partial G}{\partial t}$, se em (3.2.1.31), multiplicarmos a primeira equação por $p(x)u_x$ e a segunda por $q(x)v_x$, e integrarmos, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &= \rho_1 \int_{-l_1}^0 p(x)u_x u_t \Big|_0^T dx + \rho_2 \int_0^{l_2} q(x)v_x v_t \Big|_0^T dx \\ &\quad - \underbrace{\left[\frac{\rho_1}{\sigma_1} \int_0^T |u_t(-l_1, t)|^2 dt + \frac{\rho_2}{\sigma_2} \int_0^T |v_t(l_2, t)|^2 dt \right]}_{=0} \\ &\quad + \int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{p_x(x)}{2} [\rho_1 |u_t(x, t)|^2 + \sigma_1 |u_x(x, t)|^2] dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{l_2} \frac{q_x(x)}{2} [\rho_2 |v_t(x, t)|^2 + \sigma_2 |v_x(x, t)|^2] dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} p(x)u_x(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^{l_2} \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} q(x)v_x(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes, formalmente, com relação a t e com relação a x , as duas últimas integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{\partial F}{\partial t} p u_x dx dt &= \int_{-l_1}^0 F p u_x|_0^T dx - \int_0^T \int_{-l_1}^0 F p u_{xt} dx dt \\
&= - \int_0^T \int_{-l_1}^0 F p u_{xt} dx dt \\
&= - \int_0^T F p u_t|_{-l_1}^0 dt + \int_0^T \int_{-l_1}^0 (F p)_x u_t dx dt \\
&= \int_0^T \int_{-l_1}^0 (F p)_x u_t dx dt
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \int_0^{l_2} \frac{\partial G}{\partial t} q v_x dx dt = \int_0^T \int_0^{l_2} (G q)_x v_t dx dt.$$

Como, $u_t = U_{tt} = \frac{\sigma_1}{\rho_1} U_{xx} + \frac{F}{\rho_1}$ e $v_t = V_{tt} = \frac{\sigma_2}{\rho_2} V_{xx} + \frac{G}{\rho_2}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{\partial F}{\partial t} p u_x dx dt &= \int_0^T \int_{-l_1}^0 \left((F p)_x \frac{\sigma_1}{\rho_1} U_{xx} + (F p)_x \frac{F}{\rho_1} \right) dx dt \\
&= \int_0^T \int_{-l_1}^0 \left((F p)_x \frac{\sigma_1}{\rho_1} U_{xx} + F_x p \frac{F}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1} F^2 p_x \right) dx dt \\
&= \int_0^T \int_{-l_1}^0 \left((F p)_x \frac{\sigma_1}{\rho_1} U_{xx} + \frac{1}{2\rho_1} F^2 p_x \right) dx dt
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^{l_2} \frac{\partial G}{\partial t} q v_x dx dt &= \int_0^T \int_0^{l_2} \left((G q)_x \frac{\sigma_2}{\rho_2} V_{xx} + (G q)_x \frac{G}{\rho_2} \right) dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^{l_2} \left((G q)_x \frac{\sigma_2}{\rho_2} V_{xx} + \frac{1}{2\rho_2} G^2 q_x \right) dx dt.
\end{aligned}$$

Assim, como $u_x = U_{xt}$ e $v_x = V_{xt}$, nossa estimativa passa a ser

$$\begin{aligned}
\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &= \rho_1 \int_{-l_1}^0 p(x) u_x u_t|_0^T dx + \rho_2 \int_0^{l_2} q(x) v_x v_t|_0^T dx \\
&+ \int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{p_x(x)}{2} \left(\frac{\sigma_1^2}{\rho_1} |U_{xx}|^2 + 2 \frac{\sigma_1}{\rho_1} |U_{xx}| |F| \right) dx dt \\
&+ \int_0^T \int_{-l_1}^0 \frac{p_x(x)}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} |F|^2 + \sigma_1 |U_{xt}|^2 \right) dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^{l_2} \frac{q_x(x)}{2} \left(\frac{\sigma_2^2}{\rho_2} |V_{xx}|^2 + 2 \frac{\sigma_2}{\rho_2} |V_{xx}| |G| \right) dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^{l_2} \frac{q_x(x)}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} |G|^2 + \sigma_2 |V_{xt}|^2 \right) dx dt \\
&- \int_0^T \int_{-l_1}^0 \left((F p)_x \frac{\sigma_1}{\rho_1} U_{xx} + \frac{1}{2\rho_1} F^2 p_x \right) dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^{l_2} \left((G q)_x \frac{\sigma_2}{\rho_2} V_{xx} + \frac{1}{2\rho_2} G^2 q_x \right) dx dt.
\end{aligned}$$

Simplificando a expressão e usando (3.2.1.28), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt &\leq C_1 (E_M(T) + E_M(0)) \\
&\leq C_1 \int_0^T \left(\|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|U_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)} \right) dt \\
&+ C_1 \int_0^T \left(\|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)} + \|V_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)} \right) dt \\
&+ C_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 |F_x| |U_{xx}| dx dt \\
&+ C_1 \int_0^T \int_0^{l_2} |G_x| |V_{xx}| dx dt.
\end{aligned}$$

Mas $E_M(T) = E_M(0) = \frac{1}{2} \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{-l_1}^0 |F_x| |U_{xx}| dx dt + \int_0^T \int_0^{l_2} |G_x| |V_{xx}| dx dt &\leq \int_0^T \frac{1}{2} \left(\|F_x\|_{L^2(\Omega_1)} + \|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)} \right) dt \\
&+ \int_0^T \frac{1}{2} \left(\|G_x\|_{L^2(\Omega_2)} + \|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)} \right) dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \left(\|U_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|V_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)} \right) dt \\
&+ \frac{1}{2} \|(F, G, H)\|_{L^1(0,T;\mathcal{V} \times \mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Assim, usando (3.2.1.56), (3.2.1.57), (3.2.1.58) e (3.2.1.59), obtemos

$$\int_0^T [|u_x(-l_1, t)|^2 + |v_x(l_2, t)|^2] dt \leq C \|(F, G, H)\|_{L^1(0,T;\mathcal{V} \times \mathbb{R})}^2. \quad (3.2.1.61)$$

■

Estudaremos, agora, a regularidade de soluções, onde a condição inicial pertence a um espaço, cuja regularidade não é a mesma em cada uma das cordas. Mais precisamente, consideremos a condição inicial

$$y^0 = (u^0, v^0, u^1, v^1, z^1) \in \mathcal{H}, \quad (3.2.1.62)$$

tal que

$$u^0 \in H^2(\Omega_1), \quad u^1 \in \mathcal{V}_1, \quad u^1(0) = z^1. \quad (3.2.1.63)$$

Note que (3.2.1.62)(3.2.1.63) não implica em que $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, portanto não podemos aplicar a regularidade que a Proposição 3.2.1(i) nos fornece. No entanto, podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 3.2.5. *Suponhamos que a condição inicial y^0 satisfaça (3.2.1.62)(3.2.1.63). Então, a solução de (3.1.0.1)(3.1.0.2) é tal que, em adição a (3.2.1.20), nós temos*

$$u \in C^0([0, T]; H^2(\Omega_1)) \cap C^1([0, T]; \mathcal{V}_1). \quad (3.2.1.64)$$

Mais ainda, para cada solução, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega_1))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;V_1)}^2 \leq C[E_M(0) + \|u^0\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + \|u^1\|_{V_1}^2]. \quad (3.2.1.65)$$

Para facilitar a demonstração da proposição (3.2.5), usaremos o seguinte Lema.

Lema 3.2.2. *Seja $R_1(t) =]-1, -t[$, então $u \in C([0, 1]; H^2(R_1(t))) \cap C^1([0, 1]; H^1(R_1(t)))$ e*

$$\|u\|_{L^\infty(0,1;H^2(R_1(t)))} + \|u_t\|_{L^\infty(0,1;H^1(R_1(t)))} \leq C \left[\|u^0\|_{H^2(-1,0)} + \|u^1\|_{H^1(-1,0)} \right].$$

Demonstração da Proposição 3.2.5: É suficiente provar a existência de algum $\tau > 0$ e $C > 0$ tais que (3.2.1.64) e (3.2.1.65) se mantenham no intervalo de tempo $[0, \tau]$. Para tanto, vamos considerar um sistema mais simples.

Escalonando a variável espacial em Ω_1 , podemos assumir $l_1 = 1$, $\sigma_1 = \rho_1 = 1$ (mudando a escala de tempo, se necessário). Igualmente, podemos assumir $\sigma_2 = \rho_2 = 1$, mudando o comprimento da segunda corda. A condição no ponto de massa se modifica, e somos induzidos a considerar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & -1 < x < 0, & 0 < t < T, \\ v_{tt} = v_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t < T, \\ mz_{tt}(t) + u_x(0, t) - \gamma v_x(0, t) = 0, & & 0 < t < T, \\ u(-1, t) = v(l, t) = 0, & & 0 < t < T, \\ u(0, t) = v(0, t) = z(t), & & 0 < t < T, \end{cases}$$

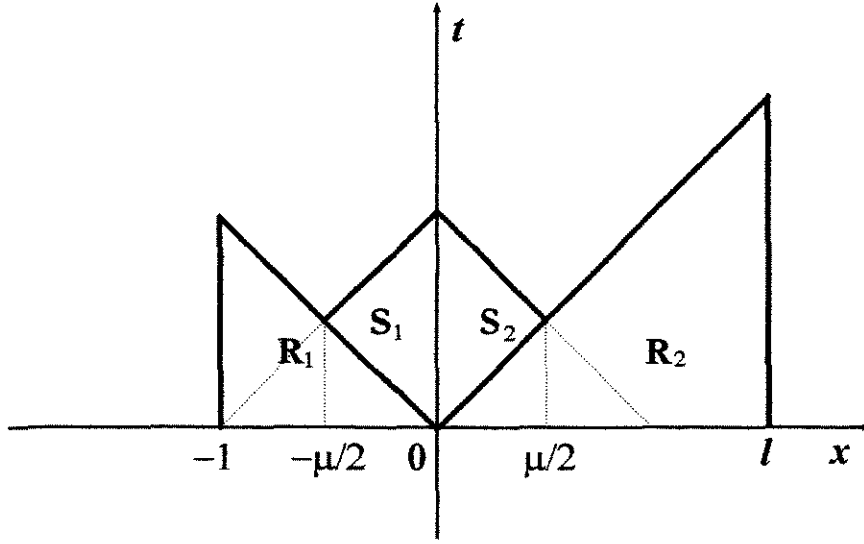
onde $\gamma > 0$, $m > 0$ e l é o comprimento da segunda corda.

Definamos

$$R_1 = \{(x, t) \in]-1, 0[\times]0, 1[: t < -x\}$$

$$R_2 = \{(x, t) \in]0, l[\times]0, l[: t < x\}.$$

Na equação da onda, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, a velocidade de propagação da corda é dada por c . No nosso caso, $c = 1$. Portanto, a velocidade de propagação é finita e constante.



(figura 1)

Vamos estender u^0, u^1 em $] - 2, 0[$ e v^0, v^1 em $]0, 2l[$, de modo que sejam ímpares (em relação a -1 e l , respectivamente).

Como, pela fórmula de D'Alembert , a solução do problema é

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u^0(x+t) + u^0(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds \quad \text{em } R_1 \quad (3.2.1.66)$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2} (v^0(x+t) + v^0(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v^1(s) ds \quad \text{em } R_2 \quad (3.2.1.67)$$

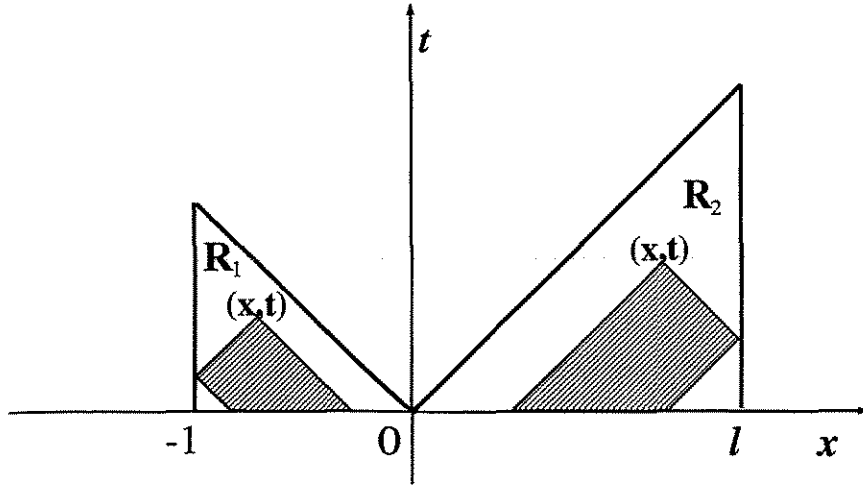
e a região de influência para um ponto $(x, t) \in R_i$, $i = 1, 2$ é dada como na figura 2, temos que, para pontos em R_1 e R_2 , os valores de u e v , respectivamente, não dependem do ponto de massa, já que a velocidade de propagação é finita. Podemos, então, analisar separadamente cada uma das regiões R_1 e R_2 .

Vemos, assim, que a suavidade de u e de v depende apenas da suavidade dos dados iniciais.

Calculemos u e v em S_1 e S_2 , respectivamente, onde

$$S_1 = \left\{ (x, t) \in \left] -\frac{\mu}{2}, 0[\times]0, \mu[: |2t - \mu| < \mu + 2x \right\},$$

$$S_2 = \left\{ (x, t) \in \left] 0, \frac{\mu}{2} \right[\times]0, \mu[: |2t - \mu| < \mu - 2x \right\},$$



(figura 2)

com $\mu = \min\{l, 1\}$ (na fig.1 temos $\mu = 1$).

Pela Fórmula de D'Alembert para a condição no ponto de massa (veja observação 3.2.5), temos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (z(t+x) + z(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} u_x(0, s) ds \quad \text{em } S_1, \quad (3.2.1.68)$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2} (z(t+x) + z(t-x)) + \frac{1}{2\gamma} \int_{t-x}^{t+x} [u_x(0, s) + m z''(s)] ds \quad \text{em } S_2. \quad (3.2.1.69)$$

Do mesmo modo, para $(x, t) \in R_1$ e R_2 , u e v , respectivamente, são dados pelas equações (3.2.1.66) e (3.2.1.67). Pela Proposição 3.2.1, nós sabemos que a solução é contínua, em particular, nas interseções $R_1 \cap S_1$ e $R_2 \cap S_2$ (isto é, para $t = x$ e $t = -x$). Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -t^-} u(x, t) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -t^-} \left[u^0(x+t) + u^0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[u^0(0) + u^0(-2t) + \int_{-2t}^0 u^1(s) ds \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -t^+} u(x, t) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -t^+} \left[z(t+x) + z(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} u_x(0, s) ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[z(2t) + z(0) + \int_0^{2t} u_x(0, s) ds \right].\end{aligned}$$

Impondo a continuidade na expressão de u , ao longo da interseção $R_1 \cap S_1$, temos

$$u^0(0) + u^0(-2t) + \int_{-2t}^0 u^1(s) ds = z(2t) + z(0) + \int_0^{2t} u_x(0, s) ds.$$

Portanto, como $z(0) = u^0(0)$ temos

$$z(t) = u^0(-t) + \int_{-t}^0 u^1(s) ds + \int_0^t u_x(0, s) ds. \quad (3.2.1.70)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow t^-} v(x, t) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow t^-} \left(z(t+x) + z(t-x) + \frac{1}{\gamma} \int_{t-x}^{t+x} [u_x(0, s) + mz''(s)] ds \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(z(2t) + z(0) + \frac{1}{\gamma} \int_0^{2t} [u_x(0, s) + mz''(s)] ds \right).\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow t^+} v(x, t) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow t^+} \left[v^0(x+t) + v^0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} v^1(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[v^0(2t) + u^0(0) + \int_0^{2t} v^1(s) ds \right].\end{aligned}$$

Impondo a continuidade na expressão de v , ao longo da interseção $R_2 \cap S_2$, temos

$$z(2t) + z(0) + \frac{1}{\gamma} \int_0^{2t} [u_x(0, s) + mz''(s)] ds = v^0(2t) + u^0(0) + \int_0^{2t} v^1(s) ds.$$

Portanto, como $z(0) = v^0(0)$,

$$\begin{aligned} z(t) &= v^0(t) + \int_0^t v^1(s) ds - \frac{1}{\gamma} \int_0^t u_x(0, s) ds - \frac{m}{\gamma} \int_0^t z''(s) ds \\ &= v^0(t) + \int_0^t v^1(s) ds - \frac{1}{\gamma} \int_0^t u_x(0, s) ds - \frac{m}{\gamma} (z'(t) - z^1). \end{aligned} \quad (3.2.1.71)$$

Substituindo (3.2.1.70) em (3.2.1.71), temos

$$z_t(t) + \frac{(1+\gamma)}{m} z(t) = z^1 + \frac{1}{m} [L(t) + \gamma R(t)], \quad z(0) = z^0, \quad (3.2.1.72)$$

onde

$$L(t) = u^0(t) - \int_0^{-t} u^1(s) ds; \quad R(t) = v^0(t) + \int_0^t v^1(s) ds. \quad (3.2.1.73)$$

Como $u^0 \in H^2(\Omega_1)$ e $u^1 \in \mathcal{V}_1 \subset H^1(\Omega_1)$, temos que L pertence a $H^2(\Omega_1)$. Além disso, $v^0 \in H^1(\Omega_1)$ e $v^1 \in L^2(\Omega_1)$. Logo, $R \in H^1(0, \mu)$.

Assim $z = z(t)$, solução da EDO (3.2.1.72), pertence a $H^2(0, \mu)$ e como, derivando a expressão (3.2.1.70) com relação a t , temos

$$u_x(0, t) = z_t(t) + u_x^0(-t) - u^1(-t) \in H^1(0, \mu), \quad (3.2.1.74)$$

temos por (3.2.1.68) que $u \in H^1(0, \mu)$.

Agora, de (3.2.1.68) e do Lema 1.4.2, nós facilmente deduzimos que

$$u \in C \left(\left[0, \frac{\mu}{2} \right]; H^2(-t, 0) \right) \cap C^1 \left(\left[0, \frac{\mu}{2} \right]; H^1(-t, 0) \right). \quad (3.2.1.75)$$

Analogamente, deduzimos das expressões que temos para u em R_1 (como uma solução da equação da onda) e em S_1 (por (3.2.1.68)), temos que u_x e u_t são contínuas sobre $x = -t$. Isto conclue a prova da proposição 3.2.5.

■

Prova do lema 3.2.2

Temos por hipótese que $u^0 \in H^2(\Omega_1)$, assim, para cada $t \in [0, 1]$, $u^0 \in H^2(R_1(t))$. Além disso $u^1 \in \mathcal{V}_1$, portanto $u^1 \in H^1$. Ou seja, $\int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds$ define uma função de $H^2(R_1(t))$ para cada $t \in [0, 1]$. Portanto, como u é definida por (3.2.1.66), $u \in H^2(R_1(t))$.

Vamos mostrar, agora, que u é contínua em $H^2(R_1(t))$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \|u(x+h, t) - u(x, t)\|_{H^2(R_1(t))} &= \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u(x+h, t) - u(x, t)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u_x(x+h, t) - u_x(x, t)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u_{xx}(x+h, t) - u_{xx}(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Como $u \in H^2(R_1(t))$, temos que $u, u_x, u_{xx} \in L^2(R_1(t))$, portanto, pelo lema 1.4.2,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u(x+h, t) - u(x, t)\|_{H^2(R_1(t))} = 0.$$

Além disso, como $u_t \in H^1(R_1(t))$, temos que $u_t, u_{tx} \in L^2(R_1(t))$. Então, pelo lema 1.4.2, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|u_t(x+h, t) - u_t(x, t)\|_{H^2(R_1(t))} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u_t(x+h, t) - u_t(x, t)|^2 dx \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u_{tx}(x+h, t) - u_{tx}(x, t)|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $u \in C([0, T]; H^2(R_1(t))) \cap C^1([0, T]; H^1(R_1(t)))$.

Vejamos, agora, expressões para as derivadas de u :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u^0(x+t) + u^0(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds. \quad (3.2.1.66)$$

Da regra da cadeia, sabemos que $\frac{d}{ds}[f(z(s, t))] = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{ds}$, portanto,

$$\frac{d}{dt} (u^0(x+t) + u^0(x-t)) = u_x^0(x+t) \cdot 1 + u_x^0(x-t) \cdot (-1) = u_x^0(x+t) - u_x^0(x-t)$$

e

$$\frac{d}{dx} (u^0(x+t) + u^0(x-t)) = u_x^0(x+t).1 + u_x^0(x-t).1 = u_x^0(x+t) + u_x^0(x-t).$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt} \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds = u^1(x+t).1 - u^1(x-t).(-1) = u^1(x+t) + u^1(x-t)$$

e

$$\frac{d}{dx} \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds = u^1(x+t).1 - u^1(x-t).1 = u^1(x+t) - u^1(x-t).$$

Assim,

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} (u_x^0(x+t) - u_x^0(x-t) + u^1(x+t) + u^1(x-t))$$

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} (u_x^0(x+t) + u_x^0(x-t) + u^1(x+t) - u^1(x-t))$$

e, ainda,

$$u_{tx}(x, t) = \frac{1}{2} (u_{xx}^0(x+t) - u_{xx}^0(x-t) + u_x^1(x+t) + u_x^1(x-t))$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2} (u_{xx}^0(x+t) + u_{xx}^0(x-t) + u_x^1(x+t) - u_x^1(x-t)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(R_1(t))}^2 &= \int_{R_1(t)} |u|^2 dx + \int_{R_1(t)} |u_x|^2 dx + \int_{R_1(t)} |u_{xx}|^2 dx \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} k \int_{R_1(t)} |u_x|^2 dx + \int_{R_1(t)} |u_{xx}|^2 dx \\ &\leq \frac{k}{4} \int_{R_1(t)} |u_x^0(x+t) + u_x^0(x-t) + u^1(x+t) - u^1(x-t)|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u_{xx}^0(x+t) + u_{xx}^0(x-t) + u_x^1(x+t) - u_x^1(x-t)|^2 dx \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} C_1 \left[\|u_x^0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_{xx}^0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_x^1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right] \\ &= C_1 \left[\|u^0\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + \|u^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|u_t\|_{H^1(R_1(t))}^2 &= \int_{R_1(t)} |u_t|^2 dx + \int_{R_1(t)} |u_{tx}|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u_x^0(x+t) - u_x^0(x-t) + u^1(x+t) + u^1(x-t)|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{R_1(t)} |u_{xx}^0(x+t) - u_{xx}^0(x-t) + u_x^1(x+t) + u_x^1(x-t)|^2 dx \\
&\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} C_2 \left[\|u_x^0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_{xx}^0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_x^1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right] \\
&= C_2 \left[\|u^0\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + \|u^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^\infty(0,1;H^2(R_1(t)))} + \|u_t\|_{L^\infty(0,1;H^1(R_1(t)))} \leq C \left[\|u^0\|_{H^2(-1,0)} + \|u^1\|_{H^1(-1,0)} \right].$$

O que conclui a prova do lema. ■

Observação 3.2.4. *Fica claro na demonstração da proposição 3.2.5 que não podemos substituir, na hipótese (3.2.1.63) e nas conclusões (3.2.1.64)(3.2.1.11), o espaço $H^2(-1,0) \times H^1(-1,0)$ por algum $H^s(-1,0) \times H^{s-1}(-1,0)$, com $s > 2$. Em outras palavras, o maior grau de regularidade extra que podemos conservar em uma das cordas é um.*

Observação 3.2.5. *Se, na dedução da fórmula de d'Alembert, utilizarmos a condição no ponto de massa, ao invés das condições iniciais, temos o seguinte:*

Já sabemos que $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$. Da condição para o ponto de massa, temos que $u(0,t) = v(0,t) = z(t)$. Assim,

$$z(t) = u(0,t) = F(t) + G(-t)$$

e

$$u_x(0,t) = F'(t) + G'(-t).$$

Integrando a segunda equação, temos,

$$F(t) - G(-t) = \int_0^t u_x(0, s) ds + K.$$

Portanto,

$$F(t) = \frac{1}{2}z(t) + \frac{1}{2} \int_0^t u_x(0, s) ds + K$$

e

$$G(-t) = \frac{1}{2}z(t) - \frac{1}{2} \int_0^t u_x(0, s) ds - K.$$

Donde,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(z(t+x) + z(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} u_x(0, s) ds.$$

Do mesmo modo,

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(z(t+x) + z(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} v_x(0, s) ds,$$

mas como $mz_{tt} + u_x(0, t) - \gamma v_x(0, t) = 0$, temos que

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(z(t+x) + z(t-x)) + \frac{1}{2\gamma} \int_{t-x}^{t+x} [u_x(0, s) + mz''(s)] ds.$$

3.2.2 Condições de Contorno Não-Homogêneas

Nesta seção, provaremos a existência e a unicidade de soluções fracas onde estaremos introduzindo condições de contorno não homogêneas, com funções de controle em $L^2(0, T)$, em cada um dos extremos, $x = -l_1$ e $x = l_2$.

Consideremos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho_1 u_{tt} = \sigma_1 u_{xx}, & x \in \Omega_1, & 0 < t < T, \\ \rho_2 v_{tt} = \sigma_2 v_{xx}, & x \in \Omega_2, & 0 < t < T, \\ Mz_{tt}(t) + \sigma_1 u_x(0, t) - \sigma_2 v_x(0, t) = 0, & & 0 < t < T, \\ u(-l_1, t) = p(t), & & 0 < t < T, \\ v(l_2, t) = q(t), & & 0 < t < T, \\ u(0, t) = v(0, t) = z(t), & & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u^0(x), & u_t(x, 0) = u^1(x), & x \in \Omega_1, \\ v(x, 0) = v^0(x), & v_t(x, 0) = v^1(x), & x \in \Omega_2, \\ z(0) = z^0, & z_t(0) = z^1, & \end{array} \right. \quad (3.2.2.1)$$

com $p, q \in L^2(0, T)$, $u^0 \in L^2(\Omega_1)$, $v^0 \in L^2(\Omega_2)$. As velocidades iniciais u^1 e v^1 pertencem, respectivamente, aos espaços duais $\mathcal{V}'_1$, $\mathcal{V}'_2$ e $z^0, z^1 \in \mathbb{R}$.

A solução (u, v) de (3.2.2.1) deve ser entendida no sentido de transposição. Vamos dar esta definição de modo preciso. Para tanto, consideremos o seguinte sistema auxiliar, com condições de contorno homogêneas e com condições iniciais nulas em $t = T$.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho_1 \varphi_{tt} = \sigma_1 \varphi_{xx} + f, & x \in \Omega_1, & 0 < t < T, \\ \rho_2 \psi_{tt} = \sigma_2 \psi_{xx} + g, & x \in \Omega_2, & 0 < t < T, \\ M\zeta_{tt}(t) + \sigma_1 \varphi_x(0, t) - \sigma_2 \psi_x(0, t) = h(t), & & 0 < t < T, \\ \varphi(-l_1, t) = \psi(l_2, t) = 0, & & 0 < t < T, \\ \varphi(0, t) = \psi(0, t) = \zeta(t), & & 0 < t < T, \\ \varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = 0, & & x \in \Omega_1, \\ \psi(x, T) = \psi_t(x, T) = 0, & & x \in \Omega_2, \\ \zeta(T) = \zeta_t(T) = 0. & & \end{array} \right. \quad (3.2.2.2)$$

Para cada $(f, g, h) \in L^1(0, T; \mathcal{W})$, em virtude da propriedade de reversibilidade da equação da onda, e como consequência da Proposição 3.2.3, o sistema (3.2.2.2) tem uma única solução

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &\in C([0, T]; \mathcal{V}) \\ (\varphi_t, \psi_t, \zeta_t) &\in C([0, T]; \mathcal{W}), \end{aligned} \quad (3.2.2.3)$$

satisfazendo

$$\int_0^T [|\varphi_x(-l_1, t)|^2 + |\psi_x(l_2, t)|^2] dt \leq C \|(f, g, h)\|_{L^1(0, T; \mathcal{W})}^2. \quad (3.2.2.4)$$

Multiplicando por φ e ψ as equações satisfeitas, respectivamente por u e v em (3.2.2.1), e integrando, obtemos

$$\rho_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 \varphi u_{tt} dx dt = \sigma_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 \varphi u_{xx} dx dt. \quad (3.2.2.5)$$

$$\rho_2 \int_0^T \int_0^{l_2} \psi v_{tt} dx dt = \sigma_2 \int_0^T \int_0^{l_2} \psi v_{xx} dx dt. \quad (3.2.2.6)$$

Integrando por partes formalmente o lado esquerdo de (3.2.2.5), com relação a t , e considerando as igualdades do sistema (3.2.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 \varphi u_{tt} dx dt &= \rho_1 \int_{-l_1}^0 \varphi u_t dx \Big|_0^T - \rho_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 \varphi_t u_t dx dt \\ &= \rho_1 \int_{-l_1}^0 \varphi u_t dx \Big|_0^T - \rho_1 \int_{-l_1}^0 \varphi_t u dx \Big|_0^T + \int_0^T \int_{-l_1}^0 \rho_1 \varphi_{tt} u dx dt \\ &= -\rho_1 \int_{-l_1}^0 \varphi(x, 0) u_t(x, 0) dx + \rho_1 \int_{-l_1}^0 \varphi_t(x, 0) u(x, 0) dx \\ &\quad + \int_0^T \int_{-l_1}^0 [\sigma_1 \varphi_{xx} + f] u dx dt. \end{aligned} \quad (3.2.2.7)$$

Por outro lado, integrando por partes formalmente o lado direito de (3.2.2.5), com relação a x , e considerando as igualdades do sistema (3.2.2.2), temos

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 \varphi u_{xx} dx dt &= \sigma_1 \int_0^T \varphi u_x|_{-l_1}^0 dt - \sigma_1 \int_0^T \int_{-l_1}^0 \varphi_x u_x dx dt \\
&= \sigma_1 \int_0^T \varphi u_x|_{-l_1}^0 dt - \sigma_1 \int_0^T \varphi_x u|_{-l_1}^0 dt + \int_0^T \int_{-l_1}^0 \sigma_1 \varphi_{xx} u dx dt \\
&= \sigma_1 \int_0^T \varphi(0, t) u_x(0, t) dt - \sigma_1 \int_0^T \varphi_x(0, t) u(0, t)|_{-l_1}^0 dt \\
&\quad + \sigma_1 \int_0^T \varphi_x(-l_1, t) u(-l_1, t) dt + \int_0^T \int_{-l_1}^0 \sigma_1 \varphi_{xx} u dx dt.
\end{aligned} \tag{3.2.2.8}$$

Como $u(x, 0) = u^0(x)$, $u_t(x, 0) = u^1(x)$, $v(x, 0) = v^0(x)$, $v_t(x, 0) = v^1(x)$, $u(0, t) = v(0, t) = z(t)$, $u(-l_1, t) = p(t)$, $v(l_2, t) = q(t)$ e $\varphi(0, t) = \psi(0, t) = \zeta(t)$, temos que, de (3.2.2.7) e (3.2.2.8), a equação (3.2.2.5) fica sendo

$$\begin{aligned}
&-\rho_1 \int_{-l_1}^0 u^1(x) \varphi(x, 0) dx + \rho_1 \int_{-l_1}^0 u^0(x) \varphi_t(x, 0) dx + \int_0^T \int_{-l_1}^0 u f dx dt = \\
&= \sigma_1 \int_0^T \zeta(t) u_x(0, t) dt - \sigma_1 \int_0^T \varphi_x(0, t) z(t) dt + \sigma_1 \int_0^T \varphi_x(-l_1, t) p(t) dt,
\end{aligned} \tag{3.2.2.9}$$

analogamente, da equação (3.2.2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\rho_2 \int_0^{l_2} v^1(x) \psi(x, 0) dx + \rho_2 \int_0^{l_2} v^0(x) \psi_t(x, 0) dx + \int_0^T \int_0^{l_2} v g dx dt = \\
&= -\sigma_2 \int_0^T \zeta(t) v_x(0, t) dt - \sigma_2 \int_0^T \psi_x(l_2, t) q(t) dt + \sigma_2 \int_0^T \psi_x(0, t) z(t) dt.
\end{aligned} \tag{3.2.2.10}$$

Agora, somando as equações (3.2.2.9) e (3.2.2.10), vem que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{-l_1}^0 u f dx dt + \int_0^T \int_0^{l_2} v g dx dt &= -\rho_1 \int_{-l_1}^0 u^0(x) \varphi_t(x, 0) dx - \rho_2 \int_0^{l_2} v^0(x) \psi_t(x, 0) dx \\
&+ \sigma_1 \int_0^T \varphi_x(-l_1, t) p(t) dt - \sigma_2 \int_0^T \psi_x(l_2, t) q(t) dt \\
&+ \rho_1 \int_{-l_1}^0 u^1(x) \varphi(x, 0) dx + \rho_2 \int_0^{l_2} v^1(x) \psi(x, 0) dx \\
&+ \int_0^T \zeta(t) [\sigma_1 u_x(0, t) - \sigma_2 v_x(0, t)] dt \\
&- \int_0^T z(t) [\sigma_1 \varphi_x(0, t) - \sigma_2 \psi_x(0, t)] dt,
\end{aligned}
\tag{3.2.2.11}$$

mas

$$\sigma_1 u_x(0, t) - \sigma_2 v_x(0, t) = -M z_{tt}(t) \quad \text{e} \quad \sigma_1 \varphi_x(0, t) - \sigma_2 \psi_x(0, t) = h(t) - M \zeta_{tt}(t).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \zeta(t) M z_{tt}(t) dt + \int_0^T z(t) M \zeta_{tt}(t) dt &= M \int_0^T z(t) \zeta_{tt}(t) - \zeta(t) z_{tt}(t) dt \\
&= M \int_0^T \left[\frac{d(z\zeta_t)}{dt} - \frac{d(\zeta z_t)}{dt} \right] dt \\
&= M \left[z\zeta_t \Big|_0^T - \zeta z_t \Big|_0^T \right] \\
&= -M z(0) \zeta_t(0) + M z_t(0) \zeta(0) \\
&= M z^1 \zeta(0) - M z^0 \zeta_t(0).
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (3.2.2.11),

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{-l_1}^0 u f \, dx \, dt + \int_0^T \int_0^{l_2} v g \, dx \, dt + \int_0^T z h \, dt = \\
& = -\rho_1 \int_{-l_1}^0 u^0(x) \varphi_t(x, 0) \, dx - \rho_2 \int_0^{l_2} v^0(x) \psi_t(x, 0) \, dx + \rho_1 \langle u^1, \varphi(\cdot, 0) \rangle + \rho_2 \langle v^1, \psi(\cdot, 0) \rangle + \\
& + \sigma_1 \int_0^T \varphi_x(-l_1, t) p(t) \, dt - \sigma_2 \int_0^T \psi_x(l_2, t) q(t) \, dt + M z^1 \zeta(0) - M z^0 \zeta_t(0).
\end{aligned} \tag{3.2.2.12}$$

Nós adotaremos a identidade (3.2.2.12) como definição para solução fraca de (3.2.2.1), no sentido de transposição. Ou seja, (u, v, z) é dita uma *solução fraca* de (3.2.2.1) (no sentido de transposição) se (3.2.2.12) se verifica, para todos os $(f, g, h) \in L^1(0, T; \mathcal{W})$.

Observe que o lado direito de (3.2.2.12) está bem definido, considerando $\langle u^1, \varphi(\cdot, 0) \rangle$ e $\langle v^1, \psi(\cdot, 0) \rangle$ como a aplicação de $u^1 \in \mathcal{V}'_1$ e $v^1 \in \mathcal{V}'_2$ em $\varphi(\cdot, 0) \in \mathcal{V}_1$ e $\psi(\cdot, 0) \in \mathcal{V}_2$, respectivamente, no sentido de dualidade.

Nós temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.6. *Para todo $p, q \in L^2(0, T)$, $(u^0, v^0) \in \mathcal{W}$, $(u^1, v^1) \in (\mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2)$, e $z^0, z^1 \in \mathbb{R}$ existe uma solução (no sentido de transposição) de (3.2.2.1) na classe*

$$(u, v, z) \in C([0, T]; \mathcal{W}) \tag{3.2.2.13}$$

$$(u_t, v_t, z_t) \in C([0, T]; \mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2 \times \mathbb{R}). \tag{3.2.2.14}$$

Mais ainda, existe uma correspondência um a um entre os dados iniciais, como elementos do espaço quociente $\mathcal{W} \times (\mathcal{V} \times \mathbb{R})'$, e as soluções de (3.2.2.1) na classe (3.2.2.13)(3.2.2.14).

Dem: Em virtude da Proposição 3.2.3, temos que dado $(f, g, h) \in L^1(0, T; \mathcal{W})$, o lado direito da igualdade (3.2.2.12) define um operador linear $\mathcal{T}$, tal que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}(f, g, h)| = & \rho_1 \int_{-l_1}^0 u^0(x) \varphi_t(x, 0) dx + \rho_2 \int_0^{l_2} v^0(x) \psi_t(x, 0) dx \\
& + \rho_1 \langle u^1, \varphi(\cdot, 0) \rangle + \rho_2 \langle v^1, \psi(\cdot, 0) \rangle + \sigma_1 \int_0^T \varphi_x(-l_1, t) p(t) dt \\
& + \sigma_2 \int_0^T \psi_x(l_2, t) q(t) dt + M z^1 \zeta(0) + M z^0 \zeta_t(0).
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $(u^0, v^0) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, $(u^1, v^1) \in \mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2$, temos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}(f, g, h)| \leq & \rho_1 \|u^0\|_{L^2(\Omega_1)} \|\varphi_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_1)} + \rho_2 \|v^0\|_{L^2(\Omega_2)} \|\psi_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_2)} \\
& + \rho_1 \|u^1\|_{\mathcal{V}'_1} \|\varphi\|_{\mathcal{V}_1} + \rho_2 \|v^1\|_{\mathcal{V}'_2} \|\psi\|_{\mathcal{V}_2} \\
& + \sigma_1 \left(\int_0^T |\varphi_x(-l_1, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|p\|_{L^2(0, T)} + \sigma_2 \left(\int_0^T |\psi_x(l_2, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|q\|_{L^2(0, T)}.
\end{aligned}$$

Assim, usando (3.2.2.4), e o fato de que (φ, ψ, ξ) satisfaz (3.2.1.35), $\mathcal{T}$ é um funcional linear e contínuo definido em $L^1(0, T; \mathcal{W})$, isto é,

$$|\mathcal{T}| \leq K \|(f, g, h)\|_{L^1(0, T; \mathcal{W})}.$$

Aplicando o Teorema de representação de Riez-Fréchet, existe um único

$$(u, v, z) \in L^\infty(0, T; \mathcal{W}),$$

satisfazendo (3.2.2.12) e, ainda,

$$K = \|\mathcal{T}\| = \|(u, v, z)\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{W})}. \quad (3.2.2.15)$$

De (3.2.1.35), temos que

$$\|\varphi_t(x, 0)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|y\|_{\mathcal{H}} \leq C_1 \|(f, g, h)\|_{L^1(0, T; \mathcal{W})},$$

$$\|\psi_t(x, 0)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|y\|_{\mathcal{H}} \leq C_1 \|(f, g, h)\|_{L^1(0, T; \mathcal{W})}.$$

Agora, como $\mathcal{V}$ é equivalente a $H_0^1(-l_1, l_2)$, temos

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{V}} &\leq C_2 \|(\varphi, \psi)\|_{H_0^1(-l_1, l_2)} \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} C_2 \|(\varphi_x, \psi_x)\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \stackrel{(*)}{\leq} C_3 \|(f, g, h)\|_{L^1(0, T; \mathcal{W})}, \\ (*) &= (3.2.1.36)(3.2.1.37). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(f, g, h)| &\leq \rho_1 \|u^0\|_{L^2(\Omega_1)} \|\varphi_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_1)} + \rho_2 \|v^0\|_{L^2(\Omega_2)} \|\psi_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\quad + \rho_1 \|u^1\|_{\mathcal{V}'_1} \|\varphi\|_{\mathcal{V}_1} + \rho_2 \|v^1\|_{\mathcal{V}'_2} \|\psi\|_{\mathcal{V}_2} \\ &\quad + \sigma_1 \left(\int_0^T |\varphi_x(-l_1, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|p\|_{L^2(0, T)} + \sigma_2 \left(\int_0^T |\psi_x(l_2, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|q\|_{L^2(0, T)}. \end{aligned} \quad (3.2.2.16)$$

E, portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(f, g, h)| &\leq C \|(f, g, h)\|_{L^1(0, T; \mathcal{W})} \left[\|p\|_{L^2(0, T)} + \|q\|_{L^2(0, T)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega_1)} \right. \\ &\quad \left. + \|v^0\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u^1\|_{\mathcal{V}'_1} + \|v^1\|_{\mathcal{V}'_2} + |z^0| + |z^1| \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\mathcal{T}\| \leq C \left[\|p\|_{L^2(0, T)} + \|q\|_{L^2(0, T)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega_1)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u^1\|_{\mathcal{V}'_1} + \|v^1\|_{\mathcal{V}'_2} + |z^0| + |z^1| \right].$$

Donde

$$\begin{aligned} \|(u, v, z)\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{W})} &\leq C \left[\|p\|_{L^2(0, T)} + \|q\|_{L^2(0, T)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega_1)} \right. \\ &\quad \left. + \|v^0\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u^1\|_{\mathcal{V}'_1} + \|v^1\|_{\mathcal{V}'_2} + |z^0| + |z^1| \right]. \end{aligned} \quad (3.2.2.17)$$

Quando os dados são suaves, a solução de (3.2.2.1) satisfaz (3.2.2.13). Aproximando por funções suaves e usando (3.2.2.17) deduzimos, por um argumento de densidade, que (3.2.2.13) se mantém para nossa solução fraca.

Vamos mostrar, agora, que $(u_t, v_t, z_t) \in C([0, T]; \mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2 \times \mathbb{R})$. Para tanto, suponhamos que

$$(f, g, h) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial t}, \frac{dH}{dt} \right)$$

com $(F, G, H) \in \mathcal{D}([0, T]; \mathcal{V} \times \mathbb{R})$ (C^∞ e de suporte compacto com respeito ao tempo).

Neste caso, a solução de (3.2.2.2) pode ser escrita como

$$(\varphi, \psi, \zeta) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{d\Sigma}{dt} \right),$$

onde (φ, ψ, ζ) é solução de (3.2.2.2) com dados (F, G, H) no lugar de (f, g, h) .

Se procedermos como na Proposição 3.2.4, temos que vale (3.2.1.52), para (Φ, Ψ, Σ) , em particular,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\Phi_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\Psi_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right) \leq \\ & \leq k \left(\int_{-l_1}^0 \Phi_{xt} F_x dx + \int_0^{l_2} \Psi_{xt} G_x dx - [H(t) - M\Sigma_{tt}(t)] \frac{d}{dt} [H(t) - M\Sigma_{tt}(t)] \right). \end{aligned}$$

Integrando de 0 à t , temos, em analogia a (3.2.1.53),

$$\|\Phi_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\Psi_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq k \int_0^t \|(F, G, H)\|_{\mathcal{V} \times \mathbb{R}} \left(\|\Phi_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\Psi_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right) ds.$$

Portanto, pelo Lema 1.4.1,

$$\|\Phi_{xt}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq k \|(F, G, H)\|_{L^1([0, T]; \mathcal{V} \times \mathbb{R})} \quad (3.2.2.18)$$

e

$$\|\Psi_{xt}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq k\|(F, G, H)\|_{L^1(0,T;\mathcal{V} \times \mathbb{R})}. \quad (3.2.2.19)$$

De (3.2.1.52) (para (Φ, Ψ, Σ)), temos também que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\Phi_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\Psi_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right) \leq \\ & \leq k \left(\int_{-l_1}^0 \Phi_{xt} F_x dx + \int_0^{l_2} \Psi_{xt} G_x dx - [H(t) - M\Sigma_{tt}(t)] \frac{d}{dt} [H(t) - M\Sigma_{tt}(t)] \right). \end{aligned}$$

Integrando de T à t , a expressão acima e substituindo (3.2.2.18) e (3.2.2.19), temos

$$\|\Phi_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\Psi_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)}^2 - \|\Phi_{xx}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \|\Psi_{xx}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq k\|(F, G, H)\|_{L^1(0,T;\mathcal{V} \times \mathbb{R})}^2,$$

em particular

$$\begin{aligned} & \|\Phi_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\Psi_{xx}\|_{L^2(\Omega_2)} - \|\Phi_{xx}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_1)} - \|\Psi_{xx}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_2)} - |\zeta(0)| \leq \\ & \leq k\|(F, G, H)\|_{L^1(0,T;\mathcal{V} \times \mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (3.2.2.20)$$

Prosseguindo com a demonstração da mesma maneira que fizemos na proposição 3.2.3, temos.

$$\|\varphi_x(-l_1, t)\|_{L^2(0,T)} + \|\psi_x(l_2, t)\|_{L^2(0,T)} + \|\varphi_x(\cdot, 0)\|_{\mathcal{V}_1} + \|\psi_x(\cdot, 0)\|_{\mathcal{V}_2} + |\zeta(0)| \leq C\|(F, G, H)\|_{L^1(0,T;\mathcal{V} \times \mathbb{R})}. \quad (3.2.2.21)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_t(x, 0) &= \rho_1 \Phi_{tt}(x, 0) = \sigma_1 \Phi(x, 0) + F(x, 0) = \sigma_1 \Phi_{xx}(x, 0) \in L^2(\Omega_1), \\ \rho_2 \psi_t(x, 0) &= \rho_2 \Psi_{tt}(x, 0) = \sigma_2 \Psi(x, 0) + G(x, 0) = \sigma_2 \Psi_{xx}(x, 0) \in L^2(\Omega_2), \\ M\zeta_t(0) &= M\Sigma_{tt}(0) = -\sigma_2 \Phi_x(0, 0) + \sigma_2 \Psi_x(0, 0) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

logo

$$\|(\varphi_t(\cdot, 0), \psi_t(\cdot, 0), \zeta_t(0))\|_{\mathcal{W}} \leq C\|(F, G, H)\|_{L^1(0, T; \mathcal{V} \times \mathbb{R})}. \quad (3.2.2.22)$$

Em virtude de (3.2.2.21), (3.2.2.22) e da Proposição 3.2.4, vem que

$$(u_t, v_t, z_t) \in (0, T; \mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2),$$

ou seja,

$$(u, v, z) \in W^{1, \infty}(0, T; \mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2).$$

A continuidade no tempo de (u_t, v_t, z_t) com valores em $\mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2 \times \mathbb{R}$ é provada fazendo aproximações por funções suaves, para as quais (3.2.2.14) ocorre. Usando um argumento de densidade, segue que $(u_t, v_t, z_t) \in C([0, T]; \mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2 \times \mathbb{R})$. ■

Vamos, agora, considerar o caso de soluções fracas nas quais as condições iniciais e de contorno, correspondentes à primeira corda, tenham um grau a mais de regularidade.

Neste caso, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.7. *Suponhamos que as condições iniciais e de contorno da Proposição 3.2.6 satisfaçam as condições de compatibilidade e a regularidade adicional dadas por*

$$p \in H^1(0, T), u^0 \in H^1(-l_1, 0), u^1 \in L^2(\Omega_1), u^0(0) = z^0, p(0) = u^0(-l_1). \quad (3.2.2.23)$$

Então, em adição a (3.2.2.13)(3.2.2.14), temos

$$u \in C([0, T]; H^1(\Omega_1)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega_1)). \quad (3.2.2.24)$$

Mais ainda, $u_x(-l_1, t) \in L^2(0, T)$ e existe algum $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T |u_x(-l_1, t)|^2 dt &\leq C \left[\|q\|_{L^2(0, T)}^2 + \|p\|_{H^1(0, T)}^2 + \|u^0\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|u^1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|v^0\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|v^1\|_{\mathcal{V}'_2}^2 + |z^0|^2 + |z^1|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.2.25)$$

Dem: A prova de (3.2.2.24) pode ser encaminhada do mesmo modo que na Proposição 3.2.5.

Observando a figura 1, vemos que a presença de condições de contorno não homogêneas não muda a regularidade da solução, já que a mesma depende apenas da regularidade dos dados iniciais e da regularidade de p , que em R_1 (veja Observação 3.2.6) é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [u^0(x+t) + u^0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds, & \text{se } -1 < x-t < 0 \\ \frac{1}{2} [u^0(x+t) - u^0(t-x-2)] + p(t-x-1) + \frac{1}{2} \int_{t-x-2}^{x+t} u^1(s) ds, & \\ \text{se } -2 < x-t \leq -1. \end{cases} \quad (3.2.2.26)$$

Assim, temos que (3.2.2.24) vale quando nos restringimos a R_1 .

A introdução de condições de contorno não homogêneas não interfere na dedução da segunda Fórmula de d'Alembert (Observação 3.2.5).

Ao estudarmos a regularidade da solução em S_1 , o argumento é o mesmo que usamos na Proposição 3.2.5, embora a regularidade dos dados iniciais tenha um grau a menos. Utilizando um argumento de densidade, vemos que valem as fórmulas (3.2.1.68) e (3.2.1.73) (as quais já não têm uma interpretação pontual).

A propriedade de regularidade (3.2.2.25) é uma consequência direta de (3.2.2.24) e da natureza local da equação da onda.

Já sabemos que vale a igualdade (3.2.1.26), portanto, tomando $p(x) = x$, temos

$$\frac{1}{2} \int_0^T |u_x(-1, t)|^2 dx dt = \int_{-1}^0 x u_x u_t \Big|_0^T dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-1}^0 |u_t|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-1}^0 |u_x|^2 dx dt.$$

Mas, como $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 x u_x u_t|_0^T dx &\leq \int_{-1}^0 |u_x| |u_t|_0^T dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [|u_x(x, T)|^2 + |u_t(x, T)|^2 + |u_x(x, 0)|^2 + |u_t(x, 0)|^2] \\
&\leq E_M(T) + E_M(0) \\
&= 2E_M(0) \\
&= \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T |u_x(-l_1, t)|^2 dt \leq C \int_0^T \left[\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right] dt + \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.2.2.27)$$

A estimativa (3.2.2.27) é local e não depende da existência de um ponto de massa.

A definição de solução no sentido de transposição, nos dá uma aplicação $\mathcal{T}$, que leva cada $(p, q, u^0, v^0, z^0, u^1, v^1, z^1)$, dado, em u . Como u possui a regularidade em (3.2.2.24), temos que a aplicação $\mathcal{T}$ é contínua, do espaço de sua definição, E , cuja norma é definida por

$$\|(p, q, u^0, v^0, z^0, u^1, v^1, z^1)\|_E^2 = \|q\|_{L^2(0, T)}^2 + \|p\|_{H^1(0, T)}^2 + \|u^0\|_{H^1(\Omega_1)}^2,$$

no espaço em (3.2.2.24), cuja norma denotaremos por $\|\cdot\|_2$. Assim, como $\mathcal{T}$ é linear e contínua

$$\|u\|_2 \leq C \|(p, q, u^0, v^0, z^0, u^1, v^1, z^1)\|_E.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left[\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right] dt &\leq C \left[\|q\|_{L^2(0, T)}^2 + \|p\|_{H^1(0, T)}^2 + \|u^0\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|v^0\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|v^1\|_{V_2'}^2 + |z^0|^2 + |z^1|^2 \right],
\end{aligned}$$

o que demonstra (3.2.2.25). ■

Observação 3.2.6. Na dedução da Fórmula de d'Alembert, no Capítulo 2, vimos que a solução da equação da onda, $u_{tt} = u_{xx}$, é

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t),$$

onde

$$F(x) = \frac{1}{2}u^0(x) + \frac{1}{2} \int_0^x u^1(s) ds + \frac{k}{2}$$

e

$$G(x) = \frac{1}{2}u^0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x u^1(s) ds - \frac{k}{2}.$$

Agora, para alguns valores de $t > 0$, temos que $x - t < -1$. Neste caso, precisamos usar a condição de contorno $u(-1, t) = p(t)$, para sabermos qual o valor de $G(x)$, se $x < -1$. Assim,

$$p(t) = u(-1, t) = F(-1 + t) + G(-1 - t),$$

logo,

$$G(x) = p(-x - 1) - F(-2 - x).$$

Donde concluímos que

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [u^0(x + t) + u^0(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds, & \text{se } -1 < x - t < 0 \\ \frac{1}{2} [u^0(x + t) - u^0(t - x - 2)] + p(t - x - 1) + \frac{1}{2} \int_{t-x-2}^{x+t} u^1(s) ds, & \text{se } -2 < x - t \leq -1. \end{cases} \quad (3.2.2.28)$$

Conclusões

Estudar o comportamento de uma corda, com funções de controle dos extremos e comprimento finito, é um problema bastante interessante. A escolha do caso unidimensional nos leva a analisar um problema concreto, além de evitar muitas complicações técnicas.

Ao contrário do que poderíamos esperar, quando passamos a considerar um sistema corda-massa, a introdução do ponto de massa no estudo da equação da onda melhora a regularidade de nossa solução.

Tal fato nos faz questionar o que ocorreria no caso de duas seqüências de cordas conectadas em um ponto de massa, ou mesmo no caso de três cordas conectadas em dois pontos de massa. Vale comentar que, devido a natureza local dos resultados de regularidade, todos estes resultados continuam sendo válidos para cordas com n massas.

Poderíamos, ainda, estudar o caso da introdução de um termo forçante na massa.

Outra possível extensão deste trabalho seria adaptar alguns resultados para os casos de dimensões superiores.

Referências Bibliográficas

- [1] BRÉZIS, Haïm. *Analyse Fonctionnelle*. Paris, Masson Editeur, 1983.
- [2] GIGLIOLI, A.. *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*. X Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas: IMPA, 1975.
- [3] HANSEN, Scott., ZUAZUA, Enrique. *Exact Controllability and Stabilization of a Vibrating with an Interior Point Mass*. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 33, No. 5, 1357 - 1391, 1995.
- [4] IÓRIO, Rafael. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Rio de Janeiro; IMPA, 1988.
- [5] LIONS, J. L.. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*. Paris: MASSON, 1988.
- [6] LIONS, J. L.. *Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems*. SIAM, Vol. 30, No. 1, 1 - 68, 1988.
- [7] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P.H.. *Iniciação aos Espaços de Sobolev*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1977.
- [8] NĚCAS, Jindřich. *Les Méthodes Directes en Théories des équations Elliptiques*, 1967.
- [9] PAZY, A.. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [10] ROYDEN, H. L.. *Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1980.