

Eliana das Neves Areas

SOBRE SIMETRIAS E ORNAMENTOS

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Campinas
Novembro 1999

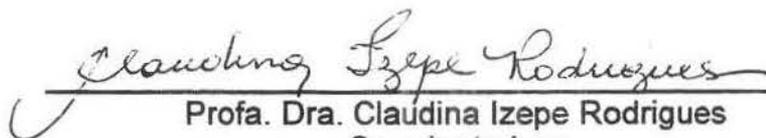
SOBRE SIMETRIAS E ORNAMENTOS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Eliana das Neves Areas e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 9 de Novembro de 1999.



Profa. Dra. Eliane Quelho Frota Rezende
Orientadora



Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues
Co-orientadora

Banca Examinadora:

1. Profa. Dra. Eliane Quelho Frota Rezende
2. Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior
3. Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

UNIDADE	3C		
N.º CHAMADA:	TIUN 333		
V.	Ex.		
TOMBO BC/	42630		
PROC.	96/2 F8/00		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREC.º	R\$ 11,00		
DATA	11/10/00		
N.º CPD			

CM-00145899-8

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Areas, Eliana das Neves

Ar31s Sobre simetrias e ornamentos / Eliana das Neves Areas -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientadores: Eliane Quelho Frota Rezende; Claudina Izepe Rodrigues
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos de simetria. I. Rezende, Eliane Quelho Frota. II. Rodrigues, Claudina Izepe. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de novembro de 1999 e aprovada
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ELIANE QUELHO FROTA REZENDE



Prof (a). Dr (a). GERALDO POMPEU JÚNIOR



Prof (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

*Oswaldir e Mercedes, meus pais, mestres pela
universidade da vida;*

Miguel, pelo amor ... sereno... constante;

Rafael e Daniel, nossos filhos, nossas simetrias;

A vocês dedico este trabalho.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste trabalho, experimentei várias sensações: o medo, o amor, a dor, a incerteza, o prazer, a fé, a generosidade, a gratidão, o sorriso, as lágrimas... todas elas envolvendo acontecimentos que se deram no momento certo, fazendo aparecer as pessoas certas, que de repente, lançam minha vida numa nova e importante direção...

A estas pessoas, minha gratidão.

Profa. Dra. Eliane Quelho Frota Rezende (orientadora)

Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues (co-orientadora)

Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Profa. Dra. Vera Lúcia Xavier Figueiredo

Prof. Francisco Blasi (in memorian)

Prof. Ms. Irineu Salles Batarce

Profa. Dra. Maria Beatriz Ferreira Leite

Viviane Heloísa Westin

Arthur José Aguiar

Wilson Roberto Bonequini

Sr. José Lourenço (in memorian)

Agradeço também, ao Instituto de Ciências Exatas da PUC-Campinas que me dá a oportunidade de exercer a arte de ensinar e ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas onde realizei este trabalho.

Finalmente, agradeço a Deus, origem e razão de tudo.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar simetrias e os grupos de simetrias de ornamentos. Primeiramente, são estudadas as isometrias do plano (translação, rotação, reflexão e reflexão transladada), os grupos cíclico e diedral e o grupo das translações. Após a classificação dos grupos discretos de simetria do plano é apresentada: grupo de rosetas, os sete grupos de ornamentos periódicos unidimensionais e os dezessete tipos de ornamentos periódicos bidimensionais. Faz-se um breve estudo dos mosaicos formados por polígonos e dos mosaicos com motivos assimétricos. O software Cabri-Géomètre II foi usado nas construções geométricas e, particularmente, para as transformações geométricas que ilustram este trabalho.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

ABSTRACT

This objective of this work is to study symmetries and the groups of symmetries of ornaments. Firstly, the isometries of the plane (translation, rotation, reflection and glide reflection), the cyclical and dihedral groups and the translation's group are studied. After, the classification of the discrete symmetry groups of the plane is presented: C_n and D_n , the seven frieze groups and the seventeen wallpaper groups. It is accomplished, also, an abbreviation study of the mosaics formed by polygons and the mosaics with assymmetric motif. The software Cabri-Géomètre II was used for the geometric constructions and, particularly geometric transformations that illustrat this work.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

SUMÁRIO

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
INTRODUÇÃO.....	1
Capítulo 1. ISOMETRIA DO PLANO	
1.1. Isometrias: definição e alguns teoremas.....	5
1.2. As Isometrias do Plano.....	8
1.3. Grupos de Transformações.....	17
1.4. Teoremas de Isometrias do Plano.....	20
Capítulo 2. GRUPOS DE ISOMETRIAS: C_n e D_n E O GRUPO DAS TRANSLAÇÕES	
2.1. Grupos C_n e D_n : definições e exemplos.....	25
2.2. Classes de Isometrias e suas Componentes Rotatórias.....	27
2.3. Grupo Homogêneo – Grupos com centro – Órbitas.....	31
2.4. Teorema de Leonardo da Vinci.....	33
Capítulo 3. GRUPOS DISCRETOS	
3.1. Conjuntos Discretos, Reticulados e Redes.....	36
3.2. Órbitas de um grupo.....	42
3.3. Grupo Discreto das Translações.....	43
3.4. Grupos Pontuais.....	45
Capítulo 4. ORNAMENTOS E GRUPO ROSETA	
4.1. Ornamentos.....	47
4.2. Construção e Reconstrução dos Ornamentos.....	48
4.3. Classificação dos Ornamentos.....	52
4.4. Grupos de Rosetas.....	55

Capítulo 5. OS SETE GRUPOS DE FAIXAS

5.1. Critério de classificação dos Grupos Discretos.....	58
5.2. Os sete tipos de Ornamentos Periódicos Unidimensionais.....	59
5.3. Construção dos sete Grupos de Faixas.....	61

Capítulo 6. OS DEZESSETE GRUPOS DE REVESTIMENTO

6.1. Grupos Cristalográficos: definição e teoremas.....	70
6.2. Centro de Simetria e propriedades.....	74
6.3. Restrição Cristalográfica.....	76
6.4. Grupos Cristalográficos sem n-centros.....	77
6.5. Grupos Cristalográficos com 2-centros.....	80
6.6. Grupos Cristalográficos com 3-centros.....	85
6.7. Grupos Cristalográficos com 4-centros.....	90
6.8. Grupos Cristalográficos com 6-centros.....	93
6.9. Os dezessete Grupos de Revestimento	96

Capítulo 7. MOSAICOS POLIGONAIS E MOSAICOS DE HEESCH

7.1. Mosaicos Poligonais.....	98
7.2. Mosaicos de Heesch.....	107

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	112
----------------------------------	------------

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	124
--	------------

TABELA DE NOTAÇÃO.....	126
-------------------------------	------------

ANEXOS.....	127
--------------------	------------

INTRODUÇÃO

Simetria é a expressão pela qual o homem tem tentado compreender e criar a ordem e a beleza através dos tempos. A idéia de simetria é visível nos desenhos em cavernas, pedras ou ossos, representativos das artes paleolítica e neolítica.

A palavra simetria tem sua raiz na estética e filosofia grega, onde era utilizada para significar: proporção, harmonia, equilíbrio e perfeição.

Por volta de 300 a.C., o matemático grego Euclides, em seu trabalho “Os Elementos”, apresentou organizadamente os conhecimentos da Geometria de sua época, através de um processo conhecido como desenvolvimento dedutivo: afirmações simples, denominadas axiomas, são admitidas como verdadeiras e usadas para provar outras mais complexas. Um dos argumentos de Euclides, que necessitava de uma formalização precisa, era o recurso de superposição, utilizado para provar o caso lado – ângulo – lado (LAL) de congruência de triângulos; a idéia essencial envolvida nesta superposição, é considerar o resultado da aplicação de uma transformação adequada sobre o triângulo.

A abordagem da Geometria através de transformações geométricas foi explorada por Felix Klein (1872) em seu “Erlanger Program”, cuja essência é a teoria de simetria, baseada na teoria de grupos, introduzida em 1831 por E. Galois e publicada em 1848. Segundo Boyer, em sua obra sobre a história da Matemática, “Klein descrevia a Geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações”.

Em nosso trabalho, abordaremos a simetria e os grupos de simetrias de ornamentos, em sete capítulos, descritos a seguir.

No capítulo 1, introduzimos as transformações do plano que preservam distância entre pontos chamadas isometrias. São elas: translação, rotação, reflexão e reflexão transladada.

No capítulo 2, apresentamos os grupos: cíclico C_n e diedral D_n e o grupo das translações. Um resultado importante deste capítulo é o “Teorema de Leonardo”, atribuído a Leonardo da Vinci (1452-1519) que determinou, sistematicamente, as possíveis simetrias da planta de um edifício, ao estudar como acrescentar capelas e

nichos sem destruir a simetria do núcleo. As conclusões de Leonardo resultaram na classificação de todos os possíveis grupos finitos de isometrias do plano, sem translações, chamados grupos rosetas.

No capítulo 3, desenvolvemos os conceitos de grupos discretos, reticulados, redes, órbita de um grupo e grupos pontuais.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo dos ornamentos, sua construção e sua classificação. Podemos classificar todos os grupos de simetria discretos do plano da seguinte forma: dois tipos de grupos de simetrias com centro (grupos de rosetas), sete tipos de simetrias de ornamentos unidimensionais (grupos de faixas) e dezessete grupos de simetrias de ornamentos bidimensionais (grupos de revestimento). O grupo de rosetas tem destaque na arte ornamental, pela frequência e cronologia de sua ocorrência. No período Paleolítico (12000-10000 a.C.), por exemplo, encontram-se as mais antigas rosetas. (Anexo – figuras A1 a A6; Jablan, 1984).

Um modelo de estrutura simétrica de roseta é encontrado na Cristalografia, com os cristais de neve exemplificando a simetria hexagonal. (Anexo – figura A7; Weyl, 1997).

No capítulo 5, apresentamos os sete tipos de ornamentos periódicos unidimensionais ou grupos de faixas. Exemplos de todos os sete grupos de faixas são encontrados entre os padrões decorativos da Antigüidade. (Anexo – figuras A8 a A14; Jablan, 1984).

No capítulo 6, desenvolvemos os dezessete grupos de simetria bidimensionais ou grupos cristalográficos. Em 1894, W. Barlow provou a restrição cristalográfica, mostrando que as rotações dos grupos de simetria dos cristais têm apenas período $n = 1, 2, 3, 4$ e 6 (Jablan, 1984).

Exemplos de todos os dezessete grupos são encontrados entre os padrões decorativos da Antigüidade, em particular, entre os ornamentos egípcios. (Anexo – figuras A15 a A29; Jablan, 1984). Os grupos de simetria já eram implicitamente conhecidos pelos artesãos egípcios, mas a lista completa dos grupos discretos de simetria de um ornamento foi dada por E. S. Fedorov (1891) e, somente em 1924, usando a noção matemática de transformações de grupos, George Polya demonstrou a existência de apenas dezessete grupos de simetrias.

No capítulo 7, apresentamos um breve estudo dos mosaicos formados por polígonos e dos mosaicos com motivos assimétricos que foram introduzidos por H. Heesch, em 1929.

O Anexo, contém ilustrações (Jablan, 1997) dos grupos de simetrias aqui estudados.

As figuras do trabalho, exceto as indicadas no texto, foram feitas com o software Cabri-Géomètre II que permite, entre outros recursos, construir pontos, retas, triângulos, polígonos, círculos e outros objetos básicos e também aplicar as transformações geométricas: translação, dilatação, rotação, reflexão, simetria e inversão a objetos geométricos.

A extensão e universalidade da teoria de simetrias podem ser observadas considerando-se os campos científicos nos quais ela desempenha um papel significativo: Matemática, Física, Química, Cristalografia, Biologia, Estética, Filosofia, etc.

Muito do que entende-se hoje sobre Física está suportado pelos princípios de simetria, dos quais derivam as leis de conservação, que se aplicam a todos os fenômenos físicos. Postulando certas simetrias sobre conservação de energia, momento linear, momento angular, paridade e energia foi possível desenvolver a mecânica quântica com cálculo das órbitas eletrônicas (Weyl, 1997).

Cristalografia é a ciência que estuda os cristais. Os átomos dos cristais, sob certas temperaturas, criam padrões geométricos regulares. A teoria de grupos de simetria permitiu classificar de forma sucinta, os vários tipos de estruturas atômicas, assim como entender a simetria de suas propriedades. Permitiu também o cálculo das estruturas de bandas nos cristais que são fundamentais para a física de semicondutores e suas aplicações como a microeletrônica e a optoeletrônica.

A matemática da simetria geométrica certamente serviu de inspiração para a teoria dos fractais, a qual, além de sua aplicação nos fenômenos morfológicos de deposição, remoção e fratura de materiais, tem produzido através de ferramentas computacionais, pinturas de incrível beleza unindo a arte à ciência.

A Biologia aborda a perspectiva na discussão da simetria dos organismos vivos, da ontogênese e da filogênese.

O papel fundamental da simetria na arte é a conexão com ornamento ou abstração geométrica. Como a mais significativa propriedade de harmonia e equilíbrio, a simetria é o mais relevante princípio na pintura, escultura, arquitetura, dança, poesia e música.

Capítulo 1. ISOMETRIAS DO PLANO

Neste capítulo desenvolveremos as transformações do plano euclidiano que preservam distância entre pontos. Tais transformações são chamadas ISOMETRIAS (ISOS = igual e METRON = medida, em grego).

1.1. Isometria: Definição e alguns Teoremas

Definição 1.1.

Uma *transformação do plano* é uma função bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo.

Assim, uma função γ é uma transformação do plano se para todo ponto P do plano, existe um único ponto Q do plano tal que $\gamma^{-1}(P) = Q$ e reciprocamente para todo ponto R , existe um único ponto S , tal que $\gamma(S) = R$.

Definição 1.2.

Sejam $|AB|$ e $|A'B'|$ as distâncias entre os pontos A e B e A' e B' respectivamente.

A função γ do plano no plano é uma *isometria* se $|AB| = |A'B'|$ para todos os pontos A e B do plano, tais que $A' = \gamma(A)$ e $B' = \gamma(B)$. Dizemos também, neste caso, que γ *preserva distância entre pontos*.

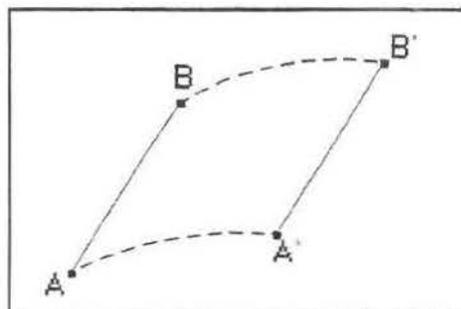


Figura 1 a

Teorema 1.3.

A inversa de uma isometria é uma isometria.

Demonstração:

Seja γ isometria tal que $\gamma^{-1}(A') = A$ e $\gamma^{-1}(B') = B$ com A, A', B e B' pontos do plano.

Temos que $|AB| = |A'B'|$, pois γ é isometria. Mas $|AB| = |\gamma^{-1}(A')\gamma^{-1}(B')|$ e então $|A'B'| = |\gamma^{-1}(A')\gamma^{-1}(B')|$ o que mostra que γ^{-1} é uma isometria \odot

Teorema 1.4.

Se γ é uma isometria, então, γ preserva a relação “estar entre” colinearidade, pontos médios, segmentos, semi-retas, retas, ângulos, medidas de ângulos, triângulos, perpendicularidade.

Demonstração:

Seja γ isometria tal que $\gamma(A) = A', \gamma(B) = B'$ e $\gamma(C) = C'$ para A, B e C pontos do plano.

Os pontos A, B e C são colineares se e somente se $|AB| + |BC| = |AC|$.

Como $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|$ e $|AC| = |A'C'|$, pois γ é uma isometria, segue que, se A, B e C são colineares, então, $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$, ou seja, se B está entre A e C , B' está entre A' e C' provando a colinearidade e a relação “estar entre”.

Em particular, se $AB = BC$, então $A'B' = B'C'$, isto é, se B é ponto médio de A e C , então B' é ponto médio de A' e C' .

O segmento \overline{AB} é a união dos pontos A e B e todos os pontos entre A e B , então, $\gamma(\overline{AB})$ é a união de A', B' e todos os pontos entre A' e B' . Logo $\gamma(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ e então γ preserva segmentos.

A semi-reta \overrightarrow{AB} é a união do segmento \overline{AB} e todos os pontos C , tais que B está entre A e C . Como γ é sobrejetora, por definição, então $\gamma(\overrightarrow{AB})$ é a união de $\overrightarrow{A'B'}$ e todos os pontos C' , tais que B' está entre A' e C' . Logo $\gamma(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.

Como a reta \overleftrightarrow{AB} é a união de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} então $\gamma(\overleftrightarrow{AB})$ é a união de $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{B'A'}$, ou seja, $\gamma(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{A'B'}$ e então γ preserva retas.

Se A , B e C são pontos não colineares então $AB + BC > AC$ e também, $A'B' + B'C' > A'C'$ com A' , B' e C' , não colineares. O triângulo ABC é a união dos três segmentos: \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} então concluímos que $\gamma(\Delta ABC) = \Delta(A'B'C')$.

Logo γ preserva triângulos. Segue que γ preserva ângulos: $\gamma(\hat{A}BC) = \hat{A'B'C'}$ e também medida de ângulo: $m(\hat{A}BC) = m(\hat{A'B'C'})$ desde que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ por LLL. Finalmente, se $\overline{BA} \perp \overline{BC}$, então $\overline{B'A'} \perp \overline{B'C'}$, pois $m(\hat{A}BC) = 90$ implica $m(\hat{A'B'C'}) = 90$, isto é, γ preserva perpendicularidade ©

Teorema 1.5.

Isometrias são transformações do plano.

Demonstração:

Devemos mostrar que uma isometria γ é uma aplicação bijetora do plano sobre si mesmo.

Sejam A e B dois pontos distintos do plano e $A' = \gamma(A)$ e $B' = \gamma(B)$.

Temos que $|AB| \neq 0$, pois A e B são distintos e como γ é isometria, $|A'B'| = |AB| \neq 0$. Segue que A' e B' são distintos e então γ é injetora.

Agora vamos mostrar que dado P' um ponto arbitrário do plano, existe um ponto P do plano tal que $P' = \gamma(P)$. Sejam A , B e C pontos não colineares do plano e então suas imagens A' , B' e C' são pontos não colineares também, pelo Teorema 1.4. Uma das retas $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{B'C'}$ ou $\overleftrightarrow{A'C'}$ não contém o ponto P' . Vamos supor que P' não esteja na reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. Seja P'' o ponto simétrico de P' pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

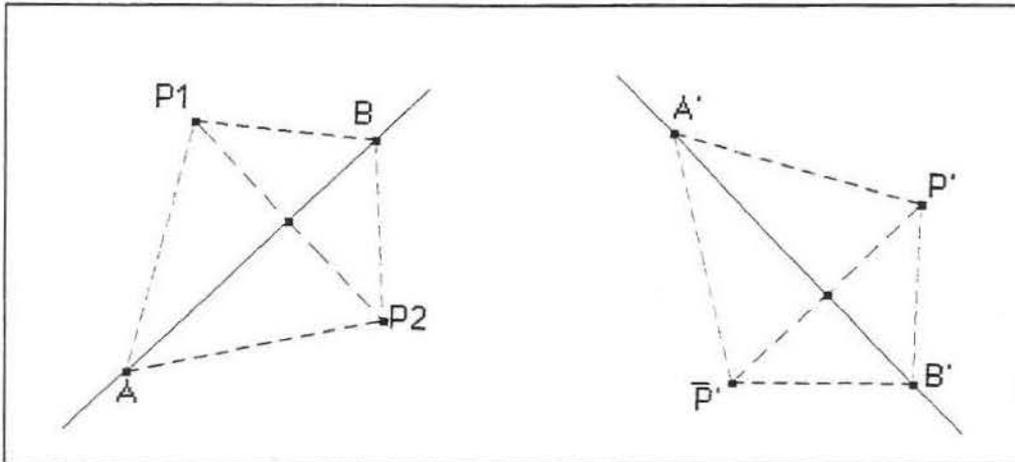


Figura 1 b

Existem dois únicos pontos P_1 e P_2 , simétricos em relação à reta \overline{AB} , tais que os seguintes triângulos são congruentes:

$$\Delta(ABP_1) \cong \Delta(ABP_2) \cong \Delta(A'B'P') \cong \Delta(A'B'\overline{P'})$$

Seja $P'_1 = \gamma(P_1)$. Logo, $|AP_1| = |A'P'_1|$ e $|BP_1| = |B'P'_1|$. Como P' e $\overline{P'}$ são os únicos pontos com essas distâncias de A' e B' , então $P'_1 = P'$ ou $P'_1 = \overline{P'}$. Analogamente, $P'_2 = P'$ ou $P'_2 = \overline{P'}$.

Como γ é injetora e P_1 e P_2 são distintos, então P'_1 e P'_2 são distintos. Logo, $\gamma(P_1) = P'$ ou $\gamma(P_2) = P'$ mostrando que γ é sobrejetora ©

1.2. As Isometrias do Plano

Existem, no plano apenas quatro tipos de isometrias, além da transformação identidade. São elas: translação, rotação, reflexão e reflexão transladada que definiremos a seguir.

a) Translação

A noção de translação está relacionada com o conceito de *vetor* (“*vehere*” = transportar, do Latim).

Definição 1.6.

Sejam v um vetor no plano, A e B pontos distintos do plano, tais que $\overrightarrow{AB} = v$. A *translação* τ_{AB} é definida por: dado o ponto P do plano, sua imagem $P' = \tau_{AB}(P)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AP como lados, se A , B e P não são colineares. Se A , B e P são colineares, então $P' = \tau_{AB}(P)$, tal que AP' e BP têm o mesmo ponto médio M . O segmento orientado AB é tal que $AB = PP' = v'$. Podemos então escrever τ_v em vez de τ_{AB} e dizer que τ_v é a translação de vetor v e a direção de v é a direção da translação τ_v .

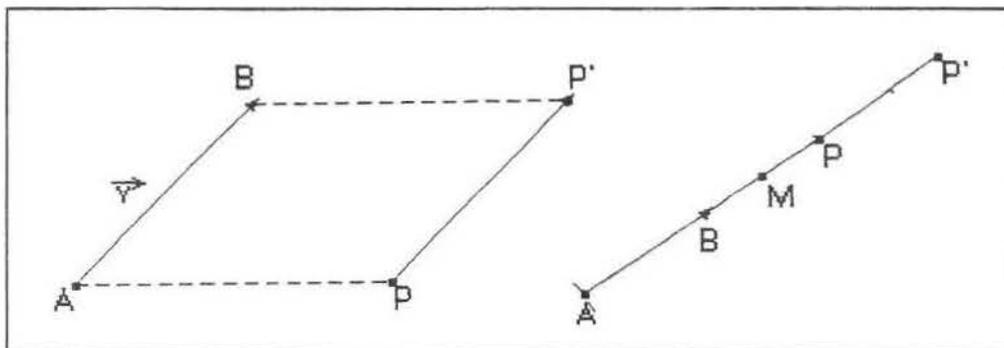


Figura 1 c

Teorema 1.7.

A translação é uma isometria.

Demonstração:

Para mostrarmos que a translação τ_v é uma isometria, consideramos dois pontos arbitrários X e Y do plano e suas imagens $X' = \tau_v(X)$ e $Y' = \tau_v(Y)$.

Se a reta r que contém X e Y é paralela a v então τ_v restrita a r , é a translação $T_{\infty}: r \rightarrow r$. Consideremos os dois casos observados na figura 1 d. No primeiro caso, os segmentos XX' e YY' não têm pontos em comum e no segundo têm.

Assim, no primeiro caso, temos:

$$|X'Y'| = |X'Y| + |YY'| = |X'Y| + |XX'| = |XY|,$$

e no segundo caso, temos:

$$|X'Y'| = |YY'| - |X'Y| = |XX'| - |X'Y| = |XY|$$

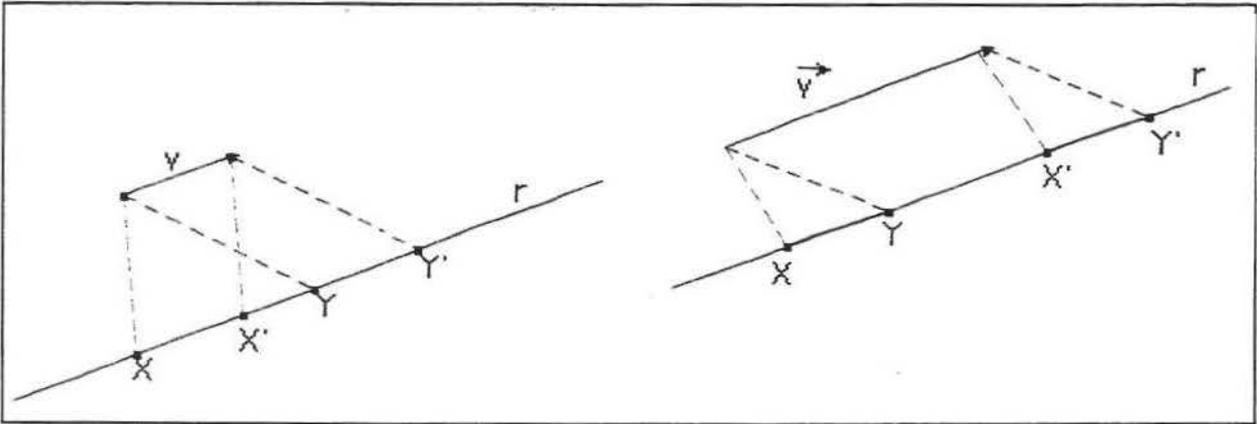


Figura 1 d

Se r não é paralela a v , então XX' e YY' são lados opostos de um paralelogramo, o mesmo ocorrendo com XY e $X'Y'$. Logo $|X'Y'| = |XY|$ ©

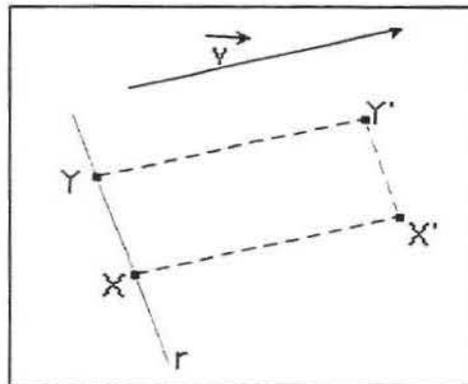


Figura 1 e

b) Rotação

Definição 1.8.

Consideramos O um ponto do plano e $\alpha = \widehat{AOB}$ um ângulo orientado de vértice O . A rotação de ângulo α em torno do ponto O , é a função $\rho_{0,\alpha}$ definida por $\rho_{0,\alpha}(O) = O$ e para todo ponto $X \neq O$ do plano, $\rho_{0,\alpha}(X) = X'$, onde X' é o ponto do plano, tal que $|XO| = |X'O|$, $\widehat{XOX'} = \alpha$. O ponto O é chamado centro da rotação $\rho_{0,\alpha}$.

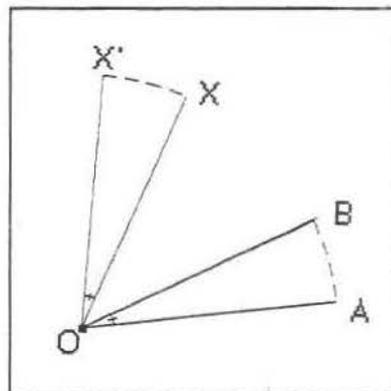


Figura 1 f

Nota: Os ângulos \widehat{BOX} e $\widehat{AOX'}$ têm a mesma bissetriz.

Teorema 1.9.

A rotação é uma isometria.

Demonstração:

Consideremos a rotação $\rho_{0,\alpha}$.

Sejam os pontos X e Y do plano, distintos de O e X' e Y' suas imagens pela rotação $\rho_{0,\alpha}$. Os ângulos $\widehat{X'OY'}$ e \widehat{XOY} têm a mesma bissetriz e então $\widehat{X'OY'} = \widehat{XOY}$. Como $|XO| = |X'O|$ e $|OY| = |OY'|$ temos que os triângulos XOY e $X'OY'$ são congruentes (caso LAL). Portanto, $|X'Y'| = |XY|$ e então $\rho_{0,\alpha}$ é uma isometria ©

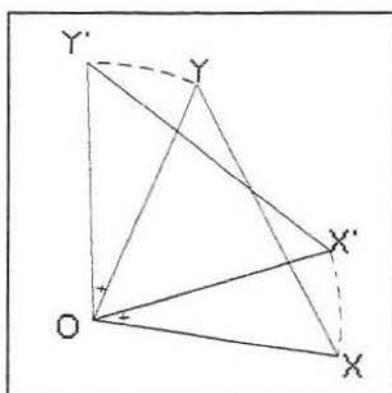


Figura 1 g

c) Reflexão

Definição 1.10.

Seja A um ponto do plano. A função σ_A é uma *reflexão em torno de A* , ou uma *simetria em torno de A* , se $\sigma_A(A) = A$ e para qualquer outro ponto X , distinto de A , temos $\sigma_A(X) = X'$ onde X' é o simétrico de X relativamente a A ; isto é, A é o ponto médio do segmento XX' .

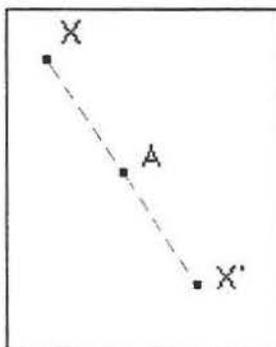


Figura 1 h

O ponto A é chamado ponto de simetria ou centro de simetria.

Teorema 1.11.

A simetria em torno de um ponto é uma isometria.

Demonstração:

Consideremos σ_A a reflexão em torno de A .

Dados X e Y pontos do plano, os triângulos AXY e $AX'Y'$ são congruentes pois $|AX|=|AX'|$, $|AY|=|AY'|$ e os ângulos \hat{XAY} e $\hat{X'AY'}$ são opostos pelo vértice. Logo: $|XY|=|X'Y'|$ ©

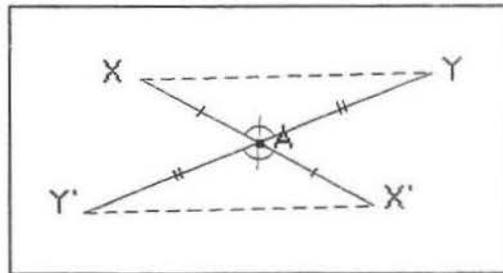


Figura 1 i

Definição 1.12.

Seja r uma reta do plano. A *reflexão em torno da reta r* , denotada por σ_r , é definida por: $\sigma_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, para $X \notin r$, $\sigma_r(X) = X'$ tal que a reta r é a mediatriz do segmento XX' .

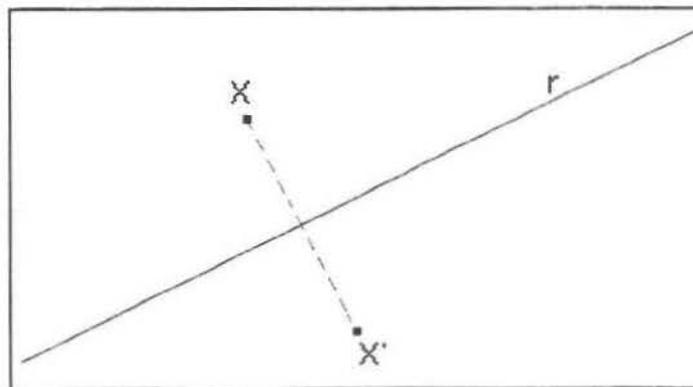


Figura 1 j

A reta r é chamada *reta de simetria* ou *eixo de simetria*.

Teorema 1.13.

A reflexão em torno da reta r é uma isometria.

Demonstração:

Para mostrarmos que σ_r é uma isometria, consideramos duas situações:

1) os pontos X e Y estão no mesmo lado do eixo de simetria r .

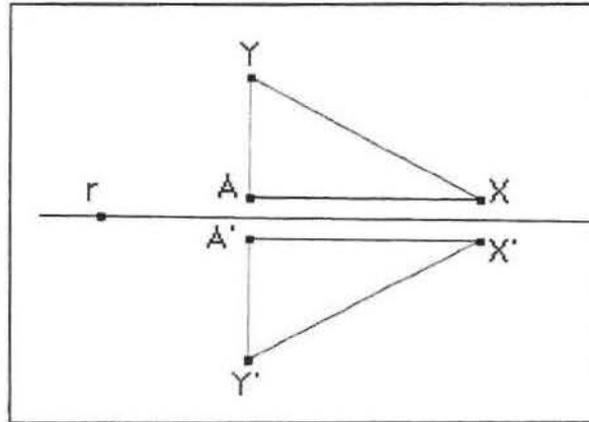


Figura 1 k

Traçamos os segmentos XA e $X'A'$ paralelos a r com A e A' sobre YY' . Os triângulos retângulos XAY e $X'A'Y'$ têm os catetos com medidas iguais, o mesmo ocorrendo com as hipotenusas, isto é, $|XY| = |X'Y'|$.

2) os pontos X e Y estão em lados opostos da reta r .

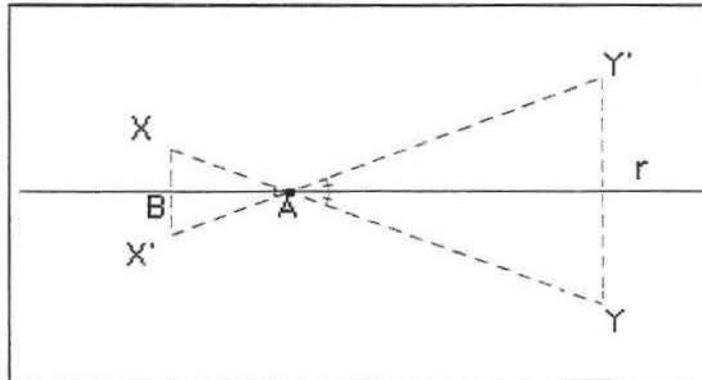


Figura 1 l

Sejam A e B os pontos de interseção de XY e XX' com a reta r . Os triângulos retângulos ABX e ABX' têm o cateto AB em comum e $\overline{BX} = \overline{BX'}$. Logo as hipotenusas têm o mesmo comprimento: $|\overline{AX}| = |\overline{AX'}|$. Analogamente $|\overline{AY}| = |\overline{AY'}|$.

Assim, os triângulos AXX' e AYY' são isósceles e portanto suas medianas são bissetrizes: $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Como α e β' são opostos pelo vértice, temos que $\alpha = \beta'$.

Então, $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$. Como $\beta + \beta'$ é o suplemento do ângulo $X\hat{A}Y'$, o mesmo ocorre com $\alpha + \alpha'$.

Logo, X' , A e Y' são colineares.

$$\text{Assim: } |\overline{X'Y'}| = |\overline{X'A}| + |\overline{AY'}| = |\overline{XA}| + |\overline{AY}| = |\overline{XY}| \quad \odot$$

Definição 1.14.

Sejam γ e β transformações do plano. A *transformação composição* ou *produto* denotada por $\gamma\beta$ é definida por $(\gamma\beta)(P) = \gamma(\beta(P))$ para todo ponto P .

d) Reflexão Transladada

Definição 1.15.

A *reflexão transladada* $\omega_{r,v}$ é a transformação resultante da composição ou produto de uma reflexão em torno da reta r , por uma translação não nula, de direção do vetor v paralela ao eixo da reflexão. Assim $\omega_{r,v} = \tau_v \sigma_r$.

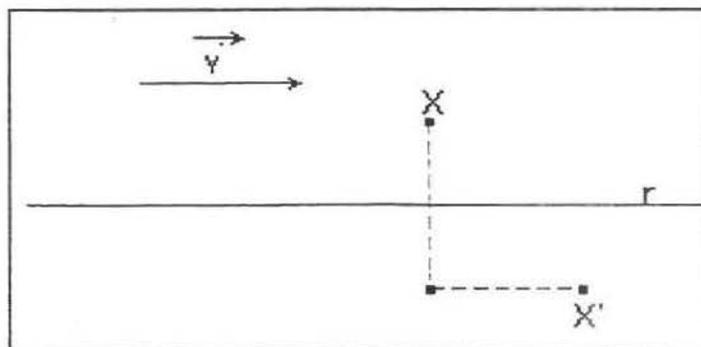


Figura 1 m

Definição 1.16.

Uma isometria é *direta* se conserva a orientação de um triângulo. Caso contrário, é chamada *isometria inversa*.

São exemplos de isometrias diretas, a translação e a rotação.

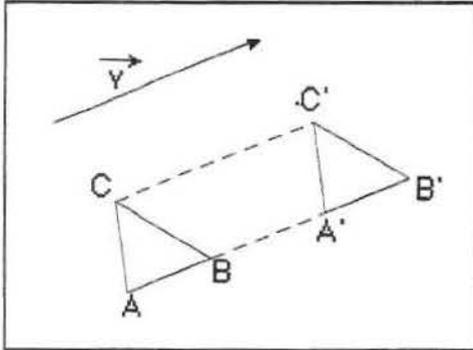


Figura 1 n: Translação

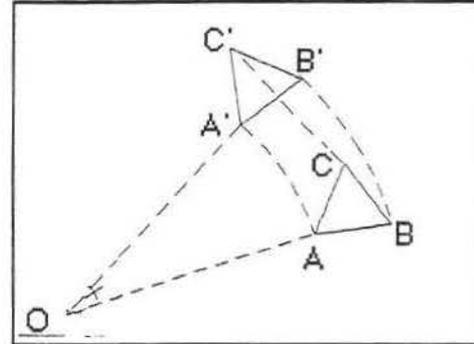


Figura 1 o: Rotação

Exemplos de isometrias inversas são a reflexão e a reflexão transladada.

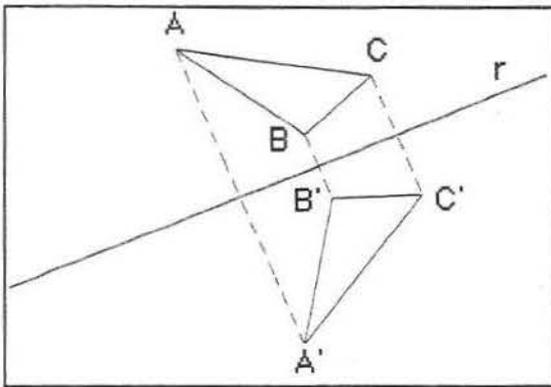


Figura 1 p: Reflexão

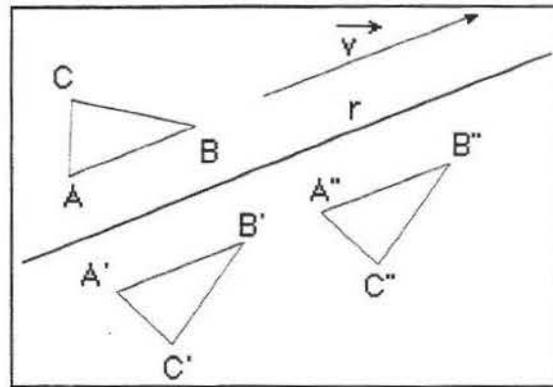


Figura 1 q: Reflexão Transladada

1.3. Grupos de Transformações

Definição 1.17.

A transformação identidade ι é definida por $\iota(P) = P$ para todo ponto P . A transformação γ^{-1} é a transformação inversa de γ , definida por $\gamma^{-1}(B) = A$ se e somente se $\gamma(A) = B$.

Quando um conjunto de transformações possui as transformações: identidade, inversa e composição, dizemos que o conjunto possui as propriedades: identidade, inversa e composição.

Definição 1.18.

Seja G um conjunto de transformações. Dizemos que, G tem a propriedade fechamento quando $\gamma\beta$ está em G sempre que γ e β estão em G e G tem a propriedade associativa quando $(\gamma\beta)\delta = \gamma(\beta\delta)$.

Definição 1.19.

O conjunto G de transformações munido das propriedades: identidade, inversa, fechamento e associativa é chamado um grupo de transformações.

Para verificarmos que um conjunto não vazio G de transformações forma um grupo de transformações, é necessário verificar apenas as propriedades fechamento e inversa.

Teorema 1.20.

O conjunto de todas as isometrias do plano forma um grupo.

Demonstração:

De fato, a identidade ι é uma isometria, a composição de isometrias é também uma isometria pois cada isometria conserva distância e então seu produto também a conserva. Pelo Teorema 1.3, a inversa de uma isometria é uma isometria

O grupo das isometrias do plano será denotado por Σ .

Observação: As isometrias diretas formam um grupo. As isometrias inversas não formam um grupo pois a composição de duas dessas é uma isometria direta.

Definição 1.21.

Dizemos que uma isometria σ é uma simetria para um conjunto de pontos S , se $\sigma(S)=S$.

Teorema 1.22.

O conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos, forma um grupo de transformações.

Demonstração:

De fato, seja S um conjunto de pontos. O conjunto das simetrias para S é não vazio, pois $\iota(S)=S$ e, então, ι é uma simetria.

Suponhamos β e γ duas simetrias para S .

Então, $(\gamma\beta)(S)=\gamma(\beta(S))=\gamma(S)=S$. Logo o conjunto das simetrias tem a propriedade de fechamento.

Se γ é simetria para S , então γ e γ^{-1} são transformações e $\gamma^{-1}(S)=\gamma^{-1}(\gamma(S))=\iota(S)=S$.

Assim, o conjunto das simetrias de S tem a propriedade inversa©

Um exemplo de *grupo de transformações* é o grupo das simetrias de um retângulo, denotado por V_4 . Consideremos o retângulo ABCD e as únicas simetrias possíveis para o retângulo, a saber: identidade ι , reflexão no eixo x : σ_x , reflexão no

eixo y : σ_y , e reflexão em relação à origem : σ_o . Então, podemos escrever:

$$V_4 = \{i, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_o\}.$$

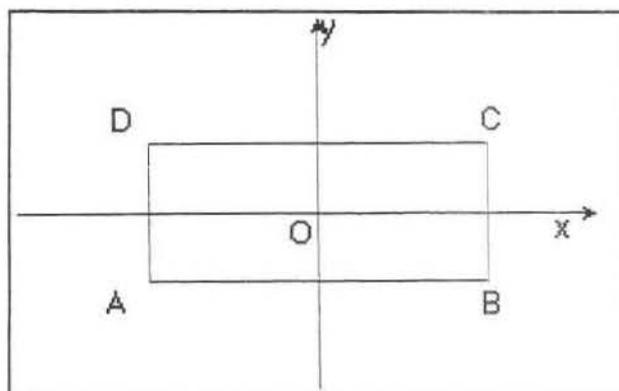


Figura 1 r

Em 1872, Felix Klein (1849-1925) fez o “Erlanger Program” que descreve a geometria dos grupos de simetrias. O grupo V_4 é conhecido como Klein’s Vierergruppe (vier = quatro, gruppe = grupo, em alemão), justificando assim o uso da letra V para denotar tal grupo.

Definição 1.23.

Dizemos que um grupo G é *finito de ordem* n , quando o grupo possui n elementos. Caso contrário, dizemos que G é um grupo infinito.

Por exemplo, o grupo V_4 das simetrias do retângulo é um grupo de ordem quatro, pois $V_4 = \{i, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_o\}$.

Definição 1.24.

Dizemos que a *transformação* β tem *ordem* n , quando $\beta^n = i$, onde n é o menor inteiro tal que $\beta \cdot \beta \dots \beta = i$.

Definição 1.25.

Sejam α e β quaisquer transformações do grupo G . Dizemos que G é *abeliano* ou *comutativo* quando $\alpha\beta = \beta\alpha$

exemplo: O grupo V_4 é abeliano.

Definição 1.26.

Dizemos que o grupo G , que contém a transformação β é *cíclico* quando todo elemento de G é uma potência de β e β é chamado de *transformação geradora* de G .

contra-exemplo: O grupo V_4 não é cíclico.

Definição 1.27.

Dizemos que G é um grupo *cíclico abeliano* quando $\beta^n \cdot \beta^m = \beta^m \cdot \beta^n$ onde β é transformação de G e m e n são números inteiros.

1.4. Teoremas de Isometrias do Plano**Definição 1.28.**

Uma isometria γ *fixa um ponto* P se $\gamma(P) = P$ no ponto P do plano.

O conjunto das isometrias que fixam um ponto P é um grupo que será denotado por Σ_P .

A translação não nula, e a reflexão transladada não possuem ponto fixo. A rotação possui um ponto fixo que é o seu centro de rotação e na reflexão todos os pontos do eixo de reflexão são fixos.

Proposição 1.29.

Duas isometrias que coincidem em três pontos não colineares são iguais.

Demonstração:

Sejam γ_1 e γ_2 duas isometrias que coincidem em 3 pontos não colineares:

A, B e C .

Seja $\gamma = \gamma_1\gamma_2^{-1}$. Então, $\gamma(A) = A, \gamma(B) = B$ e $\gamma(C) = C$, isto é, γ fixa os pontos A, B e C .

Escolhamos um ponto P do plano e três circunferências: Γ, Δ e ϕ de centros A, B e C , respectivamente e que passem por P .

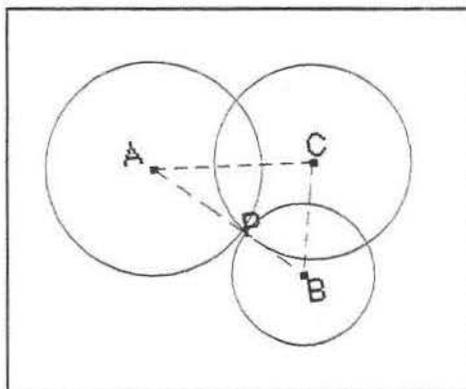


Figura 1 s

Como isometria preserva distância e γ fixa três pontos A, B e C , tem-se que o ponto $\gamma(P)$ pertence a cada circunferência Γ, Δ e ϕ . Mas P é o único ponto que pertence a Γ, Δ e ϕ . Então, $\gamma(P) = P$. Dada à arbitrariedade de P , segue que $\gamma = \iota$ e então $\gamma_1\gamma_2^{-1} = \iota$, ou seja, $\gamma_1 = \gamma_2$ ©

Proposição 1.30.

Uma isometria que fixa um ponto é uma rotação ou uma reflexão.

Demonstração:

Seja γ uma isometria que fixa um ponto P . Escolhem-se dois pontos B e C não alinhados com P .

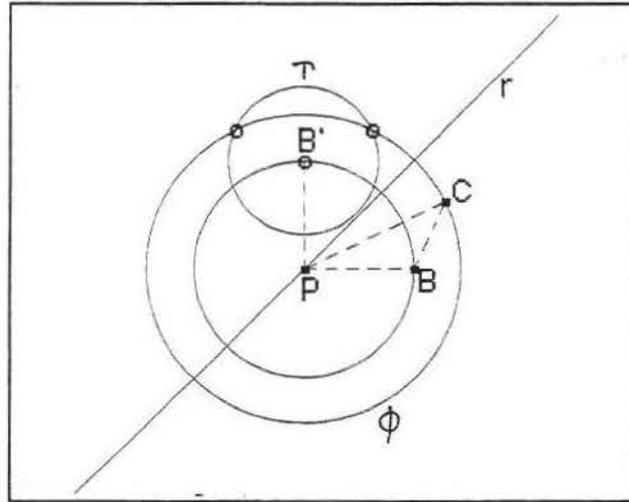


Figura 1 t

Sejam $B' = \gamma(B)$ e o ponto $\gamma(C)$ um dos dois pontos de intersecção da circunferência Γ (de centro B' e raio igual à distância de B e C) com a circunferência Φ (de centro P passando por C). Ver figura 1 t.

Consequentemente γ atua sobre os três pontos não alinhados: P , B e C como a reflexão de eixo r ou como a rotação de centro P e ângulo α . Então, pela proposição 1.29 segue que γ é uma rotação ou uma reflexão \odot

Proposição 1.31.

Seja γ uma isometria qualquer e P um ponto qualquer do plano. Então, existe uma única translação τ e uma única isometria γ' que fixa P tal que $\gamma = \tau\gamma'$.

Demonstração:

Seja τ a translação que leva o ponto P em $\gamma(P)$. Então, a isometria $\gamma' = \tau^{-1}\gamma$ fixa o ponto P \odot

Definição 1.32.

A isometria $\gamma' = \tau^{-1}\gamma$ é chamada *componente rotatória* de γ associada ao ponto P e será denotada por $\varphi(\gamma)$ (ou, mais rigorosamente, com $\varphi_P(\gamma)$).

Exemplo 1.33.

A componente rotatória em relação a um ponto P de uma translação é a identidade, de uma rotação de ângulo α é a rotação de centro P e ângulo α enfim, a componente rotatória de uma isometria inversa de eixo r , é a reflexão com eixo passando por P e paralelo a r .

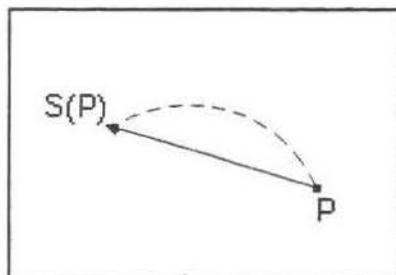


Figura 1 u

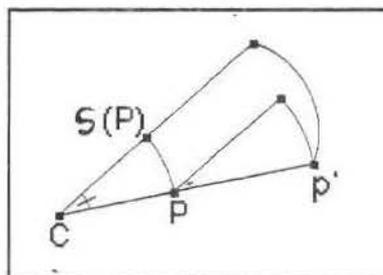


Figura 1 v

Teorema 1.34.

Uma isometria do plano é ou uma translação, ou uma rotação ou uma reflexão ou uma reflexão transladada.

Demonstração:

Pelas proposições 1.30 e 1.31 é suficiente verificar o que ocorre com os produtos de uma translação por uma reflexão ou por uma rotação. Sejam τ e γ respectivamente uma translação e uma isometria que fixa um ponto.

1º caso: *Seja γ uma reflexão com eixo r .*

Se τ é perpendicular a r , então $\tau\gamma$ é a reflexão cujo eixo é a metade entre r e $\tau(r)$.

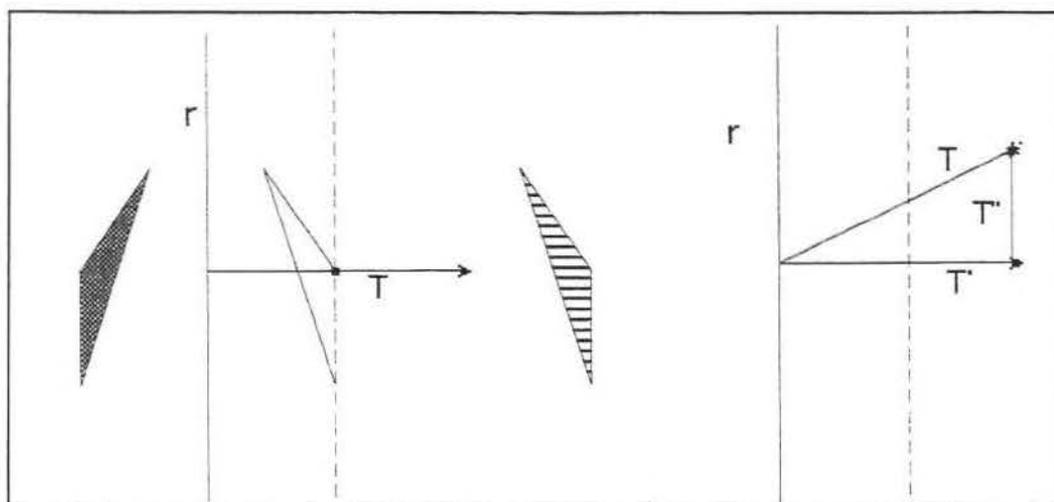


Figura 1 x

Se τ for uma translação que não é perpendicular a r , então $\tau\gamma$ é uma reflexão transladada com eixo que é a metade de r e $\sigma(r)$ e com a translação de deslizamento que é igual à projeção ortogonal τ' de τ sobre r .

2º caso: Seja γ uma rotação com centro P .

A isometria $\tau\gamma$ é então uma rotação com ângulo igual ao de γ e com centro que está sobre o eixo do segmento que tem por extremos os pontos P e $\tau(P)$ (veja a figura 1 z; nela o ângulo de rotação é denotado com α e o centro da rotação $\sigma\gamma$ é denotado com P') ©

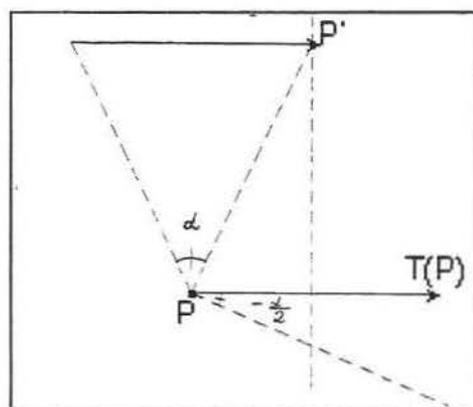


Figura 1 z

Capítulo 2. GRUPOS DE ISOMETRIAS: C_n E D_n E O GRUPO DAS TRANSLAÇÕES

2.1. Grupos C_n e D_n : Definições e Exemplos

Definição 2.1.

Um grupo de isometrias é do *tipo* C_n quando é gerado por uma rotação de ângulo de medida $\frac{360}{n}$ e é do *tipo* D_n quando é gerado por uma rotação de ângulo de medida $\frac{360}{n}$ e por uma reflexão, com eixo passando pelo centro de rotação.

a) Grupo Cíclico C_n

C_n é um grupo de ordem n , gerado por rotação $\rho = \rho_{\alpha, \frac{360}{n}}$.

O grupo C_1 contém apenas a identidade e é o grupo das simetrias de um triângulo escaleno.

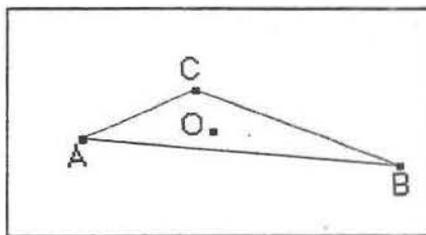


Figura 2 a

O grupo C_2 contém a identidade e $\rho_{\alpha, 180}$ e é o grupo das simetrias de um paralelogramo.

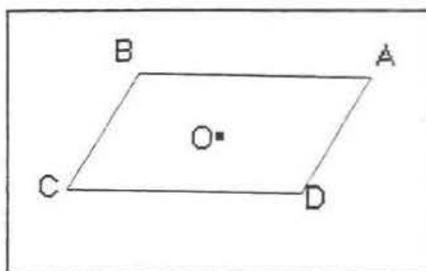


Figura 2 b

C_4 é gerado por rotação $\rho_{0,90}$ sobre a origem. Os elementos de C_4 são:

$$1, \rho, \rho^2, \rho^3.$$

C_4	1	ρ	ρ^2	ρ^3
1	1	ρ	ρ^2	ρ^3
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	1
ρ^2	ρ^2	ρ^3	1	ρ
ρ^3	ρ^3	1	ρ	ρ^2

Figura 2 c

A tabela acima de multiplicação para um grupo finito é chamada tabela de Cayley para o grupo. Arthur Cayley, algebrista, foi um dos primeiros matemáticos a estudar matrizes e introduziu a geometria analítica de espaços n-dimensionais.

b) Grupo Dihedral D_n

Seja n um inteiro positivo maior que 2. Suponha um n-gono regular com centro na origem do plano cartesiano e um dos vértices sobre o eixo positivo x .

O n-gono é fixo por ρ e σ , onde $\rho = \rho_{0, \frac{360}{n}}$ e σ é a reflexão no eixo x .

O grupo das simetrias do n-gono tem $2n$ elementos e será denotado por D_n , chamado *grupo diedral*. Então, $D_n = \langle \rho, \sigma \rangle$ e seus elementos são:

$$1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma.$$

Os grupos D_1 e D_2 , são respectivamente, os grupos de simetria de um triângulo isósceles, não equilátero, e de um retângulo, não quadrado (observar que D_2 é o grupo V_4 já estudado).

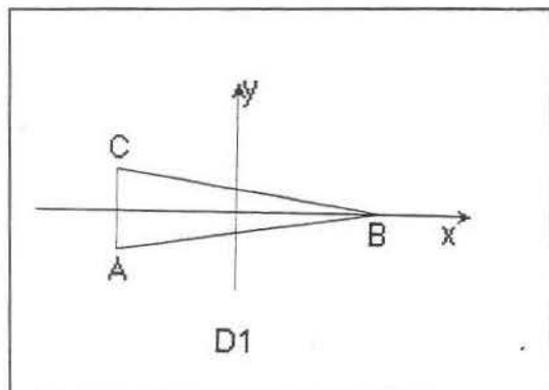


Figura 2 d

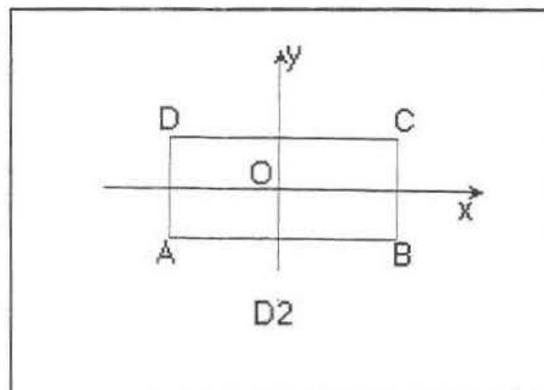


Figura 2 e

Vamos considerar o quadrado com centro O na origem do plano cartesiano e um dos vértices no eixo x .

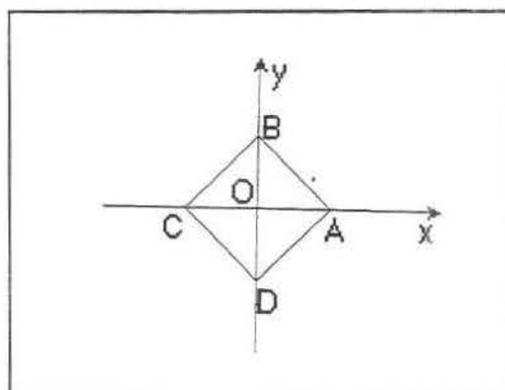


Figura 2 f

O quadrado é fixo por rotação $\rho = \rho_{90}$ e reflexão $\sigma = \sigma_x$, então o quadrado é fixo por quatro rotações distintas: $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$ e por quatro simetrias distintas $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma$.

As simetrias do quadrado formam um grupo de ordem 8, denotado por D_4 , cujos elementos são: $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma$, onde $\rho^4 = \text{id}$ e $\rho^4\sigma = \sigma$.

2.2. Classes de Isometrias e suas Componentes Rotatórias

Definição 2.4.

Dizemos que o grupo G_2 de transformação é um *subgrupo* do grupo de transformações G_1 quando todo elemento de G_2 é um elemento de G_1 .

Definição 2.5.

Dizemos que o grupo G_2 é um *subgrupo normal* de G_1 quando $\gamma^{-1}\beta\gamma$ é um elemento de G_2 , qualquer que seja γ elemento de G_1 .

Teorema 2.6.

O grupo das translações Ξ é um subgrupo normal de Σ .

Demonstração:

Devemos mostrar que $\gamma^{-1}\tau\gamma$ é uma translação qualquer que seja a isometria γ . Se τ é a translação nula, é clara a afirmação.

Suponhamos que τ seja não nula. Então, $\gamma^{-1}\tau\gamma$ não tem ponto fixo. De fato; se fosse, por absurdo, um ponto fixo (isto é, $\gamma^{-1}\tau\gamma(p) = P$), teríamos que $\tau(\gamma(p)) = \gamma(p)$ e $\gamma(p)$ é ponto fixo de τ , contrariando o fato de que uma translação não nula não possui ponto fixo.

Por outro lado, $\gamma^{-1}\tau\gamma$ é uma isometria direta. Então, pelo teorema 1.34 segue que $\gamma^{-1}\tau\gamma$ é uma translação©

O teorema 2.6. será importante na classificação dos ornamentos planos. Podemos demonstrar que Ξ é (exceto o subgrupo trivial que tem a identidade como único elemento) o único subgrupo comutativo e normal de Σ .

O subgrupo das translações nos dá a possibilidade de subdividir o conjunto de todas as isometrias em classes laterais.

Definição 2.7.

Cada isometria γ é associada a sua classe $\Xi\gamma$ que é composta de todas aquelas isometrias que distinguem de γ por uma translação. Um conjunto do tipo $\Xi\gamma$ é chamado *classe de isometria*.

Variando-se a isometria γ , a classe Ξ_γ constitui uma partição de Σ .

Definição 2.8.

Duas isometrias γ e γ' determinam a mesma classe (isto é: $\Xi_\gamma = \Xi_{\gamma'}$) se diferem por uma translação (isto é: $\gamma'\gamma^{-1} \in \Xi$).

Escolhe-se, arbitrariamente, um ponto P ; cada classe de isometria contém um e apenas um elemento de Σ_p . Consequentemente as classes associadas aos elementos de Σ_p são todas e somente as classes de isometria. Para elementos distintos de Σ_p correspondem classes distintas.

O fato de que o subgrupo das translações é normal permite operar com suas classes de isometria como se fosse elemento de Σ_p , mediante as componentes rotatórias.

De fato, dada uma isometria qualquer γ , a sua componente rotatória $\varphi_p(\gamma)$ é o único elemento de Σ_p que pertence a Ξ_γ .

Definição 2.9.

A aplicação $\varphi_p: \Sigma \rightarrow \Sigma_p$ que associa a cada isometria a sua componente rotatória com respeito ao ponto P é um *homomorfismo* de Σ sobre Σ_p ; isto é, quaisquer que sejam as isometrias γ_1 e γ_2 resulta $\varphi_p(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_p(\gamma_1)\varphi_p(\gamma_2)$.

Teorema 2.10.

φ_p é um homomorfismo.

Demonstração:

Dadas as isometrias γ_1 e γ_2 , pela proposição 1.29, segue que existem duas translações τ_1 e τ_2 tais que $\gamma_1 = \tau_1\varphi_p(\gamma_1)$ e $\gamma_2 = \tau_2\varphi_p(\gamma_2)$ e

$\gamma_1\gamma_2 = \tau_1\varphi_p(\gamma_1)\tau_2\varphi_p(\gamma_2)$. Como Ξ é normal, existe uma translação τ' tal que $\varphi_p(\gamma_1)\tau_2 = \tau'\varphi_p(\gamma_1)$. Logo, $\gamma_1\gamma_2 = \tau_1\tau'\varphi_p(\gamma_1)\varphi_p(\gamma_2)$ e pela definição de componente rotatória temos que:

$$\varphi_p(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_p(\gamma_1)\varphi_p(\gamma_2), \text{ como queríamos demonstrar } \odot$$

O homomorfismo φ_p permite transferir informações de Σ para Σ_p e vice-versa; informações do tipo algébrico preservam a composição de isometrias. Por exemplo, usa-se o homomorfismo acima mencionado, para demonstrar a seguinte propriedade de aditividade para rotações: "o produto de rotações é uma rotação cujo ângulo é a soma dos ângulos das rotações envolvidas no produto".

A fim de que esta propriedade enunciada seja válida em toda generalidade, convencionou-se que a translação seja rotação de ângulo zero. Esta convenção será usada apenas quando nos referirmos à propriedade de aditividade.

Informações do tipo geométrico preservam atributos geométricos da isometria particular.

Definição 2.11.

Duas isometrias pertencem a mesma classe de isometria se e somente se têm a mesma componente rotatória.

Pela definição temos que as duas isometrias são duas translações de mesmo ângulo ou duas isometrias inversas com eixos paralelos.

Logo, uma classe de isometria é ou a classe de todas as translações ou a classe de todas as rotações de um ângulo dado, ou, enfim, a classe de todas as isometrias inversas (reflexões e reflexões transladadas) têm eixos paralelos a uma reta dada.

Finalmente, a classe $\Xi\gamma$ de isometrias associada a qualquer isometria γ , é o conjunto de todas as isometrias que têm componente rotatória igual a de γ . No que segue o homomorfismo φ_p será utilizado também para subgrupos de Σ .

2.3. Grupo Homogêneo – Grupos com centro - Órbita

Definição 2.12.

Seja G um grupo de isometria. O *grupo homogêneo* de G com respeito ao ponto P , é o subgrupo G_P de Σ_P , definido por: $G_P = \{ \varphi_P(\gamma); \gamma \in G \}$.

Observa-se que os elementos de G_P não são, em geral, elementos de G .

Proposição 2.13.

Sejam P um ponto qualquer, G um grupo de isometria, T o subgrupo das translações e G_P o grupo homogêneo em relação a P .

Se G_P contém exatamente m elementos, então escolhe-se em G , m isometrias $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ com componentes rotatórias distintas e tem-se $G = T\gamma_1 \cup T\gamma_2 \cup \dots \cup T\gamma_m$.

Cada $T\gamma_i$ contém todas as isometrias de G que têm a mesma componente rotatória de γ_i .

A proposição acima será de grande utilidade na construção dos ornamentos, que estudaremos mais tarde, desde que se conheça, a priori, a estrutura de T e saber que G_P é um grupo finito.

Definição 2.14.

Diremos que o grupo G é um *grupo com centro*, se existe um ponto P que é fixo para cada isometria. Este ponto P é chamado *centro do grupo*.

Como exemplos de grupos com centro, temos os grupos do tipo C_n e D_n .

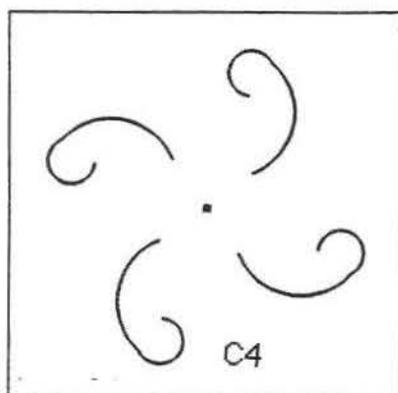


Figura 2 g

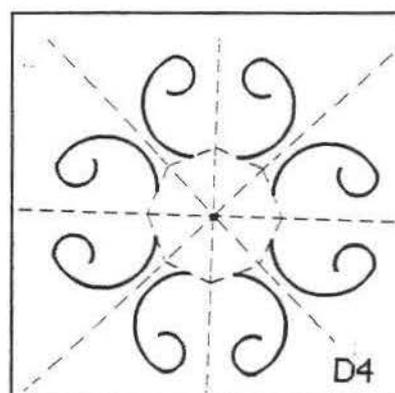


Figura 2 h

Nota-se que os grupos homogêneos associados a um grupo qualquer, são grupos com centro. Em particular, Σ , é um grupo com centro. Um grupo com centro não contém translações não nulas, valendo também a recíproca.

Proposição 2.15.

Um grupo de isometria que não possui translações não nulas é um grupo com centro.

Demonstração:

Seja G um grupo que não possui translações não nulas, então G não terá, também, reflexões transladadas. Pelo teorema 1.32., G conterá apenas rotações e reflexões.

1º caso: Se G contém duas rotações não nulas, então elas têm o mesmo centro.

De fato: Sejam ρ e ρ' duas rotações não nulas pertencentes a G com centros P e P' , respectivamente. A isometria $\rho^{-1}\rho'^{-1}\rho\rho'$ de G tem por componente rotatória a identidade, desde que não pode ser uma translação não nula, e a mesma identidade.

Considerando-se, em particular, para o ponto P' , isto é, $\gamma^{-1}\gamma'^{-1}\gamma\gamma'(P') = P'$; segue que $\gamma'^{-1}(\gamma(P')) = \gamma(P')$; depois o ponto $\gamma(P')$, fixado da γ'^{-1} é o centro de γ' , isto é $\gamma(P') = P'$. Desta última igualdade segue que $P' = P$, como queríamos demonstrar.

2º caso: Se G contém uma rotação não nula e uma reflexão, então o centro da rotação localiza-se sobre o eixo da reflexão.

Se $\rho \in G$ a rotação não nula e $\sigma \in G$ a reflexão. Seja P o centro de ρ . Então, a isometria $\sigma\rho\sigma \in G$ é uma rotação não nula de centro $\sigma(P)$. Da 1ª observação segue que ρ e $\sigma\rho\sigma$ têm o mesmo centro, então, $P = \sigma(P)$. Logo o centro P de ρ está sobre o eixo de σ . Colocadas estas duas observações, vejamos o que ocorre com o nosso grupo G .

Se G possui apenas a identidade, a tese da proposição é óbvia. Se G possui uma rotação não nula, então das duas observações precedentes, segue que o centro da rotação é fixado para cada elemento de G . Enfim, no caso de que G não se reduz à identidade e não contém rotação não nula, o grupo G , contém uma só reflexão pois se tivesse duas reflexões distintas com eixos paralelos, seu produto seria uma translação não nula que pertenceria a G , contrariando o fato que G não possui translações não nulas e se tivesse duas reflexões distintas com eixos não paralelos, seu produto seria uma rotação não nula que deveria pertencer a G , contrariamente a G referente ao 2º caso.

Consequentemente também para este caso a proposição ainda vale ©

Definição 2.16.

Sejam G_ρ o grupo das rotações de G e Q e um ponto. O conjunto $G_\rho(Q)$ definido por $G_\rho(Q) = \{ \rho(Q) / \rho \in G \}$ é chamado *órbita* de Q .

2.4. Teorema de Leonardo da Vinci

Teorema 2.17. (Teorema de Leonardo)

Um grupo finito de isometria é do tipo C_n ou D_n .

Demonstração:

Seja G um grupo finito. Já que G , claramente, não possui translações não nulas, da proposição anterior temos que G é um grupo com centro. Sejam P o seu centro e G_ρ o grupo das rotações de G .

1º caso: G_ρ contém apenas a identidade. Neste caso G é ou do tipo C_1 , no caso de conter apenas a identidade, ou do tipo D_1 quando G possuir também a reflexão. G não pode conter duas reflexões distintas com eixos paralelos, pois o seu produto seria uma translação não nula que deveria pertencer a G , contrariando o fato que G é finito. Por outro lado, G não pode conter duas reflexões distintas com eixos não paralelos, pois neste caso, o seu produto seria uma rotação não nula que deveria pertencer a G , contrariamente a G_ρ .

2º caso: G_ρ contém uma rotação não nula. Sejam Q um ponto distinto de P e $G_\rho(Q)$ a órbita de Q . Tal órbita é composta de um número n finito de pontos pois G_ρ é finito e estes pontos estão na circunferência Γ de centro P e passando por Q . Sejam Q, Q_1, \dots, Q_{n-1} os pontos da órbita de Q , elencados ordenadamente, isto é, partindo de Q e percorrendo a circunferência Γ no sentido anti-horário, encontra-se primeiro Q_1 , depois Q_2 e assim sucessivamente.

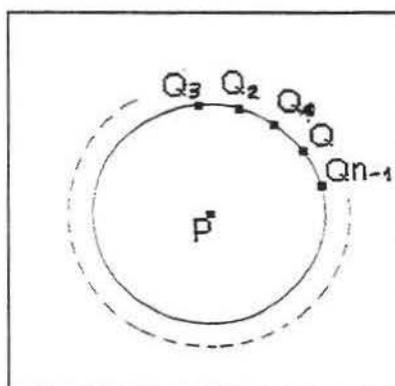


Figura 2 i

Seja ρ_0 a rotação pertencente a G_ρ tal que $\rho_0(Q) = Q_1$. Pode-se demonstrar, então que a órbita de Q é composta dos vértices de um n -ágono regular. Deduz-se que o ângulo de rotação de ρ_0 é um n -imo de giro e que cada rotação de G_ρ ,

devido transportar o ponto Q para um outro ponto da órbita de Q , deve ser necessariamente uma potência de ρ , uma vez que as diversas potências de ρ , levam o ponto Q nos vários pontos da órbita de Q .

Verifica-se então que G_ρ é um grupo do tipo C_n . O grupo G será do tipo C_n no caso de não conter reflexão; caso contrário será do tipo D_n se também possuir reflexão.

Capítulo 3. GRUPOS DISCRETOS

3.1. Conjuntos Discretos, Reticulados e Redes

Definição 3.1.

Um conjunto F do plano é *discreto* quando não possui pontos de acumulação, isto é, em qualquer círculo do plano, encontramos um número finito de pontos de F .

Um conjunto discreto é enumerável e entre os conjuntos discretos temos os *reticulados unidimensionais* de pontos e os *reticulados bidimensionais* de pontos que definiremos a seguir.

Definição 3.2.

Um conjunto R de pontos do plano é um *reticulado unidimensional* quando existe uma translação não nula τ de um ponto P do plano tal que:

$$R = \{\tau^n(P) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

A translação τ é chamada geradora do reticulado.

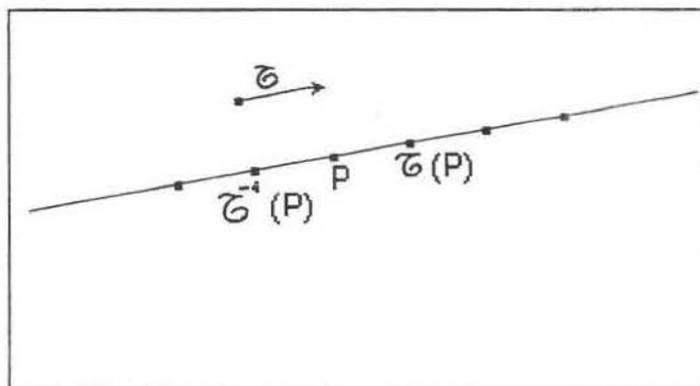


Figura 3 a

É claro que P é, necessariamente, um ponto de reticulado R e que os pontos de R subdividem a reta que os contém, em segmentos de comprimentos iguais em toda a extensão de τ .

No reticulado unidimensional, o ponto P pode ser substituído por qualquer outro ponto de R , mas a translação geradora τ pode ser substituída apenas por τ^{-1} . Todas as potências τ^n de τ formam uma simetria de R .

Concluindo, para um reticulado unidimensional R podemos afirmar:

Propriedades 3.3.

- a) R é discreto situado numa reta qualquer.
- b) Cada translação τ que leva um ponto de R para outro ponto de R é uma simetria de R .
- c) τ é a translação não nula, paralela à reta que possui o reticulado R e a amplitude de τ é igual à distância mínima entre dois pontos distintos de R .

Definição 3.4.

Um conjunto R do plano é um *reticulado bidimensional* quando existem duas translações independentes τ_1 e τ_2 e um ponto P , tais que:

$$R = \{\tau_1^n \tau_2^m (P) : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

As translações τ_1 e τ_2 são as geradoras do reticulado.

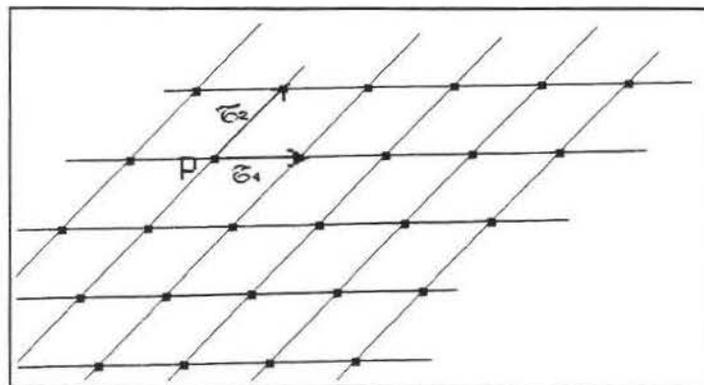


Figura 3 b

Para obtermos um reticulado bidimensional R , podemos substituir P por qualquer outro ponto de R mas as translações τ_1 e τ_2 podem ser substituídas por outras duas translações τ_1' e τ_2' se e somente se os pontos $\tau_1'(P)$ e $\tau_2'(P)$ pertencem

ao reticulado R e junto aos dois pontos P e $\tau_1\tau_2(P)$ constituem os vértices de um paralelogramo que não contém outros pontos do reticulado.

Para um reticulado bidimensional R podemos fazer as seguintes afirmações:

Propriedades 3.5.

- a) R é discreto situado em duas retas não paralelas.
- b) Cada translação $\tau = \tau_1\tau_2^n$ que leva um ponto de R em outro ponto de R é uma isometria.
- c) As translações geradoras τ_1 e τ_2 podem ser determinadas por um dos seguintes modos:

- 1) Escolhem-se os pontos $P \in R$ e $A \in R$ com $P \neq A$ tais que A tenha distância mínima de P . Escolhe-se, então, outro ponto $B \in R$, não situado na reta passando por P e A , que tenha distância mínima de P .

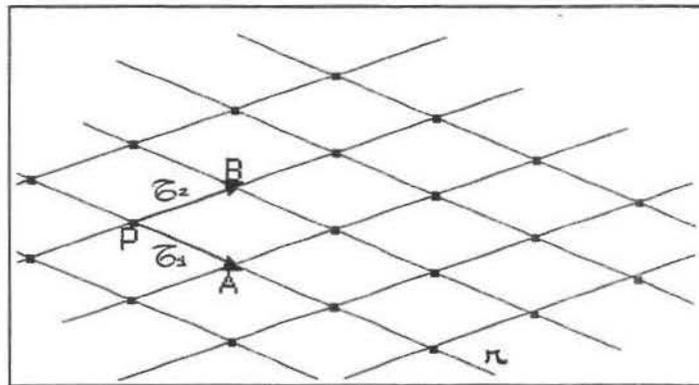


Figura 3 c

As duas translações geradoras do reticulado são, portanto, $\tau_1: P \rightarrow A$ e $\tau_2: P \rightarrow B$

- 2) Escolhem-se dois pontos quaisquer P e D de R e toma-se o ponto $A \in R$ que tem distância mínima de P entre todos os pontos de reticulado que estão na reta r passando por P e D . Considera-se outro ponto $B \in R$ que tem distância mínima de r que não passa pela reta que contém P e A . As duas translações geradoras são, portanto: $\tau_1: P \rightarrow A$ e $\tau_2: P \rightarrow B$.

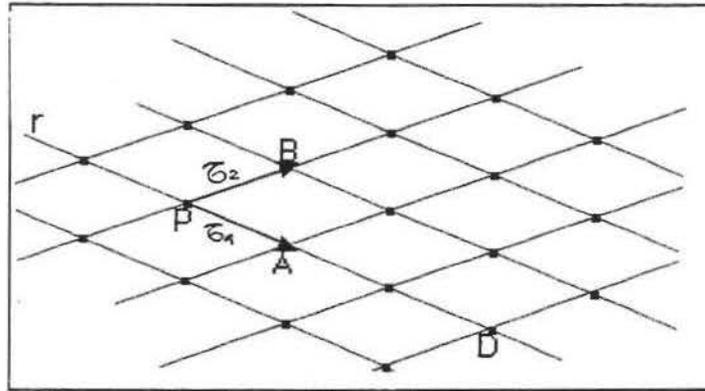


Figura 3 d

Uma *rede* está associada a um reticulado de pontos obtido por duas translações; essas translações são chamadas geradoras da rede.

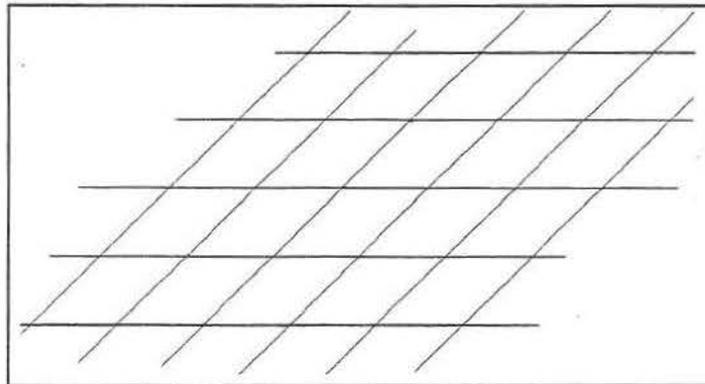


Figura 3 e

Definição 3.6.

A rede subdivide o plano em paralelogramos congruentes de vértices $P, \tau_1(P), \tau_2(P)$ e $\tau_1\tau_2(P)$. Cada paralelogramo é chamado *célula básica*.

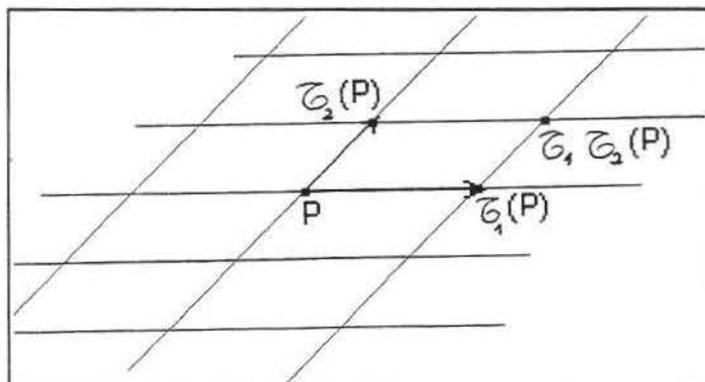


Figura 3 f

Definição 3.8.

Chamamos *nós* da rede, os pontos do reticulado R que são interseção das retas da rede.

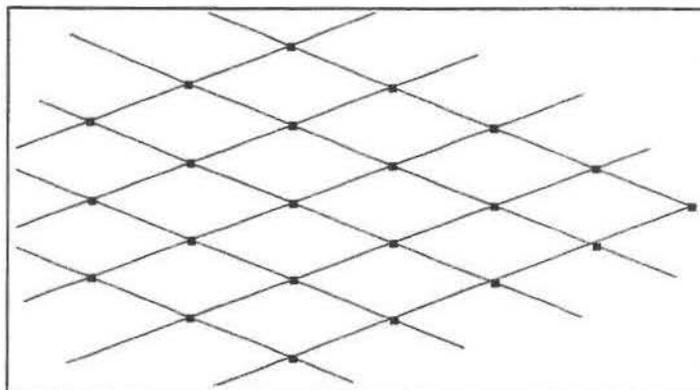


Figura 3 g

TIPOS DE REDE

Se a célula básica da rede é:

- 1) Um losango, que é gerado por duas translações de comprimento iguais, a *rede* é chamada *rede de losangos* ou de *retângulos centrais*.

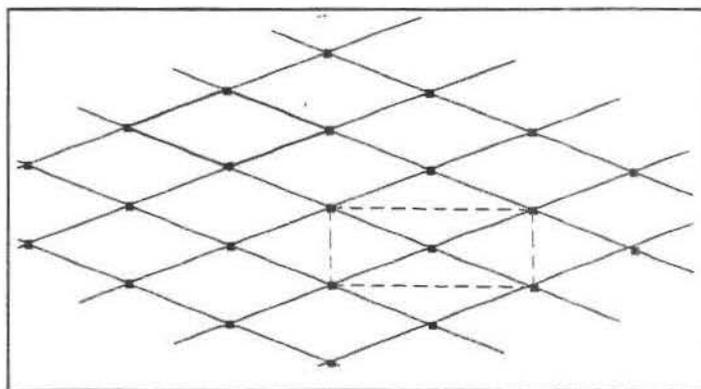


Figura 3 h

- 2) Um retângulo, que é gerado por duas translações perpendiculares de comprimentos diferentes, a rede é chamada *rede de retângulos*.

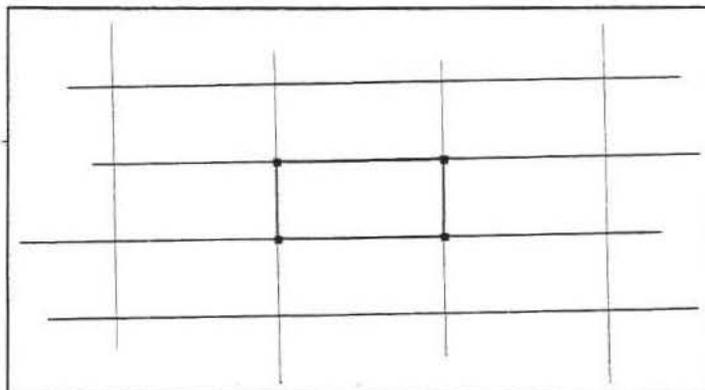


Figura 3 i

3) Um quadrado, que é gerado por duas translações perpendiculares de comprimentos iguais, a rede é chamada *rede de quadrados*.

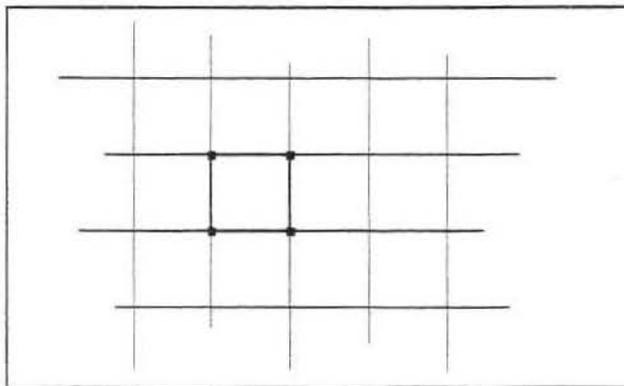


Figura 3 j

4) um triângulo equilátero, a rede é chamada rede de *triângulos equiláteros* ou *hexágonos centrais*.

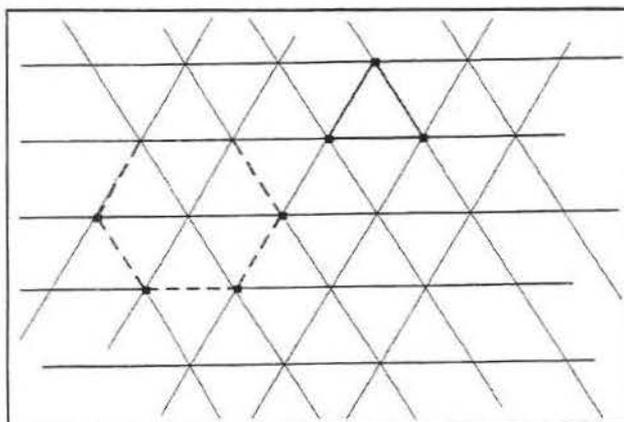


Figura 3 l

3.2. Órbitas de um grupo

Definição 3.9.

Seja G um grupo de simetrias e P um ponto do plano. Cada conjunto da forma:

$G(P) = \{ \gamma(P) : \gamma \in G \}$ é chamado *órbita de G associada ao ponto P* .

O conjunto de todas as órbitas de G obtidas variando-se o ponto P , constituem uma *partição* do plano. De fato, se tem que:

a) $P \in G(P)$, pois $P = \iota(P)$ e ι é isometria.

b) $G(P) \cap G(Q) \neq \emptyset \rightarrow G(P) = G(Q)$, quaisquer que sejam os pontos P e Q do plano.

Definição 3.9.

O conjunto F que contém um e somente um ponto de cada órbita de G é chamado *região fundamental* de G .

Definição 3.10.

Um grupo de simetrias G é um *grupo discreto* se cada órbita de G é um conjunto discreto.

Os grupos finitos são discretos mas existem também grupos infinitos que são discretos.

Propriedades 3.11.

a) Para cada par de pontos P e Q de uma mesma órbita, existe uma simetria $\gamma \in G$, tal que $\gamma(P) = Q$.

b) Cada elemento de G é simetria de uma órbita qualquer sua.

A noção de órbita é importante no estudo dos ornamentos não só porque os grupos de simetria de um ornamento são discretos, mas também, porque esta noção é usada na análise e construção de um ornamento.

3.3. Grupo Discreto das Translações

Já sabemos, pela definição 3.10. que o grupo T das translações é discreto, quando cada órbita de T é um conjunto discreto. Isto será importante na classificação dos ornamentos que admitem, como simetrias, translações não nulas. No que segue, consideraremos T um grupo de translações que contenha alguma translação não nula.

Teorema 3.12.

T é um grupo discreto se e somente se T é gerado por uma ou duas translações independentes. Portanto, se T é um grupo discreto, então suas órbitas são reticulados unidimensionais ou bidimensionais.

Demonstração:

Se T é um grupo discreto, então é evidente que é gerado por uma ou duas translações independentes e suas órbitas são reticulados unidimensionais ou bidimensionais que são conjuntos discretos (condição para ser reticulado de pontos). Para demonstrar a implicação inversa, escolhe-se um ponto P arbitrário e considera-se a órbita $T(P)$.

Se as translações presentes em T são entre elas paralelas, então o conjunto $R=T(P)$ verifica as propriedades 3.3a) e b); portanto, R é um reticulado unidimensional. No caso de T conter pelo menos duas translações independentes raciocina-se de maneira análoga ©

Proposição 3.13.

Seja T um grupo não discreto. Então, cada órbita sua é densa em alguma reta ou no plano.

Demonstração:

Seja P um ponto qualquer do plano e $T(P)$ sua órbita.

1º caso: T contém uma translação τ não nula tal que cada uma das outras translações de T seja paralela a τ . Seja r a reta passando por P e paralela a τ . Esta reta é, evidentemente, a única reta que contém a órbita $T(P)$. Como, por hipótese, esta órbita não é um conjunto discreto, ela admitirá sobre r um ponto de acumulação. Isto implica que na reta r estão pontos, distintos de $T(P)$, arbitrariamente próximos.

Fixamos um $\varepsilon > 0$ e escolhamos em T uma translação τ' , não nula de amplitude menor que ε . Então o reticulado unidimensional R contendo um ponto P é gerado por τ' , é composto de pontos de r que pertencem à órbita $T(P)$; portanto, cada outro ponto desta reta r distante de algum ponto de R (e, com maior razão de qualquer ponto de $T(P)$) menor que ε . Isto, dada a arbitrariedade de ε , implica que $T(P)$ é denso em r , como queríamos demonstrar.

2º caso: T contém pelo menos duas translações independentes.

Como, por hipótese, a órbita $T(P)$ não é um conjunto discreto, temos dois subcasos:

1º) existe uma reta r passando por P tal que o conjunto F de pontos da órbita $T(P)$ pertencentes a r , não seja discreto. Então, em r se encontra um ponto de acumulação para F . Isto implica que sobre a reta r tem-se distintos pontos de F arbitrariamente próximos; por 3.3a) segue que T conterà translações não nulas paralelas a r e de amplitude arbitrariamente pequena. Então, procedendo-se como no 1º caso, tem-se que $T(P)$ é denso em r , como queríamos demonstrar.

2º) cada reta r é tal que o conjunto dos pontos da órbita $T(P)$ pertencentes a r , seja discreto.

Uma vez que, por hipótese, a órbita $T(P)$ não é um conjunto discreto, esta admitirá um ponto de acumulação. Teremos então em $T(P)$ ternas de pontos não alinhados arbitrariamente próximos. Então de 3.3a) segue que T conterà translações independentes de amplitude arbitrariamente pequena. Logo, fixado um $\varepsilon > 0$, escolhe-se em T duas translações τ e τ' independentes de amplitude menor que ε . Então, o reticulado bidimensional R contendo o ponto P e gerado por τ e τ' é composto por pontos de $T(P)$. Uma vez que as translações τ e τ' têm amplitudes menores que ε ,

segue que a distância de cada ponto do plano a algum ponto de R (e com maior razão de qualquer ponto de $T(P)$!) é menor que ε . Isto, dado ε arbitrário, implica que $T(P)$ é denso no plano \odot

3.4. Grupos Pontuais

Definição 3.14.

Um grupo com centro é *pontual* se é discreto.

Teorema 3.15.

Os únicos grupos pontuais são do tipo C_n e D_n .

Demonstração:

Que os grupos C_n e D_n são pontuais é óbvio, pois são grupos com centro e discretos.

Para mostrarmos a recíproca observa-se que uma órbita qualquer de um grupo com centro localiza-se em uma circunferência. Por isso, uma órbita de um grupo pontual (que, por definição, é com centro e discreto) é um conjunto finito. Dito isto, procedendo-se como na demonstração do teorema 2.17, conclui-se que um grupo pontual é do tipo C_n ou D_n \odot

Proposição 3.16.

Sejam G um grupo com centro *não discreto* e o ponto Q seu centro. Então, cada órbita de G é densa na circunferência de centro Q que a contém.

Demonstração:

Sejam P um ponto qualquer do plano, distinto de Q e γ a circunferência de centro Q passando por P . Seja G_P o subgrupo das rotações de centro Q que estão

em G . É claro que G_ρ não pode ser discreto, senão G_ρ seria do tipo C_n e então G seria do tipo C_n ou D_n e então discreto, contrariando a hipótese.

Portanto, a órbita $G_\rho(P)$, não sendo um conjunto discreto, possui um ponto de acumulação. Isto implica que na circunferência γ estarão pontos distintos de $G_\rho(P)$ arbitrariamente próximos; então de (3.18) segue que G_ρ conterá rotações de ângulo arbitrariamente pequeno. Logo, fixado um $\varepsilon > 0$, escolhe-se em G_ρ uma rotação ρ de ângulo menor que ε .

O conjunto $F = \{\rho^n(P); n \in \mathbb{N}\}$ é composto de pontos da órbita $G_\rho(P)$; portanto, cada outro ponto da circunferência γ distinto de qualquer ponto de F (e com maior razão de qualquer ponto de $G_\rho(P)$) é menor que ε . Dada à arbitrariedade de ε , temos que $G_\rho(P)$ é denso em γ ©

Capítulo 4. ORNAMENTOS E O GRUPO ROSETA

4.1. Ornamentos

O *ornamento do plano* será tratado como um conjunto de pontos do plano. Alguns ornamentos são considerados triviais; como: o ornamento vazio, o ornamento constituído de todos os pontos do plano, os ornamentos que são união de um ou mais círculos concêntricos e os ornamentos que são união de uma ou mais retas paralelas. Consideraremos apenas os ornamentos não triviais.

Os ornamentos podem ser *limitados*: contidos dentro de um círculo (figura 4 a) ou *ilimitados*: contidos entre duas retas paralelas (figura 4 b).

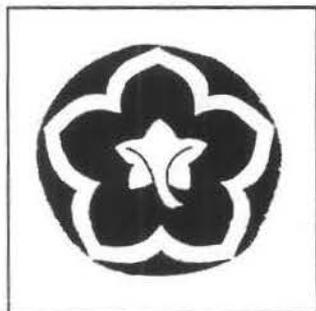


Figura 4 a



Figura 4 b

Uma *simetria de um ornamento* é um movimento rígido do plano que aplica o ornamento sobre si mesmo. O conjunto das simetrias de um ornamento é um grupo chamado *grupo de simetrias do ornamento*.

Os dois ornamentos – figuras 4 c e 4 d (Lederberger - Ruoff, 1992. p.149) possuem em seus grupos ornamentais o mesmo tipo de simetria, a saber, uma reflexão numa reta.

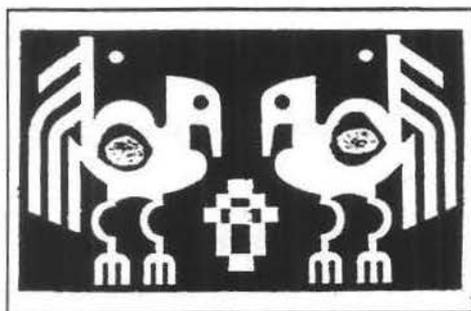


Figura 4 c



Figura 4 d

Os ornamentos que contêm os mesmos tipos de simetrias em seus grupos ornamentais são *ornamentos equivalentes*.

4.2. Construção e Reconstrução dos Ornamentos

Vejamos como construir um conjunto que tenha, como simetrias, todos os elementos de um dado grupo de isometrias. Assim, sejam G um grupo de isometrias e F um conjunto de pontos do plano.

O conjunto F será chamado *elemento gerador* ou *motivo*.

O conjunto F^* definido por $F^* = \bigcup_{S \in G} S(F)$ é tal que cada elemento de G é simetria de F^* . Usamos também a notação $G(F)$ para F^* .

A construção de F^* pode ser facilitada (especialmente quando G é infinito) através do conhecimento de alguma decomposição de G em classes laterais com respeito a um seu subgrupo.

Exemplo 4.1.

Seja G finito. Suponhamos que se queira construir um ornamento que contém simetria do tipo D_n . Escolhe-se um grupo D_n do tipo D_n ; considera-se um subgrupo C_n das rotações contidas em D_n e se escolhe uma reflexão $\sigma \in D_n$. Neste caso, resulta que $D_n = C_n \cup \sigma C_n$.

A construção de F^* será facilitada se construirmos o conjunto intermediário F' definido por $F' = \bigcup_{S \in C_n} S(F)$.

Então, $F^* = F' \cup \sigma(F')$.

Assim, ao invés de fazermos $(2n-1)$ operações com o motivo F , faremos n operações.

A seguir apresentamos uma construção deste exemplo.

Sejam F o triângulo \blacktriangle , D_n , C_n com $n=3$ e $\sigma_r \in D_3$ a reflexão em torno da reta r passando pelo centro de rotação O .

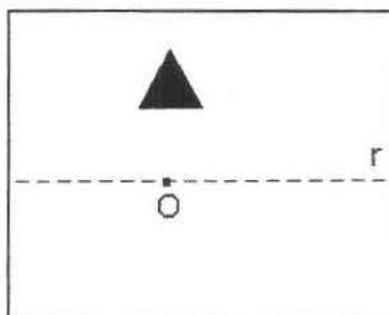


Figura 4 e

Aplicando-se sobre F a simetria de C_3 , que é a rotação de 120° , duas vezes, obteremos F' que é a figura 4 f.

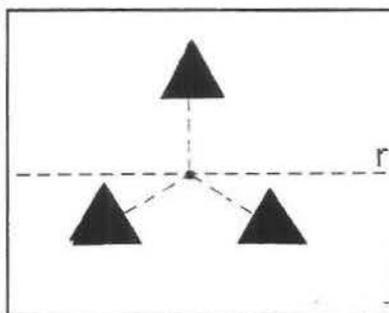


Figura 4 f

A seguir aplicamos a reflexão σ_r em F' e obtemos F^* que é a figura 4 g.

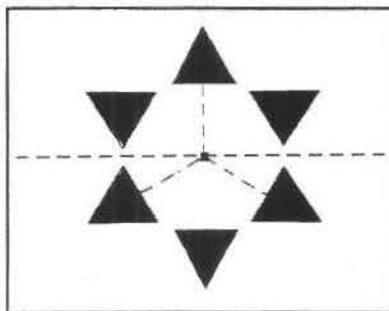


Figura 4 g

Foram, portanto, feitas 3 operações, a saber: duas rotações para se obter F' e uma reflexão para se obter F^* . Caso não tivéssemos construído F' para obtermos F^* , teríamos que efetuar 5 operações para obtermos a figura final. A saber:

1) rotação de 120°

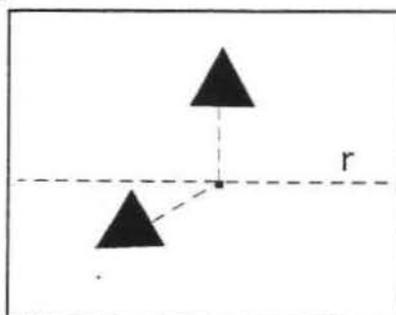


Figura 4 h

2) Reflexão para F obtido após a rotação.

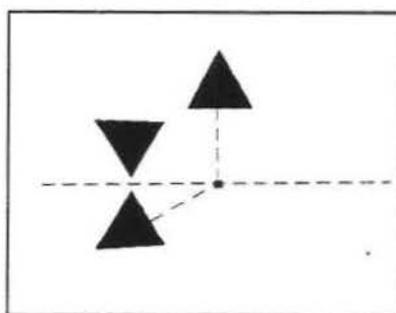


Figura 4 i

3) Rotação sobre F obtida após a 1ª rotação.

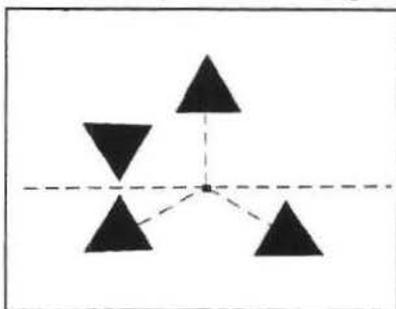


Figura 4 j

4) Reflexão sobre F obtida após a 2ª rotação.

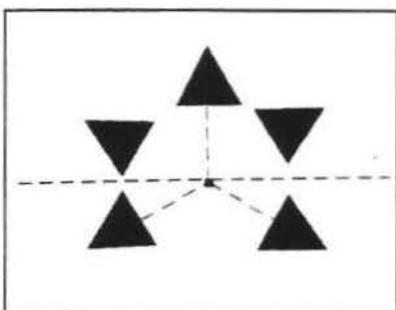


Figura 4 k

5) Reflexão aplicada a F inicial.

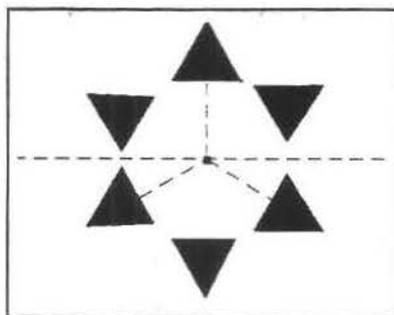


Figura 4 I

Exemplo 4.2.

Seja G infinito. Suponhamos que se queira construir um ornamento que tenha por simetrias os elementos de um grupo G que possui um grupo homogêneo finito de ordem n . Escolhe-se, agora, $n-1$ simetrias S_1, S_2, \dots, S_{n-1} de G que possuem componentes rotatórias distintas entre elas e diferentes da identidade. Considera-se um subgrupo τ das translações pertencentes a G .

Neste caso, temos:

$$G = T \cup T_1 \cup \dots \cup S_{n-1}$$

Para obter F^* , construímos primeiro F' tal que $F' = F \cup S_1(F) \cup \dots \cup S_{n-1}(F)$ e então $F^* = T(F')$.

Este exemplo não seria suficientemente significativo se não se soubesse, a priori, que o grupo das translações é discreto.

O procedimento descrito nas construções dos conjuntos com isometrias poderá ser invertido.

De fato: seja F^* um conjunto que tem o grupo G como grupo de simetria. Escolhe-se uma região fundamental H de G e então $F = F^* \cap H$.

O conjunto F^* pode ser reconstruído através de $F^* = G(F)$.

Definição 4.3.

O conjunto D é denso em A se qualquer vizinhança aberta de A contém pontos de D .

Definição 4.4.

Um conjunto \mathcal{O} do plano é um ornamento se verifica as seguintes propriedades:

- a) \mathcal{O} não é vazio e não é o plano todo.
- b) \mathcal{O} não é a união de retas paralelas ou de circunferências concêntricas.
- c) \mathcal{O} e seu complementar não são ambos densos em alguma circunferência ou alguma reta do plano.

4.3. Classificação dos Ornamentos

A teoria dos ornamentos planos tem origem no estudo das formas regulares dos cristais. Os grupos correspondentes no espaço chamam-se *grupos cristalográficos*, nome usado também para os grupos de simetrias de ornamentos no plano.

Existem três tipos de ornamentos.

1) Um ornamento é dito *ornamento com centro* quando o seu grupo de simetrias não contém translações não nulas, isto é, translações diferentes da identidade.

Todos os ornamentos limitados, isto é, contidos em algum círculo do plano, são ornamentos com centro.

Exemplos para esta situação são os ornamentos chamados *rosetas*.

Exemplos de rosetas podem ser observados na figura 4 m. ("Japanese Optical and Geometrical Art" de Hajime Ouchi), Martin, 1982, p.85.

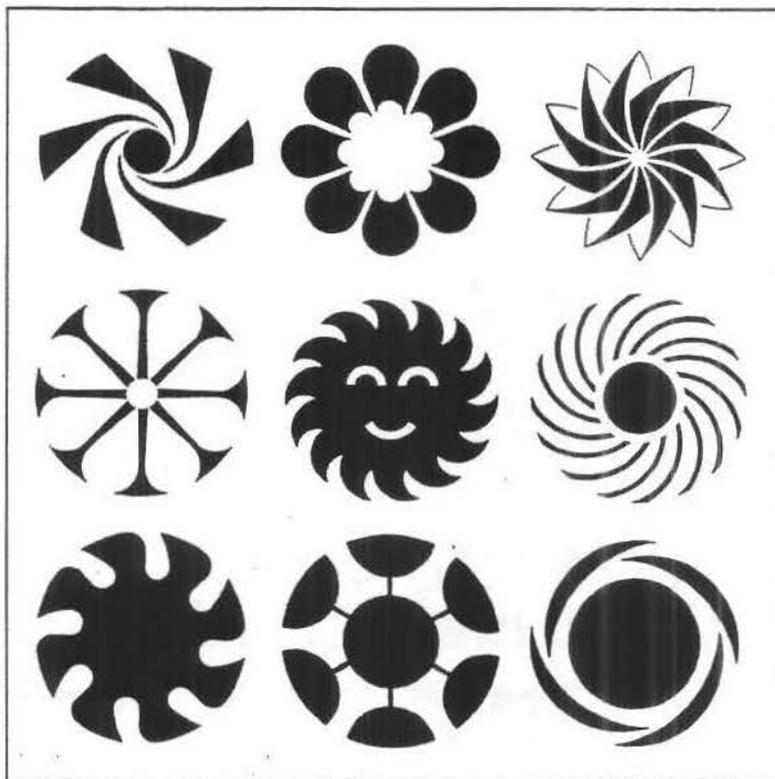


Figura 4 m

Existem ornamentos com centro que não são limitados, por exemplo, o ornamento da figura 4 n formado por semi-retas.

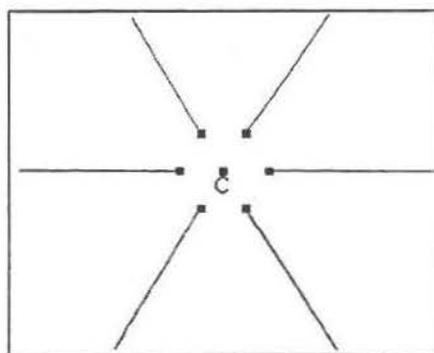


Figura 4 n

2) Um ornamento é dito *ornamento periódico unidimensional* se o seu grupo de simetria contém translações não nulas paralelas entre si, isto é, possui translações diferentes da identidade mas somente em uma direção.

Exemplos para este caso são os *grupos de faixas*.

Existem sete diferentes grupos de faixas que serão apresentados no capítulo 5.

Na figura 4 o, temos exemplos de grupos de faixas (Japanese Border Designs de Theodore Menten), Martin, 1982, p.87.

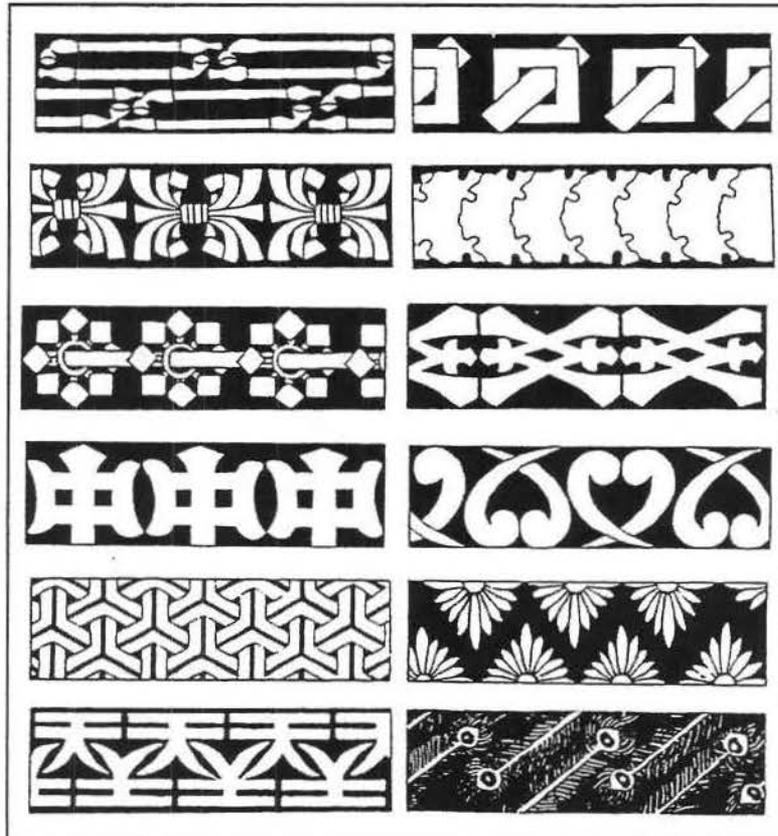


Figura 4 o

3) Um ornamento é dito *ornamento periódico bidimensional* se o seu grupo de simetrias contém pelo menos duas translações independentes (em duas direções diferentes). Neste caso estão os ornamentos de dimensão 2 dos grupos *cristalográficos* de dimensão 2. Chamamos tais ornamentos de mosaicos.

Existem *dezessete* grupos deste tipo que serão discutidos no capítulo 6. Apresentamos, abaixo, exemplos de mosaicos (Martin pp. 113 e 114).

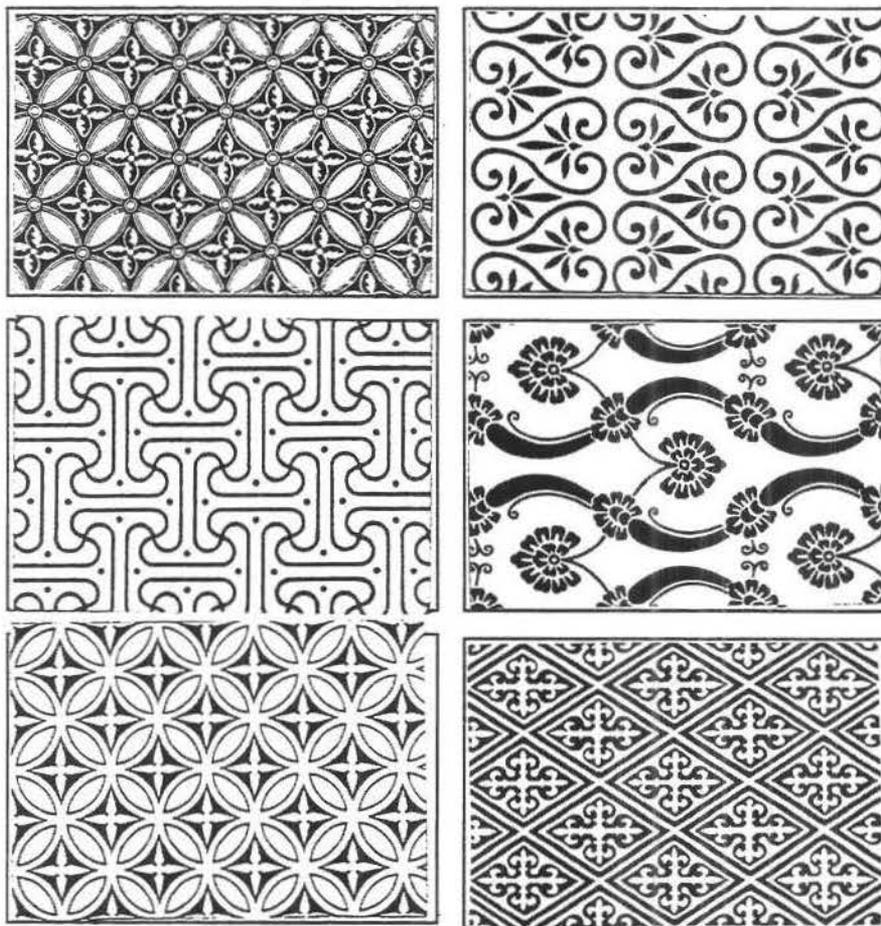


Figura 4 p

4.4. Grupos de Rosetas

Para os grupos limitados com centro ou grupos de rosetas, temos duas possibilidades:

- 1) O grupo C_n , que consiste em repetições de uma rotação $\rho = \frac{360^\circ}{n}$ (figura 4 q).
- 2) O grupo D_n , da rotação $\rho = \frac{360^\circ}{n}$ composta com uma reflexão que tem eixo de simetria passando pelo centro de rotação (figura 4 r).

Consideraremos a letra **G** a figura inicial na qual serão aplicadas as simetrias.

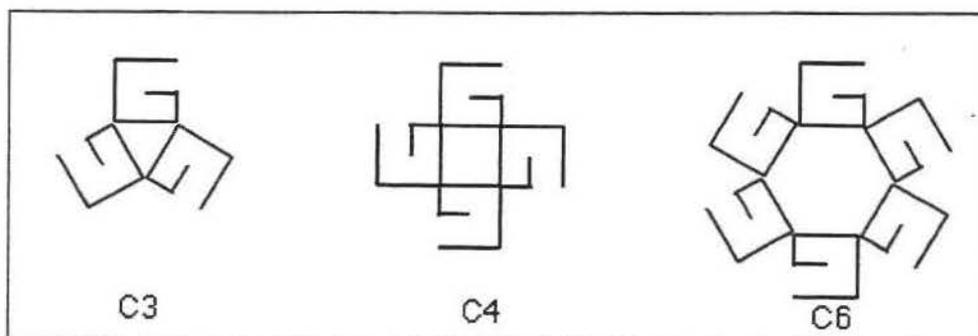


Figura 4 q

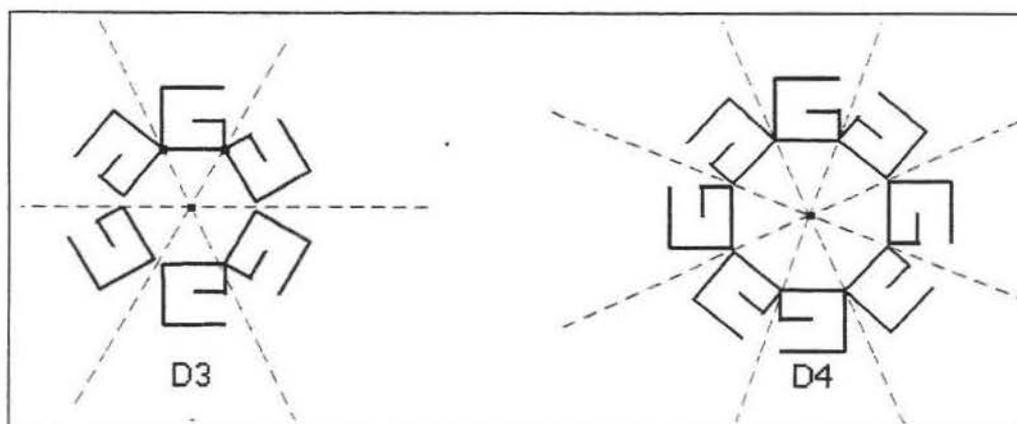


Figura 4 r

Teorema 4.5.

Cada grupo de simetrias de um ornamento com centro é um grupo do tipo C_n ou D_n .

Demonstração:

Seja \mathcal{O} o ornamento com centro e G o seu grupo de simetria. Por definição, o grupo de simetria de um ornamento com centro não contém translações não nulas e cada grupo que não contém translações não nulas é um grupo com centro (proposição 2.15), logo G é um grupo com centro. Seja Q o centro de G . Será suficiente demonstrar que G é discreto pois como G é grupo com centro e discreto, então G é pontual e pelo Teorema 3.15. os grupos pontuais são do tipo C_n e D_n .

Vamos supor que G não seja discreto.

Escolhem-se dois pontos P e P' equidistantes e diferentes de Q , tais que $P \in \mathcal{O}$ e $P' \notin \mathcal{O}$; esta escolha se faz em virtude da não trivialidade de um ornamento (definição 4.4a) e b). A órbita $G(P)$ é composto de pontos de \mathcal{O} e como G não é discreto, então, $G(P)$ não é discreto também e assim $G(P)$ é densa na circunferência δ de centro Q e passando por P .

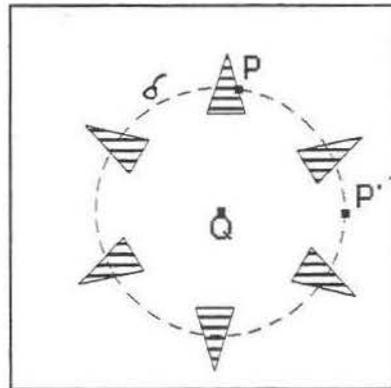


Figura 4 s

Então, \mathcal{O} é denso em δ .

Por outro lado, também a órbita de $G(P')$ é densa em δ ; portanto, sendo $G(P')$ disjunta de \mathcal{O} tem-se que \mathbb{R}^2/\mathcal{O} é denso em δ . Temos então uma contradição pois um ornamento \mathcal{O} , por definição, não pode ser tal que \mathcal{O} e seu complementar \mathbb{R}^2/\mathcal{O} sejam ambos densos em alguma circunferência (de. 4.4.c)

Logo G é discreto ©

Capítulo 5. OS SETE GRUPOS DE FAIXAS

Já classificamos anteriormente os ornamentos com centro. Vamos agora, classificar os ornamentos periódicos unidimensionais e bidimensionais. Primeiramente, veremos o critério adotado para a classificação dos grupos discretos que é análoga à classificação dos ornamentos.

5.1. Critério de classificação dos Grupos Discretos

Diz-se que dois grupos discretos G e G' são do *mesmo tipo* se existe um isomorfismo entre G e G' que transforma translação (respectivamente rotação, reflexão e reflexão transladada) em translação (respectivamente rotação com o mesmo ângulo de rotação, reflexão e reflexão transladada).

Teorema 5.1.

Se P é um ponto de simetria para o conjunto S de pontos e α é uma simetria de S , então $\alpha(P)$ é um ponto de simetria de S . Se ℓ é uma linha de simetria para o conjunto S de pontos e α é uma simetria de S , então $\alpha(\ell)$ é uma linha de simetria para S .

Demonstração:

Se as isometrias α e σ_p estão no grupo G de isometrias, então $\sigma_{\alpha(p)}$ está também em G porque o produto $\alpha\sigma_p\alpha^{-1}$ deve estar em G .

Se as isometrias α e σ_l estão em G , então $\sigma_{\alpha(l)}$ também está em G porque o produto $\alpha\sigma_l\alpha^{-1}$ deve estar em G e $\alpha\sigma_l\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(l)}$. Desde que as simetrias para qualquer conjunto de pontos formam um grupo, nós provamos o teorema ©

5.2. Os sete tipos de Ornamentos Periódicos Unidimensionais

Entre os ornamentos periódicos unidimensionais, encontramos aqueles ornamentos que além de conter uma translação não nula como simetria, são subconjuntos de alguma faixa do plano. O vínculo entre a faixa que a contém e a translação é evidente: a faixa que, por definição é uma região do plano contida entre duas retas paralelas e a translação devem ser paralelas.

Vamos classificar os grupos discretos que contém uma translação não nula que é paralela a cada outra translação sua. Seja G um grupo deste tipo e seja τ uma translação não nula. O subgrupo T das translações de G é discreto e sua órbita são reticulados unidimensionais paralelos a τ .

Escolhe-se um ponto P qualquer. Então o grupo homogêneo G_P associado a G e ao ponto P é composto da simetria do reticulado unidimensional $T(P)$ que fixa o ponto P . Então os elementos de G_P são, excluindo-se a identidade, a rotação de meia volta com centro P ou reflexões paralelas a τ ou reflexões perpendiculares a τ . Então o grupo homogêneo G_P é um dos seguintes quatro tipos: C_1 , C_2 , D_1 e D_2 .

Todos os tipos dos grupos discretos que correspondem a cada um dos quatro tipos dos grupos homogêneos estão elencados no quadro a seguir.

GRUPO HOMOGÊNEO	TIPO DE GRUPO	DESCRIÇÃO DO GRUPO
C_1	p111	$G=T$
C_2	p112	$G=TC_2$
D_1	p1m1	$G=TD^-$
	pm11	$G=TD^l$
	p1a1	$G=T \cup TG^-$
D_2	pmm2	$G=TD_2$
	pma2	$G=TD^l \cup TD^l G^-$

Figura 5 a

Na notação internacional utilizam-se quatro símbolos para indicar cada uma das classes de padrões de faixas.

A letra p denota padrão. Se o padrão tiver uma reflexão vertical, o segundo símbolo é m (do Inglês: "mirror" = espelho); se não a tiver então o segundo símbolo será 1.

Se o padrão for invariante sob uma reflexão horizontal, o terceiro símbolo será m ; se for invariante sob uma translação refletida, o terceiro símbolo será a ; se o padrão não admitir nem uma reflexão horizontal, nem uma translação refletida, então o terceiro símbolo será 1. O último símbolo será 2 se existir uma simetria rotacional de 180° (simetria de ordem 2); noutras circunstâncias, o último símbolo será 1.

Usaremos uma notação simplificada, a saber:

$$p_{111} = F_1 \quad ; \quad p_{112} = F_2 \quad ; \quad P_{1m1} = F_1^1$$

$$p_{m11} = F_1^2 \quad ; \quad p_{1a1} = F_1^3 \quad ; \quad P_{mm2} = F_2^1 \quad ; \quad P_{ma2} = F_2^2$$

O número 1 no índice inferior indica que não há rotação de 180° no grupo. O número 2 no índice inferior indica que há rotação de 180° (reflexão em pontos) no grupo.

No índice superior, o número 1 indica que o centro é a linha de simetria, o número 2 indica que o centro não é a linha de simetria mas existe uma linha de simetria perpendicular para o centro e o número 3 é para o caso especial do grupo gerado por reflexão transladada.

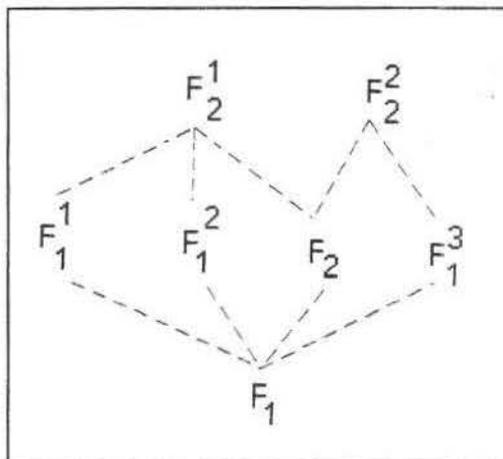


Figura 5 b

Na descrição dos grupos os símbolos usados são:

τ é a menor translação não nula,

G^- é uma reflexão transladada com eixo paralelo a T .

T é o grupo das translações gerado por τ .

D^- e D^+ são, respectivamente, os grupos do tipo D_1 , com eixo de reflexão paralelo ou perpendicular a τ .

C_2 e $D_2 \rightarrow$ grupos do tipo C_2 e D_2

5.3. Construção dos sete Grupos de Faixas

Vamos considerar os grupos de isometrias que fixam uma reta c , gerados por uma translação. Esses grupos são chamados grupos de faixas com centro c . Seja τ a translação não identidade que fixa a reta c . Escolhe-se um ponto A como segue:

Se o grupo contém rotação de 180° , então A é escolhido como o centro de uma das rotações (Fig. 5c). Se o grupo não possui rotação de 180° , mas contém reflexão em retas perpendiculares a c , então A é a intersecção de uma dessas retas com c (Fig. 5d).

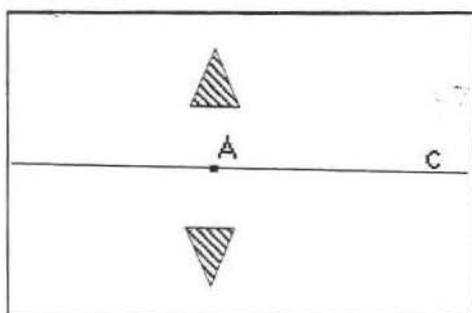


Figura 5 c

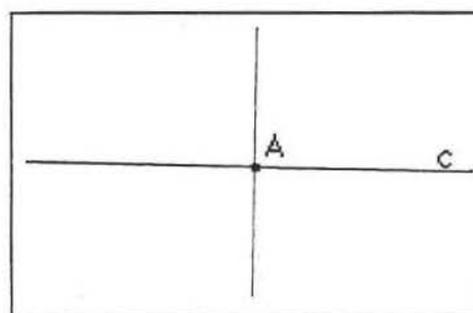


Figura 5 d

Em outros casos escolhe-se A como um ponto qualquer de c .

Temos que $A_i = \tau^i(A)$, $\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A)$,

M_i é o ponto médio de A_i e A_{i+1} e $M_i = \tau^i(M)$, onde

M é o ponto médio de $A = A_0$ e A_1 (Fig. 5e).

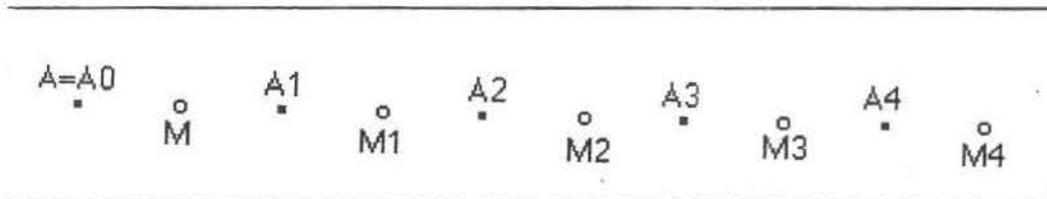
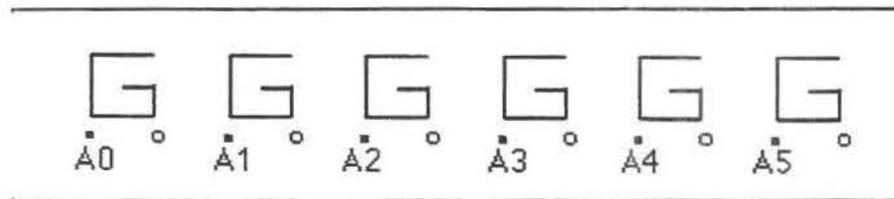


Figura 5 e

Os grupos de faixas F são grupos discretos de isometrias que possuem translações τ diferentes da identidade mas somente em uma direção.

Podemos distinguir os seguintes tipos de grupos de faixas:

1) $F_1 = \langle \tau \rangle$ são os grupos de faixas que possuem somente translações:

Figura 5 f - F_1

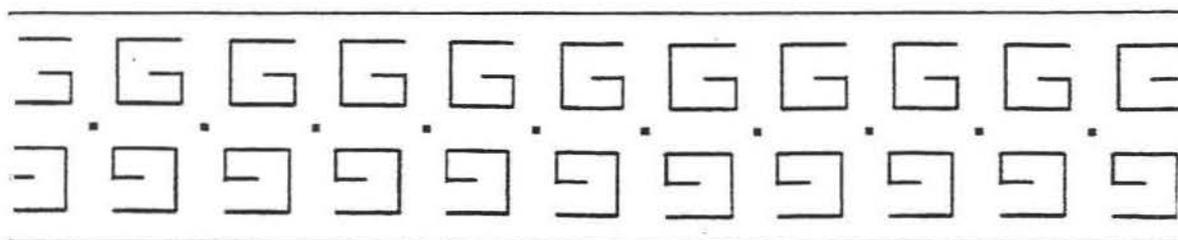
Uma faixa que tem F_1 como grupo de simetria, não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e não é fixo por uma reflexão transladada.

Observação: Na figura acima, assim como nas figuras seguintes deste capítulo, as representações dos pontos M_i e A_i não devem ser consideradas como parte do motivo.

2) $F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$ são os grupos de faixas que possuem translações e rotações de 180° isto é, reflexões em pontos A_i . Temos que σ_A é a reflexão em relação ao ponto A e $\sigma_M = \tau\sigma_A$.

Também $F_2 = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$, pois $\sigma_M\tau = \sigma_A$. Todo elemento de F_2 é da forma τ^i ou $\sigma_A\tau^i$, então os elementos de F_2 são da forma $\sigma_A^j\tau^i$.

As faixas que têm F_2 como grupo de simetrias têm um ponto de simetria mas não têm eixo de simetria.

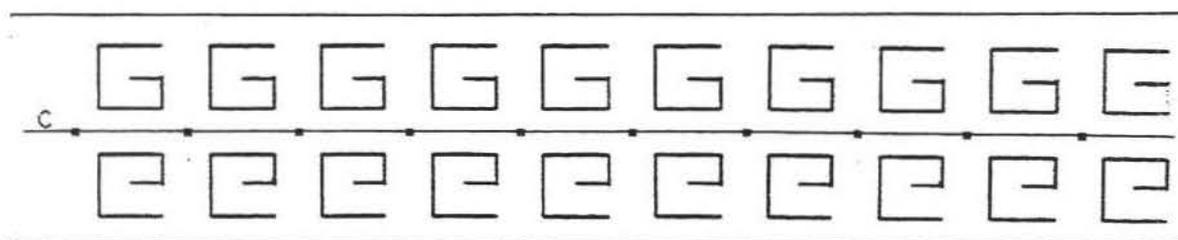
Figura 5 g - F_2

Outras possibilidades são obtidas, acrescentando-se reflexões ou reflexões transladadas a F_1 e F_2 .

Acrescentando-se, primeiro, as reflexões temos:

$$3) F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$$

Como $\tau\sigma_c = \sigma_c\tau$, então F_1^1 é abeliano e todo elemento seu é da forma $\sigma_c^i \tau^j$.

Figura 5 h - F_1^1

F_1^1 contém reflexão transladada com eixo c que leva A para A_n com $n \neq 0$.

Uma faixa que tem F_1^1 como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria e o centro é um eixo de simetria.

$$5) F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$$

Desde que σ_c comuta com ambos τ e σ_A , então todo elemento de F_2^1 é da forma $\sigma_c^k \sigma_A^j \tau^i$.

Para $n \neq 0$, então F_2^1 contém:

1) a reflexão transladada $\sigma_c \tau^n$ com eixo c que leva A para A_n .

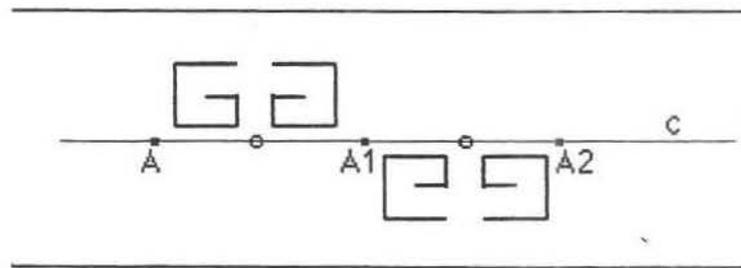


Figura 5 i

2) a reflexão na reta perpendicular a c em A_i que é $\tau^{2i} \sigma_A \sigma_c$.

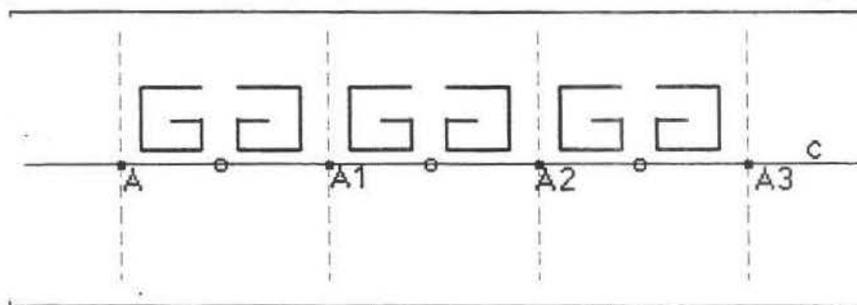


Figura 5 j

3) a reflexão na reta perpendicular a c em M_i que é $\tau^{2i+1} \sigma_A \sigma_c$.

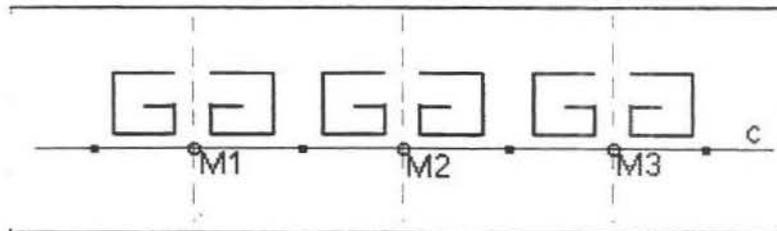


Figura 5 k

Se a é a reta perpendicular a c em A , então $F_2^1 = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$

Uma faixa que tem F_2^1 como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria e o centro é um eixo de simetria.

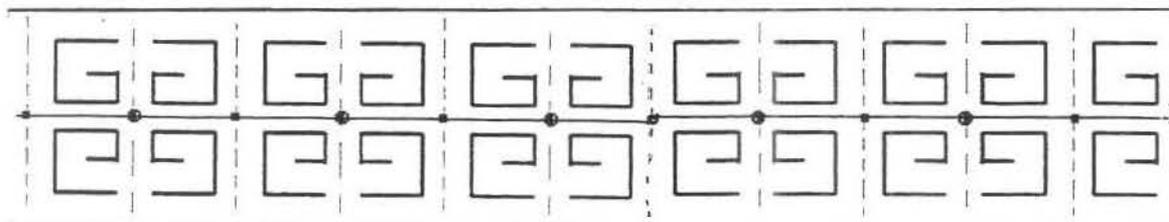


Figura 5 l - F_2^1

$$5) F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$$

O grupo de faixas F não contém rotação de 180° mas contém a reflexão na linha a que é perpendicular a c e A está sobre a . Então F contém:

- 1) a reflexão $\tau^{2i}\sigma_a$, na reta perpendicular a c em A_i .

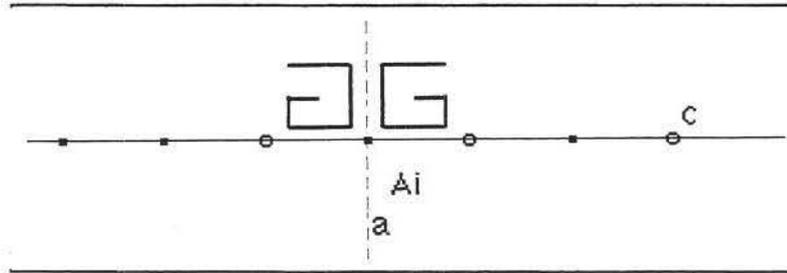


Figura 5 m

- 2) a reflexão $\tau^{2i+1}\sigma_a$, na reta perpendicular a c em M_i .

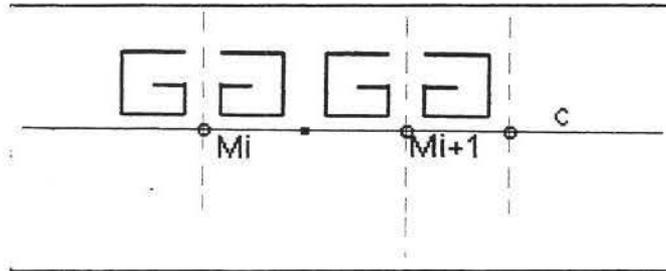


Figura 5 n

Supondo que F contenha uma outra reflexão σ_ℓ , então $\ell \neq c$ pois a rotação de 180° $\sigma_c\sigma_a$, não está em F . Logo $\ell \perp c$ e F contém a translação $\sigma_\ell\sigma_a$ que leva A para A_n para algum n . Assim, $\sigma_\ell(A) = A_n$ para algum $n \neq 0$ e ℓ é perpendicular a c em algum A_i ou algum M_i . Portanto, F deve conter exatamente as reflexões em retas perpendiculares a c em A_i para cada i e as reflexões em retas perpendiculares a c em M_i para cada i , que são todas as possibilidades adicionando-se reflexões a F_1 .

Logo, F_1^2 não contém σ_c mas contém reflexões em retas perpendiculares a c em A_i ou M_i .

Os elementos de F_1^2 são de forma $\sigma_a^j \tau^i$, desde que $\tau\sigma_a = \sigma_a\tau^{-1}$.

As faixas que têm F_1^2 como grupo de simetria não têm ponto de simetria, mas tem um eixo de simetria e o centro não é um eixo de simetria.

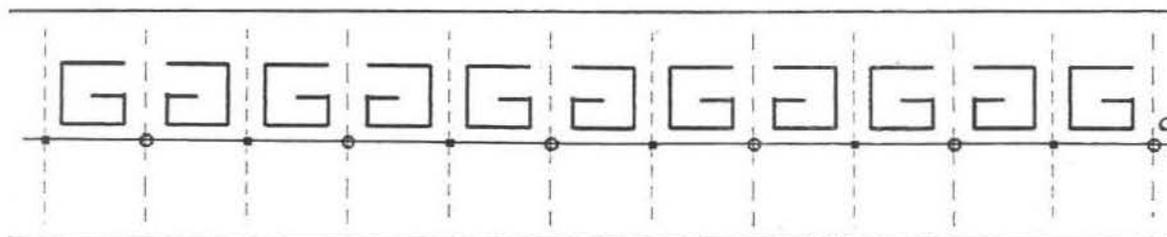


Figura 5 o - F_1^2

$$6) F_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_q \rangle$$

Suponhamos que F contenha uma rotação de 180° e a reflexão em uma reta q mediatriz de \overline{AM} .

Se $q = a$ então, q é perpendicular a c em A_i ou q é perpendicular a c em M_i e obtemos assim F_2^1 visto anteriormente. Vamos supor então que q está fora de cada A_i e cada M_i . Desde que $\sigma_q(A)$ deve ser o centro de uma rotação de 180° em F (pelo teorema 5.1 com $\alpha = \sigma_q$), a única possibilidade é que q é a mediatriz de $\overline{AM_i}$ para algum i .

Pelo teorema 5.1 ainda, F contém a reflexão em relação à mediatriz de $\overline{AM_i}$ para cada i e conseqüentemente, em particular F contém σ_p onde p é a mediatriz de \overline{AM} . Se a reta a é perpendicular a c em A , então F não pode conter ambas σ_p e σ_a porque se isso ocorresse a translação $\sigma_p\sigma_a$ levaria A para M , que é impossível. Também, desde que $\sigma_p\sigma_a = \sigma_p\sigma_c\sigma_a$, então F não pode conter ambas σ_p e σ_c .

Consideramos até aqui, todos os casos possíveis ao se acrescentar reflexões a F_2 .

Então, F_2^2 é gerado por τ, σ_A e σ_p onde p é a mediatriz de \overline{AM} . Também, F_2^2 contém a reflexão transladada $\sigma_p\sigma_A$ com eixo c que leva A para M .

Seja $\gamma = \sigma_p \sigma_A$. Desde que $\tau = \gamma^2$ e $\sigma_p = \gamma \sigma_A$, então $F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$ e F_2^2 não contém σ_c .

Um grupo de faixas que tem F_2^2 como grupo de simetria tem um ponto de simetria, um eixo de simetria, mas o centro não é uma linha de simetria.

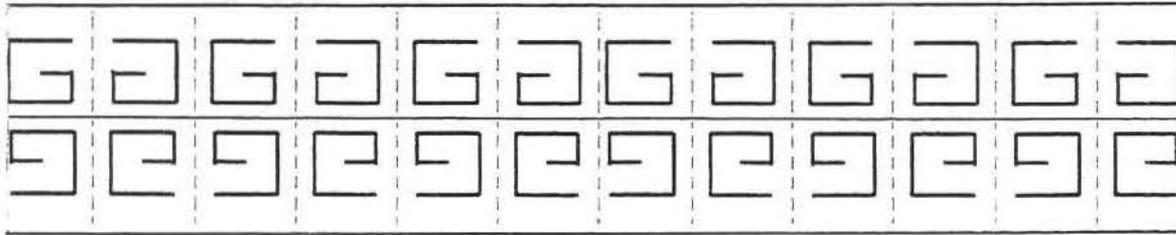


Figura 5 p - F_2^2

7) $F_1^3 = \langle \gamma \rangle$ onde γ é a reflexão transladada com eixo c tal que $\gamma^2 = \tau$.

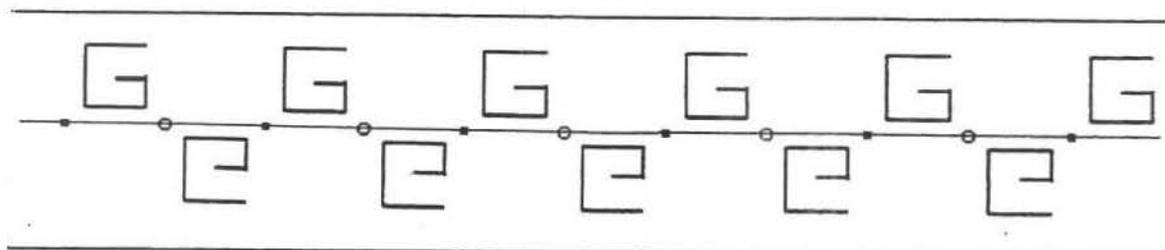
Supõe que F contenha uma reflexão transladada γ . Então γ tem eixo c e γ^2 é uma translação que fixa c . Nós temos 2 casos:

$$\gamma^2 = \tau^{2n} \text{ e } \gamma^2 = \tau^{2n+1} \text{ para algum inteiro } n.$$

Suponhamos que $\gamma^2 = \tau^{2n}$. Como γ e τ comutam então $(\gamma\tau^{-n})^2$ é a identidade. Logo, a isometria $\gamma\tau^{-n}$ deve ser σ_c . Portanto, $\gamma = \sigma_c\tau^n$.

Neste caso, F contém σ_c e $\sigma_c\tau^m$ para cada inteiro m . Se F não contém uma rotação de 180° , então nós voltamos para F_1^1 ; se F contém uma rotação de 180° , voltamos para F_2^1 . Supõe então, $\gamma^2 = \tau^{2n+1}$. Então $(\tau^{-n}\gamma)^2$ é τ . Seja $\gamma = \tau^{-n}\gamma$. Logo γ é uma isometria cujo quadrado é τ . Consequentemente γ deve ser a única reflexão transladada com eixo c que leva A a M . Desde que $\gamma^{2m} = \tau^m$ e $\tau^{2m+1} = \tau^m\gamma$, as reflexões transladadas em F são exatamente aquelas da forma $\tau^m\gamma$.

Uma faixa que tem F_1^3 como seu grupo de simetria, não tem ponto de simetria, não tem eixo de simetria, mas é fixada por uma reflexão transladada.

Figura 5 q - F_1^3

Vamos supor que F contenha outras isometrias acrescentadas às geradas pela reflexão transladada γ com eixo c , onde $\gamma^2 = \tau$. Como o quadrado da translação $\sigma_c \gamma$ é τ então $\sigma_c \gamma$ não está em $\langle \tau \rangle$. Logo σ_c não pode estar em F . Se F contém σ_l com $l \perp c$, então F contém a rotação de 180° $\sigma_l \alpha$. Se F contém uma rotação de 180° , então F deve conter σ_A . Neste caso, F contém σ_A e a reflexão transladada γ com centro c tal que $\gamma^2 = \tau$. Consequentemente F é F_2^2 . Nós temos finalmente esgotado as possibilidades.

O grupo F deve ser um dos sete grupos dados acima e nós temos o seguinte teorema.

Teorema 5.2.

Seja F um grupo de faixas com centro c cujas translações formam o grupo gerado pela translação τ . Se F contém uma rotação de 180° , supõe-se que F contém σ_A ; se F contém uma reflexão na reta perpendicular a c , supõe-se que F contém σ_A com $a \perp c$. Seja γ a reflexão transladada com eixo c , tal que $\gamma^2 = \tau$. Então F é um dos sete tipos distintos de grupos definidos como segue.

$$F_1 = \langle \tau \rangle; F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle; F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle; F_1^3 = \langle \gamma \rangle$$

$$F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle; F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle; F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$$

Os sete grupos de faixas estão ilustrados a seguir.

Definição 6.2.

Uma célula básica para M em relação ao ponto A e gerado pelas translações τ_1 e τ_2 é uma região poligonal com vértices $A_{ij}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$.

O reticulado é retangular quando a célula básica é um retângulo e é losangular quando a célula é um losango.

Um reticulado é necessariamente losangular ou retangular quando M contém isometrias inversas (reflexão e reflexão transladada).

Teorema 6.3.

Se σ_l está em um grupo de revestimento M , então l é paralela a uma diagonal de uma célula básica losangular de M ou l é paralela a um lado de uma célula básica retangular de M .

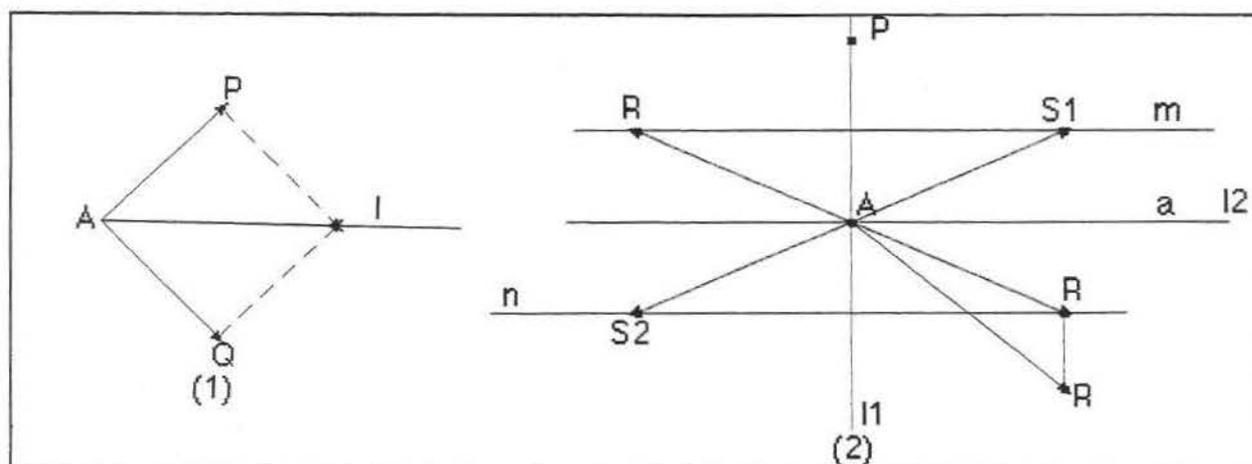


Figura 6 b

Demonstração:

Seja A um ponto de l . Seja τ_{AP} a menor translação não identidade em M . Há dois casos:

CASO 1: Nem $\overline{AP} = l$ nem $\overline{AP} \perp l$. Seja $Q = \sigma_l(P)$. Então, $\tau_{A,Q}$ está em M, pois $\tau_{A,Q} = \sigma_l \tau_{A,P} \sigma_l^{-1}$. Veja fig. 6 b(1). Desde que $AP = AQ$ e os pontos A, P e Q são não colineares, então $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,Q} \rangle$ é o grupo de todas as translações em M e l contém uma diagonal de uma célula básica losangular.

CASO 2: $\overline{AP} = l$ ou $\overline{AP} \perp l$. Seja a perpendicular a \overline{AP} em A . Seja m a mediatriz de \overline{AP} e $n = \sigma_a(m)$. Veja fig. 6 b (2). Seja $\tau_{A,R}$ a menor translação em M que não está em $\langle \tau_{A,P} \rangle$. Então, R está em m , em n , ou entre m e n , pois caso contrário $\tau_{A,P}^{-1} \tau_{A,R}$ é menor que $\tau_{A,R}$. Além disso, considerando ambos $\tau_{A,R}$ e sua inversa, nós podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tau_{A,R}$ é tal que R está em m , em a , ou entre m e a . Seja $S = \sigma_l(R)$. Suponhamos que R está entre m e a . Se $l = \overline{AP}$, então $\sigma_{A,S} \sigma_{A,R}$ é uma translação em M menor que $\sigma_{A,P}$. Se $l \perp \overline{AP}$, então, $\tau_{S,A} \tau_{A,R}$ é uma translação em M menor que $\tau_{A,P}$. Portanto, devemos ter R em m ou em a . Se R está em m , então, $\langle \tau_{A,R}, \tau_{A,S} \rangle = \langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$, pois $\tau_{A,S} \tau_{A,R} = \tau_{A,P}$. Logo l é paralela a uma diagonal de uma célula básica losangular. ($\square ARPS$, na fig. 6 b (2)) com relação ao ponto A e translações $\tau_{A,R}$ e $\tau_{A,S}$. Por outro lado, se R está sobre a , então $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$ é o grupo de todas as translações em M e l é paralela a um lado da célula unidade básica para M \odot

Teorema 6.4.

Se o grupo de revestimento M contém uma reflexão transladada, então M tem um reticulado retangular ou losangular.

Demonstração:

O menor grupo contendo uma reflexão transladada e a translação em M que fixa l é o grupo de faixas F_1^3 gerado pela reflexão transladada γ com eixo l .

Então, nós podemos supor que γ^2 é a menor translação fixando l . Seja A um ponto sobre l . Seja a perpendicular a l em A , $m = \gamma(a)$, $p = \gamma^2(a)$ e $P = \gamma^2(A)$. Então, $\tau_{A,P}$ é a menor translação em $\langle \gamma \rangle$. Seja $\tau_{A,B}$ a menor translação em M que não está em $\langle \gamma^2 \rangle$. Desde que $\tau_{A,P}^{-1} \tau_{A,B}$ não pode ser menor que $\tau_{A,B}$, nós podemos supor sem perda de generalidade que B está em a ou entre a e p .

Se B está em a , então M tem um reticulado retangular e l é paralela ao lado de uma célula básica retangular. Supõe B entre a e p . Veja figura 6 c.

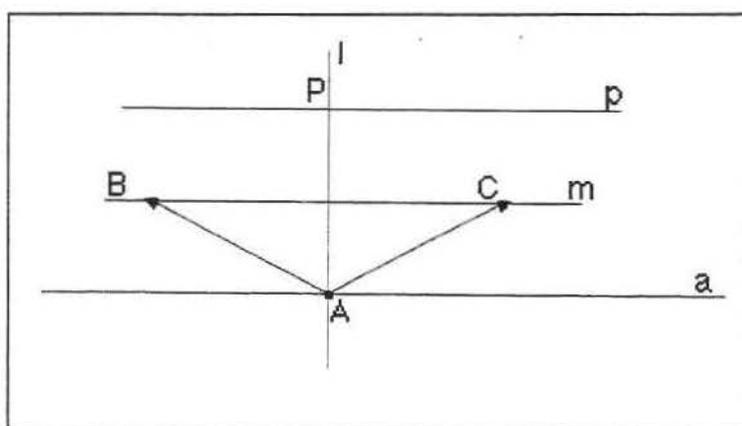


Figura 6 c

Seja $C = \sigma_l(B)$. Então, $\tau_{A,C}$ está em M quando $\tau_{A,C} = \gamma \tau_{A,B} \gamma^{-1}$. Logo, $\tau_{A,C} \tau_{A,B} = \gamma^2$ e B está em m . Logo $\square ABPC$ é uma célula básica losangular com l contendo a diagonal \odot

Teorema 6.5.

Se a reflexão transladada no grupo de revestimento M fixa um reticulado bidimensional para M , então M contém uma reflexão.

Demonstração:

Se a reflexão transladada γ leva o ponto A para o ponto P no reticulado determinado por A para o grupo M , então γ seguida por $\tau_{P,A}$ deve ser uma reflexão como o produto de isometria inversa fixando o ponto A \odot

6.2. Centro de Simetria e propriedades**Definições 6.6.**

O ponto P é um n -centro para o grupo G de isometrias se as rotações em G com centro P formam um grupo cíclico finito C_n com $n > 1$.

Uma *figura* é um conjunto não vazio de pontos. Se o ponto P é um n -centro para um grupo de simetria de uma figura, então P é também chamado um n -centro para a figura.

Um *centro de simetria* é um n -centro para algum n .

Se o ponto P é um 4-centro para alguma figura, então P é um ponto de simetria para aquela figura desde que $\sigma_P = \rho_{P,\infty}^2$. Neste caso, o ponto P é um ponto de simetria, mas P não é um 2-centro. Também note que se o ponto Q é um 3-centro para alguma figura, então Q não é ponto de simetria para aquela figura.

Teorema 6.7.

Para um n dado, se o ponto P é um n -centro para o grupo G de isometrias e G contém uma isometria que leva P para Q , então Q é um n -centro para G . Se l é um eixo de simetria para a figura e o grupo de simetria para a figura contém uma isometria que leva l para m , então m é um eixo de simetria para a figura.

Demonstração:

Supõe $\alpha(P) = Q$ para uma isometria α no grupo G . Pelas equações $\alpha\rho_{P,0}\alpha^{-1} = \rho_{Q,0}$ e $\alpha^{-1}\rho_{Q,0}\alpha = \rho_{P,0}$, temos que Q é um n -centro, se e somente se P é um n -centro para o mesmo n .

A outra parte segue do teorema 4.1. ©

Teorema 6.8.

Se $\rho_{A, \frac{360}{n}}$ e $\rho_{P, \frac{360}{n}}$ com $P \neq A$ e $n > 1$ estão no grupo de revestimento M , então $2AP$ não é menor que o comprimento da menor translação (não identidade) em M .

Demonstração:

Supõe rotações $\rho_{P, \frac{360}{n}}$ e $\rho_{A, \frac{360}{n}}$ com $P \neq A$ e $n > 1$ em M . Então, M contém o produto $\rho_{P, \frac{360}{n}}$ e $\rho_{A, \frac{-360}{n}}$ que é uma translação $\tau_2^j \tau_1^i$ para algum i e j pelo teorema de adição de ângulos.

$$\text{Então: } \rho_{P, \frac{360}{n}} = \tau_2^j \tau_1^i \rho_{A, \frac{360}{n}} \text{ e } \rho_{P, \frac{360}{n}}(A) = \tau_2^j \tau_1^i \rho_{A, \frac{360}{n}}(A) = Aij.$$

Daí, ou P é o ponto médio de A e Aij (quando $n=2$) ou o $\Delta AP Aij$ é isósceles. Em qualquer caso, $2AP = AP + PAij \geq AAij > 0$ pela desigualdade triangular. Portanto, $2AP$ não é menor que o comprimento de qualquer translação (não identidade) em M ©

O Teorema acima, exprime o seguinte:

- 1) Dois n -centros (mesmo n) não podem ser "próximos demais".
- 2) Um 2-centro e um 4-centro não podem ser "próximos demais".
- 3) Um 3-centro e um 6-centro não podem ser "próximos demais".
- 4) Um 2-centro e um 6-centro não podem ser "próximos demais".

6.3. Restrição Cristalográfica

Teorema 6.9. (Restrição Cristalográfica)

Se o ponto P é um n -centro para um grupo de revestimento M , então n é 2,3,4 ou 6.

Demonstração:

Suponhamos que o ponto P seja um n -centro de um grupo M .

Seja Q um n -centro (mesmo n) com a menor distância possível de P com $Q \neq P$. A existência do ponto Q é assegurada pelos dois teoremas anteriores:

Seja $R = \rho_{Q, \frac{360}{n}}(P)$. Então R é um n -centro e $PQ = QR$.

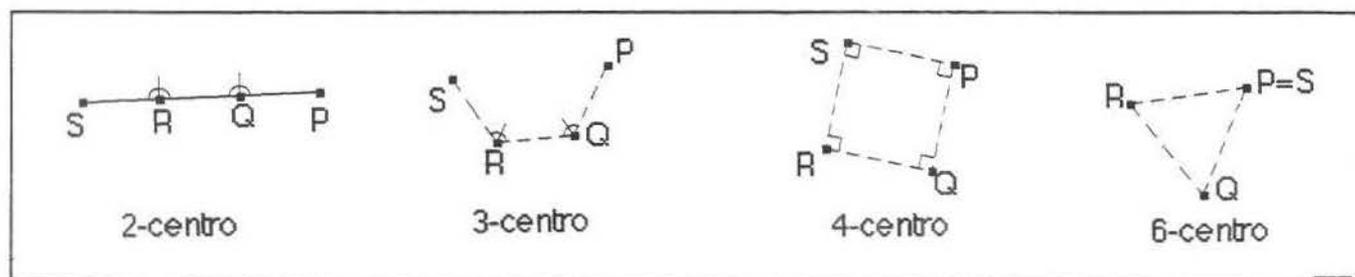


Figura 6 d

Seja $S = \rho_{R, \frac{360}{n}}(Q)$. Então S é um n -centro e $RQ = RS$. Se $S = P$ então $n = 6$. Se $S \neq P$, então devemos ter $SP \geq PQ = RQ$ pela escolha de Q .

Consequentemente, se $S \neq P$, então $n \leq 4$. Logo, n é 2,3,4 ou 6©

Um corolário imediato da restrição cristalográfica é:

Corolário 6.10.

Se um grupo de revestimento contém um 4-centro, então o grupo não contém um 3-centro nem um 6-centro.

Demonstração:

Este resultado segue do fato de que ambos $\rho_{P,120}$ e $\rho_{Q,90}$ não podem estar no mesmo grupo porque o produto $\rho_{P,120}\rho_{Q,-90}$ é uma rotação de 30° sobre algum ponto, que não pode estar em nenhum grupo pela restrição cristalográfica©

A seguir, encontraremos todas as possibilidades dos grupos de revestimento M: grupos que não contém um n-centro e grupos que contém n-centros.

6.4. Grupos Cristalográficos sem n-centros

Seja M o grupo de revestimento que contém apenas translações: $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ onde A é arbitrário e A, B e C são não colineares. Definimos: $M=M_1$, onde $M_1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,B}\tau_{A,C} \rangle = p1$.

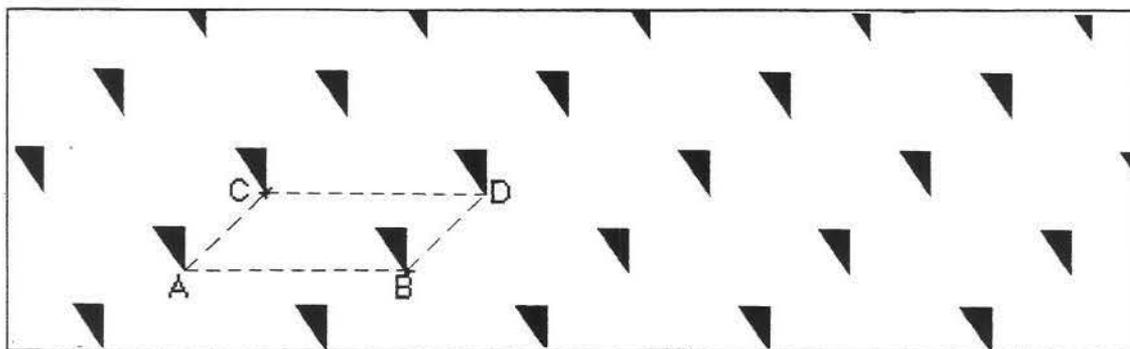


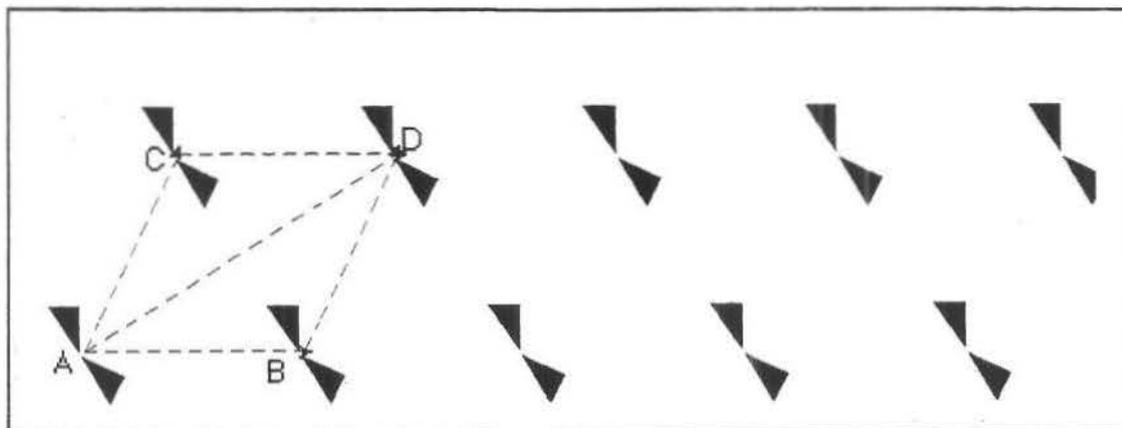
Figura 6 e - M_1

Acrescentando-se uma reflexão σ_l a M_1 temos 2 casos:

- 1) Se σ_l está em M_1 , com A sobre l, então pelo teorema 6.3. a célula básica é losangular, definida por $\square ABDC$ com $l = \overline{AD}$.

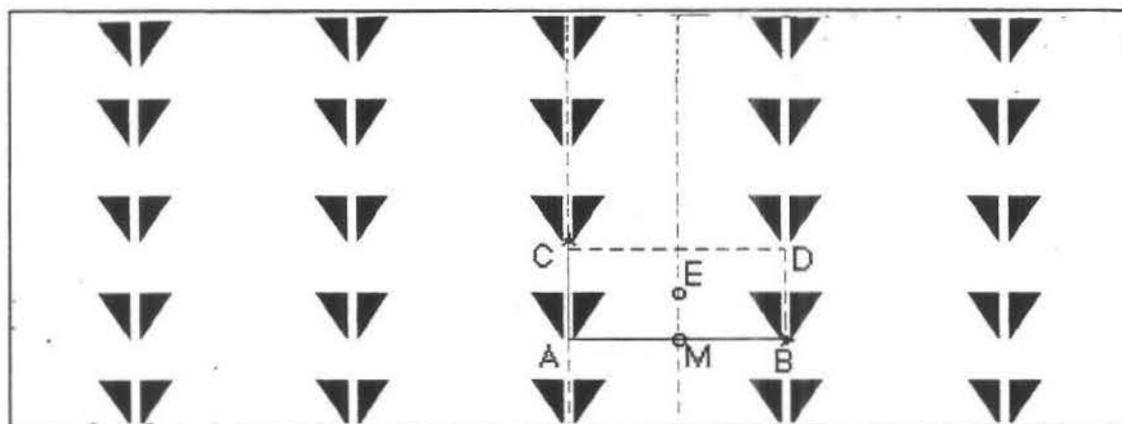
Neste caso temos:

$$M_1^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overline{AD}} \rangle = \langle \tau_{A,B}, \sigma_{\overline{AD}} \rangle = cm$$

Figura 6 f - M_1^1

2) Quando a célula básica definida por $\square ABDC$ é retangular e $l = \overline{AC}$, então teremos o grupo:

$$M_1^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overline{AC}} \rangle = \langle \tau_{A,C}, \sigma_{\overline{AC}}, \sigma_{\overline{ME}} \rangle = pm$$

Figura 6 g - M_1^2

Observação:

Quando $\square ABDC$ é um quadrado, M não pode ter reflexões em \overline{AD} e \overline{AC} , pois M não contém rotações.

Seja γ a reflexão transladada com eixo \overline{NK} que leva N para K . Então $\gamma^2 = \tau_{A,D}$, γ está em M_1^1 e M_1^1 é gerado por γ e $\sigma_{\overline{AD}}$.

Por outro lado, toda reflexão transladada em M_1^2 é da forma $(\sigma_{\overline{AC}}\tau^j)\tau_{A,C}^i$, com $i \neq 0$ e tem eixos que são também eixos de simetria para M_1^2 . Esta propriedade pode ser usada para distinguir padrões com grupos de simetria M_1^1 e M_1^2 .

Vamos considerar a extensão de M_1 com reflexões transladadas, somente. Os eixos da reflexão transladada devem ser paralelos porque M_1 não contém rotações. Seja γ a reflexão transladada com eixos \overline{AB} que leva A para M . Veja figura 6 h.

Então $\gamma^2 = \tau_{A,B}$. Seja $\varepsilon = \tau_{A,C}\gamma$, uma reflexão transladada com eixo \overline{NE} que leva N para E .

Definimos:

$$M_1^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \gamma \rangle = \langle \gamma, \varepsilon \rangle = pg$$

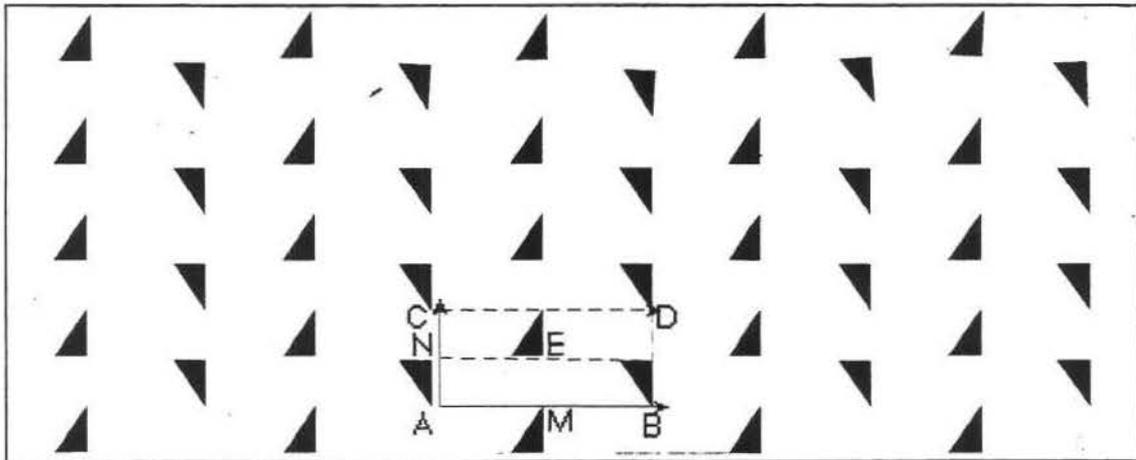


Figura 6 h - M_1^3

Portanto, um padrão de revestimento que tem M como grupo de simetria, não tem centro de simetria e não está fixo por simetria inversa (reflexão ou reflexão transladada).

Um padrão de revestimento, que tem M_1^1 como grupo de simetria não tem centro de simetria, está fixo por reflexão e reflexão transladada mas os eixos das reflexões transladadas não são eixos de simetria. Um padrão de revestimento que tem M_1^2 como grupo de simetria não tem centro de simetria, está fixo por reflexão e reflexão transladada e todos os eixos das reflexões transladadas são eixos de simetria. Os padrões de revestimento que têm M_1^3 como grupo de simetria não têm centro de simetria, não têm eixo de simetria, mas está fixo por uma reflexão transladada.

6.5. Grupos Cristalográficos com 2-centros

Agora, vamos supor que o grupo de revestimento M tenha um 2-centro A e todo centro de simetria de M é um 2-centro. Sejam $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ o subgrupo das translações de M e $\sigma_M = \tau_{A,B}\sigma_A$, $\sigma_N = \tau_{A,C}\sigma_A$ e $\sigma_E = \sigma_N\sigma_A\sigma_M$.

Os pontos M, N, E são 2-centros e nós temos como célula básica, o $\square ABDC$. Veja figura 6i.

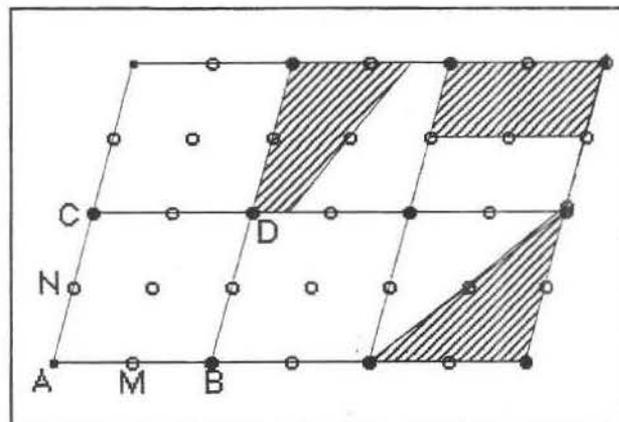


Figura 6 i

Uma menor região poligonal t tal que o plano é coberto por $\{\alpha(t) / \alpha \in M\}$ é chamada uma *base* para o grupo de revestimento. As bases podem ser usadas para criar padrões de revestimentos, tendo um dado grupo de revestimentos como grupo de simetria. As regiões escuras na figura 6 i são as bases para M_2 .

Todo ponto A_{ij} no reticulado das translações determinadas por A é um 2-centro, bem como o ponto médio de dois pontos do reticulado.

Não podem existir mais centros de simetria que estes. Seja $M_2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A \rangle$. Logo, se M não contém reflexões nem reflexões transladadas então $M = M_2$.

$$M_2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A \rangle = \langle \sigma_M, \sigma_E, \sigma_N \rangle = p2$$

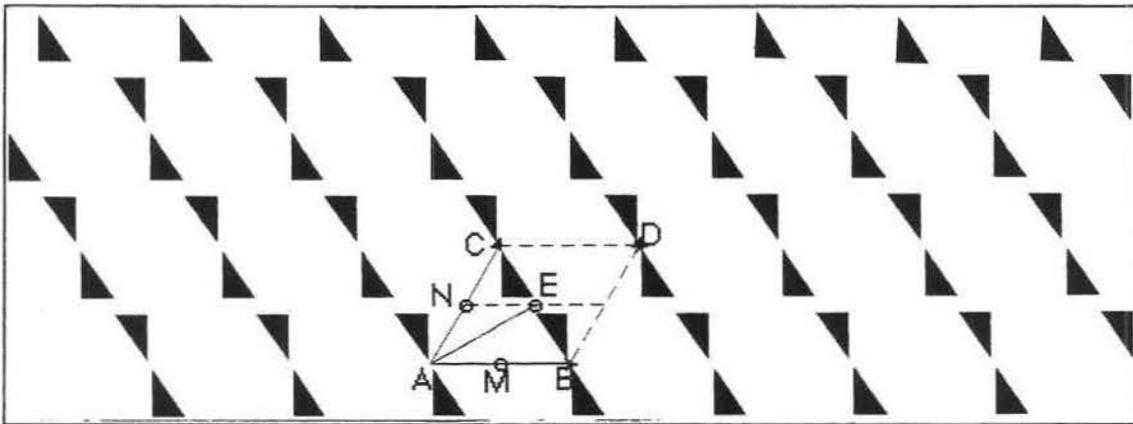


Figura 6 j - M_2

Consideraremos a seguir um grupo de revestimento M que é uma extensão de M_2 acrescentando-se isometrias inversas. Suponhamos σ_l em M . Pelo teorema 6.3, o reticulado de M é losangular ou retangular.

No caso de um losangular não retangular, a reta l é paralela a uma diagonal da célula unitária e então passa por um 2-centro. Neste caso, nós podemos supor A como sendo um 2-centro sobre l . Então l contém uma diagonal da célula unitária do reticulado determinado por A . Acrescentando-se uma reflexão em uma diagonal da célula básica, necessariamente, acrescenta-se a reflexão em outra diagonal e o centro de uma célula básica é um 2-centro.

$$M_2^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overline{AE}}, \sigma_{\overline{BE}} \rangle = \langle \sigma_{\overline{AE}}, \sigma_{\overline{BE}}, \sigma_M \rangle = cmm$$

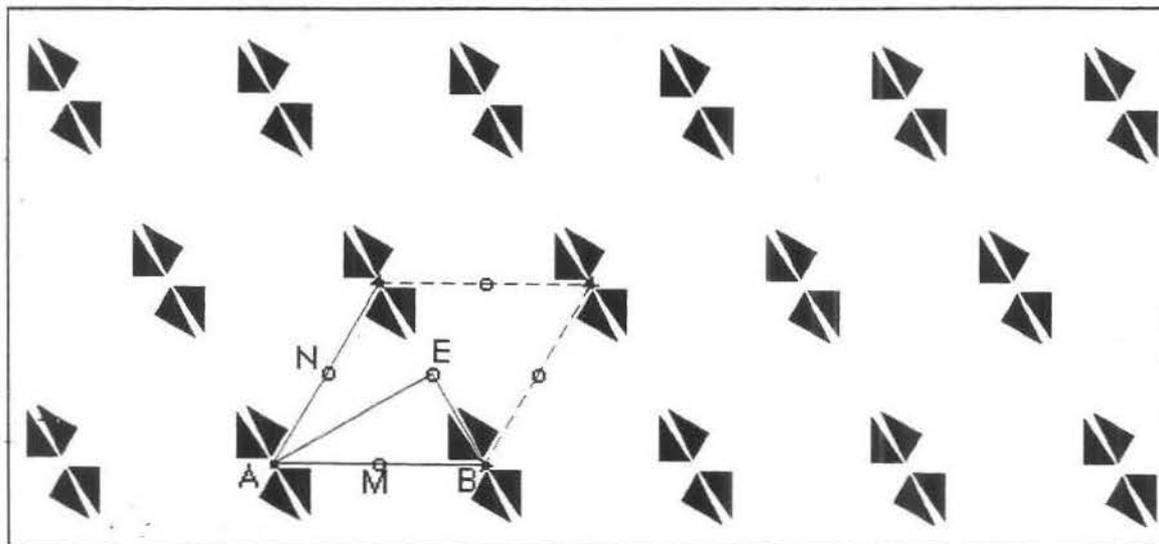


Figura 6 k - M_2^1

Portanto, no caso não retangular, nós temos somente uma possibilidade: $M=M_2^1$. É fácil verificar que M_2^1 é também gerado por $\sigma_{\overline{AE}}, \sigma_{\overline{BE}}$ e σ_M . Se uma célula básica losangular é retangular, então a célula básica é quadrada e é um caso especial do caso retangular geral que é considerado a seguir.

Uma extensão M de M_2 não pode ter uma reflexão em uma diagonal da célula básica, a menos que a célula básica seja losangular e não pode ter reflexões em uma diagonal e em uma linha paralela a um lado, visto que todo n -centro é um 2-centro. Então para estender M_2 com reflexões temos que considerar somente o caso onde a célula básica é retangular (possivelmente quadrada) e σ_l está em M com l paralela ao lado da célula básica definida pelo $\square ABCD$.

Temos duas possibilidades: ou a reta l passa por um 2-centro, ou a reta l passa entre duas fileiras adjacentes de 2-centros.

No caso da reta l passar por um 2-centro, introduzimos a reflexão em cada uma das retas que contém o lado do $\square NAME$.

Definimos então $M = M_2^2$, tal que:

$$M_2^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overline{AM}}, \sigma_{\overline{AN}} \rangle = \langle \sigma_{\overline{AM}}, \sigma_{\overline{ME}}, \sigma_{\overline{AN}}, \sigma_{\overline{NE}} \rangle = pmm$$

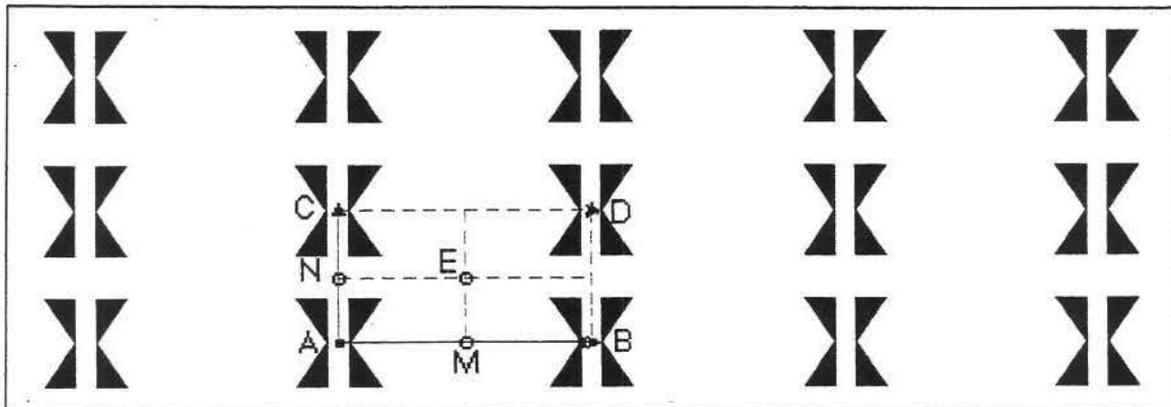


Figura 6 l - M_2^2

No segundo caso, onde l passa entre duas filas adjacentes de 2-centros, nós podemos supor, sem perda de generalidade, que l é paralela a \overline{AN} . Então definimos $M = M_2^3$, onde p é a mediatriz de \overline{AM} . Veja a figura 6m.

$$M_2^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \sigma_p \rangle = \langle \sigma_A, \sigma_N, \sigma_p \rangle = pmg$$

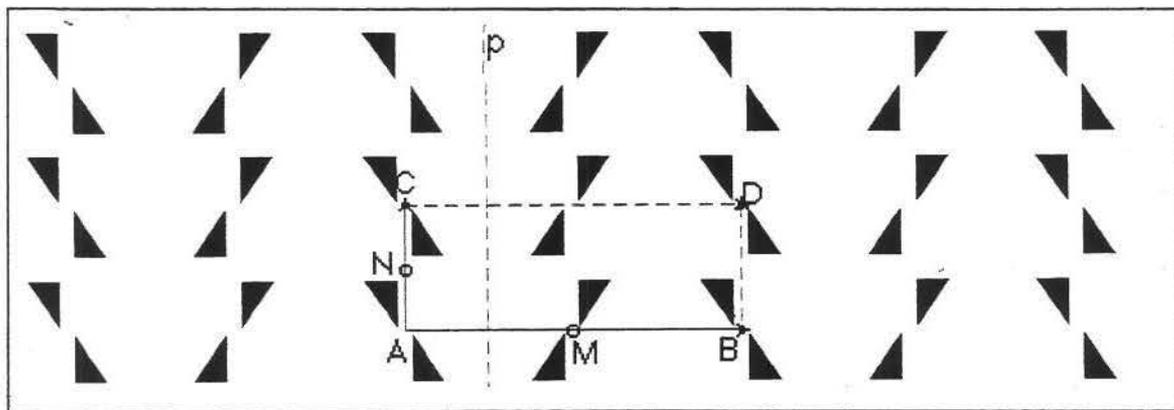


Figura 6 m - M_2^3

Vamos agora estender M_2 a um grupo de revestimento M , acrescentando-se uma reflexão transladada γ tal que reflexões não são introduzidas.

Uma reflexão transladada tendo um eixo que passa por um 2-centro, necessita de introdução de uma reflexão. Consequentemente, os eixos de γ devem

passar entre duas filas adjacentes de 2-centros. Para isso é necessário que o paralelogramo da célula básica seja retangular. Nós vemos que uma escolha de eixos para γ introduz reflexões transladadas cujos eixos consistem de todos os candidatos possíveis. Seja p a mediatriz de \overline{AM} ; seja q a mediatriz de \overline{AN} . Uma reflexão transladada com eixo p levando o 2-centro M para o 2-centro C seguida por $\tau_{C,A}$ produz uma reflexão não desejada σ_p . Seja γ a reflexão transladada que leva M para N e A para E . Seja ε a reflexão transladada que leva N para M e A para E . O eixo de γ é p e $\gamma^2 = \tau_{A,C}$; o eixo de ε é q e $\varepsilon^2 = \tau_{A,B}$. Também, $\gamma\sigma_A = \varepsilon$.

$$\text{Seja } M_2^4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \gamma \rangle = \langle \gamma, \varepsilon \rangle = pgg$$

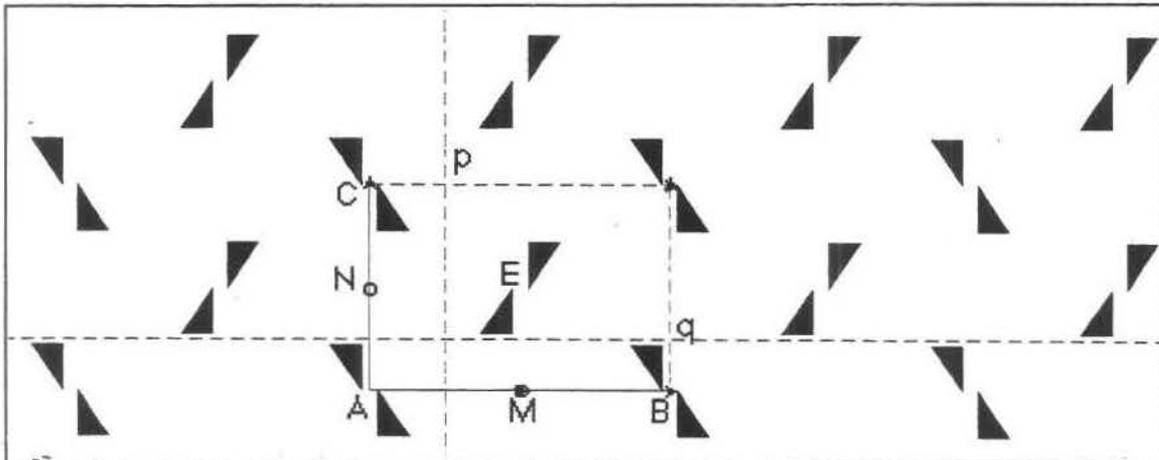


Figura 6 n - M_2^4

Assim, a extensão de M_2 a um grupo de revestimento, adicionando somente isometrias inversas leva a M_2^1 ou M_2^2 ou M_2^3 ou M_2^4 .

Um revestimento, que tem M_2 como grupo de simetria, tem um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro e não é fixo por isometria inversa. Um revestimento, que tem M_2^1 como grupo de simetria, tem um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro e alguns 2-centros estão sobre um eixo de simetria.

Um revestimento que tem M_2^2 como grupo de simetria tem um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro e todo 2-centro está num eixo de simetria. Um

revestimento que tem M_2^3 como grupo de simetria tem um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro, tem um eixo de simetria e todos os eixos de simetria são paralelos. Todo revestimento que tem M_2^4 como grupo de simetria tem um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro, não tem eixo de simetria mas é fixo por uma reflexão transladada.

6.6. Grupos Cristalográficos com 3-centros

Vamos considerar agora os grupos de revestimento com um 3-centro mas não 6-centro e provaremos o seguinte teorema:

Teorema 6.14.

Se A é um 3-centro para um grupo de revestimento M e não há 6-centro para M , então todo centro de simetria de M é um 3-centro e A é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros. Todos os centros de simetria para M são determinados por A e 3-centros próximos.

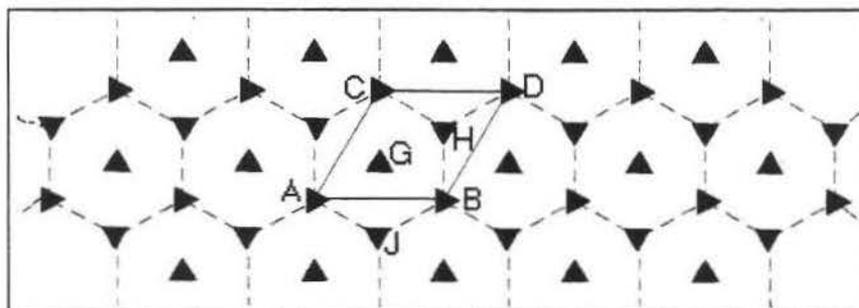


Figura 6 o

Demonstração:

Todo centro P de M é um 3-centro, pois $\rho_{A,-120}\rho_{P,180}$ não pode estar em M para qualquer ponto P , já que M não tem 6-centros. Seja G um 3-centro mais próximo de A . Seja J tal que $\rho_{G,120}\rho_{A,120} = \rho_{J,240}$. Então J é um 3-centro e o triângulo AGJ é um triângulo equilátero.

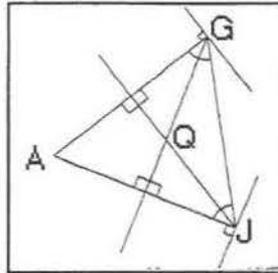


Figura 6 p

As imagens de G e J por rotações $\rho_{A,120}$ são os vértices do hexágono. Repetição do argumento para cada 3-centro mostra que todos 3-centros são arranjados como na figura 6 o e termina a prova do teorema ©

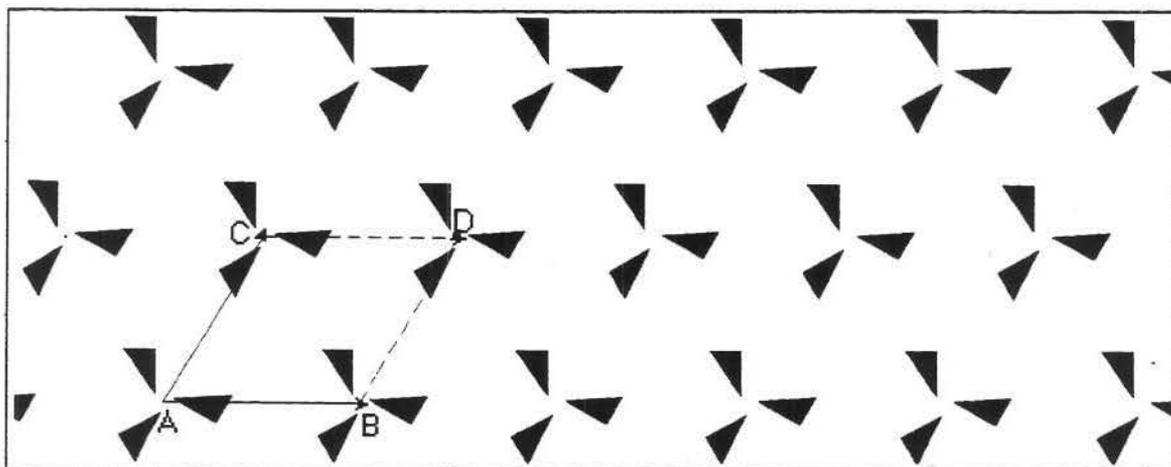
Pela figura 6 p nós vemos que cada $\rho_{G,120}\tau_{A,G}$ e $\rho_{J,120}\tau_{A,J}$ é $\rho_{Q,120}$, onde Q é o centro do ΔAGJ . Então, nem $\tau_{A,G}$, nem $\tau_{A,J}$ estão em M , pois caso contrário Q seria um 3-centro mais próximo de A que G . Então, se $\tau_{A,B}$, é a menor translação em M , então o 3-centro B não é um vértice do hexágono, de 3-centros próximos de A .

Sejam B e C definidos por $\tau_{A,B} = \rho_{G,120}\rho_{A,-120}$ e $\tau_{A,C} = \rho_{G,-120}\rho_{A,120}$. Então, $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ são as menores translações em M e tomaremos A o próximo 3-centro mais perto.

Consequentemente, $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ geram o grupo de translações de M . Seja $M_3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120} \rangle = \langle \rho_{A,120}, \rho_{G,120} \rangle$.

Se M não contém isometrias inversas, então M deve ser M_3 .

$$M_3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120} \rangle = \langle \rho_{A,120}, \rho_{G,120} \rangle = p3$$

Figura 6 q - M_3

Vamos acrescentar a M_3 uma reflexão transladada. Então (Teorema 6.5), M deve ter uma reflexão transladada que leva o 3-centro A para um 3-centro que não está no reticulado da translação determinada por A . Pela composição desta reflexão transladada com uma translação e possivelmente uma rotação sobre A , nós podemos assumir que M contém uma reflexão transladada que leva A para G ou J . Supõe que γ é a reflexão transladada em M que leva A para G . Então $\gamma = \sigma_z \sigma_z$, onde Z é o ponto médio de A e G e z é a reta que passa por G . Como σ_z fixa o conjunto de todos os 3-centros, então σ_z deve também fixar o conjunto de todos os 3-centros. Veja figura 6 r.

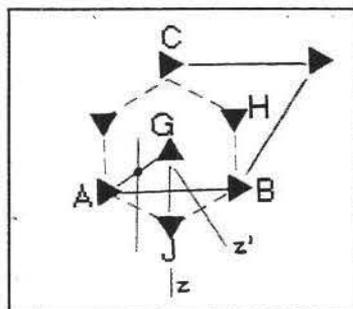


Figura 6 r

Compondo σ_z com a rotação sobre G , nós podemos supor sem perda de generalidade, que z é ou a mediatriz de \overline{JB} ou $z = \overline{GJ}$. A primeira é impossível, pois caso contrário \overline{AG} está no eixo de γ e $\tau_{B,A}\gamma^2$ é uma translação em M de comprimento AG e menor que $\tau_{A,B}$. Logo $z = \overline{GJ}$. Então, $\rho_{G,-120}\gamma = \sigma_{\leftarrow AG} \sigma_z \sigma_z \sigma_z = \sigma_{\leftarrow z}$ e M contém a reflexão na mediatriz de \overline{AG} .

A presença de uma reflexão transladada levando A para J implica que a reflexão na mediatriz de \overline{AJ} está em M . Neste caso, M deve conter uma reflexão se M é uma extensão de M_3 e contém uma isometria inversa.

Todas as extensões de M_3 para um grupo que não tem 6-centro pela adição de uma isometria inversa são obtidas acrescentando-se reflexões. Se M_3 é estendida acrescentando-se σ_z , então l deve ser reta de simetria para um conjunto de 3-centros. Desde que uma reta deve passar através de pelo menos um 3-centro, nós suporemos que l é a reta através do 3-centro A .

Sejam:

$$M_3^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{\leftarrow AG} \rangle = p3m1$$

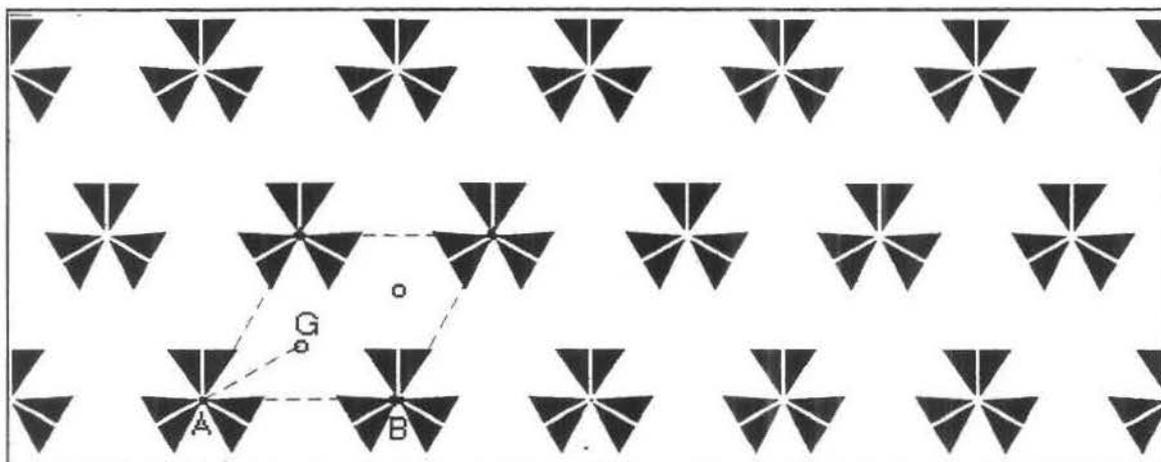


Figura 6 s - M_3^1

$$M_3^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{\overleftrightarrow{AB}} \rangle = p31m$$

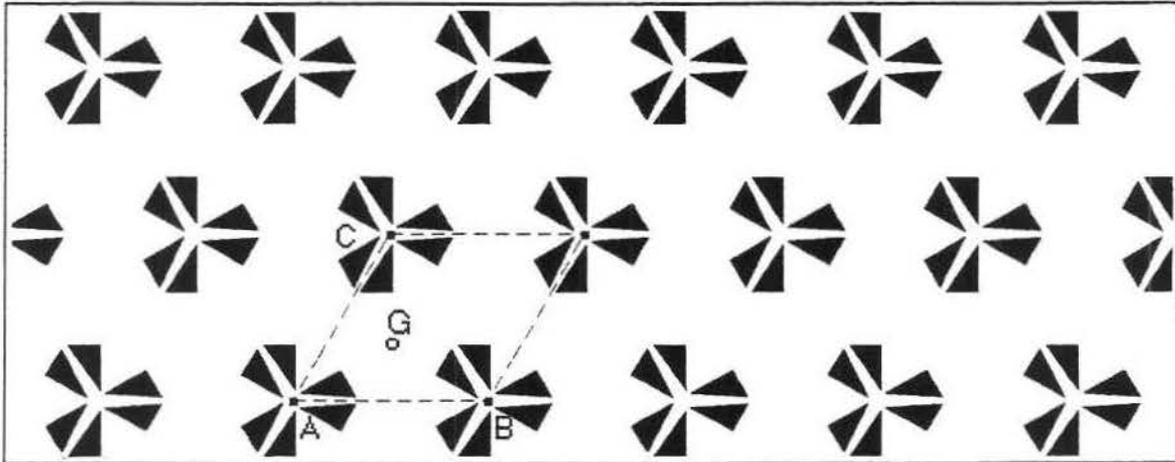


Figura 6 t- M_3^2

M_3^1 é gerado por 3 reflexões em 3 retas contendo os lados de um triângulo equilátero. Os grupos M_3^1 e M_3^2 são obtidos acrescentando-se a M_3 a reflexão em uma das diagonais de uma célula básica losangular determinada por A . Acrescentando-se as reflexões em ambas as diagonais, introduziremos uma rotação de 180° e um 6-centro. Logo, todo o padrão de revestimento contendo somente três centros tem um dos M_3 , M_3^1 ou M_3^2 como grupo de simetria.

Um padrão de revestimento que tem M_3 como grupo de simetria tem um 3-centro, não tem 6-centro e não tem eixo de simetria.

Um padrão de revestimento que tem M_3^1 como grupo de simetria tem um 3-centro, não tem 6-centro e todo 3-centro está sobre um eixo de simetria.

Um padrão de revestimento que tem M_3^2 como grupo de simetria tem um 3-centro fora de um eixo de simetria mas não tem 6-centro.

6.7. Grupos Cristalográficos com 4-centros

Vamos considerar agora 4-centros.

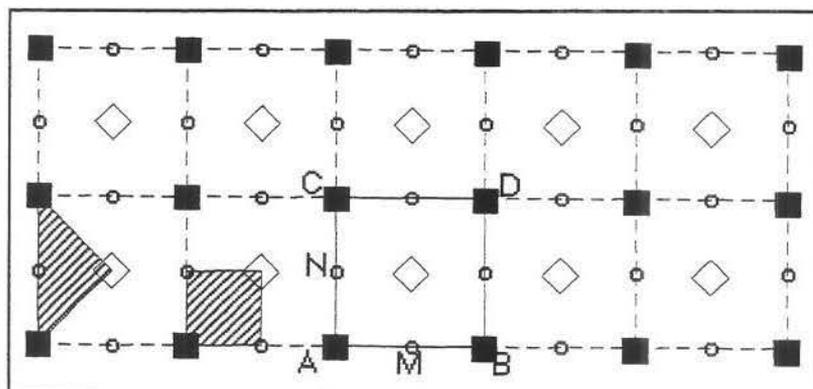


Figura 6 u

Teorema 6.12.

Seja A um 4-centro para o grupo de revestimento M .

Então não há 3-centros em M e não há 6-centros para M . O centro de simetria mais próximo de A é um 2-centro M , e A é o centro de um quadrado cujos vértices são 4-centros e cujos lados são bissectados por 2-centros. Todos os centros de simetria para M são determinados por A e M .

Demonstração:

Pelo teorema 6.9., se A é um 4-centro para o grupo de revestimento M , então todo centro de simetria para M é ou um 2-centro ou um 4-centro. Seja M um centro de simetria mais próximo de A . Se M fosse um 4-centro, então K seria um centro de simetria mais próximo de A que M onde K é dado por $\rho_{M,90} = \sigma_{A,90}$. Veja figura 6v.

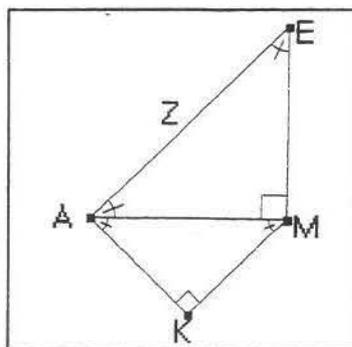


Figura 6 v

Logo, M deve ser um 2-centro e E é um 4-centro onde $\rho_{M,180}\rho_{A,-90} = \rho_{E,90}$. As imagens de E e M através de $\rho_{A,90}$ são respectivamente, os vértices e pontos médios de um quadrado nas condições do teorema. A translação $\tau_{A,E}$ não está em M quando por outro lado Z é o centro de simetria mais próximo de A que M , onde $\tau_{A,E} = \sigma_A = \sigma_Z$.

Com $N = \rho_{A,90}(M)$, $\tau_{A,B} = \sigma_M\sigma_A$, e $\tau_{A,C} = \sigma_N\sigma_A$, então o $\square NAME$ é um quadrado e $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ são as menores translações em M e geram o subgrupo das translações.

Assim, não há mais chance de mais algum centro de simetria que os que já ocorreram (Teorema 6.8). Os centros de simetria de M estão arranjados na figura 6 u.

Seja $M_4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90} \rangle = \langle \rho_{A,90}, \rho_{E,90} \rangle = p4$, onde E é o centro do quadrado $ABCD$. Se M_4 não contém isometrias inversas então M deve ser M_4 . É fácil verificar que M_4 é gerado por $\rho_{A,90}$ e $\rho_{E,90}$.

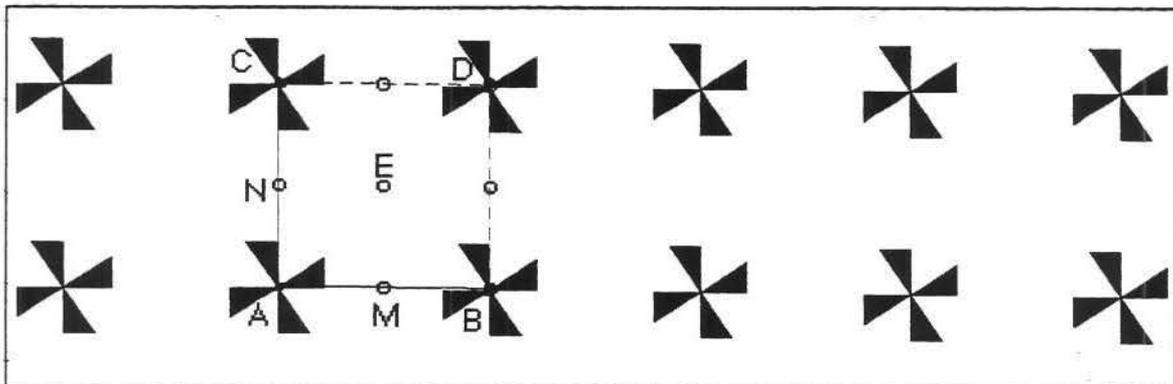


Figura 6 x - M_4

Vamos estender M_4 acrescentando isometrias inversas. Se σ_l está em M , então l deve ser um eixo de simetria para o conjunto de todos os 4-centros em M .

Devido às muitas rotações em M_4 , é suficiente considerar acrescentando ou uma reflexão no eixo de simetria através de um 4-centro ou uma reflexão no eixo de simetria fora de todos os 4-centros. As retas \overline{AE} e \overline{MN} servem para o nosso propósito.

Primeiro seja $M_4^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{\overline{AE}} \rangle = p4m$.

M_4^1 também é gerado por 3 reflexões em 3 retas que contém os lados de um triângulo isósceles retângulo.

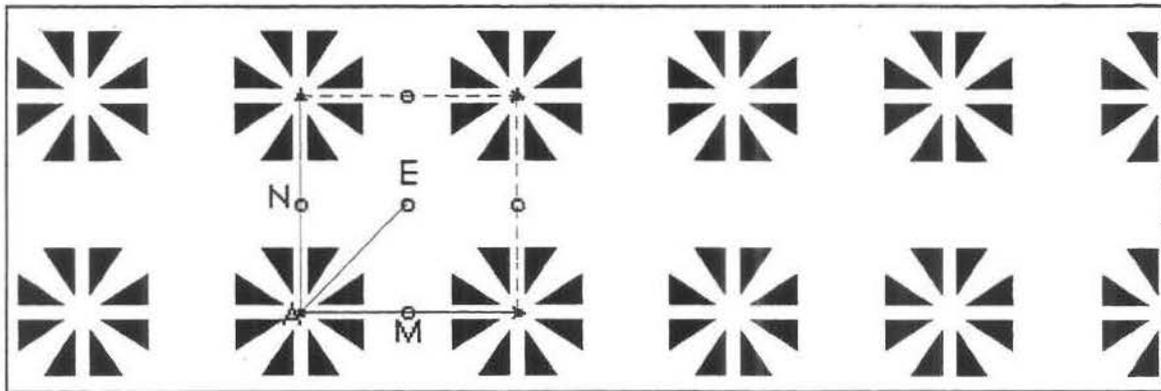


Figura 6 y - M_4^1

Seja $M_4^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{\overline{MN}} \rangle = p4g$

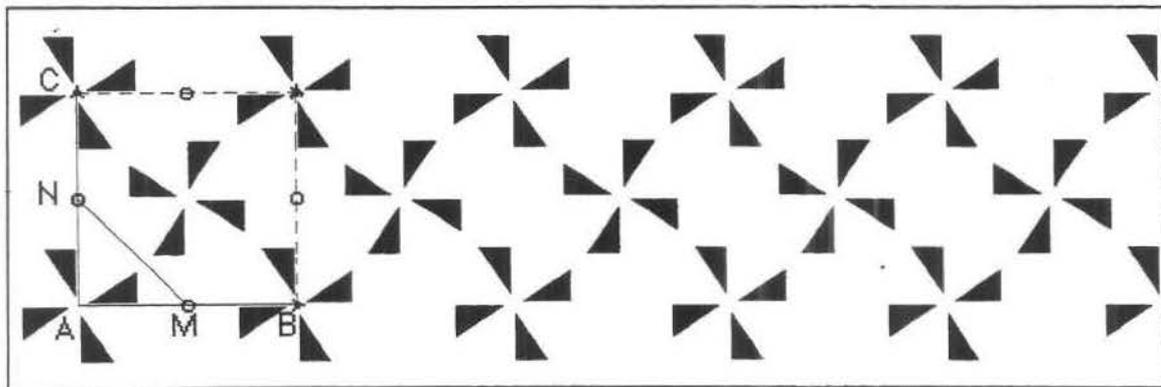


Figura 6 w - M_4^2

As reflexões $\sigma_{\overline{AE}}$ e $\sigma_{\overline{MN}}$ não podem ser acrescentadas a M_4 sem introduzir um centro de simetria mais próximo a A que M .

Para considerar a possibilidade de estender M_4 para um grupo M sem reflexões acrescentando-se isometrias inversas, é suficiente (Teo. 6.5) supor que M contém uma reflexão transladada que leva o 4-centro A para um 4-centro que não está no reticulado das translações, determinado por A . Pela composição de uma reflexão transladada com uma translação apropriada, nós podemos supor que M contém uma reflexão transladada γ levando A para E .

Com Z sendo o ponto médio de A e E , então $\gamma = \sigma_z \sigma_z$ para cada reta z através de E . Desde que γ deve fixar o conjunto de todos os 4-centros, então z deve ser um dos $\overline{ME}, \overline{BE}$ ou \overline{NE} .

De qualquer forma, γ seguido respectivamente por $\rho_{E,90}, \rho_{E,180}$ ou $\rho_{E,270}$ dá a reflexão em \overline{MN} .

Estendendo M_4 por isometrias inversas temos somente ou M_4^1 ou M_4^2 .

Um padrão de revestimento que tem M_4 como grupo de simetria tem um 4-centro e não tem linha de simetria. Um padrão de revestimento que tem M_4^1 como grupo de simetria tem um eixo de simetria sobre um 4-centro e o que tem grupo de simetria M_4^2 tem um 4-centro e um eixo de simetria fora de todos os 4-centros.

6.8. Grupos Cristalográficos com 6-centros

O seguinte teorema mostra a grande quantidade de simetrias que se apoiam em um 6-centro.

Teorema 6.10.

Seja A um 6-centro para um grupo de revestimento M . Não há 4-centro para M . Mais, o centro de simetria mais próximo de A é um 2-centro M e A é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros e cujos lados são

bissectados por 2-centros. Todos os centros de simetria para M são determinados por A e M .

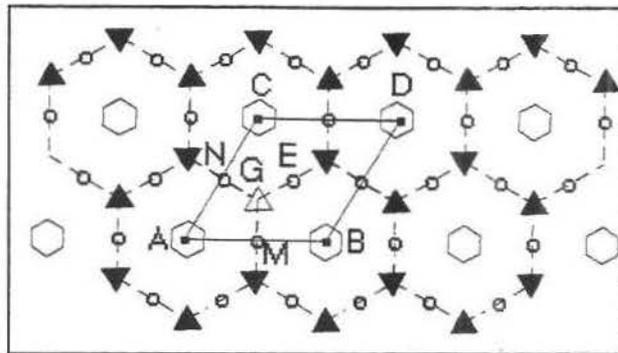


Figura 6 z

Pelo Teorema 6.9., M não contém 4-centros, pois M contém 6-centro. Seja M um n -centro mais próximo de A . Se M fosse um 3-centro ou um 6-centro, então haveria um centro F mais próximo de A que M , onde $\rho_{M,120}\rho_{A,60} = \rho_{F,180}$. Veja figura 6 z1. Logo M deve ser um 2-centro.

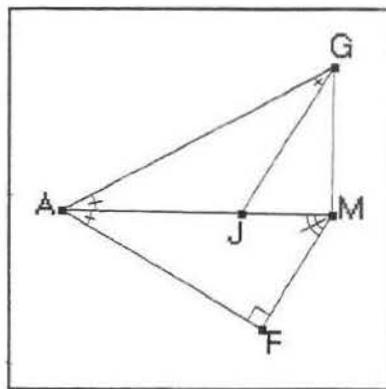


Figura 6 z1

Seja o ponto G definido pela equação $\rho_{M,180}\rho_{A,60} = \rho_{G,120}$. Então G é ou um 3-centro ou um 6-centro. Contudo, G não pode ser um 6-centro, pois existiria um centro J entre A e M , onde J está definido pela equação $\rho_{G,60}\rho_{A,60} = \rho_{J,120}$. Então, G deve ser um 3-centro. As imagens de G sob rotações de $\rho_{A,60}$ são os vértices de um hexágono. Com $B = \sigma_M(A)$ e $C = \rho_{A,60}(B)$, então B e C são 6-centros de M . Os centros de simetria determinados pelo 6-centro A e o 2-centro M estão na figura 6 z ©

Com $N = \rho_{A,60}(M)$, então N é um 2-centro para M . Também desde que o 6-centro A deve ir em um 6-centro para um elemento de M , então $\sigma_M \sigma_A$ e $\sigma_N \sigma_A$ são as menores translações em M . Consequentemente $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ geram o subgrupo das translações de M .

O grupo de revestimento, é então, $M_6 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60} \rangle = \langle \rho_{A,60}, \sigma_M \rangle = p6$

onde ΔABC é equilátero e M é o ponto médio de \overline{AB} .

Na figura 6 z, o quadrilátero $ABCD$ é a célula básica com M ponto médio de \overline{AB} e N o ponto médio de \overline{AC} .

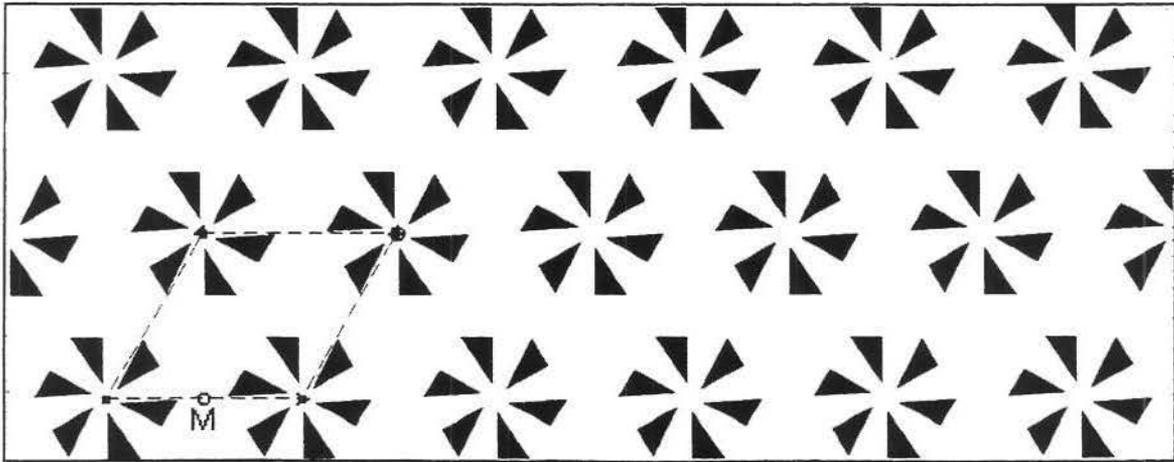


Figura 6 z2 - M_6

Algumas extensões de M_6 são obtidas acrescentando-se reflexões que fixam as translações do reticulado.

Seja $M_6^1 = \langle \rho_{A,60}, \sigma_m, \sigma_{\overline{MC}} \rangle$. Então, $M_6^1 = \langle \sigma_{\overline{AG}}, \sigma_{\overline{GM}}, \sigma_{\overline{MA}} \rangle$, onde M_6^1 é gerado por 3 reflexões em três retas que contêm os lados de um triângulo com ângulos de $30^\circ, 60^\circ$ e 90° .

Também, $M_6^1 = \langle \rho_{A,60}, \sigma_{\overline{MC}} \rangle$

Um padrão de revestimento que tem M_6 como grupo de simetria tem um 6-centro mas não tem eixo de simetria. Padrões de revestimento que têm como grupo de simetria M_6^1 têm um 6-centro e uma eixo de simetria.

$$M_6^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60}, \sigma_{MC} \rangle = \langle \rho_{A,60}, \sigma_{MC} \rangle = p6m$$

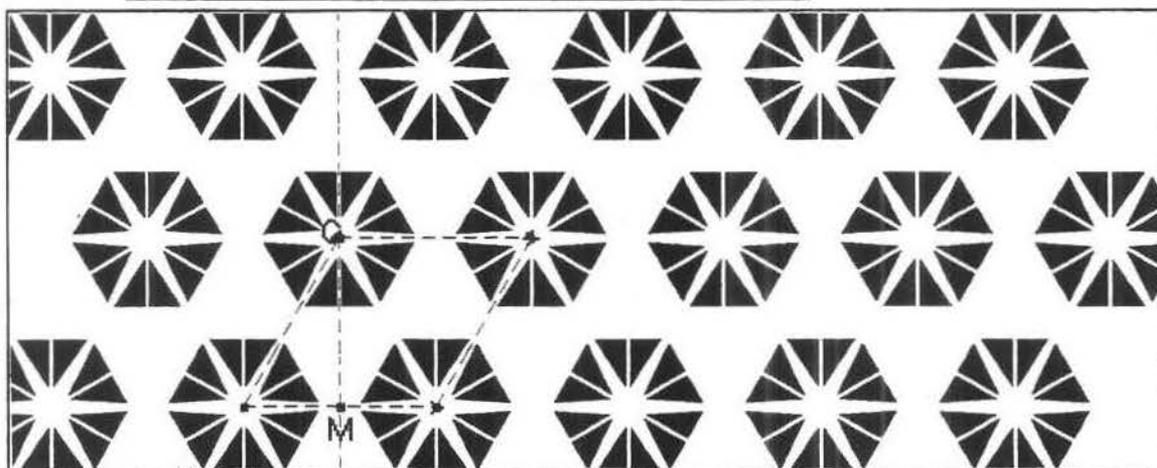


Figura 6 z3 - M_6^1

6.9. Os dezessete Grupos de Revestimento

Através da análise podemos enunciar o seguinte Teorema que nos dá todos os grupos de revestimento.

Teorema 6.11.

Se M é um grupo de revestimento, então existem pontos e retas, tais que M é um dos seguintes grupos definidos anteriormente:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & M_2 & M_4 & M_3 & M_6 \\ M_1^1 & M_2^1 & M_4^1 & M_3^1 & M_6^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_4^2 & M_3^2 & \\ M_1^3 & M_2^3 & & & \\ & M_2^4 & & & \end{array}$$

Tabela 6.12. Padrões de Revestimento

M_1 $p1$ Sem isometrias inversas	M_2 $p2$ Sem isometrias inversas	M_3 $p3$ Sem eixos de simetria	M_4 $p4$ Sem eixos de simetria	M_6 $p6$ Sem eixos de simetria
M_1^1 cm Alguns eixos de reflexões transladadas não são eixos de simetria	M_2^1 cmm Alguns 2-centros não estão sobre um eixo de simetria	M_3^1 $p3m1$ Todos os centros sobre um eixo de simetria	M_4^1 $p4m$ Um eixo de simetria sobre um 4-centro	M_6^1 $p6m$ Um eixo de simetria
M_1^2 pm Todos os eixos de reflexões transladadas são eixos de simetria	M_2^2 Todos os 2-centros sobre um eixo de simetria	M_3^2 $p31m$ Um 3-centro fora dos eixos de simetria	M_4^2 $p4g$ Um eixo de simetria fora do 4-centro	
M_1^3 pg Sem eixo de simetria mas com reflexão transladada	M_2^3 pmg Todos os eixos de simetria são paralelos			
	M_2^4 pgg Sem eixo de simetria mas com reflexão transladada			

Capítulo 7. MOSAICOS POLIGONAIS E MOSAICOS DE HEESCH

Os mosaicos, como arte, atingiram o auge nos fortes, palácios e mesquitas mouras na Idade Média. Algum estudo inicial foi feito pelo astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) e algumas investigações matemáticas pouco formais foram feitas antes do final do século passado. Muito do que tem sido feito é trabalho de químicos e cristalógrafos.

Hoje, matemáticos estão tendo mais interesse neste antigo tópico.

7.1. Mosaicos Poligonais

Definição 7.1.

Um mosaico ou ladrilhamento plano é um conjunto $\{T_1, T_2, \dots\}$ de regiões poligonais que cobrem o plano sem espaços e sem sobreposição. Uma região poligonal contém sua fronteira e será chamada de polígono. Os polígonos T_i são os ladrilhos do mosaico.

A figura abaixo (Martin, p.109), ilustra dezessete tipos de mosaico do plano com seus respectivos grupos de revestimento.

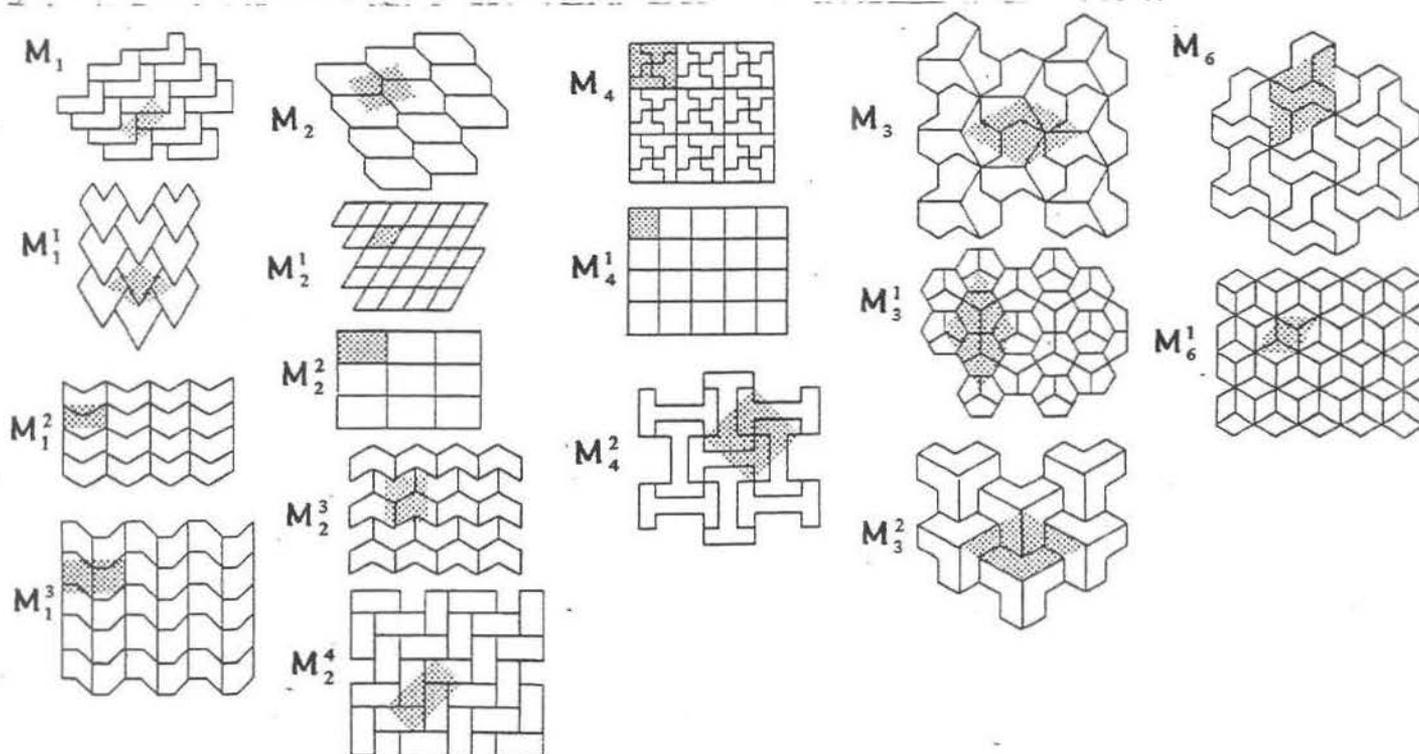


Figura 7 a

Definição 7.2.

Um mosaico é r -edral se existe um conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ de r polígonos que chamaremos *protótipos* tal que cada ladrilho do mosaico é congruente a exatamente um dos protótipos e se cada protótipo é congruente a pelo menos um dos ladrilhos.

Na figura abaixo, temos quatro mosaicos monoedrais (figura 7b), um mosaico diedral com um triângulo e um hexágono como protótipos (figura 7c).

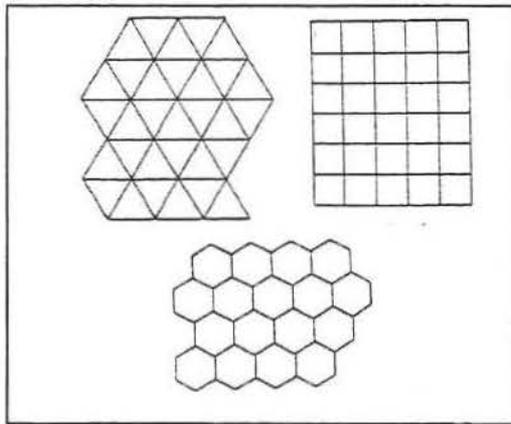


Figura 7 b

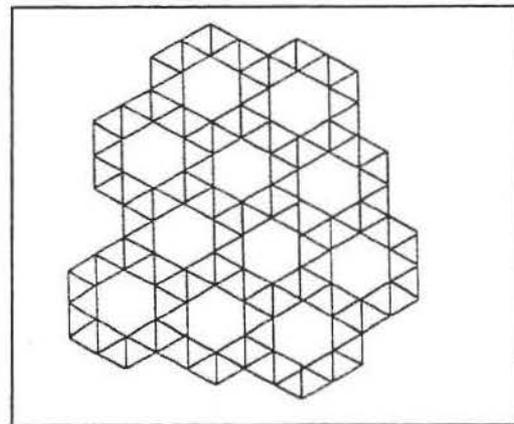


Figura 7 c

Um pentágono regular não ladrilha o plano pois ao redor de três vértices deixa uma lacuna ou existem sobreposições. Veja figura 7 d.

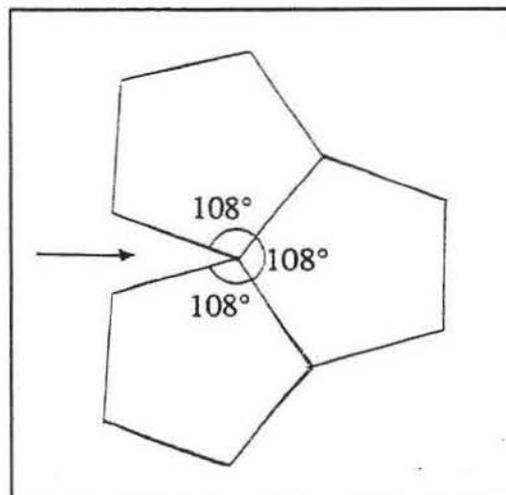


Figura 7 d

Agora, pentágonos equiláteros revestem o plano desde que construídos da seguinte forma:

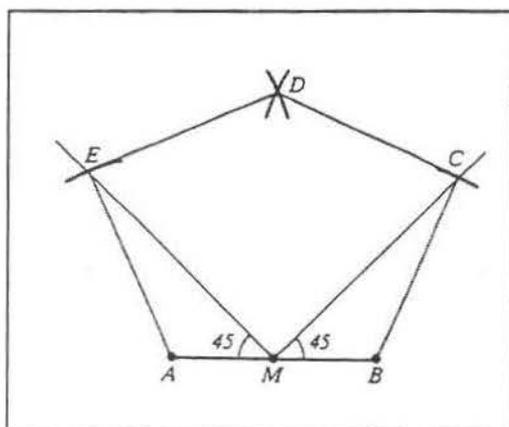


Figura 7 e

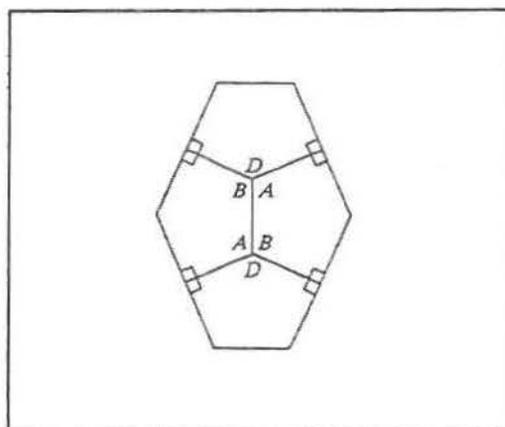


Figura 7 f

Considera-se o ponto médio M da base \overline{AB} e ângulos de 45° como figura 7 e. Os vértices C, D e E são obtidos marcando-se com o compasso de abertura \overline{AB} . Os ângulos C e E são retos. Como a soma dos ângulos A, B e D deve ser 360° , então quatro cópias do pentágono protótipo formam um hexágono (figura 7 f).

Um mosaico que tem um pentágono equilátero convexo como protótipo é o "mosaico Cairo" (figura 7 g) que assim é chamado, pois é usado em muitas ruas da cidade do Cairo.

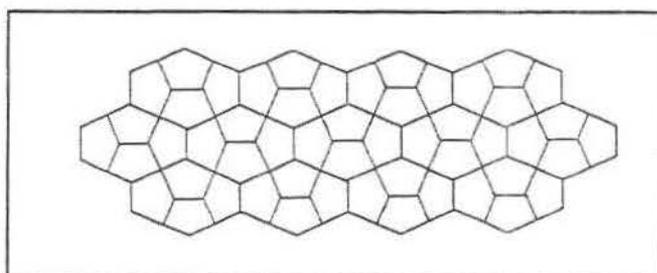


Figura 7 g

Teorema 7.3.

Qualquer triângulo cobre o plano; qualquer quadrilátero cobre o plano. Um hexágono com um ponto de simetria cobre o plano.

Demonstração:

Vamos supor o hexágono H que tem o ponto L como um ponto de simetria. Observa-se que os pares de lados opostos de um hexágono, convexo ou não, são paralelos e congruentes se e somente se o hexágono tem um ponto de simetria. Sejam M e N pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente do hexágono H . Então $\sigma_M\sigma_L$ é uma translação levando o lado oposto de \overline{AB} sobre \overline{AB} . A união de todas as imagens de H sob as muitas translações $\sigma_M\sigma_L$ é uma fileira de hexágonos dividindo o plano.

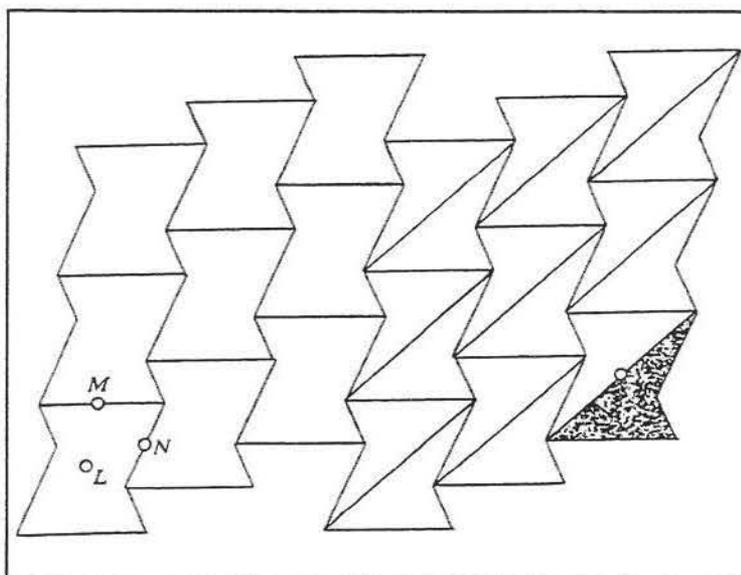


Figura 7 h

Na figura 7 h, esta fileira está no lado esquerdo.

As imagens dessa fila sob as muitas translações $\tau_N\tau_L$ cobrem o plano sem sobreposição.

Logo, um hexágono que tem um ponto de simetria, cobre o plano somente através de translações.

Para mostrarmos que quadriláteros convexos ou não, cobrem o plano, consideramos L como sendo o ponto médio de um lado de algum quadrilátero Q (lado direito inferior da figura 7 h). Os quadriláteros Q e $\sigma_L(Q)$ interceptam somente ao longo do seu lado comum contendo L e sua união é o hexágono H , tendo L como

ponto de simetria. Desde que hexágonos H recobrem o plano, então é trivial que Q cobre o plano também. Além disso, já que a união de triângulos e suas imagens sob rotação de 180° sobre o ponto médio de um lado é um quadrilátero, segue que triângulos também recobrem o plano ©

Definição 7.4.

As figuras formadas por quadrados unitários unidos através de lados são chamadas poliminós e as figuras formadas por triângulos congruentes equiláteros, unidos através de lados são chamadas polimondes.

A união de dois quadrados forma o dominó. Analogamente, a união de três, quatro, cinco, seis quadrados recebe o nome de triminó, tetraminó, pentaminó, hexaminó, respectivamente (figura 7 i).

Os poliminós (figura 7 j) foram introduzidos por Solomon W. Golomb que os estuda em seu livro "Polyminoes".

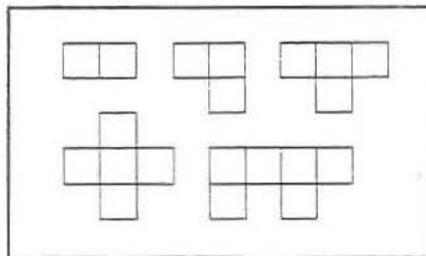


Figura 7 i

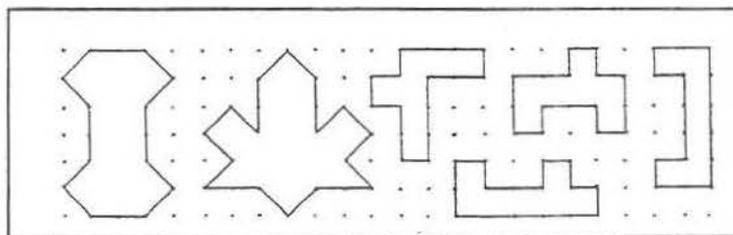


Figura 7 j

A união de dois triângulos com um lado comum é um losango. Existem também os triamondes, tetramondes, pentamondes, heximondes (figura 7 k). Os

polimondes (figura 7 l) foram estudados por Thomas H. O' Beirne em sua coluna no jornal britânico Newscientist.

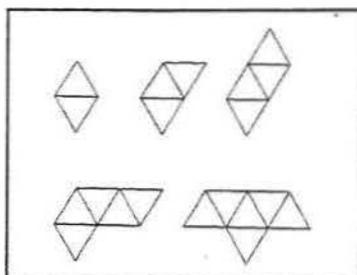


Figura 7 k

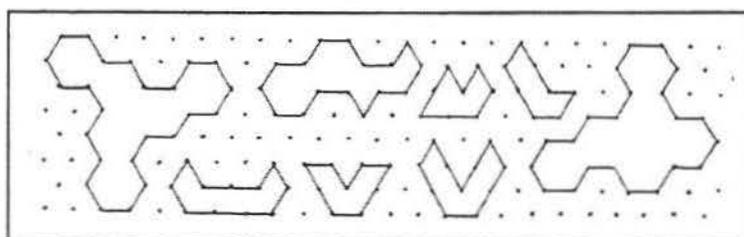


Figura 7 l

O polimonde de ordem 18, na figura 7m, é um protótipo para um recobrimento monoedra do plano. Ele é chamado "carrinho de mão carregado" de Roger Penrose, matemático de Oxford.

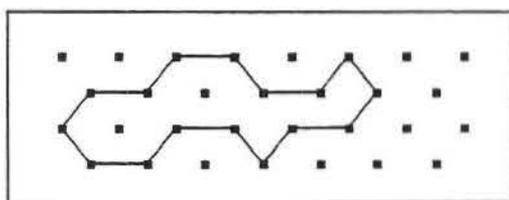


Figura 7 m

Definição 7.5.

Seja P um polígono que é o único protótipo de K recobrimentos mutuamente incongruentes e tal que se algum recobrimento monoedra tem P como protótipo, então ele é congruente a um dos K recobrimentos. O polígono P é dito ser K -mórfico.

Os ladrilhos da figura abaixo são dimórfico e trimórfico (Grünbaum/Shephard, 1987).

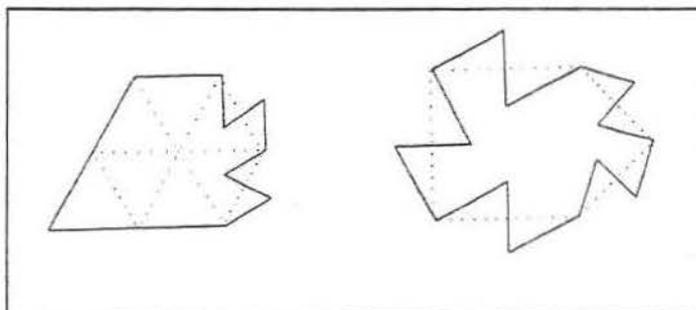


Figura 7 n

Vamos nos restringir agora a mosaicos cujos protótipos são conjuntos fechados disjuntos internamente.

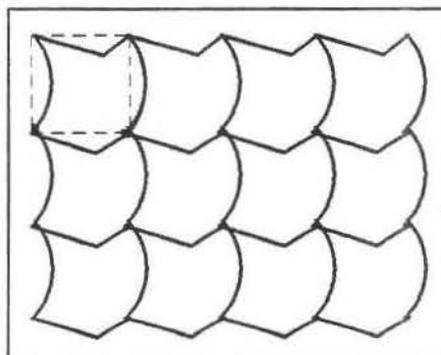


Figura 7 o

Definição 7.6.

Uma *simetria de um mosaico* é uma isometria do plano que transforma ladrilho em ladrilho.

As simetrias de um mosaico formam um grupo, chamado *grupo de simetrias do mosaico*.

Definição 7.7.

Uma *curva de Jordan* é uma curva contínua fechada, simples (sem auto-intersecção).

Um arco de Jordan é uma curva contínua, aberta, simples.

Definição 7.8.

Um mosaico é *isoédrico* quando seu grupo de simetria é transitivo, isto é, para cada par de ladrilhos existe uma simetria do mosaico que leva um dos ladrilhos no outro e se a fronteira do ladrilho é uma curva de Jordan.

Propriedades de um Mosaico Isoédrico

1) *Cada padrão (protótipo) é um conjunto homeomorfo a um círculo.*

Esta é uma consequência do teorema de Schoenflies:

"Cada curva de Jordan é a imagem de uma circunferência através de um homeomorfismo do plano sobre si mesmo", pois, os ladrilhos de um mosaico isoédrico são, necessariamente, conjuntos limitados.

2) *Cada círculo do plano encontra um número finito de ladrilhos.*

Esta é uma consequência da propriedade 1 e do fato que os ladrilhos são congruentes.

3) *O conjunto dos ladrilhos é numerável.*

Segue imediatamente da propriedade 2.

4) *Se dois ladrilhos distintos se encontram, então sua intersecção se reduz a um ponto ou a um arco de Jordan.*

Para demonstrar a propriedade 4, há necessidade do teorema de separação de Alexander: "Sejam A e B dois conjuntos compactos conexos tais que seus complementares são convexos. Então $A \cap B$ é um conjunto conexo se e somente se o complementar de $A \cup B$ é conexo".

5) *O grupo de simetria tem uma região fundamental que é limitada.*

Desde que o grupo de simetria age transitivamente sobre o ladrilho do mosaico, cada órbita sua encontra cada ladrilho. Em seguida escolhe-se uma região fundamental tal que ela esteja contida em um mesmo ladrilho. Como o ladrilho é um conjunto limitado, a região fundamental, assim escolhida, também é.

Uma consequência importante destas propriedades é o seguinte teorema:

Teorema 7.9.

O grupo de simetrias de um mosaico isoédrico é um grupo cristalográfico.

Demonstração:

Da propriedade 2, segue que o grupo de simetria de um mosaico isoédrico é discreto. Desde que da propriedade 5, uma região fundamental sua é um conjunto limitado, se tem que é um grupo cristalográfico.

Definição 7.10.

Um ponto do plano é *vértice* de um mosaico se pertencer a três ou mais ladrilhos. Dois ladrilhos são *adjacentes* se sua intersecção é um arco de Jordan (chamado arco de adjacência de cada um dos ladrilhos).

Definição 7.11.

Uma simetria de um mosaico que leva o ladrilho A em seu adjacente é chamada *transformação das adjacências de A* , isto é, $A \cap S(A)$ é um arco de Jordan.

Denotaremos o conjunto das transformações das adjacências de um ladrilho A com ν_A . Então se G é um grupo de simetria de um mosaico, segue que $\nu_A = \{S \in G : A \cap S(A) \text{ é um arco de Jordan} \}$.

Propriedades:

- 1) ν_A não contém a identidade.
- 2) $S \in \nu_A \Rightarrow S^{-1} \in \nu_A$
- 3) ν_A gera o grupo de simetria de um mosaico isoédrico.

Para cada arco de adjacência a de um motivo A existe uma transformação de adjacência S de A , tal que $a = A \cap S(A)$; no caso de não haver apenas uma transformação, dizemos que o motivo é assimétrico.

7.2. Mosaicos de Heesch

H. Heesch foi o pioneiro no estudo dos mosaicos.

Definição 7.12.

Um mosaico isoédrico com motivo assimétrico é chamado mosaico de Heesch.

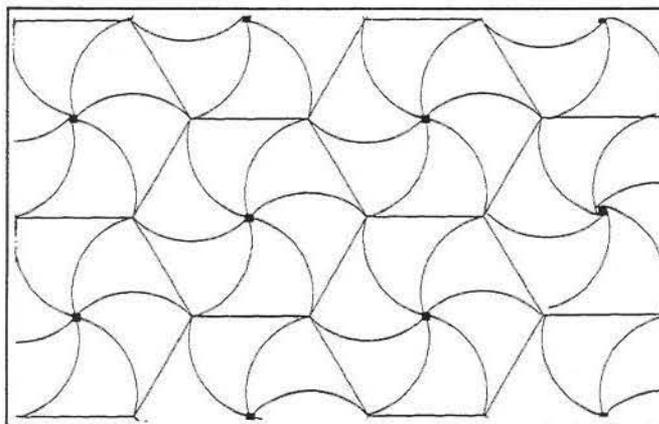


Figura 7 p

Os símbolos usados para caracterizar um mosaico de Heesch com a correspondente transformação de adjacência, está descrito no seguinte quadro.

Símbolo	Transformação de adjacência
τ	Translação
C	Rotação de 180°
C_3	Rotação de 120°
C_4	Rotação de 90°
C_6	Rotação de 60°
ω	Reflexão transladada
σ	Reflexão

Quando percorremos a fronteira de um ladrilho A no sentido horário ou anti-horário, encontramos os pontos P_1, \dots, P_n que são os vértices. Usaremos os símbolos do quadro anterior para indicar o arco de adjacência que une P_1 a P_2 , P_2 a P_3 e assim sucessivamente. Veja a figura 7 q.

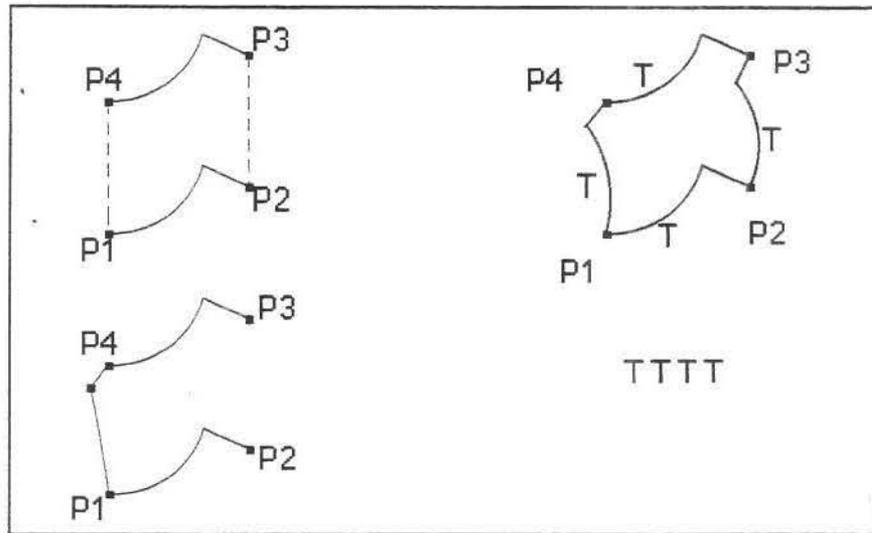


Figura 7 q

No livro "Tilings and Patterns" de B-Grünbaun e G.S. Shephard encontramos 93 exemplos de mosaicos isoedricos. Entre eles, 46 são mosaicos de Heesch cujos símbolos estão inclinados na tabela que segue:

p1	TTTT	41	TTTTTT	1								
p2	TCCTCC	4	TCTCC	23	TCTC	47	CCCC	46	CCC	84		
p3	$C_3C_3C_3C_3C_3C_3$	7	$C_3C_3C_3C_3$	33								
p4	C_4C_4C	79	$C_4C_4C_4C_4$	55	$C_4C_4C_4C_4C$	28						
p6	$CC_3C_3C_6C_6$	21	$C_6C_6C_3C_3$	31	C_6C_6C	88	C_3C_3C	39				
cm	TSTGG	22	GSGS	45	GGS	83						
pm	TSTS	42										
pg	$TG_1G_2TG_2G_1$	3	$TG_1G_1TG_2G_2$	2	$G_1G_1G_2G_2$	44	TGTG	43				
cmm	CSSS	54										
pmm	SSSS	48	SSC	78								
pmg	TSTCC	24	TCTS	50	SCSC	49	SCC	85				
pgg	TCTGG	25	TCCTGG	5	GGC	86	CCGG	53	CGCG	51	$G_1G_2G_1G_2C$	27
	$CG_1CG_2G_1G_2$	6	$G_1G_2G_1G_2$	52								
p3m1	SSS	87										
p31m	C_3C_3S	38	SSC_3C_3	30								
p4m	SSS	87										
p4g	$SSSC_4C_4$	56	C_4C_4S	81								
p6m	SSS	77										

Figura 7 r

Propriedades Algébricas dos Mosaicos de Heesch

Seja G o grupo de simetria do mosaico e $\langle A \rangle$ o grupo gerado pelos elementos de A .

Um conjunto ν das transformações de adjacências de um motivo de um dos 46 mosaicos de Heesch, verifica as seguintes propriedades.

- 1) A identidade não pertence a ν .
- 2) $\nu = \nu^{-1}$
- 3) ν gera G
- 4) Um subconjunto A de ν gera G , quando o subgrupo $\langle A \rangle$ contém duas translações independentes.

5) Seja A um subconjunto de ν e seja $T \in \langle A \rangle$ uma translação não nula.

Então:

- a) Para cada simetria S do mosaico não pertencente a $\langle A \rangle$, a translação STS^{-1} e T são paralelas.
- b) A translação de G paralela a T e a reflexão de G com eixo perpendicular a T , pertence a $\langle A \rangle$.
- c) Se $\langle A \rangle$ não contém só translações paralelas a T ou reflexões com eixo perpendicular a T , então $\langle A \rangle$ contém todos os elementos S de G , tal que $S\langle A \rangle S^{-1} = \langle A \rangle$.
- 6) Seja R uma rotação de ν . Então cada isometria $S \in G$ tal que $SRS^{-1} \in \nu$ é uma potência de R .
- 7) Qualquer que seja a reflexão M de G se tem que $M\nu M \neq \nu$

As propriedades de ν mencionadas são propriedades algébricas do mosaico porque são invariantes por isomorfismos dos grupos cristalográficos.

Devemos recordar que um isomorfismo de grupos cristalográficos transforma translação em translação, rotação em rotação de igual ordem, reflexão em reflexão e reflexão transladada em reflexão transladada.

Observa-se também que as relações geométricas usadas nas descrições das propriedades mencionadas podem ser expressas através de relações algébricas. Por exemplo, duas translações são paralelas se e somente se geram um grupo cíclico; ou uma translação é perpendicular a um eixo de uma reflexão, se e somente se o seu produto tem ordem 2.

Definição 7.13.

Seja ν um subconjunto qualquer de G . Diz-se que ν *recobre* G , quando ν verifica as propriedades algébricas mencionadas anteriormente.

Na enumeração de todos os subconjuntos que recobrem um grupo cristalográfico, identificamos aqueles que são algebricamente equivalentes.

Definição 7.14.

Diz-se que dois subconjuntos das isometrias são *algebricamente equivalentes*, quando existe uma aplicação biunívoca entre os dois conjuntos que pode ser estendida a um isomorfismo entre os grupos gerados por eles.

Portanto, cada conjunto que recobre um grupo tem uma definição abstrata do mesmo grupo.

A definição 7.14. corresponde ao seguinte critério para os mosaicos.

Critério algébrico de classificação dos Mosaicos

Dois mosaicos são do mesmo tipo, se dados A_1 e A_2 , respectivamente, duas bases suas, o conjunto das transformações de adjacência de A_1 é algebricamente equivalente à de A_2 .

Com base neste critério, os 46 mosaicos de Heesch possuem tipos distintos. Resumimos então o que vimos no seguinte teorema:

Teorema 7.15.

Um conjunto de isometrias recobre um grupo cristalográfico se e somente se, é o conjunto das transformações de adjacências de um padrão de qualquer mosaico de Heesch.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após o estudo dos grupos de simetrias discretos do plano, usando como ferramenta o software Cabri-Géomètre II, não podemos deixar de observar as variedades de aplicação do conceito geométrico de simetria e concluir que o avanço da tecnologia não implica, necessariamente, na extinção da atividade artesanal.

O que é visto apenas em museus em tantos países, está em plena vigência no Brasil, através dos nossos índios, do nosso povo.

Cada tribo tem seus próprios padrões e desenhos que contam experiências da comunidade indígena. Um rio e uma viagem podem ser codificados em linhas onduladas e paralelas cortadas por figuras geométricas. Evidentemente estes desenhos indígenas guardam relações com os desenhos de outros povos primitivos, mas dentro de uma mesma tribo, conservando os padrões estabelecidos pela tradição, cada indivíduo encontra um espaço para exprimir-se.

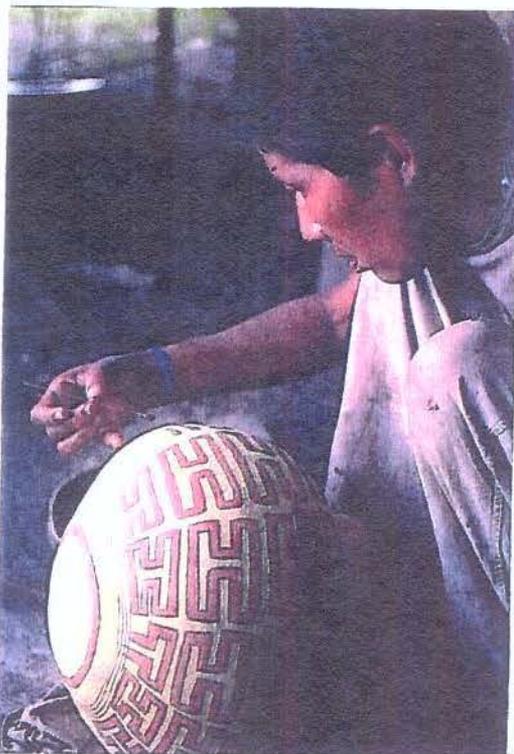


Figura a
Índia Asuriní ornamentando o pote de cerâmica (aldeia Koatinemo, médio Xingu, Sul do Pará).



Figura b

Destaque da aplicação do padrão taingawa com pigmento de óxido de ferro.



Figura c

Tijela e bilha pintadas com padrões labirínticos (Índios Konibo, rio Ucaiali).



Figura d

Tijela com pintura (Índios Kaxináwa, Acre).

Faz parte do nosso conhecimento histórico e da nossa intuição a certeza de que na invenção e confecção de um objeto entram todos os elementos formadores da comunidade: religião, arte, ciência, filosofia estão contidas num objeto produzido por uma civilização.

Boa parte do tempo disponível do homem e da mulher é usado na confecção de artefatos para as atividades de subsistência, adornos pessoais inclusive a pintura corporal.

Esses ornamentos de valor estético-decorativo, possuem propriedades mágico-religiosas.



Figura e
Menina carajá usando brincos com pingentes de rosetas de plumas de araracanga.

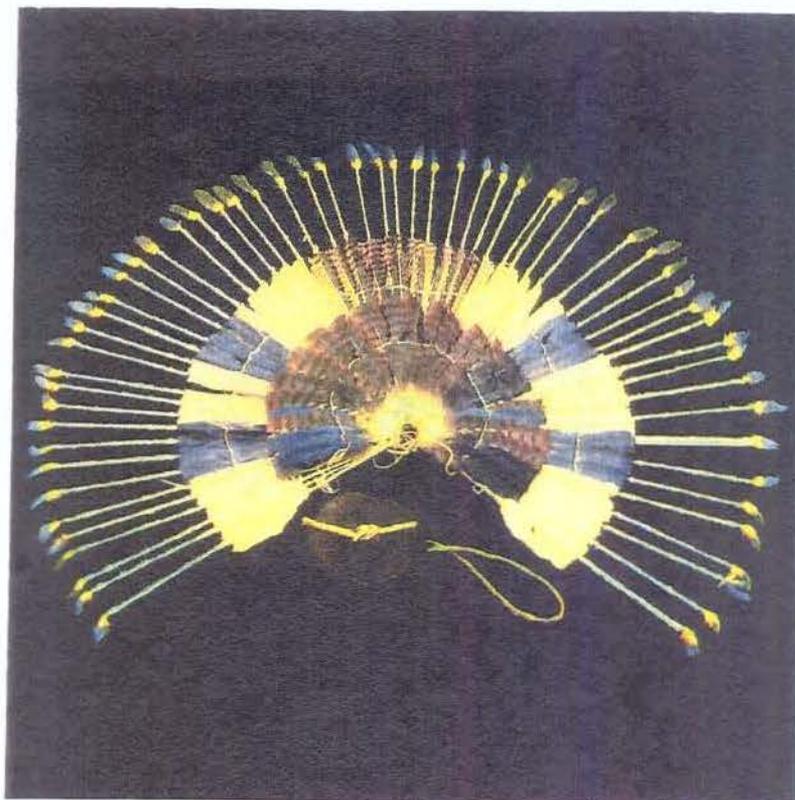


Figura f - Leque do occipício (índios Karajá)

A estrutura geométrica, as simetrias, as padronizações constantes, estão presentes também no trançado e na cestaria.

Certamente a presença indígena estabeleceu uma grande influência nos hábitos brasileiros. São raras as casas que não possuem algum tipo de cesta ou recipiente de trançado e é grande a variedade de padrões, amarrações, formas, aparência da cestaria brasileira.



Figura g
Cestos "urutu"
Fibra – talas de arumã natural e tingida
(Tribos Tukano – AM e Apalay – PA)



Figura h
Arco de flechas
Fibra - talas de arumã
(Índios Kalapalos, Alto Xingu)



Figura i
Cestos para mantimentos
Fibra – carnauba natural e tingida
Ceará

Na África, nordeste de Angola onde vive a população quioca, há uma antiga tradição que consiste em desenhar na areia enquanto se conta uma lenda. Estes desenhos compostos por linhas e pontos, são feitos com as extremidades dos dedos indicador e anelar e apresentam algumas das simetrias estudadas. (Figura j).

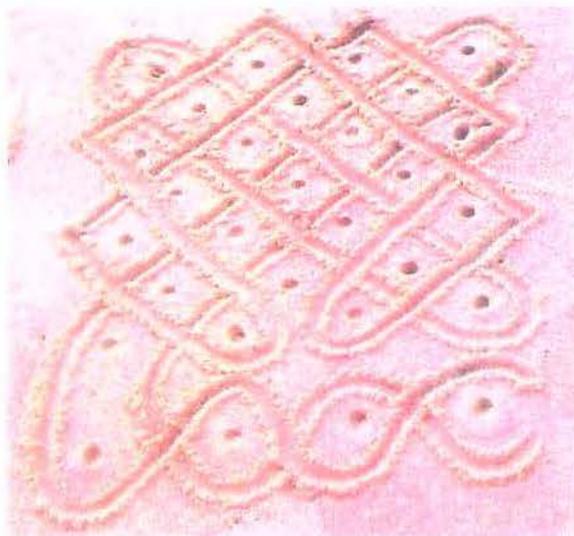


Figura j

O desenho do escorpião, Figura l, apresenta uma reflexão em torno da reta r .

O desenho da Figura m que representa um casal de animais, nos dá um exemplo de simetria rotacional de 180° e a Figura n mostra um motivo frequentemente utilizado na tatuagem da testa onde se observa simetria rotacional de 90° e quatro eixos de reflexão: r , t , s e u .



Figura l

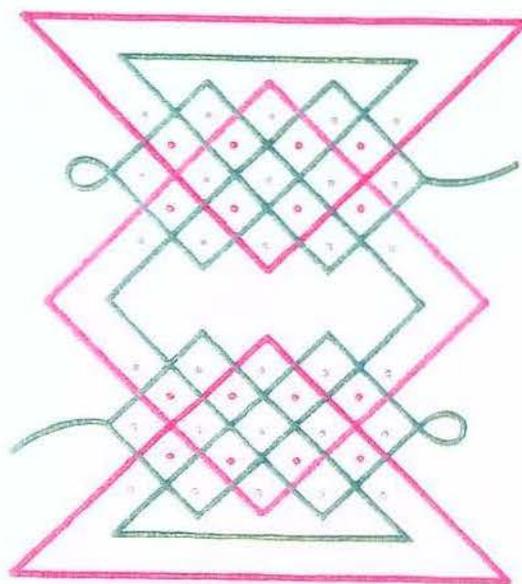


Figura m

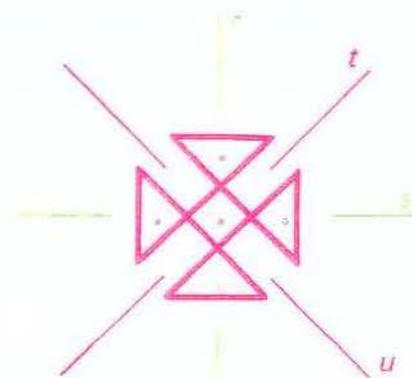


Figura n

Em seu trabalho no Projeto de Investigação "Etnomatemática", Bulafo (1994), estabeleceu contatos com cesteiras e cesteiros da Província de Inhambane, Moçambique, que fabricam os *sipatsi*, carteiras de mão usadas para guardar e transportar moedas e documentos (Figura o).



Figura o - Sipatsi

Nesta atividade de cestaria, os artesãos trabalham com todas as sete classes de faixas teoricamente possíveis, que são apresentadas num catálogo dos padrões-de-faixas por Gerdes (1994).

Ao estudarmos o conceito geométrico de simetria, observamos, também, as grandes variedades de aplicação do princípio, na natureza e nas artes.

As flores são notáveis por sua simetria cíclica (Figura p) e a simetria pentagonal é freqüente no mundo orgânico (Figura q).



Figura p



Figura q

Um simples olhar matemático, busca as simetrias nos ornamentos artísticos de janelas e portões de construções que realçam rosetas (figuras r e s), faixas (Figura t) e mosaicos (Figura u).

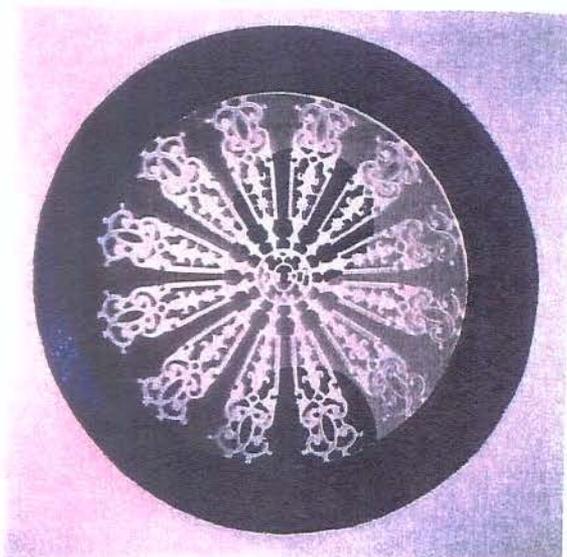


Figura r

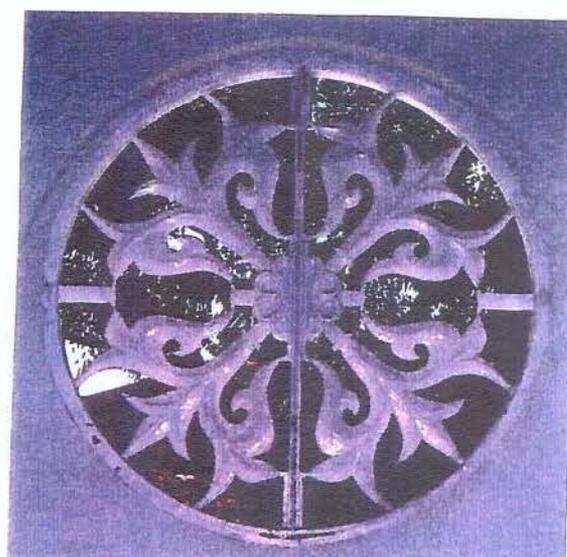


Figura s

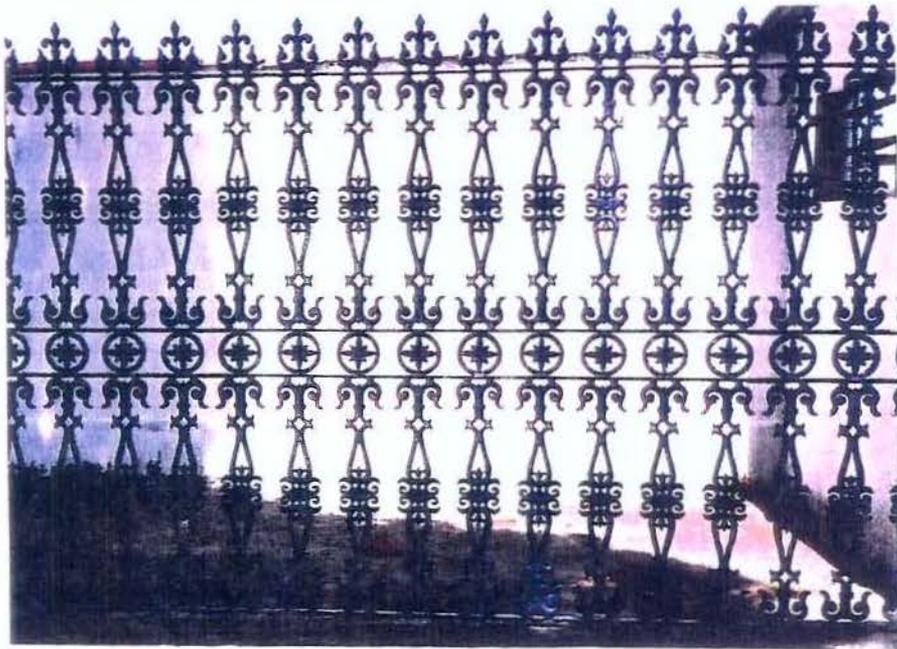


Figura t

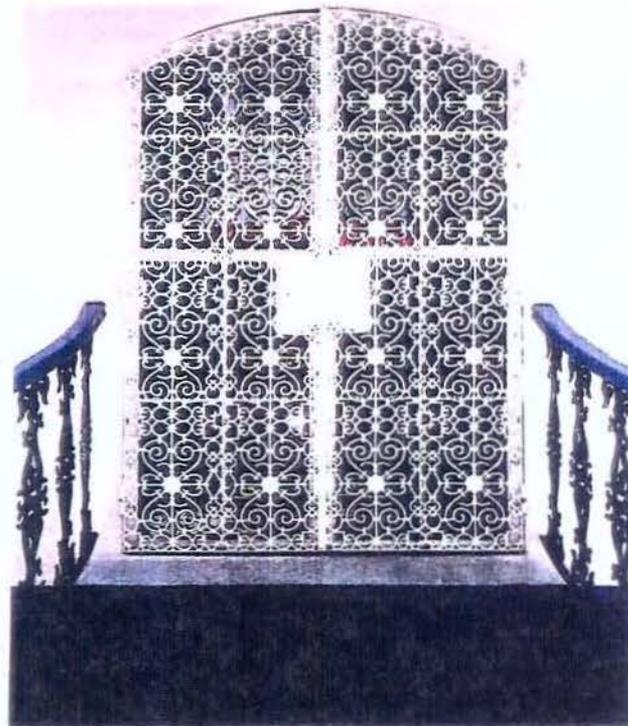


Figura u

Finalmente, nos referimos agora a “um criador de mundos impossíveis”: o holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1971), sem dúvida o mais popular artista gráfico deste século.

Numa das viagens a Espanha, visitou Granada onde encontrou os azulejos mouros e os intrincados temas que se repetem na arte árabe. A partir daí, desenvolveu a sua paixão pelas chamadas pavimentações, a divisão do plano em figuras geométricas, com um motivo que se repete e se reflete.

Muitos dos filtros e plug-ins que são incorporados aos softwares de tratamento de imagens se baseiam nos seus conceitos de simetria e geração de padrões e mosaicos.

Com seu diálogo constante entre a Arte e a Geometria faz-nos acreditar que “o imponderável é a mais pura realidade”.

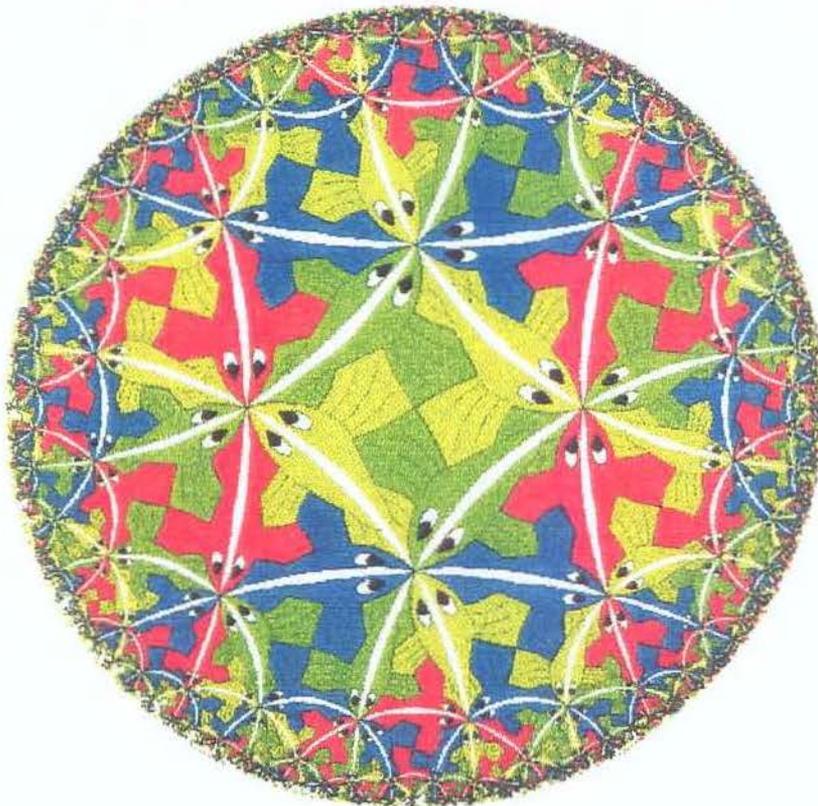


Figura v
M.C. Escher - Xilogravura – Fish - Outubro, 1941

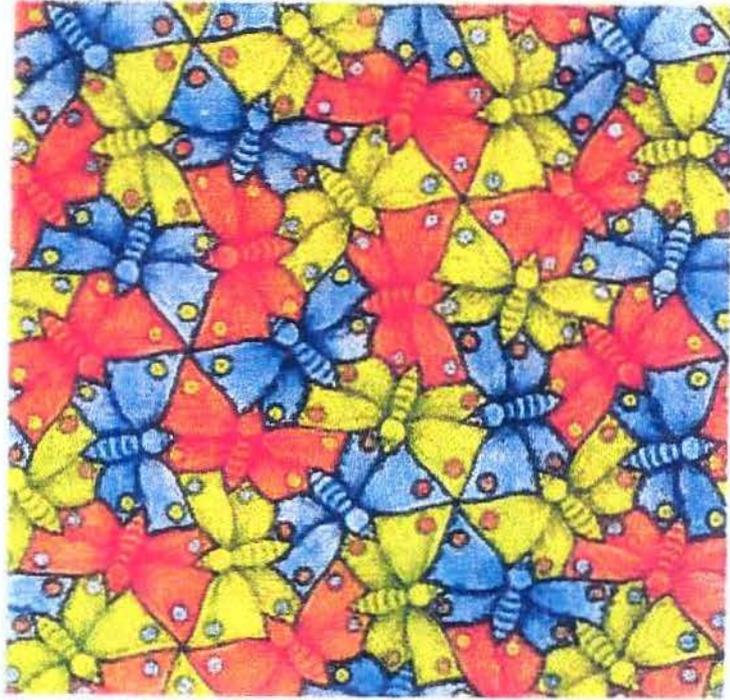


Figura x
M.C. Escher - Symetrye 70

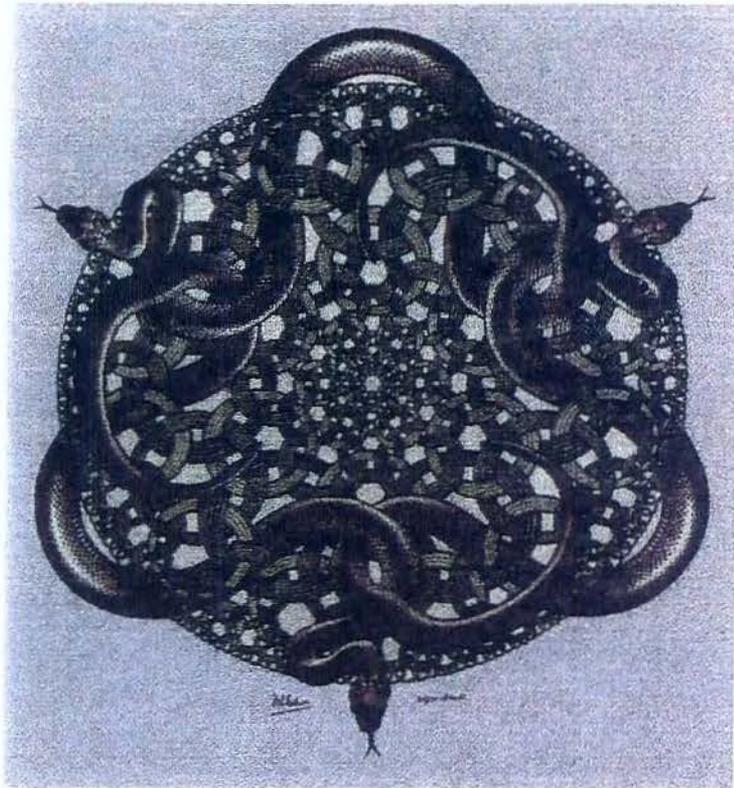


Figura Z
M.C. Escher - Snakes

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, Sérgio. GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **Um estudo geométrico das transformações elementares**. São Paulo, IME-USP, 1996.
- BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo Padrões em Mosaicos**. Atual Editora. São Paulo, 1993.
- BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo Padrões Pitagóricos**. Atual Editora, São Paulo, 1993.
- BASSANEZI, R.C; BIEMBENGUT, M.S. **A Gramática dos Ornamentos e a Cultura Árica**. Unicamp-SP, 1987.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher. 3ª reimpressão, 1981.
- DUGUNDJI, James. **Topology**. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1970.
- GERDES, Paulus. **Desenhos da África**. Vivendo a Matemática. Editora Scipione, 1990.
- GERDES, Paulus. BULAFO, Gildo. **Sipatsi – Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane**. Instituto Superior Pedagógico. Moçambique, 1994.
- GRECO, G.H. **La grammatica degli ornamenti: ornamenti piani e loro gruppi di simetria – Matematiche Complementari**. Trento 1980.
- GRÜNBAUM, B. SHEPHARD, G. C. **Tilings and Patterns**. Freeman, San Francisco, 1987.

- HERSTEIN, I. N. **Tópicos de Álgebra**. Editora da Universidade de São Paulo, e Editora Polígono, 1970.
- IMENES, Luiz Márcio. **Geometria dos Mosaicos**. Vivendo a Matemática. Editora Scipione, 1987.
- JABLAN, S. V. **Theory of Symmetry and Ornament**. APXAIA, Belgrade, 1984.
- KLINTOWITZ, ACOB. **Projeto Cultural Rhodya**. 1990. Acervo do Museu Universitário do Centro de Cultura e Arte. PUC-Campinas.
- LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigita. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano**. São Paulo, Atual, 1992.
- LIMA, Elon Lages. **Isometria**: Rio de Janeiro, SBM, 1996.
- MARTIN, G. E. **Transformation Geometry**. An introduction to symetry. Springer Verlag, Berlim, Hildelberg, New York, Tokio, 1982.
- RIBEIRO, Berta G. **Dicionário do artesanato indígena**. Editora da Universidade de São Paulo, 1994.
- WEYL, Hermann. **Simetria**. EDUSP, São Paulo, 1997.

TABELA DE NOTAÇÃO

γ	Transformação do plano.
τ_v	Translação de vetor v .
$\rho_{0,\alpha}$	Rotação de ângulo α em torno do ponto O .
σ_A	Reflexão em torno do ponto A .
σ_r	Reflexão em torno da reta r .
$\omega_{r,v}$	Reflexão transladada.
I	Transformação identidade.
G	Grupo de transformações.
Σ	Grupo das isometrias.
Σ_p	Grupo das isometrias que fixam um ponto P .
$\varphi_p(\gamma)$	Componente rotatória de γ associada ao ponto P .
C_n	Grupo cíclico de ordem n .
D_n	Grupo diedral.
Ξ	Grupo das translações
φ_p	Homomorfismo $((\varphi_p : \Sigma \rightarrow \Sigma_p)$
$G_p = \{\varphi_p(\gamma); \gamma \in G\}$	Grupo homogêneo de G com respeito ao ponto P .
$G_p(Q) = \{\rho(Q) / \rho \in G\}$	Órbita de Q .
$R = \{\tau^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$	Reticulado unidimensional.
$R = \{\tau_1^n \tau_2^m(p) / n, m \in \mathbb{Z}\}$	Reticulado bidimensional.

ANEXOS

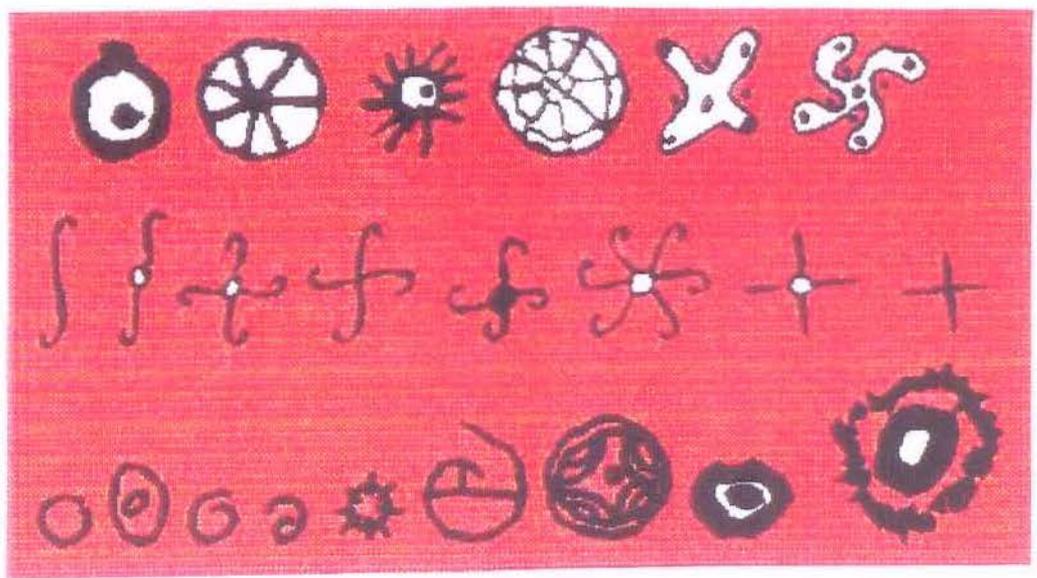


Figura A 1: Variações do símbolo do sol (Paleolítico e Neolítico e Idade do Bronze).

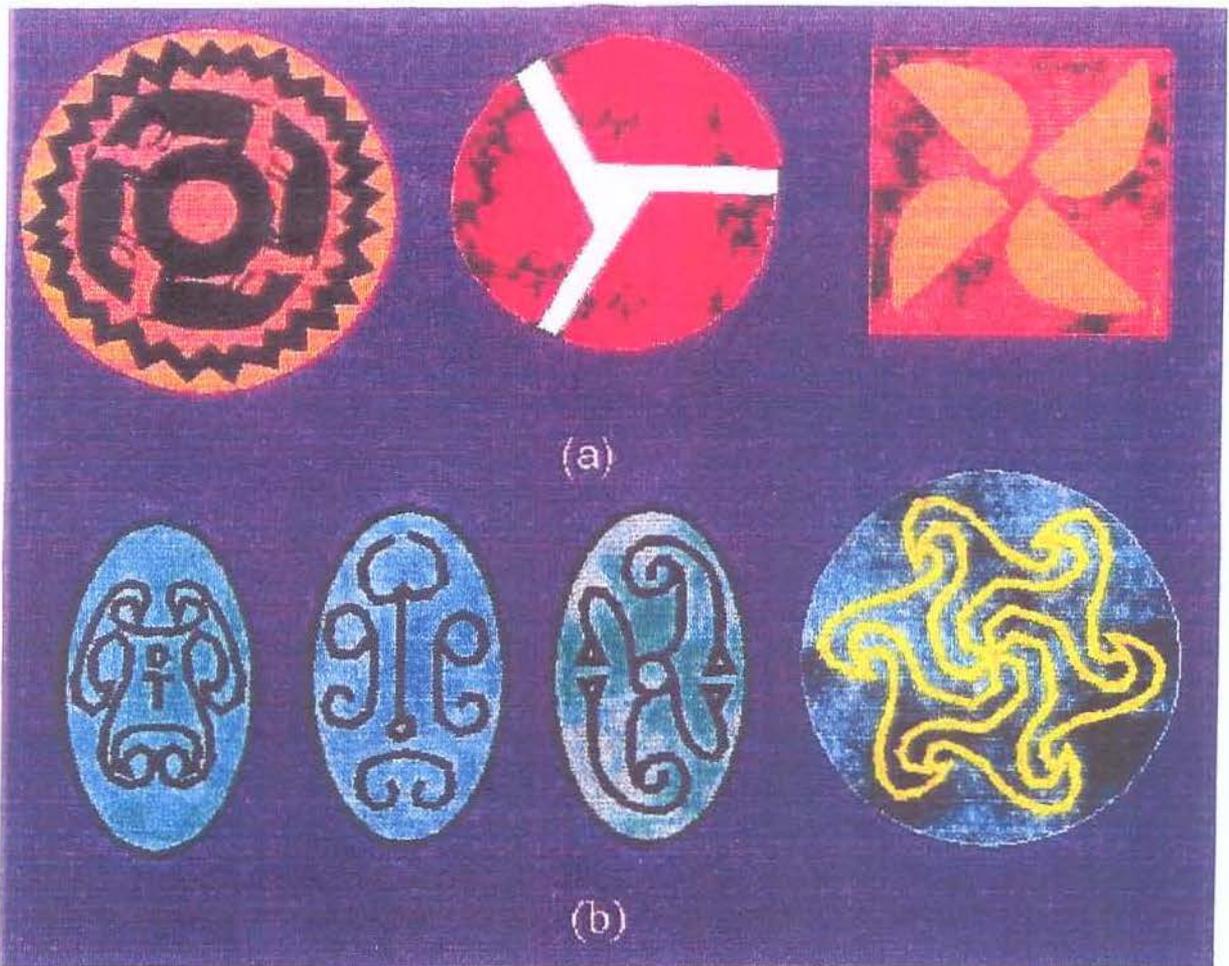


Figura A 2: Exemplos de rosetas do tipo Cn e Dn da arte Egípcia; a) pré-dinastia; b) dinastia.

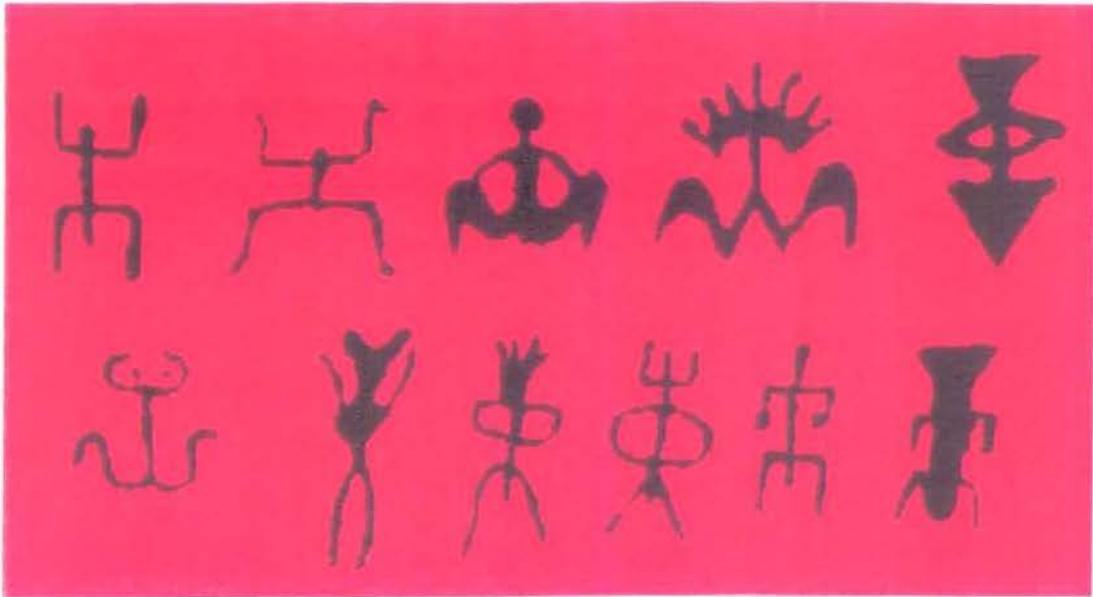


Figura A 3: Figuras humanas estilizadas com simetria D1; períodos paleolítico e neolítico da Itália e Espanha.

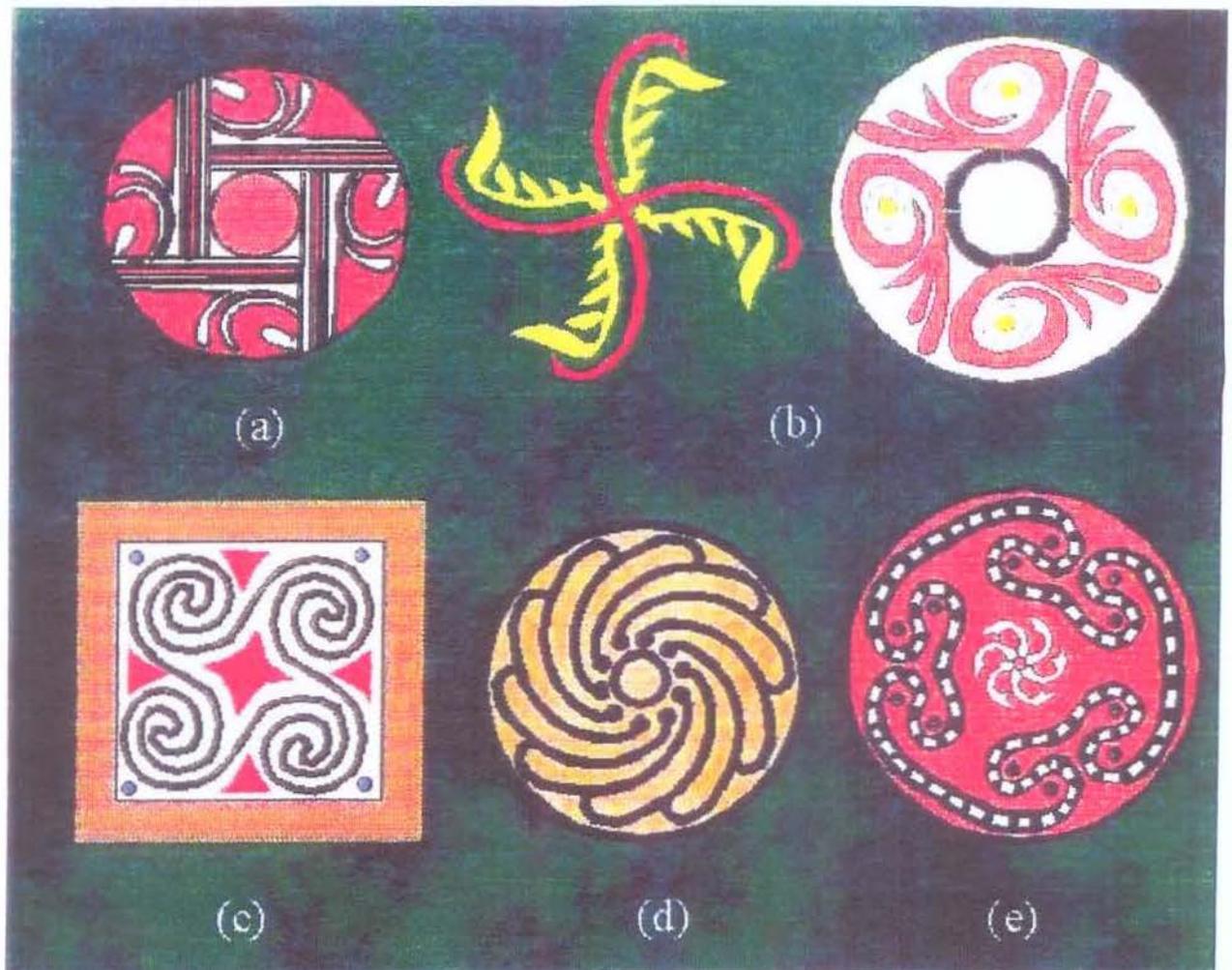


Figura A 4: Exemplos de rosetas da arte Européia; a) C4: neolítico – Romênia; b) C4: Creta (2.500 a.C.); c) C4: Micena; d) C10: Creta; D3: Micena.

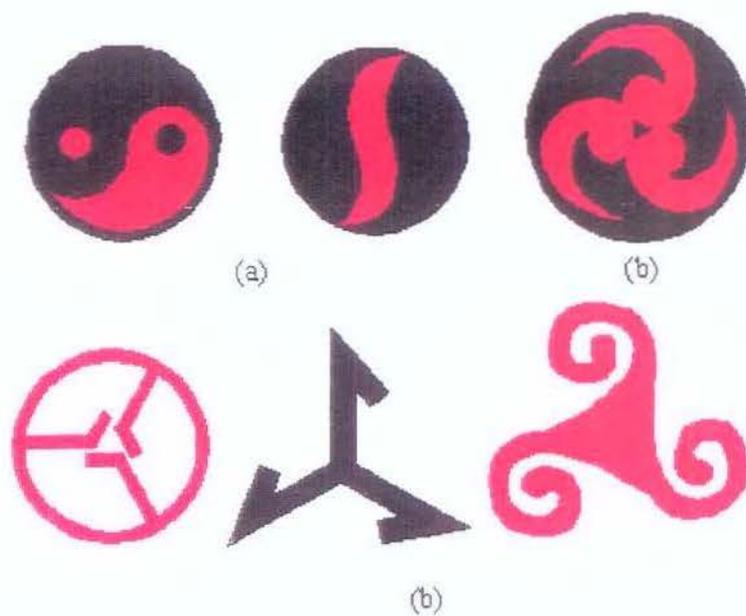


Figura A 5: Variações do símbolo chinês "yang-yin" com grupo de simetria C_2 (a); triqueta (motivo) com grupo de simetria C_3 (b).

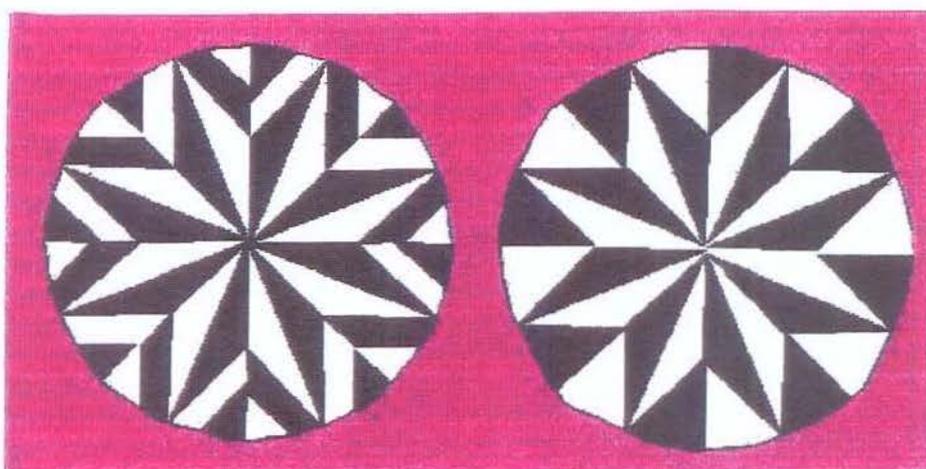


Figura A 6: Exemplos de rosetas antissimétricas com grupos de antissimetria DB/C_8 que, na teoria clássica de simetria, são tratados como rosetas com grupo de simetria C_8 (Hajji Mohammed; 5000 a.C.).

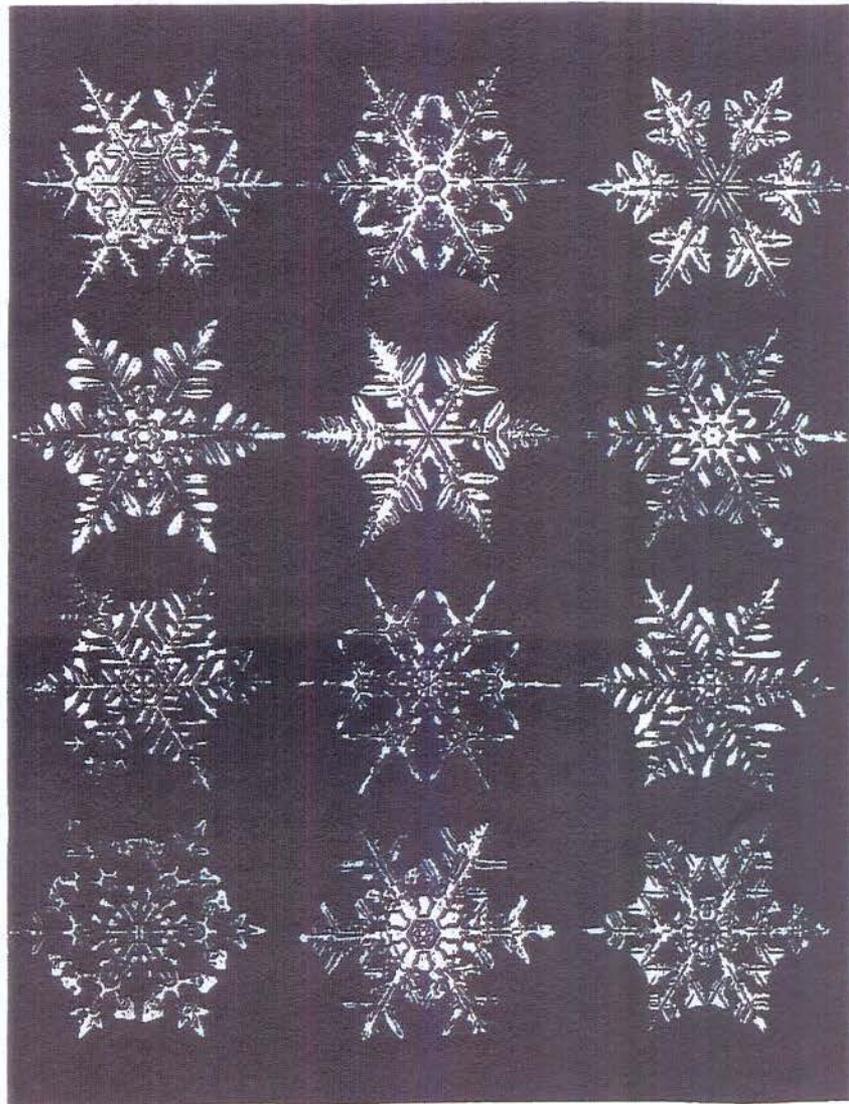


Figura A 7: Exemplos de rosetas do grupo C_{6h} cristais de neve.

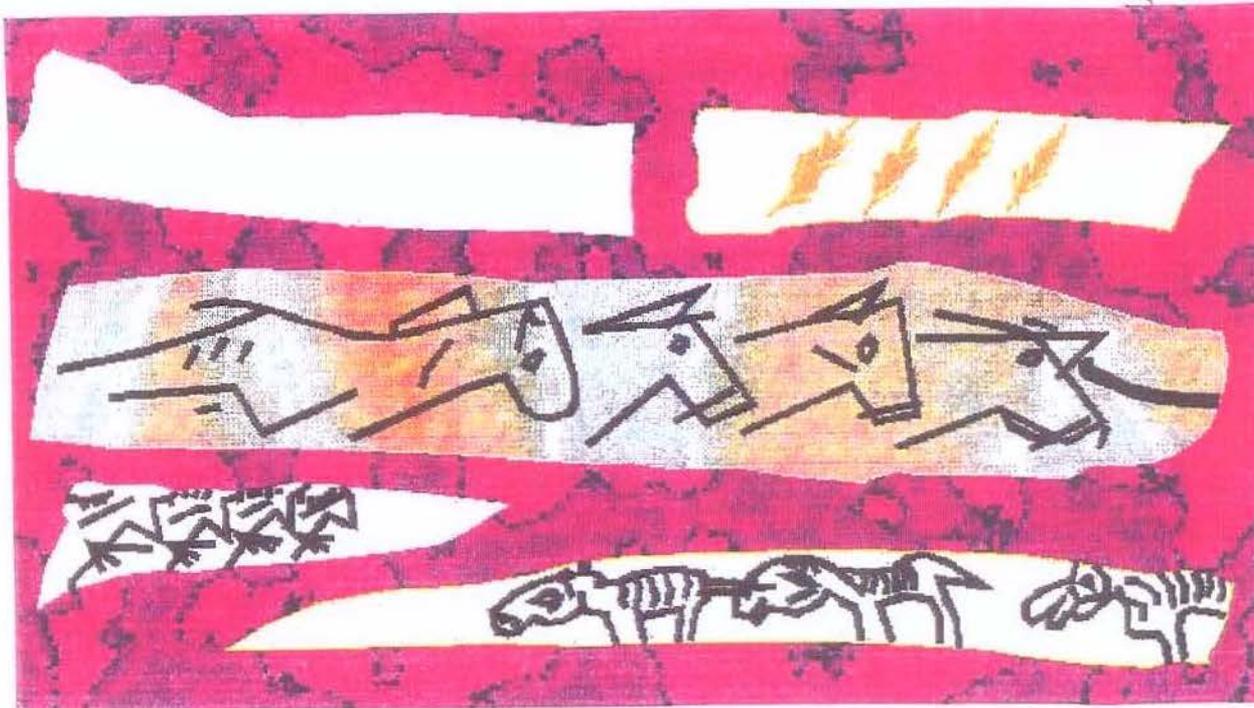


Figura A 8: Exemplos de faixas com o grupo de simetria F1 na arte Paleolítica.



Figura A 9: Exemplos de faixas com o grupo de simetria F2 com a aplicação de motivos Espirais: a) arte Neolítica (Yugoslávia); b) Egito.

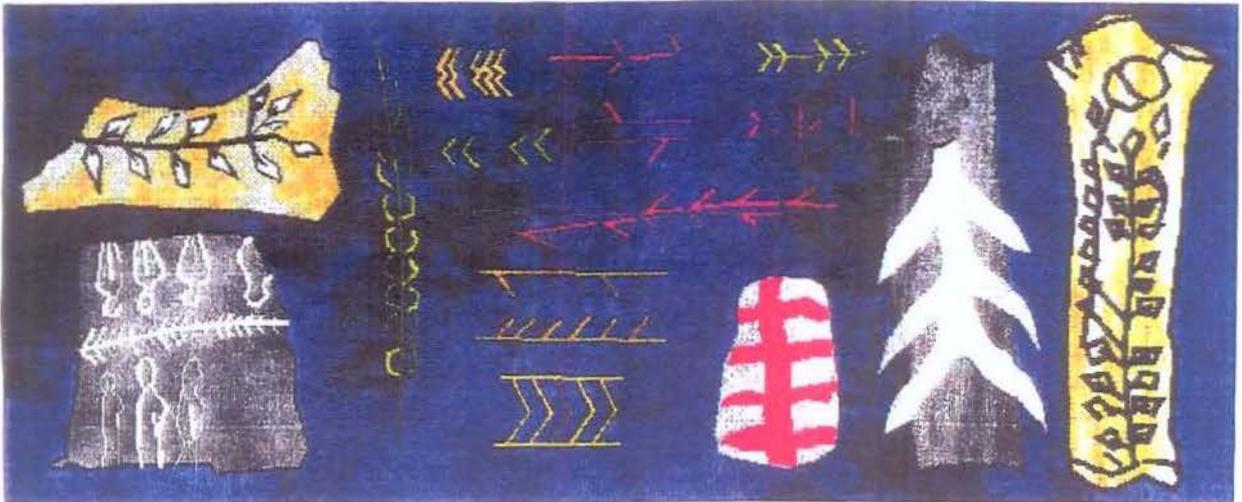


Figura A 10: Exemplos de faixas com o grupo de simetria F_1^1 na arte Paleolítica (Mas d'azil, La Madlene, 10000 a.C).

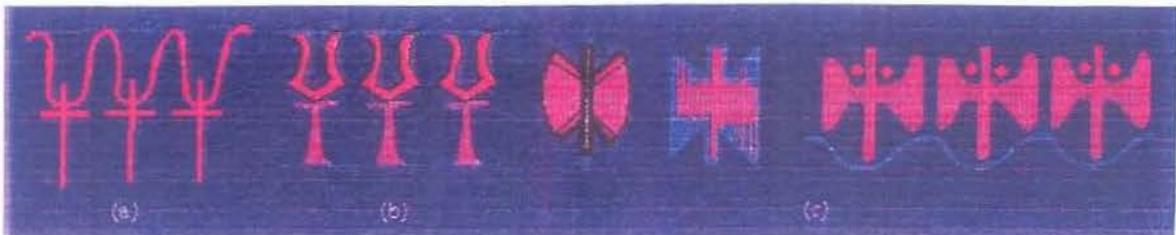


Figura A 11: Exemplos de faixas com o grupo de simetria F_2^2 na arte Neolítica: a) Hallaf (5000-4500 a.C). O motivo inicial sob a forma de uma cabeça de touro estilizada é similar ao símbolo egípcio "ankh"; c) Creta (motivo freqüentemente utilizado em ornamentos gregos recentes).

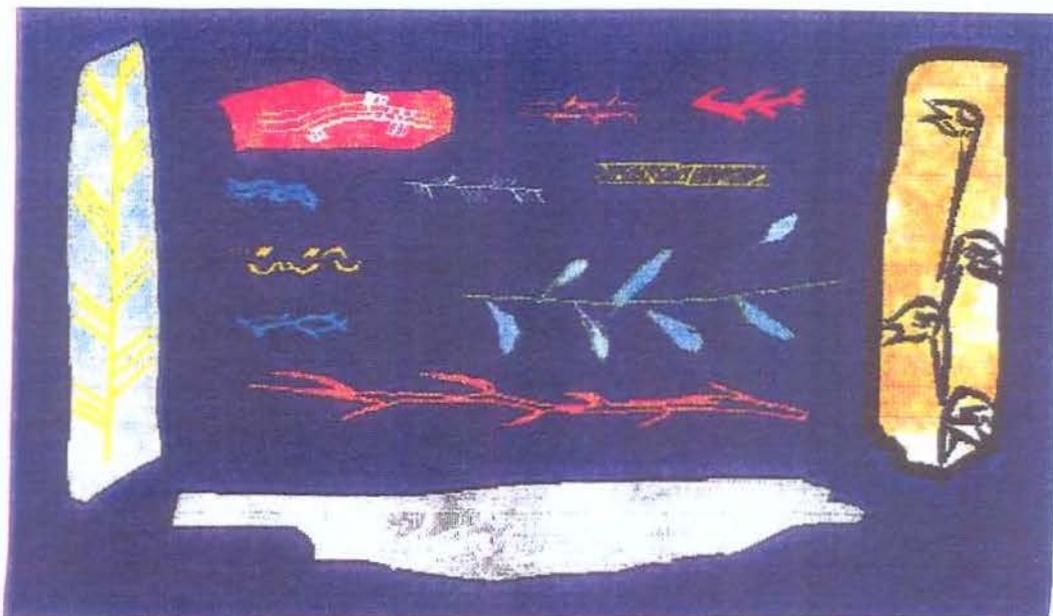


Figura A 12: Exemplos de faixas com o grupo de simetria F_2^4 na arte do Paleolítico Anterior e Neolítico recente (Fontarnaud-Lugasson, Le Placard, cerca De 15000-8000 a.C).



Figura A 13: Exemplos de faixas com o grupo de simetria E_2^2 no Paleolítico (10000 a.C) E Neolítico.

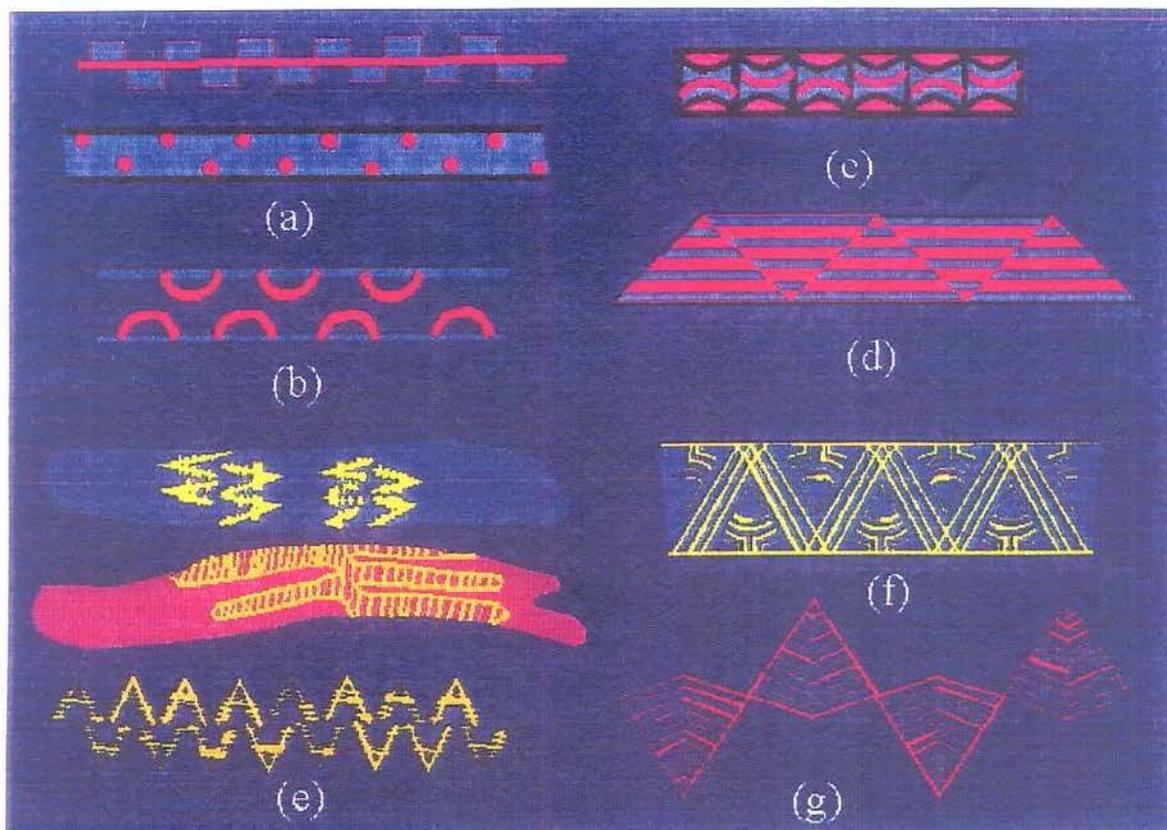


Figura A 14: Exemplos de faixas com o grupo de simetria E_3^3 na arte Neolítica: a) Neolítico Europeu recente; b) Catal Hujuk (6400-5800 a.C); c) Hallaf (6000 a.C); d) Hasuna, Iraque; e) Magelose (7000-6500 a.C); f) Paquistão (3000 a.C); g) período pré-dinástico do Egito (4200-3600 a.C).

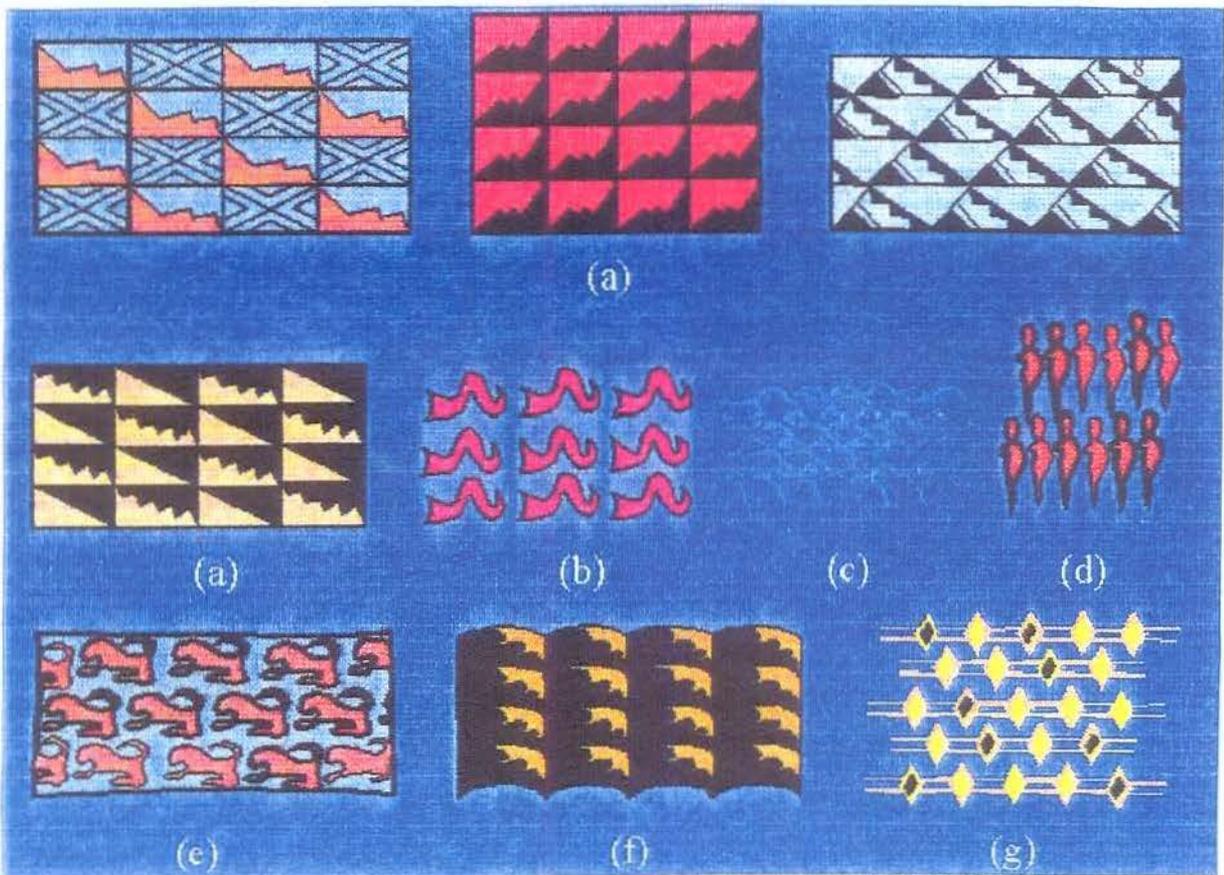


Figura A 15: Exemplos de ornamentos do grupo de simetria p1: a) Hacilar (5700-5000 a.C.); b) Yugoslávia (5000 a.C.); c) Paquistão (3000 a.C.); d) cultura Nagda, Egito (3600-3200 a.C.); e) período pré-dinastia do Egito; f) arte pré-Colombiana do Peru; g) arte étnica da África.



Figura A 16: Exemplos de ornamentos da arte Paleolítica com simetria do grupo p2 (12000-10000 a.C.): a) Mezina, ex-União Soviética; b) paleolítico do oeste Europeu; c) espiral dupla, Mal'ta, ex-União Soviética; d) aplicação do motivo da espiral dupla, Isturiz; e) arte Paleolítica da Europa.

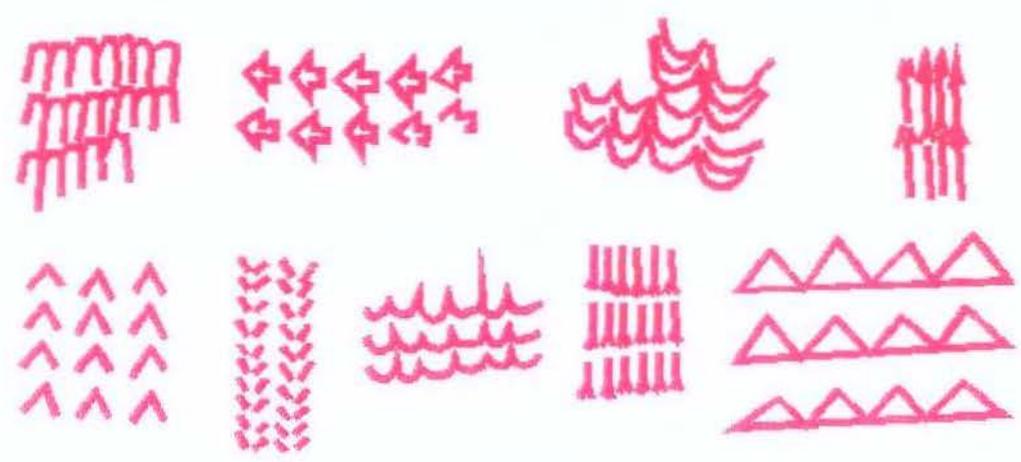


Figura A 17: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria pm da arte paleolítica: (cavernas da Romênia).

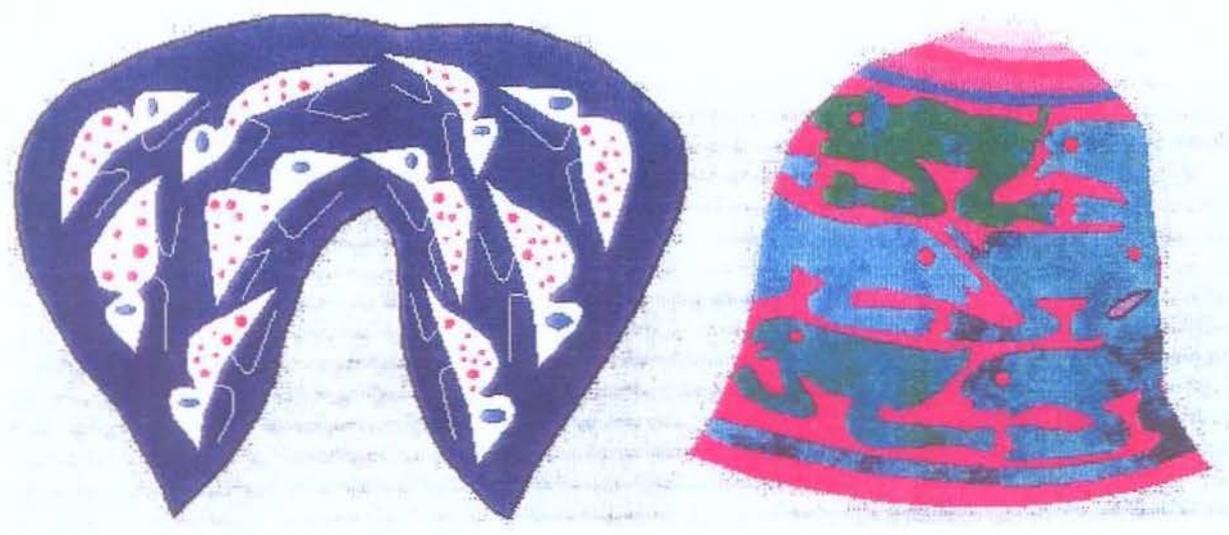


Figura A 18: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria pg da arte ornamental da África.



Figura A 19: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria pmg na arte Neolítica do Oriente Médio (6000 a.C) e na arte da pré-dinastia e período dinástico do Egito.

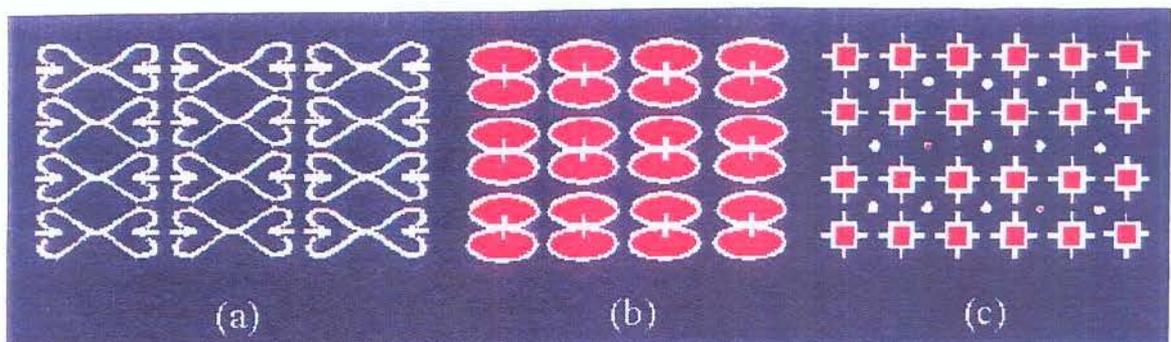


Figura A 20: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria pmm do período imperial do Egito, b e c) arte étnica da África.



Figura A 21: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria pgg: a) Colombia (800-1500); b) arte pré-Colombiana (Peru); c) arte étnica da Oceania.

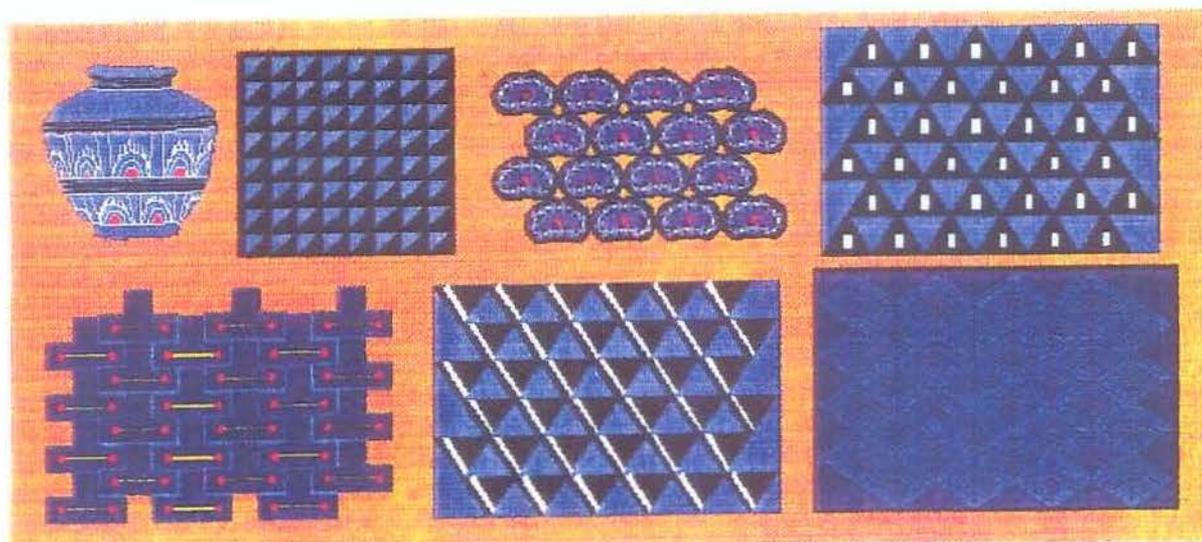


Figura A 22: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria cm na arte Neolítica (Mohenjo Daro, Nínive, Tepe Aly, cerca de 6000-3500 a.C.).

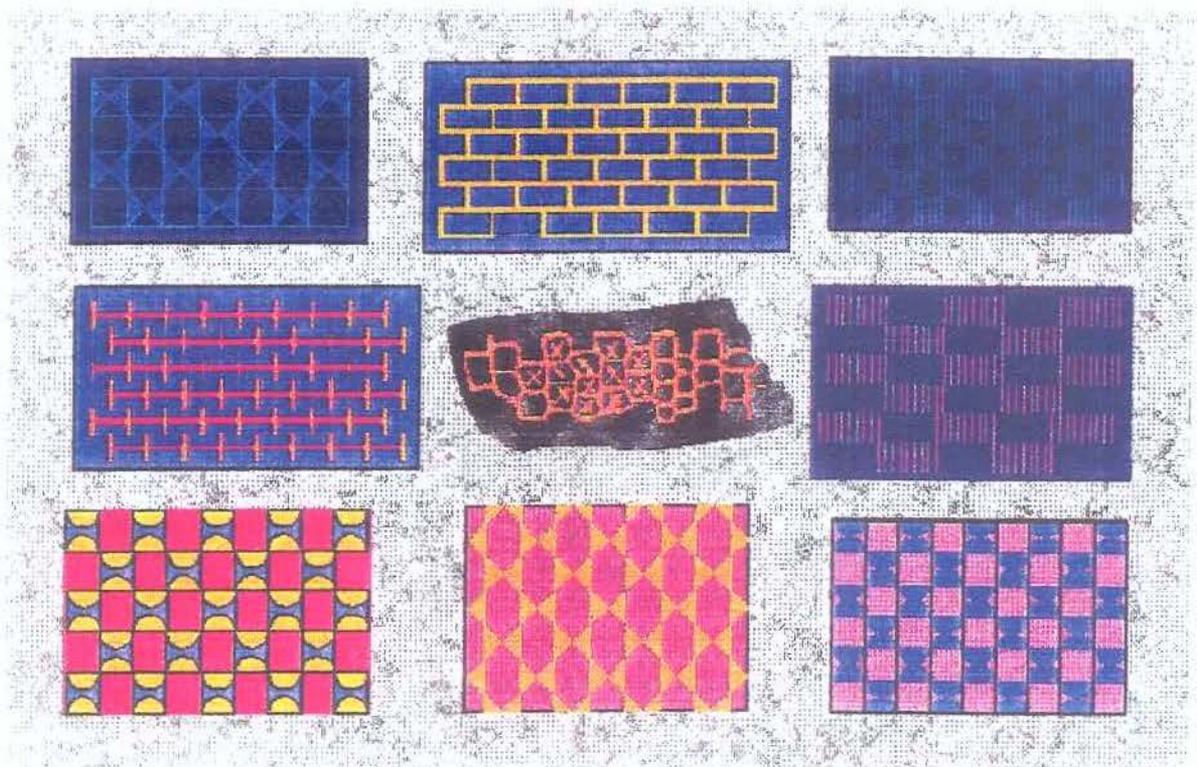


Figura A 23: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria cmm na arte Neolítica Do Oriente Médio (Hallaf, Catal Hujuk).

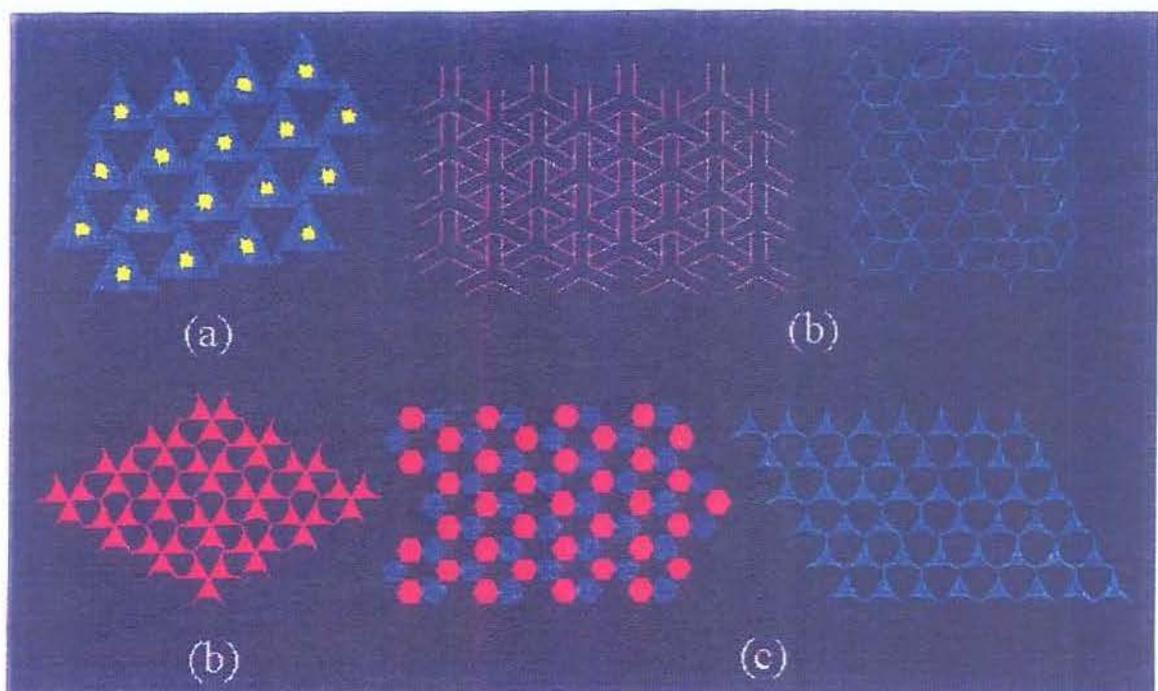


Figura A 24: Exemplos de ornamentos com grupos de simetrias: a) $p3$; b) $p31m$; c) $p3m1$.

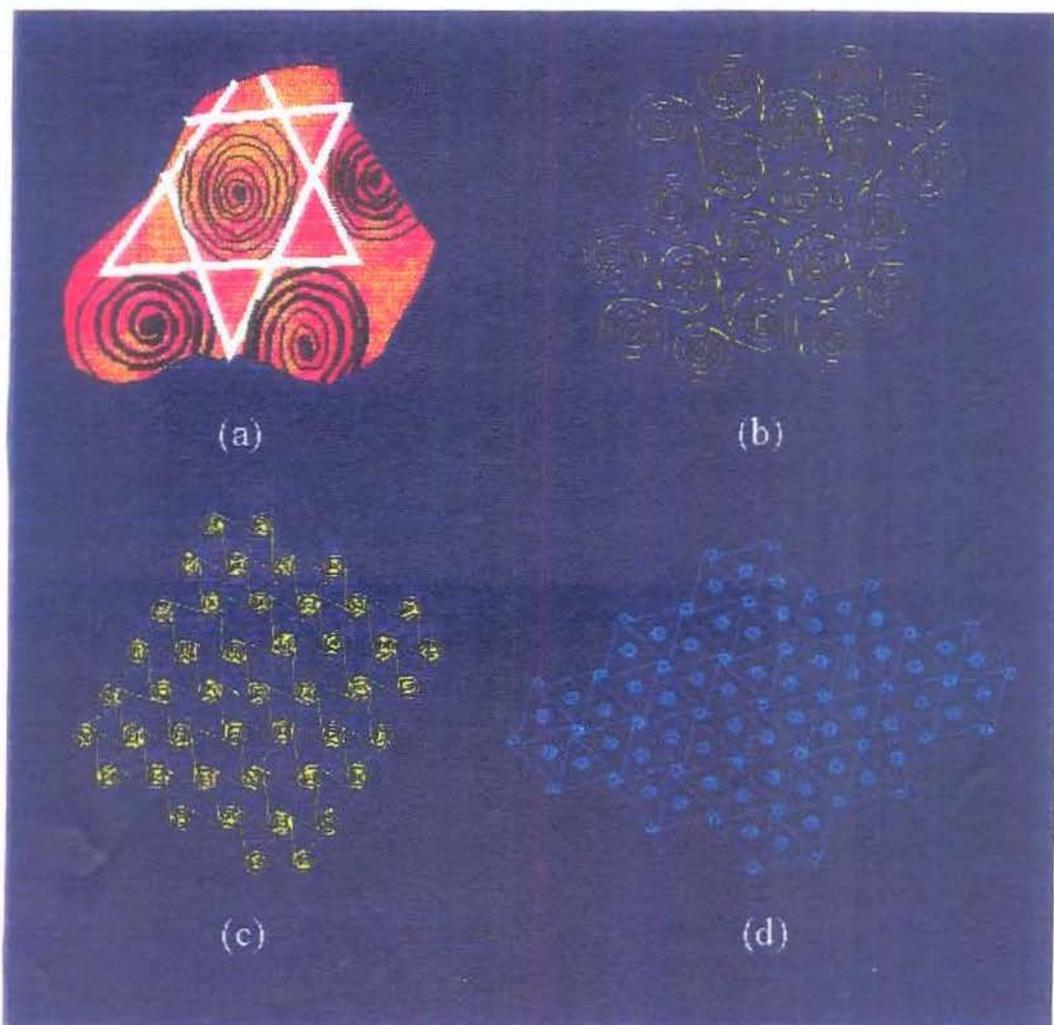


Figura A 25: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria $p6$: a) Butmir (4000 a.C);
b) Ciclades (2500 a.C); Creta e Egipto.

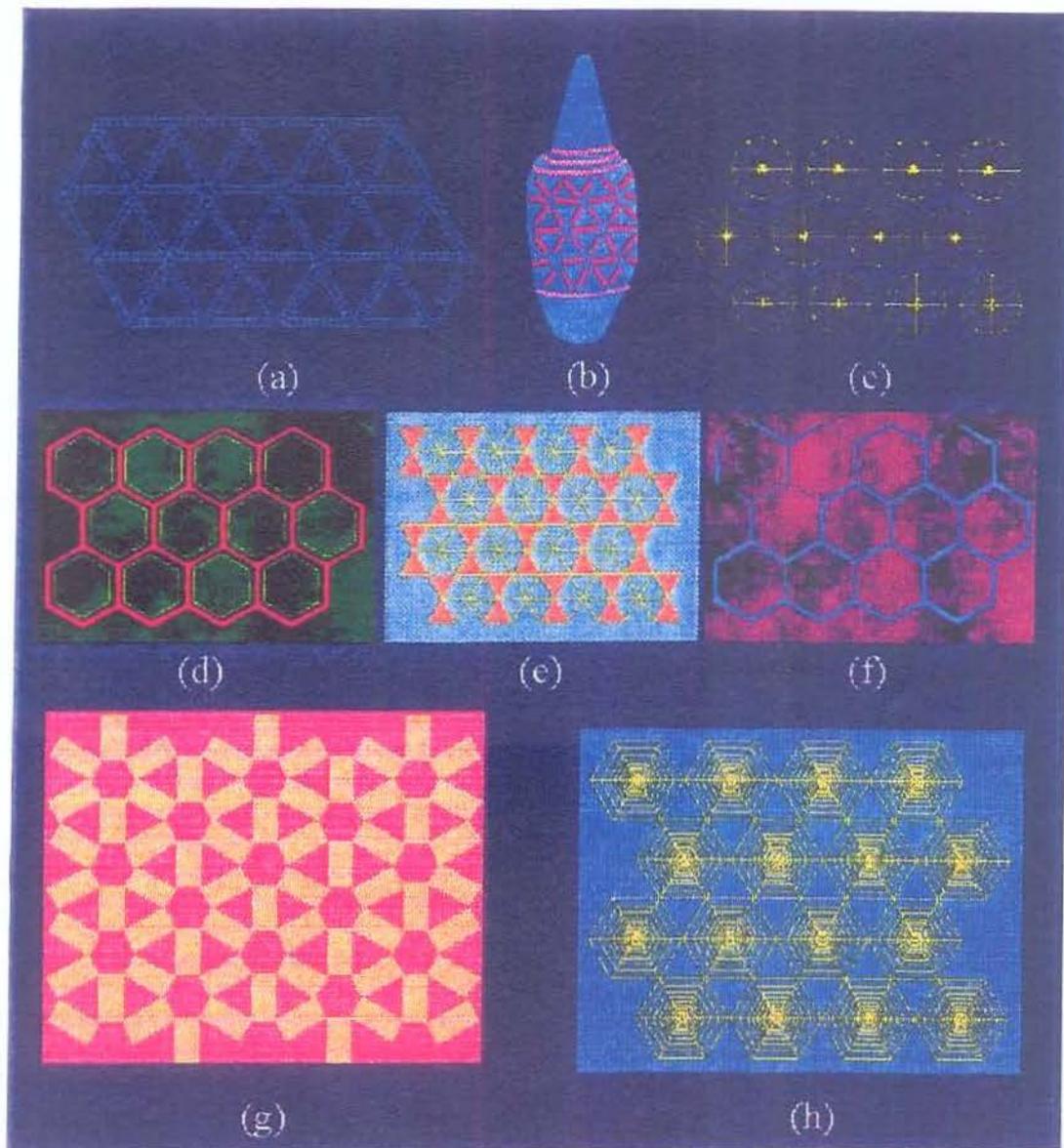


Figura A 26: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria $p6m$: a) Egito, período dinástico recente; b) Sakara (2680 a.C.); c) Egito (1450 a.C.); d) Tepe Duran (6000 a.C.); e) Susa (6000 a.C.); f) Samara (5000 a.C.); g) Oriente Médio (5000-4000 a.C.); h) mosaico Greco-Romano.



Figura A 27: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria $p4$: a) Yugoslávia (5500-5000 a.C); cultura Egípcia; c) cultura Indiana; d) arte étnica Africana.

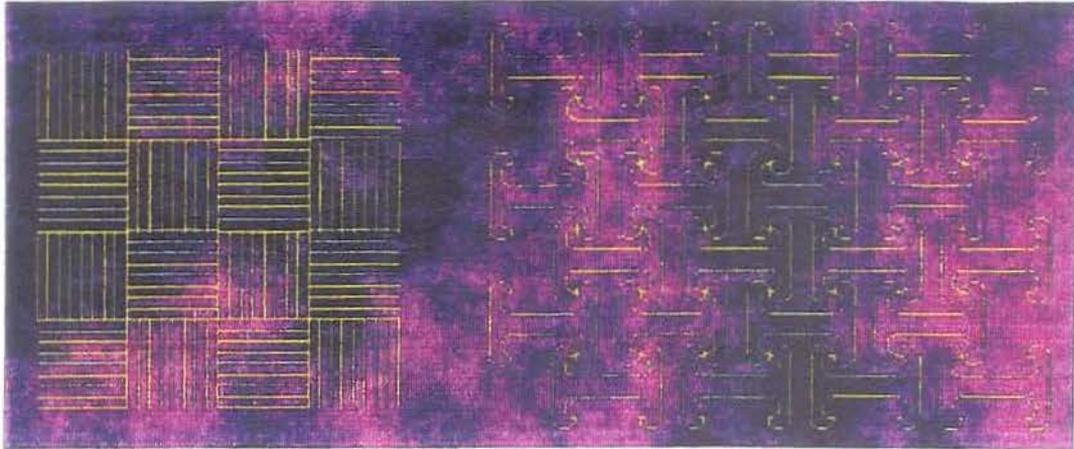


Figura A 28: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria $p4g$ na arte do período dinástico do Egito.

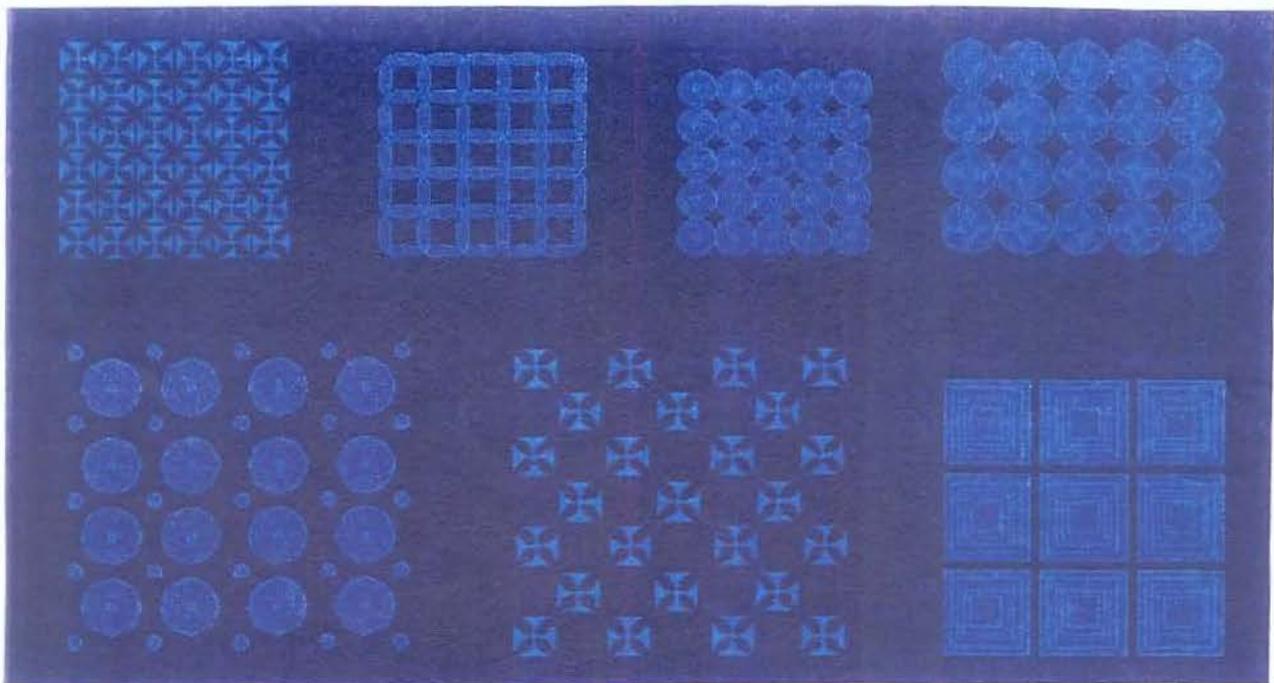


Figura A 29: Exemplos de ornamentos com o grupo de simetria $p4m$ na arte do período pré-dinástico do Egito.