

EQUAÇÕES DE ONDA ASSOCIADAS AO GRUPO DE FANTAPPIÉ-de SITTER

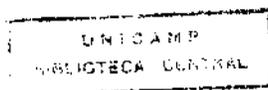
Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Eduardo Alfonso Notte Cuello e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 22 de maio de 1996

Prof. Dr. Edmundo Fernandes de Oliveira
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências em Matemática Aplicada.

IMECC – UNICAMP



Tese defendida e aprovada em, 22 de maio de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



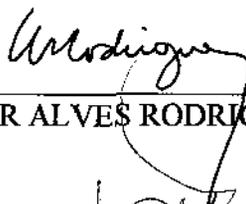
Prof (a). Dr (a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR



Prof (a). Dr (a). GUILLERMO GERARDO CABRERA OYARZUN



Prof (a). Dr (a). MÂRCIO JOSÉ MENON



Prof (a). Dr (a). WALDYR ALVES RODRIGUES JR.



Prof (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Este trabalho é dedicado à Eugenia,
minha esposa. pelo apoio e compre-
ensão de todos estes anos.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira pela disponibilidade e a impecável orientação deste trabalho.

Agradeço a todas pessoas envolvidas, direta ou indiretamente na realização deste trabalho, em particular ao Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr. pela disponibilidade em atender-me continuamente.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria realizado.

Finalmente, agradeço a Eugenia pela infinita paciência e pelo seu apoio durante o período de doutorado.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar as equações diferenciais associadas ao grupo de Fantappiè-de Sitter, o qual é isomorfo ao grupo das pseudorotações pentadimensionais. Apresentamos uma nova construção dos operadores de Casimir para o grupo de Fantappiè-de Sitter, obtemos as relações de comutação e as respectivas equações diferenciais. Estas equações diferenciais resultantes são discutidas e resolvidas em coordenadas esféricas. A partir da equação diferencial de segunda ordem, a qual é associada à equação de Klein-Gordon no universo de de Sitter, obtemos uma equação diferencial de primeira ordem, linear nos momentos, a qual é associada à equação de Dirac no universo de de Sitter e finalmente resolvemos dois casos particulares desta equação.

Abstract

The aim of this thesis is to study the differential equations associated to the Fantappié-de Sitter group, which is isomorphic to the 5-dimensional pseudo-rotation group. We present a new construction of the Casimir invariant operators for the Fantappié-de Sitter group and we obtain the commutation relations and the respective partial differential equations. These partial differential equations are discussed and solved using spherical coordinates with to respect the second order partial differential equation, which is associated to the Klein-Gordon equation in the de Sitter universe, we obtain a partial differential equations of first order linear in the moment, which is associated to the Dirac equation in the de Sitter universe. We discuss finally two particular cases.

Índice

Introdução	i
Capítulo 1. Operadores de Casimir	1
1.1. Caracterização do universo de de Sitter.....	1
1.2. Coordenadas ortogonais e derivadas	3
1.3. O grupo de Fantappiè-de Sitter	6
Capítulo 2. Relações de comutação	11
2.1. Relações de comutação	11
2.2. Operadores de Casimir em coordenadas esféricas	15
Capítulo 3. Equações Diferenciais	18
3.1. Equação diferencial parcial de segunda ordem	18
3.2. Equação diferencial parcial de quarta ordem	22
3.3. A equação de Klein-Gordon generalizada	24
Capítulo 4. Os Harmônicos esféricos espinoriais	31
4.1. Os grupos $SO(3)$ e $SO(2)$	32
4.2. Os harmônicos esféricos	42
4.3. Equação de Laplace projetiva	48
Capítulo 5. Equação de Dirac	54
5.1. Fatoração do operador de segunda ordem	54
5.2. A equação de Dirac em coordenadas esféricas	57
5.2.1. Resolução do caso limite	63
5.2.2. Resolução do caso estacionário	66
Conclusão	69
Bibliografia	71

INTRODUÇÃO

O espaço de de Sitter é um espaço-tempo curvo que juntamente com o espaço anti-de Sitter constituem os únicos espaços-tempo curvos maximalmente simétricos [1].

O grupo de movimentos¹ do espaço de de Sitter (anti-de Sitter) nele mesmo é o grupo com dez parâmetros $SO(4,1)$ [$SO(3,2)$] das transformações que mudam a pseudo-hiperesfera de \mathbf{R}^5 nela mesma, conhecido como grupo de de Sitter [anti-de Sitter].

O espaço de de Sitter foi introduzido em 1917 por W. de Sitter [2] como sendo solução das equações de Einstein no qual, um mundo quadridimensional pode ser representado por um hiperbolóide de uma só camada num espaço pentadimensional que é projetado num espaço euclideano de quatro dimensões por meio de uma projeção estereográfica.

Devido a sua simplicidade e importância o universo de de Sitter foi (e é) objeto de vários estudos, dentre os quais podemos mencionar o estudo efetuado por Castelnuovo [3] no qual é obtida uma fórmula para o efeito Doppler. Tal fórmula expressa, a partir de uma soma algébrica, o efeito Doppler propriamente dito e o efeito Doppler de de Sitter, proporcional ao quadrado da distância do astro. Também é de se mencionar o estudo de Dirac [4] no qual discute-se a equação de onda do elétron bem como é obtida uma equação de segunda ordem eliminando-se os coeficientes matriciais que aparecem nas equações de primeira ordem.

Não temos a intenção (nem a pretensão) de listar todos os trabalhos [5] envolvendo estudos sobre o universo de de Sitter porém alguns destes trabalhos constituem uma sequência cronológica de tais estudos e serão citados. Vários são os artigos onde os

¹ Discutiremos somente o espaço de de Sitter e o grupo a ele associado. isto é $SO(4,1)$.

autores discutem as chamadas equações de onda² no universo de de Sitter. Alguns destes estudam o universo de de Sitter do ponto de vista de partículas elementares³ [6] e outros olhando para a simetria esférica em relatividade geral [7,8]. Em [9] é apresentada uma representação pentadimensional das equações dos campos elétrico e eletromagnético num espaço-tempo curvo que é identificada com o formalismo proposto por Dirac. Takeno [10] discute a generalização das transformações de Lorentz espaciais no espaço-tempo de de Sitter. Raje [11] discute a equação de onda de um méson no espaço-tempo de de Sitter e obtém a equação de segunda ordem usando um método proposto por Kemmer⁴ onde, também aqui, são eliminadas as matrizes que aparecem na equação de onda linear. A equação obtida por Raje é essencialmente a mesma proposta formalmente por Goto [12]. Enfim, mencionamos o artigo de Snyder [13] onde é discutida a quantização no espaço-tempo de de Sitter.

Por outro lado Gürsey [14,15], a partir de um estudo sistemático, discute o grupo de de Sitter, apresentando a estrutura do grupo, relações de comutação, invariantes e os geradores do grupo que são operadores de rotação num espaço euclideano pentadimensional. Apresenta, também os operadores de Casimir e conclui mostrando que uma partícula no universo de de Sitter não tem definida nem a massa nem o spin mas tem definidos os autovalores associados aos dois operadores invariantes.

Tagirov [16] resolve a equação de d'Alembert no espaço-tempo de de Sitter obtendo a solução de uma equação diferencial de segunda ordem, como um produto de polinômios de Gegenbauer e harmônicos esféricos. Este tema também foi discutido por Börner e Dürr [17] isto é, deriva-se uma equação de autovalores para o operador de Casimir de segunda ordem. Roman e Aghassi [18] constroem equações da mecânica

² Chamamos equação de onda, as equações de d'Alembert, Klein-Gordon e Dirac.

³ F. Finkelstein, *Spacetime of the elementary particles*, J.M. Phys. **1**, 440 (1960).

⁴ Proc. Roy. Soc. Lond. **A173** (1939).

quântica para o movimento de uma partícula com um dado spin.

Enfim, Fulling [19] apresenta e discute os aspectos da teoria quântica de campos em espaços curvos onde o espaço-tempo de de Sitter é um particular espaço-tempo e Birrel e Davis [20] discutem várias parametrizações do espaço-tempo de de Sitter onde são apresentados, por exemplo, o universo de Bondi e Gold [21] e Hoyle [22] o qual cobre a metade da variedade de de Sitter em contraste com Tagirov [16] que estuda o universo de Einstein usando um tempo conforme onde as coordenadas cobrem toda a variedade de de Sitter.⁵

Agora, por outro lado, um modo diferente de se estudar o problema cosmológico é a partir da teoria dos modelos hipersféricos, associados a números inteiros, proposta por Fantappiè [23] e aperfeiçoada por Arcidiacono [24,25]. Nesta teoria é necessário distinguir o espaço-tempo absoluto (com curvatura constante) lugar efetivo dos eventos físicos, do espaço-tempo relativo (tangente) onde cada observador localiza e vê os fenômenos. Para tal usa-se uma representação chata do universo de de Sitter sobre um de seus espaços tangentes. Entre as infinitas representações usa-se a representação geodésica de Beltrami [26] onde as geodésicas do espaço-tempo hipersférico correspondem às linhas retas do espaço-tempo (tangente) chato onde se localizam os observadores. Deve ser notado que representações geodésicas do universo de de Sitter por projeção⁶ sobre uma variedade chata também foi considerada por P. Duval⁷, G. Castelnuovo⁸, V. Benza and P. Cardirolo⁹ e que as fórmulas explícitas da projeção foram obtidas por Arcidiacono¹⁰. Logo, o grupo de movimento em si mesmo do uni-

⁵ As referências [5,19,20] apresentam uma bibliografia bastante completa dos estudos envolvendo o universo de de Sitter.

⁶ B. E. Eichinger. *Projective Spacetime*. *Found. Phys.* **7**, 773 (1977).

⁷ *Philos. Mag.* **47**, 930 (1924).

⁸ ver ref. 3.

⁹ *Nuovo Cimento* **62A**, 175 (1981).

¹⁰ *Rend. Accad. Naz. Lincei* **20**, 463 (1956).

verso de de Sitter é representado pelo assim chamado grupo de Fantappiè-de Sitter, isomorfo ao grupo das pseudorotações pentadimensionais, isto é pelas projeções do espaço tangente que muda em si mesmo a quádrlica absoluto de Cayley-Klein [25].

Recentemente, Arcidiacono e Capelas de Oliveira discutiram a equação de Laplace [27] e a equação de d'Alembert [28,29] no universo de de Sitter, onde as soluções são dadas em termos de polinômios ultraesféricos. Mais recentemente, Capelas de Oliveira [30] discutiu a equação de onda generalizada (equação de d'Alembert generalizada) para um problema local. Finalmente, Arcidiacono, E. Capelas de Oliveira e E. A. Notte Cuello [31,32] discutiram a equação de Klein-Gordon no universo de de Sitter utilizando a mesma metodologia proposta por Arcidiacono.

A presente tese tem por objetivos: Apresentar uma nova construção dos operadores invariantes de Casimir para o grupo de Fantappiè-de Sitter, obter as relações de comutação e as respectivas equações diferenciais associadas aos operadores de Casimir. A equação de onda de segunda ordem, obtida a partir do operador de Casimir de segunda ordem, é associada à equação de Klein-Gordon no universo de de Sitter no sentido que quando fazemos tender para zero a curvatura do espaço, esta equação tende para a equação de Klein-Gordon no espaço chato. Finalmente, a equação de segunda ordem é fatorada em duas equações de primeira ordem, lineares nos momentos, que são do tipo Dirac no universo de de Sitter.

O presente trabalho está disposto da seguinte maneira: No primeiro capítulo apresentamos uma caracterização do universo de de Sitter, discutimos a passagem da formulação pentadimensional (coordenadas homogêneas) para a formulação quadridimensional (coordenadas de Beltrami), introduzimos o chamado grupo de Fantappiè-de Sitter e obtemos expressões explícitas para os operadores de Casimir. No segundo capítulo

introduzindo um sistema de coordenadas esféricas, obtemos as relações de comutação e a forma explícita dos operadores de Casimir nestas coordenadas. No terceiro capítulo discutimos e resolvemos as equações diferenciais associadas aos operadores de Casimir de segunda e quarta ordens bem como a equação de Klein-Gordon generalizada. No capítulo quatro apresentamos os harmônicos esféricos espinoriais, os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ e os espinores, com os quais discutimos a equação de Laplace projetiva e, enfim, no capítulo cinco é fatorada a equação de segunda ordem em duas equações de primeira ordem, lineares nos momentos, equação de Dirac, e utilizando a técnica introduzida no capítulo anterior, resolvemos tal equação para dois casos particulares. Finalmente apresentamos as conclusões.

Capítulo 1

Operadores de Casimir

Neste capítulo caracterizamos o universo de de Sitter, usando a representação geodésica de Beltrami. discutimos a passagem da formulação pentadimensional para a formulação quadridimensional; obtemos a relação entre as coordenadas homogêneas e as coordenadas ortogonais bem como a relação entre as respectivas derivadas. Discutimos o grupo de Fantappiè-de Sitter e obtemos as fórmulas explícitas para os dois operadores de Casimir.

1.1 Caracterização do universo de de Sitter

A estrutura do universo, principalmente em escala cosmológica ou seja, o chamado problema cosmológico, está longe de ser resolvido, devido tanto às dificuldades teóricas quanto à falta de dados astronômicos precisos em tal escala. Um modelo cosmológico relativístico necessariamente satisfaz as equações de campo de Einstein, um sistema, não linear, de dez equações diferenciais a derivadas parciais. Além do problema matemático inerente, a questão central da cosmologia relativista é determinar a distribuição de massa no universo, que não foi devidamente respondida pelas observações astronômicas.

Não obstante, vários modelos de universo têm sido propostos admitindo o princípio

cosmológico o qual impõe condições de isotropia ao espaço e à distribuição de matéria em escala cosmológica. O universo cilíndrico de Einstein (1917) foi o primeiro modelo de universo relativístico obtido, porém, trata-se de um universo estático incompatível com o efeito Hubble. Cerca de dois meses após, de Sitter publicou seu modelo de universo [2] como sendo um mundo quadridimensional que pode ser representado por um hiperbolóide de uma só camada num espaço pentadimensional que é projetado num espaço euclídeano de quatro dimensões por meio de uma projeção estereográfica. O universo dessiteriano está em expansão, portanto, compatível com o efeito Hubble. Entretanto, é desprovido de matéria, o que poderia invalidar sua utilização, contudo, o universo dessiteriano apresenta boa compatibilidade com as observações atuais [25].

Por outro lado, os modelos cosmológicos podem ser estudados via teoria de grupos [23], independente da teoria da relatividade geral, assim podemos associar ao universo de de Sitter um grupo de transformações como descrito abaixo.

Consideremos, no espaço vetorial real \mathbf{R}^5 , a forma quadrática $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_0^2$. O grupo das transformações lineares de \mathbf{R}^5 conservando esta forma quadrática é um grupo de Lie que possui quatro componentes conexas [33]. Seja G a componente conexa do elemento neutro ϵ . Este é o grupo que nós chamaremos de grupo de de Sitter. Também identificamos os operadores lineares de \mathbf{R}^5 às suas matrizes com respeito à base canônica de \mathbf{R}^5 . A álgebra de Lie \mathfrak{g} de G é o conjunto das matrizes da forma

$$M(a, b, \dots, k) = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & \epsilon & f & g \\ -b & -\epsilon & 0 & h & j \\ -c & -f & -h & 0 & k \\ -d & -g & -j & -k & 0 \end{bmatrix} \equiv M_{ab} \quad (1.1)$$

onde $a, b, \dots, k \in \mathbf{R}$.

Introduzindo, $A = M(1, 0, \dots, 0)$, $B = M(0, 1, \dots, 0)$, ..., $K = M(0, 0, \dots, 1)$, então

A, B, C, \dots, K é uma base de \mathfrak{g} , e $M(a, b, \dots, k) = aA + \dots + kK$.

De outro modo, o grupo de de Sitter é o grupo de transformações que muda a hiper-hiperbolóide de \mathbf{R}^5 em si mesmo. ou ainda, um grupo com dez parâmetros de pseudo-rotações em \mathbf{R}^5 , isto é : Dado $\xi \in \mathbf{R}^5$ e $x \in \mathbf{R}^4$ temos

$$\xi'_a = M_{ab}\xi_b$$

com

$$M_{ab}M_{ac} = \delta_{bc}$$

tal que

$$\xi'_a \xi'_a = \xi_b \xi_b$$

onde $a, b, c = 0, 1, 2, 3, 4$ e δ_{ab} é o delta de Kronecker.

O subgrupo com seis parâmetros para o qual

$$\xi'_\mu \xi'_\mu = \xi_\mu \xi_\mu$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ também induz

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu$$

no espaço chato, o chamado grupo de Lorentz homogêneo, que é um subgrupo do grupo de de Sitter. As quatro transformações restantes do grupo, as quais rodam ξ_4 em ξ_μ , induzem transformações não lineares dos x_μ as quais, no limite de $R \rightarrow \infty$ reduzem-se às translações no espaço-tempo chato [14].

1.2 Coordenadas ortogonais e derivadas

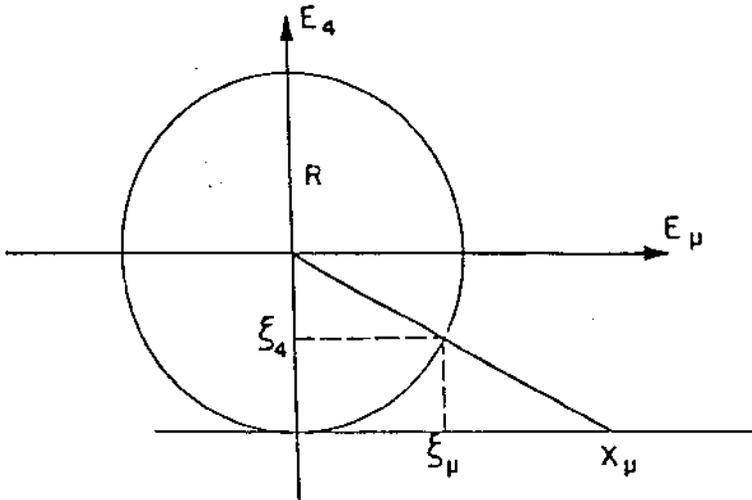
O espaço de de Sitter pode ser representado como a superfície de uma pseudo-esfera quadridimensional (de caráter hiperbólico numa direção) imersa num espaço penta-dimensional. Este espaço é descrito por cinco coordenadas $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_0$ conectadas

pela relação de normalização

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_0^2 = R^2 \quad (1.2)$$

onde R é o raio da pseudo-esfera.

Para ver como passamos da formulação pentadimensional às coordenadas ortogonais quadridimensionais que são funções coordenadas para a variedade de Sitter x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), consideramos a representação de Beltrami (representação geodésica) como na figura:



onde

$$x_\mu = R \frac{\xi_\mu}{\xi_4} \quad (1.3)$$

Introduzindo $\rho^2 = x^\mu x_\mu = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e usando a condição de normalização podemos escrever

$$\xi_4 = R / (1 + \rho^2 / R^2)^{1/2}.$$

Então, as relações para passar da formulação pentadimensional à formulação quadri-

dimensional são dadas por

$$\xi_4 = \frac{R}{A} \quad \text{e} \quad \xi_\mu = \frac{x_\mu}{A} \quad (1.4)$$

onde $A^2 = 1 + \rho^2/R^2$ e $A^2 = 0$ é o chamado horizonte dos eventos.

Para obter a relação entre as respectivas derivadas parciais, consideramos uma função homogênea de grau N nas cinco variáveis $\xi_A \cdot \varphi(\xi_A)$, e usando o teorema de Euler para funções homogêneas, obtemos

$$\xi_A \partial_A \varphi(\xi_A) = N \varphi(\xi_A)$$

onde $\partial_A = \partial/\partial \xi_A$. Usando a definição de função homogênea podemos escrever

$$\varphi\left(R \frac{\xi_4}{\xi_4}, R \frac{\xi_1}{\xi_4}, \dots\right) = \left(\frac{R}{\xi_4}\right)^N \varphi(\xi_A)$$

e finalmente obtemos a seguinte relação

$$R^N \varphi(\xi_A) = \xi_4^N \varphi(R, x_\mu) \quad (1.5)$$

onde o lado direito da equação é obtido a partir de $\varphi(\xi_A)$ com as seguintes identificações, $\xi_4 \rightarrow R$ e $\xi_\mu \rightarrow x_\mu$.

Derivando a equação (1.5) primeiro em relação a ξ_4 e depois em relação a ξ_μ obtemos, respectivamente

$$R \frac{\partial}{\partial \xi_4} \varphi(\xi_A) = A^{1-N} (N - x_\mu \partial_\mu) \varphi(R, x_\mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \varphi(\xi_A) = A^{1-N} \partial_\mu \varphi(R, x_\mu)$$

onde A é dado acima.

Introduzindo uma função $\psi(x_\mu)$ definida por

$$\psi(x_\mu) = A^{-N} \varphi(R, x_\mu)$$

nas equações anteriores, podemos, finalmente, escrever as relações entre derivadas, respectivamente, como segue

$$R \frac{\partial}{\partial \xi_A} \varphi(\xi_A) = \left(\frac{N}{A} - Ax_\mu \partial_\mu \right) \psi(x_\mu) \quad (1.6)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \varphi(\xi_A) = \left(A \partial_\mu + \frac{N}{AR^2} x_\mu \right) \psi(x_\mu). \quad (1.7)$$

Enfim, resolvemos o problema de como passar da formulação pentadimensional, ξ_A , para a formulação quadridimensional, x_μ . isto é, em coordenadas de Beltrami. As equações (1.6) e (1.7) representam a ligação entre estas duas formulações.

1.3 O grupo de Fantappié-de Sitter

A partir das relações envolvendo as derivadas nas duas formulações, discutidas na secção anterior, vamos, nesta secção, apresentar o chamado grupo de Fantappié-de Sitter e escrever seus dois operadores invariantes.

O grupo de Fantappié-de Sitter, isomorfo ao grupo das pseudorotações pentadimensional, é o grupo de movimento admitido por um espaço cosmológico com elemento de linha dado por

$$-ds^2 = A^2 dx_\mu dx_\mu = A^2 \left[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_0)^2 \right]$$

onde $x_0 = ict$ e $R^2 A^2 = R^2 + \rho^2 + x_0^2$ com $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Este espaço pode ser imerso num espaço-tempo chato pentadimensional, sendo os x_μ , as projecções de Beltrami, com equação

$$\sum_{A=0}^4 \xi_A \xi_A = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_0^2 = R^2.$$

As coordenadas estão relacionadas pelas expressões (1.3) e (1.4) e as relações entre as derivadas são dadas pelas equações (1.6) e (1.7) .

Os geradores do grupo das pseudorotações pentadimensional satisfazem as seguintes relações de comutação [14]

$$\begin{aligned} -i [J_{\kappa\lambda}, J_{\mu\nu}] &= \delta_{\kappa\nu} J_{\lambda\mu} - \delta_{\kappa\lambda} J_{\nu\mu} + \delta_{\lambda\mu} J_{\kappa\nu} - \delta_{\lambda\nu} J_{\kappa\mu} \\ -i [\pi_\lambda, J_{\mu\nu}] &= \delta_{\lambda\mu} \pi_\nu - \delta_{\lambda\nu} \pi_\mu \\ -i [\pi_\mu, \pi_\nu] &= -\frac{1}{R^2} J_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde $\mu, \nu, \lambda, \kappa = 0, 1, 2, 3$ e $\pi_\mu = \frac{1}{R} J_{4\mu}$. Note que para $R \rightarrow \infty$ temos $\pi_\mu \rightarrow p_\mu$ que é o operador quadridimensional associado às transformações de Lorentz no espaço-tempo de Minkowski. Quando $R \rightarrow \infty$ obtemos a álgebra de Lie do grupo de Lorentz não homogêneo, também chamado grupo de Poincaré.

Introduzindo

$$p_\mu \rightarrow -i\hbar \partial_\mu$$

obtemos uma representação para o grupo de Fantappiè-de Sitter o que é dado pelos operadores momentos angulares pentadimensionais

$$J_{AB} = -i\hbar \left(\xi_A \frac{\partial}{\partial \xi_B} - \xi_B \frac{\partial}{\partial \xi_A} \right) \equiv L_{AB} \quad (1.9)$$

onde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$, os quais, em termos das coordenadas de Beltrami, são dados por

$$L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (1.10)$$

$$\pi_\lambda \equiv \frac{1}{R} L_{4\lambda} = A^2 p_\lambda + \frac{1}{R^2} x_\mu L_{\lambda\mu} \quad (1.11)$$

onde $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3$.

Notemos que nas equações anteriores, (onde π_μ é o análogo dos operadores momento no espaço de Minkowski) o momento linear e o momento angular são fundidos num só tensor. Esta fusão é devido ao fato que transformações de deslocamentos são análogas às translações e assim os operadores momento e energia ($p_\mu \rightarrow -i\hbar\partial_\mu$) não se conservam em relação ao grupo de Fantappiè-de Sitter [14]. entretanto as quantidades (1.11) são conservadas.

Agora, consideramos a forma explícita para os dez operadores L_{AB} . Introduzimos o operador T_0 , representando a translação temporal, definido por

$$L_{40} \equiv \frac{i}{c} RT_0 = -i\hbar(\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_0} - \xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_4})$$

que, escrito em coordenadas cartesianas, é como segue

$$T_0 = \hbar c(\partial_0 + \frac{1}{R^2} x_0 x_\mu \partial_\mu) \quad (1.12)$$

com $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Os operadores T_μ , representando as translações espaciais, são definidos por

$$L_{\mu 4} \equiv RT_\mu = -i\hbar(\xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_4} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_\mu})$$

assim obtemos

$$T_\mu = \frac{i\hbar}{R^2}(R^2 \partial_\mu + x^\mu x_\nu \partial_\nu) \quad (1.13)$$

onde $\mu = 1, 2, 3$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Os operadores V_μ , associados ao momento de *inércia do centro de massa*, são dados por

$$L_{0\mu} \equiv icV_\mu = -i\hbar\left(\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} - \xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)$$

de onde obtemos

$$V_\mu = -\frac{\hbar}{c}(x_0 \partial_\mu - x_\mu \partial_0) \quad (1.14)$$

com $\mu = 1, 2, 3$.

Finalmente, introduzimos os operadores L_λ , representando as rotações espaciais, dadas por

$$L_{\mu\nu} \equiv L_\lambda = -i\hbar\left(\xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} - \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\right)$$

de onde

$$L_\lambda = -i\hbar(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (1.15)$$

com $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$ e nas expressões anteriores \hbar e c têm os significados usuais.

Agora, podemos escrever os dois invariantes de Casimir do grupo de Fantappié-de Sitter a partir da equação característica associada à matriz (1.1) com $M_{ab} \equiv L_{ab}$ e usando T_0, T_μ, V_μ , e L_μ como segue [34]

$$-\mathfrak{S}_2 = (T^2 - \frac{1}{c^2}T_0^2) + \frac{1}{R^2}(L^2 - c^2V^2) = M^2 \quad (1.16)$$

$$\mathfrak{S}_4 = (\vec{L} \cdot \vec{T})^2 - \frac{1}{c^2}(T_0 \vec{L} + c^2 \vec{T} \times \vec{V})^2 - \frac{c^2}{R^2}(\vec{L} \cdot \vec{V})^2 = N^2 \quad (1.17)$$

onde M^2 e N^2 são constantes.

Notemos que, no limite $R \rightarrow \infty$ obtemos

$$\mathfrak{S}_2 \rightarrow m^2 \quad \text{e} \quad \mathfrak{S}_4 \rightarrow m^2 s(s+1)$$

onde m e s são, respectivamente, a massa e o spin os quais caracterizam as representações do grupo de Poincaré [14]. Então, as representações do grupo de Fantappié-de Sitter são rotuladas por autovalores de \mathfrak{G}_2 e \mathfrak{G}_4 os quais generalizam os conceitos de massa e spin usuais. Assim, uma partícula no universo de Fantappié-de Sitter não tem bem definida nem a massa nem o spin, e sim os autovalores associados aos operadores invariantes de Casimir de segunda e quarta ordens.

Capítulo 2

Relações de comutação

Neste capítulo introduzindo um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , obtemos as relações de comutação e a forma explícita dos dois operadores de Casimir associados ao grupo de Fantappiè-de Sitter.

2.1 Relações de comutação

As coordenadas esféricas relativistas são dadas pelas seguinte relações: $x_0 = ct$, $x_1 = r \sin \theta \cos \phi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \phi$ e $x_3 = r \cos \theta$. Sabendo que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

devemos calcular

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \frac{\partial r}{\partial x_3}, \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \frac{\partial \theta}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}.$$

Das mudanças de coordenadas, obtemos que

$$\begin{cases} dx_1 = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dx_2 = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta - r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dx_3 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{cases} \quad (2.1)$$

assim podemos calcular dr em função de dx_1, dx_2 e dx_3 a partir do seguinte determinante

$$dr = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} dx_1 & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ dx_2 & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ dx_3 & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

de onde obtemos

$$dr = \sin \theta \cos \phi dx_1 + \sin \theta \sin \phi dx_2 + \cos \theta dx_3$$

então $\frac{\partial r}{\partial x_1} = \sin \theta \cos \phi$; $\frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin \theta \sin \phi$; $\frac{\partial r}{\partial x_3} = \cos \theta$ e onde Δ denota o determinante associado ao sistema (2.1), isto é

$$\Delta = r^2 \sin \theta$$

de modo análogo obtemos

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{r} \sin \phi \cos \theta \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = -\frac{1}{r} \sin \theta$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -\frac{1 \sin \phi}{r \sin \theta} \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{1 \cos \phi}{r \sin \theta} \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0.$$

Logo, podemos calcular os dez operadores diferenciais neste sistema de coordenadas. Calculemos, explicitamente, o operador T_0 . Temos

$$x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} = t \frac{\partial}{\partial t}$$

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} = r \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \cos^2 \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = r \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \sin^2 \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = r \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

e substituindo estas expressões no operador (1.12) obtemos, para o operador T_0 , a seguinte expressão:

$$T_0 = -\hbar c \left[\left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{rt}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \right].$$

Então, procedendo como acima podemos escrever os outros nove operadores como segue

$$T_1 = -\frac{i\hbar}{R^2} \left[(r^2 + R^2) \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{R^2}{r} \left(\cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + rt \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

$$T_2 = -\frac{i\hbar}{R^2} \left[(r^2 + R^2) \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{R^2}{r} \left(\cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + rt \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

$$T_3 = -\frac{i\hbar}{R^2} \left[(r^2 + R^2) \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{R^2}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + rt \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

$$V_1 = \frac{\hbar}{c} \left[t \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

(2.2)

$$V_2 = \frac{\hbar}{c} \left[t \left(\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

$$V_3 = \frac{\hbar}{c} \left[t \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - r \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

$$L_1 = i\hbar \left[-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

$$L_2 = i\hbar \left[\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

$$L_3 = i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Agora, considerando uma permutação cíclica para os índices μ, ν e λ , vamos calcular as respectivas relações de comutação. Para explicitar, vamos obter a seguinte relação de comutação $[L_1, L_2] = -i\hbar L_3$. Temos

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= i^2 \hbar \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= -i^2 \hbar \left\{ \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \cos \phi \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\sin^2 \phi \sin^2 \phi}{\sin^2 \theta \sin^2 \theta} - \cot^2 \theta \cos^2 \phi \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right. \\ &\quad \left. + \cot \theta \left(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \cot^2 \theta \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} L_2 L_1 &= i^2 \hbar \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= -i^2 \hbar \left\{ \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \right\} \end{aligned}$$

$$\left. -\cot \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \cot \theta \cos \phi \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot^2 \theta \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}$$

logo

$$[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1 = -i^2 \hbar^2 \frac{\partial}{\partial \phi} = -i \hbar L_3.$$

De modo inteiramente análogo podemos mostrar que valem as seguintes relações de comutação para os demais operadores [35,36]

$$[T_0, T_\mu] = -i \hbar \frac{c^2}{R^2} V_\mu ; \quad [T_0, V_\mu] = -i \hbar T_\mu ; \quad [T_0, L_\mu] = 0$$

$$[T_\mu, T_\nu] = -\frac{i \hbar}{R^2} L_\lambda ; \quad [T_\mu, V_\nu] = -\frac{i \hbar}{c^2} \delta_{\mu\nu} T_0 ; \quad [T_\mu, L_\nu] = i \hbar T_\lambda \quad (2.3)$$

$$[V_\mu, V_\nu] = \frac{i \hbar}{R^2} L_\lambda ; \quad [L_\mu, V_\nu] = -i \hbar V_\lambda ; \quad [L_\mu, L_\nu] = -i \hbar L_\lambda$$

onde $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$.

2.2 Operadores de Casimir em coordenadas esféricas

Finalmente, obtemos a forma explícita para os operadores de Casimir de segunda e quarta ordens, introduzindo os operadores diferenciais (2.2) nas equações (1.16) e (1.17), respectivamente.

O operador de Casimir de segunda ordem é dado por [35,36]

$$\mathfrak{S}_2 = \hbar^2 A^2 \left\{ \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2rt}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} - \left(1 - \frac{t^2 c^2}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \right.$$

(2.4)

$$+\frac{2}{r}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2t}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\mathcal{L}^2\}$$

onde temos colocado $t \rightarrow ict$ e o operador \mathcal{L}^2 é dado por:

$$\mathcal{L}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.5)$$

Note que quando $R \rightarrow \infty$ o operador (2.4) se reduz ao operador de onda de d'Alembert, isto é

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_2 \equiv \square = \hbar^2 \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

onde Δ é o operador Laplaciano escrito em coordenadas esféricas, daí chamarmos \mathfrak{S}_2 de operador de d'Alembert generalizado.

Para o operador de Casimir de quarta ordem temos [36]

$$\mathfrak{S}_4 = 4c^2 \frac{\hbar^4}{R^4} \mathcal{L}^2 \mathfrak{S}^2 \quad (2.6)$$

onde o operador \mathfrak{S}^2 é dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^2 = & t^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (R^2 - t^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2rt(R^2 - t^2) \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \\ & + r(2t^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial r} - 2t(R^2 - t^2) \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

e o operador \mathcal{L}^2 é dado acima.

Note que quando $R \rightarrow \infty$ temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_4 = \left(\frac{4\hbar^4}{c^2} \right) \mathcal{L}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

que é o operador cujos autovalores são dados pelo produto $m^2 s(s+1)$, onde s é associado ao spin e m é a massa.

Até agora discutimos uma forma alternativa para obter os operadores invariantes de Casimir associados ao grupo de Fantappié-de Sitter, o qual é isomorfo ao grupo das pseudorotações pentadimensionais. É clara a dependência das partes temporal e espacial de ambos operadores dados por T_0, T_μ, V_μ e L_μ . No próximo capítulo serão resolvidas as equações diferenciais associadas a estes operadores.

Capítulo 3

Equações diferenciais

Neste capítulo discutimos as equações diferenciais de segunda e quarta ordens obtidas a partir dos operadores de Casimir (2.4) e (2.6) respectivamente. Para a equação diferencial de segunda ordem obtemos soluções em termos dos polinômios de Gegenbauer e funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécies, para a equação diferencial de quarta ordem as soluções obtidas são em termos das funções associadas de Legendre e a função hipergeométrica. Também apresentamos uma generalização dos resultados obtidos para o operador de Casimir de segunda ordem afim de obtermos, num modo natural, as chamadas soluções exponenciais de frequência positiva (negativa).

3.1 Equação diferencial parcial de segunda ordem

Consideremos a equação diferencial parcial de segunda ordem obtida a partir do operador de Casimir de segunda ordem, também chamada equação de onda de Klein-Gordon. isto é, a seguinte equação diferencial

$$\mathfrak{S}_2\Psi(r, \theta, \phi, t) = -M^2\Psi(r, \theta, \phi, t) \quad (3.1)$$

onde M^2 é uma constante, a qual é associada com a massa da partícula e o operador \mathfrak{G}_2 é dado pela equação (2.4).

Então, substituindo o operador \mathfrak{G}_2 na equação (3.1) obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$\left\{ (1 + \xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} (1 + \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi^2} \mathcal{L}^2 \right\} \Psi = \frac{M_0^2}{A_0^2} \Psi \quad (3.2)$$

onde $\Psi \equiv \Psi(\xi, \eta, \theta, \phi)$ e introduzimos a notação

$$\xi = \frac{r}{R} \quad ; \quad \eta = \frac{ct}{R} \quad ; \quad \frac{RM}{\hbar} = M_0 \quad e \quad A_0^2 = 1 + \xi^2 - \eta^2 \quad (3.3)$$

Para resolver esta equação diferencial parcial usamos o método de separação de variáveis. Introduzindo a função $\Psi(\xi, \eta, \theta, \phi)$ como um produto, isto é

$$\Psi(\xi, \eta, \theta, \phi) = \sum_{\lambda} T_{\lambda}(\xi, \eta) S_{\lambda}(\theta, \phi) \quad (3.4)$$

obtemos uma equação nas variáveis angulares (θ, ϕ) e outra equação nas variáveis (ξ, η) , como segue

$$\left\{ (1 + \xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} (1 + \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{M_0^2}{A_0^2} - \frac{\lambda^2}{\xi^2} \right\} T(\xi, \eta) = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \lambda^2 \right\} S(\theta, \phi) = 0 \quad (3.5)$$

onde λ^2 é uma constante.

A segunda das equações diferenciais acima, para $\lambda^2 = l(l+1)$ com $l = 0, 1, 2, \dots$ tem a solução usual dada por

$$S(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \exp\{im\phi\} \quad (3.6)$$

com $l \geq m$ (m um inteiro) e onde $P_l^m(\cos \theta)$ são as funções associadas de Legendre. Estas soluções são exatamente os harmônicos esféricos que são os mesmos que os obtidos com o tratamento clássico da equação diferencial de Klein-Gordon escrita em coordenadas esféricas.¹¹

Agora, devemos resolver a seguinte equação diferencial

$$\left\{ (1+\xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - (1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} (1+\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{M_0^2}{A_0^2} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \right\} T(\xi, \eta) = 0$$

Para este propósito introduzimos, primeiramente, a mudança de variáveis independentes definidas por

$$\xi = \rho \cosh \tau \quad \text{e} \quad \eta = \rho \sinh \tau \quad (3.7)$$

e obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$\left\{ (1+\rho^2) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} (3+2\rho^2) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{2 \tanh \tau}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{M_0^2}{1+\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2 \cosh^2 \tau} \right\} T(\rho, \tau) = 0$$

Agora novamente, separando as variáveis, isto é, considerando

$$T(\rho, \tau) = F(\rho)G(\tau)$$

¹¹ O tratamento usual de se discutir a equação de Klein-Gordon é escrevê-la utilizando as derivadas covariantes [16].

obtemos duas equações diferenciais ordinárias dadas, respectivamente, por

$$\rho^2 (1 + \rho^2) F'' + \rho (3 + 2\rho^2) F' - \frac{\rho^2 M_0^2}{1 + \rho^2} F - \lambda_0^2 F = 0 \quad (3.8)$$

$$G'' + 2(\tanh \tau)G' + \frac{l(l+1)G}{ch^2\tau} - \lambda_0^2 G = 0 \quad (3.9)$$

onde λ_0^2 é uma outra constante e a linha denota diferenciação.

Tomando $\lambda_0^2 = k(k+2)$ onde $k = 0, 1, 2, \dots$ obtemos uma solução da equação (3.9) como segue, já nas variáveis r e t

$$G(r, t) = \left(1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}\right)^{\frac{k+2}{2}} C_{l-k+1}^{k+3/2}(rt) \quad (3.10)$$

onde $C_\nu^\mu(x)$ são os polinômios de Gegenbauer.

A solução da equação (3.8) é dada por

$$F(\rho) = \exp\left\{\frac{-i\pi}{2}(k + \nu + 3)\right\} \left(\frac{A_0^2}{A_0^2 - 1}\right)^{3/4} \frac{\Gamma(k - \nu)}{\Gamma(k + \nu + 3)} 2^{\nu+3/2} \Gamma(\nu + 5/2) \quad (3.11)$$

$$\cdot \left\{ P_{k+1/2}^{\nu+3/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - A_0^2}} \right) + \frac{2i}{\pi} Q_{k+1/2}^{k+3/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - A_0^2}} \right) \right\}$$

onde $M_0^2 = -\nu(\nu + 3)$ e $A_0^2 = 1 + \xi^2 - \eta^2 = 1 + \rho^2$ e $P_k^\mu(x)$ e $Q_k^\mu(x)$ são as funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécies, respectivamente.

Finalmente, podemos escrever a solução da equação de segunda ordem associada ao operador de Casimir \mathfrak{S}_2 , equação (3.1) como segue [37]:

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l S(\theta, \phi) T(\xi, \eta)$$

onde $S(\theta, \phi)$ é dado pela equação (3.6); $T(\xi, \eta)$ é dado pelo produto das equações (3.10) e (3.11) e ξ e η são dados pelas relações (3.7).

3.2 Equação diferencial parcial de quarta ordem

Agora, passamos a discutir e resolver a equação diferencial parcial de quarta ordem obtida a partir do operador de Casimir \mathfrak{S}_4 dado pela equação (2.6), isto é, a seguinte equação diferencial

$$\mathfrak{S}_4\Omega(r, \theta, \phi, t) = N^2\Omega(r, \theta, \phi, t) \quad (3.12)$$

onde N^2 é uma constante a qual é associado ao spin da partícula.

Introduzindo o operador \mathfrak{S}_4 na equação (3.12) obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \cdot \left[t^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (R^2 - t^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2rt (R^2 - t^2) \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \right. \\ \left. + r (2t^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial r} - 2t (R^2 - t^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \Omega(r, \theta, \phi, t) = N_0^2 \Omega(r, \theta, \phi, t)$$

onde $N_0^2 = \frac{c^2 R^4}{4\hbar^4} N^2$.

Para resolver a equação anterior, notamos que esta equação pode ser escrita na seguinte forma

$$\mathcal{L}^2 \Omega_1(\theta, \phi) \mathfrak{S}^2 \Omega_2(r, t) = N_0^2 \Omega_1(\theta, \phi) \Omega_2(r, t) \quad (3.13)$$

e assim temos duas equações diferenciais parciais de segunda ordem

$$\mathcal{L}^2 \Omega_1(\theta, \phi) = N_1^2 \Omega_1(\theta, \phi) \quad (3.14)$$

$$\mathfrak{S}^2 \Omega_2(\theta, \phi) = N_2^2 \Omega_2(\theta, \phi) \quad (3.15)$$

onde os operadores \mathcal{L}^2 e \mathfrak{S}^2 são dados pelas relações (2.5) e (2.7) respectivamente e $N_1^2 N_2^2 = N_0^2$.

A equação (3.14) é a análoga a equação anteriormente resolvida, equação (3.5), quando identificamos $N_1^2 = l(l+1)$ com $l = 0, 1, \dots$ e a solução é dada por (3.6)

Então, devemos resolver, finalmente, a seguinte equação diferencial parcial (equação parabólica)

$$\left\{ t^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (R^2 - t^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2rt (R^2 - t^2) \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} + r (2t^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial r} - 2t (R^2 - t^2) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Omega_2(r, t) = N_2^2 \Omega_2(r, t) \quad (3.16)$$

Introduzindo as variáveis independentes τ e ρ definidas como segue

$$t = R\tau \quad e \quad r = R\rho$$

bem como as seguintes mudanças de variáveis independentes

$$\xi = \frac{1}{\rho} (\tau^2 - 1)^{1/2} \quad e \quad \eta = \rho$$

obtemos

$$\left\{ \eta^2 (1 + \xi^2 \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta (1 + 2\xi^2 \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} \Omega_2(\xi, \eta) = N_0^2 \Omega_2(\xi, \eta) \quad (3.17)$$

onde $N_0 = N_2/R$.

Note que, nesta equação a variável ξ não aparece explicitamente na solução $\Omega_2(\xi, \eta)$. Para ver este fato introduzimos uma nova variável definida por

$$\xi \eta = u$$

e obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\left\{ u^2 (1 + u^2) \frac{d^2}{du^2} + u (1 + 2u^2) \frac{d}{du} - N_0^2 \right\} \Omega_2(u) = 0. \quad (3.18)$$

A solução, para N_0 não inteiro, da equação diferencial anterior é dada por, já na variável t

$$\begin{aligned} \Omega_2(r, t) = & \left(1 - \frac{t^2}{R^2} \right)^{N_0/2} \left\{ A {}_2F_1 \left(\frac{N_0}{2}, \frac{N_0 + 1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{t^2}{R^2} \right) \right. \\ & \left. + B \frac{t}{R} {}_2F_1 \left(\frac{N_0 + 1}{2}, \frac{N_0 + 2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{t^2}{R^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde ${}_2F_1(a, b; c; x)$ é a função hipergeométrica usual e A e B são constantes. Para N_0 um inteiro a solução é dada por

$$\Omega_2(r, t) = t^\lambda (1 - t)^\mu P_n(t)$$

onde λ e μ são parâmetros e $P_n(t)$ é um polinômio.

Finalmente, a solução da equação diferencial de quarta ordem é dada como segue

$$\Omega(r, \theta, \phi, t) = \Omega_1(\theta, \phi) \Omega_2(r, t)$$

onde $\Omega_1(\theta, \phi)$ é dada pela função (3.6) e $\Omega_2(r, t)$ é dada pela função (3.19).

3.3 A equação de Klein-Gordon generalizada

Para finalizar este capítulo, apresentamos uma generalização dos resultados obtidos para o operador de Casimir de segunda ordem, equação (3.1), e obtemos, num modo natural, as chamadas soluções exponenciais de frequência positivas (negativas) que são idênticas às obtidas por Chernikov e Tagirov [38] usando a metodologia de transformadas de Fourier. Resultados análogos também foram obtidos por Redmount e Takagi

[39] usando as chamadas coordenadas hipersféricas de Rindler, onde eles discutiram uma teoria de campos no espaço-tempo de de Sitter para um campo escalar real, livre e sem massa.

Notemos que o operador de Casimir (2.4) em coordenadas cartesianas toma a forma

$$\mathfrak{S}_2 = A^2 \partial_i^2 + \frac{1}{R^2} A^2 (x_i x_k \partial_i \partial_k + 2x_i \partial_i) \quad (3.20)$$

com $i, k = 1, 2, 3, 4$.

A equação anterior pode ser generalizada escrevendo [31]

$$\mathfrak{S}_2 = A^2 \partial_i^2 + \frac{1}{R^2} A^2 (x_i x_k \partial_i \partial_k + 2x_i \partial_i) \quad (3.21)$$

com $i, k = 0, 1, 2, \dots, (p+2)$, onde $A^2 = 1 + x_i^2/R^2$ e R é o chamado raio do universo de de Sitter.

Então, nesta seção, discutimos a seguinte equação diferencial parcial

$$R^2 \square \Psi = A^2 \left[R^2 \partial_i^2 + (x_i x_k \partial_i \partial_k + 2x_i \partial_i) \right] \Psi(x_i) = \Omega^2 \Psi(x_i) \quad (3.22)$$

onde Ω^2 é um parâmetro.

Introduzindo um tempo real, t , na equação diferencial acima, podemos escrever

$$A^2 \left[\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + x_i x_j \partial_i \partial_j + t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2t \frac{\partial}{\partial t} (x_k \partial_k) + 2x_k \partial_k + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi(x_i, t) = \Omega^2 \Psi(x_i, t) \quad (3.23)$$

com $i, j, k = 1, 2, \dots, (p+2)$ e $A^2 = 1 + x_i^2 - t^2$ e considerando $R = c = 1$. Esta equação é a chamada equação de onda de Klein-Gordon no espaço-tempo de de Sitter de dimensão $[1 + (p+2)]$, onde Δ é o operador Laplaciano.

Para resolver a equação diferencial acima, introduzimos as chamadas coordenadas polares hipersféricas [40] dadas por

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \rho \cos \theta_1 \\
 x_2 &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
 x_3 &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_p &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-1} \cos \theta_p \\
 x_{p+1} &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_p \cos \phi \\
 x_{p+2} &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_p \sin \phi
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta_k \leq \pi$ com $k = 1, 2, \dots, p$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e assim obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{1}{\rho^{p+1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{p+1} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 2\rho t \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial t} - (1+t^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \right. \\
 &\left. + 2t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2} \mathfrak{R}^2 \right\} \Psi = \frac{1}{A^2} \Omega^2 \Psi
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $\Psi \equiv \Psi(\rho, \theta_i, \phi, t)$, $A^2 = 1 + \rho^2 - t^2$ e \mathfrak{R}^2 é um operador independente de t e ρ dado por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}^2 &= \frac{1}{\sin^p \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^p \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} (\sin \theta_2)^{1-p} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[(\sin \theta_2)^{p-1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right] + \\
&+ \frac{1}{(\sin \theta_1 \sin \theta_2)^2} (\sin \theta_3)^{2-p} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left[(\sin \theta_3)^{p-2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right] + \dots + \\
&+ \frac{1}{(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-1})^2} \cdot \frac{1}{\sin \theta_p} \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left(\sin \theta_p \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right) + \\
&+ \frac{1}{(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_p)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

A equação (3.25) é separável então, introduzindo as variáveis dependentes, $R(\rho, t)$ e $T(\theta_i, \phi)$ como segue

$$\Psi(\rho, \theta_i, \phi, t) = R(\rho, t)T(\theta_i, \phi) \equiv RT \tag{3.27}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^2}{R} \left[\frac{1}{\rho^{p+1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{p+1} \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + 2\rho t \frac{\partial^2 R}{\partial \rho \partial t} - (1+t^2) \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \right. \\
&\left. + 2t \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\Omega^2}{A^2} R \right] = -\frac{1}{T} \mathfrak{R}^2 T = \lambda
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde λ é uma constante de separação.

A solução da equação angular é dada por

$$T(\theta_i, \phi) = A_0 \exp\{\pm i m_p \phi\} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} (\sin \theta_{k-1})^{m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + \frac{E-k}{2}}(\cos \theta_{k+1}) \tag{3.29}$$

onde $\lambda = n(n+p)$ com $n = m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_p \geq 0$ e $C_\mu^\nu(x)$ são os polinômios de Gegenbauer [41] de grau μ e ordem ν , e A_0 é uma constante.

Para resolver a equação (3.28), equação não angular, introduzimos, primeiramente, as seguintes variáveis independentes ξ e μ definidas por

$$\rho = \tan \xi \quad \text{e} \quad t = \frac{\sin \mu}{\cos \xi} \quad (3.30)$$

com $0 \leq \xi \leq \pi/2$ e $0 \leq \mu \leq \pi$ de onde obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + (p+1) \cot \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - (p+1) \tan \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\Omega^2}{\cos^2 \mu} - \frac{n(n+p)}{\sin^2 \xi} \right] R(\xi, \mu) = 0 \quad (3.31)$$

Finalmente, mais uma vez separando as variáveis, obtemos duas equações diferenciais ordinárias, como segue

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + (p+1) \cot \xi \frac{d}{d\xi} - \frac{n(n+p)}{\sin^2 \xi} + \Lambda \right] R(\xi) = 0 \quad (3.32)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\mu^2} + (p+1) \tan \mu \frac{d}{d\mu} - \frac{\Omega^2}{\cos^2 \mu} + \Lambda \right] T(\mu) = 0 \quad (3.33)$$

onde Λ é uma outra constante.

A solução (uma solução regular na origem) da equação (3.32) é dada por

$$R(\xi) = B_0 \sin^n \xi C_{l-n-\frac{p+1}{2}}^{n+\frac{p+1}{2}}(\cos \xi) \quad (3.34)$$

onde introduzimos $\Lambda = \left(l + \frac{p+1}{2}\right) \left(l - \frac{p+1}{2}\right)$ e $C_\mu^\nu(x)$ são os polinômios de Gegenbauer. Notemos que, quando p é um número ímpar, temos: l um número inteiro. $l \geq n + \frac{p+1}{2}$; e, quando p é um número par, temos: l um número semi-inteiro. $l \equiv \frac{i}{2} \geq n + \frac{p+1}{2}$ e B_0 é uma constante.

Para resolver a equação (3.33) introduzimos uma mudança de variáveis dependentes, como segue

$$T(\mu) = (\cos \mu)^{\frac{p+2}{2}} F(\mu) \quad (3.35)$$

onde $F(\mu)$ satisfaz à seguinte equação diferencial

$$\left\{ (1-y^2) \frac{d^2}{dy^2} - 2y \frac{d}{dy} + \left[l^2 - \frac{1}{4} - \left(\frac{(p+2)^2/4 - \Omega^2}{1-y^2} \right) \right] \right\} F(y) = 0 \quad (3.36)$$

com $y = \sin \mu$.

Então, a solução da equação (3.33) é dada por

$$T(\mu) = (\cos \mu)^{\frac{p+2}{2}} \left[\alpha P_{l-1/2}^\nu(\sin \mu) + \beta Q_{l-1/2}^\nu(\sin \mu) \right] \quad (3.37)$$

onde $\nu^2 = \left(\frac{p+2}{2} \right)^2 - \Omega^2$ e α e β são constantes e $P_\mu^\nu(x)$ e $Q_\mu^\nu(x)$ são as funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécies, respectivamente.

Logo, a solução da equação (3.25) é dada pelo produto das funções (3.29), (3.34) e (3.37), onde ξ e μ estão relacionadas com ρ e t através das equações (3.30).

Passemos, agora, a discutir a equação de Klein-Gordon em $[1 + (p+2)]$ dimensões. Esta equação para um campo escalar de massa não nula, $\Psi(x)$, em um espaço-tempo de de Sitter em $[1 + (p+1)]$ dimensões, é dada por [32]

$$\square \Psi + \left[\frac{(p+1)(p+3)}{4R^2} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0 \quad (3.38)$$

com $p = 1, 2, \dots, m$, c e \hbar têm o usual significado e R é o raio do universo de de Sitter.

Então, temos a seguinte equação para a massa

$$m_0 = -\frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{4}(p+1)(p+3) + N(N+p-2) \right] \quad (3.39)$$

onde colocamos $m_0 = mc/\hbar$ e $N(N + p + 2) = -\Omega^2$ e N é real.

Notando-se que somente a equação (3.36) contém o termo de massa e que a equação (3.38) é invariante conforme para $m = 0$ podemos escrever, para $p = 1$, a seguinte equação

$$N(N + 3) = -2. \quad (3.40)$$

Introduzindo $N = -1$ ($N = -2$) na equação (3.37), obtemos

$$T(\mu) = (\cos \mu)^{3/2} \left[\alpha P_{l-1/2}^{-1/2}(\sin \mu) + \beta Q_{l-1/2}^{-1/2}(\sin \mu) \right] \quad (3.41)$$

e usando as expressões explícitas para as funções de Legendre [41] temos

$$\begin{aligned} T(\mu) = \frac{1}{l} \cos \mu \cdot \left\{ \exp[-il(\mu - \pi/2)] \left(-\frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\beta}{2} \sqrt{\pi/2} \right) \right. \\ \left. + \exp[il(\mu - \pi/2)] \left(\frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\beta}{2} \sqrt{\pi/2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

que contém ambas as soluções de frequência positiva e negativa.

Finalmente, no caso da equação de onda de Klein-Gordon em $(1 + 3)$ dimensões, temos

$$T(\mu) = \cos^{3/1} \mu \left[P_{l-1/2}^{N+3/2}(\sin \mu) \pm \frac{2i}{\pi} Q_{l-1/2}^{N+3/2}(\sin \mu) \right] \quad (3.43)$$

que é o resultado obtido por Notte Cuello e Capelas de Oliveira [32], bem como por Tagirov [38], porém utilizando um outro procedimento.

Capítulo 4

Os harmônicos esféricos espinoriais

Passamos agora a discutir os chamados harmônicos esféricos espinoriais (com peso de spin) com o propósito de resolver, no próximo capítulo, a equação de Dirac que é obtida a partir da equação associada ao invariante de Casimir de segunda ordem, obtida no capítulo precedente, equação (3.1).

Quando Dirac em 1928, obteve sua equação para o elétron no contexto quântico relativista, apareceram em forma mais ou menos explícita, na física, as álgebras de Clifford. Algumas álgebras definidas por Clifford [43] têm *unidades* $1, c_1, \dots, c_n$ tais que $c_i^2 = -1$, com a condição adicional de que $c_i c_j = -c_j c_i$ para i diferente de j , mas supondo associatividade para multiplicação. *

A função de onda do elétron é, na teoria de Dirac, um espinor com quatro componentes complexas que sob uma transformação de Lorentz transforma-se linearmente [44]. De fato, são as propriedades de transformação das funções de onda que determinam se

* Em geral, se g_{ij} é a matriz correspondente ao produto escalar de um espaço vetorial V de dimensão n , com respeito a uma base arbitrária $\{\epsilon_i\}$, então a álgebra de Clifford associada a V é gerada pelas *unidades* $1, c_1, \dots, c_n$, as quais devem satisfazer as relações

$$c_i c_j + c_j c_i = 2g_{ij}$$

onde 1 é a identidade associada ao produto.

as partículas descritas por elas têm um certo spin. Basicamente, os espinores são objetos, que formam um espaço vetorial complexo, sobre os quais podem representar-se, em certa forma específica, as rotações em algum espaço, isto é, dado um espaço vetorial com produto interno simétrico, os espinores correspondentes formam um espaço vetorial complexo sobre os quais a álgebra de Clifford associada a dito produto interno atua linear e irredutivelmente [44].

Os harmônicos esféricos espinoriais são baseados nos espinores da mesma forma como os harmônicos esféricos usuais estão relacionados com o grupo de rotações $SO(3)$. Os harmônicos esféricos com peso de spin (ou espinoriais) formam também bases para as representações irredutíveis do grupo de rotações, ou do grupo $SU(2)$, o qual serve para definir estas funções. Neste capítulo apresentamos a definição e as propriedades básicas dos harmônicos esféricos com peso de spin que são uma generalização dos harmônicos esféricos usuais [45] e como aplicação, discutimos a equação de Laplace projetiva, isto é, a equação de Laplace no universo de de Sitter, cuja solução é dada em termos dos harmônicos esféricos com peso de spin.

4.1 Os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ e os espinores

As transformações lineares que correspondem a rotações em torno da origem em \mathbf{R}^3 formam um grupo, denotado por $SO(3)$ visto que, com respeito a uma base ortonormal, ditas transformações estão representadas por matrizes ortogonais [46]. O grupo $SO(3)$ está relacionado com o grupo $SU(2)$, formado pelas matrizes unitárias 2×2 , complexas e de determinante igual a 1. Na relação destes grupos aparecem as matrizes de Pauli ou algum outro conjunto de matrizes com propriedades similares.

Uma forma de relacionar os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ é a partir das matrizes de Pauli que estão definidas por:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Estas matrizes formam uma base para o espaço das matrizes 2×2 complexas, hermiteanas e de traço igual a zero.

Se $U \in SU(2)$, então, para cada valor de i , $U\sigma_iU^{-1}$ é uma matriz hermiteana de traço igual a zero já que $(U\sigma_iU^{-1})^t = (U^{-1})^t\sigma_i^tU^t = U\sigma_iU^{-1}$ e $tr(U\sigma_iU^{-1}) = tr(\sigma_iU^{-1}U) = tr\sigma_i = 0$. Assim $U\sigma_iU^{-1}$ é uma combinação linear de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (com coeficientes reais):

$$U\sigma_iU^{-1} = Q_i^j\sigma_j \quad (4.2)$$

onde, temos uma soma explícita sobre índices repetidos. Desta maneira obtemos uma matriz 3×3 real Q_i^j que é ortogonal e tem determinante igual a um, isto é, $Q_i^j \in SO(3)$.

Para provar esta última afirmação, fazemos uso das relações

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}I + i\epsilon_{jkl}\sigma_l \quad (4.3)$$

que são satisfeitas pelas matrizes de Pauli (4.1), onde I é a matriz identidade.

Seja

$$U\sigma_j\sigma_kU^{-1} = \delta_{jk}I + i\epsilon_{jkl}U\sigma_lU^{-1} = \delta_{jk}I + i\epsilon_{jkl}Q_l^n\sigma_n$$

por outro lado

$$U\sigma_j\sigma_kU^{-1} = U\sigma_jU^{-1}U\sigma_kU^{-1} = Q_j^l\sigma_lQ_k^m\sigma_m = Q_j^lQ_k^m(\delta_{lm}I + i\epsilon_{lmn}\sigma_n)$$

e, como o conjunto $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ é linearmente independente, temos

$$Q_j^lQ_k^m\delta_{lm} = \delta_{jk} \quad (4.4)$$

que caracteriza uma matriz ortogonal e $\epsilon_{jkl} Q_l^n = Q_j^i Q_k^m \epsilon_{lmn}$. Multiplicando esta última equação por Q_j^i e usando (4.4) tem-se

$$\epsilon_{jkl} = Q_j^i Q_k^m Q_l^n \epsilon_{lmn} \quad (4.5)$$

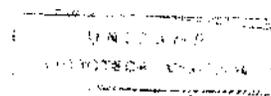
o que significa que $\det Q_i^j = 1$.

Já que na dedução das equações(4.4) e (4.5) somente é usado o fato que U seja unitária, a condição de que $\det U = 1$, tem o propósito de reduzir ao mínimo a ambigüidade envolvida na equação(4.2),isto é. se na equação (4.2) U é substituído por $\exp\{i\alpha\}U$. com α real, então $\exp\{i\alpha\}U$ é também unitária e devido a que $(\exp\{i\alpha\}U)^{-1} = \exp\{-i\alpha\}U^{-1}$ a equação (4.2) segue sendo válida sem alterar os Q_i^j . Logo, todas as matrizes unitárias $\exp\{i\alpha\}U$ definem mediante a equação(4.2) a mesma matriz Q_i^j que aquela fornecida por U . Ao impor que $\det U = 1$ então, para uma matriz $Q_i^j \in SO(3)$ dada, somente duas matrizes U satisfazem a igualdade(4.2), isto é, U e $-U$. Assim, a equação(4.2) estabelece uma relação dois a um entre $SU(2)$ e $SO(3)$ que é um homomorfismo de grupo, isto é, se U_1 e $U_2 \in SU(2)$, donotando por A, B e C as matrizes de $SO(3)$ que correspondem a U_1 e U_2 e ao produto $U_1 U_2$ respectivamente, então C é o produto de A por B . Portanto as matrizes de $SU(2)$ constituem uma representação dois a um do grupo de rotações $SO(3)$.

As matrizes $U \in SU(2)$ atuam sobre um espaço vetorial complexo de dimensão dois, cujos elementos são os espinores ou mais precisamente, os espinores correspondentes a $SO(3)$ [44]. Cada espinor Ψ , pode ser representado geometricamente mediante uma bandeira [45]: A haste da bandeira é o vetor (real) $R = (R_1, R_2, R_3)$ dado por

$$R_i = \Psi^\dagger \sigma_i \Psi \quad (4.6)$$

onde o superíndice \dagger denota o adjunto, e a direção da bandeira, está dada pela direção



da parte real do vetor $M = (M_1, M_2, M_3)$ definida como

$$M_i = \Psi^T \epsilon \sigma_i \Psi \quad (4.7)$$

onde o superíndice T denota transposição, e

$$\epsilon \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Na representação de espinores mediante bandeiras também temos uma relação dois a um, isto é, os espinores Ψ e $-\Psi$ são representados por uma mesma bandeira. como pode ser visto das equações (4.6) e (4.7).

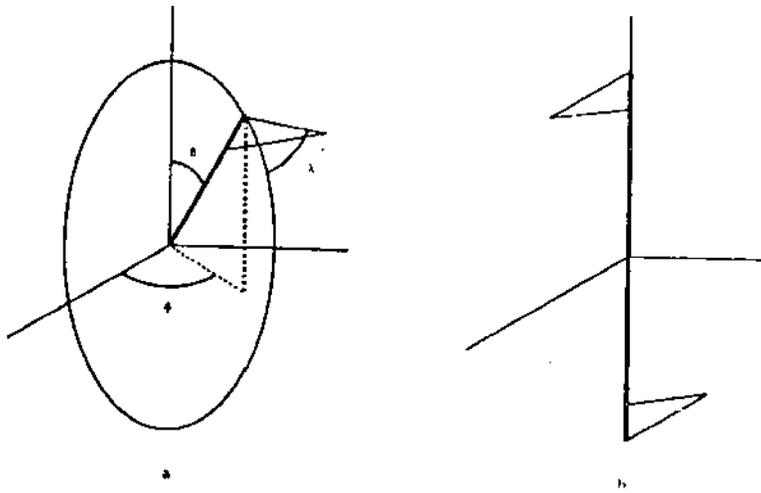
As componentes de um espinor podem ser parametrizadas na seguinte forma [44]

$$\Psi = \sqrt{r} \exp\{-i\frac{x}{2}\} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \exp\{-i\frac{\phi}{2}\} \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp\{i\frac{\phi}{2}\} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

onde em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ os parâmetros x e ϕ não estão bem definidos. Logo, de (4.6) e (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} R &= (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) = r \hat{e}_r \\ M &= r \exp\{-ix\} (\hat{e}_\theta + i \hat{e}_\phi) \\ &= r [(\cos x \hat{e}_\theta + \sin x \hat{e}_\phi) + i (-\sin x \hat{e}_\theta + \cos x \hat{e}_\phi)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde \hat{e}_r , \hat{e}_θ e \hat{e}_ϕ são vetores ortogonais induzidos pelas coordenadas esféricas. Assim temos a seguinte figura:



a) Representação de um espinor por meio de uma bandeira.
 b) Bandeiras correspondendo aos espinores base.

Usando o fato que a matriz ϵ dada pela equação (4.8) satisfaz as relações $\epsilon^2 = -I$ e $\epsilon^T = -\epsilon$, as componentes do vetor R podem ser expressas também na forma

$$R_i = \bar{\Psi}^T \epsilon^T \epsilon \sigma_i \Psi = (\epsilon \bar{\Psi})^T \epsilon \sigma_i \Psi. \quad (4.11)$$

Devido ao fato que U é unitária, $U \in SU(2)$, o espinor $\epsilon \bar{\Psi}$ também tem as mesmas propriedades de transformação que Ψ , isto é, se $\Psi = U \Psi$,

$$\epsilon \bar{\Psi} = \epsilon \bar{U} \bar{\Psi} = \epsilon (U^{-1})^T \bar{\Psi} = -\epsilon (\epsilon U^T \epsilon)^T \bar{\Psi} = U (\epsilon \bar{\Psi})$$

isto significa que no espaço dos espinores $SO(3)$ e seu complexo conjugado têm representações equivalentes (de $SU(2)$ ou de $SO(3)$).

No que segue as componentes de um espinor serão rotuladas por meio de índices A, B, \dots , que tomam os valores 1 ou 2 e sobre estes índices espinoriais podem ser levantados ou abaixados mediante a matriz ϵ dada em (4.8)

$$\epsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \epsilon^{AB} \quad (4.12)$$

de acordo com

$$\Psi_A \equiv \epsilon_{AB} \Psi^B. \quad (4.13)$$

Da relação $\epsilon_{AB} \epsilon^{BC} = -\delta_A^C$, obtemos a inversa da equação(4.13), isto é

$$\Psi^A = -\epsilon^{AB} \Psi_B = \epsilon^{BA} \Psi_B \quad (4.14)$$

Seguindo a convenção (4.13) os elemento do produto matricial $\epsilon \sigma_i$, que são $\epsilon_{AB} \sigma_{iA}^B$. serão denotados por σ_{iAB} , assim as componentes R_i dadas em (4.11) podem ser escritas como

$$R_i = \sigma_{iAB} \Phi^A \Psi^B \quad (4.15)$$

onde Φ^A e Ψ^B são as componentes de $\epsilon \bar{\Psi}$ e Ψ respectivamente, isto é,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \quad e \quad \epsilon \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix}$$

e as componentes M_i definidas em (4.7) equivalem a

$$M_i = \sigma_{iAB} \Psi^A \Psi^B \quad (4.16)$$

Para estudar funções definidas sobre uma esfera de raio um. é conveniente introduzir os seguintes espinores

$$O \equiv \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \exp\{-i\frac{\phi}{2}\} \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp\{i\frac{\phi}{2}\} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

que se obtém da expressão (4.9) fazendo $r = 1$ e $x = 0$, e o espinor

$$\ell \equiv \epsilon \bar{O} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \exp\{-i\frac{\phi}{2}\} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \exp\{i\frac{\phi}{2}\} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Estes espinores satisfazem a identidade

$$\ell^A O_A = \ell^A \epsilon_{AB} O^B = \ell^1 O^2 - \ell^2 O^1 = 1. \quad (4.19)$$

Então para cada ponto da esfera o conjunto $\{O, \ell\}$ forma uma base para os espinores e induz base para os vetores e os tensores de qualquer posto. Por exemplo, substituindo O em lugar de Ψ nas eqs. (4.6) e (4.7), de acordo com (4.10), obtemos os vetores $R = \hat{e}_r$, $\text{Re}M = \hat{e}_\theta$ e $\text{Im}M = \hat{e}_\phi$, que formam uma base ortonormal.

Neste momento faz-se necessário a introdução do conceito de peso de spin a fim de que ao final do capítulo, após os harmônicos esféricos, discutamos a equação de Laplace projetiva.

Uma quantidade η tem peso de spin s se sob a transformação

$$O' = \exp\{i\frac{\alpha}{2}\}O \quad (4.20)$$

transforma-se de acordo com

$$\eta' = \exp\{is\alpha\}\eta. \quad (4.21)$$

Assim, O tem peso de spin $1/2$ e como $\ell = \epsilon \bar{O} = \epsilon \exp\{-i\frac{\alpha}{2}\}\bar{O} = \exp\{-i\frac{\alpha}{2}\}$, ℓ tem peso de spin $-1/2$. Também, se η tem peso de spin s então $\bar{\eta}$ tem peso de spin $-s$. Outro modo de dizer isto é, η tem peso de spin s , se sob rotações das bases ortogonais $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ gerada pelas coordenadas esféricas, por um ângulo α em torno

de \hat{e}_r , η transforma-se de acordo com a equação (4.20). Assim, sob estas rotações \hat{e}_r é invariante, \hat{e}_r tem peso de spin zero, mas \hat{e}_θ e \hat{e}_ϕ transformam-se de acordo com

$$\cos \alpha \hat{e}_\theta - \sin \alpha \hat{e}_\phi \text{ e } \sin \alpha \hat{e}_\theta + \cos \alpha \hat{e}_\phi$$

respectivamente, e assim não podemos definir o spin para \hat{e}_θ nem para \hat{e}_ϕ . Mas, as combinações $\hat{e}_\theta \pm \hat{e}_\phi$ transformam-se de acordo com

$$(\cos \alpha \hat{e}_\theta - \sin \alpha \hat{e}_\phi) \pm i (\sin \alpha \hat{e}_\theta + \cos \alpha \hat{e}_\phi) = \exp\{\pm i\alpha\} (\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi)$$

isto é, $(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi)$ e $(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)$ têm peso de spin um e menos um, respectivamente.

Então, qualquer campo vetorial F , em R^3 , pode ser escrito como

$$F = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta + F_\phi \hat{e}_\phi \quad (4.22)$$

com as componentes F_r , F_θ e F_ϕ determinadas por $F_r = F \cdot \hat{e}_r$, $F_\theta = F \cdot \hat{e}_\theta$ e $F_\phi = F \cdot \hat{e}_\phi$, onde o ponto denota o produto escalar, e dado que \hat{e}_r e $\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi$ têm peso de spin zero, um e menos um, respectivamente, as combinações das componentes de F , têm peso de spin zero, um e menos um, respectivamente.

Introduzindo as quantidades

$$F_+ \equiv F_\theta + iF_\phi \quad \text{e} \quad F_- \equiv F_\theta - iF_\phi \quad (4.23)$$

na equação (4.22) obtemos

$$F = F_r \hat{e}_r + \frac{1}{2} F_- (\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \frac{1}{2} F_+ (\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi) \quad (4.24)$$

a qual expressa um campo vetorial arbitrário F em termos de componentes que têm peso de spin definidos.

Agora vamos introduzir os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ [45] que atuam sobre funções η com peso de spin s definidas sobre a esfera pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}\eta &\equiv -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\eta + s(\cot\theta)\eta \\
&= -\sin^s\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\sin^{-s}\theta)\eta
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}\eta &\equiv -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\eta - s(\cot\theta)\eta \\
&= -\sin^{-s}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\sin^s\theta)\eta
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

Estes operadores são lineares e satisfazem a regra de Leibniz: isto é, se η e κ têm peso de spin s e \bar{s} respectivamente, então $\hat{\sigma}(\eta\kappa) = \eta\hat{\sigma}\kappa + \kappa\bar{\sigma}\eta$ e $\bar{\sigma}(\eta\kappa) = \eta\bar{\sigma}\kappa + \kappa\hat{\sigma}\eta$. São válidas também as seguintes relações [44]

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}O^A &= \text{zero}, & \hat{\sigma}\ell^A &= -O^A \\
\bar{\sigma}O^A &= \ell^A, & \bar{\sigma}\ell^A &= \text{zero}
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

As expressões (4.27) mostram que $\hat{\sigma}$ sobe o spin em uma unidade e $\bar{\sigma}$ abaixa o spin em uma unidade.

Por outro lado os operadores gradiente, divergente e rotacional, escritos em coordenadas esféricas são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \\
\nabla \cdot F &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{i}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{i}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla \times F &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\phi \sin \theta) - \frac{\partial F}{\partial \theta} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right] \hat{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} F_r \right] \hat{e}_\phi.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Estas expressões podem ser simplificadas quando tomamos as combinações de componentes e vetores que têm peso de spin definido. Então, a partir das expressões (4.23), (4.24), (4.25) e (4.26) levando em conta que F_r, F_+ e F_- têm peso de spin zero, um e menos um, respectivamente, e que para qualquer escalar f temos peso de spin zero, obtemos das equações (4.28) que

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{1}{2r} \bar{\partial} f (\hat{e}_\theta + i \hat{e}_\phi) - \frac{1}{2r} \partial f (\hat{e}_\theta - i \hat{e}_\phi) \\
\nabla \cdot F &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) - \frac{1}{2r} \partial F_- - \frac{1}{2r} \bar{\partial} F_+ \\
\nabla \times F &= \frac{1}{2ir} (\partial F_- - \bar{\partial} F_+) \hat{e}_r + \frac{1}{2ir} \left(\frac{\partial}{\partial r} r F_- + \bar{\partial} F_r \right) (\hat{e}_\theta + i \hat{e}_\phi) \\
&\quad - \frac{1}{2ir} \left(\frac{\partial}{\partial r} r F_+ + \partial F_- \right) (\hat{e}_\theta - i \hat{e}_\phi).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Agora usando a identidade $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla (\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$, as equações (2.26) e o fato que $\partial \bar{\partial} = \bar{\partial} \partial$ quando atuam sobre quantidades com peso de spin zero (em geral, se η tem peso de spin s , $\bar{\partial} \bar{\partial} \eta - \partial \bar{\partial} \eta = 2s\eta$) obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 F &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r^2} \bar{\partial} \partial F_r + \frac{1}{r^2} \partial F_- + \frac{1}{r^2} \bar{\partial} F_- \right] \hat{e}_r \\
&+ \left[\frac{1}{2r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r F_+ + \frac{1}{2r^2} \bar{\partial} \partial F_- - \frac{1}{r^2} \bar{\partial} F_r \right] (\hat{e}_\theta + i \hat{e}_\phi) \\
&+ \left[\frac{1}{2r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r F_+ + \frac{1}{2r^2} \partial \bar{\partial} F_+ - \frac{1}{r^2} \partial F_r \right] (\hat{e}_\theta - i \hat{e}_\phi).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Então, podemos ter uma simplificação adicional do laplaciano de um campo vetorial, usando os harmônicos esféricos com peso de spin. Estas são funções com peso de spin definido sobre a esfera que servem como base para as representações lineares irredutíveis do grupo de rotações. Estas funções incluem como caso especial os harmônicos esféricos usuais, que são discutidos na próxima seção.

4.2 Os harmônicos esféricos

As soluções regulares, isto é, não divergentes, da equação de autovalores

$$L^2 f = l(l+1)f \tag{4.31}$$

onde $L^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ é, exceto por um fator \hbar^2 , o operador que representa o quadrado do momento angular orbital de uma partícula em mecânica quântica, que recebe o nome de harmônico esférico de ordem l .

Em coordenadas esféricas L^2 é escrito como

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

que está relacionado com o operador laplaciano, em coordenadas esféricas, através de

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2}$$

Os harmônicos esféricos (ordinários) de ordem l (com l inteiro não negativo) são polinômios homogêneos de grau l nas variáveis $n^i \equiv x^i/|x|$, onde x^i são coordenadas cartesianas e $|x|$ é a norma do vetor $x = (x^1, x^2, x^3)$, tais que o traço de seus coeficientes é igual a zero, isto é,

$$p_l = \phi_{ij\dots k} n^i n^j \dots n^k \quad (4.32)$$

é um harmônico esférico de ordem l , se e somente se, os coeficientes $\phi_{ij\dots k}$, simétricos em seus l índices, têm traço igual a zero sobre qualquer par de índices,

$$\phi_{ij\dots r\dots r\dots k} = 0 \quad (4.33)$$

O vetor (n^1, n^2, n^3) , corresponde a um ponto da esfera (unitária), visto que p_l é uma função definida sobre a esfera unitária.

Provemos que (4.32) é um harmônico esférico, se e somente se, satisfaz a equação (4.33).

Como $n^i \equiv (x^i/|x|) = x^i/r$ temos

$$\nabla^2 (r^l p_l) = \phi_{ij\dots k} \nabla^2 (x^i x^j \dots x^k)$$

e da expressão do laplaciano, em coordenadas cartesianas, resulta

$$\nabla^2 (x^i x^j \dots x^k) = 2 (\delta^{ij} \dots x^k + x^j \dots \delta^{ik} + \dots + x^i \dots \delta^{jk}).$$

Assim, supondo que se satisfaça a equação (4.33), obtemos

$$\nabla^2 (r^l p_l) = 0 \quad (4.34)$$

e por outro lado, notando que p_l depende só das coordenadas θ e ϕ , temos

$$\nabla^2 (r^l p_l) = p_l \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} r^l - \frac{r^l}{r^2} L^2 p_l = r^{l-2} [l(l+1)p_l - L^2 p_l] \quad (4.35)$$

de onde concluímos que

$$L^2 p_l = l(l+1)p_l. \quad (4.36)$$

Também das equações (4.34) e (4.35) vemos que a condição (4.36) implica na condição (4.33).

Em termos dos espinores O e ℓ definidos em (4.17) e (4.18), respectivamente, temos que $n^i = \sigma_{AB}^i \ell^A O^B$, onde σ_{AB}^i coincide com σ_{iAB} já que o tensor métrico, pelo qual se sobem e abaixam índices para as coordenadas cartesianas é δ_{ij} . Substituindo $n^i = \sigma_{AB}^i \ell^A O^B$ na equação (4.32) obtemos:

$$p_l = \phi_{ij\dots k} \sigma_{AB}^i \ell^A O^B \sigma_{CD}^j \ell^C O^D \dots \sigma_{EF}^k \ell^E O^F = \phi_{ABCD\dots EF} \ell^A \ell^B \dots O^E O^B O^D \dots O^F \quad (4.37)$$

com

$$\phi_{ABCD\dots EF} \equiv \phi_{ij\dots k} \sigma_{AB}^i \sigma_{CD}^j \dots \sigma_{EF}^k$$

Assim, por meio de σ_{AB}^i cada índice vetorial i , que pode tomar os valores 1, 2, 3, é substituído por um par de índices simétricos espinoriais AB , que podem tomar as combinações independentes de valores 11, 12, 22. Os coeficientes $\phi_{AB\dots F}$ têm $2l$ índices e, já que $\sigma_{iAB} = \sigma_{iBA}$, são simétricos em cada uma de suas duplas de índices AB, CD, \dots, EF . demonstra-se que os coeficientes $\phi_{AB\dots F}$ são totalmente simétricos.

se e somente se, satisfazem a equação (4.33), [45]. Também demonstra-se que ao se efetuar uma rotação representada por uma matriz $Q_i^j \in \text{SO}(3)$, o harmônico esférico p_l dado por (4.32) transforma-se em outro harmônico esférico de mesma ordem, com coeficiente $\tilde{\phi}_{ij\dots k}$ expresso por

$$\tilde{\phi}_{ij\dots k} = \tilde{Q}_i^r \tilde{Q}_j^s \dots \tilde{Q}_k^t \phi_{rs\dots t} \quad (4.38)$$

onde \tilde{Q}_i^j é a matriz inversa de Q_i^j , sendo esta uma matriz ortogonal, $\tilde{Q}_i^j = Q_i^j$.

Sob a transformação (4.20) cada componente de O é multiplicada por $\exp\{i\frac{\alpha}{2}\}$ e cada componente de ℓ por $\exp\{-i\frac{\alpha}{2}\}$; assim, já que a expressão (4.37) é totalmente simétrica em seus $2l$ índices, permanece invariante sob estas transformações, logo os harmônicos esféricos usuais têm peso de spin igual a zero.

Enfim, passemos agora a definir um harmônico esférico de ordem j .

Um harmônico esférico de ordem j (onde j pode tomar valores $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) com peso de spin s é uma função da forma

$${}_s p_j = \phi_{AB\dots CDE\dots F} \ell^A \ell^B \dots \ell^C O^D O^E \dots O^F \quad (4.39)$$

com coeficientes $\phi_{AB\dots F}$ sendo totalmente simétricos em seus $2j$ índices e onde existem $j + s$ fatores O^D, O^E, \dots, O^F e $j - s$ fatores $\ell^A, \ell^B, \dots, \ell^C$.

Já que $j + s$ e $j - s$ somente podem ser números inteiros não negativos, resulta que j e s podem, simultaneamente, ser inteiros ou semi-inteiros e

$$j \geq |s| \quad (4.40)$$

Também, já que os coeficientes da função (4.39) são totalmente simétricos em seus $2j$ índices, o conjunto de harmônicos esféricos de ordem j com peso de spin s formam um espaço vetorial de dimensão $(2j + 1)$.

Uma outra forma alternativa para construir os harmônicos esféricos, que é muito conveniente, mostra sua relação com algumas aplicações desta funções.

Seja ${}_s p_j$ um harmônico esférico com peso de spin s , então $\bar{\partial}_s p_j$ e $\partial_s p_j$ são harmônicos esféricos com peso de spin $s + 1$ e $s - 1$, respectivamente. De fato, de (4.39) e (4.25), usando a linearidade de ∂ , a regra de Leibniz, e que as funções $\phi_{AB\dots F}$ são constantes totalmente simétricas em seus índices e que em ${}_s p_j$, aparecem $j - s$ fatores ℓ , obtém-se:

$$\partial_s p_j = -(j + s)\phi_{AB\dots CDE\dots F}\ell^A\ell^B\dots O^C O^D O^E\dots O^F \quad (4.41)$$

que contém $j + s + 1$ fatores O e $j - s - 1$ fatores ℓ e, portanto, se $j \neq s$, é um harmônico esférico de ordem j e peso de spin $s + 1$. Da mesma forma

$$\bar{\partial}_s p_j = (j + s)\phi_{AB\dots CDE\dots F}\ell^A\ell^B\dots \ell^C \ell^D O^E\dots O^F \quad (4.42)$$

o qual, para s e $j \neq -s$, é um harmônico esférico de ordem j e peso de de spin $s - 1$.

Combinando as equações (4.41) e (4.42) usando que $\bar{\partial}_s p_j$ e $\partial_s p_j$ têm peso de spin $s + 1$ e $s - 1$ respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\partial_s p_j &= -(j - s)(j + s + 1){}_s p_j = [s(s + 1) - j(j + 1)]{}_s p_j \\ \partial\bar{\partial}_s p_j &= -(j + s)(j - s + 1){}_s p_j = [s(s - 1) - j(j + 1)]{}_s p_j \end{aligned} \quad (4.43)$$

isto é, os harmônicos esféricos com peso de spin são autofunções de $\bar{\partial}\partial$ e de $\partial\bar{\partial}$, com distintos autovalores se $s \neq 0$. Se $s = 0$ temos que

$$\bar{\partial}\partial - \partial\bar{\partial} = -L^2 \quad (4.44)$$

em geral. se $s \neq 0$, de (4.25) e (4.26) resulta

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} \partial &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2is \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{s^2}{\sin^2 \theta} + s(s+1) \\
&= -L^2 + 2is \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{s^2}{\sin^2 \theta} + s(s+1)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

e

$$\bar{\partial} \partial - \partial \bar{\partial} = 2s \tag{4.46}$$

Sejam f e y funções definidas sobre a esfera; então a expressão

$$(f, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{f}(\theta, \phi) y(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \tag{4.47}$$

define um produto interno em relação ao qual $\partial^T = -\bar{\partial}$ e $\bar{\partial}^T = -\partial$.

Os harmônicos esféricos com peso de spin s básicos [45], denotados por ${}_s Y_{jm}$, são harmônicos esféricos com peso de spin s e ordem j normalizados, isto é

$$({}_s Y_{jm}, {}_s Y_{jm}) = 1 \tag{4.48}$$

que são autofunções de $L_3 \equiv i \frac{\partial}{\partial \phi}$ com autovalor m :

$$L_3({}_s Y_{jm}) = m {}_s Y_{jm}. \tag{4.49}$$

Da equação (4.41) e devido ao fato que ∂ e L_3 comutam, segue que

$$\partial({}_s Y_{jm}) = C(s) {}_{s+1} Y_{jm}$$

onde $|C(s)|^2 = (j-s)(j+s+1)$ e da equação (4.42) obtemos

$$\bar{\partial}({}_s Y_{jm}) = D(s) {}_{s-1} Y_{jm}$$

com $|D(s)|^2 = (j+s)(j-s+1)$ onde $|C(s)|^2$ e $|D(s)|^2$ são obtidos usando (4.48).

Logo, a partir da relação $\partial \bar{\partial} {}_s Y_{jm} = D(s) \partial_{s-1} Y_{jm} = D(s) C(s) {}_s Y_{jm}$ e comparando com (4.43) resulta que

$$D(s)C(s-1) = -(j+s)(j-s+1). \quad (4.50)$$

Assim, escolhendo $C(s)$ real e positivo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial ({}_s Y_{jm}) &= [(j-s)(j+s+1)]^{\frac{1}{2}} {}_s Y_{jm} \\ \bar{\partial} ({}_s Y_{jm}) &= -[(j+s)(j-s+1)]^{\frac{1}{2}} {}_s Y_{jm} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Usando estas relações obtemos, para l inteiro, as expressões

$${}_s Y_{jm} = \begin{cases} \left[\frac{(j-s)!}{(j+s)!} \right]^{\frac{1}{2}} \partial^s Y_{jm} & 0 \leq s \leq j \\ (-1)^s \left[\frac{(j+s)!}{(j-s)!} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{\partial}^{-s} Y_{jm} & -j \leq s \leq 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

o que nos dá uma forma de obter ${}_s Y_{jm}$, para s e j inteiros, a partir dos harmônicos esféricos ordinários, Y_{jm} .

4.3 Equação de Laplace projetiva

Como uma aplicação do método apresentado acima, discutimos a equação de Laplace no universo de de Sitter em coordenadas esféricas e obtemos a solução em função dos harmônicos esféricos espinoriais [47].

A equação de Laplace projetiva é dada por [27]

$$\left[A^2 \left(R^2 \partial_i^2 + x_i x_j \partial_i \partial_j + 2x_i \partial_j \right) + N(N+2) \right] \Psi_N(x_i) = 0 \quad (4.53)$$

onde $A^2 = 1 + \frac{x_i^2}{R^2}$ com $i, j = 1, 2, 3$; N é o chamado grau de homogeneidade da função $\Psi_N(x)$ e R é o raio do universo de de Sitter.

Introduzindo coordenadas esféricas

$$x_1 = R\rho \cos \theta, \quad x_2 = R\rho \cos \theta \sin \phi, \quad x_3 = R\rho \sin \theta \sin \phi$$

na equação acima, obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} (1 + \rho^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \\ \frac{\cot \theta}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{N(N+2)}{1 + \rho^2} \Psi = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde $\Psi \equiv \Psi_N(\rho, \theta, \phi)$.

A equação anterior pode ser escrita como

$$\nabla^2 \Psi + \left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{1 + \rho^2} N(N+2) \right] \Psi = 0 \quad (4.55)$$

e agora suponhamos para esta última equação (usando o fato que o conjunto de harmônicos esféricos com peso de spin é completo) a solução da forma

$$\begin{aligned} \Psi_\rho &= \sqrt{j(j+1)} f(\rho) Y_{jm}(\theta, \phi) \\ \Psi_+ &= g_1(\rho) {}_1Y_{jm}(\theta, \phi) \\ \Psi_- &= g_2(\rho) {}_{-1}Y_{jm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde o fator $\sqrt{j(j+1)}$ é introduzido por conveniência e usamos o fato que as componentes Ψ_ρ , Ψ_+ e Ψ_- têm spin zero, um e menos um, respectivamente.

Introduzindo as funções (4.56) na equação (4.30) com F igual a Ψ , e usando as relações (4.51) e (4.43), e o fato que o conjunto $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi\}$ é linearmente independente obtemos as seguintes equações diferenciais ordinárias acopladas

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 f) \right] - \frac{j(j+1)}{\rho^2} f - \frac{1}{\rho^2} g_1 + \frac{1}{\rho^2} g_2 + \rho^2 \frac{d}{d\rho} f + \frac{N(N+2)}{1+\rho^2} f = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{1}{2\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho g_2) - \frac{j(j+1)}{2\rho^2} g_2 + \frac{j(j+1)}{\rho^2} f + \frac{\rho^2}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} g_2 + \rho \frac{d}{d\rho} g_2 + \frac{N(N+2)}{2(1+\rho^2)} g_2 = 0 \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{2\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho g_1) - \frac{j(j+1)}{2\rho^2} g_1 - \frac{j(j+1)}{\rho^2} f + \frac{\rho^2}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} g_1 + \rho \frac{d}{d\rho} g_1 + \frac{N(N+2)}{2(1+\rho^2)} g_1 = 0 \quad (4.59)$$

Agora introduzindo as funções $G \equiv \frac{g_1 + g_2}{2}$ e $H \equiv \frac{g_2 - g_1}{2}$ e usando as equações (4.58) e (4.59) obtemos

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{N(N+2)}{(1+\rho^2)^2} - \frac{j(j+1)}{\rho^2(1+\rho^2)} \right] G = 0. \quad (4.60)$$

A solução da equação anterior é dada por

$$G = \frac{1}{\rho} (1+\rho^2)^{-\frac{N}{2}} F_N^j(\rho) \tilde{F}_N^j(\rho) \quad (4.61)$$

onde $F_N^j(\rho)$ e $\tilde{F}_N^j(\rho)$ são dadas como segue [48]

$$\begin{aligned} F_N^j(\rho) &= \rho^{j+1} \sum_{k=0}^{[N-j]/2} \frac{(-1)^k (N-j+1)! \Gamma(j+3/2)}{(N-j-2k)! \Gamma(k+j+3/2) k!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \\ \tilde{F}_N^j(\rho) &= \frac{1}{\rho^j} \sum_{k=0}^{[N+j+1]/2} \frac{(-1)^k (N+j+1)! \Gamma(-j+1/2)}{(N+j+1-2k)! \Gamma(k-j+1/2) k!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \quad (4.62)$$

com $N \geq j$.

Agora, reescrevendo a equação (4.57) e subtraindo as equações (4.58) e (4.59), obtemos

$$(1 + \rho^2) \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} (1 + \rho^2) \frac{df}{d\rho} - \frac{j(j+1)}{\rho^2} f - \frac{2}{\rho^2} f + \frac{2}{\rho^2} H + \frac{N(N+2)}{1 + \rho^2} f = 0 \quad (4.63)$$

$$(1 + \rho^2) \frac{d^2 H}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} (1 + \rho^2) \frac{dH}{d\rho} - \frac{j(j+1)}{\rho^2} H + \frac{2j(j+1)}{\rho^2} f + \frac{N(N+2)}{1 + \rho^2} H = 0 \quad (4.64)$$

Então, multiplicando a equação (4.63) por uma constante arbitrária k e usando a equação (4.64) obtemos

$$(1 + \rho^2) \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \frac{j(j+1)}{\rho^2(1 + \rho^2)} + \frac{N(N+2)}{(1 + \rho^2)^2} \right] (kf + H) + \left[\frac{2j(j+1)}{k} - 2 \right] \frac{k}{\rho^2} f + \frac{2k}{\rho^2} H = 0 \quad (4.65)$$

Agora, tomando k tal que $\frac{2j(j+1)}{k} - 2 = 2k$, obtemos $k = j$ e $k = -(j+1)$.

Para $k = j$ a equação (4.65) toma a forma

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{N(N+2)}{(1 + \rho^2)^2} - \frac{j(j-1)}{\rho^2(1 + \rho^2)} \right] (lf + H) = 0 \quad (4.66)$$

a solução desta equação diferencial é dada por (tomando $j \rightarrow -j$ na equação (4.60))

$$(lf + H) = \frac{1}{\rho} (1 + \rho^2)^{-N/2} F_N^{-j}(\rho) \tilde{F}_N^{-j}(\rho) \quad (4.67)$$

e para $k = -(j+1)$, obtemos a partir da equação (4.65), a seguinte equação

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{N(N+2)}{(1 + \rho^2)^2} - \frac{(j+2)(j+1)}{\rho^2(1 + \rho^2)} \right] (H - (j+1)f) = 0. \quad (4.68)$$

A solução desta equação diferencial é dada por (tomando $j \rightarrow j+1$ na equação (4.60))

$$(H - (j + 1)f) = \frac{1}{\rho}(1 + \rho^2)^{-N/2} F_N^{j+1}(\rho) \tilde{F}_N^{j+1}(\rho) \quad (4.69)$$

onde as funções $F_N^{-j}(\rho)$, $F_N^{j+1}(\rho)$, $\tilde{F}_N^{-j}(\rho)$ e $\tilde{F}_N^{j+1}(\rho)$ são dadas na equação (4.62).

Resolvendo o sistema para $f(\rho)$, $g_1(\rho)$ e $g_2(\rho)$ de (4.61), (4.67) e (4.69) e introduzindo estas funções em (4.56), obtemos para $j > 0$

$$\begin{aligned} \Psi_\rho &= \frac{\sqrt{j(j+1)}(1+\rho^2)^{-N/2}}{2l+1} \frac{1}{\rho} \{F_N^{-l}(\rho)\tilde{F}_N^{-l}(\rho) - F_N^{l+1}(\rho)\tilde{F}_N^{l+1}(\rho)\} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \Psi_+ &= \frac{1}{\rho}(1+\rho^2)^{-N/2} \{F_N^j(\rho)\tilde{F}_N^j(\rho) - \frac{(j+1)}{(2j+1)}F_N^{-j}(\rho)\tilde{F}_N^{-j}(\rho) - \\ &\quad - \frac{j}{2j+1}F_N^{j+1}(\rho)\tilde{F}_N^{j+1}(\rho)\} {}_1Y_{jm} \\ \Psi_- &= \frac{1}{\rho}(1+\rho^2)^{-N/2} \{F_N^j(\rho)\tilde{F}_N^j(\rho) + \frac{(j+1)}{(2j+1)}F_N^{-j}(\rho)\tilde{F}_N^{-j}(\rho) + \\ &\quad + \frac{j}{2j+1}F_N^{j+1}(\rho)\tilde{F}_N^{j+1}(\rho)\} {}_{-1}Y_{jm} \end{aligned} \quad (4.70)$$

No caso particular, quando temos $j = 0$, as componentes Ψ_\pm são iguais a zero (a partir da definição (4.52)) e assumimos para a equação (4.55), a solução da forma

$$\Psi_\rho = f(\rho) \quad ; \quad \Psi_+ = 0 \quad ; \quad \Psi_- = 0 \quad (4.71)$$

Como $j = 0$ implica $m = 0$, e assim Y_{00} é uma constante. Intoduzindo as funções (4.71) na equação 4.30. com F igual a Ψ da equação (4.55). obtemos

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{2}{\rho^2(1+\rho^2)} + \frac{N(N+2)}{(1+\rho^2)^2} \right] f(\rho) = 0 \quad (4.72)$$

A solução da equação anterior é dada por (equação (4.60) com $j = 1$)

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho} (1 + \rho^2)^{-\frac{N}{2}} F_N^1(\rho) \hat{F}_N^1(\rho)$$

onde $F_N^j(\rho)$ e $\hat{F}_N^j(\rho)$ são definidas na equação (4.62) com $j = 1$.

Assim, a solução para a equação (4.55) com $j = 1$ é dada por

$$\Psi = \left[\frac{1}{\rho} (1 + \rho^2)^{-N/2} F_N^1(\rho) \hat{F}_N^1(\rho) \right] \cdot \hat{e}_\rho \quad (4.73)$$

onde $\Psi \equiv \Psi(\rho, \theta, \phi)$.

Capítulo 5

Equação de Dirac

Neste capítulo obtemos e discutimos a equação de onda de Dirac no universo de de Sitter. Esta equação é obtida fatorando-se o operador de Casimir de segunda ordem em dois fatores lineares nos momentos. Usando as coordenadas projetivas introduzidas no capítulo 1 e posteriormente os operadores diferenciais em coordenadas esféricas (2.2), obtemos de forma explícita, tal equação. A partir da técnica introduzida no capítulo anterior, reduzimos a equação original a um sistema de quatro equações diferenciais parciais. Resolvemos este sistema em termos dos harmônicos esféricos espinoriais, no caso limite, isto é, quando fazemos tender para zero a curvatura do espaço e assim obtemos os resultados clássicos da equação de Dirac no espaço chato. É também discutido o caso estacionário.

5.1 Fatoração do operador de segunda ordem

O operador invariante de Casimir de segunda ordem (1.16) pode ser escrito, usando os dez operadores momentos angulares pentadimensionais L_{ab} , como segue

$$\frac{1}{2}L_{ab}L_{ab} = -R^2M^2 \quad (5.1)$$

onde $L_{ab} = -L_{ba}$ e $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$.

Agora, definindo M^2 , como sendo [49]

$$M^2 = m^2 + 3i\hbar m/R. \quad (5.2)$$

onde m é um escalar real, temos que para $R \rightarrow \infty$ implica em $M^2 \rightarrow m^2$.

Por outro lado, lembrando a definição (1.9), isto é

$$L_{ab} = \xi_a p_b - \xi_b p_a = -i\hbar \left[\xi_a \frac{\partial}{\partial \xi_b} - \xi_b \frac{\partial}{\partial \xi_a} \right]$$

podemos escrever o lado esquerdo da equação (5.1) como segue

$$\frac{1}{2} L_{ab} L_{ab} = (\xi\xi)(pp) - (\xi p)^2 + 3i\hbar(\xi p) \quad (5.3)$$

onde $\xi\xi = \xi_a \xi_a$; $pp = p_a p_a$; $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_4)$ e $p = (p_0, \dots, p_4)$.

Logo substituindo as identidades (5.2) e (5.3) na equação (5.1) obtemos

$$(\xi\xi)(pp) - (\xi p)^2 + 3i\hbar(\xi p) + R^2 m^2 + 3i\hbar m R = 0. \quad (5.4)$$

A partir da seguinte identidade

$$\left(\frac{1}{2} \Upsilon_a \Upsilon_b L_{ab} \right)^2 = -(\xi\xi)(pp) - 3i\hbar(\Upsilon\xi)(\Upsilon p) + (\xi p)^2 \quad (5.5)$$

onde $\Upsilon = (\Upsilon_0, \dots, \Upsilon_4)$ e sendo Υ_a matrizes 4×4 satisfazendo a relação

$$\Upsilon_a \Upsilon_b + \Upsilon_b \Upsilon_a = 2\delta_{ab}$$

e notando que

$$\Upsilon_a \Upsilon_b L_{ab} = 2(\Upsilon\xi)(\Upsilon p) - 2(\xi p) \quad (5.6)$$

obtemos a seguinte equação

$$\left(\frac{1}{2} \Upsilon_a \Upsilon_b L_{ab} \right)^2 - R^2 m^2 + 3i\hbar \left(\frac{1}{2} \Upsilon_a \Upsilon_b L_{ab} - mR \right) = 0. \quad (5.7)$$

Esta última equação pode ser fatorada em dois fatores lineares nos operadores L_{ab} , como segue

$$\left(\frac{1}{2}\Upsilon_a\Upsilon_bL_{ab} - Rm\right)\left(\frac{1}{2}\Upsilon_a\Upsilon_bL_{ab} + Rm + 3i\hbar\right) = 0.$$

Logo, introduzindo a função de onda de quatro componentes Ψ obtemos duas equações diferenciais parciais, como segue

$$\left(\frac{1}{2}\Upsilon_a\Upsilon_bL_{ab} - Rm\right)\Psi = 0 \quad (5.8)$$

ou

$$\left(\frac{1}{2}\Upsilon_a\Upsilon_bL_{ab} + Rm + 3i\hbar\right)\Psi = 0 \quad (5.9)$$

Observe que a equação de onda (5.8) é a mesma postulada por Dirac em [4]. No que segue discutiremos só esta equação, a equação (5.9) é totalmente análoga*.

Antes de discutirmos a equação de onda (5.8) utilizando o método discutido no capítulo 1, mostraremos brevemente que esta equação se reduz à equação de Dirac no espaço chato quando $R \rightarrow \infty$.

Para tal observemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Upsilon_a\Upsilon_\lambda\Pi_\lambda = -i\Upsilon'_\lambda p_\lambda$$

onde Π_λ é dado por (1.11) com $\lambda = 0, 1, 2, 3$. e as quatro matrizes $\Upsilon'_\lambda = i\Upsilon_0\Upsilon_\lambda$ são hermiteanas e obedecem as mesmas regras de comutação das matrizes Υ_λ [14]. Assim, no limite obtemos

$$\Upsilon'_\lambda p_\lambda \Psi = im\Psi$$

onde m^2 é o limite de M^2 quando $R \rightarrow \infty$. Isto mostra que a equação (5.8) se reduz à equação de Dirac no espaço chato.

* Observe que a equação (5.9) se obtém da equação (5.8) fazendo $m \rightarrow -m - \frac{3i\hbar}{R}$.

5.2 A equação de Dirac em coordenadas esféricas

Agora, podemos escrever a equação (5.8) em termos das coordenadas projetivas, introduzindo os operadores definidos em (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) como segue

$$\begin{aligned} & \{ \Upsilon_0 \Upsilon_1 i c V_1 + \Upsilon_0 \Upsilon_2 i c V_2 + \Upsilon_0 \Upsilon_3 i c V_3 - \Upsilon_0 \Upsilon_4 i c R T_0 + \Upsilon_1 \Upsilon_2 L_3 \\ & - \Upsilon_1 \Upsilon_3 L_2 + \Upsilon_1 \Upsilon_4 R T_1 + \Upsilon_2 \Upsilon_3 L_1 + \Upsilon_2 \Upsilon_4 R T_2 + \Upsilon_3 \Upsilon_4 R T_3 - R m \} \Psi = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

A equação acima pode ser escrita de forma explícita, introduzindo os operadores diferenciáveis (2.2) em coordenadas esféricas, como segue

$$\mathcal{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{B} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathcal{C} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathcal{D} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = k \Psi \quad (5.11)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) I_2 & -r \left(1 - \frac{t}{R} \right) \sigma_r \\ -r \left(1 + \frac{t}{R} \right) \sigma_r & -R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) I_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{rt}{R} I_2 & \left(t + \frac{(r^2 + R^2)}{R} \right) \sigma_r \\ \left(t - \frac{(r^2 + R^2)}{R} \right) \sigma_r & -\frac{rt}{R} I_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -i \sigma_\phi & \frac{(t+R)}{r} \sigma_\theta \\ \frac{(t-R)}{r} \sigma_\theta & -i \sigma_\phi \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} i r \sigma_\theta & (t+R) \sigma_\phi \\ (t-R) \sigma_\phi & i r \sigma_\theta \end{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta}$$

e $k = \frac{Rm}{i\hbar} I_4$ onde $\sigma_\theta \equiv \sigma \cdot \hat{e}_\theta$; $\sigma_\phi = \sigma \cdot \hat{e}_\phi$; $\sigma_r = \sigma \cdot \hat{e}_r$ e I_2 ; I_4 são as matrizes identidades 2×2 e 4×4 respectivamente, e usamos as seguintes representações para as matrizes Υ_a

$$\Upsilon_\lambda = \Upsilon_0 \alpha_\lambda \quad e \quad \Upsilon_4 = \Upsilon_0 \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3$$

onde

$$\alpha_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\lambda \\ \sigma_\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Upsilon_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 1, 2, 3$ e os σ_λ são dados por (4.1), $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e o ponto \cdot denota o produto escalar. Esta é a equação de Dirac, em coordenadas esféricas, no Universo de de Sitter ou ainda, a equação de Dirac projetiva [50].

Agora, com o objetivo de resolver a equação diferencial acima, introduzimos a função de onda Ψ como segue

$$\Psi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

onde u e v são espinores de duas componentes e usando o fato que os espinores O e ℓ definidos por (4.17) e (4.18) formam uma base, podemos então escrever

$$u = u_- O - u_+ \ell \quad ; \quad v = v_- O - v_+ \ell \quad (5.13)$$

Por outro lado, temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \nabla u &= \sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \sigma_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \sigma \cdot \nabla (u_- O) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_-) O + \left(\frac{1}{r} \bar{\partial} u_- \right) \ell \\ \sigma \cdot \nabla (u_+ O) &= \left(\frac{1}{r} \bar{\partial} u_+ \right) O - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_+) \ell \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ são definidos por (4.25) e (4.26) respectivamente.

Assim, usando as identidades (5.12), (5.13) e (5.14) podemos escrever a equação diferencial anterior (5.11) como duas outras. isto é:

$$\begin{aligned}
& R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) I_2 \left(\frac{\partial u_-}{\partial t} O - \frac{\partial u_+}{\partial t} \ell \right) - r \left(1 - \frac{t}{R} \right) \left(\sigma_r \frac{\partial v_-}{\partial t} O - \sigma_r \frac{\partial v_+}{\partial t} \ell \right) + \\
& + (t + R) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_-) O + \left(\frac{1}{r} \partial v_- \right) \ell - \left(\frac{1}{r} \bar{\partial} v_+ \right) O + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_+) \ell \right] + \quad (5.15) \\
& + \frac{r^2}{R} \left(\sigma_r \frac{\partial v_-}{\partial r} O - \sigma_r \frac{\partial v_+}{\partial r} \ell \right) + \frac{rt}{R} I_2 \left(\frac{\partial u_-}{\partial r} O - \frac{\partial u_+}{\partial r} \ell \right) \\
& - i \left(\sigma_\phi \frac{\partial u_-}{\partial \theta} O + \sigma_\phi u_- \frac{\partial O}{\partial \theta} - \sigma_\phi \frac{\partial u_+}{\partial \theta} \ell - \sigma_\phi u_+ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{i}{\sin \theta} \left(\sigma_\theta \frac{\partial u_-}{\partial \phi} O + \sigma_\theta u_- \frac{\partial O}{\partial \phi} - \sigma_\theta \frac{\partial u_+}{\partial \phi} \ell - \sigma_\theta u_+ \frac{\partial \ell}{\partial \phi} \right) - ku_- O + ku_+ \ell = 0 \\
& - r \left(1 + \frac{t}{R} \right) \left(\sigma_r \frac{\partial u_-}{\partial t} O - \sigma_r \frac{\partial u_+}{\partial t} \ell \right) - R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) I_2 \left(\frac{\partial v_-}{\partial t} O - \frac{\partial v_+}{\partial t} \ell \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (t - R) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_-) O + \left(\frac{1}{r} \tilde{\sigma} u_- \right) \ell - \left(\frac{1}{r} \tilde{\sigma} u_+ \right) O + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_+) \ell \right] - \\
& - \frac{r^2}{R} \left(\sigma_r \frac{\partial u_-}{\partial r} O - \sigma_r \frac{\partial u_+}{\partial r} \ell \right) - \frac{rt}{R} I_2 \left(\frac{\partial v_-}{\partial r} O - \frac{\partial v_+}{\partial r} \ell \right) - \\
& - i \left(\sigma_\phi \frac{\partial v_-}{\partial \theta} O + \sigma_\phi v_- \frac{\partial O}{\partial \theta} - \sigma_\phi \frac{\partial v_+}{\partial \theta} \ell - \sigma_\phi v_+ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{i}{\sin \theta} \left(\sigma_\theta \frac{\partial v_-}{\partial \phi} O + \sigma_\theta v_- \frac{\partial O}{\partial \phi} - \sigma_\theta \frac{\partial v_+}{\partial \phi} \ell - \sigma_\theta v_+ \frac{\partial \ell}{\partial \phi} \right) - kv_- O + kv_+ \ell = 0
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Por outro lado, diretamente da definição dos espinores O e ℓ podemos escrever as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial O}{\partial \phi} &= \frac{i}{2} \epsilon O \quad ; \quad \frac{\partial O}{\partial \theta} = \frac{-1}{2} \ell \quad ; \quad \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{1}{2} O \quad ; \quad \frac{\partial \ell}{\partial \phi} = \frac{i}{2} \epsilon \ell \quad ; \quad \sigma_\theta O = -\ell \\
\sigma_\phi O &= -i \ell \quad ; \quad \sigma_r O = O \quad ; \quad \sigma_\theta \ell = -O \quad ; \quad \sigma_\phi \ell = i O \quad ; \quad \sigma_r \ell = -\ell \\
\sigma_\theta \epsilon O &= \sin \theta O + \cos \theta \ell \quad ; \quad \sigma_\theta \epsilon \ell = \sin \theta \ell - \cos \theta O
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde

$$\epsilon \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, usando o fato que o conjunto $\{O, -\ell\}$ é linearmente independente e as identidades (5.17), podemos escrever o sistema de duas equações diferenciais parciais (5.15) e (5.16) num sistema de quatro equações diferenciais parciais, como segue

$$\begin{aligned}
& R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial u_-}{\partial t} - r \left(1 - \frac{t}{R} \right) \frac{\partial v_-}{\partial t} + (t + R) \frac{\partial v_-}{\partial r} - (t + R) \frac{1}{r} \tilde{\sigma} v_+ \\
& + \frac{r^2}{R} \frac{\partial v_-}{\partial r} + \frac{rt}{R} \frac{\partial u_-}{\partial r} + \tilde{\sigma} u_+ - (1 + k) u_- + (t + R) \frac{1}{r} v_- = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial u_+}{\partial r} - r \left(1 - \frac{t}{R} \right) \frac{\partial v_+}{\partial t} + (t+R) \frac{\partial v_+}{\partial r} + (t+R) \frac{1}{r} \bar{\partial} v_- \\
& + \frac{r^2}{R} \frac{\partial v_+}{\partial r} - \frac{rt}{R} \frac{\partial u_+}{\partial r} + \bar{\partial} u_- + (1+k) u_+ + (t+R) \frac{1}{r} v_+ = 0 \\
& -r \left(1 + \frac{t}{R} \right) \frac{\partial u_-}{\partial t} - R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial v_-}{\partial t} + (t-R) \frac{\partial u_-}{\partial r} - (t-R) \frac{1}{r} \bar{\partial} u_+ \\
& - \frac{r^2}{R} \frac{\partial u_-}{\partial r} - \frac{rt}{R} \frac{\partial v_-}{\partial r} + \bar{\partial} v_+ - (1+k) v_- + (t-R) \frac{1}{r} u_- = 0 \\
& -r \left(1 + \frac{t}{R} \right) \frac{\partial u_+}{\partial t} + R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial v_+}{\partial t} + (t-R) \frac{\partial u_+}{\partial r} + (t-R) \frac{1}{r} \bar{\partial} u_- \\
& - \frac{r^2}{R} \frac{\partial u_+}{\partial r} + \frac{rt}{R} \frac{\partial v_+}{\partial r} + \bar{\partial} v_- + (1+k) v_+ + (t-R) \frac{1}{r} u_+ = 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

As equações anteriores podem ser separadas usando o método de separação das variáveis, então suporemos para este sistema, usando o fato que os harmônicos esféricos com peso de spin formam um conjunto completo, a seguinte solução

$$\begin{aligned}
u_- & \equiv g(r, t) {}_{-\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi) \\
u_+ & \equiv G(r, t) {}_{\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi) \\
v_- & \equiv f(r, t) {}_{-\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi) \\
v_+ & \equiv F(r, t) {}_{\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde $j \geq 1/2$, $-j \leq m \leq j$, e usamos o fato que as componentes u_- , v_- e u_+ , v_+ têm peso de spin $-1/2$ e $1/2$ respectivamente.

Introduzindo as funções (5.19) nas equações (5.18) e tendo em conta a expressão (4.51) temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} {}_{-\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi) & = (j+1/2) {}_{\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi) \\
\bar{\partial} {}_{\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi) & = -(j+1/2) {}_{-\frac{1}{2}}Y_{jm}(\theta, \phi)
\end{aligned}$$

de onde obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned}
& R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial g}{\partial t} - r \left(1 - \frac{t}{R} \right) \frac{\partial f}{\partial t} + \left(t + R + \frac{r^2}{R} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{rt}{R} \frac{\partial g}{\partial r} = \\
& = \left(j + \frac{1}{2} \right) G - (t + R) \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} F + (1 + k) g - (t + R) \frac{1}{r} f \\
\\
& R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial G}{\partial t} + r \left(1 - \frac{t}{R} \right) \frac{\partial F}{\partial t} - \left(t + R + \frac{r^2}{R} \right) \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{rt}{R} \frac{\partial G}{\partial r} = \\
& = \left(j + \frac{1}{2} \right) g + (t + R) \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} f + (1 + k) G + (t + R) \frac{1}{r} F \\
\\
& r \left(1 + \frac{t}{R} \right) \frac{\partial g}{\partial t} + R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial f}{\partial t} - \left(t - R - \frac{r^2}{R} \right) \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{rt}{R} \frac{\partial f}{\partial r} = \\
& = (t - R) \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} G - \left(j + \frac{1}{2} \right) F + (t - R) \frac{1}{r} g - (1 + k) f \\
\\
& r \left(1 + \frac{t}{R} \right) \frac{\partial G}{\partial t} - R \left(1 + \frac{t^2}{R^2} \right) \frac{\partial F}{\partial t} - \left(t - R - \frac{r^2}{R} \right) \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{rt}{R} \frac{\partial F}{\partial r} = \\
& = (t - R) \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} g + \left(j + \frac{1}{2} \right) f + (t - R) \frac{1}{r} G + (1 + k) F
\end{aligned} \tag{5.20}$$

A resolução do sistema de equações diferenciais parciais anterior, implica numa solução completamente explícita da equação de Dirac no universo de de Sitter, equação (5.11). No que segue discutimos e resolvemos dois casos particulares, que são, o caso quando a curvatura do espaço tende para zero e o caso estacionário.

5.2.1 Resolução para o caso limite

O sistema de equações diferenciais parciais (5.20), pode ser resolvido explicitamente para o caso limite, isto é, quando $R \rightarrow \infty$, o qual se transforma em

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} = - \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} F - \frac{1}{r} f + \frac{m}{i\hbar} g \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial r} = \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} f + \frac{1}{r} F + \frac{m}{i\hbar} G$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial r} = - \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} G - \frac{1}{r} g - \frac{m}{i\hbar} f \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial r} = \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} g + \frac{1}{r} G - \frac{m}{i\hbar} F$$

Definindo agora novas funções como segue

$$A \equiv g + G \quad ; \quad B \equiv F - f \quad ; \quad C \equiv G - g \quad ; \quad D \equiv F + f \quad (5.23)$$

obtemos que as equações anteriores são equivalentes aos seguintes sistemas

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} - j \right) B + \frac{m}{i\hbar} A \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{3}{2} + j \right) A - \frac{m}{i\hbar} B \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{3}{2} + j \right) D + \frac{m}{i\hbar} C \\ \frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} - j \right) C - \frac{m}{i\hbar} D \end{cases} \quad (5.25)$$

O sistema (5.24) pode ser resolvido facilmente se derivamos a primeira equação em relação a t e a segunda em relação a r , então encontramos a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r^2} A - \frac{m^2}{\hbar^2} A \quad (5.26)$$

então colocando $A(t, r) = A_1(t)A_2(r)$ obtemos as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} + \lambda^2 A_1 = 0 \quad (5.27)$$

e

$$\frac{d^2 A_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA_2}{dr} + k^2 A_2 - \left(j + \frac{1}{2}\right) \left(j + \frac{3}{2}\right) \frac{1}{r^2} A_2 = 0 \quad (5.28)$$

onde λ é uma constante e $k^2 = \lambda^2 - m^2/\hbar^2$.

A solução para a equação (5.27) é dada por

$$A_1(t) = \exp\{\pm i\lambda t\} \quad (5.29)$$

e a solução regular na origem da equação diferencial (5.28) é um múltiplo da função esférica de Bessel $J_{j+\frac{1}{2}}(kr)$, isto é

$$A_2(r) = dJ_{j+\frac{1}{2}}(kr) \quad (5.30)$$

onde d é uma constante.

Logo das duas equações anteriores, obtemos

$$A(t, r) = d \exp\{\pm i\lambda t\} J_{j+\frac{1}{2}}(kr). \quad (5.31)$$

Substituindo esta expressão na segunda das equações (5.24) obtemos

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{m}{i\hbar} B = d \exp\{\pm i\lambda t\} \left[kJ_{j-\frac{1}{2}}(kr) + \frac{1}{r} J_{j+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (5.32)$$

onde usamos a seguinte identidade

$$\frac{d}{dr} J_\nu(kr) = kJ_{\nu-1}(kr) - \frac{\nu}{r} J_\nu(kr).$$

Então, colocando novamente $B(t, r) = B_1(t)B_2(r)$ na equação diferencial (5.32) e dividindo por $B_2(r)$ obtemos as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dB_1}{dt} + \frac{m}{i\hbar} B_1 - \lambda \exp\{\pm i\lambda t\} = 0 \quad (5.33)$$

$$B_2(r) = \frac{d}{\lambda} \left[kJ_{j-\frac{1}{2}}(kr) + \frac{1}{r} J_{j+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (5.34)$$

Assim, das duas últimas equações obtemos uma solução regular para $B(t, r)$ da forma

$$B(t, r) = \frac{dk}{\left(\frac{m}{i\hbar} \pm i\lambda\right)} \exp\{\pm i\lambda t\} J_{j-\frac{1}{2}}(kr). \quad (5.35)$$

Da mesma forma resolvemos o sistema (5.25) e obtemos as seguintes soluções regulares em termos da função esférica de Bessel

$$C(t, r) = a \exp\{\pm i\gamma t\} J_{j-\frac{1}{2}}(kr) \quad (5.36)$$

$$D(t, r) = \frac{ak}{\left(\frac{m}{i\hbar} \pm i\gamma\right)} \exp\{\pm i\gamma t\} J_{j-\frac{3}{2}}(kr)$$

onde a e γ são constantes.

Ou ainda, usando a seguinte relação para a função esférica de Bessel,

$$J_{v-1}(z) + J_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} J_v(z)$$

obtemos para $D(t, r)$ a seguinte expressão

$$D(t, r) = \frac{ak}{\left(\frac{m}{i\hbar} \pm i\gamma\right)} \exp\{\pm i\gamma t\} J_{j+\frac{1}{2}}(kr) \quad (5.37)$$

Logo, da definição (5.23) obtemos

$$g = \frac{1}{2}(A - C) \quad ; \quad G = \frac{1}{2}(A + C) \quad ; \quad f = \frac{1}{2}(D - B) \quad ; \quad F = \frac{1}{2}(B + D)$$

assim de (5.19) segue que a equação (5.11), quando $R \rightarrow \infty$, possui soluções separáveis da forma

$$\begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \\ v_- \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t, r) X_{j+\frac{1}{2}}^m \\ B(t, r) X_{-j-\frac{1}{2}}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(t, r) X_{-j-\frac{1}{2}}^m \\ D(t, r) X_{j+\frac{1}{2}}^m \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

onde A, B, C e D são dadas por (5.31), (5.35), (5.36) e (5.37) respectivamente e os $X_{\pm j \pm \frac{1}{2}}^m$ são definidos por

$$X_{j+\frac{1}{2}}^m \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} Y_{jm} \\ \frac{1}{2} Y_{jm} \end{bmatrix} ; \quad X_{-j-\frac{1}{2}}^m \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} Y_{jm} \\ \frac{1}{2} Y_{jm} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

5.2.2 Resolução do caso estacionário

Também, o sistema de equações diferenciais parciais (5.20) pode ser resolvido para o caso quando as funções g, G, f e F não dependem do tempo. neste caso obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \left(R + \frac{r^2}{R} \right) \frac{df}{dr} + \frac{R}{r} f + \frac{R}{r} \left(j + \frac{1}{2} \right) F &= \left(j + \frac{1}{2} \right) G + (1+k)g \\ \left(R + \frac{r^2}{R} \right) \frac{dF}{dr} + \frac{R}{r} F + \frac{R}{r} \left(j + \frac{1}{2} \right) f &= - \left(j + \frac{1}{2} \right) g - (1+k)G \\ \left(R + \frac{r^2}{R} \right) \frac{dg}{dr} + \frac{R}{r} g + \frac{R}{r} \left(j + \frac{1}{2} \right) G &= - \left(j + \frac{1}{2} \right) F - (1+k)f \\ \left(R + \frac{r^2}{R} \right) \frac{dG}{dr} + \frac{R}{r} G + \frac{R}{r} \left(j + \frac{1}{2} \right) g &= \left(j + \frac{1}{2} \right) f + (1+k)F \end{aligned} \quad (5.40)$$

Usando novamente as definições (5.23) e colocando $\rho = r/R$ obtemos os seguintes sistemas

$$\begin{cases} (1 + \rho^2) \frac{dA}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(j + \frac{3}{2} \right) A = \left(k + \frac{1}{2} - j \right) B \\ (1 + \rho^2) \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} - j \right) B = - \left(k + \frac{3}{2} + j \right) A \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\begin{cases} (1 + \rho^2) \frac{dD}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(j + \frac{3}{2} \right) D = - \left(k + \frac{1}{2} - j \right) C \\ (1 + \rho^2) \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} - j \right) C = \left(k + \frac{3}{2} + j \right) D \end{cases} \quad (5.42)$$

Agora, das duas primeiras equações (5.41) obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - \frac{\left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right)}{(1 + \rho^2) \rho^2} A + \frac{k(k+2)}{(1 + \rho^2)^2} A = 0 \quad (5.43)$$

observemos que esta última equação é a mesma obtida para o laplaciano projetivo, equações (4.60). Logo a solução é dada por

$$A(\rho) \doteq \frac{1}{\rho} (1 + \rho^2)^{-k/2} F_k^{j+1/2} \tilde{F}_k^{j+1/2} \quad (5.44)$$

onde os polinômios $F_k^{j+1/2}(\rho)$ e $\tilde{F}_k^{j+1/2}(\rho)$ são dados por (4.62), com $j \Rightarrow j + 1/2$ e $k = N$.

Substituindo a função (5.44) em (5.41), obtemos

$$\begin{aligned} \left(k + \frac{1}{2} - j \right) B(\rho) &= \frac{1}{\rho} (1 + \rho^2)^{-\frac{k}{2}} \left\{ \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\rho} F_k^{j+\frac{1}{2}} \tilde{F}_k^{j+\frac{1}{2}} - \right. \\ &- \left[\frac{\left(k - j + \frac{1}{2} \right) \left(k + j + \frac{5}{2} \right)}{(2j + 4)} + \frac{\left(k + j + \frac{7}{2} \right) \left(k - j - \frac{3}{2} \right)}{(2j + 6)} \right] \frac{1}{\rho} F_k^{j+\frac{1}{2}} \tilde{F}_k^{j+\frac{3}{2}} + \\ &+ \left[\left(\frac{\left(j + \frac{3}{2} \right) \left(j + \frac{7}{2} \right)}{(2j + 6)} + \frac{\left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{5}{2} \right)}{(2j + 4)} - \frac{1}{4} \right) \frac{4(1 + \rho^2)}{\rho} + \right. \\ &\left. + (k - j - 1) 2\rho - \frac{k}{2} \right] F_k^{j+\frac{3}{2}} \tilde{F}_k^{j+\frac{1}{2}} \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde usamos as seguintes relações para os polinômios F_N^l e \tilde{F}_N^l [51]

$$\rho(1+\rho^2)(2j+3)\frac{dF_N^l}{d\rho} = -[(N-j+1)(N+j+2)]F_N^{j+1} + [(N-l)(2j+3)\rho^2 + 4l(j+2)(1+\rho^2)]F_N^l$$

$$\rho(1+\rho^2)(2j+5)\frac{d\tilde{F}_N^l}{d\rho} = -[(N+j+3)(N-j-1)]\tilde{F}_N^{j+1} + [(N-j-1)(2j+5)\rho^2 + 4(j+1)(j+3)(1+\rho^2)]\tilde{F}_N^l$$

Da mesma forma obtemos as funções $C(\rho)$ e $D(\rho)$ das equações (5.42) como segue

$$C(\rho) = -B(\rho) \quad (5.46)$$

e

$$D(\rho) = A(\rho) \quad (5.47)$$

Logo da definição (5.23) e de (5.19) segue que a equação (5.11), no caso estacionário, possui soluções separáveis da forma

$$\begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \\ v_- \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(r)X_{j+\frac{1}{2}}^m \\ B(r)X_{-j-\frac{1}{2}}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(r)X_{-j-\frac{1}{2}}^m \\ D(r)X_{j+\frac{1}{2}}^m \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

onde $A(\rho)$, $B(\rho)$, $D(\rho)$ e $C(\rho)$ são dadas por (5.44), (5.45), (5.46) e (5.47) respectivamente, com $\rho = r/R$ e as $X_{\pm j \pm 1/2}^m$ são definidos por (5.39).

Conclusões

Neste trabalho examinamos do ponto de vista da teoria de grupos associado à relatividade projetiva, proposta por Fantappiè e Arcidiacono, as equações de onda associadas ao universo de de Sitter. Apresentamos uma nova construção dos operadores de Casimir para o grupo de Fantappiè-de Sitter e a partir do operador invariante de Casimir, deduzimos uma equação diferencial parcial de segunda ordem a qual é chamada de equação de Klein-Gordon no universo de de Sitter. Esta equação diferencial é discutida e resolvida em termos dos polinômios de Gegenbauer e funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécies. Generalizamos esta equação diferencial ao caso n -dimensional, e obtivemos, num modo natural, as chamadas soluções exponenciais de frequências positiva e negativa. Do segundo operador de Casimir, deduzimos uma equação diferencial parcial de quarta ordem que foi resolvida em termo das funções associadas de Legendre e a função hipergeométrica.

Outro ponto enfocado, neste trabalho, foi o método de separação das variáveis utilizando os esféricos harmônicos espinoriais com o objetivo de resolver a equação de Dirac. Tal método é apresentado detalhadamente, e como aplicação, mostramos que a equação de Laplace projetiva quando expressa em coordenadas esféricas, é separável em suas variáveis angulares e radial. A solução nas variáveis angulares é dada em termos dos esféricos espinoriais harmônicos e a parte radial é resolvida em termos dos polinômios $E_n^k(\rho)$, recentemente introduzidos por Gomes e Capelas de Oliveira [48].

Enfim, fatoramos o operador de Casimir de segunda ordem, em dois fatores de primeira ordem lineares nos momentos, e obtivemos a chamada equação de Dirac no universo de de Sitter. Esta equação diferencial é escrita de forma explícita em co-

ordenadas esféricas e, logo, usando o método de separação das variáveis, introduzido no capítulo quatro. mostramos que a equação de Dirac no universo de de Sitter é separável em suas variáveis angulares e suas variáveis radial e temporal. A solução nas variáveis angulares é dada em termos dos esféricos harmônicos espinoriais. Já a parte radial e temporal é expressa em um sistema de quatro equações diferenciais parciais de primeira ordem, sistema (5.20). Este sistema foi resolvido para o caso limite, isto é, quando a curvatura do espaço tende para zero e obtivemos, para a parte temporal, soluções de tipo exponenciais e para a parte radial a solução foi dada em termo das funções esféricas de Bessel. Também este sistema foi resolvido para o caso estacionário e novamente achamos soluções em termos dos polinômios encontrados na solução da equação de Laplace projetiva.

A resolução completa do sistema (5.20) fica como possibilidade para um próximo trabalho, e vale notar, que a resolução completa deste sistema, implica numa solução explícita para a equação de Dirac no universo de de Sitter.

Bibliografia

- [1] S. Weinberg; *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. New York, Wiley (1972).

Este volume contém cinco partes, na primeira faz-se uma revisão histórica da geometria não euclidiana, teoria da gravitação e dos princípios de relatividade. Após introduzida a relatividade especial, na segunda parte, apresenta-se e discute-se a relatividade geral, na parte três são feitas aplicações da relatividade geral, na quarta parte faz-se um desenvolvimento matemático formal, por exemplo, introduz-se uma definição geral do tensor momento energia para qualquer sistema material e na quinta parte é tratada a cosmologia.

- [2] W. de Sitter; *On the relativity of inertial: remarks concerning Einstein's latest hypothesis*. Proc. Royal Acad. Amsterdam **19**, 1217 (1917).

Neste trabalho, de Sitter, introduz o espaço-tempo que leva seu nome, como sendo solução das equações de Einstein no qual, um mundo quadridimensional pode ser representado por um hiperbolóide num espaço pentadimensional.

- [3] G. Castelnuovo; *L'universo di de Sitter*. Rend. Accad. Lincei, **12**, 263 (1930).

Neste artigo o autor discute o universo de de Sitter de modo a estudar o chamado efeito Doppler. É mostrado que o efeito Doppler no universo de de Sitter depende

das velocidades radial e transversal bem como da distância à fonte luminosa. Mostra-se, também, que a contribuição do efeito de de Sitter é proporcional ao quadrado da distância.

- [4] P.A.M. Dirac; *The electron wave equation in de Sitter Space*. Ann. of Math. **36**, 657 (1935).

Dirac, neste trabalho, discute a equação de onda do elétron no espaço de de Sitter e obtém uma equação de segunda ordem eliminando as matrizes que aparecem nas equações de primeira ordem.

- [5] *De Sitter and conformal group and their applications*; em "Lectures in theoretical Physics", Vol. **XIII**. Edited by A.O. Barut and W.E. Brittin, Colorado Associated University Press (1971).

Este volume contém uma coletânea de trabalhos, de diversos autores, dividido em duas partes: Na primeira parte destacam-se resultados matemáticos relativos a grupos em geral, além dos grupos de de Sitter e conforme. Na segunda parte são discutidas aplicações. Dentre elas, a invariância de quebra de escala, grupos dinâmicos e partículas de massa zero.

- [6] O. Hara, T. Marumori, Y. Ohnuki and H. Shimodaira; *An Attempt to the unified description of elementary particles*. Prog. Theor. Phys. **12**, 177 (1954).

Neste artigo, os autores introduzindo uma substância de alto nível, chamada de *Urmaterié*, descrevem de forma unificada o conceito de partículas elementares. Vários estados do movimento inercial de *Urmaterié* são classificados pelos autovalores de um conjunto completo de operadores mutuamente comutativos.

- [7] Y. Ueno; *On the wave theory of light in general relativity. I and II*. Prog. Theor.

Phys. **10**, 442 (1953); **12**, 461 (1954).

Neste artigo, o autor pesquisa a relação entre a óptica ondulatória e óptica geométrica em espaço-tempo curvo, assim como ondas de luz esféricas no espaço-tempo esfericamente simétrico estático.

- [8] H. Takeno: *Static spherically symmetric spacetime in general relativity*. Prog. Theor. Phys. **10**, 509 (1953).

Neste trabalho, o autor introduz o conceito de *staticness* de um espaço-tempo esfericamente simétrico como uma propriedade intrínseca do espaço-tempo.

- [9] M. Ikeda: *On a five dimensional representation of the electromagnetic and electron field equations in a curved spacetime*. Prog. Theor. Phys. **10**, 483 (1953).

Neste trabalho, é apresentada uma representação pentedimensional das equações dos campos elétrico e eletromagnético num espaço-tempo curvo o qual é imerso num espaço chato pentedimensional.

- [10] H. Takeno; *A generalization of special lorentz transformation in de Sitter spacetime*. Prog. Theor. Phys. **10**, 431 (1953).

Neste artigo, Takeno obtém transformações no espaço-tempo de de Sitter correspondentes às transformações de Lorentz no espaço-tempo de Minkowski e várias propriedades destas transformações são estudadas.

- [11] S.A. Raje ; *Linear meson wave equation in de Sitter space*. Prog. Theor. Phys. **8**, 384 (1952).

Neste artigo, Raje discute a equação de onda de um méson no espaço-tempo de de Sitter e obtém a equação de segunda ordem usando um método proposto por Kemmer.

- [12] K. Goto; *On the meson wave equation in the de Sitter space*. Prog. Theor. Phys. **8**, 672 (1952).

Goto, neste trabalho mostra que a equação de onda de um méson proposta por Raje é basicamente a mesma que a proposta por ele sem referir-se a quantidades físicas.

- [13] H.S. Snyder; *Quantized spacetime*. Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

O resultado principal, deste artigo, é a existência de um espaço-tempo de Lorentz invariante no qual existe uma unidade natural de comprimento.

- [14] F. Gürsey; *Introduction to the de Sitter group in group theoretical concepts and methods*. Elementary particle physics. Gordon and Breach, N.Y. (1962).

Neste trabalho, Gürsey faz uma revisão das propriedades básicas do grupo de de Sitter, apresenta um novo formalismo para manejar as transformações, deriva as expressões para os operadores que substituem o momento e a energia e exhibe os invariantes do grupo.

- [15] F. Gürsey; *Introduction to group theory, in Relativity, group and topology*. Gordon and Breach, N.Y. (1963).

Neste trabalho, Gürsey revisa as propriedades gerais de grupo abstrato e grupos de Lie e então estuda alguns grupos específicos, a saber, o grupo de rotações, o grupo de Lorentz e o grupo de de Sitter.

- [16] E.A. Tagirov; *Consequences of field quantization in de Sitter type cosmological models*. Ann. Phys. **76**, 561 (1973).

Tagirov, discute a necessidade de covariância conforme das equações de campo e as implicações da existência de uma massa distinta de zero para uma partícula

escalar no universo de de Sitter.

- [17] G. Börner and H.P. Dürr: *Classical and quantum fields in de Sitter spac.* Nuov. Cim. **64A**, 669 (1969).

Neste trabalho, os autores discutem as equações de campo, de spin $1/2$ e spin 1 . Estas equações são derivadas como equações de autovalores associadas ao operador de segunda ordem do espaço de de Sitter.

- [18] P. Roman and J.J. Aghassi: *Classical field theory and gravitation in a de Sitter world.* Jour. Math. Phys. **7**, 1273 (1966).

Neste trabalho, os autores formulam equações de campo covariantes no espaço de de Sitter, e em particular, constróem equações da mecânica quântica para o movimento de uma partícula com um dado spin.

- [19] S.A. Fulling: *Aspects of quantum field theory in curved spacetime.* Cambridge University Press N.Y. (1991).

Neste volume, Fulling apresenta e discute os aspectos da teoria quântica de campos em espaços curvos onde o espaço-tempo de de Sitter é um particular espaço-tempo.

- [20] N.D. Birrell and P.C.W. Davies; *Quantum field in curved space.* Cambridge University Press N.Y. (1982).

Neste volume, os autores fazem uma revisão da teoria de campos quânticos no espaço de Minkowski, logo estende esta teoria para espaços curvos. Como caso particular de espaços curvos, entre outros, eles tratam o espaço de de Sitter.

- [21] H. Bondi and T. Gold; *The steady-state theory of the expanding universe.* Mon. Not. R. Astron. Soc. **108**, 252 (1948).

Neste trabalho, os autores, encontram que as leis da física terrestre somente podem ser usadas sem ambiguidade num universo homogeneamente estacionário. As propriedades físicas do processo de criação são consideradas e as possíveis formulações da teoria de campo são discutidas.

- [22] F. Hoyle; *A new model for the expanding universe*. Mon. Not. R. Astron. Soc. **108**, 372 (1948).

Neste trabalho, Hoyle, propõe que com a criação contínua de matéria, pode ser obtida em um universo em expansão no qual a própria densidade da matéria permanece constante.

- [23] L. Fantappiè; *Opere scelte*. Ed. Unione Matematica Italiana, Bologna, Italia (1973).

O primeiro volume reúne artigos envolvendo o aspecto teórico dos chamados funcionais analíticos em particular os funcionais de funções de duas variáveis. No segundo volume é apresentada a assim chamada Relatividade Final bem como aplicações dos funcionais analíticos.

- [24] G. Arcidiacono; *Projective relativity based on the de Sitter universe*. Gen.Rel.Grav. **7**, 885 (1976); **8**, 865 (1977) e **9**, 949 (1978).

Nestes trabalhos, Arcidiacono mostra que é possível desenvolver uma nova *relatividade projetiva* baseada no universo de de Sitter com curvatura constante. Esta teoria estende a teoria da relatividade especial em escala cosmológica, e é em certos aspectos similar à relatividade cinemática de Milne.*

- [25] G. Arcidiacono; *Projective. Relativity, Cosmology and Gravitation*. Hadronic

* E. A. Milne, Kinematic Relativity. Oxford, Clarendon Press, (1948).

Press Inc. Massachusetts U.S.A. (1986) e *Relatività e Cosmologia*, di Renzo, Roma (1995).

Nestes volumes, Arcidiacono desenvolve a nova relatividade especial projetiva, baseada no grupo de Fantappiè-de Sitter bem como obtém uma nova *magnetohidrodinâmica projetiva*, válida em escala cosmológica, matéria de alta energia e hiperdensa e conclui que a relatividade geral pode ser aperfeiçoada de uma única forma.

- [26] E. Beltrami; *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*. Ann. di Matem. **2**, 232 (1868).

Este artigo apresenta os fundamentos teóricos dos espaços com curvatura constante. É discutida a coincidência das definições de Riemann e Gauss em relação a medida da curvatura de uma superfície. Mostra-se que as esferas geodésicas de raio ρ num espaço n -dimensional de curvatura constante negativa são espaços a $(n-1)$ dimensão de curvatura constante negativa. Por isso a geometria esférica pode ser olhada como contida na pseudo esfera.

- [27] G. Arcidiacono and E. Capelas de Oliveira; *The generalized Laplace equation in special projective relativity*. H. Journal **14**. 137 (1991).

Neste artigo os autores discutem uma generalização da equação de Laplace ao universo de de Sitter, usando a representação geodésica de Beltrami e obtém soluções em termos dos polinômios de Tchebichef, Legendre e Jacobi de acordo com um determinado parâmetro.

- [28] G. Arcidiacono and E. Capelas de Oliveira: *The generalized d'Alembert equation in special projective relativity*. H. Journal **14**, 353 (1991).

Neste artigo os autores discutem uma generalização da equação de d'Alembert ao universo de de Sitter e obtém soluções em termo dos polinômios de Jacobi quando existe simetria radial.

- [29] G. Arcidiacono and E. Capelas de Oliveira; *The projective d'Alembert equation*. H. Journal **14**, 347 (1991).

Neste artigo os autores mostram que somente em dois casos particulares da equação de d'Alembert projetiva se recupera a solução clássica do dalembertiano.

- [30] E. Capelas de Oliveira; *On the solution of homogeneous generalized wave equation*. Jour. Math. Phys. **33**, 3757 (1992).

Neste artigo o autor discute a equação de onda generalizada para um problema local e recupera as soluções clássicas quando a curvatura do espaço-tempo tende a zero.

- [31] G. Arcidiacono, E. Capelas de Oliveira and E.A. Notte Cuello; *Generalized Klein-Gordon wave equation*. Submetido à publicação (1995).

Neste artigo, discute-se a equação de d'Alembert no espaço-tempo de Minkowski em $[1 + (p + 3)]$ dimensões para um campo escalar. Obtém-se e discute-se a chamada equação de Klein-Gordon generalizada para um campo escalar de massa não nula em um espaço de $[1 + (p + 2)]$ dimensões, chamado de espaço-tempo de de Sitter.

- [32] E. Capelas de Oliveira, G. Arcidiacono and E.A. Notte Cuello; *On the Klein-Gordon wave equation in de Sitter spacetime*. Submetido à publicação (1995).

Neste artigo discute-se a equação de onda de d'Alembert em um espaço pseudo-euclidiano de $(1 + 4)$ dimensões para um campo escalar de massa nula e usando as

derivadas projetivas obtém-se e resolve-se a assim chamada equação de onda de Klein-Gordon para um campo escalar no espaço-tempo de de Sitter de curvatura positiva.

- [33] J. Dixmier; *Représentations intégrables du groupe de de Sitter*. Bull. Soc. Math. France, **89**, 9, (1961).

O autor neste trabalho discute o grupo de de Sitter, apresenta as representações unitárias irredutíveis e mostra que seus coeficientes satisfazem certas equações diferenciais para concluir que as representações obtidas são de quadrado integrável.

- [34] G.C. Ducati, E. Capelas de Oliveira and G. Arcidiacono; *O grupo das rotações com dez parâmetros*. RP 17/95, IMECC-UNICAMP.

Neste trabalho os autores apresentam os grupos das rotações com dez parâmetros e como aplicação à física discutem os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter associados, respectivamente aos cronotopos de Newton, Minkowski e Castelnuovo.

- [35] E.A. Notte Cuello and E. Capelas de Oliveira; *A new construction of the Casimir operators for the Fantappié-de Sitter group*. H. Journal, **18**, 181 (1995).

Neste artigo, obtém-se os operadores de Casimir associados ao grupo de Fantappié-de Sitter, assim como as relações de comutação dos operadores T_0, T_μ, V_μ e L_μ .

- [36] E. Capelas de Oliveira and E.A. Notte Cuello; *Solutions for the equations associated with the Casimir operators of the Fantappié-de Sitter group*; em Gravitation: The space-time structure, SILARG VIII editado por P. S. Letelier e W. A. Rodrigues Jr. **1**. 381 (1994).

Neste trabalho, apresenta-se os operadores de Casimir associados ao grupo de Fantappiè-de Sitter e discute-se as equações diferenciais associadas a estes operadores, usando a metodologia proposta por Fantappiè-Arcidiacono.

- [37] E. Capelas de Oliveira and E.A. Notte Cuello; *Klein-Gordon wave equation in the de Sitter universe*. Aceito para publicação: H. Journal (1996).

Neste artigo, discute-se a equação de onda de Klein-Gordon no universo de de Sitter. Esta equação é obtida a partir do operador de Casimir de segunda ordem e obtém-se soluções em termos das funções associadas de Legendre.

- [38] N.A. Chernikov and E.A. Tagirov; *Quantum theory of scalar field in de Sitter spacetime*. Ann. Ins. H. Poincaré. **IX**, 109. (1968).

Neste artigo os autores constroem uma teoria quântica para um campo escalar no universo de de Sitter. A equação de campo que emerge desta teoria é discutida através das derivadas covariantes usando o método de transformadas de Fourier.

- [39] I.H. Redmount and S. Takagi; *Hyperspherical Rindler space, dimensional reduction, and de Sitter scalar field theory*. Phys. Rev. **D37**, 1443, (1988).

Neste artigo os autores usando as chamadas coordenadas hiperesféricas de Rindler discutem uma teoria de campos no espaço-tempo de de Sitter para um campo escalar real, livre e sem massa imerso num espaço-tempo chato.

- [40] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi; *Higher transcendental functions*. Inc. New York: McGraw-Hill. Vol.2 (1953).

Este livro é o segundo volume de três publicados por estes autores. O conteúdo deste é a continuação do volume um, e inclui, funções de Bessel, funções cilíndrico

parabólicas, funções gama, polinômios ortogonais em uma e várias variáveis, polinômios esféricos e hiperesféricos e por último integrais e funções elípticas.

- [41] W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni; *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*. Springer Verlag, New York Inc. (1966).

Este volume inclui um completo estudo das fórmulas envolvidas com as funções especiais da física matemática, algumas destas são, funções gama, hiperesféricas, Bessel, Legendre e Whittaker. No capítulo cinco discute-se os polinômios ortogonais e por último trata-se das transformações integrais.

- [42] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik; *Table of integrals, series and products*. Academic Press, New York (1965).

Neste volume os autores, apresentam uma detalhada variedade de fórmulas envolvendo integrais, séries e produtos dando considerável atenção às funções especiais, em particular, elípticas, Bessel e funções de Legendre.

- [43] W.K. Clifford; *On the relation of Grassman's method to quaternions; and on the generalization of these systems*. Amer. J. Math. **1**, 350. (1878).

O autor neste trabalho, generaliza os chamados quatérnions, introduzindo n unidades c_i tal que $c_i^2 = -1$, com a condição adicional de que $c_i c_j = -c_j c_i$ para $i \neq j$ e supondo associatividade para a multiplicação.

- [44] G.F. Torres del Castillo; *Espinores en espacios de dimensión arbitraria*. Rev. Mex. Fis. **35**, 123, (1989).

Neste trabalho o autor, apresenta a definição algébrica dos espinores baseado nas álgebras de Clifford, discute alguns fatos básicos relativos ao grupo de rotações e apresenta a representação geométrica dos espinores em alguns casos.

- [45] G.F. Torres del Castillo; *Una introducción a los armónicos esféricos espinoriales*. Rev. Mex. Fis. **3**, 446, (1990).

Neste artigo, Torres del Castillo, apresenta a definição e as propriedades básicas dos harmônicos esféricos com peso de spin, baseando-se nas representações irredutíveis do grupo de rotações e como aplicação discute-se a solução das equações de Maxwell em termo dos harmônicos esféricos espinoriais.

- [46] Morton L. Curtis; *Matrix groups*. Springer-Verlag (1984).

Neste livro, o autor faz um estudo bastante detalhado dos grupos, ortogonais, unitários e simpléticos definindo os homomorfismos e isomorfismos de grupo e demonstra uma ampla gama de propriedades.

- [47] E.A. Notte Cuello and E. Capelas de Oliveira; *Generalized Laplace equation for a vector potencial*. Aceito para publicação: Int. Jour. Math. Ed. Sci. and Technol. (1996).

Neste artigo, discute-se a equação de Laplace projetiva tridimensional e usando os esféricos harmônicos com peso de spin reduz-se a equação original a um sistema de três equações diferenciais ordinárias. Resolve-se este sistema.

- [48] D. Gomes and E. Capelas de Oliveira; *On a new class of polynomials*. Aceito para publicação: Algebras, Groups and Geometries (1995).

Neste artigo os autores apresentam e discutem os chamados polinômios $E_n^{\ell}(\rho)$ e $G_n^{\ell}(\rho)$, os quais aparecem no estudo da equação diferencial de Laplace generalizada no universo de de Sitter.

- [49] K. Goto; *Wave fields in de Sitter space*. Prog. Theor. Phys. **12**, 311 (1954).

Neste artigo, Goto, discute as equações de onda no universo de de Sitter com spin arbitrário. A equação de onda de segunda ordem é derivada para uma partícula qualquer e é obtida a solução, também são obtidas soluções estáticas com simetrias esféricas.

- [50] E. A. Notte Cuello and E. Capelas de Oliveira; *Dirac equation in the de Sitter universe*. RP 23/96, IMECC-UNICAMP.

Neste artigo, discute-se a equação de onda de Dirac no universo de de Sitter, esta equação é obtida fatorando o operador de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappiè-de Sitter.

- [51] D. Gomes and E. Capelas de Oliveira; *The generating function for $E_n^l(\rho)$ polynomials*. Aceito para publicação: *Algebras, Groups and Geometries* (1996).

Neste artigo os autores apresentam a função geratriz e algumas relações de recorrência para os chamados polinômios $E_n^l(\rho)$, os quais aparecem no estudo da equação diferencial de Laplace generalizada.