

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – IMECC

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UMA EQUAÇÃO ELÍPTICA, COM TERMO NÃO
LINEAR ASSINTOTICAMENTE LINEAR EM $-\infty$ E
SUPERLINEAR EM $+\infty$, COM CONDIÇÃO DE ROBIN

Tese de Doutorado

RAFAEL ANTONIO CASTRO TRIANA

CAMPINAS

20 de Junho de 2000

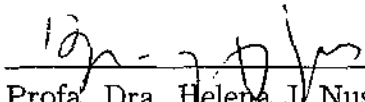
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

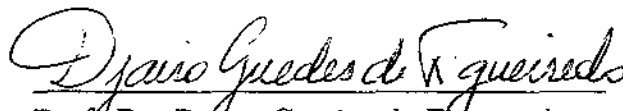
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Uma Equação Elíptica, com Termo Não Linear Assintoticamente Linear em $-\infty$ e Superlinear em $+\infty$, com Condição de Robin

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Rafael Antonio Castro Triana** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de Junho de 2000.


Prof. Dra. Helena J. Nussenzveig Lopes
Orientadora


Prof. Dr. Diário Guedes de Figueiredo
Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Profa. Dra. Helena J. Nussenzveig Lopes
2. Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
3. Prof. Dr. Yang Jianfu
4. Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes
5. Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR** em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Castro Triana, Rafael Antonio

C279e Uma equação elíptica, com termo não linear assintoticamente linear em $-\infty$ e superlinear em $+\infty$, com condição de Robin / Rafael Antonio Castro Triana – Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientadores : Djairo Guedes de Figueiredo; Helena J. N. Lopes

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Operador laplaciano. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Lopes, Helena J. Nussenzveig III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 20 de junho de 2000 e aprovada

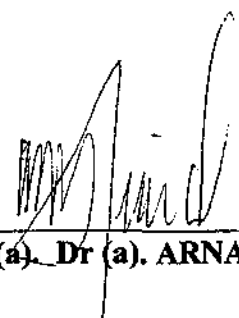
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof (a). Dr (a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES


Prof (a). Dr (a). YANG JIANFU


Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES


Prof (a). Dr (a). ELVES ALVES DE BARROS E SILVA


Prof (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Dedico este trabalho a minha esposa Rosa Claudia, pelo carinho, compreensão , dedicação e paciência, durante este período de doutorado, e a minha filha Claudia Elena, que nasceu quando do início deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço

- imensamente a professora Helena Nussenzveig Lopes pela oportunidade de ter sua orientação, e ao professor Djairo Guedes de Figueiredo pela co-orientação.
- ao professor Mario Zuluaga pela motivação para fazer o doutorado no Brasil.
- ao Sr. Carlos Riul a Sra. Mara Riul, pela receptividade e carinho brindado.
- a todos meus professores pelas lições e a motivação em especial a; Marcelo dos Santos, Jaime Angulo, Yang Jianfu, Milton Lopes e Orlando Lopes.
- a Universidad Industrial de Santander, em particular a Escuela de Matemática.
- ao povo Brasileiro pela receptividade e carinho brindado.
- aos meus amigos, em especial a, Edson Coayla Terán, Edson Arrazola, Martin Cerna, José Carlos, Leonardo, Martha, Emerson, Sofia, Marlio, Guilherme, Marcos, Everaldo, Newton, Cristina, pela amizade.
- e os amigos do “predinho”.
- a CAPES pelo suporte financeiro indispensável.
- ao pessoal da biblioteca do IMECC, especialmente a Ruth Cezarino da Silva e Silvania R. Cirilo.

Conteúdo

Abstract	8
Resumo	10
Introdução	12
1 Uma equação elíptica, com termo não linear assintoticamente linear em $-\infty$ e superlinear em $+\infty$, com condição de Robin.	15
1.0 Introdução	15
1.1 Preliminares.	17
2 Regularidade e Formulação Variacional	24
2.0 Introdução	24
2.1 Regularidade	24
2.2 Formulação Variacional	30
3 Autovalores e autofunções	33
3.0 Introdução	33
3.1 Autovalores	33
3.2 Algumas propriedades das autofunções e autovalores	45
4 Condição de Palais-Smale	53
4.0 Introdução	53
4.1 Caso $\alpha < 0$	54
4.2 Caso $\alpha > 0$	62
5 Resultados de Existência	70
5.0 Introdução.	70
5.1 Teoremas de Existência.	70
5.1.1 Caso $\alpha < 0$	70

5.1.2	Caso $\alpha > 0$	78
	Conclusões	91
	Bibliografia	92

Abstract

In this work, we study the regularity and existence of solutions for the mixed problem:

$$(\mathbb{P}) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega, -\Delta) \\ -\Delta u = f(x, u), & \text{on } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), with smooth boundary $\partial\Omega$;

$f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function, asymptotically linear at $-\infty$, superlinear at $+\infty$, and with subcritical growth; $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ is the trace operator of order zero; $H^1(\Omega, -\Delta)$ is the space defined by:

$$H^1(\Omega, -\Delta) = \{u \in H^1(\Omega), \text{ such that } -\Delta u \in L^2(\Omega)\};$$

the operator $\gamma_1 : H^1(\Omega, -\Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$, is the linear and continuous extension of the trace mapping $\gamma_1 : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$, again denoted by γ_1 and defined by

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega}, \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

the exterior normal derivative.

For each $u \in H^1(\Omega, -\Delta)$, $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ e $\gamma_0 u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, we identify the element $\gamma_0 u$, with the functional $\gamma_0^* u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ defined by

$$\langle \gamma_0^* u, w \rangle = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) w ds, \quad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

and so, the boundary condition $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, where $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, has a meaning in $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

The regularity of the solutions of $(\mathbb{P})$ is obtained using: the Trace Theorem, the property that $-\Delta$ is an isomorphism between certain spaces, and bootstrapping arguments.

Using variational methods, we prove the existence of nontrivial solutions.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a regularidade e existência de soluções do problema misto:

$$(\mathbb{P}) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega, -\Delta) \\ -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), com fronteira suave $\partial\Omega$; a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, assintoticamente linear em $-\infty$, superlinear em $+\infty$, e, com crescimento subcrítico; $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ é o operador traço de ordem zero; $H^1(\Omega, -\Delta)$ é o espaço definido por:

$$H^1(\Omega, -\Delta) = \{u \in H^1(\Omega), \quad \text{tal que} \quad -\Delta u \in L^2(\Omega)\};$$

o operador $\gamma_1 : H^1(\Omega, -\Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$, é o prolongamento linear e contínuo da aplicação $\gamma_1 : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$, denotada na mesma forma e definida por

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega}, \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

a derivada normal exterior.

Para cada $u \in H^1(\Omega, -\Delta)$, $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ e $\gamma_0 u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, identificamos o elemento $\gamma_0 u$, com o funcional $\gamma_0^* u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ definido por

$$\langle \gamma_0^*, w \rangle = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) w ds, \quad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

assim, a condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, tem sentido em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

A regularidade das soluções de (P) é obtida utilizando o Teorema do Traço, a propriedade de ser $-\Delta$ um isomorfismo entre certos espaços, e argumentos de bootstrapping.

A existência de solução não nula do problema (P), é obtida utilizando métodos variacionais.

Introdução

Neste trabalho, estudamos a regularidade e existência de soluções do seguinte problema misto:

$$(1) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega, -\Delta) \\ -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde: Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), com fronteira suave $\partial\Omega$; a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, assintoticamente linear em $-\infty$, superlinear em $+\infty$, e, com crescimento polinomial subcrítico; $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ é o operador traço de ordem zero, definido no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$, e, com valores no espaço de Sobolev do traço $H^{1/2}(\partial\Omega)$; $H^1(\Omega, -\Delta)$ é o espaço definido por:

$$H^1(\Omega, -\Delta) = \{u \in H^1(\Omega), \text{ tal que } -\Delta u \in L^2(\Omega)\};$$

$H^{-1/2}(\partial\Omega)$ é o dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$; o operador

$\gamma_1 : H^1(\Omega, -\Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ é o prolongamento linear e contínuo da aplicação derivada normal exterior, denotada na mesma forma $\gamma_1 : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$, definida em $C^\infty(\overline{\Omega})$, o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, em $\overline{\Omega}$, e com valores no espaço $C^\infty(\partial\Omega)$ das funções infinitamente diferenciáveis em $\partial\Omega$, definido do seguinte modo: seja $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ um campo vetorial normal exterior a $\partial\Omega$,

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \eta_i(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Para cada $u \in H^1(\Omega, -\Delta)$, $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ e $\gamma_0 u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, identificamos o elemento $\gamma_0 u$ com o funcional $\gamma_0^* u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ definido por

$$\langle \gamma_0^* u, w \rangle = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) w ds, \quad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

assim, a condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, tem sentido em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Nosso trabalho sobre (1), foi motivado por Arcoya-Villegas [1], os quais provam a existência de pelo menos uma solução não trivial do seguinte problema de Neumann:

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com as seguintes condições: a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz:

(f_1) Se $N \geq 2$, existem $\sigma \in (1, \ell)$ e k_1, k_2 constantes positivas tais que

$$|f(x, s)| \leq k_1 + k_2 |s|^\sigma, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

onde

$$\ell = \frac{N+2}{N-2} \text{ se } N \geq 3, \text{ e } \ell = \infty \text{ se } N = 2.$$

(f_2) Existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) - \lambda s = 0, \quad \text{uniformemente em } x \in \overline{\Omega}.$$

(f_3) Existem $s_0 > 0$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ tais que

$$0 < F(x, s) \leq \theta s f(x, s), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall s \geq s_0,$$

onde $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$ é a primitiva de f .

$$(f_4) \quad \frac{f(x, s)}{s} > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall s \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(f₅) Existem $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in (0, \lambda_1)$, tais que

$$\frac{f(x, s)}{s} \leq \alpha, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\},$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor não nulo, de $-\Delta$ em $H^1(\Omega)$ com condição de fronteira de Neumann.

Para resolver (1), utilizamos o método variacional.

Este trabalho está organizado em 5 capítulos. No primeiro, apresentamos resultados básicos sobre os operadores traço γ_j para estabelecer o significado da condição de fronteira, e alguns resultados conhecidos que são utilizados ao longo deste trabalho. No segundo capítulo, obtemos um resultado de regularidade, e nos baseamos neste, para obter a formulação variacional de nosso problema, e naturalmente estabelecer o funcional de Euler-Lagrange, cujos pontos críticos são soluções fracas do problema (1). No capítulo 3, nos baseamos na análise espectral dos operadores simétricos compactos, para obter algumas propriedades dos autovalores e autofunções de $-\Delta$ com condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$ em $\partial\Omega$. No capítulo 4, nos inspiramos nos artigos de Arcoya-Villegas [1] e Figueiredo [11] para obter a condição de Palais-Smale. No capítulo 5, utilizando os resultados obtidos nos capítulos anteriores, demonstramos os Teoremas (5.1.1) e (5.2.1) de existência de soluções correspondentes aos casos $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$ do parâmetro real α , da condição de fronteira do problema (1), nestes teoremas usamos o fato que, para $n \geq 2$, $H^1(\Omega)$ não está imerso em $L^\infty(\Omega)$, por isto ditos teoremas não se aplicam ao caso $N = 1$.

O final destas notas contém dois apêndices, o apêndice A com alguns fatos clássicos, e o apêndice B com as normas introduzidas, operadores e subespaços considerados neste trabalho no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$, e as conclusões.

Capítulo 1

Uma equação elíptica, com termo não linear assintoticamente linear em $-\infty$ e superlinear em $+\infty$, com condição de Robin.

1.0 Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência de solução não nula do problema misto:

$$(1.1) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega, -\Delta) \\ -\Delta u = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde: Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), com fronteira $\partial\Omega$ suave, mais precisamente $\partial\Omega$ é uma variedade infinitamente diferenciável de dimensão $N - 1$, estando Ω de um mesmo lado de $\partial\Omega$; a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

$f_0)$ f é contínua.

$f_1)$ Existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|f(x, s)| \leq c(1 + |s|^\sigma), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \text{e} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

onde o expoente σ é uma constante, tal que

$$\begin{aligned} 1 < \sigma < \frac{N+2}{N-2} \quad \text{se } N \geq 3, \\ 1 < \sigma < \infty \quad \text{se } N = 2. \end{aligned}$$

$f_2)$ Existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \{f(x, s) - \lambda s\} = 0, \quad \text{uniformemente em } x \in \overline{\Omega}.$$

$f_3)$ Existem $s_0 > 0$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ tais que

$$0 < F(x, s) \leq \theta s f(x, s), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall s \geq s_0,$$

onde

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt.$$

O operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ é a generalização da restrição de uma função regular. O espaço $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ é o dual do espaço de Sobolev do traço $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Para uma melhor informação sobre estes espaços de Sobolev de ordem fracionário, referimos ao leitor a [21] ou [23].

O espaço $H^1(\Omega, -\Delta)$ está definido por:

$$H^1(\Omega, -\Delta) = \{u \in H^1(\Omega) \quad \text{tal que} \quad -\Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

com a norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega, -\Delta)} = (\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

O operador $\gamma_1 : H^1(\Omega, -\Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$, é o prolongamento linear e contínuo da aplicação derivada normal exterior, $\gamma_1 : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$, denotada na mesma forma, e definida por:

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \eta_i(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad u \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

onde $C^\infty(\bar{\Omega})$ e $C^\infty(\partial\Omega)$, são os espaços das funções infinitamente diferenciáveis em $\bar{\Omega}$ e $\partial\Omega$, respectivamente, e $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, um campo vetorial normal exterior a $\partial\Omega$.

Para cada $u \in H^1(\Omega, -\Delta)$, $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, identificamos o elemento $\gamma_0 u$, com o funcional $\gamma_0^* u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ definido por

$$\langle \gamma_0^* u, w \rangle = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) w ds, \quad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

assim, a condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, tem sentido em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Por outro lado, se $u \in H^2(\Omega)$, $\gamma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L^2(\partial\Omega)$, então neste caso temos $\gamma_1(u) = \gamma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$, por isto escrevemos

$$\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

1.1 Preliminares.

Nesta seção, enunciarei alguns resultados conhecidos e introduziremos notações que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

O bem conhecido espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ está dotado com a norma

$$||u||^2 = \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Teorema 1.1.

Supor Ω limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Então, existe um operador linear limitado $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ tal que

$$\text{a) } \gamma_0 u = u|_{\partial\Omega} \text{ se } u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

$$\text{b) } \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_1 \|u\|, \forall u \in H^1(\Omega)$$

onde a constante c_1 depende de Ω .

Demonstração: Veja o Teorema 1, pág. 258 em [8].

Definição 1.1.

Para cada $u \in H^1(\Omega)$, $\gamma_0 u$ é chamado o traço de u em $\partial\Omega$.

Teorema 1.2. (Do Traço).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, aberto, limitado e com fronteira suave. Então, os operadores traço γ_j podem ser estendidos a operadores lineares contínuos, os quais aplicam $H^m(\Omega)$ sobre $H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$, para $0 \leq j \leq m-1$. Além disso, o operador $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_{m-1})$ aplica $H^m(\Omega)$ sobre o espaço produto $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$. Finalmente, o espaço $H_0^m(\Omega)$ é o núcleo do operador γ .

Demonstração: Veja teorema 3.1, pág. 189 em [2] ou teorema 5, pág. 905 em [7].

Teorema 1.3.

Existe um único operador γ_1 que aplica $H^1(\Omega, -\Delta)$ em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, tal que a *fórmula de Green*:

$$\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle = \int_{\Omega} v \Delta u + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \quad u \in H^1(\Omega, -\Delta), v \in H^1(\Omega),$$

é verdadeira.

Observação. O espaço $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega, -\Delta)$.

Demonstração: Veja teorema 2.1, pág. 174 em [2].

Teorema 1.4 (Compacidade do operador traço).

Sejam: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira $C^{0,1}$, $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < +\infty$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) Se $mp < N$ e $1 \leq q < \frac{p(N-1)}{N-mp}$, então existe uma única aplicação $\gamma_0 : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$, linear e contínua, tal que se $u \in C(\overline{\Omega})$ então $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$.
Se $p > 1$ então γ_0 é compacto.

b) Se $mp = N$, então (a) é válida para qualquer $q \geq 1$;

c) Se $mp > N$ o traço $\gamma_0 u$ de $u \in W^{m,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ é a restrição clássica $u|_{\partial\Omega}$.

Demonstração: Veja o teorema 6.2 página 107 em [23] ou Teorema 6.10.5 em [15] ou [5].

Para o seguinte teorema, necessitamos introduzir os seguintes conceitos:

Consideramos Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira suave no sentido estabelecido no início da introdução, e A o operador diferencial parcial linear de ordem $2m$, definido por:

$$Au = \sum_{|k|, |h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh} D^h u),$$

onde $a_{kh} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e reais.

Dizemos que A é *elíptico* em $\overline{\Omega}$ se para cada $x \in \overline{\Omega}$ e cada vetor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N - \{0\}$, temos:

$$P(x, \xi) = \sum_{|k|=|h|=m} a_{kh}(x) \xi^{k+h} \neq 0, \quad (\xi^{k+h} = \xi_1^{k_1+h_1} \dots \xi_N^{k_N+h_N}).$$

Sejam $B_0, \dots, B_{m-1}, m$ operadores fronteira, definidos por:

$$B_j u = \sum_{|h| \leq m_j} b_{jh} D^h u, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

onde $0 \leq m_j \leq 2m-1$ e as funções b_{jh} são funções infinitamente diferenciáveis sobre $\partial\Omega$.

Dizemos que o conjunto dos operadores fronteira $\{B_j\}$ é *normal* no sentido de Aronszajn e Milgram se $m_j \neq m_i$ para $j \neq i$ e, para todo ponto $x \in \partial\Omega$, todo vetor $\eta \neq 0$ normal a $\partial\Omega$ em x , temos:

$$Q_j(x, \eta) = \sum_{|h|=m_j} b_{jh} \eta^h \neq 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Dizemos que o conjunto de operadores fronteira $\{B_j\}$ “*cobre*” o operador A se para cada $x \in \partial\Omega$, ξ vetor arbitrário real não nulo tangente a $\partial\Omega$ em x , e ξ' vetor arbitrário real não nulo normal a $\partial\Omega$ em x , o polinômio na variável τ

$$P(x, \xi + \tau \xi') = \sum_{|k|=|h|=m_j} a_{kh}(x) (\xi + \tau \xi')^{k+h}$$

admite m raízes $\tau_1(\xi, \xi'), \dots, \tau_m(\xi, \xi')$ com parte imaginária positiva, e os m polinômios em τ :

$$Q_j(\tau) := Q_j(x, \xi + \tau \xi') = \sum_{|h|=m_j} b_{j,h}(\xi + \tau \xi')^h,$$

são linearmente independentes módulo o polinômio

$$\prod_{i=1}^m (\tau - \tau_i(\xi, \xi')).$$

Dizemos que a condição (NR) é satisfeita pelo conjunto de operadores

$$\{A, B_0, B_1, \dots, B_{m-1}\},$$

quando verificam:

a) O conjunto de operadores fronteira $B = \{B_j : j = 0, 1, \dots, m-1\}$ é *normal* no sentido de Aronszajn e Milgram.

b) O conjunto B “cobre” ao operador A .

Em particular o operador $-\Delta = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, e o operador fronteira $B_0 u = \sum_{j=1}^N \eta_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}$, onde $\eta(x) = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ é um vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$, satisfaz a condição (NR) . De fato:

O operador $-\Delta$ é elíptico em $\overline{\Omega}$, já que se $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ então temos:

$$P(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j^2 = \|\xi\|^2 > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

O operador fronteira B_0 “cobre” o operador $-\Delta$ pois, o polinômio

$$Q_0(x, \xi + \tau \xi') = \sum_{j=1}^N n_j(x) (\xi_j + \tau \xi'_j) = (\eta(x) \cdot \xi') \tau,$$

não é múltiplo do polinômio $\tau - \tau_1(\xi, \xi')$, onde $\tau_1(\xi, \xi')$ é raiz com parte imaginária positiva de

$$P(\tau) = \sum_{|k|=|h|=1} (\xi + \tau \xi')^{k+h}.$$

Por outro lado, para todo $x \in \partial\Omega$ temos:

$$Q_0(x, \eta) = \sum_{j=1}^N \eta_j(x) \cdot v_j(x) = \eta \cdot v \neq 0,$$

para qualquer campo vetorial $v(x) = (v_1, \dots, v_N) \neq 0$ normal à fronteira $\partial\Omega$ em x .

Portanto $\{B_0\}$ é normal.

Espaços N e N^*

Sejam: $1 < p < \infty, r \geq 0$ e $\eta(x) = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ um campo vetorial real normal sobre $\partial\Omega$ e exterior a Ω . Definimos:

$$N = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : -\Delta u = 0, \quad B_0 u = \sum_{j=1}^N \eta_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0\}$$

$$\text{Sejam: } p' = \frac{p}{p-1} \text{ e}$$

$$N^* = \{u \in W^{2,p'}(\Omega) : (-\Delta)^* u = 0, \quad B_0^* u = 0\},$$

onde $((-\Delta)^*, B_0^*)$ é o operador adjunto formal de $(-\Delta, B_0)$.

É fácil ver que $(-\Delta, B_0)$ é auto adjunto. Os espaços N e N^* são subespaços do espaço $C^\infty(\overline{\Omega})$ e portanto não dependem de p nem de p' . Quando Ω é simplesmente conexo, $N = N^* =$ o espaço das constantes. Neste trabalho vamos assumir Ω simplesmente conexo. Sejam:

$$\begin{aligned} W_{B_0}^{2+r,p}(\Omega) &= \{u \in W^{2+r,p}(\Omega) : B_0 u = 0\}, \quad \text{e} \\ \{W^{r,p}(\Omega); N^*\} &= \{u \in W^{r,p}(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.5. O operador $-\Delta$, é um isomorfismo de $W_{B_0}^{2+r,p}(\Omega)/N$ sobre $\{W^{r,p}(\Omega); N^*\}$ para todo real $r \geq 0$ e $1 < p < +\infty$.

Demonstração: Veja o Teorema 3.1 em [18].

Teorema 1.6. (Aproximação global por meio de funções suaves até a fronteira)

Supor $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, limitado, $\partial\Omega$ de classe C^1 e $u \in H^1(\Omega)$. Então existem funções $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Demonstração: Veja o Teorema 3 pág. 252 em [8].

Capítulo 2

Regularidade e Formulação Variacional

2.0 Introdução

Neste capítulo apresentamos, um resultado sobre a regularidade das soluções fracas do problema (1.1). Mostramos que pertencem ao espaço $H^2(\Omega)$, e estabelecemos o funcional de Euler-Lagrange correspondente a tal problema.

2.1 Regularidade

Teorema 2.1.1.

Sejam: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as condições (f_0) e (f_1) , e α um número real.

Se $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz:

$$(1) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u)v - \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

então $u \in H^2(\Omega)$.

Demonstração:

Por ser a aplicação $\gamma_1 : H^2(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ sobre e $-\alpha\gamma_0 u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, existe $w \in H^2(\Omega)$ tal que

$$(2) \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\alpha\gamma_0 u.$$

De (1) e (2) para $v \in H^1(\Omega)$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} f(x, u)v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} \gamma_0(v) ds \\ &= \int_{\Omega} \{f(x, u) + \Delta w\}v + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

Fazendo $h = u - w$ e $F(x) = f(x, u(x)) + \Delta w$, obtemos:

$$(3) \quad \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v = \int_{\Omega} F(x)v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Pela condição (f_1) temos:

1º Caso: $N = 2$, então $f \in L^2(\Omega)$, assim $F \in L^2(\Omega)$.

2º Caso: $N > 2$, levando em conta que:

$$1 < \sigma < \frac{N+2}{N-2} \quad \text{e} \quad 2^* = \frac{2N}{N-2},$$

seja $p_1 = \frac{2^*}{\sigma} = \frac{2N}{N-2} \left(\frac{1}{\sigma} \right) > \frac{2N}{N-2} \left(\frac{N-2}{N+2} \right) = \frac{2N}{N+2} > 1$, portanto temos:

$$(4) \quad \frac{2N}{N+2} < p_1 < \frac{2N}{N-2}.$$

Então,

$$(5) \quad \int_{\Omega} |f(x, u)|^{p_1} \leq \tilde{C} \int_{\Omega} (1 + |u|^{2^*}) < +\infty, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

portanto, $f \in L^{p_1}(\Omega)$.

Se $p_1 \geq 2$ então $F \in L^2(\Omega)$. Se $p_1 < 2$ então $F \in L^{p_1}(\Omega)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $F \in L^{p_1}(\Omega)$ com $1 < p_1 \leq 2$.

De (3) com $v = 1$ sobre $\overline{\Omega}$, temos:

$$(6) \quad \int_{\Omega} F(x) dx = 0.$$

Portanto $F \in \{W^{0,p_1}(\Omega); N^*\}$. Pelo Teorema (1.5) existe um único $\tilde{h} \in W_{E_0}^{2,p_1}(\Omega)/N$, tal que:

$$(7) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{h} = F, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

- No caso $N \geq 3$ temos $\frac{1}{p'_1} = 1 - \frac{1}{p_1} > 1 - \frac{N+2}{2N} = \frac{N-2}{2N}$,

$$p'_1 < \frac{2N}{N-2} = 2^*, \quad \text{então } H^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega) \subset L^{p'_1}(\Omega).$$

Assim $H^1(\Omega) \subset L^{p'_1}(\Omega)$.

- No caso $N = 2$, $H^1(\Omega) \subset L^{p'_1}(\Omega)$.

De (7) temos:

$$(8) \quad - \int_{\Omega} v \Delta \tilde{h} = \int_{\Omega} v F, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Já que $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i} \in W^{1,p_1}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, N$ e $v \in W^{1,2}(\Omega)$, temos:

i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{p_1} < \frac{N+1}{N}$, quando $N > 2$ e $N > p_1 > 1$

ii) $p_1 > 1$, quando $N \leq 2$.

Então integrando por partes, (veja o teorema 1 no apêndice A) obtemos:

$$\int_{\Omega} v \Delta \tilde{h} dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial \tilde{h}}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \tilde{h},$$

assim obtemos

$$(9) \quad - \int_{\Omega} v \Delta \tilde{h} dx = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \tilde{h}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

De (8) e (9) obtemos:

$$(10) \quad \int_{\Omega} \nabla \tilde{h} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} F v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De (3) e (9) temos:

$$(11) \quad \int_{\Omega} \nabla (h - \tilde{h}) \cdot \nabla v = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Se $p_1 = 2$, então

$$W^{2,p_1}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega).$$

Se $p_1 < 2$ então temos os seguintes casos:

- No 1º caso, $N = 2$, já que $p_1 > 1$ então

$$2 < \frac{2p_1}{2 - p_1}.$$

- No 2º caso, $N > 2$, como $p_1 > \frac{2N}{N+2}$, então

$$2 < \frac{p_1 N}{N - p_1}.$$

Portanto, em ambos casos temos:

$$W^{2,p_1}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega).$$

Assim, $\tilde{h} \in W^{1,2}(\Omega)$ e com $v = h - \tilde{h}$ em (11) conseguimos:

$$\int_{\Omega} |\nabla(h - \tilde{h})|^2 dx = 0.$$

Seja $v_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v dx$, então pela desigualdade de Poincaré temos,

$$\int_{\Omega} |v - v_{\Omega}|^2 dx \leq C(N, \Omega) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = 0,$$

então $\int_{\Omega} |v - v_{\Omega}|^2 dx = 0$, $v(x) = v_{\Omega} = \text{constante p.q.t. } x \in \Omega$. Então $h(x) = \tilde{h}(x) + v_{\Omega}$. Assim $D^{\alpha}h = D^{\alpha}\tilde{h}$ para qualquer índice α com $|\alpha| \leq 2$, e já que $\tilde{h} \in W^{2,p_1}(\Omega)$ então $h \in W^{2,p_1}(\Omega)$.

Portanto

$$u \in W^{2,p_1}(\Omega).$$

No 1º Caso, $F \in L^2(\Omega)$, $\tilde{h} \in W^{2,2}$, então, $u \in W^{2,2}(\Omega)$.

No 2º Caso, se $p_1 = 2$ então $F \in L^2(\Omega)$ e como no 1º caso $u \in W^{2,2}(\Omega)$, se $p_1 < 2$, $F \in L^{p_1}(\Omega)$, $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$, e temos as seguintes situações:

a) $2p_1 > N$

b) $2p_1 = N$

c) $2p_1 < N$

No caso (a) $W^{2,p_1}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \subset L^{\infty}(\Omega)$, portanto $u \in L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty)$.

Então $f \in L^2(\Omega)$ pois:

$$(12) \quad \int_{\Omega} |f(x, u)|^2 \leq \tilde{c} \int_{\Omega} (1 + |u|^{2\sigma}) < +\infty.$$

Assim $F \in L^2(\Omega)$, então $u \in W^{2,2}(\Omega)$.

No caso (b) $2p_1 = N$, $W^{2,p_1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p_1, \infty)$, $2\sigma > 2 > p_1$ então por (12) $f \in L^2(\Omega)$, e como no caso anterior $u \in W^{2,2}(\Omega)$.

No caso (c) $2p_1 < N$, usamos o bootstrapping.

$W^{2,p_1}(\Omega) \subset L^{p_1^*}(\Omega)$, onde $p_1^* = \frac{p_1 N}{N - 2p_1}$. Seja $p_2 = \frac{p_1^*}{\sigma}$, então

$$\int_{\Omega} |f(x, u)|^{p_2} \leq \tilde{c} \int_{\Omega} (1 + |u|^{p_1^*}) < +\infty.$$

Portanto, $f \in L^{p_2}(\Omega)$, $F \in L^{p_2}(\Omega)$, então $u \in W^{2,p_2}(\Omega)$.

Se $p_2 < 2$ e $2p_2 < N$ então $u \in L^{p_2^*}(\Omega)$, $p_2^* = \frac{N p_2}{N - 2p_2}$, logo $F \in L^{p_3}(\Omega)$, onde $p_3 = \frac{p_2^*}{\sigma}$ então $u \in W^{2,p_3}(\Omega)$.

Continuando nesta situação obtemos os números

$$1 < p_1 < p_2 < \dots < p_s,$$

onde $p_s \geq 2$. De fato:

Já que $p_1 > \frac{2N}{N+2}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p_1 = \frac{2N}{N+2}(1 + \varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{p_1^*/\sigma}{2^*/\sigma} = \frac{p_1 N / (N - 2p_1)}{2N / (N - 2)} = \frac{p_1 (N - 2)}{2(N - 2p_1)} \\ &= \frac{(N - 2)2N(1 + \varepsilon)/(N + 2)}{2[N - 4N(1 + \varepsilon)/(N + 2)]} \\ &= \frac{(N - 2)(1 + \varepsilon)/(N + 2)}{[N + 2 - 4(1 + \varepsilon)]/(N + 2)} \\ &= \frac{(N - 2)(1 + \varepsilon)}{N - 2 - 4\varepsilon} \\ &> 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{p_2}{p_1} > 1 + \varepsilon$, $p_2 > p_1 + \varepsilon$, $p_2 - p_1 > \varepsilon$.

Supor que temos:

$$1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{i-1} < p_i \quad \text{e} \quad \frac{p_j}{p_{j-1}} > 1 + \varepsilon, j = 2, 3, \dots, i,$$

vamos provar que $p_{i+1} - p_i > \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+1}}{p_i} &= \frac{p_i^*/\sigma}{p_{i-1}^*/\sigma} = \frac{p_i^*}{p_{i-1}^*} = \frac{Np_i/(N-2p_i)}{Np_{i-1}/(N-2p_{i-1})} = \frac{p_i(N-2p_{i-1})}{p_{i-1}(N-2p_i)} \\ &> \frac{p_i}{p_{i-1}} > 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Então $\frac{p_{i+1}}{p_i} > 1 + \varepsilon, p_{i+1} - p_i > \varepsilon$. Assim a sequência $\{p_j\}$ é estritamente crescente, $p_j - p_{j-1} > \varepsilon$, portanto, existe $p_s \geq 2$ e $f \in L^2(\Omega)$ então $u \in W^{2,2}(\Omega)$.

2.2 Formulação Variacional

Teorema 2.2.1.

Com as mesmas condições sobre Ω, f e α , como no Teorema 2.1.1, temos que os problemas seguintes são equivalentes:

$$(\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \text{i)} & u \in H^1(\Omega, -\Delta) \\ \text{ii)} & -\Delta u = f(x, u(x)), \\ \text{iii)} & \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \Omega \\ \\ \text{em } H^{-1/2}(\partial\Omega), \end{matrix}$$

e

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{i)} & u \in H^1(\Omega) \\ \text{ii)} & \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u)v - \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds, \end{cases} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Demonstração:

a) Se u é uma solução do problema $(\mathbb{P})$, então,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v = \int_{\Omega} f(x, u(x))v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Usando a fórmula de Green temos:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle = \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Pela condição de fronteira obtemos:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds = \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

b) Se u é uma solução do problema (Q) , temos

$$(1) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u) v - \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

e

$$(2) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u) v, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Pelo Teorema (2.1.1) $u \in H^2(\Omega)$, então de (2) obtemos:

$$-\int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\Omega} f(x, u) v, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

portanto, temos

$$(3) \quad -\Delta u = f(x, u(x)).$$

Usando a fórmula de Green em (1), e levando em conta (3) obtemos:

$$\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

isto é $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, em $\partial\Omega$.

Lema 2.2.1.

O funcional Φ definido sobre $H^1(\Omega)$ por:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, pertence à classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, com derivada dada por:

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds - \int_{\Omega} f(x, u)v, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Portanto, os pontos críticos de Φ são soluções do problema (Q).

Demonstração: Seja $\Phi_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds$,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1(u + tv) - \Phi_1(u)}{t} &= \int_{\partial\Omega} \frac{(\gamma_0(u + tv))^2 - (\gamma_0 u)^2}{2t} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ \gamma_0 u \cdot \gamma_0 v + \frac{t}{2} (\gamma_0 v)^2 \right\} ds. \end{aligned}$$

Então,

$$\langle \Phi'_1(u), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_1(u + tv) - \Phi_1(u)}{t} = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds.$$

Por outro lado, a derivada de Gateaux de Φ_1 é contínua, de fato

$$\begin{aligned} |\langle \Phi'_1(u), v \rangle| &= \left| \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u \cdot \gamma_0 v ds \right| \\ &\leq \| \gamma_0 u \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma_0 v \|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq c_1^2 \| u \| \| v \|. \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

É bem conhecido que o funcional

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x, u)$$

pertence a $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ com derivada dada por

$$\langle \Phi'_2(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u)v.$$

Capítulo 3

Autovalores e autofunções

3.0 Introdução

Neste capítulo, estabelecemos a existência dos autovalores de $-\Delta$ com a condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, nos casos, $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$. Para isto, usamos a análise espectral dos operadores simétricos compactos. Também expressamos o espaço $H^1(\Omega)$ como soma de dois subespaços, um de dimensão um, e o outro seu complemento ortogonal.

3.1 Autovalores

1º Caso $\alpha < 0$

Proposição 3.1.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$, tal que:

$$(3.1) \quad \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + C(\varepsilon) \int_{\Omega} u^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demonstração:

Provamos primeiro que dado $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$, tal que:

$$(3.2) \quad \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|u\|^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma usual de $H^1(\Omega)$. Supor que (3.2) é falsa então,

$$\exists \varepsilon_0, \forall n, \exists u_n \in H^1(\Omega), \|\gamma_0 u_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 > \varepsilon_0 \|u_n\|^2 + n \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Seja $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Então existem: uma subsequência de $\{v_n\}$ que continuaremos denotando por $\{v_n\}$, e um elemento $v \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v, & \text{fracamente em } H^1(\Omega), \\ v_n \rightarrow v, & \text{em } L^2(\Omega) \\ \gamma_0(v_n) \rightarrow \gamma_0(v), & \text{em } L^2(\partial\Omega). \end{cases}$$

Então temos:

$$(3.3) \quad c_1 = c_1 \|v_n\|^2 \geq \|\gamma_0 v_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 > \varepsilon_0 + n \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq n \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De (3.3) temos:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \text{ portanto } v = 0. \text{ Então}$$

$$0 = \|\gamma_0(0)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\gamma_0 v_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \{\varepsilon_0 + n \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2\} \geq \varepsilon_0,$$

portanto, $0 \geq \varepsilon_0 > 0$ o que é absurdo. Assim (3.2) é verdadeira e temos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C(\varepsilon), \forall u \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + (\varepsilon + C(\varepsilon)) \int_{\Omega} u^2.$$

Na continuação determinamos a existência dos autovalores do problema:

$$(3.4) \quad \begin{cases} -\Delta u = \mu u, & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde μ e α são constantes, e $\alpha < 0$. Este problema tem a seguinte formulação variacional

$$(3.5) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds = \mu \int_{\Omega} uv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Procuramos uma forma bilinear que defina um produto interno em $H^1(\Omega)$, portanto, consideramos a seguinte forma bilinear:

$$a_k[u, v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds + k \int_{\Omega} uv, \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

onde k é uma constante positiva escolhida da seguinte forma: de (3.1) escolhemos ε e $k > 0$ tais que:

$$(3.6) \quad 0 < \varepsilon < -\frac{1}{\alpha} \quad \text{e} \quad k > -\alpha C(\varepsilon),$$

então temos:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds + k \int_{\Omega} u^2 \geq (1 + \alpha\varepsilon) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + (k + \alpha C(\varepsilon)) \int_{\Omega} u^2.$$

Seja:

$$(3.7) \quad \delta = \min\{1 + \alpha\varepsilon, \quad k + \alpha C(\varepsilon)\}$$

então

$$(3.8) \quad a_k[u, u] \geq \delta \|u\|^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

isto é, a forma $a_k[\cdot, \cdot]$ é coerciva.

A forma bilinear $a_k[\cdot, \cdot]$ é contínua. De fato:

$$|a_k[u, v]| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + k \int_{\Omega} uv + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u \cdot \gamma_0 v ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_2 \|u\| \|v\| + |\alpha| \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq c_2 \|u\| \|v\| + |\alpha| c_1^2 \|u\| \|v\| \\
&= c_3 \|u\| \|v\|,
\end{aligned}$$

onde $c_3 = c_2 + |\alpha|c_1^2$, e $c_2 = 1 + k$.

Portanto temos:

$$(3.9) \quad |a_k[u, v]| \leq c_3 \|u\| \|v\|.$$

A forma bilinear a_k é simétrica:

$$(3.10) \quad a_k[u, v] = a_k[v, u], \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

De (3.8), (3.9) e (3.10), a forma bilinear $a_k[\cdot, \cdot]$ define um produto interno em $H^1(\Omega)$, que denotamos por $(\cdot, \cdot)_k$, isto é:

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + k \int_{\Omega} uv + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u \cdot \gamma_0 v ds, \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

e com $\|\cdot\|_k$ a norma correspondente

$$\|u\|_k = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + k \int_{\Omega} u^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds \right)^{1/2}, \quad u \in H^1(\Omega).$$

A norma $\|\cdot\|_k$ é equivalente à norma usual $\|\cdot\|$, de $H^1(\Omega)$, de fato:

$$(3.11) \quad \delta \|u\|^2 \leq \|u\|_k^2 \leq c_3 \|u\|^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Para cada $u \in H^1(\Omega)$ fixo, a aplicação $v \rightarrow \int_{\Omega} uv$ é um funcional linear limitado sobre $H^1(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Omega} uv \right| \leq \int_{\Omega} |u| |v| \leq \|u\| \|v\| \leq \frac{1}{\delta} \|u\|_k \|v\|_k, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Então, pelo teorema de representação de Riesz-Frechet, existe um elemento em $H^1(\Omega)$ denotado por Tu tal que:

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} uv = (Tu, v)_k, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Em particular temos:

$(Tu, u)_k > 0$, para todo u de $H^1(\Omega)$ não nulo.

Assim (3.12) define um operador $T : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ o qual é linear, simétrico, limitado e compacto. De fato:

- T é linear: Sejam $u, w, v \in H^1(\Omega)$ e β uma constante

$$\begin{aligned} (T(u + \beta w), v)_k &= \int_{\Omega} (u + \beta w)v = \int_{\Omega} uv + \beta \int_{\Omega} wv = (Tu, v)_k + \beta(Tw, v)_k \\ &= (Tu + \beta Tw, v)_k. \end{aligned}$$

- T é simétrico:

$$(Tu, v)_k = \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} vu = (Tv, u)_k = (u, Tv)_k, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

- T é limitado:

$$\begin{aligned} (Tu, Tu)_k &= \int_{\Omega} uTu \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|Tu\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\| \cdot \|Tu\| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \|u\|_k \|Tu\|_k \end{aligned}$$

então,

$$\|Tu\|_k \leq \frac{1}{\delta} \|u\|_k, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

- T é compacto:

Seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$. Vamos provar que a sequência $\{Tu_n\}$ contém uma subsequência convergente em $H^1(\Omega)$. Já que a imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, existem: uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ e $u \in H^1(\Omega)$ tais que:

$u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$ e $u_{n_j} \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$, quando $j \rightarrow \infty$.

Pela definição do operador T conseguimos:

$$\begin{aligned} \|Tu_{n_j} - Tu\|_k^2 &= \int_{\Omega} (u_{n_j} - u)T(u_{n_j} - u) \leq \|u_{n_j} - u\|_{L^2(\Omega)} \|T(u_{n_j} - u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_{n_j} - u\|_{L^2(\Omega)} \|T(u_{n_j} - u)\| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|u_{n_j} - u\|_{L^2(\Omega)} \|T(u_{n_j}) - T(u)\|_k, \end{aligned}$$

então

$$\|Tu_{n_j} - Tu\|_k \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|u_{n_j} - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|Tu_{n_j} - Tu\|_k = 0.$$

Por outro lado, o problema (3.4) é equivalente ao seguinte problema:

$$(3.13) \quad \begin{cases} -\Delta u + ku = (\mu + k)u, & \text{em } \Omega \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora vamos provar que os autovalores do problema (3.13), são os inversos dos autovalores do operador T .

Seja u uma solução do problema (3.13) com $\|u\|_k = 1$, então temos:

$$(3.14) \quad (u, v)_k = (\mu + k) \int_{\Omega} uv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De (3.12) e (3.14) obtemos:

$$(3.15) \quad (u, v)_k = (\mu + k) \int_{\Omega} uv = (\mu + k)(Tu, v)_k, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Fazendo $v = u$ em (3.14) obtemos

$$1 = (\mu + k) \int_{\Omega} u^2$$

portanto,

$$(3.16) \quad \mu + k > 0.$$

Também temos de (3.15) e (3.16),

$$(3.17) \quad Tu = \left(\frac{1}{\mu + k} \right) u.$$

Reciprocamente, suponhamos que (3.17) é verdadeira então pela definição do operador T temos:

$$(Tu, v)_k = \frac{1}{\mu + k} (u, v)_k = \int_{\Omega} uv, \quad v \in H^1(\Omega),$$

portanto obtemos

$$(u, v)_k = (\mu + k) \int_{\Omega} uv$$

esta é (3.14).

Já que $\frac{1}{\mu_1 + k} := \sup\{(Tu, u)_k : \|u\|_k = 1\} > 0$ então existe $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$, com $\|\varphi_1\|_k = 1$, tal que

$$(3.18) \quad (T\varphi_1, \varphi_1)_k = \frac{1}{\mu_1 + k}, \quad T\varphi_1 = \left(\frac{1}{\mu_1 + k} \right) \varphi_1,$$

pelo lema 1.1 pág 36 em [10].

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1 + k} &= \sup\{(Tu, u)_k : \|u\|_k = 1\} \\ &= \sup_{u \neq 0} \left(T \frac{u}{\|u\|_k}, \frac{u}{\|u\|_k} \right)_k \\ &= \sup_{u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} u^2}{\|u\|_k^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(3.19) \quad \frac{1}{\mu_1 + k} = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in H^1(\Omega)}} \frac{\int_{\Omega} u^2}{\|u\|_k^2} \Leftrightarrow (\mu_1 + k) = \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in H^1(\Omega)}} \frac{\|u\|_k^2}{\int_{\Omega} u^2}.$$

De (3.19) temos

$$(3.20) \quad \mu_1 \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds}{\int_{\Omega} u^2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad u \neq 0,$$

em particular para a função constante $\varphi(x) = b$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, $b \neq 0$ temos:

$$\mu_1 \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 \varphi)^2 ds}{\int_{\Omega} \varphi^2} = \frac{\alpha b^2 |\partial\Omega|_{N-1}}{b^2 |\Omega|} < 0,$$

onde $|\partial\Omega|_{N-1}$ denota a medida de Lebesgue $N - 1$ -dimensional de $\partial\Omega$ e $|\Omega|$ a medida de Lebesgue N -dimensional de Ω . Portanto, o primeiro autovalor μ_1 do problema (3.4) é negativo.

Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, autofunções associadas aos $n - 1$ primeiros autovalores de T respectivamente,

$$(3.21) \quad \frac{1}{\mu_n + k} := \sup\{(Tu, u)_k : \|u\|_k = 1, u \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} > 0$$

então existe $\varphi_n \in H^1(\Omega)$, com $\|\varphi_n\|_k = 1$, tal que

$$(3.22) \quad (T\varphi_n, \varphi_n)_k = \frac{1}{\mu_n + k}, \quad T\varphi_n = \frac{1}{\mu_n + k} \varphi_n,$$

pela proposição 1.3 pág. 37 em [10].

Assim, os autovalores do problema (3.13) são positivos e formam uma sequência da forma

$$(3.23) \quad 0 < \mu_1 + k \leq \mu_2 + k \leq \dots$$

Então os autovalores do problema (3.4) formam uma sequência da forma

$$(3.24) \quad -k < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$$

e o problema (3.4) tem no máximo um número finito de autovalores negativos.

2º Caso $\alpha > 0$.

Consideramos agora o problema dos autovalores e autofunções do problema

$$(3.25) \quad \begin{cases} -\Delta u = \beta u, & \text{em } \Omega \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

Sejam:

$$\varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad a_\varepsilon[u, v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \varepsilon \int_{\Omega} uv + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds, \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

então temos:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon[u, u] &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 \\ &\geq m \|u\|^2, \end{aligned}$$

onde $m = \min\{1, \varepsilon\}$. Portanto, a forma bilinear $a_\varepsilon[\cdot, \cdot]$ é coerciva.

Por outro lado, $a_\varepsilon[\cdot, \cdot]$ é contínua:

$$\begin{aligned}
|a_\varepsilon[u, v]| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \varepsilon \int_{\Omega} uv + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u \cdot \gamma_0 v ds \right| \\
&\leq m_1 \|u\| \|v\| + \alpha \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq (m_1 + \alpha c_1^2) \|u\| \|v\| \\
&= m_2 \|u\| \|v\|,
\end{aligned}$$

onde $m_2 = m_1 + \alpha c_1^2$, e $m_1 = 1 + \varepsilon$.

É claro que $a_\varepsilon[\cdot, \cdot]$ é simétrica. Portanto $a_\varepsilon[\cdot, \cdot]$ define um produto interno em $H^1(\Omega)$ que denotamos por $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$, e a norma correspondente é:

$$\|u\|_\varepsilon = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds \right)^{1/2},$$

é equivalente com a norma usual $\|\cdot\|$ de $H^1(\Omega)$:

$$(3.26) \quad m \|u\|^2 \leq \|u\|_\varepsilon^2 \leq m_2 \|u\|^2.$$

Para cada $u \in H^1(\Omega)$ fixo, a aplicação $v \rightarrow \int_{\Omega} uv$ é um funcional linear limitado:

$$\left| \int_{\Omega} uv \right| \leq \int_{\Omega} |u| |v| \leq \|u\| \|v\| \leq \frac{\|u\|}{\sqrt{m}} \|v\|_\varepsilon, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Então, pelo teorema de representação de Riesz-Frechet, existe um elemento denotado por Gu tal que

$$(3.27) \quad \int_{\Omega} uv = (Gu, v)_\varepsilon, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Em particular temos:

$$(Gu, u)_\varepsilon > 0, \quad \forall u \neq 0.$$

Assim (3.27) define um operador $G : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$. Em forma semelhante ao caso $\alpha < 0$, prova-se que G é linear, simétrico, limitado e compacto.

Para determinar a existência dos autovalores do problema (3.25) consideramos o seguinte problema equivalente

$$(3.28) \quad \begin{cases} -\Delta u + \varepsilon u = (\beta + \varepsilon)u, & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \varepsilon > 0,$$

e provamos que os autovalores do problema (3.28), são os inversos dos autovalores do operador G . De fato: seja u uma solução do problema (3.28) com $\|u\|_\varepsilon = 1$, então temos:

$$(3.29) \quad (u, v)_\varepsilon = (\beta + \varepsilon) \int_{\Omega} uv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Fazendo $v = u$ em (3.29) obtemos

$$1 = (\beta + \varepsilon) \int_{\Omega} u^2,$$

portanto,

$$(3.30) \quad \beta + \varepsilon > 0.$$

De (3.27), (3.29) e (3.30) obtemos:

$$(3.31) \quad Gu = \left(\frac{1}{\beta + \varepsilon} \right) u.$$

Já que:

$$\frac{1}{\beta_1 + \varepsilon} = \sup\{(Gu, u)_\varepsilon : \|u\|_\varepsilon = 1\} > 0,$$

então existe $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$, com $\|\varphi_1\|_\varepsilon = 1$ tal que

$$(3.32) \quad (G\varphi_1, \varphi_1)_\varepsilon = \frac{1}{\beta_1 + \varepsilon}, \quad G\varphi_1 = \left(\frac{1}{\beta_1 + \varepsilon} \right) \varphi_1.$$

Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, autofunções associadas aos $n - 1$ primeiros autovalores de G respectivamente,

$$(3.33) \quad \frac{1}{\beta_n + \varepsilon} = \sup\{(Gu, u)_\varepsilon : \|u\|_\varepsilon = 1, \quad u \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} > 0,$$

então existe $\varphi_n \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(3.34) \quad (G\varphi_n, \varphi_n)_\varepsilon = \frac{1}{\beta_n + \varepsilon}, \quad G\varphi_n = \left(\frac{1}{\beta_n + \varepsilon} \right) \varphi_n.$$

Portanto os autovalores do operador G constituem a seguinte sequência de números positivos:

$$\frac{1}{\beta_1 + \varepsilon} \geq \frac{1}{\beta_2 + \varepsilon} \geq \frac{1}{\beta_3 + \varepsilon} \dots$$

então os autovalores do problema (3.28) são:

$$\beta_1 + \varepsilon \leq \beta_2 + \varepsilon \leq \beta_3 + \varepsilon \leq \dots$$

e os autovalores do problema (3.25) são:

$$(3.35) \quad \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots$$

Já que

$$\beta_1 = \inf_{u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds}{\int_\Omega u^2} \geq 0$$

então $\beta_1 \geq 0$. Vamos provar que $\beta_1 > 0$. No caso em que $\beta_1 = 0$, seja φ uma autofunção associada a β_1 , assim temos:

$$0 = \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 \varphi)^2 ds}{\int_\Omega \varphi^2}$$

então $\gamma_0 \varphi = 0$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ e $|\nabla \varphi| = 0$, portanto $\varphi \equiv 0$, absurdo, logo $\beta_1 > 0$.

3.2 Algumas propriedades das autofunções e autovalores

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades do primeiro autovalor e de suas autofunções associadas.

Proposição 3.2.1.

Se φ é uma autofunção do operador $-\Delta$ associada ao primeiro autovalor, com condição de fronteira $\gamma_1\varphi + \alpha\gamma_0\varphi = 0$, onde $\alpha \neq 0$, então $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração:

Faremos a prova para o caso $\alpha < 0$, a demonstração no caso $\alpha > 0$ é semelhante.

Supor que φ satisfaz:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta\varphi = \mu_1\varphi & \text{em } \Omega \\ \gamma_1\varphi + \alpha\gamma_0\varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou equivalentemente (Teorema 2.2.1) φ verifica

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0\varphi \cdot \gamma_0 v = \mu_1 \int_{\Omega} \varphi v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Usando o Teorema 2.1.1 com $f(x, \varphi) = \mu_1\varphi$ temos que $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\gamma_0\varphi \in H^{2-1/2}(\partial\Omega)$ então existe $w_1 \in H^3(\Omega)$ (Teorema do Traço) tal que $\gamma_1 w_1 = -\alpha\gamma_0\varphi$ e temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla v &= \mu_1 \int_{\Omega} \varphi v - \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0\varphi \cdot \gamma_0 v ds \\ &= \mu_1 \int_{\Omega} \varphi v + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 w_1 \cdot \gamma_0 v ds \\ &= \int_{\Omega} \{\mu_1\varphi + \Delta w_1\} v + \int_{\Omega} \nabla w_1 \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

Sejam: $h_1 = \varphi - w_1$ e $F_1 = \mu_1\varphi + \Delta w_1$, então obtemos:

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla h_1 \cdot \nabla v = \int_{\Omega} F_1 v, & \forall v \in H^1(\Omega) \\ \gamma_1(h_1) = 0, \end{cases}$$

Assim, $F_1 \in \{H^1(\Omega); N^*\}$. Pelo Teorema (1.5) existe $\tilde{h} \in H^3(\Omega)$ tal que

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{h} = F_1, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

$$(4) \quad \int_{\Omega} \nabla \tilde{h} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} F_1 v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De (2) e (4) temos:

$$\int_{\Omega} \nabla(h_1 - \tilde{h}) \cdot \nabla v = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

fazendo $v = h_1 - \tilde{h}$ obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla(h_1 - \tilde{h})|^2 = 0,$$

então $\nabla(h_1 - \tilde{h}) = 0$, $h_1 - \tilde{h} = M$ para alguma constante M , então $\varphi = w_1 + \tilde{h} + M \in H^3(\Omega)$. Agora, já que $\varphi \in H^3(\Omega)$ usando o mesmo argumento temos que $\varphi \in H^4(\Omega)$. Portanto $\varphi \in H^m(\Omega)$ para qualquer inteiro $m \geq 0$. Assim, para qualquer derivada $D^\beta \varphi$ existe um inteiro m_β tal que $2m_\beta > N$ e $D^\beta \varphi \in H^{m_\beta}(\Omega)$, então pela imersão de Sobolev e a suavidade da fronteira, $D^\beta \varphi \in C(\overline{\Omega})$.

Proposição 3.2.2.

O primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ é simples.

Demonstração:

Faremos a prova para o caso $\alpha < 0$, a demonstração no caso $\alpha > 0$ é semelhante.

1^o) Passo.

Se φ é uma autofunção associada ao autovalor μ_1 , então φ não muda de sinal.

Demonstração do passo 1. Vamos supor que φ mude de sinal em Ω ; então sejam:

$$\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}, \quad x \in \overline{\Omega}$$

$$\varphi^-(x) = \min\{\varphi(x), 0\}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

A função φ satisfaz

$$(1) \quad (\varphi, \varphi)_k = (\mu_1 + k) \int_{\Omega} \varphi^2.$$

Observando que:

$$(\varphi^+, \varphi^-)_k = \int_{\Omega} \nabla \varphi^+ \cdot \nabla \varphi^- + k \int_{\Omega} \varphi^+ \cdot \varphi^- + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 \varphi^+ \cdot \gamma_0 \varphi^- ds = 0.$$

De fato:

Já que $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ então $\gamma_0 \varphi^+$ e $\gamma_0 \varphi^-$ são as restrições no sentido clássico a $\partial\Omega$ de φ^+ e φ^- respectivamente, portanto:

$$a) \int_{\partial\Omega} \gamma_0 \varphi^+ \cdot \gamma_0 \varphi^- ds = \int_{\partial\Omega} \varphi^+ \cdot \varphi^- ds = 0.$$

$$b) \int_{\Omega} \nabla \varphi^+ \cdot \nabla \varphi^- = \sum_{j=0}^N \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_j} = 0$$

pois temos, para $j = 1, 2, \dots, N$ que :

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} & \text{se } \varphi > 0 \\ 0 & \text{se } \varphi \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi^-}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi > 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} & \text{se } \varphi \leq 0. \end{cases}$$

c) Se $\varphi^+(y) \neq 0$, $\varphi^-(y) = 0$ portanto $\int_{\Omega} \varphi^+ \varphi^- = 0$.

Então temos:

$$(\varphi, \varphi)_k = (\varphi^+, \varphi^+)_k + (\varphi^-, \varphi^-)_k = \beta_1 + \beta_2, \quad \text{onde } \beta_1 > 0 \text{ e } \beta_2 > 0$$

$$\int_{\Omega} \varphi^2 = \int_{\Omega} (\varphi^+)^2 + \int_{\Omega} (\varphi^-)^2 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Assim (1) se pode escrever como:

$$(2) \quad \beta_1 + \beta_2 = (\mu_1 + k)(\alpha_1 + \alpha_2),$$

ou

$$\frac{1}{\mu_1 + k} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}.$$

Com respeito aos números $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, e $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}$ temos as duas possibilidades seguintes:

$$i) \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad \text{ou} \quad ii) \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} < \max \left\{ \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right\}.$$

Se acontece (ii) temos:

Seja

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1 + k} = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in H^1(\Omega)}} \frac{\int_{\Omega} u^2}{\|u\|_k^2} < \frac{\int_{\Omega} (\varphi^+)^2}{\|\varphi^+\|_k^2}$$

absurdo.

Se

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1 + k} = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in H^1(\Omega)}} \frac{\int_{\Omega} u^2}{\|u\|_k^2} < \frac{\int_{\Omega} (\varphi^-)^2}{\|\varphi^-\|_k^2},$$

absurdo. Portanto (ii) não pode acontecer, logo temos (i), isto é

$$(3) \quad \frac{1}{\mu_1 + k} = \frac{\int_{\Omega} (\varphi^+)^2}{\|\varphi^+\|_k^2} = \frac{\int_{\Omega} (\varphi^-)^2}{\|\varphi^-\|_k^2}.$$

Vejamos o que (3) implica:

$$(4) \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi^+ \cdot \nabla v = \mu_1 \int_{\Omega} \varphi^+ \cdot v - \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 \varphi^+ \cdot \gamma_0 v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Seja $v \in H^1(\Omega)$, então a função

$$g(t) = \frac{\int_{\Omega} (\varphi^+ + tv)^2}{\|\varphi^+ + tv\|_k^2},$$

está bem definida em algum intervalo da forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, e alcança em $t = 0$ um valor máximo. Como g é diferenciável temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1 + k} &\geq \frac{\int_{\Omega} (\varphi^+ + tv)^2}{\|\varphi^+ + tv\|_k^2} = \frac{\int_{\Omega} (\varphi^+)^2 + 2t \int_{\Omega} \varphi^+ v + t^2 \int_{\Omega} v^2}{\|\varphi^+\|_k^2 + 2t(\varphi^+, v)_k + t^2 \|v\|_k^2} = g(t) \\ g'(0) &= \frac{2\|\varphi^+\|_k^2 \int_{\Omega} \varphi^+ v - 2(\varphi^+, v)_k \int_{\Omega} (\varphi^+)^2}{\|\varphi^+\|_k^4} = 0 \end{aligned}$$

então

$$\frac{\|\varphi^+\|_k^2}{\int_{\Omega} (\varphi^+)^2} \int_{\Omega} \varphi^+ v = (\varphi^+, v)_k$$

isto é

$$\begin{aligned} (\mu_1 + k) \int_{\Omega} \varphi^+ v &= \int_{\Omega} \nabla \varphi^+ \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 \varphi^+ \cdot \gamma_0 v ds + k \int_{\Omega} \varphi^+ v \\ \mu_1 \int_{\Omega} \varphi^+ v &= \int_{\Omega} \nabla \varphi^+ \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 \varphi^+ \cdot \gamma_0 v ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Usando o Teorema (2.1.1) pág. [24], $\varphi^+ \in H^2(\Omega)$ e pelo Teorema 2.2.1, pág. [30] φ^+ satisfaz

$$(5) \quad \begin{cases} -\Delta\varphi^+ = \mu_1\varphi^+, & \text{em } \Omega \\ \gamma_1\varphi^+ + \alpha\gamma_0\varphi^+ = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto φ^+ é uma autofunção associada ao autovalor μ_1 com condição de fronteira $\gamma_1\varphi^+ + \alpha\gamma_0\varphi^+ = 0$, então pela proposição 3.2.1 $\varphi^+ \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Por outro lado temos:

$$-\Delta\varphi^+ + k\varphi^+ = (\mu_1 + k)\varphi^+ \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Já que φ muda de sinal em Ω , existe x_0 ponto interior de Ω tal que $\varphi^+(x_0) = 0$, o valor mínimo de φ^+ em $\overline{\Omega}$, então pelo princípio do máximo forte, φ^+ é constante em Ω , assim $\varphi^+ \equiv 0$ em Ω , o que é absurdo, portanto φ não pode mudar de sinal em Ω .

2º) Passo.

Na continuação, provamos que a multiplicidade geométrica de μ_1 é um. Sejam φ_1 e φ_2 duas autofunções associadas a μ_1 . Pelo passo anterior para cada $t \in \mathbb{R}$ a autofunção $\varphi_1 + t\varphi_2$ tem o sinal definido em Ω . Assim os conjuntos

$$A = \{t \in \mathbb{R} : \varphi_1 + t\varphi_2 \geq 0 \quad \text{em } \Omega\} \quad \text{e} \quad B = \{t \in \mathbb{R} : \varphi_1 + t\varphi_2 \leq 0 \quad \text{em } \Omega\}$$

são não vazios, fechados e $A \cup B = \mathbb{R}$. Já que $\mathbb{R}$ é conexo, existe $\bar{t} \in A \cap B$, $\bar{t} \neq 0$ e, $\varphi_1 + \bar{t}\varphi_2 = 0$ isto é φ_1 e φ_2 são linearmente dependentes, portanto, o autoespaço associado ao autovalor μ_1 é gerado por uma só autofunção, que denotamos por φ_1 .

3º) Passo. A multiplicidade algébrica de μ_1 é um, isto é μ_1 é simples.

Sejam:

$$N(\mu_1 I + \Delta) = \{u : \mu_1 u + \Delta u = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_1 u + \alpha\gamma_0 u = 0\}$$

$$N(\mu_1 I + \Delta)^2 = \{u : (\mu_1 I + \Delta)(\mu_1 u + \Delta u) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_1 u + \alpha\gamma_0 u = 0\}.$$

a) $N(\mu_1 I + \Delta) \subset N(\mu_1 I + \Delta)^2$.

Seja $\varphi \in N(\mu_1 I + \Delta)$, $\mu\varphi + \Delta\varphi = 0$, então

$$(\mu_1 I + \Delta)^2 \varphi = (\mu_1 I + \Delta)0 = 0, \quad \text{portanto,} \quad \varphi \in N(\mu_1 I + \Delta)^2.$$

b) $N(\mu_1 I + \Delta)^2 \subset N(\mu_1 I + \Delta)$.

Seja $\varphi \in N(\mu_1 I + \Delta)^2$, $(\mu_1 I + \Delta)(\mu_1 \varphi + \Delta\varphi) = 0$, $\mu_1 \varphi + \Delta\varphi \in N(\mu_1 I + \Delta)$, $\mu_1 \varphi + \Delta\varphi = t\varphi_1$ para algum real t .

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} t(\varphi_1, \varphi_1) &= (t\varphi_1, \varphi_1)_k = (\mu_1 \varphi + \Delta\varphi, \varphi_1)_k \\ &= \mu_1(\varphi, \varphi_1)_k + (\Delta\varphi, \varphi_1)_k \\ &= \mu_1(\varphi, \varphi_1)_k + (\mu_1 + k) \int_{\Omega} \varphi_1 \Delta\varphi, \quad (\text{por 3.14, pág. [38]}). \end{aligned}$$

Utilizando duas vezes a fórmula de Green, obtemos:

$$\int_{\Omega} \varphi_1 \Delta\varphi = \int_{\Omega} \varphi \Delta\varphi_1,$$

assim,

$$\begin{aligned} (\mu_1 + k) \int_{\Omega} \varphi_1 \Delta\varphi &= (\mu_1 + k) \int_{\Omega} \varphi \Delta\varphi_1 \\ &= -\mu_1(\mu_1 + k) \int_{\Omega} \varphi \varphi_1 \\ &= -\mu_1(\varphi, \varphi_1)_k, \quad (\text{por 3.14}). \end{aligned}$$

Portanto $t(\varphi_1, \varphi_1)_k = 0$ então $t = 0$. Assim $\mu_1 \varphi + \Delta\varphi = 0$, e $\varphi \in N(\mu_1 I + \Delta)$.

Então a sequência (3.24) pág. 41 é

$$(3.36) \quad -k < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$$

e a sequência (3.35) pág. 44 é

$$(3.37) \quad \beta_1 < \beta_2 \leq \beta_3 \cdots$$

Seja X_1 o espaço das autofunções associadas ao primeiro autovalor μ_1 , e $X_2 = X_1^\perp$ o complemento ortogonal de X_1 relativo ao produto interno $(\cdot, \cdot)_k$. Assim temos:

$$(3.38) \quad H^1(\Omega) = X_1 \oplus X_2.$$

Por ser X_1 espaço de autofunções, temos:

$$(3.39) \quad \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 \varphi)^2 ds = \mu_1 \int_{\Omega} \varphi^2, \quad \forall \varphi \in X_1.$$

No caso $\alpha > 0$, Y_1 é o espaço das autofunções associadas a β_1 , e $Y_2 = Y_1^\perp$, o complemento ortogonal de Y_1 com relação ao produto interno $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$. Assim temos:

$$(3.40) \quad H^1(\Omega) = Y_1 \oplus Y_2.$$

Por ser Y_1 espaço de autofunções, temos:

$$(3.41) \quad \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 \varphi)^2 ds = \beta_1 \int_{\Omega} \varphi^2, \quad \forall \varphi \in Y_1.$$

Capítulo 4

Condição de Palais-Smale

4.0 Introdução

O objetivo deste capítulo, é estabelecer as condições sob as quais o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u), \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaz a condição de Palais-Smale. Faremos apenas os casos $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$, o caso $\alpha = 0$ foi estudado por Arcoya e Villegas em [1].

Em ambos os casos, $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$ utilizamos a seguinte propriedade

Proposição 4.0.1.

Supor $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado, com fronteira de classe C^1 , $u \in H^1(\Omega)$,
 $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$. Então

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_0(u^+) \gamma_0(u^-) ds = 0. \quad (*)$$

Demonstração:

Pelo Teorema (1.6) existe $\{u_n\}, u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } H^1(\Omega).$$

Temos também que:

$$u_n^+ \longrightarrow u^+, \quad \text{em } H^1(\Omega), \quad \text{e}$$

$$u_n^- \longrightarrow u^-, \quad \text{em } H^1(\Omega),$$

para uma demonstração destes fatos veja apêndice A – Proposição 1, pág. [84]. Pela continuidade do operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$, temos:

$$\gamma_0(u_n^+) \rightarrow \gamma_0(u^+), \quad \text{em } L^2(\partial\Omega), \quad \text{e}$$

$$\gamma_0(u_n^-) \longrightarrow \gamma_0(u^-), \quad \text{em } L^2(\partial\Omega).$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u^+) \gamma_0(u^-) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u_n^+) \gamma_0(u_n^-) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} u_n^+ u_n^- ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como consequência de (*) temos:

$$(1) \quad \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 u^+) ds = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u^+)^2 ds$$

$$(2) \quad \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 u^-) ds = - \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u^-)^2 ds.$$

4.1 Caso $\alpha < 0$

Lema 4.1.1.

Supor $(f_0), (f_1), (f_2)$ e (f_3) , então o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u), \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

onde $\alpha < 0$, satisfaz a condição de Palais-Smale (P.S.)

Demonstração:

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} (1) \quad |\Phi(u_n)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_n)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u_n) \right| \leq c \\ (2) \quad |\langle \Phi'(u_n), v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_n)(\gamma_0 v) ds - \int_{\Omega} f(x, u_n)v \right| \\ &\leq \varepsilon_n \|v\|, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ e $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$.

Para mostrar que $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente, é suficiente provar que $\{u_n\}$ é limitada (veja apêndice A - observação, pág. [86]). Para fazer isto raciocinamos por contradição, portanto, existe uma subsequência que ainda denotamos com $\{u_n\}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = +\infty.$$

Logo, podemos supor que $\|u_n\| \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e definimos

$$z_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Assim, existe uma subsequência de $\{z_n\}$ que denotamos da mesma forma tal que,

$$\begin{aligned} (3) \quad & z_n \rightharpoonup z_0 \text{ fracamente em } H^1(\Omega), z_0 \in H^1(\Omega) \\ (4) \quad & z_n \rightarrow z_0 \text{ em } L^2(\Omega) \\ (5) \quad & \gamma_0 z_n \rightarrow \gamma_0 z_0 \text{ em } L^2(\partial\Omega) \\ (6) \quad & z_n(x) \rightarrow z_0(x), \text{ q.t.p. } x \in \Omega \\ (7) \quad & |z_n(x)| \leq q(x), \text{ q.t.p. } x \in \Omega, q \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Dividindo (2) por $\|u_n\|$ obtemos:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla z_n \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 z_n)(\gamma_0 v) ds - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|} \|v\|.$$

Passando ao limite, segue-se de (3) e (5) que:

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v = \int_{\Omega} \nabla z_0 \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 z_0)(\gamma_0 v) ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De (8) com $v = 1$ em $\overline{\Omega}$ obtemos

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} = \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 z_0 ds < +\infty.$$

Vamos provar que

$$(10) \quad \begin{cases} z_0(x) = 0, & \text{q.t.p. } x \in \Omega \\ \gamma_0 z_0(x) = 0, & \text{q.t.p. } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando (10) obteremos uma contradição.

Em primeiro lugar, provamos que,

$$(11) \quad \begin{cases} z_0(x) \leq 0, & \text{q.t.p. em } \Omega \\ \gamma_0 z_0(x) \leq 0, & \text{q.t.p. em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja $\Omega^+ = \{x \in \Omega : z_0(x) > 0\}$ e $|\Omega^+|$ sua medida de Lebesgue.

Escolhendo $v = z_0^+ = \max\{z_0, 0\}$ em (8) temos

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0 = \int_{\Omega^+} |\nabla z_0|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 z_0^+)^2 ds < \infty.$$

Afirmamos que a sequência

$$\frac{f(x, u_n(x)) z_0(x)}{\|u_n\|}, \quad \text{para } x \in \Omega^+,$$

está limitado inferiormente.

De fato, (f_3) implica a existência de uma constante $k > 0$ tal que

$$f(x, s) \geq k s^{\frac{1}{\theta}-1}, \quad \forall s \geq s_0.$$

Então, podemos escolher $s^* > s_0$ tal que

$$f(x, s) \geq \lambda s, \quad \forall s \geq s^*.$$

Por outro lado, de (f_2) para $\varepsilon > 0$ existe $s' < 0$ tal que

$$(13) \quad |f(x, s) - \lambda s| \leq \varepsilon, \quad \forall s \leq s' \quad \text{e} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Seja: $M = \max\{|f(x, s) - \lambda s| : (x, s) \in \overline{\Omega} \times [s', s^*]\}$ e $K_1 = M + \varepsilon$, então:

$$(14) \quad |f(x, s) - \lambda s| \leq K_1, \quad \forall s \in (-\infty, s^*] \quad \text{e} \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

portanto, temos

$$(15) \quad f(x, s) \geq \lambda s - K_1, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Então para $x \in \Omega^+$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x, u_n(x))z_0(x)}{\|u_n\|} &\geq \frac{(\lambda u_n(x) - K_1)}{\|u_n\|} z_0(x) \\ &\geq \left(\lambda z_n(x) - \frac{K_1}{\|u_n\|} \right) z_0(x) \\ &\geq (\lambda z_n(x) - K_1) z_0(x) \\ &\geq -(\lambda q(x) + K_1) z_0(x). \end{aligned}$$

De (6) temos que, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = +\infty$ para q.t.p. $x \in \Omega^+$, e utilizando a superlinearidade de f em $+\infty$, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n)z_0(x)}{\|u_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{u_n(x)} z_n(x) z_0(x) = +\infty, \quad \text{para q.t.p. } x \in \Omega^+.$$

Se $|\Omega^+| > 0$, pelo lema de Fatou temos:

$$+\infty = \int_{\Omega^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} z_0(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0(x)$$

logo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} z_0(x) = +\infty,$$

em oposição a (12), logo $|\Omega^+| = 0$ e daqui $z_0(x) \leq 0$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Seja $y \in \partial\Omega$ então

$$\gamma_0 z_0(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(y, r) \cap \Omega|} \int_{B(y, r) \cap \Omega} z_0(x) dx \leq 0,$$

veja [9] página [143]. Portanto, (11) está provado.

Vamos provar que

$$(16) \quad \int_{\Omega} z_0(x) dx = 0 = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 z_0(s) ds.$$

Multiplicando (2) por $\frac{1}{2}$, fazendo $v = u_n$, e subtraindo de (1) obtemos:

$$(17) \quad \left| \int_{\Omega} \left\{ \frac{f(x, u_n)}{2} u_n - F(x, u_n) \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{2} \|u_n\| + c,$$

dividindo esta desigualdade por $\|u_n\|$, passando ao limite chegamos a

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\frac{f(x, u_n)}{2} u_n - F(x, u_n)}{\|u_n\|} = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, as condições (f_0) e (f_2) implicam a existência de uma constante $k_\varepsilon > 0$ tal que:

$$(19) \quad \left| \frac{1}{2} f(x, s) s - F(x, s) \right| \leq \varepsilon |s| + k_\varepsilon, \quad \forall s \leq s^*.$$

Utilizando (19) temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)}{2} u_n - F(x, u_n)}{\|u_n\|} \right| &\leq \varepsilon \int_{\Omega} \frac{|u_n|}{\|u_n\|} + \frac{K_\varepsilon}{\|u_n\|} |\Omega| \\ &\leq \varepsilon c + \frac{K_\varepsilon}{\|u_n\|} |\Omega|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)}{2} u_n - F(x, u_n)}{\|u_n\|} \right| \leq \varepsilon c,$$

onde ε é arbitrário, logo

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)}{2} u_n - F(x, u_n)}{\|u_n\|} = 0$$

De (18) e (20) temos

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{u_n(x) > s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)}{2} u_n - F(x, u_n)}{\|u_n\|} = 0.$$

Usando (14) e a condição (f_3) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{u_n(x) > s^*} \frac{\frac{f(x, u_n)}{2} u_n - F(x, u_n)}{\|u_n\|} &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \int_{u_n(x) > s^*} \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} u_n(x) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \int_{u_n(x) > s^*} \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \left\{ \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} - \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \right\} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \left\{ \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} - \int_{u_n(x) \leq s^*} \frac{\lambda u_n(x) + K_1}{\|u_n\|} \right\} \quad (\text{por 14}) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \left\{ \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} - \lambda \int_{\Omega} \chi_n z_n - \frac{K_1}{\|u_n\|} |\Omega| \right\} \end{aligned}$$

onde

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_n(x) \leq s^* \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Passando ao limite temos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \left\{ \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} - \lambda \int_{\Omega} \chi_n z_n dx - \frac{K_1 |\Omega|}{\|u_n\|} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \left\{ \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 z_0 ds - \lambda \int_{\Omega} z_0 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \left\{ -\alpha \int_{\partial\Omega} |\gamma_0 z_0| ds + \lambda \int_{\Omega} |z_0| \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto temos:

$$(22) \quad \left(\frac{1}{2} - \theta \right) s^* \left\{ -\alpha \int_{\partial\Omega} |\gamma_0 z_0| ds + \lambda \int_{\Omega} |z_0| \right\} = 0,$$

logo

$$\int_{\partial\Omega} |\gamma_0 z_0| ds = 0 = \int_{\Omega} |z_0|.$$

Assim, $\gamma_0 z_0 = 0$ e $z_0 = 0$ e o limite (8) fica:

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Na próxima etapa vamos provar que:

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{\Omega} \frac{f(x, x_n)}{\|u_n\|} z_n \leq 0.$$

Sejam:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{u_n(x) < 0} \frac{f(x, x_n)}{\|u_n\|} z_n, \\ I_2 &= \int_{0 \leq u_n(x) \leq s_0} \frac{f(x, x_n)}{\|u_n\|} z_n, \\ I_3 &= \int_{u_n(x) > s_0} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n. \end{aligned}$$

Vamos provar

$$(25) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} I_1 = 0.$$

De fato, já que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \{f(x, s) - \lambda s\} = 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$ então

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{sf(x, s) - \lambda s^2}{s} = 0,$$

Assim dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade da f existe $c_\varepsilon > 0$ tal que

$$(26) \quad |f(x, s)s - \lambda s^2| \leq c_\varepsilon + \varepsilon|s|, \quad \forall s \leq 0,$$

portanto temos:

$$|f(x, s)s| \leq c_\varepsilon + \varepsilon|s| + \lambda s^2, \quad \forall s \leq 0,$$

então temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_n < 0} f(x, u_n) u_n \right| &\leq c_\varepsilon \int_{u_n < 0} dx + \varepsilon \int_{u_n < 0} |u_n| + \lambda \int_{u_n < 0} u_n^2 \\ &\leq c + (c + \lambda) \int_{\Omega} u_n^2. \end{aligned}$$

Dividindo a desigualdade acima por $\|u_n\|^2$ obtemos

$$\left| \int_{u_n < 0} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n \right| \leq \frac{c}{\|u_n\|^2} + (c + \lambda) \int_{\Omega} z_n^2,$$

passando ao limite, e lembrando que $z_n \rightarrow z_0$ em $L^2(\Omega)$ e $z_0(x) = 0$, q.t.p. $x \in \Omega$ obtemos (25).

Vejamos que

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Seja $L = \max\{|f(x, s)| : (x, s) \in \overline{\Omega} \times [0, s_0]\}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{0 \leq u_n(x) \leq s_0} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n \right| &\leq \int_{0 \leq u_n \leq s_0} \frac{|f(x, u_n)|}{\|u_n\|^2} |u_n(x)| \\ &\leq \frac{L s_0}{\|u_n\|^2} |\Omega| \end{aligned}$$

passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos (27). Vamos provar que

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup I_3 \leq 0.$$

Utilizando (17) e (19) obtemos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{u_n > s_0} \left\{ f(x, u_n) - \frac{1}{2} f(x, u_n) u_n \right\} \right| &\leq \int_{u_n \leq s_0} \left| \frac{1}{2} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right| + c + \frac{\varepsilon_n}{2} \|u_n\| \\
&\leq \int_{u_n \leq s_0} (\varepsilon |u_n| + k_\varepsilon) + c + \frac{\varepsilon_n}{2} \|u_n\| \\
&\leq \int_{\Omega} (\varepsilon |u_n| + k_\varepsilon) + c + \frac{\varepsilon_n}{2} \|u_n\| \\
&\leq c\varepsilon \|u_n\| + c + \frac{\varepsilon_n}{2} \|u_n\|,
\end{aligned}$$

portanto

$$\left| \int_{u_n > s_0} \left\{ F(x, u_n) - \frac{1}{2} f(x, u_n) u_n \right\} \right| \leq c + \left(c\varepsilon + \frac{\varepsilon_n}{2} \right) \|u_n\|,$$

de (f_3) temos:

$$\left(\frac{1}{2} - \theta \right) \int_{u_n > s_0} f(x, u_n) u_n \leq \int_{u_n > s_0} \left\{ \frac{1}{2} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right\},$$

portanto

$$\left(\frac{1}{2} - \theta \right) \int_{u_n > s_0} f(x, u_n) u_n \leq c + \left(c\varepsilon + \frac{\varepsilon_n}{2} \right) \|u_n\|,$$

dividindo por $\|u_n\|^2$ obtemos

$$\int_{u_n > s_0} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n \leq \frac{c}{\|u_n\|^2} + \left(c\varepsilon + \frac{\varepsilon_n}{2} \right) \frac{1}{\|u_n\|},$$

portanto temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{u_n > s_0} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n \leq 0.$$

De (25), (27) e (28) obtemos (24), de fato:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{I_1 + I_2 + I_3\} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup I_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup I_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup I_3 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

De (2) com $v = z_n$, dividindo por $\|u_n\|$ e lembrando que $\|z_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 z_n)^2 ds - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|},$$

isto é:

$$\frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|} \leq \int_{\Omega} z_n^2 - 1 - \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 z_n)^2 ds + \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|},$$

passando ao limite superior obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n = 1,$$

o que contradiz (24).

4.2 Caso $\alpha > 0$

Em primeiro lugar, temos que:

$$(u, v)_* = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

define um produto interno em $H^1(\Omega)$ e dá origem a norma $\|u\|_* = \sqrt{(u, u)_*}$ a qual é equivalente com a norma usual $\|\cdot\|$ de $H^1(\Omega)$. De fato, usando a caracterização variacional de β_1 , o primeiro autovalor de $-\Delta$ com condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$ onde $\alpha > 0$, $\int_{\Omega} u^2 \leq \beta_1^{-1} \|u\|_*^2$, temos:

$$\|u\|^2 \leq (1 + \beta_1^{-1}) \|u\|_*^2 = d_1 \|u\|_*^2$$

Por outro lado usando a desigualdade $\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_1 \|u\|$ temos:

$$\|u\|_*^2 \leq (1 + \alpha c_1^2) \|u\|^2 = d_2 \|u\|^2.$$

Portanto temos:

$$\frac{1}{\sqrt{d_1}} \|u\| \leq \|u\|_* \leq \sqrt{d_2} \|u\|, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Utilizando (*) da Proposição 4.0.1 e o fato de que $\int_{\Omega} \nabla u^+ \cdot \nabla u^- = 0$, obtemos:

$$\|u\|_*^2 = \|u^+\|_*^2 + \|u^-\|_*^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

De fato:

$$\begin{aligned} \|u\|_*^2 &= \|u^+ - u^-\|_*^2 = (u^+ - u^-, u^+ - u^-)_* \\ &= \|u^+\|_*^2 - 2(u^+, u^-)_* + \|u^-\|_*^2 \\ &= \|u^+\|_*^2 + \|u^-\|_*^2, \end{aligned}$$

pois,

$$(u^+, u^-)_* = \int_{\Omega} \nabla u^+ \cdot \nabla u^- + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u^+) \gamma_0 (u^-) ds = 0.$$

Lema 4.2.1. (Condição de Palais-Smale, caso $\alpha > 0$).

Supondo $(f_0), (f_1), (f_2), (f_3), (S_1)$ e (S_2) , onde S_1 e S_2 são:

S_1) O número λ da condição (f_2) não é um autovalor do operador $-\Delta$ com condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, com $\alpha > 0$.

S_2) Os números σ e θ das condições (f_1) e (f_3) são tais que:

$$\begin{aligned} \sigma\theta &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{N} \quad \text{se } N \geq 3, \quad \text{e} \\ \sigma\theta &< 1 \quad \text{se } N = 2. \end{aligned}$$

Então o funcional:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u), \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \alpha > 0,$$

satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).

Demonstração:

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned} (1) \quad |\Phi(u_n)| &= \left| \frac{1}{2} \|u_n\|_*^2 - \int_{\Omega} F(x, u_n) \right| \leq C, \\ (2) \quad |\langle \Phi'(u_n), v \rangle| &= |\langle u_n, v \rangle_* - \int_{\Omega} f(x, u_n) v| \leq \varepsilon'_n \|v\| \leq \sqrt{d_1} \varepsilon'_n \|v\|_* = \varepsilon_n \|v\|_*, \end{aligned}$$

onde, $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e v é qualquer elemento de $H^1(\Omega)$.

Vamos provar que $\|u_n\|_*$ é limitada.

De agora em diante, notamos várias constantes com a mesma letra c , e a expressão $c\varepsilon_n$ denotamos por ε_n .

Nosso primeiro passo é provar que:

$$(3) \quad \int_{u_n \geq s_0} F(x, u_n) dx \leq c + \varepsilon_n \|u_n\|_* + c \|u_n^-\|_{L^1}.$$

De fato: de (1) e (2) obtemos:

$$(4) \quad \left| \int_{\Omega} \{f(x, u_n) u_n - 2F(x, u_n)\} dx \right| \leq c + \varepsilon_n \|u_n\|_*.$$

De (f_3) conseguimos:

$$(5) \quad \int_{u_n \geq s_0} F(x, u_n) \leq \left(\frac{1}{\theta} - 2\right)^{-1} \int_{u_n \geq s_0} \{f(x, u_n) u_n - 2F(x, u_n)\} dx.$$

De (4) temos:

$$(6) \quad \int_{u_n \geq s_0} \{f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)\}dx \leq c + \varepsilon_n \|u_n\|_* + \\ + \int_{u_n < s_0} |2F(x, u_n) - f(x, u_n)u_n|.$$

As condições (f_0) e (f_2) implicam:

$$(7) \quad |2F(x, s) - f(x, s)s| \leq c + c|s|, \quad s < 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

então temos:

$$(8) \quad \int_{u_n < s_0} |2F(x, u_n) - f(x, u_n)u_n| \leq c + c\|u_n^-\|_{L^1}.$$

De (6) e (8) conseguimos:

$$(9) \quad \int_{u_n \geq s_0} \{f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)\}dx \leq c + \varepsilon_n \|u_n\|_* + c\|u_n^-\|_{L^1}.$$

De (5) e (9) obtemos (3).

Nosso segundo passo é provar que:

$$(10) \quad | \|u_n^-\|_*^2 - \int_{u_n < 0} 2F(x, u_n) | \leq c + \varepsilon_n \|u_n^-\|_* + c\|u_n^-\|_{L^1}.$$

Para demonstrar (10), em primeiro lugar provamos:

$$(11) \quad | \|u_n^-\|_*^2 - \int_{u_n < 0} f(x, u_n)u_n | \leq \varepsilon_n \|u_n^-\|_*.$$

De (2) temos:

$$| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_n)(\gamma_0 v) ds - \int_{\Omega} f(x, u_n)v | \leq \varepsilon_n \|v\|_*, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

fazendo $v = u_n^-$ obtemos

$$| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u_n^- + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_n)(\gamma_0 u_n^-) ds - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n^- | \leq \varepsilon_n \|u_n^-\|_*, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ | - \int_{\Omega} |\nabla u_n^-|^2 - \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0(u_n^-))^2 ds - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n^- | \leq \varepsilon_n \|u_n^-\|_* \\ | \int_{\Omega} |\nabla u_n^-|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0(u_n^-))^2 ds + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n^- | \leq \varepsilon_n \|u_n^-\|_* \\ | \|u_n^-\|_*^2 - \int_{u_n < 0} f(x, u_n)u_n | \leq \varepsilon_n \|u_n^-\|_*.$$

Agora provamos (10)

$$\begin{aligned}
| \|u_n^-\|_*^2 - \int_{u_n < 0} 2F(x, u_n) | &= | \|u_n^-\|_*^2 - \int_{u_n < 0} f(x, u_n)u_n + \int_{u_n < 0} f(x, u_n)u_n - \int_{u_n < 0} 2F(x, u_n) | \\
&\leq | \|u_n^-\|_*^2 - \int_{u_n < 0} f(x, u_n)u_n | + | \int_{u_n < 0} \{f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)\} dx | \\
&\leq \varepsilon_n \|u_n^-\|_* + \int_{u_n < 0} |f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)| dx \\
&\leq c + \varepsilon_n \|u_n^-\|_* + c \|u_n^-\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

E como terceiro passo, consideramos os seguintes casos:

- i) $\|u_n^-\|_* \leq c$, ou
- ii) $\|u_n^-\|_* \rightarrow \infty$, passando a uma subsequência se for necessário.

Caso (i) - Suponha que $\|u_n^-\|_* \leq c$. Vamos provar que $\|u_n^+\|_* \leq c$

$$\begin{aligned}
| \|u_n^+\|_*^2 - \int_{u_n \geq 0} 2F(x, u_n) | &= | \int_{u_n < 0} 2F(x, u_n) - \|u_n^-\|_*^2 | \leq \\
&\leq | \|u_n^+\|_*^2 + \|u_n^-\|_*^2 - \int_{\Omega} 2F(x, u_n) | \\
&= | \|u_n\|_*^2 - \int_{\Omega} 2F(x, u_n) | \leq c \quad (\text{por (1)}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
| \|u_n^+\|_*^2 - \int_{u_n \geq 0} 2F(x, u_n) | &\leq c + | \int_{u_n < 0} 2F(x, u_n) - \|u_n^-\|_*^2 | \\
&\leq c + c \|u_n^-\|_* \quad (\text{por 10}).
\end{aligned}$$

Agora

$$| \|u_n^+\|_*^2 - \int_{u_n \geq 0} 2F(x, u_n) | \leq | \|u_n^+\|_*^2 - \int_{u_n \geq 0} 2F(x, u_n) | \leq c + c \|u_n^-\|_*.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u_n^+\|_*^2 &\leq c + c \|u_n^-\|_* + | \int_{u_n \geq 0} 2F(x, u_n) | \\
&\leq c + c \|u_n^-\|_* + | \int_{0 \leq u_n(x) \leq s_0} 2F(x, u_n) | + | \int_{u_n > s_0} 2F(x, u_n) | \\
&\leq c + c \|u_n^-\|_* + \varepsilon_n \|u_n^+\|_* \quad (\text{por 3}).
\end{aligned}$$

Assim conseguimos:

$$(12) \quad \|u_n^+\|_*^2 \leq c + c\|u_n^-\|_*.$$

De (12), e usando a hipótese $\|u_n^-\|_* \leq c$, obtemos:

$$\|u_n^+\|_* \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, $\|u_n\|_* = \|u_n^+ - u_n^-\|_* \leq \|u_n^+\|_* + \|u_n^-\|_* \leq c$.
Portanto, $\|u_n\| \leq c$.

Caso (ii) - Suponha que $\|u_n^-\|_* \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Vamos provar que este caso não pode acontecer.

De (26) página [60] temos:

$$(13) \quad |f(x, s)s - \lambda s^2| \leq c + c|s|, \quad s < 0.$$

De (11) e (13) obtemos:

$$(14) \quad \left| \|u_n^-\|_*^2 - \lambda \int_{\Omega} (u_n^-)^2 \right| \leq c + c\|u_n^-\|_*.$$

Seja $w_n = \frac{u_n^-}{\|u_n^-\|_*}$ então existem: $w_0 \in H^1(\Omega)$ e uma subsequência de $\{w_n\}$ que denotamos na mesma forma tal que, $w_n \rightharpoonup w_0$ converge fracamente em $H^1(\Omega)$ e fortemente em $L^2(\Omega)$.

Vamos provar que $w_0 \not\equiv 0$.

Dividindo (14) por $\|u_n^-\|_*^2$ obtemos:

$$\left| 1 - \lambda \int_{\Omega} w_n^2 \right| \leq \frac{c}{\|u_n^-\|_*^2} + \frac{c}{\|u_n^-\|_*}.$$

Passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\int_{\Omega} w_0^2 = \frac{1}{\lambda}$$

portanto, $w_0 \not\equiv 0$.

Na continuação vamos provar:

$$(15) \quad |(u_n^-, v)_* - \lambda \int_{\Omega} u_n^- v| \leq \varepsilon_n \|v\|_* + \|u_n^+\|_* \|v\|_* + \left| \int_{\Omega} f(x, u_n) v + \lambda \int_{\Omega} u_n^- v \right|.$$

De fato:

$$|(u_n^-, v)_* - \lambda \int_{\Omega} u_n^- v| = |(u_n^+, v)_* - \lambda \int_{\Omega} u_n^- v - \int_{\Omega} f(x, u_n) v| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(u_n^-, v)_* - \lambda \int_{\Omega} u_n^- v - (u_n^+, v)_* + \lambda \int_{\Omega} u_n^- v + \int_{\Omega} f(x, u_n) v| \\
&= |(u_n^-, v)_* - (u_n^+, v)_* + \int_{\Omega} f(x, u_n) v| \\
&= |(u_n^+ - u_n^-, v)_* - \int_{\Omega} f(x, u_n) v| \\
&= |(u_n, v)_* - \int_{\Omega} f(x, u_n) v| \leq \varepsilon_n \|v\|_*.
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
|(u_n^-, v)_* - \lambda \int_{\Omega} u_n^- v| &\leq \varepsilon_n \|v\|_* + |(u_n^+, v)_* - \lambda \int_{\Omega} u_n^- v - \int_{\Omega} f(x, u_n) v| \\
&\leq \varepsilon_n \|v\|_* + \|u_n^+\|_* \|v\|_* + |\lambda \int_{\Omega} u_n^- v + \int_{\Omega} f(x, u_n) v|.
\end{aligned}$$

As condições (f_0) e (f_2) implicam:

$$(16) \quad |f(x, s) - \lambda s| \leq c \quad \forall s \leq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Usando (16) estimamos o terceiro somando acima

$$\begin{aligned}
|\lambda \int_{\Omega} u_n^- v + \int_{\Omega} f(x, u_n) v| &\leq |\int_{u_n < 0} \{f(x, u_n) - \lambda u_n\} v| + |\int_{u_n \geq 0} f(x, u_n) v| \\
&\leq \int_{u_n < 0} |f(x, u_n) - \lambda u_n| |v| + \int_{u_n \geq 0} |f(x, u_n)| |v| \\
&\leq \int_{\Omega} \chi_{u_n} |f(x, u_n) - \lambda u_n| |v| + \int_{\Omega} |f(x, u_n^+)| |v| \\
&\leq c \int_{\Omega} \chi_{u_n} |v| + \int_{\Omega} |f(x, u_n^+)| |v| \\
&\leq c \int_{\Omega} |v| + \int_{\Omega} |f(x, u_n^+)| |v| \\
&\leq c \int_{\Omega} |v| + c \int_{\Omega} |v| + c \int_{\Omega} |u_n^+|^{\sigma} |v| \\
&\leq c \|v\|_* + c \|u_n^+\|_{L^{p\sigma}}^{\sigma} \|v\|_{L^q},
\end{aligned}$$

onde χ_{u_n} é:

$$\chi_{u_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_n(x) < 0 \\ 0 & \text{se } u_n(x) \geq 0. \end{cases}$$

onde $p = \frac{2N}{N+2}$, $q = \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$, e, tomamos $1 < p < 1/\sigma\theta$, já que $\sigma\theta < 1$, se $N = 2$.

Portanto, de (15) obtemos:

$$(17) \quad |(u_n^-, v)_* - \lambda \int_{\Omega} u_n^- v| \leq (c + \varepsilon_n + \|u_n^+\|_* + c\|u_n^+\|_{L^{p\sigma}}^\sigma) \|v\|_*.$$

Na continuação, vamos provar que λ é um autovalor e w_0 sua autofunção.

Dividindo (17) por $\|u_n^-\|_*$, obtemos:

$$(18) \quad |(w_n, v)_* - \lambda \int_{\Omega} w_n v| \leq \left(\frac{c + \varepsilon_n}{\|u_n^-\|_*} + \frac{\|u_n^+\|_*}{\|u_n^-\|_*} + c \frac{\|u_n^+\|_{L^{p\sigma}}^\sigma}{\|u_n^-\|_*} \right) \|v\|_*.$$

É evidente que:

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + \varepsilon_n}{\|u_n^-\|_*} = 0.$$

De (12) obtemos:

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n^+\|_*}{\|u_n^-\|_*} = 0.$$

Agora vamos provar que:

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n^+\|_{L^{p\sigma}}^\sigma}{\|u_n^-\|_*} = 0.$$

De fato:

As condições (f_0) e (f_3) implicam a existência das constantes positivas K e c_2 , tais que:

$$(22) \quad F(x, s) \geq \theta K s^{1/\theta} - c_2, \quad \text{para } s > 0.$$

De (3) e (22) obtemos:

$$(23) \quad \int_{\Omega} |u_n^+|^{1/\theta} \leq c + \varepsilon_n \|u_n^+\|_* + c \|u_n^-\|_*.$$

Dividindo (23) por $\|u_n^-\|_*^{1/\sigma\theta}$ obtemos:

$$(24) \quad \frac{1}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma\theta}} \int_{\Omega} |u_n^+|^{1/\theta} \leq \frac{c}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma\theta}} + \varepsilon_n \frac{\|u_n^+\|_*}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma\theta}} + \frac{c}{\|u_n^-\|_*^{\frac{1}{\sigma\theta}-1}}.$$

De (S_2) temos que: $\frac{1}{\sigma\theta} > 1$, então $\frac{1}{\sigma\theta} = 1 + \delta$, para algum $\delta > 0$, logo,

$$\frac{\varepsilon_n \|u_n^+\|_*}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma\theta}} = \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\|u_n^-\|_*^\delta} \cdot \frac{\|u_n^+\|_*}{\|u_n^-\|_*}.$$

Usando os fatos: $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\|u_n^-\|_* \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$ e o limite (20) obtemos:

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \frac{\|u_n^+\|}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma\theta}} = 0.$$

Por outro lado, temos:

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma\theta}} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\|u_n^-\|_*^{\frac{1}{\sigma\theta}-1}}$$

Portanto, passando ao limite em (24) obtemos:

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\frac{|u_n^+|}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma}} \right)^{1/\theta} = 0.$$

De (S_2) , e da escolha de p no caso $N = 2$, temos que, $1 < p\sigma \leq \frac{1}{\theta}$, então:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{|u_n^+|}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma}} \right)^{p\sigma} \right)^{1/p\sigma} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{|u_n^+|}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma}} \right)^{1/\theta} \right)^{\theta} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{|u_n^+|}{\|u_n^-\|_*^{1/\sigma}} \right)^{p\sigma} \right)^{1/p} = 0.$$

Passando ao limite em (18), e usando (19), (20) e (21) obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(w_n, v)_* - \lambda \int_{\Omega} w_n v| = |(w_0, v)_* - \lambda \int_{\Omega} w_0 v| = 0.$$

Portanto,

$$(w_0, v)_* = \lambda \int_{\Omega} w_0 v, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

Isto é, λ é um autovalor de $-\Delta$ com condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0$, mas isto contradiz a hipótese (S_1) portanto, $\|u_n^-\|_*$ não pode tender a $+\infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Capítulo 5

Resultados de Existência

5.0 Introdução.

Para obter os resultados de existência de soluções, Teoremas 5.1.1 e 5.2.1 usamos o seguinte teorema.

Teorema 5.0. (Silva, E.A.).

Seja $X = X_1 \oplus X_2$, um espaço de Banach real, com $\dim X_1 < +\infty$. Se $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale e

$$I_1) \quad \Phi(u) \leq 0, \quad \forall u \in X_1$$

$$I_2) \quad \text{Existe } \rho_0 > 0 \text{ tal que } \Phi(u) \geq 0, \quad \forall u \in \partial B_{\rho_0}(0) \cap X_2.$$

$$I_3) \quad \text{Existem } e \in X_2 - \{0\} \text{ e } M \in \mathbb{R} \text{ tais que}$$

$$\Phi(v + te) \leq M, \quad \forall v \in X_1 \quad \text{e} \quad \forall t > 0.$$

Então Φ possui pelo menos um ponto crítico diferente de zero.

Demonstração: Veja o lema 1.13, pág. 460 em [26].

5.1 Teoremas de Existência.

5.1.1 Caso $\alpha < 0$

Teorema 5.1.1.

Seja $N \geq 2$, $\alpha < 0$ assumindo $(f_0), (f_1), (f_2), (f_3)$ e além disso sejam μ_1, μ_2 o primeiro e segundo autovalores de $-\Delta$ com a condição de fronteira do problema (P_1)

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tais que:

$$f_4) \quad \frac{f(x, s)}{s} \geq \mu_1, \quad \forall s \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

$f_5)$ Existem $\varepsilon_0 > 0$ e $p > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} \mu_1 &< \mu_2 - p < \mu_2, \\ \frac{f(x, s)}{s} &\leq \mu_2 - p, \quad \forall s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) - \{0\}, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \end{aligned}$$

Então o problema (P_1) possui pelo menos uma solução não nula.

Demonstração:

Vamos provar que as condições do Teorema 5.0 são satisfeitas.

O funcional Φ associado ao problema (P_1) está definido por:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u)$$

o qual satisfaz a condição de Palais-Smale, de acordo com o lema 4.1.1 do capítulo 4. Portanto só faltam verificar as condições (I_1) , (I_2) e (I_3) .

Usamos a decomposição $H^1(\Omega) = X_1 \oplus X_2$ dada em (3.38) pág. [52] do capítulo 3. Assim, só falta verificar (I_1) , (I_2) e (I_3) .

• Verificação de (I_1)

$$\Phi(u) \leq 0, \quad \forall u \in X_1.$$

Prova:

A condição (f_4) implica:

$$F(x, s) \geq \mu_1 \frac{s^2}{2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Seja $u \in X_1$,

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u) \\ &= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega} u^2 - \int_{\Omega} F(x, u) \quad (\text{por 3.39 pág. [52] no capítulo 3}) \\ &\leq \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega} u^2 - \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega} u^2 = 0.\end{aligned}$$

Portanto $\Phi(u) \leq 0$, $\forall u \in X_1$.

•• Verificação de (I_2)

Existe $\rho_0 > 0$ tal que $\Phi(u) \geq 0$, $\forall u \in \partial B_{\rho_0}(0) \cap X_2$.

Prova:

É fácil de ver que a condição (f_5) implica

$$(1) \quad F(x, s) \leq (\mu_2 - p) \frac{s^2}{2}, \quad \text{para } |s| < \varepsilon_0, \quad \text{e } \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por outro lado para $|s| \geq \varepsilon_0$ a condição (f_1) implica a existência de uma constante positiva m_0 tal que:

$$(2) \quad |f(x, s)| \leq m_0 |s|^\sigma, \quad \text{para } |s| \geq \varepsilon_0.$$

Agora (2) implica a existência de uma constante $m > 0$ tal que

$$(3) \quad |F(x, s)| \leq m |s|^{\sigma+1}, \quad \forall |s| \geq \varepsilon_0, \quad \text{e } \forall x \in \overline{\Omega}.$$

De (1) e (3) temos para todo $x \in \overline{\Omega}$:

$$(4) \quad F(x, s) \leq \begin{cases} (\mu_2 - p) \frac{s^2}{2}, & \text{para } |s| < \varepsilon_0 \\ m |s|^{\sigma+1}, & \text{para } |s| \geq \varepsilon_0. \end{cases}$$

Usando (4), a caracterização variacional de μ_2 e o teorema das imersões de Sobolev obtemos a existência de uma constante $\rho_0 > 0$ tal que $\Phi(u) \geq 0$, $\forall u \in \partial B_{\rho_0}(0) \cap X_2$.

Seja $u \in X_2$:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u) \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{k}{2} \int_{\Omega} u^2 - \int_{\Omega} F(x, u) \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{k}{2} \int_{|u| < \varepsilon_0} u^2 - \frac{k}{2} \int_{|u| \geq \varepsilon_0} u^2 - \int_{|u| < \varepsilon_0} F(x, u) - \int_{|u| \geq \varepsilon_0} F(x, u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{k}{2} \int_{|u| < \varepsilon_0} u^2 - \frac{k}{2} \int_{|u| \geq \varepsilon_0} u^2 - \frac{1}{2} (\mu_2 - p) \int_{|u| < \varepsilon_0} u^2 - m \int_{|u| \geq \varepsilon_0} |u|^{\sigma+1} \\
&= \frac{1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{1}{2} (\mu_2 + k - p) \int_{|u| < \varepsilon_0} u^2 - \frac{k}{2} \int_{|u| \geq \varepsilon_0} u^2 - m \int_{|u| \geq \varepsilon_0} |u|^{\sigma+1} \\
&\geq \frac{1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{1}{2} (\mu_2 + k - p) \int_{\Omega} u^2 - \tilde{c} \int_{|u| \geq \varepsilon_0} |u|^{\sigma+1} - m \int_{|u| \geq \varepsilon_0} |u|^{\sigma+1} \\
&\quad (\text{onde } \tilde{c} = k/2\varepsilon_0^{\sigma-1}) \\
&= \frac{1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{1}{2} (\mu_2 + k - p) \int_{\Omega} u^2 - m_1 \int_{|u| \geq \varepsilon_0} |u|^{\sigma+1} \\
&\quad (m_1 = \tilde{c} + m) \\
&\geq \frac{1}{2} \|u\|_k^2 - \frac{(\mu_2 + k - p)}{2(\mu_2 + k)} \|u\|_k^2 - m_1 \int_{\Omega} |u|^{\sigma+1} \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\frac{p\delta}{\mu_2 + k} \right) \|u\|^2 - m_1 \int_{\Omega} |u|^{\sigma+1} \\
&= m_4 \|u\|^2 - m_3 \|u\|^{\sigma+1}
\end{aligned}$$

Portanto temos:

$$(5) \quad \Phi(u) \geq m_4 \|u\|^2 - m_3 \|u\|^{\sigma+1}, \quad u \in X_2.$$

Chamando $\|u\| = \rho$ podemos escrever (5) na forma

$$(6) \quad \Phi(u) \geq \rho(m_4 \rho - m_3 \rho^{\sigma}).$$

Considerando a função $d : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$d(\rho) = m_4 \rho - m_3 \rho^{\sigma},$$

então $d(\rho_0)$ é um máximo global de $d(\rho)$, onde $\rho_0 = \left(\frac{m_4}{m_3 \sigma} \right)^{1/(\sigma-1)}$. O gráfico de $d(\rho)$ é como na figura 1:

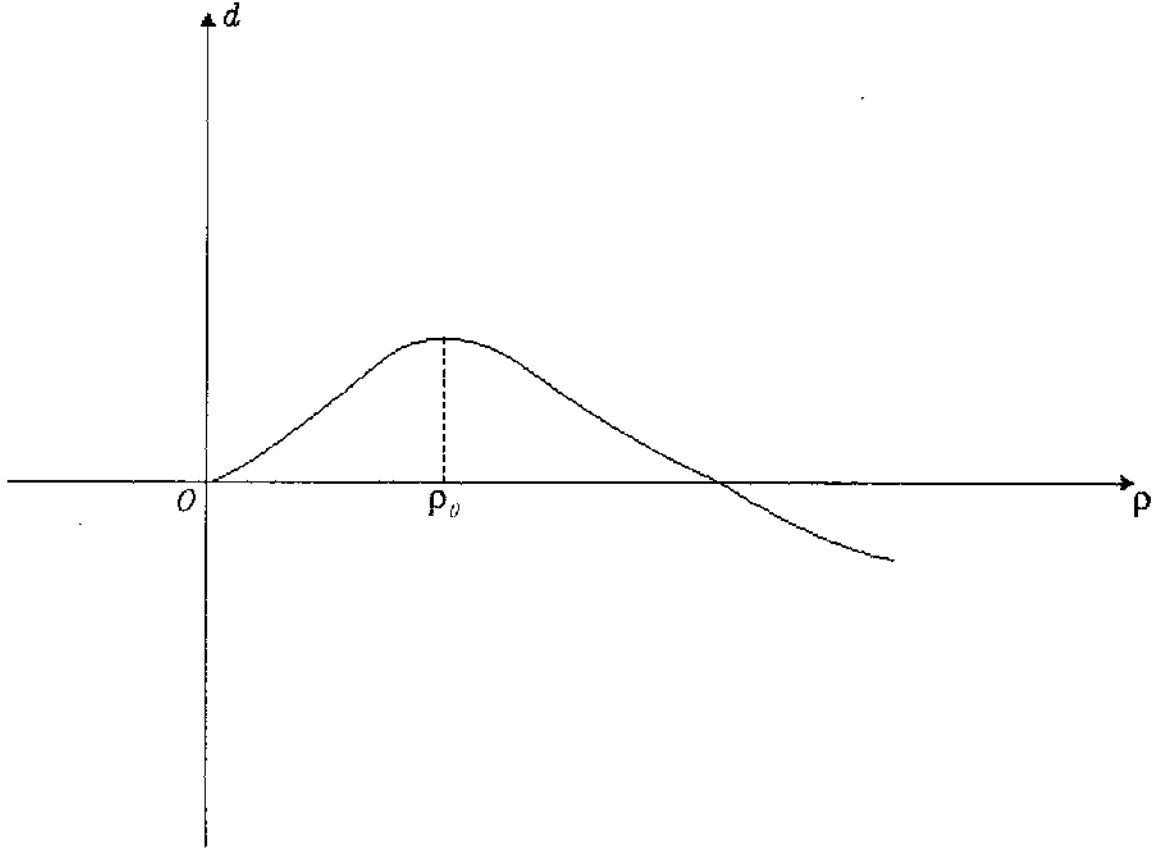


Figura 1. $y = d(\rho)$

Voltando a (6) conseguimos:

$$\Phi(u) \geq \rho_0 d(\rho_0) = \rho_0^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) m_4 > 0, \quad \forall u \in \partial B_{\rho_0}(0) \cap X_2$$

••• Verificação de (I_3) .

Existem: $e \in X_2 - \{0\}$ e $M > 0$ tais que

$$\Phi(v + te) \leq M, \quad \forall v \in X_1 \quad \text{e} \quad \forall t > 0.$$

Prova:

Se $N \geq 2$ o espaço $H^1(\Omega)$ não está imerso em $L^\infty(\Omega)$. Seja $e \in X_2$ uma função não limitada superiormente, e λ_* o número dado por:

$$(1) \quad \lambda_* = \frac{\int_{\Omega} |\nabla e|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 e)^2 ds}{\int_{\Omega} e^2}.$$

Assim, $\mu_2 \leq \lambda_*$ e $\mu_1 < \lambda_*$. O valor de λ_* não muda ao substituir e por te então vamos supor que e satisfaz a seguinte condição:

$$(2) \quad 2(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 < -\delta^*(\mu_1 - \lambda),$$

onde:

λ é a constante positiva da condição (f_2) ,

$$\delta^* = \frac{\delta_1}{\mu_1 + k},$$

δ_1 é uma constante positiva tal que:

$$\delta_1 \|v\|_{L^\infty}^2 \leq \|v\|_k^2, \quad \forall v \in X_1,$$

e

$$\|v\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|, \quad \forall v \in X_1.$$

Além disso, δ^* satisfaz:

$$(3) \quad \delta^* \|v\|_{L^\infty}^2 \leq \int_{\Omega} v^2, \quad \forall v \in X_1.$$

Se $v \in X_1$ temos:

$$0 = (v, e)_k = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla e + k \int_{\Omega} ve + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 v)(\gamma_0 e) ds = (\mu_1 + k) \int_{\Omega} ve$$

onde $\mu_1 + k > 0$ então $\int_{\Omega} ve = 0$ e obtemos:

$$(4) \quad \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla e + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 v)(\gamma_0 e) ds = 0.$$

De (f_3) existem: $m_5 > 0$, e $s_1 \geq s_0$ tais que:

$$(5) \quad F(x, s) \geq \frac{\lambda}{2} s^2 + m_5 s^{1/\theta}, \quad \forall s \geq s_1 \quad \text{e} \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

As condições (f_0) e (f_2) implicam a existência de uma constante positiva $m_6 > 0$ tal que:

$$(6) \quad F(x, s) \geq \frac{\lambda}{2} s^2 - m_6 |s|, \quad \forall s \leq s_1 \quad \text{e} \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Sejam $v \in X_1$ e $t > 0$.

Usando (1) e (4) obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v + te)|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0(v + te))^2 - \int_{\Omega} F(x, v + te) \\ &= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2} \lambda_* \int_{\Omega} e^2 - \int_{\Omega} F(x, v + te) \end{aligned}$$

Usando (5) e (6) obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi(v + te) &= \frac{1}{2}\mu_1 \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2}\lambda_* \int_{\Omega} e^2 - \int_{v(x)+te(x) \leq s_1} F(x, v + te) - \int_{v(x)+te(x) > s_1} F(x, v + te) \\
&\leq \frac{1}{2}\mu_1 \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2}\lambda_* \int_{\Omega} e^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (v + te)^2 + m_6 \int_{v(x)+te(x) \leq s_1} |v + te| - m_5 \int_{v(x)+te(x) > s_1} (v + te)^{1/\theta} \\
&= \frac{1}{2}(\mu_1 - \lambda) \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + m_6 \int_{v(x)+te(x) \leq s_1} |v + te| - m_5 \int_{v(x)+te(x) > s_1} (v + te)^{1/\theta} \\
&\leq \frac{1}{2}(\mu_1 - \lambda) \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + m_6 \int_{\Omega} |v| + m_6 t \int_{\Omega} |e| - m_5 \int_{v(x)+te(x) > s_1} (v + te)^{1/\theta}.
\end{aligned}$$

Agora utilizando (3) obtemos:

$$\begin{aligned}
(7) \quad \Phi(v + te) &\leq \frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \\
&\quad + m_6 t \int_{\Omega} |e| - m_5 \int_{v(x)+te(x) > s_1} (v + te)^{1/\theta}.
\end{aligned}$$

1º) Caso: $\lambda > \lambda_*$

De (7) obtemos:

$$\Phi(v + te) \leq \frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + m_6 t \int_{\Omega} |e|,$$

neste caso os coeficientes de $\|v\|_{L^\infty}^2$ e t^2 são negativos portanto existe uma constante $M_1 > 0$ tal que

$$(8) \quad \Phi(v + te) \leq M_1, \quad \forall v \in X_1, \quad e \quad \forall t > 0.$$

2º) Caso: $0 < \lambda \leq \lambda_*$

Seja $v_0 = \min\{v(x) : x \in \overline{\Omega}\}$ e temos para v_0 e t as seguintes situações:

a) $v_0 + t \leq s_1$

b) $v_0 + t > s_1$.

No caso (a) $t \leq s_1 - v_0$.

• Se $v_0 = 0$, de (7) temos:

$$(9) \quad \Phi(v + te) \leq \frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{s_1^2}{2}(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + m_6 s_1 \int_{\Omega} |e|.$$

Já que o coeficiente de $\|v\|_{L^\infty}^2$ é negativo, existe $M_2 > 0$ tal que

$$(10) \quad \Phi(v + te) \leq M_2.$$

•• Se $v_0 \neq 0$, então $|v_0| \leq \|v\|_{L^\infty}$, e de (7) temos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) \leq & \frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda)\|v\|_{L^\infty}^2 + m_6|\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{1}{2}(s_1 - v_0)^2(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \\ & + (s_1 - v_0)m_6 \int_{\Omega} |e|. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade $(s_1 - v_0)^2 \leq 2(s_1^2 + |v_0|^2)$, e chamando $c = m_6(|\Omega| + \int_{\Omega} |e|)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) \leq & \left[\frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda) + (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \right] \|v\|_{L^\infty}^2 + c\|v\|_{L^\infty} + s_1^2(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \\ & + s_1 m_6 \int_{\Omega} |e|. \end{aligned}$$

O coeficiente de $\|v\|_{L^\infty}^2$ é negativo, portanto existe $M_3 > 0$ tal que

$$(11) \quad \Phi(v + te) \leq M_3.$$

No caso (b) , $v_0 + t > s_1$.

Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega : e(x) > 1\}$, $|\Omega_1| > 0$ pois e é não limitada superiormente, e $\Omega_1 \subset \{x \in \Omega : v(x) + te(x) > s_1\}$ então de (7) temos:

$$\begin{aligned} (12) \quad \Phi(v + te) \leq & \frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda)\|v\|_{L^\infty}^2 + m_6|\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \\ & + m_6 t \int_{\Omega} |e| - m_5 |\Omega_1| (v_0 + t)^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Fazendo $v_0 + t = s$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) \leq & \frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda)\|v\|_{L^\infty}^2 + m_6|\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{(s - v_0)^2}{2}(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \\ & + m_6(s - v_0) \int_{\Omega} |e| - m_5 |\Omega_1| s^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $(s - v_0)^2 \leq 2s^2 + 2\|v\|_{L^\infty}^2$ e chamando $c = m_6(|\Omega| + \int_{\Omega} |e|)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) \leq & \left(\frac{\delta^*}{2}(\mu_1 - \lambda) + (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \right) \|v\|_{L^\infty}^2 + c\|v\|_{L^\infty} + m_6 s \int_{\Omega} |e| \\ & + s^2(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 - m_5 |\Omega_1| s^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Já que os coeficientes de $\|v\|_{L^\infty}^2$ e $s^{1/\theta}$ são negativos, então existe $M_4 > 0$ tal que:

$$(13) \quad \Phi(v + te) \leq M_4$$

Seja $M = \max\{M_2, M_3, M_4\}$, então neste 2º caso temos:

$$(14) \quad \Phi(v + te) \leq M, \quad \forall v \in X_1, \quad \text{e} \quad \forall t > 0.$$

5.1.2 Caso $\alpha > 0$

No caso $\alpha > 0$, consideramos a condição (f_2^*) : dada pela hipótese (S_1) da página 63, junto com a condição:

$$\lambda > \beta_1$$

onde β_1 é o primeiro autovalor de problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta u, & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\alpha > 0$.

Teorema 5.2.1.

Sejam $N \geq 2$, $\alpha > 0$, supondo $(f_0), (f_1), (f_2^*), (f_3), (S_2)$, e além disso

$$(f_4^*) \quad \frac{f(x, s)}{s} \geq \beta_1, \quad \forall s \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ e } \forall x \in \overline{\Omega}.$$

(f_5^*) Existem: $\varepsilon_0 > 0$ e $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ tais que

$$\frac{f(x, s)}{s} \leq \beta, \quad \forall s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) - \{0\}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Então o problema

$$(\mathbb{P}_2) \begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega, \\ \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui pelo menos uma solução não nula.

Demonstração:

Novamente, a ferramenta é o teorema (5.0). Usamos a decomposição

$$H^1(\Omega) = Y_1 \oplus Y_2,$$

dada em (3.40) pág. [52] do capítulo 3.

O funcional Φ associado ao problema (P_2) , está definido por:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u),$$

e satisfaz a condição de Palais-Smale, pelo Lema 4.2.1 do capítulo 4.

Na continuação vamos verificar as condições (I_1) , (I_2) e (I_3) do teorema (5.0).

• **Verificação de (I_1)**

$$\Phi(u) \leq 0, \forall u \in Y_1.$$

Prova: A condição (f_4^*) implica

$$F(x, s) \geq \frac{\beta_1}{2} s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Seja $u \in Y_1$

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u) \\ &\leq \frac{1}{2} \beta_1 \int_{\Omega} u^2 - \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega} u^2 = 0. \end{aligned}$$

•• **Verificação de (I_2)**

Existe $\rho_0 > 0$ tal que $\Phi(u) \geq 0$, $\forall u \in \partial B_{\rho_0}(0) \cap Y_2$.

Prova:

A condição (f_5^*) implica

$$(1) \quad F(x, s) \leq \frac{\beta}{2} s^2, \quad \text{para } |s| \leq \varepsilon_0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Por outro lado, para $|s| \geq \varepsilon_0$ lembre que a condição (f_1) implica a existência de uma constante positiva m_0 tal que:

$$(2) \quad |f(x, s)| \leq m_0 |s|^\sigma, \quad \forall |s| \geq \varepsilon_0.$$

Agora (2) implica a existência de uma constante $m > 0$ tal que:

$$(3) \quad |F(x, s)| \leq m |s|^{\sigma+1} \quad \forall |s| \geq \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

De (1) e (3) temos:

$$(4) \quad F(x, s) \leq \frac{\beta}{2} s^2 + m|s|^{\sigma+1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Seja $u \in Y_2$

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds - \int_{\Omega} F(x, u) \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_*^2 - \int_{\Omega} F(x, u) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_*^2 - \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} u^2 - m \int_{\Omega} |u|^{\sigma+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_*^2 - \frac{\beta}{2\beta_2} \|u\|_*^2 - mc \|u\|^{\sigma+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\beta_2}\right) d_1^{-1} \|u\|^2 - mc \|u\|^{\sigma+1} \end{aligned}$$

Já que $\sigma + 1 > 2$, existem $\rho_0 > 0$ e $a > 0$ tais que:

$$\Phi(u) \geq a > 0, \quad \forall u \in \partial B_{\rho_0}(0) \cap Y_2.$$

••• Verificação de (I_3) .

Existem: $e \in Y_2 - \{0\}$ e $M > 0$ tais que:

$$\Phi(v + te) \leq M, \quad \forall v \in Y_1 \quad \text{e} \quad \forall t > 0.$$

Prova:

Seja, $e \in Y_2$, uma função não limitada superiormente, e λ_* o número definido por:

$$(1) \quad \lambda_* = \frac{\int_{\Omega} |\nabla e|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 e)^2 ds}{\int_{\Omega} e^2}$$

Então $\beta_2 \leq \lambda_*$ e $\lambda > \lambda_*$ ou $\lambda \leq \lambda_*$.

Vamos assumir que e satisfaz a seguinte condição:

$$(2) \quad 2(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 < -\delta^* \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right),$$

onde $\delta^* > 0$ é tal que:

$$(3) \quad \delta^* \|v\|_{L^\infty}^2 \leq \|v\|_*^2, \quad \forall v \in Y_1.$$

Para qualquer $v \in Y_1$ temos:

$$(v, u)_\varepsilon = (v, u)_* + \varepsilon \int_{\Omega} vu = (\beta_1 + \varepsilon) \int_{\Omega} vu, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Fazendo $u = e$, temos:

$$0 = (v, e)_\varepsilon = (v, e)_* + \varepsilon \int_{\Omega} ve = (\beta_1 + \varepsilon) \int_{\Omega} ve,$$

portanto obtemos

$$(4) \quad \int_{\Omega} ve = 0$$

$$(5) \quad (v, e)_* = 0.$$

Também usaremos:

$$(6) \quad F(x, s) \geq \frac{\lambda}{2} s^2 + m_5 s^{1/\theta}, \quad \forall s \geq s_1 \quad \text{e} \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$(7) \quad F(x, s) \geq \frac{\lambda}{2} s^2 - m_6 |s|, \quad \forall s \leq s_1 \quad \text{e} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Sejam: $v \in Y_1$ e $t > 0$.

Usando (1), (4), (5), (6) e (7) obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v + te)|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} (\gamma_0(v + te))^2 - \int_{\Omega} F(x, v + te) \\ &= \frac{1}{2} \beta_1 \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2} \lambda_* \int_{\Omega} e^2 - \int_{v(x)+te(x) \leq s_1} F(x, v + te) - \int_{v(x)+te(x) > s_1} F(x, v + te) \\ &\leq \frac{1}{2} \beta_1 \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2} \lambda_* \int_{\Omega} e^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{v+te \leq s_1} (v + te)^2 + m_6 \int_{v+te \leq s_1} |v + te| \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{v+te > s_1} (v + te)^2 - m_5 \int_{v+te > s_1} (v + te)^{1/\theta} \\ &\leq \frac{1}{2} (\beta_1 - \lambda) \int_{\Omega} v^2 + \frac{t^2}{2} (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + m_6 \int_{\Omega} |v + te| - m_5 \int_{v+te > s_1} (v + te)^{1/\theta} \\ &\leq \frac{1}{2} (\beta_1 - \lambda) \int_{\Omega} v^2 + m_6 \int_{\Omega} |v| + \frac{t^2}{2} (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + tm_6 \int_{\Omega} |e| - m_5 \int_{v+te > s_1} (v + te)^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Levando em conta que $\beta_1 \int_{\Omega} v^2 = \|v\|_*^2$, $\forall v \in Y_1$ e utilizando (3) obtemos:

$$(8) \quad \begin{aligned} \Phi(v + te) &\leq \frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1} \right) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{t^2}{2} (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + tm_6 \int_{\Omega} |e| \\ &\quad - m_5 \int_{v+te > s_1} (v + te)^{1/\theta} \end{aligned}$$

1º) Caso: $\lambda > \lambda_*$

De (8) obtemos:

$$\Phi(v + te) \leq \frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{t^2}{2} (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + tm_6 \int_{\Omega} |e|,$$

neste caso, os coeficientes de $\|v\|_{L^\infty}^2$ e t^2 são negativos, portanto, existe uma constante $M_1^* > 0$ tal que

$$(9) \quad \Phi(v + te) \leq M_1^*, \quad \forall v \in Y_1 \quad \text{e} \quad \forall t > 0.$$

2º Caso: $0 < \lambda \leq \lambda_*$

Seja $v_0 = \min\{v(x) : x \in \overline{\Omega}\}$, e temos para v_0 e t as seguintes situações:

a) $v_0 + t \leq s_1$

b) $v_0 + t > s_1$

No caso (a), $t \leq s_1 - v_0$

• Se $v_0 = 0$, de (8) temos:

$$(10) \quad \Phi(v + te) \leq \frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{s_1^2}{2} (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + s_1 m_6 \int_{\Omega} |e|,$$

então existe $M_2^* > 0$ tal que

$$(11) \quad \Phi(v + te) \leq M_2^*.$$

•• Se $v_0 \neq 0$ então $|v_0| \leq \|v\|_{\infty}$, $\forall v \in Y_1$. De (8) temos:

$$\Phi(v + te) \leq \frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{1}{2} (s_1 - v_0)^2 (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + (s_1 - v_0) m_6 \int_{\Omega} |e|$$

Utilizando novamente a desigualdade $(s_1 - v_0)^2 \leq 2(s_1^2 + |v_0|^2)$ e chamando $c = m_6(|\Omega| + \int_{\Omega} |e|)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) \leq & \left[\frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) + (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \right] \|v\|_{L^\infty}^2 + c \|v\|_{L^\infty} + s_1^2 (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \\ & + s_1 m_6 \int_{\Omega} |e|. \end{aligned}$$

Por (2), existe $M_3^* > 0$ tal que

$$(12) \quad \Phi(v + te) \leq M_3^*.$$

No caso (b) , $v_0 + t > s_1$

Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega : e(x) > 1\}$, $|\Omega_1| > 0$ pois e é não limitada superiormente, então de (8) temos:

$$(13) \quad \begin{aligned} \Phi(v + te) &\leq \frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{t^2}{2} (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 + \\ &\quad + tm_6 \int_{\Omega} |e| - m_5 |\Omega_1| (v_0 + t)^{1/\theta} \end{aligned}$$

Fazendo $v_0 + t = s$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) &\leq \frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) \|v\|_{L^\infty}^2 + m_6 |\Omega| \|v\|_{L^\infty} + \frac{(s - v_0)^2}{2} (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \\ &\quad + (s - v_0) m_6 \int_{\Omega} |e| - m_5 |\Omega_1| s^{1/\theta} \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $(s - v_0)^2 \leq 2s^2 + 2|v_0|^2$ e chamando $c = m_6(|\Omega| + \int_{\Omega} |e|)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(v + te) &\leq \left[\frac{\delta^*}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) + (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 \right] \|v\|_{L^\infty}^2 + c \|v\|_{L^\infty} + sm_6 \int_{\Omega} |e| \\ &\quad + s^2 (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 - m_5 |\Omega_1| s^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Portanto existe $M_4^* > 0$ tal que:

$$(14) \quad \Phi(v + te) \leq M_4^*.$$

Seja $M^* = \max\{M_2^*, M_3^*, M_4^*\}$, então temos:

$$(15) \quad \Phi(v + te) \leq M^*, \quad \forall v \in Y_1, \quad e \quad \forall t > 0.$$

Apêndice A

Na demonstração da Proposição 4.0.1, no Capítulo 4, utilizamos o seguinte fato.

Proposição 1.

Seja $\{u_n\}$ uma sequência no espaço $C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que: $u_n \rightarrow u$, quando $n \rightarrow \infty$ em $H^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} u_n^+ &\rightarrow u^+, \quad \text{em } H^1(\Omega) \quad \text{e} \\ u_n^- &\rightarrow u^-, \quad \text{em } H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por meio de vários passos:

1º) Passo. Vamos provar a seguinte afirmação:

Se $v_n \in L^2(\Omega)$ e $0 \leq w_n \in L^2(\Omega)$ satisfazem:

$$\begin{aligned} v_n(x) &\rightarrow v(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \\ w_n(x) &\rightarrow w(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad \text{e em } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

e

$$|v_n(x)| \leq w_n(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega$$

então $v_n \rightarrow v$ em $L^2(\Omega)$.

Prova: Para quase tudo $x \in \Omega$ temos:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= |v_n(x) - v(x)|^2 \rightarrow 0 \\ |f_n(x)| &= |v_n(x) - v(x)|^2 \leq (|v_n(x)| + |v(x)|)^2 \leq (w_n(x) + |v(x)|)^2 \end{aligned}$$

Seja $g_n(x) = (w_n(x) + |v(x)|)^2$, então $|f_n(x)| \leq g_n(x)$. Por outro lado, temos:

$$g_n(x) \rightarrow (w(x) + |v(x)|)^2.$$

Já que:

$$0 \leq ||w_n + |v|||_{L^2} - ||w + |v|||_{L^2} \leq ||w_n - w||_{L^2},$$

então

$$||w_n + |v|||_{L^2} \rightarrow ||w + |v|||_{L^2}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo pelo Teorema da convergência de Lebesgue generalizado temos que, $f_n \rightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$.

2º) Passo. Vamos provar que:

$$(1) \quad D_j|u_n| = (\text{sinal } u_n)D_ju_n \rightarrow (\text{sinal } u)D_ju = D_j|u| \text{ em } L^2(\Omega).$$

Prova: Provaremos que qualquer subsequência de $\{u_n\}$ que continuaremos denotando por $\{u_n\}$, contém uma subsequência que verifica a convergência acima. Já que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ e $D_ju_n \rightarrow D_ju$ em $L^2(\Omega)$ então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que:

$$\begin{aligned} u_{n_k}(x) &\rightarrow u(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad \text{e} \\ D_ju_{n_k}(x) &\rightarrow D_ju(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \end{aligned}$$

então

$$(2) \quad |u_{n_k}(x)| \rightarrow |u(x)|$$

$$(3) \quad |D_ju_{n_k}(x)| \rightarrow |D_ju(x)|, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \text{ e em } L^2(\Omega)$$

Seja $E = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ então

$$(4) \quad (\text{sinal } u_{n_k}(x))D_ju_{n_k}(x) \rightarrow 0 = D_j|u|(x), \quad \text{q.t.p. } x \in E.$$

Seja $x \in \Omega - E$.

• Se $u(x) > 0$, então

$$(5) \quad (\text{sinal } u_{n_k}(x))D_ju_{n_k}(x) \rightarrow D_ju(x) = (\text{sinal } u(x))D_ju(x) = D_j|u|(x).$$

•• Se $u(x) < 0$, então

$$(6) \quad (\text{sinal } u_{n_k}(x))D_ju_{n_k}(x) \rightarrow -D_ju(x) = (\text{sinal } u(x))D_ju(x) = D_j|u|(x).$$

De (4), (5) e (6) obtemos:

$$(7) \quad D_j|u_{n_k}|(x) \rightarrow D_j|u|(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Por outro lado temos:

$$(8) \quad |D_j|u_{n_k}|(x)| = |\text{sinal } u_{n_k}(x)| |D_ju_{n_k}(x)| \leq |D_ju_{n_k}(x)|.$$

De (3), (7), (8) é o 1º passo obtemos que

$$D_j|u_{n_k}| \rightarrow D_j|u| \text{ em } L^2(\Omega).$$

Portanto temos (1).

3º) Passo.

$$(9) \quad |u_n| \rightarrow |u|, \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

De fato

$$0 \leq \int_{\Omega} ||u_n| - |u||^2 \leq \int_{\Omega} |u_n - u|^2.$$

De (1) e (9) obtemos:

$$(10) \quad |u_n| \rightarrow |u|, \quad \text{em } H^1(\Omega).$$

4º) Passo. Já que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$ e $|u_n| \rightarrow |u|$ em $H^1(\Omega)$ então temos:

$$\begin{aligned} u_n^+ &= \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) \rightarrow \frac{1}{2}(|u| + u) = u^+, \quad \text{em } H^1(\Omega) \\ u_n^- &= \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) \rightarrow \frac{1}{2}(|u| - u) = u^-, \quad \text{em } H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Observação. Na demonstração dos Lemas 4.1.1 e 4.2.1 no Capítulo 4, provamos que uma sequência $\{u_n\}$ que satisfaz (1) e (2), é limitada. Vamos provar que, o fato de ser limitada, implica a existência de uma subsequência convergente em $H^1(\Omega)$. De fato, já que o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ é compacto, existem: $u \in H^1(\Omega)$ e uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$ tal que:

$$(*) \quad \begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } H^1(\Omega) \\ u_n \rightarrow u & \text{em } L^p(\Omega), \text{ onde } p = \sigma + 1 \\ u_n(x) \rightarrow u(x), & \text{q.t.p. em } \Omega \\ |u_n(x)| \leq g(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, g \in L^p(\Omega) \\ \gamma_0 u_n \rightarrow \gamma_0 u, & \text{em } L^2(\partial\Omega). \end{cases}$$

• De (*) temos que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$.

•• Por outro lado, temos:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u_n (\gamma_0 u_n - \gamma_0 u) ds = 0.$$

Já que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u_n (\gamma_0 u_n - \gamma_0 u) ds &\leq \left(\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_n)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_n - \gamma_0 u)^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq c_1 \|u_n\| \|\gamma_0 u_n - \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq c_2 \|\gamma_0 u_n - \gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Também temos que:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) = 0.$$

De fato:

$$f(x, u_n(x)) \rightarrow f(x, u(x)), \quad \text{então,} \quad f(x, u_n(x))(u_n(x) - u(x)) \rightarrow 0.$$

e

$$\begin{aligned} |f(x, u_n(x))(u_n(x) - u(x))| &\leq |f(x, u_n(x))| |u_n(x) - u(x)| \\ &\leq c(1 + |u_n(x)|^\sigma)(|u_n(x)| + |u(x)|) \\ &\leq c(g(x) + g(x)^p) \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos o limite (2).

Por outro lado temos:

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u) = 0.$$

Utilizando (1), (2) e (3) obtemos:

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla (u_n - u)|^2 = 0.$$

De fato, temos que:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_n)(\gamma_0 v) ds - \int_{\Omega} f(x, u_n)v \right| \leq \varepsilon_n \|v\|, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

fazendo $v = u_n - u$ e passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u_n (\gamma_0 u_n - \gamma_0 u) ds - \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u) + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u_n (\gamma_0 u_n - \gamma_0 u) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |\nabla (u_n - u)|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u_n (\gamma_0 u_n - \gamma_0 u) ds - \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) \right|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla (u_n - u)|^2 = 0.$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} (u_n - u)^2 + \int_{\Omega} |\nabla (u_n - u)|^2 \right]^{1/2} = 0.$$

Teorema 1.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado com fronteira Lipschitz contínua, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v \in W^{1,q}(\Omega)$, com:

i) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{N+1}{N}$, se $N > p \geq 1$ e $N > q \geq 1$,

ii) $q > 1$, se $N \leq p$,

iii) $p > 1$, se $N \leq q$,

então,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_{\partial\Omega} v u \eta_i \, ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx,$$

onde $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ é normal a $\partial\Omega$ e exterior a Ω .

Demonstração: Veja o teorema 1.1 pág 121 em [23].

Apêndice B

Normas introduzidas, operadores e subespaços considerados no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$.

A norma usual de $H^1(\Omega)$ é denotada e definida por:

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} u^2.$$

1) No caso $\alpha < 0$.

Com $k > 0$ constante escolhida apropriadamente, definimos o produto interno.

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + k \int_{\Omega} uv + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

A constante k é escolhida de modo que a norma induzida pelo produto interno acima seja equivalente à norma usual de $H^1(\Omega)$.

O operador $T : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ é definido por:

$$\int_{\Omega} uv = (Tu, v)_k, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Denotamos com $\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$ a sequência de autovalores de $-\Delta$ com condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, u \in H^1(\Omega)$. Aqui $\mu_1 < 0$.

Denotamos com X_1 , o espaço das autofunções associadas ao primeiro autovalor μ_1 e com $X_2 = X_1^\perp$ o complemento ortogonal de X_1 relativo ao produto interno $(\cdot, \cdot)_k$. Assim temos:

$$H^1(\Omega) = X_1 \oplus X_2.$$

2) No caso $\alpha > 0$.

Para $\varepsilon > 0$, definimos o produto interno:

$$(u, v)_\varepsilon = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \varepsilon \int_{\Omega} u^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 ds, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

e a norma correspondente,

$$\|u\|_\varepsilon = \sqrt{(u, u)_\varepsilon},$$

é equivalente com a norma usual de $H^1(\Omega)$.

O operador $G : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ é definido por:

$$\int_{\Omega} uv = (Gu, v)_\varepsilon \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Denotamos com $\beta_1 < \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots$ a sequência de autovalores de $-\Delta$, com condição de fronteira $\gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, u \in H^1(\Omega)$. Aqui $\beta_1 > 0$.

Denotamos com Y_1 , o espaço das autofunções associadas ao primeiro autovalor β_1 , e com $Y_2 = Y_1^\perp$, o complemento ortogonal de Y_1 relativo ao produto interno $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$. Assim temos:

$$H^1(\Omega) = Y_1 \oplus Y_2.$$

Também para $\alpha > 0$ introduzimos o produto interno definido por:

$$(u, v)_* = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) ds \quad , \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

e a norma

$$||u||_* = \sqrt{(u, u)_*},$$

a qual é equivalente a norma usual de $H^1(\Omega)$.

Conclusões

A teoria desenvolvida para o problema

$$(\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega \\ \text{ii)} & \gamma_1 u + \alpha \gamma_0 u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

é importante porque:

1. Estabelece a regularidade para problemas elípticos, nos quais o termo não linear f tem um crescimento polinomial subcrítico, e a condição de fronteira é do tipo (ii).
2. Relaciona o termo não linear f e os autovalores de $-\Delta$ com a condição de fronteira (ii), no caso em que, o zero não é um valor crítico local do funcional associado ao problema $(\mathbb{P})$.
3. Este trabalho é básico para o estudo de problemas elípticos, os quais tem condição de fronteira mista do tipo (ii).

Bibliografia

- [1] D. Arcoya e S. Villegas, *Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at $-\infty$ and superlinear at $+\infty$* , Math.-Z. 219, n^o 4, 1995, pp. 499-513.
- [2] J.P. Aubin, *Aproximation of elliptic boundary - value problems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [3] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [4] S. Agmon, A. Douglis e L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. (I), (II)*: Comm. Pure Appl. Math. vol. XII, 1959, pp. 623-727; vol. XVII, 1964, pp. 35-92.
- [5] C. Baiocchi e A. Capelo, *Variational and quasivariational inequalities, applications to free-boundary problems*, John Wiley and Sons, 1984.
- [6] H. Brézis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [7] R. Dautray, Jacques e L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique; pour les sciences et les techniques*, vol. 3, Masson, 1998.
- [8] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, volume 19, American Mathematical Society, 1998.
- [9] L.C. Evans e R.F. Gariepy, *Lectures notes on measure theory and fine properties of functions*, University of Kentucky, Department of Mathematics, CRC Press 1992.
- [10] D.G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lecture Notes in Mathematics, 957, Springer-Verlag, 1982, pp. 34-87.
- [11] —————, *On superlinear elliptic problems with nonlinearities interacting only with higher eigenvalues*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 18, Number 2, 1988, pp. 287-303.
- [12] —————, *Lecture on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1989.

- [13] D. Gilbarg e N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.
- [14] D. B. Henry, *How to remember the Sobolev inequalities*, Lecture Notes in Mathematics, 957, pp. 97-109.
- [15] A. Kufner, Oldřich John e S. Fučík, *Function spaces*, Academia, Prague, 1977.
- [16] D. Kinderlehrer, e G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980
- [17] Otared Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.
- [18] J.L. Lions e E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes (VI)*, Journal D'Analyse Mathématique, XI, 1963, 165-188.
- [19] ———, *Problemi ai limiti non omogenei, (I), (III), (V)*: Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XIV, 1960, pp. 269-308; vol. XV, 1961, pp. 41-101; vol. XVI, vol. XVI, 1962, pp. 1-44.
- [20] ———, *Problèmes aux limites non homogènes, (II), (IV)*: Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. XI, 1961 pp. 137-178; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XV, 1961, pp. 311-326.
- [21] ———, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Volumes I, II and III, Dunod, Paris, 1968.
- [22] L.A. Medeiros e M. Milla Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais*, Rio de Janeiro, RJ, 1989.
- [23] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris/Academia, Prague, 1967.
- [24] D. Pierotti e S. Terracini, *On a Neumann problem involving two critical Sobolev exponents: remarks on geometrical and topological aspects*, Calc. Var., 5, 1997, pp. 271-291.
- [25] J.A. Pérez Sánchez, *Teoremas de "Linking" aplicados à problemas elípticos semi-lineares*, Tese de Doutorado, Unicamp, 1996.
- [26] Elves A. de B. e Silva, *Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 16, n^o 5, 1991, pp. 455-477.
- [27] S. Terracini, *Symmetry properties of positive solutions to some elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, Differential and Integral Equations, vol. 8, Number 8, 1995, pp. 1911-1922.