Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Caracteres de limites clássicos de afinizações minimais de tipo E_6

Fernanda de Andrade Pereira

Orientador: Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura

Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP.

CARACTERES DE LIMITES CLÁSSICOS DE AFINIZAÇÕES MINIMAIS DE TIPO E6

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Fernanda de Andrade Pereira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12 de março de 2010

Moura

Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-Unicamp)
2. Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-Unicamp)
3. Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (IME-USP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Pereira, Fernanda de Andrade

P414c Caracteres de limites clássicos de afinizações minimais de tipo E6 / Fernanda de Andrade Pereira -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Adriano Adrega de Moura

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Representações de álgebras. 2. Lie, Álgebras de. 3. Kac-Moody, Álgebras de. 4. Grupos quânticos. I. Moura, Adriano Adrega de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Characters of classical limits of minimal affinizations of type E6.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Representations of algebras. 2. Lie algebras. 3. Kac-Moody algebras. 4. Quantum groups.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (IME-USP)

Data da defesa: 12/03/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de março de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). VYACHESLAV FUTORNY

"Fé inabalável só é a que pode encarar frente a frente a razão, em todas as épocas da Humanidade."

Allan Kardec

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus, por todas as oportunidades que tem colocado em meu caminho, pela força que sempre me dá para enfrentar as dificuldades e por tantas realizações em minha vida.

Agradeço aos meus pais, Rosa Maria e Junior, pelos pais maravilhosos que me foram, pelo incentivo e apoio que me deram para os estudos, pela amizade, carinho e amor, e por tantas outras coisas aqui indescritíveis. Em especial agradeço a minha mãe pela dedicação quase que exclusiva à criação minha e dos meus irmãos, por tantos bons conselhos que sempre me deu, e por ser essa mulher forte, o que me faz seguir adiante com tranquilidade.

Agradeço a todos os meus familiares que também sempre me apoiaram, meus irmãos Rafael e Débora, meus avós, tios e primos.

Agradeço a todos os amigos de São José do Rio Preto, que tornaram minha graduação muito mais agradável. Em especial quero agradecer à Nanna, Manu e Nani, por tantos momentos felizes que tivemos juntas e pelo carinho eterno que sei que guardam por mim.

Quero agradecer a todos os professores do Ibilce-UNESP, pela relação de amizade que têm com os alunos e pelo incentivo que sempre me deram, além de todo ensinamento matemático. Não poderia deixar de citar duas professoras que foram duas mães para mim durante a graduação, Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva e Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, pelas ajudas nos momentos de dificuldades, pelos conselhos, pela amizade e por todo carinho, apoio e confiança que tiveram em mim. Podem ter certeza que nunca esquecerei de tudo isso.

Agradeço a todos os amigos de Campinas. Em especial quero agradecer as minhas companheiras de república, Ariane, Grasi e Paty, por ótimos momentos que tivemos juntas, pelos ombros amigos que sempre estão dispostas a me ofecerer, pelos conselhos e freadas em meus momentos insanidade e pela ótima convivência que me proporcionam. Agradeço ao Ivan pelos galhos que me quebrou com o PED e que nem ao menos me deixou retribuir. Agradeço ao Tiago ou o “Saca”, meu “irmão”, pela amizade, pela ajuda e conselhos que me deu quando precisei e por ter lido esta dissertação e corrigido vários erros. Agradeço ao Felipe por todos os bons momentos que dividiu comigo nestes últimos meses e por ser essa pessoa tão especial.

Agradeço a todos os professores e funcionários do IMECC-UNICAMP. Em especial alguns que considero amigos, Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino, Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio e Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti. Quero agradecer à Tânia pela paciência, boa vontade e simpatia com que desempenha os chatos trabalhos burocráticos da secretaria de pós-graduação do IMECC.

Agradeço aos Profs. Drs. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP) e Vyacheslav Futorny (IME-USP), por terem participado da banca examinadora da defesa desta dissertação e pelas sugestões oferecidas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura. Uma vez me disseram que ao orientador apenas se deve agradecer pelos bons problemas oferecidos, mas não vou seguir aqui este conselho. Quero agradecer sim pelo assunto que ele me designou a estudar e pelo problema que me mandou atacar, o qual ele já uma experiência pois havia trabalhado um pouco com ele em outros casos, e assim me deu as coordenadas que nos levou aos resultados originais obtidos nesta dissertação. Mas quero agradecer também pela enorme dedicação, por sempre estar disponível para tirar minhas dúvidas, corrigir meus erros e me ensinar cada vez mais. Agradeço pela paciência que teve comigo, quando comecei a fazer as primeiras continhas e era muito imatura no assunto, e durante todo o mestrado, com todas as atividades que quis realizar. Agradeço por continuar como meu orientador, agora no doutorado. Por fim, agradeço pela confiança que deposita em mim, espero nunca decepcioná-lo.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que passaram em minha vida e me deixaram algum aprendizado ou alguma experiência e a todos que de alguma forma contribuiram para que eu estivesse aqui. Peço que me perdoem os que deixei de citar.

"Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei em ombros de gigantes."

Isaac Newton

Resumo

O conceito de afinização minimal, introduzido por V. Chari e A. Pressley, surgiu a partir da impossibilidade de se estender, em geral, uma representação do grupo quântico associado a uma álgebra de Lie simples para o grupo quântico associado à sua álgebra de laços, o que sempre é possível no contexto clássico. Uma classe especial de afinizações minimais é a dos módulos de Kirillov-Reshetikhin, que são afinizações minimais dos módulos irredutíveis quando os pesos máximos são múltiplos dos pesos fundamentais. Esses módulos são objetos de muitos estudos por causa das suas aplicações em física-matemática. Um problema de interesse particular envolvendo afinizações minimais é o de descrever seus caracteres. Neste trabalho apresentamos algumas fórmulas para os caracteres de afinizações minimais quando a álgebra de Lie simples envolvida é do tipo E_6. A principal técnica utilizada foi proposta por V. Chari e A. Moura ao se considerar o limite clássico das afinizações minimais. As fórmulas são obtidas através de um estudo sistemático de certos módulos graduados dados por geradores e relações para a correspodente álgebra de correntes. O ponto principal é demonstrar que estes módulos são isomorfos aos limites clássicos das afinizações minimais quando vistos como módulos para a álgebra de correntes.

Palavras-chave: Afinizações minimais, álgebras de Kac-Moody afins, caracteres, grupos quânticos, módulos de Kirillov-Reshetikhin, representações de álgebras.

Abstract

The concept of minimal affinization, introduced by V. Chari and A. Pressley, arose from the impossibility of extending, in general, a representation of the quantum group associated to a simple Lie algebra to the quantum group associated to its loop algebra, which is always possible on the classical context. A special class of minimal affinizations is that of Kirillov-Reshetikhin modules, which are minimal affinizations of the irreducible modules having multiples of the fundamental weights as highest weights. These modules are objects of intensive studies because of their applications in mathematical physics. One problem of particular interest involving minimal affinizations is that of describing their characters. In this work we present some formulas for the characters of minimal affinizations when the simple Lie algebra involved is of type E_6. The main strategy used here was proposed by V. Chari and A. Moura by considering the classical limit of minimal affinizations. The formulas are obtained through a systematic study of certain graded modules for the corresponding current algebra given by generators and relations. The main point is to prove that these modules are isomorphic to the classical limits of the minimal affinizations when the latter are regarded as modules for the current algebra.

Keywords: Minimal affinizations, affine Kac-Moody algebras, characters, quantum groups, Kirillov-Reshetikhin modules, representation of algebras.

Sumário

Introdução

A teoria de representações das álgebras de Kac-Moody e suas quantizações é de grande interesse em diversas áreas da matemática e física. Essas álgebras foram propostas independentemente na década de 1960 por Kac e Moody (veja [22] e [26]) como generalizações do bem sucedido conceito de álgebra de Lie semissimples. Por volta de 1985, influenciados pelos trabalhos em física-estatística relacionados à chamada equação de Yang-Baxter, Drinfeld e Jimbo introduziram deformações das álgebras universais envelopantes das álgebras de Kac-Moody que são conhecidas como Grupos Quânticos. As álgebras de Kac-Moody clássicas são recuperadas fazendo-se o limite quando o parâmetro de deformação q (quantização) vai para 1. Posteriormente a teoria de grupos quânticos mostrou-se útil em todas as grandes subáreas da matemática chegando a estabelecer relações entre trabalhos a priori altamente desconexos. Alguns resultados importantes sobre as álgebras de Kac-Moody clássicas como, por exemplo, a existência de bases "canônicas" para certas classes importantes de suas representações, só foram possíveis de se obter após o advento dos grupos quânticos através dos trabalhos de Kashiwara e Lusztig.

Duas décadas após o surgimento dos grupos quânticos, muitos problemas relevantes, tanto no contexto clássico quanto quântico, permanecem em aberto mantendo uma atividade muito grande de pesquisa nas suas diversas subáreas. Em particular, a teoria de representações de dimensão finita dos grupos quânticos associados às álgebras de Kac-Moody afins (ou simplesmente álgebras afins quantizadas) é um tópico bastante relevante de pesquisa atualmente.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t, t^{-1}]$ sua álgebra de laços associada e $U_q(\mathfrak{g})$ e $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ suas álgebras quantizadas sobre $\mathbb{K}(q)$, onde q é uma variável. A álgebra de Kac-Moody afim não torcida é uma extensão central unidimensional de $\tilde{\mathfrak{g}}$, mas como o centro age trivialmente em representações de dimensão finita, basta considerar a álgebra de laços. Dado $a \in \mathbb{K}^\times$, considere $\mathrm{ev}_a : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ a função avaliação dada por $x \otimes f(t) \mapsto f(a)x$. Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo, pode-se considerar o "pullback" $V(a)$ de V por ev_a. Em particular, todo $\mathfrak{g}$-módulo pode ser transformado em um $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo (que estende a ação de $\mathfrak{g}$). No caso quântico, a menos que $\mathfrak{g}$ seja do tipo A, não existe função de avaliação análoga. Na verdade, em geral, um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo não pode ser tornado um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo (de modo que a ação estenda a ação de $U_q(\mathfrak{g})$). A partir daí, o conceito de afinização de um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo irredutível foi introduzido por Chari em [3], permitindo que o espaço vetorial subjacente seja aumentado "controladamente". Duas afinizações são equivalentes se elas são isomorfas como $U_q(\mathfrak{g})$-módulos. Segue da classificação dos $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos irredutíveis de dimensão finita que todo $U_q(\mathfrak{g})$-módulo irredutível de dimensão finita tem pelo menos uma classe de equivalência de afinizações. Além disso, existe uma quantidade finita de classes de equivalências de afinizações para um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo irredutível dado e a ordem parcial usual no reticulado de pesos P de $\mathfrak{g}$ induz uma ordem parcial no conjunto de classes de equivalências das afinizações. Representantes das classes minimais com relação a essa ordem são chamados de afinizações minimais.

A classificação das classes de equivalências de afinizações minimais está completa apenas no caso em que o suporte do peso máximo correspondente não engloba um subdiagrama de tipo D_4 (veja [9, 10]). De fato, neste caso, existe apenas uma classe de equivalência. No caso em que o suporte do peso máximo engloba um subdiagrama de tipo D_4 a situação é mais complicada e depende essencialmente se o suporte contém o vértice que se conecta a outros três vértices ou não. No primeiro caso a classificação também está completa (veja [10]) e existem três classes de equivalências. No segundo a classificação só é conhecida no caso em que a álgebra de Lie semissimples é de tipo D_4 e segue essencialmente dos resultados de [11] apesar de um último detalhe só ter sido demonstrado em [28]. Neste caso a quantidade de classes de equivalências cresce a medida que o peso máximo cresce.

Embora a classificação das afinizações minimais esteja quase completa, sua estrutura continua essencialmente desconhecida, exceto quando $\mathfrak{g}$ é do tipo A ou quando o peso máximo é um múltiplo de um peso fundamental (neste caso as afinizações minimais também são conhecidas como módulos de Kirillov-Reshetikhin). Algum progresso foi feito nesta direção depois do surgimento do conceito de q-caracteres (também é chamado de ℓ-caracter por alguns autores) introduzido em [13]. Os q-caracteres são generalizações dos caracteres usuais de uma representação de uma álgebra de Lie simples, satisfazendo as propriedades usuais: eles são aditivos em somas diretas, multiplicativos em produtos tensoriais, e determinam completamente as representações irredutíveis. No entanto, encontrar fórmulas "fechadas" como uma análoga a fórmula do caracter de Weyl para q-caracteres continua uma questão essencialmente em aberto. Em [12], E. Frenkel e E. Mukhin propuseram um algoritmo para se calcular o q-caracter, agora conhecido como algoritmo de Frenkel-Mukhin. Eles provaram que o algoritmo funciona para as chamadas representações especiais (em particular para os módulos de Kirillov-Reshetikhin) e conjecturaram que o algoritmo valia em geral. Recentemente foi provado em [30] que isto é falso. Outro algoritmo foi proposto por H. Nakajima em [31] onde foi provado que o algoritmo funciona para calcular o q-caracter de qualquer representação irredutível no caso em que a álgebra de Lie semissimples é de tipo A, D ou E. A demonstração deste fato usa o estudo de certas variedades algébricas conhecidas como Variedades de Quivers de Nakajima. De fato, do estudo de tais variedades Nakajima definiu certos polinômios semelhantes aos famosos polinômios de Kazhdan-Lusztig que pode-se considerar o mais próximo que se tem de uma fórmula "fechada" para os q-caracteres. Infelizmente, a teoria das variedades de Nakajima só está desenvolvida para $\mathfrak{g}$ de tipo A, D, E. Em [16], D. Hernandez mostrou que o algoritmo de Nakajima assim como os polinômios podem ser definidos de maneira puramente algébrica e, portanto, para qualquer $\mathfrak{g}$. Porém, a ausência da teoria das variedades de Nakajima continua um obstáculo para a demonstração de que o algoritmo (ou os polinômios) de fato fornecem os q-caracteres em geral. Mesmo nas situações onde valem o algoritmo, a tarefa de traduzir as informações dadas pelo algoritmo em fórmulas "fechadas" continua sendo em geral um desafio. Para maiores detalhes na teoria de q-caracteres, além da literatura anteriormente mencionada, indicamos o "survey" [5].

As afinizações minimais aparecem naturalmente no estudo de reticulados integráveis em mecânica estatística. Exemplos importantes de afinizações minimais são os módulos de Kirillov-Reshetikhin que foram inicialmente estudados em [23] (antes da definição do conceito de afinizações minimais), onde foi conjecturado que seus caracteres satisfazem uma certa fórmula fermiônica. Tal conjectura (cuja demonstração foi finalizada em [17]) foi motivada por uma ferramenta essencial para o estudo dos tais reticulados integráveis chamada de Ansatz de Bethe. Esta fórmula fermiônica é uma fórmula para o caracter de produtos tensoriais de módulos de Kirillov-Reshetikhin e fornece um algoritmo para se calcular o caracter de um módulo de Kirillov-Reshetikhin qualquer a partir do caracter das chamadas representações fundamentais. Apesar dos caracteres das representações fundamentais serem conhecidos, obter fórmulas "fechadas" para os caracteres destes módulos a partir de tal algoritmo não parece factível. Porém, também motivados pelo Ansatz de Bethe, os autores de [14, 15] formularam conjecturas para os caracteres dos módulos de Kirillov-Reshetikhin diretamente. Várias dessas fórmulas foram demonstradas em [6, 7] em uma colaboração de V. Chari e A. Moura. A demonstração se baseia em estudar o limite clássico dos módulos de Kirillov-Reshetikhin em comparação com certos módulos graduados definidos por geradores e relações para as chamadas álgebras de correntes. Mais recentemente em [28] o orientador deste projeto, A. Moura, propôs geradores e relações para o limite clássico de afinizações minimais mais gerais do que módulos de Kirillov-Reshetikhin e iniciou o programa de estender os métodos usados em [6, 7] para tais representações. Nesta dissertação trabalhamos em um pedaço deste programa e obtivemos fórmulas para os caracteres de algumas classes de afinizações minimais no caso em que a álgebra de Lie semissimples subjacente é de tipo E_6. Pretendemos submeter um artigo, [29], com os resultados obtidos.

O texto está dividido em cinco capítulos, entre os quais os quatro primeiros apresentam a teoria necessária para se entender o quinto capítulo, o mais importante deste trabalho. Preferimos omitir as demonstrações dos capítulos um, dois, três e quatro, que podem ser encontradas nas referências locais, para evitar o enorme crescimento do texto, além de que algumas demonstrações, principalmente as do capítulo quatro, são muito longas, complicadas e envolvem algumas ferramentas aqui não apresentadas.

No primeiro capítulo apresentamos uma revisão básica sobre álgebras associativas, envolvendo o conceito e algumas propriedades de álgebras graduadas e filtradas e de módulos sobre uma álgebra.

No segundo capítulo apresentamos a teoria de álgebras de Lie de dimensão finita e representações das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita. As ferramentas utilizadas no capítulo cinco são praticamente todas deste capítulo, e que por isso considero o segundo mais importante deste trabalho.

No terceiro capítulo apresentamos as definições e construções básicas das álgebras de Kac-Moody e das álgebras universais envelopantes quantizadas (ou grupos quânticos), envolvendo a classificação das álgebras de Kac-Moody afins e realização das afins não torcidas, além da realização de Beck-Drinfeld ("loop like realization") das álgebras afins quantizadas, a mais usada na teoria de representações de dimensão finita destas álgebras.

No quarto capítulo apresentamos um pouco da teoria de representações das álgebras afins quantizadas e os conceitos de afinização minimal e limites clássicos. Este capítulo dá uma noção geral do relacionamento dos resultados demonstrados no capítulo cinco com a teoria de afinizações minimais.

No capítulo cinco aprensentamos os resultados principais deste trabalho. As duas primeiras seções apresentam algumas definições e propriedades dos módulos a serem estudados e vários resultados que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas principais. O resto do capítulo é dedicado à apresentação e demonstração dos resultados obtidos durante o mestrado. A referência principal na qual nos baseamos é o artigo [28] do orientador deste projeto.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Convenções

Neste texto $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Z}_{\geq m}$ denota o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a m. O dual de um espaço vetorial V será denotado por V^* e os isomorfismos serão denotados por $\cong$.

1.2 Álgebras associativas

Nesta seção serão apresentadas algumas definições e propriedades, sem demonstrações, sobre álgebras associativas com identidade. Os fatos expostos aqui e suas demonstrações podem ser encontradas em [32] ou [20].

1.2.1 Conceitos básicos sobre álgebras associativas

Definição 1.2.1. Um *anel* A é um conjunto não vazio munido com duas operações binárias $+ : A \times A \to A$ e $\cdot : A \times A \to A$ tais que:

(i) $(A, +)$ é um grupo abeliano, isto é, $+$ é associativa e comutativa, existe $0 \in A$ elemento neutro, e, dado $a \in A$, existe $-a \in A$ tal que $a + (-a) = 0$.

(ii) A operação $\cdot$ é associativa.

(iii) A operação $\cdot$ é distributiva sobre $+$, isto é, dados $a, b, c \in A$ tem-se

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

(iv) Existe $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$, para todo $a \in A$.

A operação $+$ é chamada de *soma*, a operação $\cdot$ é chamada de *multiplicação* ou *produto* e costuma-se escrever ab ao invés de $a \cdot b$.

Um anel A é chamado de *anel comutativo* se sua multiplicação é comutativa. Um elemento $a \in A$ é chamado de *unidade* se a é inversível com relação à multiplicação, isto é, existe $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Denota-se o conjunto de todas as unidades de A por $A^{\times}$.

Observação 1.2.2. Se A é anel comutativo e $A^{\times} = A \setminus \{0\}$, então A é corpo.

Definição 1.2.3. Seja A um anel. Um *subanel* de A é um subconjunto $B \subseteq A$ tal que $1_A \in B$ e B é fechado pelas operações de A, isto é, $a + b \in B$, para todos $a, b \in B$, e $ab \in B$, para todos $a, b \in B$.

Observe que se B é um subanel de A, então B é um anel com as operações de A restritas a B.

Definição 1.2.4. Seja A um anel. Um *ideal à esquerda (à direita)* de A é subconjunto não vazio $I \subseteq A$, tal que, $a + b \in I$ para todos $a, b \in I$ e $ab \in I$ ($ba \in I$) para todos $a \in A$ e $b \in I$. I é um *ideal bilateral* se $a + b \in I$, $ab \in I$ e $ba \in I$, para todos $a \in A$ e $b \in I$.

Exemplo 1.2.5. Se A é um anel, $\{0\}$ e A são ideais de A. O ideal $\{0\}$ é chamado de *ideal trivial* e os ideais de A diferentes de A são chamados de *ideais próprios*.

Observe que se A um anel e I um ideal de A tal que $I \cap A^{\times} \neq \emptyset$, então $I = A$.

Se A é um anel e I é um ideal bilateral de A, então o quociente A/I, isto é, o conjunto das classes laterais $\{a + I : a \in A\}$ com $a + I = b + I$ se, e somente se, $a - b \in I$, é um anel com as operações:

(i) $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$, para todos $a, b \in A$;

(ii) $(a + I)(b + I) = (ab) + I$, para todos $a, b \in A$.

A/I é chamado de *anel quociente*.

Definição 1.2.6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma $\mathbb{K}$-*álgebra associativa (com identidade)* é um anel A que é, ao mesmo tempo, um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, onde a soma de dois elementos em A é a mesma da estrutura de anel e do espaço vetorial, e vale que:

$$r(a_1 a_2) = (ra_1)a_2 = a_1(ra_2),$$

para todos $a_1, a_2 \in A$ e $r \in \mathbb{K}$.

Se A é um anel comutativo, então A é chamada de *álgebra comutativa*.

Para simplificações, daqui por diante diremos apenas $\mathbb{K}$-álgebra ao invés de $\mathbb{K}$-álgebra associativa (com identidade), ou, quando não houver perigo de confusão, apenas álgebra.

Exemplo 1.2.7. Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então o conjunto $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ das transformações lineares de V em V é uma $\mathbb{K}$-álgebra com a soma dada pela soma usual de funções e o produto dado pela composição de funções.

Definição 1.2.8. Sejam A e B $\mathbb{K}$-álgebras. Uma transformação linear $f : A \to B$ é um *homomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras*, ou apenas, um *homomorfismo de álgebras* se $f(ab) = f(a)f(b)$ para todos $a, b \in A$ e $f(1_A) = 1_B$. Se f é bijetora, f é chamado de *isomorfismo de álgebras*.

Definição 1.2.9. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Um subanel $B \subseteq A$ é uma *subálgebra* se for também um subespaço vetorial.

Definição 1.2.10. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Define-se o *centro* de A como sendo o conjunto $Z(A)$ dos elementos de A que comutam com todos os elementos de A, isto é,

$$Z(A) = \{a \in A : ab = ba, \text{ para todo } b \in A\}.$$

A interseção de qualquer família de subálgebras é também uma subálgebra. Assim, dado um subconjunto $C \subseteq A$, existe uma menor subálgebra de A que contém C, a saber

$$\bigcap_{\substack{S \subseteq A \text{ subálgebra} \\ C \subseteq S}} S,$$

que é chamada de *subálgebra gerada por* C.

Definição 1.2.11. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Um *ideal à esquerda (à direita)* de A é uma subálgebra $I \subseteq A$ tal que I é um ideal à esquerda (à direita) do anel A. O ideal I é um *ideal bilateral* se I é um ideal bilateral do anel A.

Exemplo 1.2.12. Se $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é um família de $\mathbb{K}$-álgebras, então a soma direta de espaços vetoriais $A = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ tem estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra definindo-se o produto coordenada a coordenada. Esta $\mathbb{K}$-álgebra A é chamada de $\mathbb{K}$-*álgebra dada pela soma direta das álgebras* A_λ, $\lambda \in \Lambda$. Neste caso, para cada $\lambda \in \Lambda$, A_λ é isomorfa a um ideal de A.

Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra e $I \subseteq A$ é um ideal à esquerda do anel A, então I é necessariamente um ideal à esquerda da álgebra A, pois, quaisquer que sejam $r \in \mathbb{K}$ e $a \in I$, tem-se

$$ra = r(1a) = (r1)a \in I.$$

O mesmo vale para ideais à direita e ideais bilaterais.

Se I é um ideal bilateral de A, então A/I é ao mesmo tempo um anel e um espaço vetorial, e não é difícil ver que A/I é uma álgebra, chamada de *álgebra quociente* .

A interseção de qualquer família de ideais (à esquerda, à direita ou bilaterais) é também um ideal. Assim, dado um subconjunto $R \subseteq A$, existe um menor ideal (à esquerda, à direita ou bilateral) de A que contém R, a saber

$$\bigcap_{\substack{S\subseteq A \text{ ideal} \\ \text{(à esquerda, à direita ou bilateral)} \\ R\subseteq S}} S,$$

que é chamado de *ideal gerado por* R.

Definição 1.2.13. Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Uma família $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de subespaços vetoriais de A constitui uma *graduação* de A se:

(i) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$;

(ii) para quaisquer $a_r \in A_r$ e $a_s \in A_s$ tem-se $a_r a_s \in A_{r+s}$.

Uma $\mathbb{K}$-álgebra A com uma graduação $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é chamada de *álgebra graduada* ou *álgebra $\mathbb{Z}$-graduada*. Os elementos de A_n são chamados de *elementos homogêneos de grau* n e A_n é chamado de *espaço homogêneo de grau* n. A condição (ii) da Definição 1.2.13 diz que o produto de dois elementos homogêneos é um elemento homogêneo, e que o grau do produto é a soma dos graus desses fatores. Todo elemento $a \in A$ tem uma única representação na forma

$$a = \cdots + a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \cdots , \tag{1.1}$$

onde $a_n \in A_n$ e somente uma quantidade finita de termos do lado direito da igualdade (1.1) são não nulos. Os somandos nesta representação são chamados de *componentes homogêneas de* a.

Frequentemente serão encontradas situações em que $A_n = 0$ para todo $n < 0$. Nesse caso a graduação é chamada de *não negativa* e diremos que A é $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduada.

Proposição 1.2.14. Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma graduação de uma $\mathbb{K}$-álgebra A. Então:

(i) $1 \in A_0$ e A_0 é uma $\mathbb{K}$-subálgebra de A.

(ii) Se A é gerada, como $\mathbb{K}$-álgebra, por A_1, então a graduação é não negativa, e, para $p \geq 1$, cada elemento de A_p é uma soma de produtos de p elementos de A_1. Mais ainda, A_0 é gerada, como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, pelo elemento identidade 1 e A_0 está contida no centro de A.

Definição 1.2.15. Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma graduação de uma $\mathbb{K}$-álgebra A. Um ideal I de A (à esquerda, à direita ou bilateral) é *graduado* se

$$I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (I \cap A_n).$$

Proposição 1.2.16. Seja I um ideal (à esquerda, à direita ou bilateral) de uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada A, com graduação $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Então são equivalentes:

(i) I é graduado;

(ii) dado $a \in I$ tem-se $a_n \in I$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, onde os a_n são as componentes homogêneas de a;

(iii) I pode ser gerado por elementos homogêneos.

Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada, com graduação $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, e I é um ideal graduado de A, então A/I é uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada. Mais precisamente,

$$\frac{A}{I} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{A_n + I}{I}.$$

Definição 1.2.17. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Uma família $\{A^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ de subespaços vetoriais de A constitui uma *filtração* de A se:

(i) $A^{(n)} \subseteq A^{(m)}$, para todos $n \leq m$;

(ii) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{(n)} = A$;

(iii) dados $a_r \in A^{(r)}$ e $a_s \in A^{(s)}$, tem-se $a_r a_s \in A^{(r+s)}$.

Uma álgebra A com uma filtração é chamada de *álgebra filtrada*.

Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ uma graduação não negativa de A. Considere

$$A^{(n)} = \bigoplus_{r\leq n} A_r.$$

Então $\{A^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ define uma filtração em A.

Uma noção importante associada com uma álgebra filtrada A é a *álgebra graduada associada* $G(A)$. Se $\{A^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ é uma filtração de A, define-se $G_m = A^{(m)}/A^{(m-1)}$, $m \geq 0$, onde $A^{(-1)} = 0$, e

$$G(A) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} G_m.$$

Uma multiplicação em $G(A)$ é definida componente a componente por

$$(a_i + A^{(i-1)})(a_j + A^{(j-1)}) = a_i a_j + A^{(i+j-1)}, \tag{1.2}$$

se $a_i \in A^{(i)}$, $a_j \in A^{(j)}$. Quando $a_i \equiv b_i \mod A^{(i-1)}$ e $a_j \equiv b_j \mod A^{(j-1)}$ tem-se $a_i a_j \equiv b_i b_j \mod A^{(i+j-1)}$. Então o produto dado pela equação (1.2) está bem definido. Além disso, (1.2) implica que o produto de um elemento de G_i por um elemento de G_j é um elemento de G_{i+j}. Estendendo essa multiplicação linearmente à $G(A)$ temos que $G(A)$ é uma álgebra graduada com G_i o espaço homogêneo de grau i.

Definição 1.2.18. Sejam X um conjunto não vazio. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é *livre sobre* X se existe uma função $i : X \to A$ tal que o par (A, i) satisfaz a seguinte propriedade universal: dadas uma $\mathbb{K}$-álgebra B e uma função $\varphi : X \to B$, existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : A \to B$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Analogamente pode-se definir álgebra comutativa livre sobre um conjunto (basta pedir que todas as álgebras da Definição 1.2.18 sejam comutativas).

Proposição 1.2.19. Para qualquer conjunto $X \neq \emptyset$, existe uma única, a menos de isomorfismo, $\mathbb{K}$-álgebra livre sobre X.

Definição 1.2.20. Fixe um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $X = \{a_j : j \in J\}$ um conjunto e $R = \{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ um subconjunto da $\mathbb{K}$-álgebra A livre sobre X. Define-se a *álgebra dada por geradores* a_j*,* $j \in J$*, e relações* $r_\lambda = 0$*,* $\lambda \in \Lambda$, como sendo o quociente de A pelo ideal bilateral de A gerado por R.

1.2.2 Álgebras tensorial e simétrica

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Considere $T^0(V) = \mathbb{K}$ e $T^n(V) = V^{\otimes n}$ (produto tensorial de n cópias de V), $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Os isomorfismos canônicos $T^n(V) \otimes T^m(V) \cong T^{m+n}(V)$ induzem um produto (associativo) no espaço vetorial $T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} T^n(V)$ dado por

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)(v_{n+1} \otimes \cdots \otimes v_{n+m}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes v_{n+1} \otimes \cdots \otimes v_{n+m}.$$

Com esse produto $T(V)$ tem uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra. $T(V)$ é chamada de *álgebra tensorial de* V.

Proposição 1.2.21. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. A álgebra tensorial $T(V)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: dadas uma $\mathbb{K}$-álgebra A e uma transformação linear $\varphi : V \to A$ existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\bar{\varphi} : T(V) \to A$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & T(V) \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

onde $i : V \to T(V)$ é a inclusão canônica. Além disso $T(V)$ é única, a menos de isomorfismo, satisfazendo essa propriedade.

Observe que a álgebra tensorial $T(V)$ é $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduada, onde $T^n(V)$ é o espaço homogêneo de grau n.

Considere agora o ideal bilateral $I(V)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x$, com $x, y \in V$. A álgebra quociente $S(V) = T(V)/I(V)$ é uma álgebra comutativa chamada de *álgebra simétrica* de V. Seja $S^n(V)$ a imagem de $T^n(V)$ pela projeção canônica $\pi : T(V) \to S(V)$. Como $I(V)$ é gerado por elementos homogêneos (de grau 2), o ideal $I(V)$ é graduado, logo a álgebra $S(V)$ é graduada e $S^n(V)$ é o espaço homogêneo de grau n. Além disso $V \cong S^1(V)$, assim existe uma inclusão canônica $i : V \to S(V)$.

Proposição 1.2.22. Seja V um espaço vetorial. A álgebra simétrica $S(V)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: dadas uma $\mathbb{K}$-álgebra comutativa A e uma transformação linear $\varphi : V \to A$ existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\bar{\varphi} : S(V) \to A$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & S(V) \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

onde $i : V \to S(V)$ é a inclusão canônica. Além disso $S(V)$ é única, a menos de isomorfismo, satisfazendo essa propriedade.

1.2.3 Módulos sobre uma álgebra

Definição 1.2.23. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Uma *representação* de A em V é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. A dimensão de V é chamada *dimensão da representação.* Se ρ é injetora, a representação ρ é dita *fiel.*

Definição 1.2.24. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Um A-*módulo (à esquerda)* é um espaço vetorial V, munido com uma operação (ação) $\cdot : A \times V \to V$, $(a, v) \mapsto a \cdot v$, ou apenas $(a, v) \mapsto av$, tal que:

(i) $(\lambda_1 a + \lambda_2 b) \cdot v = \lambda_1(a \cdot v) + \lambda_2(b \cdot v)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $a, b \in A$, $v \in V$;

(ii) $a \cdot (\lambda_1 v + \lambda_2 w) = \lambda_1(a \cdot v) + \lambda_2(a \cdot w)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $a \in A$, $v, w \in V$;

(iii) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$, $a, b \in A$, $v \in V$;

(iv) $1 \cdot v = v$, para todo $v \in V$.

Analogamente define-se A-módulo à direita. Neste texto todos os A-módulos serão à esquerda e será omitido o termo "à esquerda".

Os conceitos de A-módulo e representação de A são equivalentes. Se $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ é uma representação de A, então V se torna um A-módulo definindo $a \cdot v = \rho(a)v$. Reciprocamente, dado um A-módulo V, $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definida por $\rho(a)v = a \cdot v$ é uma representação de A em V. Por simplicidade usaremos mais a linguagem de A-módulo.

Definição 1.2.25. Sejam A uma álgebra e V um A-módulo. Um subespaço W de V é um A-*submódulo* de V se W é invariante sob a ação de A, isto é, $aw \in W$ para todos $a \in A$ e $w \in W$.

Proposição 1.2.26. Sejam A uma álgebra, V um A-módulo e W um A-submódulo de V. A ação em V/W dada por $a(v + W) = av + W$ para todos $a \in A$ e $v \in V$ define em V/W uma estrutura de A-módulo. Deste modo, V/W é chamado de *módulo quociente* .

Exemplo 1.2.27. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $A \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ é uma subálgebra, então a inclusão $\iota : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ é uma representação de A em V, chamada de *representação natural.*

Exemplo 1.2.28. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Então A é um A-módulo definindo-se $a \cdot b = ab$ para todos $a, b \in A$, conhecido como A-*módulo regular.*

Proposição 1.2.29. Se A é uma álgebra e I é um ideal à esquerda de A, então o quociente A/I é um A-módulo.

Definição 1.2.30. Seja A uma álgebra graduada, com graduação $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Um A-módulo V é um *módulo graduado* se $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ e $A_m V_n \subseteq V_{m+n}$, para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.2.31. Sejam A uma álgebra graduada e $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ um A-módulo graduado. Um A-submódulo W de V é *graduado* se

$$W = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (W \cap V_n).$$

Vale o análogo da Proposição 1.2.16 para submódulos graduados de um módulo graduado. Além disso, se A é uma álgebra graduada, $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ é um módulo graduado e W é um A-submódulo graduado de V, então V/W é um A-módulo graduado. Mais precisamente,

$$\frac{V}{W} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{V_n + W}{W}.$$

Capítulo 2

Álgebras de Lie

Este capítulo contém as principais definições, propriedades e resultados sobre álgebras de Lie. As demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [2], [19] ou [33].

2.1 Conceitos básicos sobre álgebras de Lie

2.1.1 Definições básicas

Definição 2.1.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma *álgebra de Lie sobre* $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ munido de uma operação binária $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz:

(i) $[\cdot,\cdot]$ é bilinear;

(ii) $[x,x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$;

(iii) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

A operação $[\cdot,\cdot]$ é chamada de *colchete de Lie*, ou apenas *colchete*.

A condição (ii) aplicada à $[x+y, x+y]$ implica $[x,y] = -[y,x]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ (antissimetria). Se $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$, onde $\operatorname{car} \mathbb{K}$ denota a característica de $\mathbb{K}$, a condição (ii) é equivalente à antissimetria.

A condição (iii) é chamada de *identidade de Jacobi*.

Observação 2.1.2. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é munida de um produto dado pelo colchete, mas $\mathfrak{g}$ não é uma álgebra no sentido da Definição 1.2.6, pois esse produto não tem identidade, a menos que $\mathfrak{g} = \{0\}$, e em geral não é associativo.

Definição 2.1.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma *subálgebra de Lie*, ou apenas *subálgebra*, se $[x,y] \in \mathfrak{h}$ para todos $x, y \in \mathfrak{h}$.

Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada da estrutura de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.1.4. Qualquer espaço vetorial V com o colchete trivial $[\cdot,\cdot]=0$ é uma álgebra de Lie, chamada *álgebra de Lie abeliana*. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\dim\mathfrak{g}=1$, então $\mathfrak{g}$ é abeliana.

Exemplo 2.1.5. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. Então o colchete dado pelo comutador $[a,b]=ab-ba$, para todos $a,b\in A$, define em A uma estrutura de álgebra de Lie (a identidade de Jacobi segue da associatividade). Em particular, se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, o conjunto $\mathfrak{gl}(V)=\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ de todas as transformações lineares de V em V é uma álgebra de Lie, com o colchete dado pelo comutador. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n, identificamos $\mathfrak{gl}(V)$ com a álgebra $\mathfrak{gl}_n$ das matrizes $n\times n$ sobre $\mathbb{K}$, fixando-se uma base de V.

Neste texto, quando nos referirmos a uma álgebra associativa como uma álgebra de Lie, estaremos nos referindo à estrutura de álgebra de Lie que se obtém definindo o colchete como sendo o comutador, como descrito no Exemplo 2.1.5.

Exemplo 2.1.6. $\mathfrak{sl}_n=\{x\in\mathfrak{gl}_n : \operatorname{tr}x=0\}$, onde $\operatorname{tr}x$ denota o traço de x, é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n$. Em particular, $\mathfrak{sl}_2$ é o subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}_2$ gerado pelas matrizes

$$x^+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad x^-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Observe que esses elementos satisfazem $[h,x^+]=2x^+$, $[h,x^-]=-2x^-$ e $[x^+,x^-]=h$.

Exemplo 2.1.7. $\mathfrak{so}_n=\{x\in\mathfrak{gl}_n : x+x^t=0\}$, onde x^t denota a matriz transposta de x, é subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n$.

Exemplo 2.1.8. $\mathfrak{sp}_n=\{x\in\mathfrak{gl}_{2n} : xa+ax^t=0\}$, onde

$$a=\begin{pmatrix}0_{n\times n}&-I_{n\times n}\\I_{n\times n}&0_{n\times n}\end{pmatrix}$$

e, $0_{n\times n}$ e $I_{n\times n}$ denotam as matrizes nula e identidade $n\times n$, respectivamente, é subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_{2n}$.

Exemplo 2.1.9. O conjunto $\mathfrak{t}_n$ das matrizes triangulares superiores é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n$.

Exemplo 2.1.10. O conjunto $\mathfrak{n}_k$ das matrizes estritamente triangulares superiores é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_k$.

Exemplo 2.1.11. O conjunto $\mathfrak{d}_n$ das matrizes diagonais é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n$.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ subconjuntos. Denota-se por $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ o subespaço vetorial gerado pelos elementos $[x, y]$, $x \in \mathfrak{h}_1$, $y \in \mathfrak{h}_2$.

Definição 2.1.12. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma família $\{\mathfrak{g}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de subespaços vetoriais de $\mathfrak{g}$ constitui uma *graduação* de $\mathfrak{g}$ se:

(i) $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$;

(ii) $[\mathfrak{g}_m, \mathfrak{g}_n] \subseteq \mathfrak{g}_{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Uma álgebra de Lie com uma graduação é chamada de *álgebra de Lie graduada*, ou, *álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada.*

As noções definidas a seguir são naturais e funcionam da mesma forma para muitas estruturas algébricas.

Definição 2.1.13. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço vetorial $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ é um *ideal* de $\mathfrak{g}$ se $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{i}$, ou equivalentemente, se $[x, y] \in \mathfrak{i}$ para todos $x \in \mathfrak{i}$ e $y \in \mathfrak{g}$.

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então o espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ tem estrutura de álgebra de Lie com o colchete dado por $[x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}] = [x, y] + \mathfrak{i}$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Deste modo $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é chamada de *álgebra de Lie quociente.*

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$ são ideais de $\mathfrak{g}$. O ideal $\{0\}$ é chamado de *ideal trivial* de $\mathfrak{g}$. Um ideal $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ é chamado de *ideal próprio* se $\mathfrak{i} \neq \mathfrak{g}$.

Exemplo 2.1.14. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ (e portanto uma subálgebra), chamada de *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.1.15. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então o *centro* de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{y \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$.

Observe que $\mathfrak{g}$ é abeliana se, e somente se, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Definição 2.1.16. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Define-se o *centralizador* de um subconjunto $X \subseteq \mathfrak{g}$ por $C_{\mathfrak{g}}(X) = \{y \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \text{ para todo } x \in X\}$ e o *normalizador* de um subespaço $V \subseteq \mathfrak{g}$ por $N_{\mathfrak{g}}(V) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, V] \subseteq V\}$.

O centralizador de um subconjunto e o normalizador de um subespaço são subálgebras de $\mathfrak{g}$. Além disso $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Definição 2.1.17. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *simples* se $\dim \mathfrak{g} > 1$ e $\mathfrak{g}$ não tem ideais próprios não triviais.

Observe que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples, então $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, pois $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é um ideal e não pode ocorrer $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, já que isso implicaria $\mathfrak{g}$ ser abeliana, e então qualquer subespaço vetorial seria um ideal de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.1.18. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{\mathfrak{i}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de ideais de $\mathfrak{g}$. Então, são ideais de $\mathfrak{g}$:

(i) interseção: $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{i}_\lambda = \{i \in \mathfrak{g} : i \in \mathfrak{i}_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}$;

(ii) soma: $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{i}_\lambda = \left\{\sum_{\lambda\in\Lambda_0} i_\lambda : i_\lambda \in \mathfrak{i}_\lambda \text{ e } \Lambda_0 \subseteq \Lambda \text{ é subconjunto finito}\right\}$.

Proposição 2.1.19. Sejam $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ a soma direta (ou produto direto) como espaços vetoriais. Então, o colchete dado por $[x, y] = ([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{g}$, define em $\mathfrak{g}$ uma estrutura de álgebra de Lie. Deste modo $\mathfrak{g}$ é chamada de *soma direta* (ou *produto direto*) e cada $\mathfrak{g}_i$ é isomorfo a um ideal de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.1.20. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $X \subseteq \mathfrak{g}$. A interseção de todos os ideais de $\mathfrak{g}$ que contêm X é o menor ideal de $\mathfrak{g}$ que contém X e é chamado de *ideal gerado por* X.

Definição 2.1.21. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$. Uma transformação linear $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* se $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.

Um homomorfismo φ é chamado *monomorfismo* se φ é injetora, ou equivalentemente, se $\ker\varphi = \{x \in \mathfrak{g} : \varphi(x) = 0\} = 0$. O homomorfismo φ é chamado de *epimorfismo* se φ é sobrejetora e de *isomorfismo* se φ é bijetora. Além disso, φ é chamado de *automorfismo* de $\mathfrak{g}$ se $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um isomorfismo. Duas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são ditas *isomorfas*, e denota-se $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$, se existe um isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

Observe que, se $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ e $\operatorname{im}\varphi$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$.

Considere $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal. Então a *projeção canônica*

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \\ x & \mapsto & x + \mathfrak{i} \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras de Lie com $\ker\pi = \mathfrak{i}$.

Com isso podemos enunciar o tradicional Teorema do Isomorfismo, agora para álgebras de Lie:

Teorema 2.1.22 (Teorema do Isomorfismo)**.** Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$.

(i) Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Se $\mathfrak{i}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ contido em $\ker \varphi$, então existe um único homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \to \mathfrak{h}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Além disso, $\mathfrak{g}/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi$.

(ii) Se $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{j}$ são ideais de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$, então $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ é um ideal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ e

$$\frac{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}{\mathfrak{j}/\mathfrak{i}} \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{j}}.$$

(iii) Se $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{j}$ são ideais de $\mathfrak{g}$, então

$$\frac{\mathfrak{i}+\mathfrak{j}}{\mathfrak{j}} \cong \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}}.$$

Definição 2.1.23. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma *representação* de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. A dimensão de V é chamada *dimensão da representação*. Se ρ é injetora, a representação ρ é dita *fiel*.

Exemplo 2.1.24. Se $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ é uma subálgebra de Lie, então a inclusão $\iota : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ define uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, chamada de *representação natural*.

Exemplo 2.1.25. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A *representação adjunta:*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ad} : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x & \mapsto & \operatorname{ad}(x) \end{array}$$

onde $\operatorname{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é dada por $\operatorname{ad}(x)(y) = [x, y]$ para todo $y \in \mathfrak{g}$, é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, devido à Identidade de Jacobi.

Observe que $\ker \operatorname{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Logo se $\mathfrak{g}$ é simples, então ad é uma representação fiel.

Definição 2.1.26. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Define-se em $\mathfrak{g}$ a forma bilinear $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ dada por $(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y))$. A forma $(\cdot,\cdot)$ é chamada de *forma de Cartan-Killing* de $\mathfrak{g}$.

Definição 2.1.27. Uma forma bilinear $(\cdot,\cdot)$ em $\mathfrak{g}$ é *invariante* se $(x, [y, z]) = ([x, y], z)$ para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Proposição 2.1.28. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é simétrica e invariante.

Definição 2.1.29. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Define-se por indução os seguintes ideais de $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$. Por construção, $\mathfrak{g}^{(k)} \supseteq \mathfrak{g}^{(k+1)}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Assim os ideais $\mathfrak{g}^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, formam uma cadeia descendente, chamada de *série derivada de* $\mathfrak{g}$. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *solúvel* se $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definição 2.1.30. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, considere os ideais definidos indutivamente por: $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$. Por construção, $\mathfrak{g}^k \supseteq \mathfrak{g}^{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Assim os ideais $\mathfrak{g}^k$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, também formam uma cadeia descendente, chamada de *série central descendente de* $\mathfrak{g}$. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *nilpotente* se $\mathfrak{g}^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Um simples argumento de indução mostra que $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Logo, se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ solúvel.

Exemplo 2.1.31. As álgebras de Lie $\mathfrak{n}_k$ são nilpotentes para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Exemplo 2.1.32. As álgebras de Lie $\mathfrak{t}_n$ são solúveis (mas não nilpotentes) para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Exemplo 2.1.33. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é abeliana se, e somente se, $\mathfrak{g}' = \{0\}$. Logo, se $\mathfrak{g}$ é abeliana, então $\mathfrak{g}$ é solúvel e nilpotente.

Proposição 2.1.34. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.

(i) Se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então toda subálgebra e quociente de $\mathfrak{g}$ é solúvel.

(ii) Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então toda subálgebra e quociente de $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

Proposição 2.1.35. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então existe um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$.

Definição 2.1.36. O ideal $\mathfrak{r}$ da Proposição 2.1.35 é chamado de *radical solúvel de* $\mathfrak{g}$, e será denotado por $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Observe que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Definição 2.1.37. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *semissimples* se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, ou seja, se $\mathfrak{g}$ não possui ideais solúveis além de $\{0\}$.

Observe que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples, então $\mathfrak{g}$ é semissimples.

O centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um ideal abeliano de $\mathfrak{g}$, em particular, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}$. Logo, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra semissimples, então $\ker \operatorname{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ e assim ad é uma representação fiel de $\mathfrak{g}$.

Proposição 2.1.38. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero. Então, são equivalentes:

(i) $\mathfrak{g}$ é semissimples;

(ii) a forma de Cartan-Killing $(\cdot,\cdot)$ de $\mathfrak{g}$ é não degenerada;

(iii) $\mathfrak{g}$ se decompõe em soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_n$, onde $\mathfrak{i}_j$ é um ideal simples de $\mathfrak{g}$, $j = 1, \ldots, n$. Além disso, $[\mathfrak{i}_j, \mathfrak{i}_k] = 0$, se $j \neq k$, essa decomposição é única, a menos de permutação dos índices, e todo ideal de $\mathfrak{g}$ é soma de algumas dessas componentes.

2.1.2 Representações de álgebras nilpotentes e solúveis

Nesta subseção todas as álgebras de Lie serão de dimensão finita sobre um corpo de característica zero.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se $\mathfrak{g}^k = 0$, para algum $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, ou seja, se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então $\mathrm{ad}(x)^k = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Assim, $\mathrm{ad}(x)$ é nilpotente, para todo $x \in \mathfrak{g}$. A recíproca desse fato também é verdadeira para álgebras de Lie de dimensão finita:

Teorema 2.1.39 (Engel)**.** Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se $\mathrm{ad}(x)$ é nilpotente, para todo $x \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente.

Corolário 2.1.40. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ é uma álgebra de Lie tal que todo $x \in \mathfrak{g}$ é nilpotente, então existe uma base de V na qual a matriz de x é estritamente triangular superior para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Teorema 2.1.41. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente sobre um corpo algebricamente fechado e ρ uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ em V. Então existem funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de $\mathfrak{g}$ tais que cada subespaço

$$V_{\lambda_i} := \{v \in V : \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}, \text{ existe } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ tal que } (\rho(x) - \lambda_i(x)\mathrm{Id}_V)^n(v) = 0\}$$

é $\mathfrak{g}$-invariante, isto é, $\rho(x)V_{\lambda_i} \subseteq V_{\lambda_i}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, e $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$.

Teorema 2.1.42 (Lie)**.** Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie solúvel. Então, existem uma base de V e funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathfrak{g}$ tais que, em relação a essa base, a matriz de todo $x \in \mathfrak{g}$ é uma matriz triangular superior da forma

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(x) \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Módulos sobre uma álgebra de Lie

Definição 2.1.43. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um $\mathfrak{g}$-*módulo* é um espaço vetorial V, munido com uma operação (ação) $\cdot : \mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto x \cdot v$, ou apenas $(x, v) \mapsto xv$, tal que:

(i) $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$, $a, b \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$;

(ii) $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w)$, $a, b \in \mathbb{K}$, $x \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$;

(iii) $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Os conceitos de $\mathfrak{g}$-módulo e representação de $\mathfrak{g}$ são equivalentes. Se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, então V se torna um $\mathfrak{g}$-módulo definindo $x \cdot v = \rho(x)v$. Reciprocamente, dado um $\mathfrak{g}$-módulo V, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ definida por $\rho(x)v = x \cdot v$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Como antes, usaremos mais a linguagem de $\mathfrak{g}$-módulo por simplicidade.

Definição 2.1.44. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Um subespaço W de V é um $\mathfrak{g}$-*submódulo* de V se W é invariante sob a ação de $\mathfrak{g}$, isto é, $xw \in W$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Um $\mathfrak{g}$-módulo $V \neq \{0\}$ é *irredutível* se possui exatamente dois $\mathfrak{g}$-submódulos, a saber $\{0\}$ e V. Um $\mathfrak{g}$-módulo V é *indecomponível* se não existem dois $\mathfrak{g}$-submódulos próprios W_1 e W_2 de V tais que $V = W_1 \oplus W_2$.

Proposição 2.1.45. Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo e W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, então o espaço vetorial quociente V/W tem estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo com a ação dada por

$$x(v + W) = xv + W$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Neste caso V/W é chamado de $\mathfrak{g}$-*módulo quociente de V por W*.

Proposição 2.1.46. Sejam $V_1, \ldots, V_n$ $\mathfrak{g}$-módulos. Então a soma direta de espaços vetoriais $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ tem estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo com ação dada por

$$x(v_1 + \cdots + v_n) = xv_1 + \cdots + xv_n$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v_1 + \cdots + v_n \in V$. Neste caso V é chamado de $\mathfrak{g}$-módulo dado pela *soma direta* dos $\mathfrak{g}$-módulos $V_1, \ldots, V_n$.

Definição 2.1.47. Um $\mathfrak{g}$-módulo V é *completamente redutível* se V é uma soma direta de $\mathfrak{g}$-submódulos irredutíveis.

Proposição 2.1.48. Sejam $V_1, \ldots, V_n$ $\mathfrak{g}$-módulos. Então o produto tensorial de espaços vetoriais $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ tem estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo com ação dada por extensão linear de

$$x(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = xv_1 \otimes \cdots \otimes v_n + \cdots + v_1 \otimes \cdots \otimes xv_i \otimes \cdots \otimes v_n + \cdots + v_1 \otimes \cdots \otimes xv_n$$

para $x \in \mathfrak{g}$ e $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V$. O $\mathfrak{g}$-módulo V é chamado de $\mathfrak{g}$-módulo dado pelo *produto tensorial* dos $\mathfrak{g}$-módulos $V_1, \ldots, V_n$.

Proposição 2.1.49. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Então o espaço vetorial dual V^* tem estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo com a ação dada por

$$(x\lambda)(v) = -\lambda(xv)$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in V^*$ e $v \in V$. O $\mathfrak{g}$-módulo V^* é chamado de *$\mathfrak{g}$-módulo dual de V*.

Definição 2.1.50. Um *homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos* é uma transformação linear $\varphi : V \to W$ tal que $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Quando φ é um isomorfismo de espaços vetoriais, dizemos que φ é um *isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos*.

O núcleo e a imagem de um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos são $\mathfrak{g}$-submódulos e valem os teoremas de isomorfismos.

2.1.4 Álgebra universal envelopante

A álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g})$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma álgebra associativa (com identidade) associada a $\mathfrak{g}$. Ela é uma ferramenta muito importante para o estudo de representações de álgebras de Lie, já que transfere o contexto de representações de uma álgebra de Lie para o contexto de representações de uma álgebra associativa (com identidade).

Definição 2.1.51. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Define-se a *álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$*, e denota-se por $U(\mathfrak{g})$, como sendo o quociente da álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ pelo ideal bilateral gerado pelo subconjunto $\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in \mathfrak{g}\}$.

A partir de agora, para simplificar a notação, vamos omitir o símbolo $\otimes$ referente ao produto em $U(\mathfrak{g})$.

Exemplo 2.1.52. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie abeliana. Então $U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ a álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$.

Considere $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ a transformação linear dada pela composição das funções canônicas $\mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$. Observe que $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$, ou seja, i é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Proposição 2.1.53. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$. A álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g})$ satisfaz a seguinte propriedade universal: dados uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa (com identidade) A e um homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to A$ existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\phi : U(\mathfrak{g}) \to A$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Além disso o par $(U(\mathfrak{g}), i)$ é único, a menos de isomorfismo, satisfazendo essa propriedade. Mais precisamente, se (B, j) é um par, onde B é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa (com identidade) e $j : \mathfrak{g} \to B$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, tal que (B, j) satisfaz essa propriedade universal, então existe um único isomorfismo de álgebras $\psi : U(\mathfrak{g}) \to B$ tal que $\psi \circ i = j$.

Um fato importante na teoria de representações de álgebras de Lie é que estudar representações de $\mathfrak{g}$ é equivalente a estudar representações da álgebra associativa $U(\mathfrak{g})$, pois dada uma representação $\rho : U(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$, obtém-se uma representação $\rho' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ definindo $\rho' = \rho \circ i$, e reciprocamente, dada uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, devido a propriedade universal, obtém-se uma representação $\rho' : U(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que $\rho' \circ i = \rho$. Em linguagem de categorias, a categoria dos $\mathfrak{g}$-módulos é equivalente à categoria dos $U(\mathfrak{g})$-módulos.

Pode-se definir uma filtração na álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g})$ do seguinte modo:

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, considere

$$U^{(n)}(\mathfrak{g}) = \pi(T^0(\mathfrak{g}) \oplus T^1(\mathfrak{g}) \oplus \cdots \oplus T^n(\mathfrak{g})),$$

onde $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ é a projeção canônica. Claramente

(i) $U^{(n)}(\mathfrak{g}) \subseteq U^{(m)}(\mathfrak{g})$ para todos $n \leq m$ em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$;

(ii) $U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} U^{(n)}(\mathfrak{g})$;

(iii) $U^{(n)}(\mathfrak{g})U^{(m)}(\mathfrak{g}) \subseteq U^{(n+m)}(\mathfrak{g})$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Logo $\{U^{(n)}(\mathfrak{g})\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ define uma filtração em $U(\mathfrak{g})$. Assim pode-se considerar a álgebra graduada associada $G(U(\mathfrak{g}))$.

Um resultado central sobre as álgebras universais envelopantes é o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, ou apenas PBW:

Teorema 2.1.54 (PBW)**.** A álgebra graduada associada $G(U(\mathfrak{g}))$ é isomorfa à álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$.

O próximo corolário é na verdade equivalente ao Teorema 2.1.54 e muitas vezes ele próprio é chamado de Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Ele fornece uma base para $U(\mathfrak{g})$ a partir de uma base de $\mathfrak{g}$.

Corolário 2.1.55. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ e $\{x_j : j \in J\}$ uma $\mathbb{K}$-base de $\mathfrak{g}$. Fixe uma ordem total em J. Então o conjunto dos elementos

$$x_{j_1}^{k_1} x_{j_2}^{k_2} \ldots x_{j_m}^{k_m},$$

tais que $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, onde $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $j_i \in J$ e $k_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ para todo $i = 1, \ldots, m$, é uma $\mathbb{K}$-base de $U(\mathfrak{g})$.

Corolário 2.1.56. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ é injetora.

Devido ao Corolário 2.1.56, $\mathfrak{g}$ é isomorfa a uma subálgebra de Lie de $U(\mathfrak{g})$. Assim podemos identificar $\mathfrak{g}$ com $i(\mathfrak{g})$ e dizer que $\mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g})$.

Dadas uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $x \in \mathfrak{g}$, denota-se por $U(x)$ a álgebra universal envelopante da subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por x. Segue do Corolário 2.1.55 que $U(x) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{K}x^k$.

2.1.5 Geradores e relações

Definição 2.1.57. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathbb{K}$ um corpo. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ é *livre sobre* X se existe uma função $i : X \to \mathfrak{g}$ tal que o par $(\mathfrak{g}, i)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: dadas uma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ sobre $\mathbb{K}$ e uma função $\varphi : X \to \mathfrak{h}$, existe um único homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{g} \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ \mathfrak{h} & \end{tikzcd}$$

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Para qualquer conjunto X, existe uma única, a menos de isomorfismo, álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ livre sobre X.

De fato, para existência, considere o espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ com base X e sua álgebra tensorial $T(V)$, vista como álgebra de Lie. Seja $\mathcal{L}(X)$ a subálgebra de Lie de $T(V)$ gerada por X (interseção de todas as subálgebras de Lie de $T(V)$ que contêm X). Dadas uma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ sobre $\mathbb{K}$ e uma função $\varphi : X \to \mathfrak{h}$, estenda φ para uma transformação linear $\bar{\varphi} : V \to \mathfrak{h}$ $(\subseteq U(\mathfrak{h}))$, então estenda $\bar{\varphi}$ para um homomorfismo de álgebras $\bar{\bar{\varphi}} : T(V) \to U(\mathfrak{h})$. Considere ϕ a restrição $\bar{\bar{\varphi}} : \mathcal{L}(X) \to \mathfrak{h}$ (isso é possível pois ϕ leva os geradores de $\mathcal{L}(X)$ (o conjunto X) em $\mathfrak{h}$). Então, dado $x \in X$,

$$\phi \circ i(x) = \phi(x) = \bar{\bar{\varphi}}(x) = \bar{\varphi}(x) = \varphi(x),$$

onde $i : X \to \mathcal{L}(X)$ é a inclusão. Logo ϕ é tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{L}(X) \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ \mathfrak{h} & \end{tikzcd}$$

Além disso, ϕ é única que comuta o diagrama acima, pois se $\bar{\phi}$ é tal que $\bar{\phi} \circ i = \varphi$, então

$$\bar{\phi} \circ i(x) = \varphi(x) = \phi \circ i(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Assim, ϕ e $\bar{\phi}$ coincidem em X. Agora, o conjunto dos elementos de $\mathcal{L}(X)$ tais que ϕ e $\bar{\phi}$ coincidem é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(X)$ que contém X. Logo, ϕ e $\bar{\phi}$ coincidem em $\mathcal{L}(X)$.

Para a unicidade, suponha que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $j : X \to \mathfrak{g}$ é uma função tal que o par $(\mathfrak{g}, j)$ satistaz a propriedade universal da Definição 2.1.57. Então, para $i : X \to \mathcal{L}(X)$, existe um único homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(X)$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{g} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ \mathcal{L}(X) & \end{tikzcd}$$

Além disso, para $j : X \to \mathfrak{g}$, existe um único homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathcal{L}(X) \to \mathfrak{g}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{L}(X) \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ \mathfrak{g} & \end{tikzcd}$$

Então,

$$\varphi \circ \phi \circ i = \varphi \circ j = i,$$

logo $\psi = \varphi \circ \phi$ é um homomorfismo de álgebras de Lie que comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{L}(X) \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ \mathcal{L}(X) & \end{tikzcd}$$

Mas $\psi = Id_{\mathcal{L}(X)}$ também comuta o diagrama acima. Como ψ é única, tem-se $\psi = \varphi \circ \phi = Id_{\mathcal{L}(X)}$. Analogamente mostra-se que $\phi \circ \varphi = Id_{\mathfrak{g}}$. Portanto φ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Fixe um corpo $\mathbb{K}$. Dado um conjunto X, a álgebra de Lie (sobre $\mathbb{K}$) livre sobre X será denotada por $\mathcal{L}(X)$.

Definição 2.1.58. Fixe um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $X = \{x_j : j \in J\}$ um conjunto e $R = \{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{L}(X)$. Define-se a *álgebra de Lie dada por geradores x_j, $j \in J$, e relações $r_\lambda = 0$, $\lambda \in \Lambda$,* como sendo o quociente de $\mathcal{L}(X)$ pelo ideal de $\mathcal{L}(X)$ gerado por R.

Definição 2.1.59. Considere $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Define-se o *$\mathfrak{g}$-módulo (ou $U(\mathfrak{g})$-módulo) dado por geradores v_j, $j \in J$, e relações $r_\lambda v_j = 0$, $\lambda \in \Lambda$, $j \in J$,* onde $r_\lambda \in U(\mathfrak{g})$, como sendo o quociente de $U(\mathfrak{g})^{\oplus |J|}$ pelo ideal à esquerda gerado por $\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Neste caso v_j é a imagem nesse quociente do elemento de $U(\mathfrak{g})^{\oplus |J|}$ que tem 1 na j-ésima coordenada e 0 nas demais.

Observação 2.1.60. Qualquer $\mathfrak{g}$-módulo V gerado por v_j, $j \in J$, (isto é, todo vetor $v \in V$ é uma combinação linear (finita) dos vetores v_j, $j \in J$, com coeficientes em $U(\mathfrak{g})$) onde valem as relações $r_\lambda v_j = 0$, $\lambda \in \Lambda$, $j \in J$, é isomorfo a um quociente do $\mathfrak{g}$-módulo dado pela Definição 2.1.59.

Neste texto aparecerão $\mathfrak{g}$-módulos gerados por um vetor v satisfazendo algumas relações, o que é o caso particular da Definição 2.1.59 quando $|J| = 1$.

2.1.6 Subálgebras de Cartan

As subálgebras de Cartan desempenham um papel fundamental na teoria de álgebras semissimples, por isso serão apresentadas aqui algumas definições e propriedades relacionadas a ela. Nesta subseção toda álgebra de Lie será de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Definição 2.1.61. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma *subálgebra de Cartan* é uma subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ nilpotente que satisfaz $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dado $x \in \mathfrak{g}$, considere $\mathfrak{g}_0(x)$ o autoespaço generalizado de $\mathrm{ad}(x)$ associado ao autovalor 0, isto é,

$$\mathfrak{g}_0(x) = \{y \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(x)^n(y) = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Um elemento $x \in \mathfrak{g}$ é chamado de *regular* se $\dim \mathfrak{g}_0(x)$ é o mínimo de $\{\dim \mathfrak{g}_0(y) : y \in \mathfrak{g}\}$. Logo, toda álgebra de Lie contém elemento regular.

Teorema 2.1.62. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se $x \in \mathfrak{g}$ é um elemento regular, então $\mathfrak{g}_0(x)$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Reciprocamente, se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Cartan, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(x)$ para algum elemento regular $x \in \mathfrak{g}$.

Teorema 2.1.63. Se $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ são subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ são conjugadas por um automorfismo de $\mathfrak{g}$, isto é, existe um automorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.

Definição 2.1.64. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Define-se o *posto* de $\mathfrak{g}$ como sendo a dimensão de uma (e portanto de toda) subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Proposição 2.1.65. Sejam $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, n$, álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{h}_i \subseteq \mathfrak{g}_i$ subálgebras de Cartan, $i = 1, \ldots, n$. Então $\mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_n$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. Reciprocamente, se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, então $\pi_i(\mathfrak{h}_i)$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_i$, onde π_i é a projeção canônica de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2.2 Álgebras de Lie semissimples

Nesta seção toda álgebra de Lie será semissimples sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero.

2.2.1 Estrutura

Nesta subseção, quando escrevermos $\mathbb{Q}$ estaremos nos referindo à cópia do corpo dos racionais contida em $\mathbb{K}$.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Então, olhando para $\mathfrak{g}$ como o $\mathfrak{h}$-módulo dado pela representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, segue do Teorema 2.1.41 que $\mathfrak{g}$ tem a seguinte decomposição:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são funcionais não nulos em $\mathfrak{h}$ e cada $\mathfrak{g}_{\lambda_i} \neq 0$ é um subespaço $\mathfrak{h}$-invariante. Os funcionais λ_i, $i = 1, \ldots, k$, são chamados de *raízes* de $\mathfrak{g}$, o conjunto das raízes é chamado de *sistema de raízes de* $\mathfrak{g}$ e será denotado por R. Essa decomposição é conhecida como *decomposição nos espaços de raízes* ou *decomposição de Cartan*.

Observação 2.2.1. Na decomposição nos espaços de raízes feita anteriormente tivemos que fixar (escolher) uma subálgebra de Cartan. Não há perda de generalidade ao se fazer isso, pois além de todas as subálgebras de Cartan serem conjugadas, elas preservam a estrutura da álgebra (diagrama de Dynkin, que veremos a diante).

Proposição 2.2.2. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Então,

(i) Para todo $h \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}(h)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(h)\mathrm{Id}$. Em particular,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}$$

e $\{\mathrm{ad}(h) : h \in \mathfrak{h}\}$ é simultaneamente diagonalizável em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

(ii) A subálgebra $\mathfrak{h}$ é abeliana maximal, isto é, $\mathfrak{h}$ é abeliana e não está contida propriamente em nenhuma subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$.

Devido à forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie semissimples ser não degenerada (Proposição 2.1.38), ela será uma ferramenta essencial na teoria de álgebras semissimples.

Proposição 2.2.3. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Então:

(i) O sistema de raízes R gera $\mathfrak{h}^*$.

(ii) Se $\alpha \in R$ e $c \in \mathbb{K}$, então $c\alpha \in R$ se, e somente se, $c = \pm 1$.

(iii) Se $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq -\beta$, então $\mathfrak{g}_\alpha$ é ortogonal a $\mathfrak{g}_\beta$ em relação à forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$.

(iv) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, para toda $\alpha \in R$.

(v) Se $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq -\beta$, então $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, onde $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$ se $\alpha + \beta \notin R$.

(vi) A restrição $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{h}}$ da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ é não degenerada.

A partir de agora, fixe $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ (e consequentemente um sistema de raízes R).

Como a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ restrita a $\mathfrak{h}$ é não degenerada, ela induz um isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{h}^* \\ h & \mapsto & \alpha_h(\cdot) = (h, \cdot). \end{array}$$

Para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, sua imagem inversa por esse isomorfismo será denotada por h'_α, isto é, h'_α é o único elemento em $\mathfrak{h}$ tal que

$$\alpha(h) = (h'_\alpha, h)$$

para todo $h \in \mathfrak{h}$.

Usando esse isomorfismo, pode-se definir uma forma bilinear em $\mathfrak{h}^*$ que, por abuso de notação, também será denotada por $(\cdot, \cdot)$:

$$(\alpha, \beta) = (h'_\alpha, h'_\beta) = \alpha(h'_\beta) = \beta(h'_\alpha),$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$. Essa forma bilinear é simétrica e não degenerada em $\mathfrak{h}^*$, e também será chamada de forma de Cartan-Killing. Além disso, como R gera $\mathfrak{h}^*$, o conjunto $\{h'_\alpha : \alpha \in R\}$ gera $\mathfrak{h}$.

Proposição 2.2.4. (i) Seja $\alpha \in R$. Se $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[x, y] = (x, y)h'_\alpha$.

(ii) Se $\alpha, \beta \in R$, então $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$.

(iii) Para toda raiz $\alpha \in R$, $(\alpha, \alpha) > 0$.

(iv) Para cada $\alpha \in R$, considere $h_\alpha := \frac{2h'_\alpha}{(h'_\alpha, h'_\alpha)} = \frac{2h'_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$. Dado $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe um único $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Além disso, a subálgebra $\mathfrak{g}(\alpha)$ gerada por $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$ via

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(v) Se $\alpha, \beta \in R$, então $\beta(h_\alpha) = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ e $\beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in R$.

Observação 2.2.5. Segue das Proposições 2.2.3 e 2.2.4 que se $\alpha \in R$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ e $y'_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$, então $[x_\alpha, y'_\alpha]$ é um múltiplo não nulo de h_α. De fato, se $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ é dado pelo item (iv) da Proposição 2.2.4, então $y'_\alpha = cy_\alpha$, com $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ (pois $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$), assim $[x_\alpha, y'_\alpha] = c[x_\alpha, y_\alpha] = ch_\alpha$, $c \neq 0$.

Considere agora $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} := \{a_1\alpha_{i_1} + \cdots + a_k\alpha_{i_k} : a_i \in \mathbb{Q},\ \alpha_i \in R\}$, isto é, $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ é o subespaço vetorial racional de $\mathfrak{h}^*$ gerado pelas raízes.

Proposição 2.2.6. (i) $\dim \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} = \dim \mathfrak{h}^*$.

(ii) A forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{h}^*$ restrita a $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ é um produto interno, isto é, é uma forma bilinear simétrica, não degenerada e positiva definida.

Adiante vamos precisar da seguinte notação. Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ define-se

$$\lambda^\vee = \frac{2h'_\lambda}{(\lambda, \lambda)}.$$

Observe que, se α é uma raiz, então $\alpha^\vee = h_\alpha$.

2.2.2 Sistema de raízes, grupo de Weyl e classificação

No que segue, serão considerados os sistemas de raízes, que representam uma abstração das propriedades de um sistema de raízes de uma álgebra de Lie (conjunto das raízes de uma subálgebra de Cartan). Nessa subseção E será um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensão finita munido de um produto interno $(\cdot, \cdot)$.

Dado um vetor não nulo $\alpha \in E$, σ_α denotará a reflexão ortogonal relativa ao hiperplano normal a α, $P_\alpha = \{\beta \in E : (\beta, \alpha) = 0\}$. Explicitamente,

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \quad \text{para todo } \beta \in E,$$

já que σ_α assim definida fixa os pontos de P_α e satisfaz $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Além disso σ_α é uma transformação linear invertível e preserva o produto interno, isto é, para todos $\beta, \gamma \in E$, $(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\gamma)) = (\beta, \gamma)$.

Definição 2.2.7. Um subconjunto $R \subseteq E$ é um *sistema de raízes* se:

(i) R é finito, gera E e não contém 0.

(ii) Se $\alpha \in R$, então os únicos múltiplos escalares de α em R são $\pm\alpha$.

(iii) Se $\alpha \in R$, então a reflexão σ_α deixa R invariante, ou seja, σ_α permuta os elementos de R.

(iv) Se $\alpha, \beta \in R$, então $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Os elementos de R são chamados de *raízes*.

Observe que, devido as Proposições 2.2.3, 2.2.4 e 2.2.6, o sistema de raízes de uma álgebra de Lie definido na Subseção 2.2.1 é um sistema de raízes no sentido da Definição 2.2.7.

Definição 2.2.8. Sejam $(E_1, (\cdot,\cdot)_1)$, $(E_2, (\cdot,\cdot)_2)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{Q}$ de dimensão finita com produto interno e R_1, R_2 sistemas de raízes de E_1, E_2, respectivamente. Um *isomorfismo* entre os sistemas de raízes R_1 e R_2 é um isomorfismo linear $\varphi : E_1 \to E_2$ tal que $\varphi(R_1) = R_2$ e $(\alpha, \beta)_1 = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_2$ para todos $\alpha, \beta \in R_1$.

Definição 2.2.9. Um subconjunto $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ de R é uma *base de* R se:

(i) B é base para E;

(ii) para toda raiz $\alpha \in R$, as coordenadas de α com relação a B são todas inteiras não negativas ou todas inteiras não positivas.

Teorema 2.2.10. Se R é um sistema de raízes de E, então existe base para R.

Seja B uma base para um sistema de raízes R. As raízes em B são chamadas de *raízes simples* (em relação a B). Se $\alpha \in R$ tem coordenadas inteiras não negativas com relação a B, α é chamada de *raiz positiva*, e se $\alpha \in R$ tem coordenadas inteiras não positivas com relação a B, α é chamada de *raiz negativa*. Denota-se por R^+ o conjunto das raízes positivas e por R^- o conjunto das raízes negativas. Claramente $R = R^+ \cup R^-$ e $R^+ = -R^-$. A *altura* de uma raiz $\alpha = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$ é definida como $\mathrm{ht}\alpha = n_1 + \cdots + n_l$.

Fixada uma base, define-se em R a ordem parcial $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\beta - \alpha$ é uma soma de raízes positivas, ou equivalentemente, uma soma de raízes simples. No caso de sistema de raízes de uma álgebra de Lie define-se essa ordem parcial em $\mathfrak{h}^*$.

Dadas $\alpha, \beta \in R$, denotamos $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = 2\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre α e β.

Proposição 2.2.11. Se α e β são raízes, então:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

Definição 2.2.12. Seja R um sistema de raízes em E. O *grupo de Weyl* de R é o subgrupo de $\mathrm{Aut}(E)$ gerado pelas reflexões σ_α, $\alpha \in R$, e será denotado por $\mathcal{W}$.

Proposição 2.2.13. O grupo de Weyl de um sistema de raízes é finito.

Teorema 2.2.14. Sejam R um sistema de raízes de E, $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ uma base para E, R^+ o conjunto das raízes positivas relativo a B e $\mathcal{W}$ o grupo de Weyl de R. Então:

(i) $\sigma_{\alpha_i}(R^+ \setminus \{\alpha_i\}) = R^+ \setminus \{\alpha_i\}$ para todo $i = 1, \ldots, l$.

(ii) Se B' é outra base de R, então existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(B') = B$ (isto é, $\mathcal{W}$ age transitivamente no conjunto das bases de R).

(iii) Se $w(B) = B$, para algum $w \in \mathcal{W}$, então $w = 1$.

(iv) $\mathcal{W}$ é gerado pelas reflexões σ_{α_i}, $i = 1, \ldots, l$.

(v) Se $\alpha \in R$, então existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(\alpha) = \alpha_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Definição 2.2.15. O *posto* de um sistema de raízes R é a cardinalidade de uma (e portanto de toda) base B de R.

Observação 2.2.16. O posto de um sistema de raízes R de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ coincide com o posto de $\mathfrak{g}$, já que uma base B de R será base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ e $\dim \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} = \dim \mathfrak{h}^* = \dim \mathfrak{h}$.

A partir de agora fixe uma base $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ de R.

Por simplicidade, denote por σ_i a reflexão σ_{α_i} em relação a uma raiz simples α_i, $i = 1, \ldots, l$. σ_i é chamada de *reflexão simples*, $i = 1, \ldots, l$. Pelo item (iv) do Teorema 2.2.14, $\mathcal{W}$ é gerado pelas reflexões simples. Dado $w \in \mathcal{W}$, define-se o *comprimento* de w, e denota-se por $l(w)$, como sendo o número minimal k tal que w pode ser escrito como produto de k reflexões simples $\sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k}$, e, por definição, $l(1) = 0$. Agora, denote por $n(w)$ o número de raízes positivas que são levadas em negativas por w, isto é,

$$n(w) = |R^+ \cap (w^{-1}R^-)|.$$

Os números $l(w)$ e $n(w)$ estão relacionados, como diz a seguinte proposição:

Proposição 2.2.17. Sejam R um sistema de raízes e $\mathcal{W}$ o seu grupo de Weyl. Então:

(i) $n(w) = l(w)$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

(ii) $\mathcal{W}$ tem um único elemento w_0 de comprimento máximo $l(w_0) = |R^+|$.

(iii) $w_0(R^+) = R^-$ e $w_0^2 = 1$.

Definição 2.2.18. A *matriz de Cartan* de R é a matriz $C = (c_{ij})_{l\times l}$ com $c_{ij} = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$.

Proposição 2.2.19. Seja $C = (c_{ij})_{l\times l}$ a matriz de Cartan de R. Então, para $1 \leq i, j \leq l$:

(i) $c_{ii} = 2$;

(ii) $c_{ij} = 0, -1, -2, -3$, para todo $i \neq j$;

(iii) se $c_{ij} = -2$ ou $c_{ij} = -3$, então $c_{ji} = -1$;

(iv) $c_{ij} = 0$ se, e somente se, $c_{ji} = 0$.

Definição 2.2.20. Seja $C = (c_{ij})_{l\times l}$ a matriz de Cartan de R. O *diagrama de Dynkin* de R é um grafo com l vértices, onde os vértices distintos i e j são ligados por $c_{ij}c_{ji}$ arestas e, se $c_{ij}c_{ji} > 1$, então uma flecha aponta para i ou j conforme α_i ou α_j seja a raiz de menor comprimento, isto é, uma flecha aponta para i se $|c_{ij}| > 1$.

Observe que a matriz de Cartan e o diagrama de Dynkin de R não dependem de B, uma vez que $\mathcal{W}$ permuta as bases de R, e $\mathcal{W}$ é formado por isometrias de E, logo preserva ângulos e comprimentos dos vetores de B.

Teorema 2.2.21. Sejam $\alpha, \beta \in R^+$ tais que $\alpha \neq \pm\beta$. Se p e q são os maiores inteiros não negativos tais que $\beta - p\alpha$ e $\beta + q\alpha$ são raízes, respectivamente, então todos os elementos da seguinte sequência, chamada de *α-sequência iniciada em β*,

$$\beta - p\alpha, \dots,\ \beta - \alpha,\ \beta,\ \beta + \alpha, \dots,\ \beta + q\alpha$$

são raízes. Além disso,

$$p - q = \langle \beta, \alpha \rangle.$$

Lema 2.2.22. Seja $\beta \in R^+$. Então β pode ser escrita da forma

$$\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$$

com α_{i_j} raiz simples de modo que as somas parciais $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}$, $s = 1, \dots, k$, são raízes positivas.

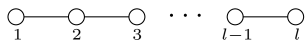
Observação 2.2.23. Dada a matriz de Cartan (ou o diagrama de Dynkin) de um sistema de raízes, a partir do Teorema 2.2.21 e do Lema 2.2.22 pode-se encontrar todas as raízes positivas (e assim todas as raízes) de R. Basta encontrar as raízes de altura um (as simples), depois encontra-se as de altura dois somando-se raízes simples nas de altura um (quando for possível), e assim sucessivamente até que não exista raiz de uma dada altura.

Definição 2.2.24. Um sistema de raízes R é *irredutível* se o seu diagrama de Dynkin é conexo e R é *redutível* caso contrário.

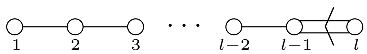
Proposição 2.2.25. Seja R um sistema de raízes. Então E se decompõe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, em soma de subespaços dois a dois ortogonais e $R = R_1 \dot\cup \cdots \dot\cup R_n$, de maneira única, de modo que R_i é um sistema de raízes irredutível em E_i e os diagramas de Dynkin de $R_1, \dots, R_n$ são as componentes conexas do diagrama de Dynkin de R.

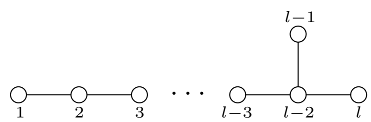
Com isso, basta classificar os diagramas de Dynkin dos sistemas de raízes irredutíveis (os conexos) e assim obtém-se todos os possíveis diagramas de Dynkin de um sistema de raízes (uniões disjuntas finitas dos conexos).

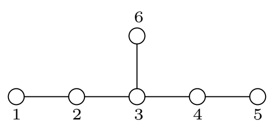
Teorema 2.2.26. Seja R um sistema de raízes irredutível. Então o diagrama de Dynkin de R é um dos seguintes:

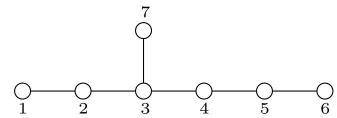
A_l, $l \geq 1$: 

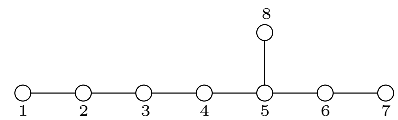
B_l, $l \geq 2$: 

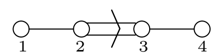
C_l, $l \geq 3$: 

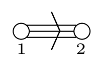
D_l, $l \geq 4$: 

E_6: 

E_7: 

E_8: 

F_4: 

G_2: 

As matrizes de Cartan correspondentes são:

$$A_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E_7 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.2.27. (i) Cada um dos diagramas A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 é o diagrama de Dynkin de um sistema de raízes.

(ii) Dois sistemas de raízes R_1 e R_2 são isomorfos se, e somente se, R_1 e R_2 têm o mesmo diagrama de Dynkin.

Proposição 2.2.28. Seja R um sistema de raízes irredutível. Então:

(i) Existe uma única raiz maximal θ com relação a ordem parcial definida em R. Além disso θ é raiz positiva e $\mathrm{ht}\alpha < \mathrm{ht}\theta$ para toda $\alpha \in R \setminus \{\theta\}$.

(ii) Quando o diagrama de Dynkin de R possui ligações duplas ou triplas, existem 2 comprimentos de raízes em R, e todas as raízes do mesmo comprimento são conjugadas sobre $\mathcal{W}$. Caso contrário (o diagrama de Dynkin só possui ligações simples), todas as raízes têm o mesmo comprimentos e são conjugadas sobre $\mathcal{W}$.

(iii) Se o diagrama de Dynkin de R possui ligações duplas ou triplas, então a raiz maximal θ é longa (veja a definição a seguir).

Definição 2.2.29. Quando o diagrama de Dynkin de R possui ligações duplas ou triplas, uma raiz é chamada de raiz *curta* ou *longa* conforme seu comprimento seja o menor ou o maior dentre os dois existentes, respectivamente.

Observe que se o sistema raízes R possuir raízes curtas e longas, então o conjunto das raízes curtas é um sistema de raízes.

Teorema 2.2.30 (Serre)**.** Sejam R um sistema de raízes, $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ uma base de R, $I = \{1, \ldots, l\}$ e $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero. Considere $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ dada por geradores x_i^+, x_i^-, h_i, $i \in I$, e relações:

(i) $[h_i, h_j] = 0$ para todos $i, j \in I$;

(ii) $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_j$ para todos $i, j \in I$;

(iii) $[h_i, x_j^+] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \, x_j^+$, $[h_i, x_j^-] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \, x_j^-$, para todos $i, j \in I$;

(iv) $(\mathrm{ad}(x_i^+))^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}(x_j^+) = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$;

(v) $(\mathrm{ad}(x_i^-))^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}(x_j^-) = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

Então $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita. Além disso, o subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ gerado por $\{h_i : i \in I\}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ com sistema de raízes correspondente isomorfo a R.

Proposição 2.2.31. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ são subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$, então os diagramas de Dynkin associados aos sistemas de raízes R_1 e R_2 determinados por $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$, respectivamente, coincidem.

Com isso não há ambiguidade em definir o diagrama de Dynkin de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como sendo o diagrama de Dynkin de um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Além disso:

Teorema 2.2.32. Duas álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ são isomorfas se, e somente se, $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ têm o mesmo diagrama de Dynkin.

Proposição 2.2.33. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então:

(i) O diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ é conexo se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é simples.

(ii) Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ é a decomposição de $\mathfrak{g}$ em soma direta de ideais simples, então o diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ é uma união disjunta de n componentes (conexas) que são os diagramas de Dynkin de $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$.

Devido aos Teoremas 2.2.26 e 2.2.27, obtém-se a classificação dos diagramas de Dynkin conexos. Assim, o Teorema 2.2.32, a Proposição 2.2.33 e o Teorema de Serre fornecem a classificação das álgebras de Lie simples (de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero) e consequentemente das álgebras de Lie semissimples (de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero).

A partir de agora diremos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é do tipo A_l, B_l, C_l, D_l, E_7, E_8, F_4, G_2, se o diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ é do tipo A_l, B_l, C_l, D_l, E_7, E_8, F_4, G_2, respectivamente.

As álgebras de Lie dos tipos A_l, B_l, C_l e D_l são chamadas de *álgebras clássicas*, e, as álgebras de Lie dos tipos E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2 são chamadas de *álgebras excepcionais*.

A seguir tem-se uma realização concreta das álgebras clássicas:

Proposição 2.2.34. (i) $\mathfrak{sl}_{l+1}$ é do tipo A_l, $l \geq 1$.

(ii) $\mathfrak{so}_{2l+1}$ é do tipo B_l, $l \geq 2$.

(iii) $\mathfrak{sp}_l$ é do tipo C_l, $l \geq 3$.

(iv) $\mathfrak{so}_{2l}$ é do tipo D_l, $l \geq 4$.

2.3 Representações de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita

Nesta seção $\mathfrak{g}$ será uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero. Fixaremos alguns elementos: $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, R o sistema de raízes associado, $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ uma base para R e $\mathcal{W}$ o seu grupo de Weyl. Dada $\alpha \in R^+$, denote por $x_\alpha^\pm$ elementos não nulos de $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha = \frac{2h'_\alpha}{(h'_\alpha, h'_\alpha)} = \frac{2h'_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ (e assim a subálgebra gerada por $\{x_\alpha^+, x_\alpha^-, h_\alpha\}$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$). Se $\alpha, \beta \in R^+$ são tais que $\alpha + \beta \in R^+$, então $[\mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \mathfrak{g}_{\pm\beta}] = \mathfrak{g}_{\pm\alpha\pm\beta}$, em particular $[x_\alpha^\pm, x_\beta^\pm]$ é um gerador não nulo de $\mathfrak{g}_{\pm\alpha\pm\beta}$ (tem dimensão um), assim vamos simplesmente escrever $[x_\alpha^\pm, x_\beta^\pm] = x_{\alpha+\beta}^\pm$. Além disso, denote por $I = \{1, \ldots, l\}$ o conjunto dos vértices do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$, $x_i^\pm = x_{\alpha_i}^\pm$, $h_i = h_{\alpha_i}$, para todo $i \in I$, e $C = (c_{ij})_{l\times l}$ ($c_{ij} = \alpha_j(h_i)$) a matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$. Como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ é linearmente independente em $\mathfrak{h}^*$, segue que o conjunto $\{h_1, \ldots, h_l\}$ é linearmente independente, logo é uma base de $\mathfrak{h}$. Considere $\mathfrak{n}^\pm := \bigoplus_{\alpha\in R^+} \mathbb{K}x_\alpha^\pm$ e observe que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Note que $\mathfrak{g}$ é gerada (como álgebra de Lie) por $\{x_i^\pm, h_i : i \in I\}$ e esses geradores, chamados de *geradores de Chevalley*, satisfazem as relações do Teorema de Serre.

Definição 2.3.1. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, defina

$$V_\lambda := \{v \in V : hv = \lambda(h)v \ \text{ para todo } \ h \in \mathfrak{h}\}.$$

Se $V_\lambda \neq \{0\}$, λ é chamado de *peso* de V e V_λ é chamado de *espaço de peso* de V. Um vetor não nulo $v \in V_\lambda$ é chamado de *vetor de peso* (de peso λ). Um vetor de peso v é chamado de *vetor de peso máximo* se $\mathfrak{n}^+v = 0$ e v é chamado de *vetor de peso mínimo* se $\mathfrak{n}^-v = 0$. O $\mathfrak{g}$-módulo V é *gerado* por um vetor v se $V = U(\mathfrak{g})v$.

Proposição 2.3.2. Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos gerados por vetores de peso máximo v e w de pesos λ e μ, respectivamente. Então V e W são isomorfos somente se $\lambda = \mu$.

Exemplo 2.3.3. Se $\mathfrak{g}$ é o $\mathfrak{g}$-módulo dado pela representação adjunta, então os pesos de $\mathfrak{g}$ são as raízes e o funcional nulo. O peso máximo desta representação é a raiz maximal.

Proposição 2.3.4. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Então:

(i) $\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$, para toda $\alpha \in R$.

(ii) A soma $W = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$ é direta e W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V.

(iii) Se V tem dimensão finita, então V é a soma direta dos seus espaços de pesos.

(iv) Se V tem dimensão finita e é irredutível, então V é gerado por um vetor de peso máximo.

Definição 2.3.5. Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, define-se o *módulo de Verma de peso máximo* λ como sendo o $\mathfrak{g}$-módulo $M(\lambda)$ gerado por um vetor v satisfazendo as relações:

$$\mathfrak{n}^+ v = 0, \quad hv = \lambda(h)v \qquad \text{para todo } \ h \in \mathfrak{h}.$$

Daí, o módulo de Verma é gerado por um vetor de peso máximo de peso λ.

Segue da Observação 2.1.60 que qualquer outro $\mathfrak{g}$-módulo gerado por um vetor de peso máximo de peso λ é isomorfo a um quociente de $M(\lambda)$.

Teorema 2.3.6. Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(i) Denote $R^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$. Então o conjunto formado pelos vetores da forma

$$(x^-_{\beta_1})^{m_1} \dots (x^-_{\beta_k})^{m_k} v, \quad m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

é uma base de $M(\lambda)$. Em particular, $M(\lambda)$ é a soma direta dos seus espaços de pesos e os pesos de $M(\lambda)$ são da forma

$$\mu = \lambda - \sum_{i \in I} m_i \alpha_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

ou seja, se μ é um peso de $M(\lambda)$, então $\mu \leq \lambda$.

(ii) Para cada $\mu \in \mathfrak{h}^*$, a dimensão de $M(\lambda)_\mu$ é igual ao número de maneiras distintas de expressar $\lambda - \mu$ como soma de raízes positivas. Em particular $\dim M(\lambda)_\lambda = 1$, pois $\lambda - \lambda = 0$ é a soma de 0 raízes positivas, e todo espaço de peso tem dimensão finita.

(iii) Cada $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda)$ é a soma direta dos seus espaços de pesos.

(iv) Todo quociente não trivial de $M(\lambda)$ é um $\mathfrak{g}$-módulo gerado por um vetor de peso máximo de peso λ.

(v) $M(\lambda)$ é indecomponível e tem um único $\mathfrak{g}$-submódulo próprio maximal. Consequentemente, $M(\lambda)$ tem um único quociente irredutível, que é denotado por $V(\lambda)$.

Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível gerado por um vetor de peso máximo de peso λ, então V é um isomorfo a um quociente (irredutível) de $M(\lambda)$, logo Vé isomorfo a $V(\lambda)$. Assim, costuma-se dizer que $V(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}$-*módulo irredutível de peso máximo* λ.

Observação 2.3.7. $V(\lambda)$ é gerado pelos vetores da forma do item (i) do Teorema 2.3.6 e também vale que os pesos de $V(\lambda)$ são da forma

$$\mu = \lambda - \sum_{i \in I} m_i \alpha_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Além disso, $\dim V(\lambda)_\mu \leq \dim M(\lambda)_\mu$.

Exemplo 2.3.8 (Módulos sobre $\mathfrak{sl}_2$)**.** Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Como $I = \{1\}$, denota-se $x^\pm = x_1^\pm$, $h = h_1$ e $\alpha = \alpha_1$ (lembre-se que $\alpha(h) = 2$). Além disso, os funcionais $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ podem ser vistos como elementos de $\mathbb{K}$, identificando $\lambda = \lambda(h)$.

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Pelo item (i) do Teorema 2.3.6, o módulo de Verma sobre $\mathfrak{sl}_2$ é dado por

$$M(\lambda) = \bigoplus_{j\geq 0} \mathbb{K}(x^-)^j v.$$

Em particular todos os espaços de pesos de $M(\lambda)$ têm dimensão 1. Suponha que W seja um submódulo não trivial de $M(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Pelo Teorema 2.3.6, $W = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{K}}(M(\lambda)_\mu \cap W)$ e os pesos de $M(\lambda)$ são da forma $\mu = \lambda - 2m$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, e consequentemente os pesos de W também são dessa forma. Agora, considere $j_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ minimal tal que $(x^-)^{j_0} v \in W$. Se $j_0 = 0$, então $W = M(\lambda)$. Suponha $j_0 > 0$. Pela minimalidade de j_0, temos

$$x^+(x^-)^{j_0} v = j_0(\lambda - (j_0 - 1))(x^-)^{j_0-1} v = 0.$$

Como $j_0 > 0$, temos $(x^-)^{j_0-1} v \neq 0$, logo $\lambda - (j_0 - 1) = 0$, ou seja, $\lambda = j_0 - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $j_0 = \lambda + 1$. Daí concluimos que, se $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, não pode ocorrer $j_0 > 0$, assim $W = M(\lambda)$ é o único submódulo não trivial de $M(\lambda)$, logo $M(\lambda) \cong V(\lambda)$ é irredutível e de dimensão infinita. Se $\lambda = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, então $j_0 = n + 1$ e

$$W = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{K}}(M(\lambda)_\mu \cap W) = \bigoplus_{j\geq n+1} \mathbb{K}(x^-)^j v \cong M(-n-2)$$

é o único submódulo próprio não trivial de $M(\lambda)$. Além disso,

$$V(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{W} = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathbb{K}(x^-)^j v,$$

e $\dim V(\lambda) = n + 1$. Observe que $h(x^-)^j v = (\lambda - 2j)(x^-)^j v = (n - 2j)(x^-)^j v$, logo os pesos de $V(n)$ são $n, n-2, \ldots, -(n-2), -n$.

Agora seja V um $\mathfrak{sl}_2$-módulo irredutível de dimensão finita $n+1$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pelo item (iv) da Proposição 2.3.4, V é gerado por um vetor de peso máximo v_0. Suponha que o peso de v_0 seja λ. Então V é isomorfo a um quociente (irredutível) de $M(\lambda)$, logo $V \cong V(\lambda)$. Como V tem dimensão finita $n + 1$, segue da parte acima que $\lambda = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Assim $V \cong V(n)$. Além disso, se $v_{i+1} = x^- v_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, então $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V tal que $hv_i = (n - 2i)v_i$ e, pode-se provar por indução em i que, $x^+ v_i = i(n - i + 1)v_{i-1}$. Também, suponha $v \in V(n)_\mu \setminus \{0\}$. Se $\mu(h) < 0$, então $(x^+)^{-\mu(h)} v \neq 0$, e se $\mu(h) > 0$, então $(x^-)^{\mu(h)} v \neq 0$.

Definição 2.3.9. Considere $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ a base de $\mathfrak{h}^*$ dual da base $\{h_1, \ldots, h_l\}$ de $\mathfrak{h}$, isto é, $\omega_i(h_j) = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in I$. Os funcionais $\omega_1, \ldots, \omega_l$ são chamados de *pesos fundamentais* de $\mathfrak{g}$. O conjunto

$$P := \{m_1\omega_1 + \cdots + m_l\omega_l : m_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, l\}$$

é chamado de *reticulado de pesos* de $\mathfrak{g}$. Se $\lambda \in P$, então λ é chamado de *peso integral* de $\mathfrak{g}$. Denota-se

$$P^+ := \{m_1\omega_1 + \cdots + m_l\omega_l : m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i = 1, \ldots, l\}.$$

Se $\lambda \in P^+$, então λ é chamado de *peso integral dominante* de $\mathfrak{g}$.

Observe que se $\alpha_i = \sum_k m_{ik}\omega_k$, $m_{ik} \in \mathbb{K}$, então

$$c_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \sum_k m_{ik} \langle \omega_k, \alpha_j \rangle = \sum_k m_{ik}\omega_k(h_j) = m_{ij}.$$

Logo $m_{ik} \in \mathbb{Z}$ e a matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$ é a matriz de mudança de base de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ para $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$.

Teorema 2.3.10. O $\mathfrak{g}$-módulo irredutível $V(\lambda)$ tem dimensão finita se, e somente se, $\lambda \in P^+$.

Corolário 2.3.11. Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita, então V é isomorfo a $V(\lambda)$, para algum $\lambda \in P^+$.

Teorema 2.3.12. Seja $\lambda \in P^+$. Então $V(\lambda)$ é isomorfo ao $U(\mathfrak{g})$-módulo gerado por um vetor (não nulo) v satisfazendo:

$$\mathfrak{n}^+ v = 0, \quad h_i v = \lambda(h_i) v, \quad (x_i^-)^{\lambda(h_i)+1} v = 0, \quad \text{para todo} \quad i \in I. \tag{2.1}$$

Teorema 2.3.13. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Então:

(i) Todo peso de V é conjugado pelo grupo de Weyl a um único peso dominante.

(ii) $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda$ e $\dim V_\lambda = \dim V_{w\lambda}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

(iii) V é completamente redutível. Mais precisamente,

$$V \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^{\oplus m_\lambda(V)}, \ \ m_\lambda(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Definição 2.3.14. Define-se o *suporte* de $\mu \in P$ como sendo o subdiagrama $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq I$ dado por $\operatorname{supp}(\mu) = \{i \in I : \mu(h_i) \neq 0\}$. Se $\mathfrak{g}$ é simples (seu diagrama de Dynkin é conexo), define-se o *fecho conexo* de $\operatorname{supp}(\mu)$, denotado por $\overline{\operatorname{supp}}(\mu)$, como sendo o menor subdiagrama conexo de I que contém $\operatorname{supp}(\mu)$. Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, define-se $\overline{\operatorname{supp}}(\mu)$ como sendo a união dos fechos conexos das restrições de μ a cada componente conexa de I.

Observe que, devido as possíveis formas dos diagramas de Dynkin de $\mathfrak{g}$, para todo $\mu \in P$, $\overline{\operatorname{supp}}(\mu)$ está bem definido, isto é, para todo $\mu \in P$, existe um único subdiagrama de I como na Definição 2.3.14. Isso não ocorre em contextos mais gerais, como por exemplo com os diagramas de Dynkin das álgebras de Kac-Moody afim, que serão vistos adiante.

Definição 2.3.15. Considere $\mathbb{Z}[P]$ o conjunto das $\mathbb{Z}$-combinações lineares de $\{e^\lambda : \lambda \in P\}$. Define-se em $\mathbb{Z}[P]$ um produto da seguinte maneira:

$$\left(\sum_{\lambda\in P} a_\lambda e^\lambda\right)\left(\sum_{\mu\in P} b_\mu e^\mu\right) = \sum_{\lambda,\mu\in P} a_\lambda b_\mu e^{\lambda+\mu}, \quad a_\lambda, b_\mu \in \mathbb{Z}.$$

$\mathbb{Z}[P]$ com essas operações é chamado de *álgebra de grupo de P sobre $\mathbb{Z}$.*

Definição 2.3.16. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. O *caracter* de V é o seguinte elemento de $\mathbb{Z}[P]$

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_{\mu\in P} \dim(V_\mu) e^\mu.$$

Observe que o caracter de um $\mathfrak{g}$-módulo V de dimensão finita está bem definido pois, como V é soma direta de seus espaços de pesos, V tem uma quantidade finita de pesos e seus espaços de pesos têm dimensão finita.

Exemplo 2.3.17. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ e $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pelo Exemplo 2.3.8, os pesos de $V(n)$ são $n, n-2, \ldots, -(n-2), -n$ e todos os espaços de pesos têm dimensão 1. Logo

$$\mathrm{ch}(V(n)) = e^n + e^{n-2} + \cdots + e^{-(n-2)} + e^{-n}.$$

Proposição 2.3.18. O conjunto $\{\mathrm{ch}(V(\lambda)) : \lambda \in P^+\}$ é linearmente independente em $\mathbb{Z}[P]$.

Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita, pelo Teorema 2.3.13,

$$V \cong \bigoplus_{\lambda\in P^+} V(\lambda)^{\oplus m_\lambda(V)}, \;\; m_\lambda(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Logo,

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_{\lambda\in P^+} m_\lambda(V)\mathrm{ch}(V(\lambda)).$$

Daí, assumindo que $\mathrm{ch}(V(\lambda))$ é conhecido, pode-se calcular $\mathrm{ch}(V)$ a partir dos $m_\lambda(V)$ e vice-versa (usando a Proposição 2.3.18).

Teorema 2.3.19 (Fórmula do Caracter de Weyl)**.** Seja $\lambda \in P^+$. Então

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{\sum\limits_{w\in\mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod\limits_{\alpha\in R^+} (1-e^{-\alpha})},$$

onde $\rho = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in R^+} \alpha = \sum\limits_{i\in I} \omega_i$.

Proposição 2.3.20. Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos de dimensão finita. Então

$$\mathrm{ch}(V \otimes W) = \mathrm{ch}(V)\mathrm{ch}(W).$$

Teorema 2.3.21 (Fórmula da Multiplicidade de Kostant)**.** Sejam $\lambda \in P^+$ e $\mu \in P$. Então

$$\dim(V(\lambda)_\mu) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} p(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)),$$

onde $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R^+} \alpha = \sum\limits_{i \in I} \omega_i$ e p é a chamada *função das partições de Kostant*, isto é, $p(\nu)$ é a quantidade de maneiras distintas de se escrever ν como soma de raízes positivas, $\nu \in P$.

Capítulo 3

Álgebras de Kac-Moody e grupos quânticos

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e propriedades básicas sobre Álgebras de Kac-Moody e grupos quânticos, sem demonstrações. As demonstrações e maiores detalhes podem ser encontradas em [22, 26, 2] (álgebras de Kac-Moody) e [21, 18, 25, 8] (grupos quânticos). Neste capítulo $\mathbb{K}$ será um corpo de característica zero.

3.1 Conceitos básicos sobre álgebras de Kac-Moody

Definição 3.1.1. Seja $I = \{1, \ldots, n\}$ um conjunto finito. Uma matriz $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ é uma *matriz de Cartan generalizada* se:

(i) $c_{ii} = 2$ para todo $i \in I$;

(ii) $c_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ para todos $i \neq j$, $i, j \in I$;

(iii) $c_{ij} = 0$ se, e somente se, $c_{ji} = 0$, para todos $i, j \in I$.

Observe que, pela Proposição 2.2.19, a matriz de Cartan definida na Seção 2.2 é uma matriz de Cartan generalizada.

Definição 3.1.2. Uma matriz de Cartan generalizada $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ é *simetrizável* se existem $s_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $i \in I$, tais que $s_i c_{ij} = s_j c_{ji}$ para todos $i, j \in I$, ou equivalentemente, a matriz SC é simétrica, onde $S = \text{diag}\{s_i : i \in I\}$.

Observe que, se C é uma matriz de Cartan generalizada simetrizável, então os s_i, $i \in I$, da Definição 3.1.2 podem ser tomados de modo que $\text{mdc}\{s_i : i \in I\} = 1$.

Se C é uma matriz de Cartan da Seção 2.2, então C é simetrizável. Além disso, se S é a matriz tal que SC é simétrica, então SC é positiva definida. Em particular, $\det SC \neq 0$ e C é invertível.

Daqui por diante fixe $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ uma matriz de Cartan generalizada simetrizável e $S = \operatorname{diag}\{s_i : i \in I\}$ tal que SC é simétrica com $\operatorname{mdc}\{s_i : i \in I\} = 1$.

Definição 3.1.3. A *álgebra de Kac-Moody* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ é a álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ dada por geradores x_i^+, x_i^-, h_i, $i \in I$, e relações:

(i) $[h_i, h_j] = 0$ para todos $i, j \in I$;

(ii) $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_j$ para todos $i, j \in I$;

(iii) $[h_i, x_j^+] = c_{ij} x_j^+,\ [h_i, x_j^-] = -c_{ij} x_j^-$, para todos $i, j \in I$;

(iv) $(\operatorname{ad}(x_i^+))^{1-c_{ij}}(x_j^+) = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$;

(v) $(\operatorname{ad}(x_i^-))^{1-c_{ij}}(x_j^-) = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

Denote por $\mathfrak{h}$ a subálgebra de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ gerada por h_i, $i \in I$, e por $\mathfrak{n}^\pm$ as subálgebras geradas por $x_i^\pm$, $i \in I$, respectivamente.

Proposição 3.1.4. A álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ tem a seguinte decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

como soma direta de espaços vetoriais.

Definição 3.1.5. Suponha que o posto de C é igual a l. Tome $J \subseteq I$ de cardinalidade l tal que $(c_{ij})_{i,j\in J}$ é invertível. A *álgebra de Kac-Moody estendida* é a álgebra de Lie $\mathfrak{g}^{\mathrm{ext}} = \mathfrak{g}(C)^{\mathrm{ext}}$ dada por geradores $x_i^\pm, h_i, d_j$, $i \in I$, $j \in I \setminus J$ e relações:

(i) $[h_i, h_j] = 0$ para todos $i, j \in I$;

(ii) $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_j$ para todos $i, j \in I$;

(iii) $[h_i, x_j^+] = c_{ij} x_j^+,\ [h_i, x_j^-] = -c_{ij} x_j^-$, para todos $i, j \in I$;

(iv) $[d_i, d_j] = 0$ para todos $i, j \in I \setminus J$;

(v) $[h_i, d_j] = 0$ para todos $i \in I$ e $j \in I \setminus J$;

(vi) $[d_j, x_i^+] = \delta_{ij} x_i^+,\ [d_j, x_i^-] = -\delta_{ij} x_j^-$, para todos $i \in I$ e $j \in I \setminus J$;

(vii) $(\operatorname{ad}(x_i^+))^{1-c_{ij}}(x_j^+) = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$;

(viii) $(\operatorname{ad}(x_i^-))^{1-c_{ij}}(x_j^-) = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

Observe que $(\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}})' = \mathfrak{g}(C)$. Em particular $\mathfrak{g}(C)$ é um ideal de $\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}}$. Além disso, $\mathfrak{g}(C) = \mathfrak{g}(C)^{\text{ext}}$ se, e somente se, C é invertível. Alguns textos costumam chamar a álgebra $\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}}$ de álgebra de Kac-Moody. Preferimos chamar $\mathfrak{g}(C)$ de álgebra de Kac-Moody pois ela é dada por generalização direta da álgebra do Teorema de Serre.

Proposição 3.1.6. Considere

$$\mathfrak{h}^{\text{ext}} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{j \in I \setminus J} \mathbb{K} d_j.$$

Então $\mathfrak{g}^{\text{ext}} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}^{\text{ext}} \oplus \mathfrak{n}^+$ como soma direta de espaços vetoriais.

Observe que $\dim \mathfrak{h}^{\text{ext}} = \dim \mathfrak{h} + \operatorname{card}(I \setminus J) = 2n - l$ se $\operatorname{card}(I) = n$ e $\operatorname{posto}(C) = l$.

Proposição 3.1.7. Para cada $i \in I$ existe um único funcional $\alpha_i \in (\mathfrak{h}^{\text{ext}})^*$ tal que $\alpha_i(h_j) = c_{ji}$ e $\alpha_i(d_j) = \delta_{ij}$. Além disso, $\{\alpha_i : i \in I\}$ é linearmente independente.

Observe que, se restringirmos α_i a $\mathfrak{h}$, o conjunto $\{\alpha_i : i \in I\}$ continua linearmente independente em $\mathfrak{h}^*$ se, somente se, C é invertível.

Definição 3.1.8. Os funcionais α_i, $i \in I$, da Proposição 3.1.7 são chamados de *raízes simples*.

Definição 3.1.9. O *reticulado de raízes* de $\mathfrak{g}$ é o $\mathbb{Z}$-módulo Q gerado pelas raízes simples α_i em $(\mathfrak{h}^{\text{ext}})^*$. Ou seja,

$$Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i.$$

Considere $Q^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$. Se $\eta \in Q$, digamos $\eta = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i$, o número $\operatorname{ht}(\eta) = \sum_{i \in I} a_i$ é chamado de *altura de* η.

Define-se uma ordem parcial em $(\mathfrak{h}^{\text{ext}})^*$ por $\mu \leq \lambda$ se, e somente se, $\lambda - \mu \in Q^+$.

Definição 3.1.10. O *reticulado de pesos* de $\mathfrak{g}$ é o conjunto

$$P = \{\lambda \in (\mathfrak{h}^{\text{ext}})^* : \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \ \text{ para todo } i \in I\}.$$

Os elementos de P são chamados de *pesos integrais*. Considere

$$P^+ = \{\lambda \in P : \lambda(h_i) \geq 0 \ \text{ para todo } i \in I\}.$$

Os elementos de P^+ são chamados de *pesos integrais dominantes*. Dado $i \in I$, o único elemento $\omega_i \in (\mathfrak{h}^{\text{ext}})^*$ satisfazendo $\omega_i(h_j) = \delta_{ij}$ e $\omega_i(d_j) = 0$ é chamado de *i-ésimo peso fundamental*.

Observe que $Q \subseteq P$. Também $\sum_{i \in I} \mathbb{Z}\omega_i \subseteq P$ e a igualdade vale se, e somente se, C é invertível.

Dado $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\text{ext}})^*$ seja

$$\mathfrak{g}_\lambda := \{x \in \mathfrak{g}^{\text{ext}} : [h, x] = \lambda(h)x \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}^{\text{ext}}\}.$$

Observe que $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$.

Definição 3.1.11. Uma *raiz* de $\mathfrak{g}$ é um elemento $\lambda \in \mathfrak{h}^{\text{ext}} \setminus \{0\}$ tal que $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$. O conjunto das raízes, denotado por R, é chamado de *sistema de raízes* de $\mathfrak{g}$. Os elementos em $R^+ = R \cap Q^+$ são chamados de *raízes positivas* e os elementos em $R^- := -R^+$ são chamados de *raízes negativas*.

Essas raízes não satisfazem todas as propriedades dos sistemas de raízes estudados na Seção 2.2.

Teorema 3.1.12. (i) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}^{\text{ext}}$.

(ii) $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{K}{x_i}^+$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{K}{x_i}^-$.

(iii) $R \subseteq Q$ e $R = R^+ \cup R^-$.

(iv) $\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ e $\dim \mathfrak{g}_\lambda < \infty$ para todo $\lambda \in R$.

Proposição 3.1.13. A álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g}(C))$ é isomomorfa à álgebra associativa dada por geradores $x_i^\pm, h_i$, $i \in I$, e relações:

(i) $[h_i, h_j] = 0$ para todos $i, j \in I$;

(ii) $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_j$ para todos $i, j \in I$;

(iii) $[h_i, x_j^+] = c_{ij} x_j^+$, $[h_i, x_j^-] = -c_{ij} x_j^-$, para todos $i, j \in I$;

(iv) $\sum\limits_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \binom{1-c_{ij}}{k} (x_i^+)^{1-c_{ij}-k} x_j^+ (x_i^+)^k = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$;

(v) $\sum\limits_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \binom{1-c_{ij}}{k} (x_i^-)^{1-c_{ij}-k} x_j^- (x_i^-)^k = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

Proposição 3.1.14. A álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}})$ é isomomorfa à álgebra associativa dada por geradores $x_i^\pm$, h_i, d_j, $i \in I$, $j \in I \setminus J$, e relações:

(i) $[h_i, h_j] = 0$ para todos $i, j \in I$;

(ii) $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_j$ para todos $i, j \in I$;

(iii) $[h_i, x_j^+] = c_{ij}x_j^+,\ [h_i, x_j^-] = -c_{ij}x_j^-$, para todos $i, j \in I$;

(iv) $[d_i, d_j] = 0$ para todos $i, j \in I \setminus J$;

(v) $[h_i, d_j] = 0$ para todos $i \in I$ e $j \in I \setminus J$;

(vi) $[d_j, x_i^+] = \delta_{ij}x_i^+,\ [d_j, x_i^-] = -\delta_{ij}x_j^-$, para todos $i \in I$ e $j \in I \setminus J$;

(vii) $\sum\limits_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \binom{1-c_{ij}}{k} (x_i^+)^{1-c_{ij}-k} x_j^+ (x_i^+)^k = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$;

(viii) $\sum\limits_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \binom{1-c_{ij}}{k} (x_i^-)^{1-c_{ij}-k} x_j^- (x_i^-)^k = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

Considere $U(\mathfrak{n}^\pm)$ as subálgebras de $U(\mathfrak{g})$ (e de $U(\mathfrak{g}^{\text{ext}})$) geradas por $X_i^\pm$, $i \in I$, respectivamente. Considere também $U(\mathfrak{h})$ e $U(\mathfrak{h}^{\text{ext}})$ as subálgebras de $U(\mathfrak{g})$ e de $U(\mathfrak{g}^{\text{ext}})$ geradas por H_i, $i \in I$, e H_i, D_j, $i \in I$, $j \in I \setminus J$, respectivamente.

Proposição 3.1.15. Tem-se os seguintes isomorfismos de espaços vetoriais:

(i) $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^+)$;

(ii) $U(\mathfrak{g}^{\text{ext}}) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{h}^{\text{ext}}) \otimes U(\mathfrak{n}^+)$.

Apresentaremos agora algumas notações que serão necessárias adiante. Para cada subconjunto I' de I, seja $\mathfrak{g}_{I'}$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ gerada por $x_j^\pm$, $j \in I'$, e defina $\mathfrak{n}_{I'}^+$, $\mathfrak{n}_{I'}^-$ e $\mathfrak{h}_{I'}$ as subálgebras geradas por x_j^+, x_j^- e h_j, $j \in I'$, respectivamente. Considere $Q_{I'}$ o subgrupo de Q gerado por α_j, $j \in I'$, e $R_{I'}^+ = R^+ \cap Q_{I'}$. Dado $\lambda \in P$, seja $\lambda_{I'}$ a restrição de λ a $\mathfrak{h}_{I'}^*$. Por abuso de linguagem, vamos nos referir a qualquer subconjunto I' de I como um subdiagrama do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ (que será definido na seção seguinte).

3.2 Classificação

Definição 3.2.1. Duas matrizes de Cartan generalizadas $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ e $C' = (c'_{ij})_{i,j\in I}$ são *equivalentes* se existe uma permutação σ de I tal que $c'_{ij} = c_{\sigma(i)\sigma(j)}$ para todos $i, j \in I$. Uma matriz de Cartan generalizada C é *decomponível* se C é equivalente a uma matriz soma direta não trivial de matrizes C_1 e C_2, ou seja, equivalente a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

onde C_1 e C_2 são matrizes de ordens estritamente menores que a ordem de C (também serão matrizes de Cartan generalizadas). Se C não é decomponível então C é dita *indecomponível.*

Proposição 3.2.2. Sejam C, C_1 e C_2 matrizes de Cartan generalizadas.

(i) Se C_1 e C_2 são equivalentes, então as álgebras de Lie $\mathfrak{g}(C_1)$ e $\mathfrak{g}(C_2)$ ($\mathfrak{g}(C_1)^{\text{ext}}$ e $\mathfrak{g}(C_2)^{\text{ext}}$) são isomorfas.

(ii) Se C é equivalente a matriz soma direta de C_1 e C_2 (C é decomponível), então $\mathfrak{g}(C) \cong \mathfrak{g}(C_1) \oplus \mathfrak{g}(C_2)$ ($\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}} \cong \mathfrak{g}(C_1)^{\text{ext}} \oplus \mathfrak{g}(C_2)^{\text{ext}}$) como soma direta de álgebras de Lie.

De agora em diante vamos assumir que C é uma matriz de Cartan generalizada simetrizável indecomponível.

Definição 3.2.3. (i) C é do *tipo finito* se todos os seus menores principais são positivos, ou equivalentemente, se SC é positiva definida.

(ii) C é do *tipo afim* se $\det C = 0$ e todos os seus menores principais próprios são positivos. Neste caso o posto de C é igual a cardinalidade de I menos 1, ou equivalentemente, o coposto de C é igual a 1.

Se C não é do tipo finito nem do tipo afim, então C é do *tipo indefinido*. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}(C)$ (ou $\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}}$) também é dita ser do *tipo finito, afim* ou *indefinido* se C for do tipo finito, afim ou indefinido, respectivamente.

Teorema 3.2.4. Seja C uma matriz de Cartan generalizada. Então $\mathfrak{g}(C)$ é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita se, e somente se, C é do tipo finito. Logo, toda matriz de Cartan generalizada do tipo finito é uma matriz de Cartan da Seção 2.2 e $\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}} = \mathfrak{g}(C)$ neste caso.

Segue da definição de matriz de tipo afim e do Teorema 3.2.4 que toda matriz de Cartan generalizada de tipo afim pode ser obtida de uma matriz de Cartan com o acréscimo de uma linha e uma coluna.

Proposição 3.2.5. São equivalentes:

(i) R é finito;

(ii) $\dim \mathfrak{g}(C) < \infty$;

(iii) C é uma matriz de Cartan.

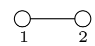
Para cada matriz de Cartan generalizada pode-se definir um grafo associado que estende a definição de diagrama de Dynkin dada na Seção 2.2. Aqui ele também será chamado de diagrama de Dynkin.

Definição 3.2.6. Seja $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ uma matriz de Cartan generalizada. O *diagrama de Dynkin* de C (de $\mathfrak{g}(C)$ ou $\mathfrak{g}(C)^{\text{ext}}$) é um grafo com card$(I)$ vértices, onde dois vértices distintos i e j são ligados da seguinte forma:

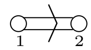
(i) Se $c_{ij}c_{ji} \leq 4$, então os vértices i e j são ligados por $\max\{|c_{ij}|, |c_{ji}|\}$ arestas com uma flecha apontando para i se $|c_{ij}| > 1$ e o mesmo para j.

(ii) Se $c_{ij}c_{ji} > 4$, os vértices i e j são ligados por uma aresta com o par $(|c_{ij}|, |c_{ji}|)$ sobre ela.

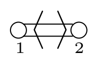
Exemplo 3.2.7. (i) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



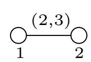
(ii) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$



(iii) $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$



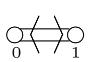
(iv) $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$



Tem-se uma classificação das matrizes de Cartan generalizadas dos tipos finito e afim em termos dos seus diagramas de Dynkin. Devido ao Teorema 3.2.4, a classificação dos diagramas do tipo finito é exatamente a mesma dos diagramas das álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. O tipo afim se divide em duas classes, as torcidas e não torcidas, e serão listadas a seguir.

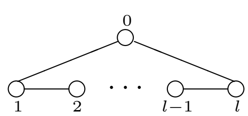
Tipo afim não torcida

$A_1^{(1)}$:

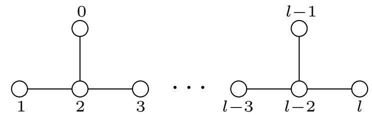


$C_l^{(1)}$: ($l \geq 2$)

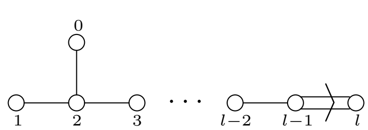
$A_l^{(1)}$: ($l \geq 2$)



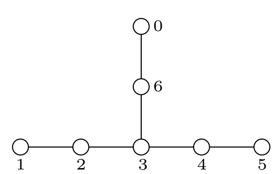
$D_l^{(1)}$: ($l \geq 4$)



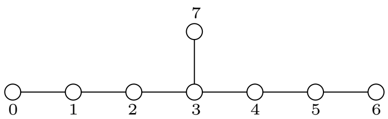
$B_l^{(1)}$: ($l \geq 3$)



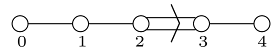
$E_6^{(1)}$:



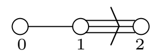
$E_7^{(1)}$:



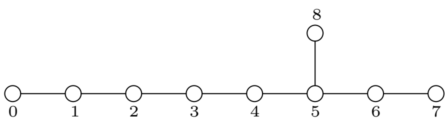
$F_4^{(1)}$:



$G_2^{(1)}$:

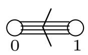


$E_8^{(1)}$:

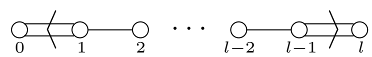


Tipo afim torcida

$A_2^{(2)}$:

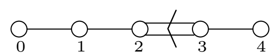


$D_{l+1}^{(2)}$: $(l \geq 2)$

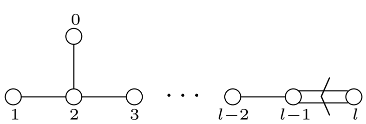


$A_{2l}^{(2)}$: $(l \geq 2)$

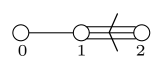
$E_6^{(2)}$:



$A_{2l-1}^{(2)}$: $(l \geq 3)$



$D_4^{(3)}$:



3.3 Realização das álgebras de Kac-Moody afins não torcidas

Fixe uma matriz de Cartan indecomponível $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ e seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ a álgebra de Lie simples de dimensão finita correspondente. Considere $x_i{}^{\pm}$, h_i, $i \in I$, os geradores de Chevalley de $\mathfrak{g}$.

Pode-se construir uma matriz de Cartan generalizada $\hat{C}$ do tipo afim não torcida acrescentando uma linha e uma coluna em C chamada de 0. Sejam $\hat{I} = I\dot{\sqcup}\{0\}$ e θ a única raiz maximal de $\mathfrak{g}$. Suponha $\theta = \sum_{i\in I} c_i\alpha_i$ e $\theta^\vee = \sum_{i\in I} c_i^\vee h_i$. Defina $\hat{C} = (\hat{c}_{ij})_{i,j\in\hat{I}}$ por:

(i) $\hat{c}_{ij} = c_{ij}$ para todos $i, j \in I$;

(ii) $\hat{c}_{00} = 2$;

(iii) $\hat{c}_{i0} = -\sum\limits_{j\in I} c_j c_{ij}$ para todo $i \in I$;

(iv) $\hat{c}_{0i} = -\sum\limits_{j\in I} c_j^\vee c_{ji}$ para todo $i \in I$.

A matriz $\hat{C}$ é chamada de *matriz de Cartan estendida*.

Proposição 3.3.1. Se C é uma matriz de Cartan do tipo T ($T = A_l$, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2) então a matriz de Cartan estendida $\hat{C}$ é uma matriz de Cartan generalizada do tipo afim não torcida $T^{(1)}$.

Também pode-se obter as álgebras $\mathfrak{g}(\hat{C})$ e $\mathfrak{g}(\hat{C})^{\text{ext}}$ a partir da álgebra de Lie simples de dimensão finita $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$. Indicaremos aqui como é feita essa construção.

A *álgebra de laços* de $\mathfrak{g}$ é o espaço vetorial $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t, t^{-1}]$ com o colchete definido por extensão linear de

$$[x \otimes f(t), y \otimes g(t)] = [x, y] \otimes (f(t)g(t))$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $f(t), g(t) \in \mathbb{K}[t, t^{-1}]$. Não é difícil verificar que isso define uma estrutura de álgebra de Lie em $\tilde{\mathfrak{g}}$. Além disso, $\mathfrak{g} \otimes 1$ é uma subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}$ isomorfa a $\mathfrak{g}$. Denote $\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm} := \mathfrak{n}^{\pm} \otimes \mathbb{K}[t, t^{-1}]$ e $\tilde{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} \otimes \mathbb{K}[t, t^{-1}]$.

Agora, considere o espaço vetorial $\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} \times \mathbb{K}$ e denote por c o elemento $(0, 1)$. Então podemos escrever $\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{K}c$.

Proposição 3.3.2. Existe uma única estrutura de álgebra de Lie em $\hat{\mathfrak{g}}$ tal que $[\tilde{\mathfrak{g}}, c] = \{0\}$, ou seja, c é central, e

$$[x \otimes t^r, y \otimes t^s] = [x, y] \otimes t^{r+s} + \delta_{r,-s} r(x, y)c$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ e $r, s \in \mathbb{Z}$, onde $(\cdot, \cdot)$ é a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$. Além disso, $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) = \mathbb{K}c$.

Agora, seja $\hat{\mathfrak{g}}^{\text{ext}} = \hat{\mathfrak{g}} \times \mathbb{K}$ e denote por d o elemento $(0, 1)$. Então podemos escrever $\hat{\mathfrak{g}}^{\text{ext}} = \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{K}d$.

Proposição 3.3.3. Existe uma única estrutura de álgebra de Lie em $\hat{\mathfrak{g}}^{\text{ext}}$ tal que $\hat{\mathfrak{g}}$ é uma subálgebra de $\hat{\mathfrak{g}}^{\text{ext}}$ e

$$[d, x \otimes f(t) + \lambda c] = x \otimes \left(t \frac{d}{dt} f(t)\right)$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $f(t) \in \mathbb{K}[t, t^{-1}]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Teorema 3.3.4. Seja $\hat{C}$ a matriz de Cartan generalizada do tipo afim não torcida definida anteriormente. Então $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}(\hat{C})$ e $\hat{\mathfrak{g}}^{\text{ext}} \cong \mathfrak{g}(\hat{C})^{\text{ext}}$.

Comentários sobre a demonstração. Tome ${x_\theta}^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\theta}$ tais que $[{x_\theta}^+, {x_\theta}^-] = \theta^\vee$. Assim,

$$\begin{aligned}(\theta,\theta)(x_\theta^+, x_\theta^-) &= \theta(h'_\theta)(x_\theta^+, x_\theta^-)\\ &= (\theta(h'_\theta)x_\theta^+, x_\theta^-)\\ &= ([h'_\theta, x_\theta^+], x_\theta^-)\\ &= (h'_\theta, [x_\theta^+, x_\theta^-])\\ &= (h'_\theta, \theta^\vee)\\ &= \left(h'_\theta, \frac{2h'_\theta}{(h'_\theta, h'_\theta)}\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

Defina ${x_0}^\pm = {x_\theta}^\mp \otimes t^{\pm 1}$ e $h_0 = [{x_0}^+, {x_0}^-]$. Observe que

$$h_0 = [{x_\theta}^- \otimes t, {x_\theta}^+ \otimes t^{-1}] = [{x_\theta}^-, {x_\theta}^+] + ({x_\theta}^+, {x_\theta}^-)c = \frac{2c}{(\theta,\theta)} - \theta^\vee.$$

Além disso, $[h_i, {x_j}^\pm] = \pm\hat{c}_{ij}x_j^\pm$ para todos $i, j \in \hat{I}$. Sabemos que $\{x_i^\pm, h_i : i \in I\}$ gera $\mathfrak{g}$. Agora mostra-se que $\{x_i^\pm \otimes t^r, h_i \otimes t^r : i \in \hat{I},\ r \in \mathbb{Z}\}$ gera $\hat{\mathfrak{g}}$, e esses geradores junto com d geram $\hat{\mathfrak{g}}^{\text{ext}}$. $\square$

Definição 3.3.5. Para cada $i \in I$ e $r \in \mathbb{Z}$, define-se os elementos $\Lambda_{i,r} \in U(\tilde{\mathfrak{h}})$ pela seguinte igualdade de séries de potências em u:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \Lambda_{i,\pm r}u^r = \exp\left(-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_{i,\pm s}}{s}u^s\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_{i,\pm s}}{s}u^s\right)^l.$$

Por exemplo,

$$\Lambda_{i,0} = 1, \quad \Lambda_{i,\pm 1} = -h_{i,\pm 1}, \quad \Lambda_{i,\pm 2} = \frac{(h_{i,\pm 1})^2 - h_{i,\pm 2}}{2}.$$

Os elementos $\Lambda_{i,r}$ serão convenientes para estudarmos representações de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (Seção 4.3).

3.4 Álgebras universais envelopantes quantizadas

Fixe uma matriz de Cartan generalizada $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ e $S = \mathrm{diag}\{s_i : i \in I\}$, s_i inteiros positivos relativamente primos, tal que SC é simétrica. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$, $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{n}^\pm$ como na Seção 3.1.

Sejam q um elemento transcendente sobre $\mathbb{K}$ (uma variável), $\mathbb{K}(q)$ o anel das funções racionais em q e $\mathbb{A} = \mathbb{K}[q, q^{-1}]$. Considere $q_i := q^{s_i}$ para todo $i \in I$. Dado $p = q^s$ para algum $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, defina

$$[m]_p = \frac{p^m - p^{-m}}{p - p^{-1}}, \qquad [r]_p! = [r]_p[r-1]_p \dots [2]_p[1]_p, \qquad \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_p = \frac{[m]_p!}{[r]_p![m-r]_p!},$$

para $m, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$.

Proposição 3.4.1. Dados $m, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, tem-se $[m]_p, [m]_p!, \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_p \in \mathbb{A}$.

Definição 3.4.2 (Drinfeld-Jimbo)**.** A *álgebra universal envelopante quantizada* $U_q(\mathfrak{g})$ sobre $\mathbb{K}(q)$ é a $\mathbb{K}(q)$-álgebra associativa (com identidade) dada por geradores $x_i^{\pm}$, $k_i^{\pm 1}$, $i \in I$, e relações:

(i) $k_i k_i^{-1} = 1$ para todo $i \in I$;

(ii) $k_i k_j = k_j k_i$ para todos $i, j \in I$;

(iii) $k_i x_j^{\pm} k_i^{-1} = q_i^{\pm c_{ij}} x_j^{\pm}$ para todos $i, j \in I$;

(iv) $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ para todos $i, j \in I$;

(v) $\displaystyle\sum_{m=0}^{1-c_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (x_i^{\pm})^{1-c_{ij}-m} x_j^{\pm} (x_i^{\pm})^m = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

As relações (v) são chamadas de *q-relações de Serre*. Se C é do tipo afim (e também $\mathfrak{g}$), então $U_q(\mathfrak{g})$ é chamada de *álgebra afim quantizada*.

Observação 3.4.3. A Definição 3.4.2 faz sentido para qualquer corpo $\mathbb{F}$ e $q \in \mathbb{F}$ tal que q não é uma raiz da unidade, mas para os nossos propósitos neste trabalho só será necessário como foi definido. Para dar uma noção intuitiva da relação entre h_i e k_i, suponha $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ e $q = e^t$ para algum $t \in \mathbb{C}$. Podemos pensar em $k_i = q_i^{h_i} = e^{ts_i h_i}$. Assim a relação $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i$ é substituida por $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} \frac{\sinh(ts_i h_i)}{\sinh(ts_i)}$.

Sejam $U_q(\mathfrak{n}^{\pm})$ as subálgebras de $U_q(\mathfrak{g})$ geradas por $\{x_i^{\pm} : i \in I\}$, respectivamente, e $U_q(\mathfrak{h})$ a subálgebra gerada por $\{k_i^{\pm 1} : i \in I\}$.

Proposição 3.4.4. $U_q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{n}^-) U_q(\mathfrak{h}) U_q(\mathfrak{n}^+)$.

Seja $J \subseteq I$. Considere a subálgebra $U_q(\mathfrak{g}_J)$ gerada por $x_j^{\pm}$, $k_j^{\pm 1}$, para todo $j \in J$. Se $J = \{j\}$, a álgebra $U_q(\mathfrak{g}_j) := U_q(\mathfrak{g}_J)$ é isomorfa a $U_{q_j}(\mathfrak{sl}_2)$.

Para $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, considere $(x_i^{\pm})^{(k)} := \frac{(x_i^{\pm})^k}{[k]_{q_i}!}$. Seja $U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g})$ a $\mathbb{A}$-subálgebra de $U_q(\mathfrak{g})$ gerada por $(x_i^{\pm})^{(k)}$, $k_i^{\pm 1}$, $i \in I$. Defina $U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{n}^{\pm})$ e $U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{h})$ por $U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}) \cap U_q(\mathfrak{n}^{\pm})$ e $U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}) \cap U_q(\mathfrak{h})$, respectivamente.

Teorema 3.4.5. $U_q(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}(q) \otimes_{\mathbb{A}} U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g})$.

Considere $\mathbb{K}$ como um $\mathbb{A}$-módulo definindo a ação de q em $\mathbb{K}$ como identidade e defina

$$\overline{U_q(\mathfrak{g})} = \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}).$$

Denote por $\bar{\eta}$ a imagem de $\eta \in U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g})$ em $\overline{U_q(\mathfrak{g})}$.

Proposição 3.4.6. $U_q(\mathfrak{g})$ é isomorfa ao quociente de $\overline{U_q(\mathfrak{g})}$ pelo ideal bilateral gerado por $\overline{k_i - 1}$, $i \in I$. Em particular, estudar $\mathfrak{g}$-módulos (ou $U(\mathfrak{g})$-módulos) é equivalente a estudar $\overline{U_q(\mathfrak{g})}$-módulos com k_i agindo como identidade para todo $i \in I$.

3.5 Realização de Beck-Drinfeld das álgebras afins quantizadas

Nesta seção C será uma matriz de Cartan, $\hat{C}$ como foi definida na Seção 3.3, $\hat{I} = I \dot{\sqcup} \{0\}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ e $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\hat{C})$. Considere θ a única raiz maximal de $\mathfrak{g}$ e escreva $\theta = \sum_{i\in I} \theta_i \alpha_i$ e $\theta^\vee = \sum_{i\in I} \theta_i^\vee h_i$, $\theta_i, \theta_i^\vee \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definição 3.5.1. A *álgebra de laços quantizada* $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ é o quociente de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ pelo ideal bilateral gerado por $k_0 k_\theta - 1$, onde $k_\theta := \prod_{i\in I} k_i^{\theta_i}$.

Observamos porque essa definição faz sentido. Olhe para a realização $\hat{\mathfrak{g}} \cong \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{K}c$. Então $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \hat{\mathfrak{g}}/\mathbb{K}c$ e $h_0 = \frac{2c}{(\theta,\theta)} - \theta^\vee$. Assim,

$$c = \frac{(\theta,\theta)}{2} h_0 + \frac{(\theta,\theta)}{2} \theta^\vee = \frac{(\theta,\theta)}{2} h_0 + \frac{(\theta,\theta)}{2} \sum_{i\in I} \theta_i^\vee h_i.$$

Logo, em $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$$h_0 = -\sum_{i\in I} \theta_i^\vee h_i = -\theta^\vee.$$

Agora, $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ é o quociente de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ pelo ideal bilateral gerado por $k_0 \prod_{i\in I} k_i^{\theta_i} - 1$. Assim, em $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$,

$$k_0^{-1} = \prod_{i\in I} k_i^{\theta_i} = k_\theta \quad \text{e} \quad k_0 = \prod_{i\in I} k_i^{-\theta_i} = k_\theta^{-1}.$$

Usando a noção intuitiva da Observação 3.4.3, segue que

$$k_\theta = \prod_{i\in I} k_i^{\theta_i} \text{ “ = ” } q^{\sum\limits_{i\in I} s_i \theta_i h_i} = q^{\theta^\vee}.$$

Teorema 3.5.2. [1] A álgebra universal envelopante quantizada $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ é isomorfa a $\mathbb{K}(q)$-álgebra associativa A_q dada por geradores $x_{i,s}^{\pm 1}$, $k_i^{\pm}$, $h_{i,r}$, $c^{\pm 1/2}$, $i \in I$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$, e relações:

(i) $c^{\pm 1/2}$ são centrais;

(ii) $c^{+1/2}c^{-1/2} = 1 = k_i k_i^{-1}$ para todo $i \in I$;

(iii) $k_i k_j = k_j k_i$ para todos $i, j \in I$;

(iv) $k_i h_{j,r} = h_{j,r} k_i$ para todos $i \in I$ e $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

(v) $[h_{i,r}, h_{i,s}] = \delta_{r,-s} \dfrac{[rc_{ij}]_{q_i}}{r} \dfrac{c^r - c^{-r}}{q_j - q_j^{-1}}$ para todos $i, j \in I$ e $r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, onde $c^{\pm r} := (c^{\pm 1/2})^{2r}$;

(vi) $k_i x_{j,r}^{\pm} k_i^{-1} = q_i^{\pm c_{ij}} x_{j,r}^{\pm}$ para todos $i, j \in I$ e $r \in \mathbb{Z}$;

(vii) $[h_{i,r}, x_{j,s}^{\pm}] = \pm \frac{1}{r} [rc_{ij}]_{q_i} \, x_{j,r+s}^{\pm} \, (c^{\mp 1/2})^{|r|}$ para todos $i, j \in I$, $r, s \in \mathbb{Z}$ e $r \neq 0$;

(viii) $x_{i,r+1}^{\pm} x_{j,r}^{\pm} - q_i^{\pm c_{ij}} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r+1}^{\pm} = q_i^{\pm c_{ij}} x_{i,r}^{\pm} x_{j,s+1}^{\pm} - x_{j,s+1}^{\pm} x_{i,s}^{\pm}$ para todos $i, j \in I$ e $r, s \in \mathbb{Z}$;

(ix) $[x_{i,r}^{+}, x_{j,s}^{-}] = \delta_{ij} \dfrac{c^{\frac{r-s}{2}} \psi_{i,r+s}^{+} - \psi_{i,r+s}^{-} c^{\frac{s-r}{2}}}{q_i - q_i^{-1}}$ para todos $i, j \in I$ e $r, s \in \mathbb{Z}$, onde $c^{\frac{l}{2}} := (c^{+1/2})^l$ e $\psi_{i,l}^{\pm}$ serão definidos abaixo;

(x) $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_{1-c_{ij}}} \sum_{m=0}^{1-c_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} x_{i,r_{\sigma(1)}}^{\pm} \dots x_{i,r_{\sigma(m)}}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r_{\sigma(m+1)}}^{\pm} \dots x_{i,r_{\sigma(1-c_{ij})}}^{\pm} = 0$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$ e $r_1, r_2, \dots, r_{1-c_{ij}}, s \in \mathbb{Z}$.

Aqui $\psi_{i,r}^{\pm}$, $r \in \mathbb{Z}$, são definidos pela seguinte igualdade de séries de potências em u:

$$\sum_{r \geq 0} \psi_{i,\pm r}^{\pm} u^r = k_i^{\pm 1} \exp\left(\pm (q_i - q_i^{-1}) \sum_{s > 0} h_{i,\pm s} u^s \right) = k_i^{\pm 1} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} \left(\pm (q_i - q_i^{-1}) \sum_{s > 0} h_{i,\pm s} u^s \right)^l.$$

Em particular, $\psi_{i,-r}^{+} = 0$ e $\psi_{i,r}^{-} = 0$ se $r > 0$. Os primeiros casos são:

$$\psi_{i,0}^{\pm} = k_i^{\pm}, \quad \psi_{i,\pm 1}^{\pm} = \pm k_i^{\pm} (q_i - q_i^{-1}) h_{i,\pm 1}, \quad \psi_{i,\pm 2}^{\pm} = \pm k_i^{\pm} ((q_i - q_i^{-1}) h_{i,\pm 2} + (q_i - q_i^{-1})^2 h_{i,\pm 1}^2).$$

Comentários sobre a demonstração. Pelo Teorema 2.2.14, existe uma raiz simples α_i que é conjugada a θ pelo grupo de Weyl. Considere $q_\theta = q_i$. Suponha que em termos dos x_i^{+} tem-se

$$x_\theta^{+} = a[x_{i_1}^{+}, [x_{i_2}^{+}, \dots, [x_{i_k}^{+}, x_{i_j}^{+}] \cdots]],$$

para algum $a \in \mathbb{K}$. Defina funções $\varphi_i^{\pm} : U_q(\tilde{\mathfrak{g}}) \to U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ por

$$\varphi_i^{\pm}(y) = x_{i,0}^{\pm} y - k_i^{\pm 1} y k_i^{\mp 1} x_{i,0}^{\pm}.$$

Então, existe um isomorfismo de $\mathbb{K}(q)$-álgebras $f : U_q(\tilde{\mathfrak{g}}) \to A_q$ definido nos geradores por

$$f(k_0^{\pm 1}) = c^{\pm 1/2} k_\theta^{-1}, \quad f(k_i^{\pm 1}) = k_i^{\pm 1}, \quad f(x_i^{\pm}) = x_{i,0}^{\pm}, \quad i \in I,$$

$$f(x_0^+) = g\varphi_{i_1}^- \dots \varphi_{i_k}^-(x_{j,1}^-) k_\theta^{-1}, \quad f(x_0^-) = a k_\theta \varphi_{i_1}^- \dots \varphi_{i_k}^-(x_{j,-1}^+),$$

onde $g \in \mathbb{K}(q)$ é determinado pela condição

$$[x_0^+, x_0^-] = \frac{k_0 - k_0^{-1}}{q_\theta - q_\theta^{-1}}.$$

□

Segue da Definição 3.5.1 e do fato $f(k_0^{\pm 1}) = c^{\pm 1/2} k_\theta^{-1}$, $f(k_i^{\pm 1}) = k_i^{\pm 1}$, $i \in I$, que $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ é isomorfa ao quociente de A_q pelo ideal bilateral gerado por $c^{\pm 1/2} - 1$. Daqui por diante identificaremos $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ com esse quociente.

Sejam $U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm})$ as subálgebras de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ geradas por $\{x_{i,r}^{\pm} : i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$, respectivamente, e $U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ a subálgebra de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ gerada por $\{k_i^{\pm 1}, h_{i,s} : i \in I, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Proposição 3.5.3. (i) $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^-) U_q(\tilde{\mathfrak{h}}) U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^+)$.

(ii) A subálgebra de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ gerada por $x_i^{\pm} := x_{i,0}^{\pm}$, $k_i^{\pm 1}$, $i \in I$, é isomorfa a $U_q(\mathfrak{g})$.

Defina os elementos $\Lambda_{i,r} \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$, $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}$, pela igualdade de séries de potências em u:

$$\sum_{r \geq 0} \Lambda_{i,\pm r} u^r = \exp\left(- \sum_{s \geq 1} \frac{h_{i,\pm s}}{[s]_{q_i}} u^s \right) = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} \left(- \sum_{s \geq 1} \frac{h_{i,\pm s}}{[s]_{q_i}} u^s \right)^l.$$

Por exemplo,

$$\Lambda_{i,0} = 1, \quad \Lambda_{i,\pm 1} = -h_{i,\pm 1}, \quad \Lambda_{i,\pm 2} = -\frac{h_{i,\pm 2}}{[2]_{q_i}} + \frac{(h_{i,\pm 1})^2}{2!}.$$

Para $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, considere $(x_{i,r}^{\pm})^{(k)} := \frac{(x_{i,r}^{\pm})^k}{[k]_{q_i}!}$. Seja $\tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ a $\mathbb{A}$-subálgebra de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ gerada por $(x_{i,r}^{\pm})^{(k)}$, $k_i^{\pm 1}$, $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Defina $\tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm})$ e $\tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{h}})$ por $\tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm})$ e $\tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$, respectivamente.

Lema 3.5.4. $\Lambda_{i,r} \in \tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ para todos $i \in I$ e $r \in \mathbb{Z}$. Além disso, a $\mathbb{A}$-subálgebra de $U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ gerada por $\Lambda^{\pm} := \{\Lambda_{i,\pm r} : i \in I, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ é comutativa livre sobre $\Lambda^{\pm}$ e

$$\tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{h}}) \cong \mathbb{A}[\Lambda^-] \otimes_{\mathbb{A}} U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}[\Lambda^+],$$

como $\mathbb{A}$-álgebras.

Proposição 3.5.5. [4] $\tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}) = U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Em particular, segue da Teorema 3.4.5 que, $\tilde{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathbb{K}(q) \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Considere $\mathbb{K}$ como um $\mathbb{A}$-módulo definindo a ação de q em $\mathbb{K}$ como identidade e defina

$$\overline{U_q(\tilde{\mathfrak{g}})} = \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}).$$

Denote por $\bar{\eta}$ a imagem de $\eta \in \tilde{U}_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ em $\overline{U_q(\tilde{\mathfrak{g}})}$.

Como corolário imediato das Proposições 3.4.6 e 3.5.5, tem-se:

Proposição 3.5.6. $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ é isomorfa ao quociente de $\overline{U_q(\tilde{\mathfrak{g}})}$ pelo ideal bilateral gerado por $\overline{k_i - 1}$, $i \in I$. Em particular, estudar $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulos (ou $U(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos) é equivalente a estudar $\overline{U_q(\tilde{\mathfrak{g}})}$-módulos com k_i agindo como identidade para todo $i \in I$.

Capítulo 4

Representações de dimensão finita das álgebras afins quantizadas

Neste capítulo $\mathbb{K}$ será um corpo algebricamente fechado de característica zero. Considere C uma matriz de Cartan, $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ associada a C, $I = \{1, \ldots, n\}$ o conjunto dos vértices do seu diagrama de Dynkin, P o seu reticulado de pesos e $\tilde{\mathfrak{g}}$ sua álgebra de laços. Identificaremos $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = A_q/\mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é o ideal bilateral de A_q gerado por $c^{\pm 1/2} - 1$, como mencionado na Seção 3.5. As principais referências para este capítulo são [21, 8, 27, 28, 3, 9, 11, 10].

4.1 $U_q(\mathfrak{g})$-módulos de peso com $\mathfrak{g}$ do tipo finito

Definição 4.1.1. Um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo V no qual $x_i^{\pm}$, $i \in I$, agem localmente nilpotentemente, ou seja, para cada $i \in I$ e $v \in V$ existem $m_i^{\pm} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $(x_i^+)^{m_i^+} v = 0$ e $(x_i^-)^{m_i^-} v = 0$, é chamado de *módulo integrável*.

Proposição 4.1.2. Seja V um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo integrável. Então, para cada $i \in I$, k_i age de maneira semissimples em V, isto é, V possui uma base de autovetores para a transformação linear $k_i : V \to V$, $v \mapsto k_i v$. Além disso, $U_q(\mathfrak{g}_i)v$ tem dimensão finita para todos $v \in V$ e $i \in I$.

Definição 4.1.3. Seja V um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo. Para cada $\mu \in P$, defina o *espaço de peso de V de peso μ* por

$$V_\mu := \{v \in V : k_i v = q_i^{\mu(h_i)} v \text{ para todo } i \in I\}.$$

Se $V_\mu \neq \{0\}$, então μ é chamado de *peso* de V.

Observação 4.1.4. Se V é um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo, então a relação $k_i x_j^{\pm} k_i^{-1} = q_i^{\pm c_{ij}} x_j^{\pm}$ implica $x_i^{\pm} V_\mu \subseteq V_{\mu \pm \alpha_i}$ para todos $i \in I$ e $\mu \in P$. Além disso, se $\mu \neq \mu'$, então $V_\mu \cap V_{\mu'} = \{0\}$.

Se V é um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo, então segue da Observação 4.1.4 que $\bigoplus_{\mu\in P} V_\mu$ é um $U_q(\mathfrak{g})$-submódulo de V.

Definição 4.1.5. Um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo é chamado de *módulo de peso* se $V = \bigoplus_{\mu\in P} V_\mu$.

O que foi definido aqui como *módulo de peso* é usualmente chamado de *módulo de peso de tipo 1*, que não vamos dizer aqui o que significa, mas todo $U_q(\mathfrak{g})$-módulo de dimensão finita é obtido de um módulo de peso de tipo 1 tensorizando-se por um módulo unidimensional. Para maiores detalhes veja, por exemplo, [8, 27].

Definição 4.1.6. A categoria $\mathcal{O}_q$ é a categoria dos $U_q(\mathfrak{g})$-módulos V satisfazendo:

(i) V é um módulo de peso com todos os seus espaços de pesos de dimensão finita.

(ii) Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in P^+$ tais que $V_\mu \neq \{0\}$ somente se $\mu \leq \lambda_j$ para algum $j = 1, \ldots, m$.

A categoria $\mathcal{O}_q^{\text{int}}$ é a subcategoria plena de $\mathcal{O}_q$ formada pelos módulos integráveis.

As categorias $\mathcal{O}_q$ and $\mathcal{O}_q^{\text{int}}$ são fechadas sobre submódulos, somas diretas finitas, quocientes e produtos tensoriais.

Observe que, se V é um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo de peso de dimensão finita, então $V \in O_q^{\text{int}}$.

Definição 4.1.7. Seja V um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo. Um vetor não nulo $v \in V_\mu$ é chamado de *vetor de peso de peso μ*. Um vetor de peso v é chamado de *vetor de peso máximo* se $x_i^+ v = 0$ para todo $i \in I$. O módulo V é chamado de *módulo de peso máximo (de peso máximo λ)* se V é gerado por um vetor de peso máximo v (de peso λ).

Proposição 4.1.8. (i) Dois módulos de peso máximo podem ser isomorfos somente se eles têm o mesmo peso máximo.

(ii) Todo módulo de peso máximo tem um único submódulo próprio maximal e, consequentemente, um único quociente irredutível.

Definição 4.1.9. Define-se o *módulo de Verma $M_q(\lambda)$ de peso máximo λ* como sendo o quociente de $U_q(\mathfrak{g})$ pelo ideal à esquerda gerado por $\{x_i^+, k_i - q^{\lambda(h_i)} : i \in I\}$.

Observe que, se v é a imagem do 1 em $M_q(\lambda)$, então v é um vetor de peso máximo de peso λ e $M_q(\lambda) = U_q(\mathfrak{g})v$ é um módulo de peso máximo de peso λ. Além disso, qualquer outro $U_q(\mathfrak{g})$-módulo de peso máximo de peso λ é isomorfo a um quociente de $M_q(\lambda)$. Por este motivo, $M_q(\lambda)$ também é conhecido como *módulo universal de peso máximo de peso λ*.

Proposição 4.1.10. (i) Se V é um módulo de peso máximo, então $V \in \mathcal{O}_q$.

(ii) Dois módulos de peso máximo irredutíveis são isomorfos se, e somente se, eles têm o mesmo peso máximo.

Denota-se por $V_q(\lambda)$ o único (a menos de isomorfismo) $U_q(\mathfrak{g})$-módulo irredutível de peso máximo λ, que é o mesmo que o único quociente irredutível do módulo de Verma $M_q(\lambda)$.

Teorema 4.1.11. $V_q(\lambda)$ é integrável se, e somente se, $\lambda \in P^+$.

Teorema 4.1.12. Seja $\lambda \in P^+$. Então, $V_q(\lambda)$ é o quociente de $U_q(\mathfrak{g})$ pelo ideal à esquerda gerado por

$$x_i^+, \quad (x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}, \quad k_i - q_i^{\lambda(h_i)}, \quad \text{para todo } \ i \in I.$$

Além disso, $V_q(\lambda)$ tem dimensão finita.

Proposição 4.1.13. Se V é um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo irredutível em $\mathcal{O}_q$, então $V \cong V_q(\lambda)$, para algum $\lambda \in P$.

Teorema 4.1.14. Seja V um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo de peso integrável tal que seus espaços de pesos de dimensão finita. Então, $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ para todos $\mu \in P$ e $w \in \mathcal{W}$.

Teorema 4.1.15. Todo $U_q(\mathfrak{g})$-módulo em $\mathcal{O}_q^{\text{int}}$ é de dimensão finita e completamente redutível.

Teorema 4.1.16. Seja $\lambda \in P^+$. Então, $\operatorname{ch}(V_q(\lambda)) = \operatorname{ch}(V(\lambda))$.

Proposição 4.1.17. Seja V um $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-módulo de dimensão finita. Então os elementos $c^{\pm 1/2}$ agem de maneira semissimples em V com autovalores 1 ou -1.

Os $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-módulos de dimensão finita em que $c^{\pm 1/2}$ agem com autovalor -1 podem ser obtidos de módulos em que $c^{\pm 1/2}$ agem como operador identidade tensorizando-se por um módulo unidimensional. Com isso, pode-se assumir que $c^{\pm 1/2}$ agem como operador identidade, ou seja, pode-se restringir o estudo dos $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-módulos de dimensão finita ao estudo dos módulos sobre $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ de dimensão finita.

4.2 O reticulado de ℓ-pesos

Definição 4.2.1. Dado um corpo $\mathbb{F}$, define-se o *reticulado de ℓ-pesos* por

$$\mathcal{P}_\mathbb{F} = \{\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_i(u))_{i \in I} : \boldsymbol{\mu}_i(u) \in \mathbb{F}(u) \ \text{ e } \ \mu_i(0) = 1 \ \text{ para todo } \ i \in I\}.$$

Aqui, $\mathbb{F}(u)$ denota o anel de funções racionais em u sobre $\mathbb{F}$. Os elementos de $\mathcal{P}_\mathbb{F}$ são chamados de *ℓ-pesos*.

$\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ é um grupo abeliano com a operação definida pela multiplicação usual de $\mathbb{F}(u)$ coordenada a coordenada.

Definição 4.2.2. Define-se o *conjunto dos ℓ-pesos dominantes* $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}^+$ como sendo o submonóide de $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ dado por

$$\mathcal{P}_{\mathbb{F}}^+ = \{\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_i(u))_{i\in I} : \boldsymbol{\mu}_i(u) \in \mathbb{F}[u] \ \text{ e } \ \mu_i(0) = 1 \ \text{ para todo } \ i \in I\}.$$

Ou seja, $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}^+$ é formado por n-uplas de polinômios de $\mathbb{F}[u]$ com termos constantes iguais a 1. Os elementos em $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}^+$ são chamados de *ℓ-pesos dominantes*.

Dados $i \in I$ e $a \in \mathbb{F}^\times$, denote por $\boldsymbol{\omega}_{i,a}$ o elemento de $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}^+$ dado por

$$(\boldsymbol{\omega}_{i,a})_j(u) = 1 - \delta_{ij} au.$$

Os elementos $\boldsymbol{\omega}_{i,a}$ são chamados de *ℓ-pesos fundamentais.*

Os elementos $\boldsymbol{\omega}_{i,a}^{-1}$ podem ser naturalmente considerados como uma n-upla de séries de potências formais em u com termos constantes iguais a 1 (escrevendo $\frac{1}{1-au} = \sum\limits_{k\geq 0} (au)^k$ como série geométrica).

Observe que, se $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, todo elemento em $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ pode ser escrito como um produto (finito) dos pesos fundamentais e seus inversos. Daí, existe um único epimorfismo de grupos (função peso) $\mathrm{wt} : \mathcal{P}_{\mathbb{F}} \longrightarrow P$ tal que $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega}_{i,a}) = \omega_i$ para todos $i \in I$ e $a \in \mathbb{K}^\times$. Se $\mathbb{F}$ não é algebricamente fechado, seja $\overline{\mathbb{F}}$ um fecho algébrico de $\mathbb{F}$. Então $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ pode ser visto como um subgrupo de $\mathcal{P}_{\overline{\mathbb{F}}}$. Defina a função peso de $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ pela restrição de $\mathcal{P}_{\overline{\mathbb{F}}}$ (isto não depende da escolha de $\overline{\mathbb{F}}$).

Considere os elementos $\boldsymbol{\omega}_{\lambda,a}$, $\lambda \in P$, $a \in \mathbb{F}^\times$, definidos por

$$\boldsymbol{\omega}_{\lambda,a} := \prod_{i\in I} (\boldsymbol{\omega}_{i,a})^{\lambda(h_i)}.$$

Definição 4.2.3. Define-se o *reticulado de ℓ-pesos de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$* por $\mathcal{P}_q := \mathcal{P}_{\mathbb{K}(q)}$. O submonóide $\mathcal{P}_q^+ := \mathcal{P}_{\mathbb{K}(q)}^+$ de $\mathcal{P}_q$ é chamado de *conjunto dos ℓ-pesos dominantes de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$*.

Dados $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^+$ com $\boldsymbol{\lambda}_i(u) = \prod_j (1 - a_{i,j}u)$, onde $a_{i,j}$ pertence a algum fecho algébrico de $\mathbb{K}(q)$, considere $\boldsymbol{\lambda}^- \in \mathcal{P}_q^+$ definido por $\boldsymbol{\lambda}_i^-(u) = \prod_j (1 - a_{i,j}^{-1}u)$. Também usa-se a notação $\boldsymbol{\lambda}^+ = \boldsymbol{\lambda}$. Dois elementos $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ de $\mathcal{P}_q^+$ são *relativamente primos* se $\boldsymbol{\lambda}_i(u)$ e $\boldsymbol{\mu}_j(u)$ são relativamente primos em $\mathbb{K}(q)[u]$ para todos $i, j \in I$. Observe que cada $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}_q$ pode ser escrito de maneira única como $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}^{-1}$ com $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_q^+$ relativamente primos.

Proposição 4.2.4. Dado $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}_q$, onde $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}^{-1}$ com $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_q^+$ relativamente primos, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}(q)$-álgebras $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}} : U_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \to \mathbb{K}(q)$ tal que

$$\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}}(k_i^{\pm 1}) = q_i^{\pm \mathrm{wt}(\boldsymbol{\nu})(h_i)}, \qquad \sum_{r\geq 0} \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}}(\Lambda_{i,\pm r}) u^r = \frac{(\boldsymbol{\lambda}^\pm)_i(u)}{(\boldsymbol{\mu}^\pm)_i(u)},$$

onde a divisão é a de séries de potências formais em u. Além disso, a função $\mathbf{\Psi} : \mathcal{P}_q \to (U_q(\tilde{\mathfrak{h}}))^*$ dada por $\boldsymbol{\nu} \mapsto \mathbf{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}}$ é injetora.

Definição 4.2.5. Define-se o *reticulado de ℓ-pesos de* $\tilde{\mathfrak{g}}$ como sendo o subgrupo $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}_q$ gerado por $\boldsymbol{\omega}_{i,a}$ para todos $i \in I$ e $a \in \mathbb{K}^\times$, ou equivalentemente, $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$. Considere também $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_q^+$.

Observe que cada $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}$ pode se decompor de maneira única como

$$\boldsymbol{\lambda} = \prod_j \boldsymbol{\omega}_{\lambda_j, a_j} \quad \text{para alguns} \quad \lambda_j \in P \quad \text{e} \quad a_i \neq a_j \in \mathbb{K}.$$

Proposição 4.2.6. Dado $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}$, onde $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}^{-1}$ com $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}^+$ relativamente primos, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\mathbf{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}} : U(\tilde{\mathfrak{h}}) \to \mathbb{K}$ tal que

$$\mathbf{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}}(h_i) = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\nu})(h_i), \qquad \sum_{r \geq 0} \mathbf{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}}(\Lambda_{i,\pm r}) u^r = \frac{(\boldsymbol{\lambda}^\pm)_i(u)}{(\boldsymbol{\mu}^\pm)_i(u)},$$

onde a divisão é a de séries de potências formais em u. Além disso, a função $\mathbf{\Psi} : \mathcal{P} \to (U(\tilde{\mathfrak{h}}))^*$ dada por $\boldsymbol{\nu} \mapsto \mathbf{\Psi}_{\boldsymbol{\nu}}$ é injetora.

Vamos identificar $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_q$ com suas imagens em $(U(\tilde{\mathfrak{h}}))^*$ e $(U_q(\tilde{\mathfrak{h}}))^*$ sobre $\mathbf{\Psi}$, respectivamente.

Dados $i \in I$, $a \in \mathbb{K}(q)^\times$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, considere

$$\boldsymbol{\omega}_{i,a,r} := \prod_{j=0}^{r-1} \boldsymbol{\omega}_{i, a q_i^{r-1-2j}}.$$

Defina também os polinômios

$$f_{i,a,r}(u) = \prod_{j=0}^{r-1} (1 - a q_i^{r-1-2j} u).$$

Proposição 4.2.7. Seja $f(u) \in \mathbb{K}(q)[u]$ um polinômio tal que todas as suas raízes estão em $\mathbb{K}(q)$ e $f(1) = 0$. Então, existem únicos $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}(q)^\times$ e $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tais que

$$f(u) = \prod_{k=1}^{m} f_{i, a_k, r_k}(u) \qquad \text{com} \qquad \frac{a_l}{a_j} \neq q^{\pm(r_l + r_j - 2p)} \quad \text{para} \quad 0 \leq p < \min\{r_l, r_j\}.$$

Esta decomposição é chamada de *q-fatoração* de $f(u)$.

Em particular, dado $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^+$ tal que $\boldsymbol{\lambda}_i(u)$ tem todas as suas raízes em $\mathbb{K}(q)[u]$ para todo $i \in I$, existem únicos $m_i \in Z_{\geq 0}$, $a_{i,k} \in \mathbb{K}(q)^\times$ e $r_{i,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tais que

$$\boldsymbol{\lambda} = \prod_{i \in I} \prod_{k=1}^{m_i} \boldsymbol{\omega}_{i,a_{i,k},r_{i,k}}$$

com

$$\frac{a_{i,j}}{a_{i,l}} \neq q_i^{\pm(r_{i,j}+r_{i,l}-2p)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{m_i} r_{i,k} = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})(h_i)$$

para todos $i \in I$, $j \neq l$ e $0 \leq p < \min\{r_{i,j}, r_{i,l}\}$.

Definição 4.2.8. Dados $i \in I$ e $a \in \mathbb{K}(q)^\times$, define-se a *$\ell$-raiz simples* $\boldsymbol{\alpha}_{i,a}$ por

$$\boldsymbol{\alpha}_{i,a} = (\boldsymbol{\omega}_{i,aq_i,2})^{-1} \prod_{j \neq i} \boldsymbol{\omega}_{j,aq_i,-c_{ji}}.$$

O subgrupo de $\mathcal{P}_q$ gerados pelas ℓ-raízes simples é chamado de *reticulado de ℓ-raízes de* $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ e será denotado por $\mathcal{Q}_q$. Considere $\mathcal{Q}_q^+$ o submonóide de $\mathcal{Q}_q$ gerado pelas ℓ-raízes simples.

Observe que $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\alpha}_{i,a}) = \alpha_i$ para todos $i \in I$ e $a \in \mathbb{K}(q)^\times$.

Se $J \subseteq I$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q$, seja $\boldsymbol{\lambda}_J$ a J-upla de funções racionais associada. Observe que, se $\boldsymbol{\lambda}_j(u) \in \mathbb{K}(q_j)(u)$ para todo $j \in J$, então $\boldsymbol{\lambda}_J$ pode ser considerado como um elemento do reticulado de ℓ-pesos de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$.

Define-se uma ordem parcial em $\mathcal{P}_q$ por $\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\lambda}$ se, e somente se, $\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}^{-1} \in \mathcal{Q}_q^+$.

4.3 $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos de ℓ-peso

Definição 4.3.1. Seja V um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo. Para cada $\lambda \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})^*$, considere

$$V_{\boldsymbol{\lambda}} := \{v \in V : \text{ para cada } \eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \text{ existe } k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ com } (\eta - \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}}(\eta))^k v = 0\}.$$

Um vetor não nulo $v \in V$ é um *vetor de ℓ-peso* se $v \in V_{\boldsymbol{\lambda}}$ para algum $\boldsymbol{\lambda} \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})^*$. Neste caso, $\boldsymbol{\lambda}$ é o *ℓ-peso* de v.

Definição 4.3.2. Um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo V é chamado de *módulo de ℓ-peso* se

$$V = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})^*} V_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Definição 4.3.3. Seja V um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo. Um vetor v de ℓ-peso $\boldsymbol{\lambda}$ é chamado de *vetor de ℓ-peso máximo* se $\eta v = \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}}(\eta)v$ para todo $\eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ e $x_{i,r}^{+}v = 0$ para todos $i \in I$ e $r \in \mathbb{Z}$. V é chamado de *módulo de ℓ-peso máximo* se V é gerado por um vetor de ℓ-peso máximo.

Proposição 4.3.4. Seja V um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo de dimensão finita. Se V é gerado por um vetor v satisfazendo

$$x_{i,r}^{+}v = 0, \quad k_i v = q^{\lambda(h_i)}v, \quad \Lambda_{i,r}v = \omega_{i,r}v, \quad \text{para todos } \ i \in I \ \text{ e } \ r \in \mathbb{Z},$$

onde $\lambda \in P^{+}$ e $\omega_{i,r} \in \mathbb{K}(q)$, então $\omega_{i,r} = 0$ se $r > \lambda(h_i)$ e $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}_q^{+}$ dado por

$$\boldsymbol{\omega}_i(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\lambda(h_i)} \omega_{i,r}u^r$$

é único tal que $\eta v = \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\omega}}(\eta)v$ para todo $\eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$. Ou seja, v é um vetor de ℓ-peso máximo de ℓ-peso $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega}) = \lambda$. O elemento $\boldsymbol{\omega}$ é chamado de *polinômio de Drinfeld* associado a v.

Se V é um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo de ℓ-peso de dimensão finita, então V é um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo de dimensão finita (por restrição da ação de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ para $U_q(\mathfrak{g})$). Assim, V é um módulo de peso. Além disso, se V é um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo de ℓ-peso máximo $\boldsymbol{\lambda}$, então,

$$\dim(V_{\mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})}) = 1 \qquad \text{e} \qquad V_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu \leq \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Proposição 4.3.5. (i) Todo $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo de ℓ-peso máximo possui um único $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-submódulo próprio maximal, e consequentemente, um único quociente irredutível. Em particular, todo $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo de ℓ-peso máximo é indecomponível.

(ii) Dois $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos de ℓ-peso máximo irredutíveis são isomorfos se, e somente se, eles têm o mesmo ℓ-peso máximo.

Definição 4.3.6. Sejam $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^{+}$ e $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})$. O *módulo de Weyl* $W_q(\boldsymbol{\lambda})$ *de ℓ-peso máximo* $\boldsymbol{\lambda}$ é o $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo dado pelo quociente de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ pelo ideal à esquerda gerado por

$$x_{i,r}^{+}, \quad (x_{i,r}^{-})^{\lambda(h_i)+1}, \quad \eta - \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}}(\eta), \quad \text{para todos } \ i \in I, \ \ r \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ \eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}}).$$

Denote por $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ o único quociente irredutível de $W_q(\boldsymbol{\lambda})$. O módulo de Weyl $W(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{+}$, de $\tilde{\mathfrak{g}}$ é definido de modo análogo. Seu quociente irredutível será denotado por $V(\boldsymbol{\lambda})$.

Por definição, o módulo de Weyl $W_q(\boldsymbol{\lambda})$ (e também $W(\boldsymbol{\lambda})$) é um módulo de ℓ-peso máximo de ℓ-peso máximo $\boldsymbol{\lambda}$.

Teorema 4.3.7. Para cada $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^+$ (resp. $\mathcal{P}^+$), o módulo de Weyl $W_q(\boldsymbol{\lambda})$ (resp. $W(\boldsymbol{\lambda})$) tem dimensão finita. Além disso, todo $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo (resp. $U_q(\mathfrak{g})$-módulo) de ℓ-peso máximo $\boldsymbol{\lambda}$ de dimensão finita é isomorfo a um quociente do módulo de Weyl.

Corolário 4.3.8. Todo $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo de ℓ-peso irredutível de dimensão finita é isomorfo a $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ para algum $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^+$.

Não é verdade que $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é um módulo de ℓ-peso para todo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^+$. Isto acontece porque $\mathbb{K}(q)$ não é algebricamente fechado. De fato, pode-se provar que $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é um módulo de ℓ-peso se, e somente se, $\boldsymbol{\lambda}_i(u)$ tem todas as raízes em $\mathbb{K}(q)$ para todo $i \in I$.

Definição 4.3.9. Define-se a *álgebra de correntes* de $\mathfrak{g}$ como sendo a subálgebra de Lie de $\tilde{\mathfrak{g}}$ dada por $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$.

Adiante vamos precisar do lema seguinte, que é uma consequência da demonstração do Teorema 4.3.7.

Lema 4.3.10. Se V é um $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo de dimensão finita de ℓ-peso máximo e v é um vetor de ℓ-peso máximo, então $V = U(\mathfrak{g}[t])v$.

4.4 Afinizações minimais

Apresentaremos aqui a noção de afinização minimal de um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo irredutível introduzida em [3].

Definição 4.4.1. Dado $\lambda \in P^+$, um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo V de dimensão finita é uma *afinização* de $V_q(\lambda)$ se, como um $U_q(\mathfrak{g})$-módulo,

$$V \cong V_q(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu<\lambda} V_q(\mu)^{\oplus m_\mu(V)},$$

para alguns $m_\mu(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Duas afinizações de $V_q(\lambda)$ são *equivalentes* se são isomorfas como $U_q(\mathfrak{g})$-módulos.

Exemplo 4.4.2. Sejam $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^+$ e $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})$. Como $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é gerado por um vetor v de ℓ-peso máximo (em particular v é vetor de peso máximo), tem-se

$$V_q(\boldsymbol{\lambda}) = U_q(\tilde{\mathfrak{g}})v = U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^-)v.$$

Além disso, $v \in V_q(\boldsymbol{\lambda})_\lambda$ e $\dim V_q(\boldsymbol{\lambda})_\lambda = 1$. Como $x_{i,r}^- V_q(\boldsymbol{\lambda})_\mu \subseteq V_q(\boldsymbol{\lambda})_{\mu-\alpha_i}$, segue que

$$V_q(\boldsymbol{\lambda}) \cong V_q(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu<\lambda} V_q(\mu)^{\oplus m_\mu(\boldsymbol{\lambda})},$$

como $U_q(\mathfrak{g})$-módulo. Logo $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é uma afinização de $V_q(\lambda)$.

A ordem parcial em P^+ induz uma ordem parcial no conjunto das (classes de equivalências das) afinizações de $V_q(\lambda)$ da seguinte maneira: se V e W são afinizações de $V_q(\lambda)$, então $V \leq W$ se $m_\mu(V) \leq m_\mu(W)$ para todo $\mu \in P^+$ ou, para todo $\mu \in P^+$ tal que $m_\mu(V) > m_\mu(W)$, existe $\mu < \nu < \lambda$ tal que $m_\nu(V) < m_\nu(W)$. Um elemento minimal com relação a essa ordem parcial é chamado de *afinização minimal* de $V_q(\lambda)$.

Para simplificar a exposição notacionalmente, até o fim desta seção, assumiremos que $\mathfrak{g}$ é do tipo A, D ou E.

Teorema 4.4.3. Sejam $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_q^+$, $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})$ e $V = V_q(\boldsymbol{\lambda})$. Suponha que $\mathfrak{g}$ é do tipo A. Então V é uma afinização minimal de $V_q(\lambda)$ se, e somente se, existem $a \in \mathbb{K}(q)^\times$ e $\epsilon \in \{1, -1\}$ tais que

$$\boldsymbol{\lambda} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{i,a_i,\lambda(h_i)} \qquad \text{com} \quad a_1 = a \quad \text{e} \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} = q^{\epsilon(\lambda(h_i)+\lambda(h_{i+1})-1)}$$

para todo $i \in I$, $i < n$. Se $\mathfrak{g}$ é do tipo D ou E, suponha que o suporte de λ está contido em um subdiagrama conexo $J \subseteq I$ de tipo A. Então, V é uma afinização minimal de $V_q(\lambda)$ se, e somente se, $V_q(\boldsymbol{\lambda}_J)$ é uma afinização minimal de $V_q(\lambda_J)$.

Corolário 4.4.4. Seja $\lambda \in P^+$ tal que $\overline{\mathrm{supp}}(\lambda)$ não contém um subdiagrama de tipo D_4. Então, $V_q(\lambda)$ tem uma única classe de equivalência de afinizações minimais.

Corolário 4.4.5. Para cada $a \in \mathbb{K}(q)^\times$, $i \in I$ e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, o $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo $V_q(\boldsymbol{\omega}_{i,a,m})$ é uma afinização minimal de $V_q(m\omega_i)$.

Os módulos $V_q(\boldsymbol{\omega}_{i,a,m})$ são conhecidos como *módulos de Kirillov-Reshetikhin*.

Proposição 4.4.6. Sejam $\boldsymbol{\lambda} \in P_q^+$ e $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})$. Se $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é uma afinização minimal de $V_q(\lambda)$, então existem $a_i \in \mathbb{K}(q)^\times$, $i \in I$, tais que $\boldsymbol{\lambda} = \prod_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_{i,a_i,\lambda(h_i)}$ e $\frac{a_i}{a_j} \in q^{\mathbb{Z}}$ para todos $i, j \in I$.

Definição 4.4.7. Denote por $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}^+$ o subconjunto de $\mathcal{P}_q$ formado por n-uplas de polinômios com coeficientes em $\mathbb{A}$. Considere $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$ o subconjunto de $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}^+$ formado por n-uplas de polinômios cujos coeficientes líderes estão em $\mathbb{K}q^{\mathbb{Z}} \backslash \{0\} = \mathbb{A}^\times$. Dado $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^+$, seja $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ o elemento de $\mathcal{P}^+$ obtido de $\boldsymbol{\lambda}$ por avaliação de q em 1.

Corolário 4.4.8. Para cada $\lambda \in P^+$ existe $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$ tal que $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é uma afinização minimal de $V_q(\lambda)$.

4.5 Limites clássicos

Definição 4.5.1. Um $\mathbb{A}$-*reticulado* (ou $\mathbb{A}$-*forma*) de um $\mathbb{K}(q)$-espaço vetorial V é um $\mathbb{A}$-submódulo livre L de V tal que $\mathbb{K}(q) \otimes_{\mathbb{A}} L = V$. Se V é um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo, um $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-*reticulado admissível* de V é um $\mathbb{A}$-reticulado de V que também é um $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-submódulo de V.

Dado um $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-reticulado admissível de um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo V, defina

$$\bar{L} = \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} L,$$

onde $\mathbb{K}$ é considerado como um $\mathbb{A}$-módulo definindo a ação de q como identidade. Então, $\bar{L}$ é um $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo como na Proposição 3.5.6 e $\dim(\bar{L}) = \dim(V)$.

O próximo teorema é essencialmente um corolário da demonstração do Teorema 4.3.7.

Teorema 4.5.2. Sejam V um quociente não trivial de $W_q(\boldsymbol{\lambda})$ para algum $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$, v um vetor de ℓ-peso máximo de V e $L = U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})v$. Então, L é um $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-reticulado admissível de V e $\mathrm{ch}(\bar{L}) = \mathrm{ch}(V)$. Em particular, $\bar{L}$ é um quociente de $W(\overline{\boldsymbol{\lambda}})$.

Dados $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$, v um vetor de ℓ-peso máximo de $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ e $L = U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})v$, denote por $\overline{V_q(\boldsymbol{\lambda})}$ o $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo $\bar{L}$, como definido no Teorema 4.5.2.

O próximo lema segue da Proposição 4.4.6.

Lema 4.5.3. Seja $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$ tal que $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é uma afinização minimal. Então, $\overline{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\omega}_{\lambda,a}$ para algum $a \in \mathbb{K}^{\times}$, onde $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})$.

Dado $a \in \mathbb{K}$, considere $\tau_a : \mathfrak{g}[t] \to \mathfrak{g}[t]$ o automorfismo de álgebras de Lie dado por $\tau_a(x \otimes f(t)) = x \otimes f(t-a)$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $f(t) \in \mathbb{K}[t]$.

Definição 4.5.4. Sejam $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$, $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})$ e $a \in \mathbb{K}^{\times}$ tais que $\overline{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\omega}_{\lambda,a}$. O $\mathfrak{g}[t]$-módulo $L(\boldsymbol{\lambda})$ é definido pelo "pullback" de $\overline{V_q(\boldsymbol{\lambda})}$ por τ_a.

Observe que, devido ao Lema 4.3.10, $L(\boldsymbol{\lambda})$ é gerado pela imagem de v como $\mathfrak{g}[t]$-módulo.

Capítulo 5

Caracteres de limites clássicos de afinizações minimais

Neste capítulo $\mathfrak{g}$ será uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero e $\mathfrak{h}$, R, B, R^+, $\mathcal{W}$, I, C, P, P^+, $\mathfrak{n}^\pm$, $x_\alpha^\pm$ e h_α $(\alpha \in R)$ como na Seção 2.3.

5.1 $\mathfrak{g}[t]$-módulos graduados e lemas preliminares

Relembrando, a álgebra de correntes de $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ com o colchete definido por extensão linear de

$$[x \otimes f(t), y \otimes g(t)] = [x, y] \otimes (f(t)g(t))$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ e $f(t), g(t) \in \mathbb{K}[t]$.

Observe que as álgebras $\mathfrak{g}[t]$ e $U(\mathfrak{g}[t])$ são $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduadas, onde a graduação é dada pelas potências de t.

Denote $x_{\alpha,r}^\pm = x_\alpha^\pm \otimes t^r$ e $h_{\alpha,r} = h_\alpha \otimes t^r$, $\alpha \in R^+$. Também, denote as subálgebras $\mathfrak{n}^\pm \otimes \mathbb{K}[t]$ de $\mathfrak{g}[t]$ por $\mathfrak{n}^\pm[t]$.

A álgebra $\mathfrak{g}$ é isomorfa à subálgebra $\mathfrak{g} \otimes 1$ de $\mathfrak{g}[t]$. Assim sendo, vamos identificar $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{g} \otimes 1$ e escrever apenas $x_\alpha^\pm$ e h_α ao invés de $x_{\alpha,0}^\pm$ e $h_{\alpha,0}$, $\alpha \in R$.

Dado um $\mathfrak{g}$-módulo V, a ação de $\mathfrak{g}$ pode ser estendida para $\mathfrak{g}[t]$ como descrito a seguir. Fixe $a \in \mathbb{K}$ e considere a função $\mathrm{ev}_a : \mathfrak{g}[t] \to \mathfrak{g}$ dada por $\mathrm{ev}_a(x \otimes f(t)) = f(a)x$. Facilmente verifica-se que ev_a é um homomorfismo de álgebras de Lie. Então V é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo através do "pullback" por ev_a, ou seja, V se torna um $\mathfrak{g}[t]$-módulo onde a ação de $\mathfrak{g}[t]$ é tal que

$$(x \otimes f(t))v = (f(a)x)v,$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ e $v \in V$. Denote por $\mathrm{ev}_a(V)$ o $\mathfrak{g}[t]$-módulo obtido.

Definição 5.1.1. Um $\mathfrak{g}[t]$-módulo V é $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-*graduado* se V é a soma direta de subespaços $V = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V[s]$ e $(x \otimes t^r)v \in V[r+s]$ para todos $v \in V[s]$, $x \in \mathfrak{g}$, $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Se V é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduado, denote por $V(s)$ o quociente de V pelo $\mathfrak{g}[t]$-submódulo $\bigoplus_{k>s} V[k]$.

Observação 5.1.2. Se V é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduado, para cada $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $V[s]$ é um $\mathfrak{g}$-módulo, onde a ação de $\mathfrak{g}$ é dada pela restrição da ação de $\mathfrak{g}[t]$ à subálgebra $\mathfrak{g}$, pois $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}[t][0]$ é o subespaço homogêneo de grau 0 de $\mathfrak{g}[t]$.

Proposição 5.1.3. Sejam V_0 e V_1 $\mathfrak{g}$-módulos tais que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V_0, V_1) \neq \{0\}$, onde $\mathfrak{g}$ é o $\mathfrak{g}$-módulo dado pela representação adjunta. Fixe $p \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V_0, V_1) \setminus \{0\}$. Então as seguintes fórmulas estendem a estrutura canônica de $\mathfrak{g}$-módulo de $V := V_0 \oplus V_1$ para uma de $\mathfrak{g}[t]$-módulo:

(i) $(x \otimes t)v_0 = p(x \otimes v_0)$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v_0 \in V_0$;

(ii) $(x \otimes t)v_1 = 0$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v_1 \in V_1$;

(iii) $(x \otimes t^r)v_s = 0$ para todos $x \in \mathfrak{g}$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ e $v_s \in V_s$, $s = 0, 1$.

O $\mathfrak{g}[t]$-módulo obtido V_p é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduado, onde $V_p[0] \cong_{\mathfrak{g}} V_0$, $V_p[1] \cong_{\mathfrak{g}} V_1$ e $V_p[s] \cong \{0\}$ se $s \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Além disso, se p é sobrejetora e $v_0 \in V_0$ é tal que $V_0 = U(\mathfrak{g})v_0$, então $V_p = U(\mathfrak{g}[t])v_0$.

Demonstração. Mostremos que essas expressões definem uma estrutura de $\mathfrak{g}[t]$-módulo em $V_0 \oplus V_1$. Sejam $v_0 + v_1, w_0 + w_1 \in V_0 \oplus V_1$, $x, y \in \mathfrak{g}$, $a, b \in \mathbb{K}$ e $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Então,

$$(a(x \otimes t^r) + b(y \otimes t^s))(v_0 + v_1) = a(x \otimes t^r)(v_0 + v_1) + b(y \otimes t^s)(v_0 + v_1),$$

por definição. Também,

$$(x \otimes t^r)(a(v_0 + v_1) + b(w_0 + w_1)) = (x \otimes t^r)(av_0 + bw_0) + (x \otimes t^r)(av_1 + bw_1).$$

Se $r > 1$, então

$$(x \otimes t^r)(av_0 + bw_0) = (x \otimes t^r)(av_1 + bw_1) = 0$$

e

$$a(x \otimes t^r)v_0 = a(x \otimes t^r)v_1 = b(x \otimes t^r)w_0 = b(x \otimes t^r)w_1 = 0,$$

logo,

$$(x \otimes t^r)(a(v_0 + v_1) + b(w_0 + w_1)) = 0 = a(x \otimes t^r)(v_0 + v_1) + b(x \otimes t^r)(w_0 + w_1).$$

Se $r = 1$, então

$$\begin{aligned}
(x \otimes t)(av_0 + bw_0) &= p(x \otimes (av_0 + bw_0)) \\
&= p(a(x \otimes v_0) + b(x \otimes w_0)) \\
&= ap(x \otimes v_0) + bp(x \otimes w_0) \\
&= a(x \otimes t)v_0 + b(x \otimes t)w_0
\end{aligned}$$

e

$$(x \otimes t)(av_1 + bw_1) = 0 = a(x \otimes t)v_1 + b(x \otimes t)w_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(x \otimes t)(a(v_0 + v_1) + b(w_0 + w_1)) &= (x \otimes t^r)(av_0 + bw_0) + (x \otimes t^r)(av_1 + bw_1) \\
&= a(x \otimes t)v_0 + b(x \otimes t)w_0 + a(x \otimes t)v_1 + b(x \otimes t)w_1 \\
&= a(x \otimes t)(v_0 + v_1) + b(x \otimes t)(w_0 + w_1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(x \otimes t^r)(a(v_0 + v_1) + b(w_0 + w_1)) = a(x \otimes t^r)(v_0 + v_1) + b(x \otimes t^r)(w_0 + w_1).$$

Por fim,

$$[x \otimes t^r, y \otimes t^s](v_0 + v_1) = ([x, y] \otimes t^{r+s})(v_0 + v_1).$$

Se $r + s > 1$, então $r > 1$ ou $s > 1$ e,

$$([x, y] \otimes t^{r+s})(v_0 + v_1) = 0 = (x \otimes t^r)((y \otimes t^s)(v_0 + v_1)) - y \otimes t^s((x \otimes t^r)(v_0 + v_1)).$$

Se $r + s = 1$, então $r = 0$ e $s = 1$, ou, $r = 1$ e $s = 0$. No primeiro caso temos,

$$\begin{aligned}
([x, y] \otimes t)(v_0 + v_1) &= p([x, y] \otimes v_0) + 0 \\
&= p(xy \otimes v_0) \\
&= p(x(y \otimes v_0)) - p(y \otimes (xv_0)) \\
&= xp((y \otimes v_0)) - p(y \otimes (xv_0)) \\
&= x((y \otimes t)v_0) - (y \otimes t)(xv_0) \\
&= x((y \otimes t)v_0) + x((y \otimes t)v_1) - (y \otimes t)(xv_0) + (y \otimes t)(xv_1) \\
&= (x \otimes t^r)((y \otimes t^s)(v_0 + v_1)) - (y \otimes t^s)((x \otimes t^r)(v_0 + v_1)).
\end{aligned}$$

No segundo caso,

$$\begin{aligned}
([x,y]\otimes t)(v_0+v_1) &= p([x,y]\otimes v_0)+0\\
&= p(-[y,x]\otimes v_0)\\
&= p(-yx\otimes v_0)\\
&= p(x\otimes(yv_0))-p(y(x\otimes v_0))\\
&= p(x\otimes(yv_0))-yp(x\otimes v_0)\\
&= (x\otimes t)(yv_0)-y((x\otimes t)v_0)\\
&= (x\otimes t)(yv_0)+(x\otimes t)(yv_1)-y((x\otimes t)v_0)+y((x\otimes t)v_1)\\
&= (x\otimes t^r)((y\otimes t^s)(v_0+v_1))-(y\otimes t^s)((x\otimes t^r)(v_0+v_1)).
\end{aligned}$$

Portanto

$$[x\otimes t^r, y\otimes t^s](v_0+v_1)=(x\otimes t^r)((y\otimes t^s)(v_0+v_1))-y\otimes t^s((x\otimes t^r)(v_0+v_1)).$$

Isso mostra que V tem estrutura de $\mathfrak{g}[t]$-módulo. As demais afirmações são imediatas de (i), (ii) e (iii). □

Os lemas a seguir serão necessários adiante.

Lema 5.1.4. [28] Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita e suponha que $l\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\nu_k\in P$, $v_k\in V_{\nu_k}$, para $k=1,\dots,l$, são tais que

$$V=\sum_{k=1}^{l} U(\mathfrak{n}^-)v_k.$$

Fixe uma decomposição

$$V=\bigoplus_{j=1}^{m} V_j,$$

onde $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mu_j\in P^+$, $V_j=V(\mu_j)$, e seja $\pi_j:V\to V_j$ a projeção canônica associada, para $j=1,\dots,m$. Então existem distintos $k_1,\dots,k_m\in\{1,\dots,l\}$ tais que $\nu_{k_j}=\mu_j$ e $\pi_j(v_{k_j})\neq 0$.

Demonstração. Procederemos por indução sobre m. Se $m=1$ o lema é imediato. Caso contrário, suponha, sem perda de generalidade, que μ_m é um peso maximal de V. Neste caso, deve existir k_j tal que $\nu_{k_j}=\mu_m$ e v_{k_j} gera um submódulo irredutível de V isomorfo a $V(\mu_m)$. Em particular, $\pi_j(v_{k_j})\neq 0$. A menos de reordenação, podemos supor $j=m$. O lema segue agora da hipótese de indução aplicada a $\overline{V}:=V/U(\mathfrak{g})v_{k_m}$ e à decomposição induzida $\overline{V}=\bigoplus_{j=1}^{m-1}\overline{V}_j$, onde $\overline{V}_j$ é a imagem de V_j em $\overline{V}$. □

Lema 5.1.5. [7] Considere a *álgebra de Heisenberg* 3-dimensional $\mathfrak{H}$ gerada por elementos x, y, z, onde z é central e $[x, y] = z$. Seja V um $\mathfrak{H}$-módulo e suponha $0 \neq v \in V$ tal que $x^r v = 0$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Então, para todos $k, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, o elemento $y^k z^s v$ está no subespaço vetorial gerado pelos elementos da forma $x^a y^b z^c v$ com $0 \leq c < r$, $a + c = s$, $b + c = k + s$.

Demonstração. Se $s = 0$ o lema é imediato, então suponha $s > 0$. Procederemos por indução sobre r. Suponha $r = 1$. Então

$$y^k z^s v = y^k z^{s-1} xyv = y^k xyz^{s-1} v = (xy^k - ky^{k-1} z) yz^{s-1} v = xy^{k+1} z^{s-1} v - ky^k z^s v,$$

assim,

$$(k+1) y^k z^s v = xy^{k+1} z^{s-1} v. \tag{5.1}$$

Observe que se $k = 0$ também vale (5.1). Se $s = 1$, acabou. Se $s > 1$, então

$$xy^{k+1} z^{s-1} v = xy^{k+1} z^{s-2} xyv = x^2 y^{k+2} z^{s-2} v - kxy^{k+1} z^{s-1} v,$$

logo,

$$(k+1) xy^{k+1} z^{s-1} v = x^2 y^{k+2} z^{s-2} v.$$

Procedendo desta forma indutivamente em s, obtém-se o lema para $r = 1$. Assuma agora $r > 1$, $x^r v = 0$ e o lema válido para $r' < r$. Então

$$y^k z^s v = y^k z^{s-1} xyv - y^k z^{s-1} yxv = xy^{k+1} z^{s-1} v - ky^k z^s v - y^{k+1} z^{s-1} xv,$$

daí,

$$(k+1) y^k z^s v = xy^{k+1} z^{s-1} v - y^{k+1} z^{s-1} xv.$$

Como $x^{r-1} xv = 0$, segue da hipótese de indução que $y^{k+1} z^{s-1} xv$ está no subespaço vetorial gerado pelos elementos da forma $x^{a'} y^{b'} z^{c'} xv$ com $0 \leq c' < r-1$, $a' + c' = s-1$, $b' + c' = k+s$. Mas,

$$x^{a'} y^{b'} z^{c'} xv = x^{a'} (xy^{b'} - b' y^{b'-1} z) z^{c'} v = x^{a'+1} y^{b'} z^{c'} - b' x^{a'} y^{b'-1} z^{c'+1} v,$$

logo esses elementos $x^{a'} y^{b'} z^{c'} xv$ estão no subespaço vetorial gerado pelos elementos da forma $x^a y^b z^c v$ com $0 \leq c < r$, $a + c = s$, $b + c = k + s$. Procedendo novamente por indução em s, obtém-se também que $xy^{k+1} z^{s-1} v$ está no subespaço vetorial gerado pelos elementos da forma $x^a y^b z^c v$ com $0 \leq c < r$, $a + c = s$, $b + c = k + s$, o que conclui a prova. $\square$

Lema 5.1.6. Considere a, b, c elementos de uma álgebra associativa A tais que $ab - ba = c$, $ac = ca$, $bc = cb$. Sejam $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Se $r \leq s$, então

$$a^r b^s = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{s!}{(s-i)!} b^{s-i} a^{r-i} c^i = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{s!}{(s-i)!} b^{s-i} c^i a^{r-i}.$$

E, se $r > s$, então

$$a^r b^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \frac{r!}{(r-i)!} b^{s-i} a^{r-i} c^i = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \frac{r!}{(r-i)!} b^{s-i} c^i a^{r-i}.$$

Ou equivalentemente, resumindo em uma única fórmula,

$$a^r b^s = \sum_{i=0}^{\min\{r,s\}} \binom{r}{i}\binom{s}{i} i!\, b^{s-i} a^{r-i} c^i = \sum_{i=0}^{\min\{r,s\}} \binom{r}{i}\binom{s}{i} i!\, b^{s-i} c^i a^{r-i}.$$

Demonstração. Simples indução em r e s. $\square$

Lema 5.1.7. Sejam V um $\mathfrak{g}[t]$-módulo, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu \in P$ e $v \in V_\mu$ um vetor satisfazendo $x^-_{i,r} v = 0$ para todo $i \in I$ e $h_{i,s} v = 0$ para todos $i \in I$ e $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então, existe $r' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $x^-_{\alpha,s} v = 0$ para todos $\alpha \in R^+$ e $s \geq r'$.

Demonstração. Primeiro observe que, se $x^-_{\alpha,s'} v = 0$, $\alpha \in R^+$, $s' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, então $x^-_{\alpha,s} v = 0$ para todo $s \geq s'$, pois, se $s'' > 0$, temos

$$\begin{aligned} x^-_{\alpha,s'+s''} v &= x^-_\alpha \otimes t^{s'+s''} v \\ &= -\frac{1}{2}[h_\alpha, x^-_\alpha] \otimes t^{s'+s''} v \\ &= -\frac{1}{2}[h_{\alpha,s''}, x^-_{\alpha,s'}] v \\ &= -\frac{1}{2} h_{\alpha,s''} x^-_{\alpha,s'} v + \frac{1}{2} x^-_{\alpha,s'} h_{\alpha,s''} v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, seja $\alpha \in R^+$. Mostremos, por indução em $\mathrm{ht}(\alpha)$ que $x^-_{\alpha, r\mathrm{ht}(\alpha)} v = 0$. Suponha $\mathrm{ht}(\alpha) = 1$. Então $\alpha = \alpha_j$ é uma raiz simples, logo $x^-_{j, r\mathrm{ht}(\alpha_j)} v = x^-_{j,r} v = 0$. Suponha agora $\mathrm{ht}\alpha = k > 1$ e $x^-_{\beta, r\mathrm{ht}(\beta)} v = 0$ para toda $\beta \in R^+$ tal que $\mathrm{ht}(\beta) < k$. Pelo Lema 2.2.22, α pode ser escrita da forma

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{k-1}} + \alpha_{i_k},$$

com α_{i_j} raiz simples de modo que as somas parciais $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}$ são raízes positivas, $s = 1, \ldots, k$. Assim $\beta := \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{k-1}} \in R^+$ é tal que $\mathrm{ht}\beta = k - 1$. Logo, pela hipótese de indução, $x^-_{\beta, r\mathrm{ht}(\beta)} v = 0$. Daí, como $r\mathrm{ht}(\alpha) = r(\mathrm{ht}(\beta) + 1) = r\mathrm{ht}(\beta) + r$, temos

$$x^-_{\alpha, r\mathrm{ht}(\alpha)} v = [x^-_{\beta, r\mathrm{ht}(\beta)}, x^-_{i_k, r}] v = x^-_{\beta, r\mathrm{ht}(\beta)} x^-_{i_k, r} v - x^-_{i_k, r} x^-_{\beta, r\mathrm{ht}(\beta)} v = 0.$$

O que conclui a indução.

Por fim, considere $r' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $r' \geq r\mathrm{ht}(\alpha)$, para toda $\alpha \in R^+$ (é possível pois R^+ é finito). Segue do que foi mostrado anteriormente que $x^-_{\alpha,s} v = 0$ para todos $\alpha \in R^+$ e $s \geq r'$. $\square$

5.2 Uma conjectura para limites clássicos de afinizações minimais

Para cada subconjunto J de I, sejam $\mathfrak{g}_J$, $\mathfrak{n}_J^{\pm}$, $\mathfrak{h}_J$ e R_J^+ como definidos no final da Seção 3.1.

Definição 5.2.1. Suponha que $\mathfrak{g}$ não é do tipo D nem E. Um subdiagrama conexo $J \subseteq I$ é *admissível* se J é do tipo A. Se $\mathfrak{g}$ é do tipo D ou E, seja $i_0 \in I$ o único vértice ligado com outros três vértices. Um subdiagrama conexo $J \subseteq I$ é *admissível* se J é do tipo A e $J \backslash \{i_0\}$ é conexo.

Definição 5.2.2. [28] Dado $\lambda \in P^+$, define-se $A(\lambda)$ como sendo o $\mathfrak{g}[t]$-módulo gerado por um vetor v satisfazendo as relações:

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0, \quad h_i v = \lambda(h_i)v, \quad (x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0, \quad h_{i,r}v = 0, \quad x_{\alpha,1}^- v = 0 \tag{5.2}$$

para todos $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $\alpha \in R_J^+$ com $J \subseteq I$ subdiagrama admissível.

Observe que $A(\lambda)$ é $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduado, pois os elementos que definem as relações de $A(\lambda)$ são homogêneos.

Proposição 5.2.3. [28] Para cada $\lambda \in P^+$, o $\mathfrak{g}[t]$-módulo $A(\lambda)$ tem dimensão finita.

Demonstração. Considere v o gerador de $A(\lambda)$ da Definição 5.2.2 e observe que $A(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-[t])v$. Para cada $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, os vetores em $(A(\lambda)[r])_\mu$ são da forma $x_{\beta_1,r_1}^- \dots x_{\beta_k,r_k}^- v$, com $k, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in R^+$ tais que $\lambda - \beta_1 - \dots - \beta_k = \mu$ e $r_1 + \dots + r_k = r$, logo $(A(\lambda)[r])_\mu$ tem dimensão finita. Como claramente $A(\lambda)[r]$ é a soma direta dos seus espaços de pesos e R^+ é finito (o que implica que $A(\lambda)[r]$ tem uma quantidade finita de pesos) segue que $A(\lambda)[r]$ tem dimensão finita. Então, pelo Teorema 2.3.13, todo peso de $A(\lambda)[r]$ é conjugado de um único peso dominante e $\dim(A(\lambda)[r])_\mu = \dim(A(\lambda)[r])_{w\mu}$ para todo $w \in \mathcal{W}$. Assim, como $A(\lambda) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A(\lambda)[r]$, segue que

$$\dim A(\lambda)_\mu = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \dim(A(\lambda)[r])_\mu = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \dim(A(\lambda)[r])_{w\mu} = \dim A(\lambda)_{w\mu}$$

para todo $w \in \mathcal{W}$. Claramente, todo peso de $A(\lambda)$ é peso de $A(\lambda)[r]$ para algum $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e se μ é um peso de $A(\lambda)$, então $\mu \leq \lambda$. Daí, μ é um peso de $A(\lambda)$ somente se $\mu \in P(\lambda) := \{w\nu : w \in \mathcal{W},\ \nu \in P^+,\ \nu \leq \lambda\}$. De fato, se $\mu \notin P(\lambda)$, seja λ' o único peso dominante tal que $\lambda' = w\mu$ para algum $w \in \mathcal{W}$. Como $P(\lambda)$ é $\mathcal{W}$-invariante, temos $\lambda' \notin P(\lambda)$, logo $\lambda' \nleq \lambda$, contradição. Assim, como $\mathcal{W}$ é finito, segue que $A(\lambda)$ tem uma quantidade finita de pesos. Resta mostrar que $A(\lambda)[s] = 0$ para $s \gg 0$. Como $\{i\} \subseteq I$ é um subdiagrama admissível para todo $i \in I$, segue que $x_{i,1}^- v = 0$ para todo $i \in I$. Segue do Lema 5.1.7 que $x_{\alpha,r}^- v = 0$ para todo $\alpha \in R^+$ se $r \gg 0$. Seja $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $x_{\alpha,s}^- v = 0$ para todos $\alpha \in R^+$

e $s \geq r$. Então, ordenando uma base de $\mathfrak{n}^-[t]$ de modo que os $x^-_{\alpha,k} \leq x^-_{\beta,l}$ se $k < r \leq l$, pelo Teorema de PBW (Corolário 2.1.55), $A(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-[t])v$ é formado por combinações lineares dos vetores $x^-_{\alpha,k}$, $\alpha \in R^+$, $k < r$. Daí, para se obter $A(\lambda)[s]$ com $s \geq r$, deve-se agir em v com elementos da forma $x^-_{\beta_i,r_i}$ com $r_i < r$ e $\sum_i r_i = s$. Como a quantidade de pesos em $A(\lambda)$ é finita, segue que $A(\lambda)[s] = 0$ para $s \gg 0$. □

Definição 5.2.4. Dados $i \in I$ e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, define-se $M(m\omega_i)$ com sendo o $\mathfrak{g}[t]$-módulo gerado por um vetor $v_{i,m}$ satisfazendo as relações:

$$\mathfrak{n}^+[t]v_{i,m} = 0, \quad h_j v_{i,m} = \delta_{ij} m v_{i,m}, \quad h_{j,r} v_{i,m} = 0, \quad j \in I,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \tag{5.3}$$

e

$$(x_i^-)^{m+1} v_{1,m} = x_j^- v_{1,m} = x^-_{i,1} v_{i,m} = 0, \quad j \in I \setminus \{i\}. \tag{5.4}$$

Observe que $M(m\omega_i)$ é $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduado, pois novamente os elementos que definem as relações de $M(m\omega_i)$ são homogêneos.

A próxima proposição foi demonstrada, quando $\mathfrak{g}$ não é do tipo E ou F, a partir de resultados de [4, 6, 7], explorando a estrutura de $M(m\omega_i)$. A demonstração apresentada a seguir vale para todos os tipos de $\mathfrak{g}$ e não necessita do conhecimento da estrutura de $M(m\omega_i)$.

Proposição 5.2.5. $M(m\omega_i) \cong A(m\omega_i)$. Em particular, $M(m\omega_i)$ tem dimensão finita.

Demonstração. $A(m\omega_i)$ é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_i)$, pois $\{i\}$ é admissível e se v é o gerador de $A(m\omega_i)$ da Definição 5.2.2, então claramente v satisfaz as relações (5.3) e (5.4).

Agora, seja $J \subseteq I$ um subdiagrama admissível. Em particular J é do tipo A, logo as raízes em R^+_J são as possíveis somas $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$ com $i_j \neq i_l$ se $j \neq l$ e α_{i_j} raízes simples de $\mathfrak{g}_J$ tais que o subdiagrama $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq J$ é conexo.

Considere $\alpha \in R^+_J$. Procederemos por indução em htα para mostrar que, se a coordenada de α em α_i é nula, então $x^-_\alpha v_{i,m} = 0$, e, se a coordenada de α em α_i é não nula, então $x^-_{\alpha,1} v_{i,m} = 0$. Suponha ht$\alpha = 1$. Então $\alpha = \alpha_j$ é uma raiz simples. Se $j \neq i$, então $x^-_\alpha v_{i,m} = x^-_j v_{i,m} = 0$. Se $j = i$, então $x^-_{\alpha,1} v_{i,m} = x^-_{i,1} v_{i,m} = 0$. Suponha agora ht$\alpha = k > 1$ e o resultado válido para toda $\beta \in R^+_J$ tal que ht$\beta < k$. Pelo Lema 2.2.22, α pode ser escrita da forma

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{k-1}} + \alpha_{i_k},$$

com α_{i_j} raiz simples de modo que as somas parciais $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}$ são raízes positivas, $s = 1, \ldots, k$. Assim $\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{k-1}} \in R^+_J$ é tal que ht$\beta = k - 1$. Suponha que a coordenada de β em α_i é nula. Então, pela hipótese de indução, $x^-_\beta v_{i,m} = 0$. Assim, se $i_k \neq i$, então a coordenada de α em α_i é nula e

$$x^-_\alpha v_{i,m} = [x^-_\beta, x^-_{i_k}] v_{i,m} = x^-_\beta x^-_{i_k} v_{i,m} - x^-_{i_k} x^-_\beta v_{i,m} = 0.$$

Se $i_k = i$, temos a coordenada de α em α_i é não nula e

$$x_{\alpha,1}^- v_{i,m} = [x_\beta^-, x_{i,1}^-] v_{i,m} = x_\beta^- x_{i,1}^- v_{i,m} - x_{i,1}^- x_\beta^- v_{i,m} = 0.$$

Suponha agora que a coordenada de β em α_i é não nula (e assim a coordenada de α em α_i é não nula). Então $i_j = i$ para algum $j \in \{1, \dots, k-1\}$ e pela hipótese de indução $x_{\beta,1}^- v_{i,m} = 0$. Como $\beta + \alpha_{i_k} = \alpha \in R_J^+$ e J é do tipo A, segue que $i_k \neq i$, logo $x_{i_k}^- v_{i,m} = 0$. Assim,

$$x_{\alpha,1}^- v_{i,m} = [x_{\beta,1}^-, x_{i_k}^-] v_{i,m} = x_{\beta,1}^- x_{i_k}^- v_{i,m} - x_{i_k}^- x_{\beta,1}^- v_{i,m} = 0.$$

O que conclui a indução.

Por fim, se $\alpha \in R_J^+$ é tal que $x_\alpha^- v_{i,m} = 0$, então

$$x_{\alpha,1}^- v_{i,m} = -\frac{1}{2}[h_{\alpha,1}, x_\alpha^-] v_{i,m} = -\frac{1}{2}(h_{\alpha,1} x_\alpha^- v_{i,m} - x_\alpha^- h_{\alpha,1} v_{i,m}) = 0.$$

Portanto $x_{\alpha,1}^- v_{i,m} = 0$ para toda $\alpha \in R_J^+$.

Logo $v_{i,m}$ satisfaz as relações (5.2). Assim $M(m\omega_i)$ é isomorfo a um quociente de $A(m\omega_i)$.

Deste modo $M(m\omega_i) \cong A(m\omega_i)$. □

A seguinte proposição foi demonstrada em [6, 7].

Proposição 5.2.6. Suponha que $\mathfrak{g}$ não é do tipo E ou F. Sejam $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $a \in \mathbb{K}^\times$. Então:

(i) Existe $b_i \in \{1, 2, 3\}$ tal que, se $m = m_1 b_i + m_0$ com $0 \leq m_0 < b_i$ e $T(m\omega_i)$ é o $\mathfrak{g}[t]$-submódulo de $M(b_i\omega_i)^{\otimes m_1} \otimes M(m_0\omega_i)$ gerado pelo vetor $v_{i,b_i}^{\otimes m_1} \otimes v_{i,m_0}$, então $M(m\omega_i) \cong T(m\omega_i)$.

(ii) $M(m\omega_i) \cong L(\boldsymbol{\omega}_{i,a,m})$.

Para $\mathfrak{g}$ do tipo A, D ou E, dados $i \in I$ e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, o $\mathfrak{g}[t]$-módulo $T(m\omega_i)$ é o submódulo graduado de $M(\omega_i)^{\otimes m}$ gerado por $v_{i,1}^{\otimes m}$. Isto é, $b_i = 1$ para todo $i \in I$ na Proposição 5.2.6.

Proposição 5.2.7. Sejam $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\mathfrak{g}$ do tipo A, D ou E. Então $T(m\omega_i)$ é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_i)$.

Demonstração. Basta mostrar que $v_{i,1}^{\otimes m}$ satisfaz as relações (5.3) e (5.4) para $M(m\omega_i)$. De fato, se $z \in \mathfrak{g}[t]$ é tal que $zv_{i,1} = 0$, então

$$\begin{aligned} zv_{i,1}^{\otimes m} &= zv_{i,1} \otimes v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} + \cdots + v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \otimes zv_{i,1} \otimes v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \\ &\quad + \cdots + v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \otimes zv_{i,1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isso obtemos $\mathfrak{n}^+[t]v_{i,1}^{\otimes m} = h_{j,r}v_{i,1}^{\otimes m} = 0$ para todos $j \in I$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $h_j v_{i,1}^{\otimes m} = x_j^- v_{i,1}^{\otimes m} = x_{i,1}^- v_{i,1}^{\otimes m} = 0$ para todo $j \in I \setminus \{i\}$. Agora,

$$\begin{aligned} h_i v_{i,1}^{\otimes m} &= h_i v_{i,1} \otimes v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} + \cdots + v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \otimes h_i v_{i,1} \otimes v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \\ &\quad + \cdots + v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \otimes h_i v_{i,1} \\ &= v_{i,1} \otimes v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} + \cdots + v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \otimes v_{i,1} \otimes v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \\ &\quad + \cdots + v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \otimes v_{i,1} \\ &= m(v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1}) \\ &= m v_{i,1}^{\otimes m}. \end{aligned}$$

Além disso, usando o fato $(x_i^-)^2 v_{i,1} = 0$, observamos que, se $k \leq m$, então $(x_i^-)^k v_{i,1}^{\otimes m}$ é uma soma de elementos do tipo $y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$, onde $y_{i_1} = \cdots = y_{i_k} = x_i^- v_{i,1}$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ e $y_j = v_{i,1}$, $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$, logo $(x_i^-)^m v_{i,1}^{\otimes m} = m(x_i^- v_{i,1} \otimes \cdots \otimes x_i^- v_{i,1})$, assim $(x_i^-)^{m+1} v_{i,1}^{\otimes m} = 0$. □

Em [28] foi definida uma generalização dos módulos $M(m\omega_i)$ para $\lambda \in P^+$ em geral. Para apresentá-la aqui vamos introduzir algumas notações. Dados $i \in I$ e $m, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, considere $v_{i,m} \in M(m\omega_i)$ o vetor da Definição 5.2.4 e defina

$$R^+(i, m, r) = \{\alpha \in R^+ : x_{\alpha,r}^- v_{i,m} = 0\}. \tag{5.5}$$

Como $h_{j,s} v_{i,m} = 0$ para todo $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, segue que, se $\alpha \in R^+(i, m, r)$, então $\alpha \in R^+(i, m, r+s)$, pois

$$\begin{aligned} x_{\alpha,r+s}^- v_{i,m} &= x_\alpha^- \otimes t^{r+s} v_{i,m} \\ &= -\frac{1}{2}[h_\alpha, x_\alpha^-] \otimes t^{r+s} v_{i,m} \\ &= -\frac{1}{2}[h_{\alpha,s}, x_{\alpha,r}^-] v_{i,m} \\ &= -\frac{1}{2} h_{\alpha,s} x_{\alpha,r}^- v_{i,m} + \frac{1}{2} x_{\alpha,r}^- h_{\alpha,s} v_{i,m} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$R^+(i, m, r) \subseteq R^+(i, m, s) \qquad \text{para todo } \ s \geq r. \tag{5.6}$$

Observe que $R^+(i, m, r) = R^+$ se $r \gg 0$, pois $M(m\omega_i)$ tem dimensão finita. Observe também que $R^+(i, 0, 0) = R^+$ para todo $i \in I$, pois $M(0)$ é a representação trivial $\mathbb{K}$.

Agora, dados $\lambda \in P^+$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, defina

$$R^+(\lambda, r) = \bigcap_{i \in I} R^+(i, \lambda(h_i), r). \tag{5.7}$$

Como $R^+(j,0,s) = R^+$ para todos $j \in I$ e $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, segue que $R^+(m\omega_i, r) = R^+(i,m,r)$ para todos $i \in I$ e $m, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e que $R^+(\lambda, r) = R^+$ se $r \gg 0$.

Adiante vamos precisar do seguinte lema:

Lema 5.2.8. Sejam $i \in I$ e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Se $\alpha \in R^+$ tem a coordenada em α_i menor ou igual a r, então $\alpha \in R^+(i,m,r)$.

Demonstração. Basta proceder de modo análogo ao que foi feito na demonstração da Proposição 5.2.5. □

Definição 5.2.9. [28] Dado $\lambda \in P^+$, define-se $M(\lambda)$ como sendo o $\mathfrak{g}[t]$-módulo gerado por um vetor v satisfazendo as relações:

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0, \quad h_i v = \lambda(h_i)v, \quad (x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0, \quad h_{i,r+1}v = 0, \quad x_{\alpha,r}^- v = 0 \tag{5.8}$$

para todos $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\alpha \in R^+(\lambda, r)$. Considere $T(\lambda)$ o $\mathfrak{g}[t]$-submódulo de $\bigotimes_{i \in I} M(\lambda(h_i)\omega_i)$ gerado por $\bigotimes_{i\in I} v_{i,\lambda(h_i)}$.

As Definições 5.2.4 e 5.2.9 de $M(m\omega_i)$ coincidem, pois $R^+(m\omega_i, r) = R^+(i,m,r)$ para todos $i \in I$, $m, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Novamente os módulos $M(\lambda)$ são $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduados. Procendo como na demonstração da Proposição 5.2.5, mostra-se que $M(\lambda)$ é isomorfo a um quociente de $A(\lambda)$. Em particular, $M(\lambda)$ tem dimensão finita. Logo, pela Observação 5.1.2, $M(\lambda)[s]$ é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Em particular,

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\mu \in P^+} V(\mu)^{\oplus m_\mu(\lambda,s)}, \quad m_\mu(\lambda, s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{5.9}$$

Proposição 5.2.10. Para cada $\lambda \in P^+$, $T(\lambda)$ é isomorfo a um quociente de $M(\lambda)$.

Demonstração. Basta mostrar que $v := \bigotimes_{i\in I} v_{i,\lambda(h_i)}$ satisfaz as relações (5.8) para $M(\lambda)$. De fato, se $z \in \mathfrak{g}[t]$ é tal que $zv_{i,\lambda(h_i)} = 0$ para todo $i \in I = \{1, 2, \ldots, l\}$, então

$$\begin{aligned} zv &= zv_{1,\lambda_{h_1}} \otimes v_{2,\lambda(h_2)} \otimes \cdots \otimes v_{l,\lambda(h_l)} + \cdots + v_{1,\lambda(h_1)} \otimes \cdots \otimes v_{l-1,\lambda(h_{l-1})} \otimes zv_{l,\lambda(h_l)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isso obtemos $\mathfrak{n}^+[t]v = h_{j,r+1}v = x_{\alpha,r}^- v = 0$ para todos $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\alpha \in R^+(\lambda, r)$, pois $R^+(\lambda, r) = \bigcap_{i \in I} R^+(i, \lambda(h_i), r)$. Agora, para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned} h_i v &= h_i v_{1,\lambda(h_1)} \otimes v_{2,\lambda(h_2)} \otimes \cdots \otimes v_{l,\lambda(h_l)} + \cdots + \\ &\quad + v_{1,\lambda(h_1)} \otimes \cdots \otimes v_{i-1,\lambda(h_{i-1})} \otimes h_i v_{i,\lambda(h_i)} \otimes v_{i+1,\lambda(h_{i+1})} \otimes \cdots \otimes v_{l,\lambda(h+l)} + \cdots + \\ &\quad + v_{i,1} \otimes \cdots \otimes v_{i,1} \otimes h_i v_{i,1} \\ &= 0 + \cdots + v_{1,\lambda(h_1)} \otimes \cdots \otimes v_{i-1,\lambda(h_{i-1})} \otimes \lambda(h_i) v_{i,\lambda(h_i)} \otimes v_{i+1,\lambda(h_{i+1})} \otimes \cdots \otimes v_{l,\lambda(h+l)} \\ &\quad + \cdots + 0 \\ &= \lambda(h_i)(v_{1,\lambda(h_1)} \otimes \cdots \otimes v_{l,\lambda(h_l)}) \\ &= \lambda(h_i)v. \end{aligned}$$

Por fim, como $x_j^- v_{i,\lambda(h_i)} = 0$ para todo $j \in I \setminus \{i\}$, temos

$$\begin{aligned}(x_j^-)^{\lambda(h_j)+1} v &= v_{1,\lambda(h_1)} \otimes \cdots \otimes v_{j-1,\lambda(h_{j-1})} \otimes (x_j^-)^{\lambda(h_j)+1} v_{j,\lambda(h_j)} \otimes v_{j+1,\lambda(h_{j+1})} \otimes \cdots \otimes v_{l,\lambda(h+l)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então, para todo $i \in I$,

$$(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1} v = 0.$$

$\square$

A seguinte proposição foi demonstrada em [28].

Proposição 5.2.11. Seja $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$ tal que $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é uma afinização minimal de $V_q(\lambda)$, onde $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})$. Então, $T(\lambda)$ é isomorfo a um quociente de $L(\boldsymbol{\lambda})$.

Em [28] tem-se a seguinte conjectura, o que se espera como generalização da Proposição 5.2.6 para afinizações minimais de módulos mais gerais.

Conjectura 5.2.12. Sejam $\lambda \in P^+$ tal que $\overline{\mathrm{supp}}(\lambda)$ não contém um subdiagrama do tipo D_4 e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{++}$ tal que $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ é uma afinização minimal de $V_q(\lambda)$. Então, $T(\lambda) \cong M(\lambda) \cong L(\boldsymbol{\lambda})$.

Em [28], A. Moura provou que a Conjectura 5.2.12 é verdadeira para os casos:

(i) $\mathfrak{g}$ do tipo B e $\mathrm{supp}(\lambda) \subseteq \{1, 2, 3, n\}$ com $\lambda(h_n) \leq 1$ se $n > 3$.

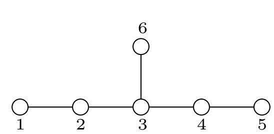
(ii) $\mathfrak{g}$ do tipo D e $\mathrm{supp}(\lambda) \subseteq (\{1, 2, 3\} \cap J) \cup \{m\}$ com $m \in \{n-1, n\}$. Aqui $J = I \backslash \{n-1, n\}$.

(iii) $\mathfrak{g}$ do tipo D e $\mathrm{supp}(\lambda) \subseteq \{n-2, n-1, n\}$.

Além disso, no processo dessas provas foram obtidas fórmulas de caracter para $M(\lambda)$ e, consequentemente, para $V_q(\boldsymbol{\lambda})$.

5.3 Resultados principais

Passamos agora a descrever os principais resultados deste trabalho. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie do tipo E_6:



Teorema 5.3.1. Seja $i \neq 3$. Então $T(m\omega_i) \cong M(m\omega_i)$. Além disso, como $\mathfrak{g}$-módulos, valem os isomorfismos:

(i) (a) $M(m\omega_1)[0] \cong V(m\omega_1)$ e $M(m\omega_1)[s] \cong \{0\}$ se $s \in \mathbb{Z}_{>0}$;

(b) $M(m\omega_5)[0] \cong V(m\omega_5)$ e $M(m\omega_5)[s] \cong \{0\}$ se $s \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(ii) $M(m\omega_6)[s] \cong V((m-s)\omega_6)$ se $s = 0, 1, \ldots, m$, e $M(m\omega_6)[s] \cong \{0\}$ caso contrário.

(iii) (a) $M(m\omega_2)[s] \cong V((m-s)\omega_2 + s\omega_5)$ se $s = 0, 1, \ldots, m$, e $M(m\omega_2)[s] \cong \{0\}$ caso contrário;

(b) $M(m\omega_4)[s] \cong V((m-s)\omega_4 + s\omega_1)$ se $s = 0, 1, \ldots, m$, e $M(m\omega_4)[s] \cong \{0\}$ caso contrário.

Teorema 5.3.2. Se $\lambda \in P^+$ é tal que $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq \{1,2,6\}, \{4,5,6\}, \{1,2,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4\}$, então $M(\lambda) \cong T(\lambda)$. Além disso, como $\mathfrak{g}$-módulos, valem os isomorfismos:

(i) (a) Se $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_6\omega_6$ e $\mathcal{A}(\lambda) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : k_1 \leq m_2, k_2 \leq m_6\}$, então

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\substack{(k_1,k_2) \in \mathcal{A}(\lambda) \\ k_1+k_2=s}} V(m_1\omega_1 + (m_2 - k_1)\omega_2 + (m_6 - k_2)\omega_6 + k_1\omega_5).$$

(b) Se $\lambda = m_4\omega_4 + m_5\omega_5 + m_6\omega_6$ e $\mathcal{A}(\lambda) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : k_1 \leq m_4, k_2 \leq m_6\}$, então

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\substack{(k_1,k_2) \in \mathcal{A}(\lambda) \\ k_1+k_2=s}} V(m_5\omega_5 + (m_4 - k_1)\omega_4 + (m_6 - k_2)\omega_6 + k_1\omega_1).$$

(ii) (a) Se $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_5\omega_5$ e $\mathcal{A}(\lambda) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : k_1 + k_2 \leq m_2, k_2 \leq m_5\}$, então

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\substack{(k_1,k_2) \in \mathcal{A}(\lambda) \\ k_1+k_2=s}} V(m_1\omega_1 + (m_2 - k_1 - k_2)\omega_2 + (m_5 + k_1 - k_2)\omega_5 + k_2\omega_4).$$

(b) Se $\lambda = m_1\omega_1 + m_4\omega_4 + m_5\omega_5$ e $\mathcal{A}(\lambda) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : k_1 + k_2 \leq m_4, k_2 \leq m_1\}$, então

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\substack{(k_1,k_2) \in \mathcal{A}(\lambda) \\ k_1+k_2=s}} V(m_5\omega_5 + (m_4 - k_1 - k_2)\omega_4 + (m_1 + k_1 - k_2)\omega_1 + k_2\omega_2).$$

(iii) Se $\lambda = m_2\omega_2 + m_4\omega_4$ e $\mathcal{A}(\lambda) = \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0} : k_1 + k_3 \leq m_2, k_1 + k_2 \leq m_4\}$, então

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\substack{(k_1,k_2,k_3)\in\mathcal{A}(\lambda)\\ k_1+k_2+k_3=s}} V((m_2-k_1-k_3)\omega_2+(m_4-k_1-k_2)\omega_4+k_1\omega_3+k_2\omega_1+k_3\omega_5).$$

As demontrações dos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2 serão dadas nas Subseções 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4, 5.3.5 e 5.3.6.

Mencionamos a seguinte proposição, que aparecerá em [29]. Sua demonstração envolve cálculos no contexto de grupos quânticos que fogem do alcance do presente texto.

Proposição 5.3.3. Seja $\lambda \in P^+$ tal que $\overline{\text{supp}}(\lambda)$ é de tipo A. Então $L(\boldsymbol{\lambda})$ é isomorfo a um quociente de $M(\lambda)$ para todo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{++}_{\mathbb{A}}$ tal que $\text{wt}(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda$.

Como Corolário direto das Proposições 5.2.11 e 5.3.3 e dos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2, segue que a Conjectura 5.2.12 é verdadeira para $\mathfrak{g}$ do tipo E_6 e λ como nos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2. Além disso, nesses casos, pode-se descrever fórmulas de caracter para $V_q(\boldsymbol{\lambda})$ tal que $\text{wt}(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda$, a partir dos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2.

Antes de começarmos as demonstrações, recordemos o sistema de raízes de E_6.

Sejam α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 as raízes simples de E_6. Utilizando o algoritmo descrito pela Observação 2.2.23, ou tabelas disponíveis na literatura, encontra-se as raízes positivas não simples de E_6, que são:

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$
$\beta_2 = \alpha_3 + \alpha_6$
$\beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3$
$\beta_4 = \alpha_3 + \alpha_4$
$\beta_5 = \alpha_4 + \alpha_5$
$\beta_6 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
$\beta_7 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6$
$\beta_8 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$
$\beta_9 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$
$\beta_{10} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$
$\beta_{11} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6$
$\beta_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$
$\beta_{13} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$
$\beta_{14} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{15} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$
$\beta_{16} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$
$\beta_{17} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$
$\beta_{18} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$
$\beta_{19} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{20} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$
$\beta_{21} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{22} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{23} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$
$\beta_{24} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{25} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{26} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{27} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{28} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{29} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
$\beta_{30} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6$

Em termos dos pesos fundamentais, as raízes positivas de E_6 são:

$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2$

$\alpha_2 = 2\omega_2 - \omega_1 - \omega_3$

$\alpha_3 = 2\omega_3 - \omega_2 - \omega_4 - \omega_6$

$\alpha_4 = 2\omega_4 - \omega_3 - \omega_5$

$\alpha_5 = 2\omega_5 - \omega_4$

$\alpha_6 = 2\omega_6 - \omega_3$

$\beta_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$

$\beta_2 = \omega_3 - \omega_2 - \omega_4 + \omega_6$

$\beta_3 = \omega_2 - \omega_1 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_6$

$\beta_4 = \omega_3 - \omega_2 + \omega_4 - \omega_5 - \omega_6$

$\beta_5 = \omega_4 - \omega_3 + \omega_5$

$\beta_6 = \omega_1 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_6$

$\beta_7 = \omega_2 - \omega_1 - \omega_4 - \omega_6$

$\beta_8 = \omega_4 - \omega_2 - \omega_5 + \omega_6$

$\beta_9 = \omega_2 - \omega_1 + \omega_4 - \omega_5 - \omega_6$

$\beta_{10} = \omega_3 - \omega_2 + \omega_5 - \omega_6$

$\beta_{11} = \omega_1 - \omega_4 - \omega_6$

$\beta_{12} = \omega_1 + \omega_4 - \omega_5 - \omega_6$

$\beta_{13} = \omega_2 - \omega_1 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6$

$\beta_{14} = \omega_5 - \omega_2 + \omega_6$

$\beta_{15} = \omega_2 - \omega_1 + \omega_5 - \omega_6$

$\beta_{16} = \omega_1 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6$

$\beta_{17} = \omega_1 + \omega_5 - \omega_6$

$\beta_{18} = \omega_3 - \omega_1 - \omega_5$

$\beta_{19} = \omega_2 - \omega_1 - \omega_3 + \omega_5 + \omega_6$

$\beta_{20} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_5$

$\beta_{21} = \omega_1 - \omega_3 + \omega_5 + \omega_6$

$\beta_{22} = \omega_3 - \omega_1 - \omega_4 + \omega_5$

$\beta_{23} = \omega_2 - \omega_5$

$\beta_{24} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 + \omega_5$

$\beta_{25} = \omega_4 - \omega_1$

$\beta_{26} = \omega_2 - \omega_4 + \omega_5$

$\beta_{27} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_4$

$\beta_{28} = \omega_2 - \omega_3 + \omega_4$

$\beta_{29} = \omega_3 - \omega_6$

$\beta_{30} = \omega_6$

5.3.1 Parte (i) do Teorema 5.3.1

Como todas as raízes em R^+ têm coordenadas em α_1 menores ou iguais a 1, segue do Lema 5.2.8 que $R^+ \subseteq R^+(1, m, 1) \subseteq R^+$. Logo,

$$R^+(1, m, 1) = R^+.$$

Consequentemente, $R^+(1, m, r) = R^+$, para todo $r \geq 1$. Então, ordenando uma base de $\mathfrak{g}[t]$ de modo que $x^-_{\beta,r} > x^-_{\alpha,s}$ se $r > s$, pelo Teorema de PBW (Corolário 2.1.55), temos

$$M(m\omega_1) = U(\mathfrak{n}^-[t])v_{1,m} = U(\mathfrak{n}^-)v_{1,m}.$$

Daí $M(m\omega_1) = M(m\omega_1)[0]$. Como $v_{1,m}$ satisfaz as relações (2.1), segue que $M(m\omega_1) = U(\mathfrak{n}^-)v_{1,m}$ é isomorfo a um quociente de $V(m\omega_1)$, como $\mathfrak{g}$-módulo. Em particular,

$$\dim M(m\omega_1) \leq \dim V(m\omega_1). \tag{5.10}$$

Agora, considere o $\mathfrak{g}[t]$-módulo $\mathrm{ev}_0(V(m\omega_1))$. Se v_1 é o vetor de peso máximo de $V(m\omega_1)$, então v_1 satisfaz (2.1). Além disso,

$$\begin{aligned} x_{1,1}^- v_1 &= (x_1^- \otimes t)v_1 = (0x_1^-)v_1 = 0; \\ h_{i,r}v_1 &= (h_i \otimes t^r)v_1 = (0h_i)v_1 = 0, \quad \text{para todos } r \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ i \in I; \\ x_{i,r}^+ v_1 &= (x_i^+ \otimes t^r)v_1 = (0x_i^+)v_1 = 0, \quad \text{para todos } r \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ i \in I. \end{aligned}$$

Assim v_1 satisfaz as relações (5.3) e (5.4) para $M(m\omega_1)$. Logo $\mathrm{ev}_0(V(m\omega_1))$ é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_1)$. Segue de (5.10) que $\dim M(m\omega_1) = \dim V(m\omega_1) = \dim \mathrm{ev}_0(V(m\omega_1))$. Daí, $M(m\omega_1) \cong_{\mathfrak{g}[t]} \mathrm{ev}_0(V(m\omega_1))$.

Portanto, como $\mathfrak{g}$-módulo,

$$M(m\omega_1) = M(m\omega_1)[0] \cong V(m\omega_1).$$

Além disso, também

$$T(m\omega_1) = U(\mathfrak{g}[t])v_{1,1}^{\otimes m} = U(\mathfrak{g})v_{1,1}^{\otimes m} = U(\mathfrak{n}^-)v_{1,1}^{\otimes m},$$

e $v_{1,1}^{\otimes m}$ é vetor de peso máximo de $T(m\omega_1)$ de peso $m\omega_1$, logo $T(m\omega_1)$ contém um $\mathfrak{g}$-submódulo isomorfo a $V(m\omega_1)$. Portanto, como $T(m\omega_1)$ é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_1)$, segue que $T(m\omega_1) \cong M(m\omega_1)$.

Devido a simetria dos vértices 1 e 5 do diagrama de Dynkin do tipo E_6, segue analogamente ao caso $M(m\omega_1)$ que

$$M(m\omega_5) = M(m\omega_5)[0] \cong V(m\omega_5),$$

como $\mathfrak{g}$-módulo, e que $T(m\omega_5) \cong M(m\omega_5)$. Isso completa a demonstração da parte (i) do Teorema 5.3.1.

5.3.2 Parte (ii) do Teorema 5.3.1

As raízes em $R^+\backslash\{\beta_{30}\}$ têm coordenadas em α_6 menores ou iguais a 1 e β_{30} tem coordenada igual a 2 em α_6. Logo, segue do Lema 5.2.8 que

$$\begin{aligned} R^+(6,m,1) &\supseteq R^+ \setminus \{\beta_{30}\}, \\ R^+(6,m,2) &= R^+. \end{aligned}$$

Consequentemente, $R^+(6,m,r) = R^+$ para todo $r \geq 2$. Então, ordenando uma base de $\mathfrak{g}[t]$ de modo que $x_{\alpha,r}^- > x_{\beta,s}^-$ se $r > s$ e $x_{\alpha,1}^- \geq x_{\beta_{30},1}^-$ para toda $\alpha \in R^+$, pelo Teorema de PBW,

$$M(m\omega_6) = U(\mathfrak{n}^-[t])v_{6,m} = U(\mathfrak{n}^-)U(x_{\beta_{30},1}^-)v_{6,m} = \sum_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)(x_{\beta_{30},1}^-)^s v_{6,m}. \qquad (5.11)$$

Observe que $(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,m} \in M(m\omega_6)[s]$ e que o peso de $(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,m}$ é

$$m\omega_6 - s\beta_{30} = m\omega_6 - s\omega_6 = (m-s)\omega_6.$$

Pelo Lema 5.1.4, $m_\mu(m\omega_6, s)$ pode ser não nulo somente se $\mu = (m-s)\omega_6 \in P^+$, ou seja, $m - s \geq 0$. Além disso, $m_\mu(m\omega_6, s) \leq 1$, pois se $s_1 \neq s_2$ então o peso de $(x^-_{\beta_{30},1})^{s_1} v_{6,m}$ é diferente do peso de $(x^-_{\beta_{30},1})^{s_2} v_{6,m}$. Assim, $M(m\omega_6)$ é isomorfo a um quociente de

$$\bigoplus_{s=0}^{m} V((m-s)\omega_6), \tag{5.12}$$

como $\mathfrak{g}$-módulo. Em particular, $M(\omega_6)$ é isomorfo a um quociente de $V(\omega_6) \oplus V(0) = V(\omega_6) \oplus \mathbb{K}$, como $\mathfrak{g}$-módulo, donde segue que

$$\dim M(\omega_6) \leq \dim V(\omega_6) \oplus V(0). \tag{5.13}$$

Faremos agora uma construção explícita de $M(\omega_6)$ (caso m=1). Considere o $\mathfrak{g}$-módulo $V = V(\omega_6) \oplus V(0)$. Utilizando o programa [24], obtém-se que

$$\mathfrak{g} \otimes V(\omega_6) = V(\omega_6) \oplus V(\omega_3) \oplus V(\omega_1 + \omega_5) \oplus V(2\omega_6) \oplus V(0)$$

como soma direta de $\mathfrak{g}$-módulos, onde $\mathfrak{g} \cong V(\omega_6)$ é o $\mathfrak{g}$-módulo dado pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Em particular, podemos fixar $p \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\omega_6), V(0))$ sobrejetora (por exemplo a projeção em $V(0)$) e considerar V_p o $\mathfrak{g}[t]$-módulo dado pela Proposição 5.1.3. Observe que $V_p[0] \cong_{\mathfrak{g}} V(\omega_6)$ e $V_p[1] \cong_{\mathfrak{g}} V(0)$.

Seja v_6 vetor de peso máximo para $V(\omega_6)$. Então, $V(\omega_6) = U(\mathfrak{n}^-)v_6$, logo $V_p = U(\mathfrak{n}^-[t])v_6$. Além disso, v_6 satisfaz as relações (2.1) para $V(\omega_6)$. Também, $h_{i,r}v_6 = 0$ e $x^+_{i,r}v_6 = 0$ para todos $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ e $i \in I$. Por fim, $x^+_{i,1}v_6 = 0$, $h_{i,1}v_6 = 0$ e $x^-_{6,1}v_6 = 0$, para todo $i \in I$, pois o único peso em $V(0)$ é o peso nulo, e

$$x^+_{i,1}v_6 = (x^+_i \otimes t)v_6 = p(x^+_i \otimes v_6) \in V(0)_{\omega_6+\alpha_i},$$

$$h_{i,1}v_6 = (h_i \otimes t)v_6 = p(h_i \otimes v_6) \in V(0)_{\omega_6},$$

$$x^-_{6,1}v_6 = (x^-_6 \otimes t)v_6 = p(x^-_6 \otimes v_6) \in V(0)_{\omega_6-\alpha_6},$$

com $\omega_6 + \alpha_i \neq 0$, $\omega_6 \neq 0$ e $\omega_6 - \alpha_6 \neq 0$, para todo $i \in I$.

Assim v_6 satisfaz as relações (5.3) e (5.4) para $M(\omega_6)$. Portanto $U(\mathfrak{n}^-[t])v_6 = V(\omega_6) \oplus V(0)$ é um quociente de $M(\omega_6)$. Segue de (5.13) que $\dim(M(\omega_6)) = \dim(V(\omega_6) \oplus V(0))$, portanto

$$M(\omega_6) \cong_{\mathfrak{g}[t]} V_p,$$

ou, como $\mathfrak{g}$-módulo,

$$M(\omega_6) \cong V(\omega_6) \oplus V(0).$$

A seguir vamos precisar do seguinte lema:

Lema 5.3.4. $x^-_{\beta_{30},1}v_{6,1} \neq 0$.

Demonstração. Se $x^-_{\beta_{30},1}v_{6,1} = 0$, então segue de (5.11) que $M(\omega_6) \cong V(\omega_6)$, contrariando a construção de $M(\omega_6)$ feita anteriormente. □

Vamos agora para o caso $m > 1$. Pela Proposição 5.2.7, $T(m\omega_6)$ é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_6)$. Agora, pelo Lema 5.3.4, $x^-_{\beta_{30},1}v_{6,1} \neq 0$, logo $\{x^-_{\beta_{30},1}v_{6,1}, v_{6,1}\}$ é linarmente independente em $M(\omega_6)$, pois têm pesos distintos. Observe que $(x^-_{\beta_{30},1})^2 v_{6,1} = 0$, pois $M(\omega_6)$ só tem elementos homogêneos não nulos de graus zero e um, logo, para $s = 0, 1, \ldots, m$, $(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m}$ (a ação é dada como na Proposição 2.1.48) é uma soma de elementos do tipo $y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$, onde $y_i = v_{6,1}$ ou $y_i = x^-_{\beta_{30},1}v_{6,1}$, $i = 1, \ldots, m$. Assim,

$$(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m} \neq 0 \quad \text{para todo } s = 0, 1, \ldots, m. \tag{5.14}$$

Como o peso de $(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m}$ é $(m-s)\omega_6$, e $(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m}$ tem peso maximal em $T(m\omega_6)[s] = U(\mathfrak{n}^-)(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m}$, segue que $\mathfrak{n}^+(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m} = 0$, pois $\mathfrak{n}^+(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m} \subseteq T(m\omega_6)[s]$. Assim $(x^-_{\beta_{30},1})^s v_{6,1}^{\otimes m}$ é vetor de peso máximo para $T(m\omega_6)$, logo $T(m\omega_6)$ contém um $\mathfrak{g}$-submódulo isomorfo a $V((m-s)\omega_6)$ para cada $s = 0, 1, \ldots, m$. Então, $\bigoplus_{s=0}^m V((m-s)\omega_6)$ é isomorfo a um quociente de $T(m\omega_6)$ que é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_6)$. Daí, $\bigoplus_{s=0}^m V((m-s)\omega_6)$ é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_6)$.

Portanto, segue de (5.12) que, como $\mathfrak{g}$-módulo,

$$M(m\omega_6) \cong \bigoplus_{s=0}^{m} V((m-s)\omega_6),$$

onde $M(m\omega_6)[s] \cong V((m-s)\omega_6)$. Além disso, $T(m\omega_6) \cong M(m\omega_6)$. Isso completa a demonstração da parte (ii) do Teorema 5.3.1.

5.3.3 Parte (iii) do Teorema 5.3.1

As raízes em $R^+ \setminus \{\beta_{23}, \beta_{26}, \beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}\}$ têm coordenadas em α_2 menores ou iguais a um e as raízes $\beta_{23}, \beta_{26}, \beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}$ têm coordenadas em α_2 iguais a 2. Logo, segue do Lema 5.2.8 que

$$\begin{aligned} R^+(2, m, 1) &\supseteq R^+ \setminus \{\beta_{23}, \beta_{26}, \beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}\}, \\ R^+(2, m, 2) &= R^+. \end{aligned}$$

Consequentemente, $R^+(2, m, r) = R^+$ para todo $r \geq 2$. Então, ordenando adequadamente uma base de $\mathfrak{g}[t]$, pelo Teorema de PBW,

$$M(m\omega_2) = U(\mathfrak{n}^-[t])v_{2,m} = U(\mathfrak{n}^-)U(x^-_{\beta_{23},1})U(x^-_{\beta_{26},1})U(x^-_{\beta_{28},1})U(x^-_{\beta_{29},1})U(x^-_{\beta_{30},1})v_{2,m}.$$

Dado $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \in \mathbb{Z}^5_{\geq 0}$, denotamos

$$\mathbf{x_r} = (x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_5}.$$

Então,

$$M(m\omega_2) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^5_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x_r}v_{2,m}. \tag{5.15}$$

Agora, vamos aplicar o Lema 5.1.5 algumas vezes para simplificar a expressão (5.15). Considere primeiro $x = x^-_6$, $y = x^-_{\beta_{29},1}$, $z = x^-_{\beta_{30},1}$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv_{2,m} = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_5}v_{2,m} = a(x^-_6)^{r_5}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v_{2,m},\ a \in \mathbb{K}.$$

Agora, x^-_6 comuta com $x^-_{\beta_{23},1}, x^-_{\beta_{26},1}, x^-_{\beta_{28},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x_r}v_{2,m} &= a(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x^-_6)^{r_5}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v_{2,m}\\ &= a(x^-_6)^{r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v_{2,m}.\end{aligned}$$

Considere agora $x = x^-_3$, $y = x^-_{\beta_{28},1}$, $z = x^-_{\beta_{29},1}$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv_{2,m} = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v_{2,m} = b(x^-_3)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3+r_4+r_5}v_{2,m},\ b \in \mathbb{K}.$$

Agora, x^-_3 comuta com $x^-_{\beta_{23},1}$ e $x^-_{\beta_{26},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x_r}v_{2,m} &= ab(x^-_6)^{r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_3)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3+r_4+r_5}v_{2,m}\\ &= ab(x^-_6)^{r_5}(x^-_3)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3+r_4+r_5}v_{2,m}.\end{aligned}$$

Considere agora $x = x^-_4$, $y = x^-_{\beta_{26},1}$, $z = x^-_{\beta_{28},1}$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv_{2,m} = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3+r_4+r_5}v_{2,m} = c(x^-_4)^{r_3+r_4+r_5}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2+r_3+r_4+r_5}v_{2,m},\ c \in \mathbb{K}.$$

Como x^-_4 comuta com $x^-_{\beta_{23},1}$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x_r}v_{2,m} &= abc(x^-_6)^{r_5}(x^-_3)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_4)^{r_3+r_4+r_5}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2+r_3+r_4+r_5}v_{2,m}\\ &= abc(x^-_6)^{r_5}(x^-_3)^{r_4+r_5}(x^-_4)^{r_3+r_4+r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2+r_3+r_4+r_5}v_{2,m}.\end{aligned}$$

Por fim, considere $x = x^-_5$, $y = x^-_{\beta_{23},1}$, $z = x^-_{\beta_{26},1}$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv_{2,m} = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2+r_3+r_4+r_5}v_{2,m} = d(x^-_5)^{r_2+r_3+r_4+r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}v_{2,m},\ d \in \mathbb{K}.$$

Logo,

$$\mathbf{x_r} v_{2,m} = abcd(x_6^-)^{r_5}(x_3^-)^{r_4+r_5}(x_4^-)^{r_3+r_4+r_5}(x_5^-)^{r_2+r_3+r_4+r_5}(x_{\beta_{23},1}^-)^{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5} v_{2,m}.$$

Portanto,

$$M(m\omega_2) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^5_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x_r} v_{2,m} = \sum_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)(x_{\beta_{23},1}^-)^s v_{2,m}. \tag{5.16}$$

Observe que $(x_{\beta_{23},1}^-)^s v_{2,m} \in M(m\omega_2)[s]$ e que o peso de $(x_{\beta_{23},1}^-)^s v_{2,m}$ é

$$m\omega_2 - s\beta_{23} = m\omega_2 - s(\omega_2 - \omega_5) = (m-s)\omega_2 + s\omega_5.$$

Pelo Lema 5.1.4, $m_\mu(m\omega_2, s)$ pode ser não nulo somente se $\mu = (m-s)\omega_2 + s\omega_5 \in P^+$, ou seja, $m - s \geq 0$. Além disso, $m_\mu(m\omega_2, s) \leq 1$, pois se $s_1 \neq s_2$ então o peso de $(x_{\beta_{23},1}^-)^{s_1} v_{2,m}$ é diferente do peso de $(x_{\beta_{23},1}^-)^{s_2} v_{2,m}$. Assim, $M(m\omega_2)$ é isomorfo a um quociente de

$$\bigoplus_{s=0}^{m} V((m-s)\omega_2 + s\omega_5), \tag{5.17}$$

como $\mathfrak{g}$-módulo. Em particular, $M(\omega_2)$ é isomorfo a um quociente de $V(\omega_2)\oplus V(\omega_5)$, como $\mathfrak{g}$-módulo, donde segue que

$$\dim M(\omega_2) \leq \dim(V(\omega_2) \oplus V(\omega_5)). \tag{5.18}$$

Faremos agora uma construção explícita de $M(\omega_2)$ (caso m=1). Considere o $\mathfrak{g}$-módulo $V = V(\omega_2) \oplus V(\omega_5)$. Utilizando o programa [24], obtém-se que

$$\mathfrak{g} \otimes V(\omega_2) = V(\omega_2+\omega_6) \oplus V(\omega_1+\omega_4) \oplus V(\omega_5+\omega_6) \oplus V(2\omega_1) \oplus V(\omega_2) \oplus V(\omega_5)$$

como soma direta de $\mathfrak{g}$-módulos, onde $\mathfrak{g} \cong V(\omega_6)$ é o $\mathfrak{g}$-módulo dado pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Em particular, podemos fixar $p \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}\otimes V(\omega_2), V(\omega_5))$ sobrejetora e considerar V_p o $\mathfrak{g}[t]$-módulo dado pela Proposição 5.1.3. Observe que $V_p[0] \cong_{\mathfrak{g}} V(\omega_2)$ e $V_p[1] \cong_{\mathfrak{g}} V(\omega_5)$.

Seja v_2 vetor de peso máximo para $V(\omega_2)$. Então, $V(\omega_2) = U(\mathfrak{n}^-)v_2$, logo $V_p = U(\mathfrak{n}^-[t])v_2$. Além disso, v_2 satisfaz as relações (2.1) para $V(\omega_2)$. Também, $h_{i,r}v_2 = 0$ e $x_{i,r}^+ v_2 = 0$ para todos $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ e $i \in I$. Por fim, mostremos que $x_{i,1}^+ v_2 = 0$, $h_{i,1}v_2 = 0$ e $x_{2,1}^- v_2 = 0$, para todo $i \in I$. De fato, dado $i \in I$,

$$x_{i,1}^+ v_2 = (x_i^+ \otimes t)v_2 = p(x_i^+ \otimes v_2) \in V(\omega_5)_{\omega_2+\alpha_i}.$$

Observe que $\omega_2 + \alpha_i - \omega_5 = \beta_{23} + \alpha_i \neq 0$ é soma de raízes positivas, logo $\omega_5 < \omega_2 + \alpha_i$. Como ω_5 é peso máximo em $V(\omega_5)$, segue que $V(\omega_5)_{\omega_2+\alpha_i} = 0$. Portanto

$$x_{i,1}^+ v_2 = 0.$$

Também, como $\omega_2 - \omega_5 = \beta_{23}$, temos

$$h_{i,1}v_2 = (h_i \otimes t)v_2 = p(h_i \otimes v_2) \in V(\omega_5)_{\omega_2} = 0,$$

e,

$$x^-_{2,1}v_2 = (x^-_2 \otimes t)v_2 = p(x^-_2 \otimes v_2) \in V(\omega_5)_{\omega_2-\alpha_2}.$$

Mas $\omega_2-\alpha_2-\omega_5 = \beta_{23}-\alpha_2 = \beta_{20} \in R^+$, logo $\omega_5 < \omega_2-\alpha_2$, e novamente pela maximalidade de ω_5 segue que $V(\omega_5)_{\omega_2-\alpha_2} = 0$. Portanto

$$x^-_{2,1}v_2 = 0.$$

Assim v_2 satisfaz as relações (5.3) e (5.4) para $M(\omega_2)$. Portanto $U(\mathfrak{n}^-[t])v_2 = V(\omega_2) \oplus V(\omega_5)$ é isomorfo a um quociente de $M(\omega_2)$. Segue de (5.18) que $\dim(M(\omega_2)) = \dim(V(\omega_2) \oplus V(\omega_5))$ e portanto

$$M(\omega_2) \cong_{\mathfrak{g}[t]} V_p,$$

ou, como $\mathfrak{g}$-módulo,

$$M(\omega_2) \cong V(\omega_2) \oplus V(\omega_5).$$

A seguir vamos precisar do seguinte lema:

Lema 5.3.5. $x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1} \neq 0$, $x^-_{\beta_{26},1}v_{2,1} \neq 0$ e $x^-_{\beta_{28},1}v_{2,1} \neq 0$.

Demonstração. Se $x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1} = 0$, então segue de (5.16) que $M(\omega_2) \cong V(\omega_2)$, contrariando a construção de $M(\omega_2)$ feita anteriormente. Agora, como $\beta_{26} = \beta_{23} + \alpha_5$ e $x^-_5 v_{2,1} = 0$, temos

$$x^-_{\beta_{26},1}v_{2,1} = [x^-_{\beta_{23},1}, x^-_5]v_{2,1} = x^-_5 x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}.$$

Além disso, $x^+_5 x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1} = x^-_{\beta_{23},1}x^+_5 v_{2,1} = 0$, e o peso de $x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}$ é $\omega_2 - \beta_{23} = \omega_5$, logo $h_5 x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1} = x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}$. Assim, $x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}$ é um vetor de peso máximo (de peso 1) do módulo irredutível gerado por $x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}$ sobre a subálgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$ gerada por $\{x^+_5, x^-_5\}$. Então, pelo Exemplo 2.3.8, $(x^-_5)x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1} \neq 0$. Por fim, usando que $\beta_{28} = \beta_{26} + \alpha_4$, mostra-se analogamente que $x^-_{\beta_{28},1}v_{2,1} \neq 0$. □

Vamos agora para o caso $m > 1$. Pela Proposição 5.2.7, $T(m\omega_2)$ é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_2)$. Agora, pelo Lema 5.3.5 e pelo fato $(x^-_{\beta_{23},1})^2 v_{2,1} = 0$, pois $M(\omega_2)$ só tem elementos homogêneos não nulos de graus zero e um, segue que

$$(x^-_{\beta_{23},1})^s v_{2,1}^{\otimes m} \neq 0, \quad s = 0, 1, \ldots, m. \tag{5.19}$$

Como o peso de $(x^-_{\beta_{23},1})^s v_{2,1}^{\otimes m}$ é $(m-s)\omega_2 + s\omega_5$ e $(x^-_{\beta_{23},1})^s v_{2,1}^{\otimes m}$ tem peso máximo em $T(m\omega_2)[s] = U(\mathfrak{n}^-)(x^-_{\beta_{23},1})^s v_{2,1}^{\otimes m}$, segue que $\mathfrak{n}^+(x^-_{\beta_{23},1})^s v_{2,1}^{\otimes m} = 0$, pois $\mathfrak{g}(x^-_{\beta_{23},1})^s v_{2,1}^{\otimes m} \subseteq$

$T(m\omega_2)[s]$. Assim, $(x^-_{\beta_{23,1}})^s v_{2,1}^{\otimes m}$ é vetor de peso máximo para $T(m\omega_2)$. Então $T(m\omega_2)$ contém um $\mathfrak{g}$-submódulo isomorfo a $V((m-s)\omega_2+s\omega_5)$ para cada $s=0,1,\ldots,m$. Logo,

$$\bigoplus_{s=0}^{m} V((m-s)\omega_2+s\omega_5)$$

é isomorfo a um quociente de $M(m\omega_2)$.

Portanto, segue de (5.17) que, como $\mathfrak{g}$-módulo,

$$M(m\omega_2)\cong\bigoplus_{s=0}^{m} V((m-s)\omega_2+s\omega_5),$$

onde $M(m\omega_2)[s]\cong V((m-s)\omega_2+s\omega_5)$, $s=0,1,\ldots,m$. Além disso, $T(m\omega_2)\cong M(m\omega_2)$.

Para a demonstração do Teorema 5.3.2 vamos precisar do seguinte lema:

Lema 5.3.6. $(x^-_{\beta_{26,1}})^{k_1}(x^-_{\beta_{23,1}})^{k_2}v_{2,m}\neq 0$ e $(x^-_{\beta_{28,1}})^{k_1}(x^-_{\beta_{23,1}})^{k_2}v_{2,m}\neq 0$, para $k_1,k_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $k_1+k_2\leq m$.

Demonstração. Como $T(m\omega_2)\cong M(m\omega_2)$, vamos mostrar que

$$(x^-_{\beta_{26,1}})^{k_1}(x^-_{\beta_{23,1}})^{k_2}v_{2,1}^{\otimes m}\neq 0,\quad k_1,k_2\geq 0,\quad k_1+k_2\leq m,$$

e então seguirá que

$$(x^-_{\beta_{26,1}})^{k_1}(x^-_{\beta_{23,1}})^{k_2}v_{2,m}\neq 0,\quad k_1,k_2\geq 0,\quad k_1+k_2\leq m.$$

Observe que $M(\omega_2)$ só possui elementos homogêneos de grau zero ou um, logo $(x^-_{\beta_{26},1})^{k_1}(x^-_{\beta_{23,1}})^{k_2}v_{2,1}^{\otimes m}$ é uma soma de elementos do tipo $y_1\otimes\cdots\otimes y_m$, onde $y_i=v_{2,1}$, $y_i=x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}$ ou $y_i=x^-_{\beta_{26},1}v_{2,1}$, $i=1,\ldots,m$, pois $k_1+k_2\leq m$. Pelo Lema 5.3.5, $x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}\neq 0$ e $x^-_{\beta_{26},1}v_{2,1}\neq 0$. Agora, os vetores $v_{2,1}$, $x^-_{\beta_{23},1}v_{2,1}$, $x^-_{\beta_{26},1}v_{2,1}$ têm pesos distintos (ω_2, ω_5 e $\omega_4-\omega_5$, respectivamente) e são não-nulos, logo esses vetores são autovetores associados a autovalores distintos, logo são linearmente independentes em $M(\omega_2)$. Portanto $(x^-_{\beta_{26},1})^{k_1}(x^-_{\beta_{23,1}})^{k_2}v_{2,1}^{\otimes m}$ é uma soma de elementos linearmente independentes em $M(\omega_2)^{\otimes m}$, logo

$$(x^-_{\beta_{26},1})^{k_1}(x^-_{\beta_{23,1}})^{k_2}v_{2,1}^{\otimes m}\neq 0,\quad k_1,k_2\geq 0,\quad k_1+k_2\leq m.$$

A prova da outra afirmação é análoga. □

Devido a simetria dos vértices 2 e 4 do diagrama de Dynkin do tipo E_6, segue analogamente ao caso $M(m\omega_2)$ que

$$M(m\omega_4)\cong\bigoplus_{s=0}^{m} V((m-s)\omega_4+s\omega_1),$$

como $\mathfrak{g}$-módulo, onde $M(m\omega_4)[s] \cong V((m-s)\omega_2 + s\omega_5)$, $s = 0, 1, \ldots, m$. Além disso, $T(m\omega_4) \cong M(m\omega_4)$. Isso completa a demonstração da parte (iii) do Teorema 5.3.1.

Também temos os seguintes lemas, análogos aos Lemas 5.3.5 e 5.3.6.

Lema 5.3.7. $x^-_{\beta_{25},1}v_{4,1} \neq 0$, $x^-_{\beta_{27},1}v_{4,1} \neq 0$ e $x^-_{\beta_{28},1}v_{4,1} \neq 0$.

Lema 5.3.8. $(x^-_{\beta_{27},1})^{k_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{k_2}v_{4,m} \neq 0$ e $(x^-_{\beta_{28},1})^{k_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{k_2}v_{4,m} \neq 0$, para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $k_1 + k_2 \leq m$.

5.3.4 Parte (i) do Teorema 5.3.2

Denote $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_6\omega_6$ $(m_1, m_2, m_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$. Então

$$\lambda(h_1) = m_1, \quad \lambda(h_2) = m_2, \quad \lambda(h_6) = m_6 \quad \text{e} \quad \lambda(h_j) = 0 \quad \text{para todo } j \in I \setminus \{1, 2, 6\}.$$

Como já vimos,

$$\begin{aligned} R^+(1, m_1, r) &= R^+ \text{ para todo } r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \\ \\ R^+(2, m_2, 1) &\supseteq R + \backslash\{\beta_{23}, \beta_{26}, \beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}\}, \\ R^+(2, m_2, r) &= R^+ \ \text{ para todo } r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \\ \\ R^+(6, m_6, 1) &\supseteq R + \backslash\{\beta_{30}\}, \\ R^+(6, m_6, r) &= R^+ \ \text{ para todo } r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$R^+(i, 0, r) = R^+ \ \text{ para todos } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \text{ e } \ i \in I.$$

Logo,

$$R^+(\lambda, 1) = \bigcap_{i \in I} R^+(i, \lambda(h_i), 1) \supseteq R^+ \setminus \{\beta_{23}, \beta_{26}, \beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}\},$$

e,

$$R^+(\lambda, r) = \bigcap_{i \in I} R^+(i, \lambda(h_i), r) = R^+ \ \text{ para todo } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

Considere v o gerador de $M(\lambda)$ da Definição 5.2.9. Então, ordenando adequadamente uma base de $\mathfrak{g}[t]$, pelo Teorema de PBW,

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-[t])v = U(\mathfrak{n}^-)U(x^-_{\beta_{30},1})U(x^-_{\beta_{23},1})U(x^-_{\beta_{26},1})U(x^-_{\beta_{28},1})U(x^-_{\beta_{29},1})v.$$

Dado $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \in \mathbb{Z}^5_{\geq 0}$, denote

$$\mathbf{x_r} = (x^-_{\beta_{30},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_5}.$$

Então,

$$M(\lambda) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^5_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x}_\mathbf{r}v. \tag{5.20}$$

Agora, vamos aplicar o Lema 5.1.5 algumas vezes para simplificar a expressão (5.20). Considere primeiro $x = x_3^-$, $y = x^-_{\beta_{28},1}$, $z = x^-_{\beta_{29},1}$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{28},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_5}v = a(x_3^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_4+r_5}v,\ a \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_3^- comuta com $x^-_{\beta_{30},1}$, $x^-_{\beta_{23},1}$ e $x^-_{\beta_{26},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\mathbf{r}v &= a(x^-_{\beta_{30},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x_3^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_4+r_5}v\\ &= a(x_3^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_4+r_5}v.\end{aligned}$$

Considere agora $x = x_4^-$, $y = x^-_{\beta_{26},1}$, $z = x^-_{\beta_{28},1}$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_4+r_5}v = b(x_4^-)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3+r_4+r_5}v,\ b \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_4^- comuta com $x^-_{\beta_{30},1}$ e $x^-_{\beta_{23},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\mathbf{r}v &= ab(x_3^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2}(x_4^-)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3+r_4+r_5}v\\ &= ab(x_3^-)^{r_5}(x_4^-)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3+r_4+r_5}v.\end{aligned}$$

Por fim, considere $x = x_5^-$, $y = x^-_{\beta_{23},1}$, $z = x^-_{\beta_{26},1}$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3+r_4+r_5}v = c(x_5^-)^{r_3+r_4+r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2+r_3+r_4+r_5}v,\ c \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_5^- comuta com $x^-_{\beta_{30},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\mathbf{r}v &= abc(x_3^-)^{r_5}(x_4^-)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_1}(x_5^-)^{r_3+r_4+r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2+r_3+r_4+r_5}v\\ &= abc(x_3^-)^{r_5}(x_4^-)^{r_4+r_5}(x_5^-)^{r_3+r_4+r_5}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_2+r_3+r_4+r_5}v.\end{aligned}$$

Portanto,

$$M(\lambda) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^5_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x}_\mathbf{r}v = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)(x^-_{\beta_{30},1})^{k_2}(x^-_{\beta_{23},1})^{k_1}v = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_\mathbf{k}v,$$

onde $\mathbf{y_k} := (x^-_{\beta_{30},1})^{k_2}(x^-_{\beta_{23},1})^{k_1}$, se $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$. Dado $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$, definimos

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_6\omega_6 - k_1\beta_{23} - k_2\beta_{30} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{gr}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2.$$

Observe que

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = m_1\omega_1 + (m_2 - k_1)\omega_2 + (m_6 - k_2)\omega_6 + k_1\omega_5$$

é o peso do vetor $\mathbf{y_k}v$. Segue do Lema 5.1.4 que $m_{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}(\lambda, s)$ pode ser não nulo somente se $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) \in P^+$, ou seja, $0 \leq k_1 \leq m_2$ e $0 \leq k_2 \leq m_6$. Além disso, como $\{\beta_{23}, \beta_{30}\}$ é linearmente independente, a função $\mathrm{wt} : \mathbb{Z}^2_{\geq 0} \to P$ é injetora. Assim $m_{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}(\lambda, s) \leq 1$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$. Definimos

$$\mathcal{A}(\lambda) = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : k_1 \leq m_2, k_2 \leq m_6\}.$$

Portanto, $M(\lambda)[s]$ é isomorfo a um quociente de

$$\bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda)\,:\,\mathrm{gr}(\mathbf{k})=s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k})), \tag{5.21}$$

como $\mathfrak{g}$-módulo.

Considere agora $v = v_{1,m_1} \otimes v_{2,m_2} \otimes v_{6,m_6} \in T(\lambda)$. Seja v^j_{i,m_i} a imagem de v_{i,m_i} em $M(m_i\omega_i)(j)$, $i = 1, 2, 6$, $j \geq 0$. Então, se $\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda)$, segue de (5.14) e (5.19) que

$$\mathbf{y_k}(v_{1,m_1} \otimes v^{k_1}_{2,m_2} \otimes v_{6,m_6}) = v_{1,m_1} \otimes ((x^-_{\beta_{23},1})^{k_1} v^{k_1}_{2,m_2}) \otimes ((x^-_{\beta_{30},1})^{k_2} v_{6,m_6}) \neq 0.$$

Dados $k_1 \leq m_2$ e $k_2 \leq m_6$, seja $T_{k_1,k_2}(\lambda)$ o $\mathfrak{g}[t]$-submódulo de $M(m_1\omega_1) \otimes M(m_2\omega_2)(k_1) \otimes M(m_6\omega_6)(k_2)$ gerado por $v_{k_1,k_2} := v_{1,m_1} \otimes v^{k_1}_{2,m_2} \otimes v^{k_2}_{6,m_6}$. Observe que $T_{k_1,k_2}(\lambda)$ é um quociente de $T(\lambda)(k_1+k_2)$. Defina os vetores $\mathbf{r}_j = (k_1 - j, k_2 + j)$, $j = 0, 1, \ldots, \min\{k_1, m_6 - k_2\}$. Claramente $\mathbf{r}_j \in \mathcal{A}(\lambda)$ e $\mathrm{gr}(\mathbf{r}_j) = k_1 + k_2$. Observe que

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{\mathbf{r}_j} v_{k_1,k_2} &= (x^-_{\beta_{30},1})^{k_2+j}(v_{1,m_1} \otimes (x^-_{\beta_{23},1})^{k_1-j} v^{k_1}_{2,m_2} \otimes v^{k_2}_{6,m_6}) \\
&= \sum_{k=0}^{k_2+j} \binom{k_2+j}{k} v_{1,m_1} \otimes (x^-_{\beta_{30},1})^{k_2+j-k}(x^-_{\beta_{23},1})^{k_1-j} v^{k_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{30},1})^{k} v^{k_2}_{6,m_6} \\
&= \binom{k_2+j}{k_2} v_{1,m_1} \otimes (x^-_{\beta_{30},1})^{j}(x^-_{\beta_{23},1})^{k_1-j} v^{k_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{30},1})^{k_2} v^{k_2}_{6,m_6}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$T_{k_1,k_2}(\lambda)[k_1 + k_2] = \sum_{j=0}^{\min\{k_1, m_6 - k_2\}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_j} v_{k_1,k_2}.$$

Além disso,

$$\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j) = m_1\omega_1 + (m_2 - k_1 + j)\omega_2 + (m_6 - k_2 - j)\omega_6 + (k_1 - j)\omega_5,$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{wt}(\mathbf{r}_j) - \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{j'}) &= (j-j')\omega_2 + (j'-j)\omega_6 + (j'-j)\omega_5 \\ &= (j'-j)(\omega_5+\omega_6-\omega_2) \\ &= (j'-j)\beta_{14}. \end{aligned}$$

Assim, se $j \leq j'$, então $\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{j'}) < \mathrm{wt}(\mathbf{r}_j)$. Em particular, $\mathrm{wt}(\mathbf{r}_0)$ é o único peso maximal de $T_{k_1,k_2}(\lambda)[k_1+k_2]$. Como $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_0} v_{k_1,k_2} \neq 0$, segue que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_0} v_{k_1,k_2}$ é vetor de peso máximo para $T_{k_1,k_2}(\lambda)[k_1+k_2]$, com peso $\mathrm{wt}((k_1,k_2))$, logo $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_0} v_{k_1,k_2}$ gera um $\mathfrak{g}$-submódulo de $T_{k_1,k_2}(\lambda)[k_1+k_2]$ isomorfo a $V(\mathrm{wt}((k_1,k_2)))$.

Daí,

$$\bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda)\,:\,\mathrm{gr}(\mathbf{k})=s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k}))$$

é isomorfo a um quociente de $T(\lambda)[s]$. Como, pela Proposição 5.2.10, $T(\lambda)$ é isomorfo a um quociente de $M(\lambda)$, segue que

$$\bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda)\,:\,\mathrm{gr}(\mathbf{k})=s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k}))$$

é isomorfo a um quociente de $M(\lambda)[s]$.

Portanto, segue de (5.21) que, como $\mathfrak{g}$-módulo,

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda)\,:\,\mathrm{gr}(\mathbf{k})=s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k})).$$

Além disso, $T(\lambda) \cong M(\lambda)$. Devido a simetria do diagrama de Dynkin de E_6, o caso $\lambda = m_4\omega_4 + m_5\omega_5 + m_6\omega_6$, $m_4, m_5, m_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, segue analogamente. Isso completa a demonstração da parte (i) do Teorema 5.3.2.

5.3.5 Parte (ii) do Teorema 5.3.2

Denote $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_5\omega_5$ ($m_1, m_2, m_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Então

$$\lambda(h_1) = m_1, \quad \lambda(h_2) = m_2, \quad \lambda(h_5) = m_5 \quad \text{e} \quad \lambda(h_j) = 0 \quad \text{para todo } j \in I \setminus \{1,2,5\}.$$

Além disso,

$$R^+(1, m_1, r) = R^+(5, m_5, r) = R^+ \quad \text{para todo } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$$

$$\begin{aligned} R^+(2, m_2, 1) &\supseteq R^+ \setminus \{\beta_{23}, \beta_{26}, \beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}\}, \\ R^+(2, m_2, r) &= R^+ \quad \text{para todo } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}. \end{aligned}$$

Também,

$$R^+(i,0,r) = R^+ \quad \text{para todos } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \text{ e } \ i \in I.$$

Logo,

$$R^+(\lambda,1) = \bigcap_{i\in I} R^+(i,\lambda(h_i),1) \supseteq R^+ \setminus \{\beta_{23},\beta_{26},\beta_{28},\beta_{29},\beta_{30}\},$$

e,

$$R^+(\lambda,r) = \bigcap_{i\in I} R^+(i,\lambda(h_i),r) = R^+ \quad \text{para todo } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

Considere v o gerador de $M(\lambda)$ da Definição 5.2.9. Então, ordenando adequadamente uma base de $\mathfrak{g}[t]$, pelo Teorema de PBW,

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-[t])v = U(\mathfrak{n}^-)U(x^-_{\beta_{23},1})U(x^-_{\beta_{26},1})U(x^-_{\beta_{28},1})U(x^-_{\beta_{29},1})U(x^-_{\beta_{30},1})v.$$

Dado $\mathbf{r} = (r_1,r_2,r_3,r_4,r_5) \in \mathbb{Z}^5_{\geq 0}$, denotamos

$$\mathbf{x_r} = (x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_5}.$$

Então,

$$M(\lambda) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^5_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x_r}v. \tag{5.22}$$

Agora, vamos aplicar o Lema 5.1.5 algumas vezes para simplificar a expressão (5.22). Considere primeiro $x = x_6^-$, $y = x^-_{\beta_{29},1}$, $z = x^-_{\beta_{30},1}$. Observe que $[x,y] = z$, $[x,z] = 0 = [y,z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x,y,z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_5}v = a(x_6^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v, \ a \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_6^- comuta com $x^-_{\beta_{23},1}$, $x^-_{\beta_{26},1}$ e $x^-_{\beta_{28},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_r}v &= a(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x_6^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v \\
&= a(x_6^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v.
\end{aligned}$$

Considere agora $x = x_3^-$, $y = x^-_{\beta_{28},1}$, $z = x^-_{\beta_{29},1}$. Observe que $[x,y] = z$, $[x,z] = 0 = [y,z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x,y,z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_4+r_5}v = b(x_3^-)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3+r_4+r_5}v, \ b \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_3^- comuta com $x^-_{\beta_{23},1}$ e $x^-_{\beta_{26},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_r}v &= ab(x_6^-)^{r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x_3^-)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3+r_4+r_5}v \\
&= ab(x_6^-)^{r_5}(x_3^-)^{r_4+r_5}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_3+r_4+r_5}v.
\end{aligned}$$

Por fim, considere $x = x_4^-$, $y = x_{\beta_{26},1}^-$, $z = x_{\beta_{28},1}^-$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x_{\beta_{26},1}^-)^{r_2}(x_{\beta_{28},1}^-)^{r_3+r_4+r_5}v = c(x_4^-)^{r_3+r_4+r_5}(x_{\beta_{26},1}^-)^{r_2+r_3+r_4+r_5}v, \ c \in \mathbb{C}.$$

Agora, x_4^- comuta com $x_{\beta_{23},1}^-$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{x_r}v &= abc(x_6^-)^{r_5}(x_3^-)^{r_4+r_5}(x_{\beta_{23},1}^-)^{r_1}(x_4^-)^{r_3+r_4+r_5}(x_{\beta_{26},1}^-)^{r_2+r_3+r_4+r_5}v \\ &= abc(x_6^-)^{r_5}(x_3^-)^{r_4+r_5}(x_4^-)^{r_3+r_4+r_5}(x_{\beta_{23},1}^-)^{r_1}(x_{\beta_{26},1}^-)^{r_2+r_3+r_4+r_5}v. \end{aligned}$$

Portanto

$$M(\lambda) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^5} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x_r}v = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^2} U(\mathfrak{n}^-)(x_{\beta_{26},1}^-)^{k_2}(x_{\beta_{23},1}^-)^{k_1}v = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^2} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y_k}v,$$

onde $\mathbf{y_k} := (x_{\beta_{26},1}^-)^{k_2}(x_{\beta_{23},1}^-)^{k_1}$, se $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$. Agora considere $x = x_5^-$, $y = x_{\beta_{23},1}^-$, $z = x_{\beta_{26},1}^-$. Observe que $[x, y] = z$, $[x, z] = 0 = [y, z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x, y, z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $x^{m_5+1}v = 0$. Pelo Lema 5.1.5, $(x_{\beta_{26},1}^-)^{k_2}(x_{\beta_{23},1}^-)^{k_1}v$ está no subespaço vetorial gerado pelos elementos da forma $(x_5^-)^a(x_{\beta_{23},1}^-)^b(x_{\beta_{26},1}^-)^c$, com $0 \leq c < m_5 + 1$, donde segue que

$$M(\lambda) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^2} U(\mathfrak{n}^-)(x_{\beta_{26},1}^-)^{k_2}(x_{\beta_{23},1}^-)^{k_1}v = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^2} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y_k}v, \tag{5.23}$$

com $k_2 \leq m_5$. Dado $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, definimos

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_5\omega_5 - k_1\beta_{23} - k_2\beta_{26} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{gr}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2.$$

Observe que

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = m_1\omega_1 + (m_2 - k_1 - k_2)\omega_2 + (m_5 + k_1 - k_2)\omega_5 + k_2\omega_4$$

é o peso do vetor $\mathbf{y_k}v$. Segue do Lema 5.1.4 que $m_{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}(\lambda, s)$ pode ser não nulo somente se $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) \in P^+$, ou seja, $k_1 + k_2 \leq m_2$ e $k_2 \leq m_5$. Além disso, como $\{\beta_{23}, \beta_{26}\}$ é linearmente independente, a função $\mathrm{wt} : \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \to P$ é injetora. Assim $m_{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}(\lambda, s) \leq 1$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$. Definimos

$$\mathcal{A}(\lambda) = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : k_1 + k_2 \leq m_2, k_2 \leq m_5\}.$$

Portanto, $M(\lambda)[s]$ é um quociente de

$$\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathcal{A}(\lambda)\,:\,\mathrm{gr}(\mathbf{k})=s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k})), \tag{5.24}$$

como $\mathfrak{g}$-módulo.

Considere agora $v = v_{1,m_1} \otimes v_{2,m_2} \otimes v_{5,m_5} \in T(\lambda)$. Se $\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda)$, segue do Lema 5.3.6, que

$$\mathbf{y_k} v = v_{1,m_1} \otimes ((x_{\beta_{26},1})^{k_2}(x_{\beta_{23},1})^{k_1} v_{2,m_2}) \otimes v_{5,m_5} \neq 0. \tag{5.25}$$

Seja $s \in \{0,1,\ldots,m_2\}$. Considere $n = \min\{s, m_5\}$. Definimos $\mathbf{r}_j = (s-j, j)$, $j = 0,1,\ldots,n$. Claramente $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}(\lambda)$ e $\mathrm{gr}(\mathbf{r}_j) = s$. Observe que

$$\mathbf{y}_{\mathbf{r}_j} v = v_{1,m_1} \otimes (x_{\beta_{26},1})^{s-j}(x_{\beta_{23},1})^{j} v_{2,m_2} \otimes v_{5,m_5}$$

e

$$\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j) = m_1\omega_1 + (m_2 - s)\omega_2 + (m_5 + s - 2j)\omega_5 + j\omega_4.$$

Assim,

$$T(\lambda)[s] = \sum_{j=0}^{n} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_j} v.$$

Em particular, $\mathrm{wt}(\mathbf{r}_0)$ é o único peso maximal de $T(\lambda)[s]$. Mostremos por indução em $l = 0,1,\ldots,n$ que

$$\sum_{j=0}^{l} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_j} v \cong \bigoplus_{j=0}^{l} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j)), \tag{5.26}$$

como $\mathfrak{g}$-módulo.

Como $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_0} v \neq 0$ e $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_0} v$ tem peso maximal em $T(\lambda)[s]$, segue que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_0} v$ é um vetor de peso máximo para $T(\lambda)[s]$, portanto $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_0} v$ gera um $\mathfrak{g}$-submódulo isomorfo a $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_0))$. Assim provamos (5.26) para $l = 0$. Assuma agora $0 < l \leq n$ e (5.26) válida para $l-1$. Mostremos (5.26) para l. Pela hipótese de indução,

$$V := \sum_{j=0}^{l-1} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_j} v \cong \bigoplus_{j=0}^{l-1} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j)).$$

Como os espaços $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j)-(l-j)\alpha_5}$ têm dimensão 1, para $0 \leq j \leq l$, segue que

$$\dim V_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_0)-l\alpha_5} = \sum_{j=0}^{l-1} \dim V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_j)-(l-j)\alpha_5} = l.$$

Lema 5.3.9. Os vetores $(x_5^-)^j \mathbf{y}_{\mathbf{r}_{l-j}} v$, $0 \leq j \leq l$, são linearmente independentes.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
(x_5^-)^j \mathbf{y}_{\mathbf{r}_{l-j}} v &= (x_5^-)^j (v_{1,m_1} \otimes (x_{\beta_{26},1})^{l-j}(x_{\beta_{23},1})^{s-l+j} v_{2,m_2} \otimes v_{5,m_5}) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (v_{1,m_1} \otimes (x_5^-)^{j-k}(x_{\beta_{26},1})^{l-j}(x_{\beta_{23},1})^{s-l+j} v_{2,m_2} \otimes (x_5^-)^k v_{5,m_5}).
\end{aligned}$$

Agora, $[x_5^-, x_{\beta_{23},1}^-] = x_{\beta_{26},1}^-$ e, x_5^- e $x_{\beta_{23},1}^-$ comutam com $x_{\beta_{26},1}^-$. Além disso $j-k \leq s-l+j$, pois $l \leq n = \min\{s, m_5\}$. Então, usando o fato que $x_5^- v_{2,m_2} = 0$, segue do Lema 5.1.6 que

$$\begin{aligned}(x_5^-)^j \mathbf{y}_{\mathbf{r}_{l-j}} v &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (v_{1,m_1} \otimes (x_5^-)^{j-k} (x_{\beta_{26},1})^{l-j} (x_{\beta_{23},1})^{s-l+j} v_{2,m_2} \otimes (x_5^-)^k v_{5,m_5}) \\ &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{(s-l+j)!}{(s-l+k)!} (v_{1,m_1} \otimes (x_{\beta_{26},1})^{l-k} (x_{\beta_{23}})^{s-l+k} v_{2,m_2} \otimes (x_5^-)^k v_{5,m_5}).\end{aligned}$$

Como $x_5^+ v_{5,m_5} = 0$ e $h_5 v_{5,m_5} = m_5 v_{5,m_5}$, o vetor v_{5,m_5} é um vetor de peso máximo (de peso m_5) do módulo irredutível gerado por v_{5,m_5} sobre a subálgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$ gerada por $\{x_5^+, x_5^-\}$. Então, pelo Exemplo 2.3.8, $(x_5^-)^k v_{5,m_5} \neq 0$ para todo $k \leq m_5$. Também, como $l-k+s-l+k = s \leq m_2$, pelo Lema 5.3.5, $(x_{\beta_{26},1})^{l-k} (x_{\beta_{23},1})^{s-l+k} v_{2,m_2} \neq 0$. Assim, os vetores

$$w_k := v_{1,m_1} \otimes (x_{\beta_{26},1})^{l-k} (x_{\beta_{23},1})^{s-l+k} v_{2,m_2} \otimes (x_5^-)^k v_{5,m_5}, \quad k = 0, 1, \ldots, l,$$

são linearmente independentes, já que $\{(x_5^-)^k v_{5,m_5} : k = 0, 1, \ldots, l\}$ é linearmente independente (contém vetores não nulos com pesos distintos, logo autovetores associados a autovalores distintos). Agora procedendo por indução sobre $j = 0, 1, \ldots, l$, verifica-se que os vetores $(x_5^-)^j \mathbf{y}_{\mathbf{r}_{l-j}} v$ são linearmente independentes, pois cada $(x_5^-)^j \mathbf{y}_{\mathbf{r}_{l-j}} v$ é uma combinação linear dos w_k, $k = 0, 1, \ldots, j$. $\square$

Como os elementos $(x_5^-)^j \mathbf{y}_{\mathbf{r}_{l-j}} v$, $0 \leq j \leq l$, são linearmente independentes e têm o mesmo peso $\mathrm{wt}(\mathbf{r}_l) = \mathrm{wt}(\mathbf{r}_0) - l\alpha_5$ ($l+1$ elementos), segue que $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_l))$ é um submódulo de $\sum_{j=0}^{l} U(\mathfrak{n}^-) \mathbf{y}_{\mathbf{r}_j} v$.

Logo,

$$\bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda) : \mathrm{gr}(\mathbf{k}) = s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k}))$$

é isomorfo a um quociente de $T(\lambda)[s]$. Como, pela Proposição 5.2.10, $T(\lambda)$ é isomorfo a um quociente de $M(\lambda)$, segue que

$$\bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda) : \mathrm{gr}(\mathbf{k}) = s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k}))$$

é isomorfo a um quociente de $M(\lambda)[s]$.

Portanto, segue de (5.24) que, como $\mathfrak{g}$-módulo,

$$M(\lambda)[s] \cong \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda) : \mathrm{gr}(\mathbf{k}) = s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k})).$$

Além disso, $T(\lambda) \cong M(\lambda)$. Devido a simetria do diagrama de Dynkin de E_6, o caso $\lambda = m_1\omega_1 + m_4\omega_4 + m_5\omega_5$, $m_1, m_4, m_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, segue analogamente. Isso completa a demonstração da parte (ii) do Teorema 5.3.2.

5.3.6 Parte (iii) do Teorema 5.3.2

Denote $\lambda = m_2\omega_2 + m_4\omega_4$. Então

$$\lambda(h_2) = m_2, \quad \lambda(h_4) = m_4 \quad \text{e} \quad \lambda(h_j) = 0 \quad \text{para todo } j \in I \setminus \{2,4\}.$$

Também, como já vimos,

$$\begin{aligned} R^+(2,m_2,1) &= R^+ \setminus \{\beta_{23},\beta_{26},\beta_{28},\beta_{29},\beta_{30}\}, \\ R^+(2,m_2,r) &= R^+ \quad \text{para todo } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} R^+(4,m_4,1) &= R^+ \setminus \{\beta_{25},\beta_{27},\beta_{28},\beta_{29},\beta_{30}\}, \\ R^+(4,m_4,r) &= R^+ \quad \text{para todo } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$R^+(i,0,r) = R^+ \quad \text{para todos } \ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \text{ e } \ i \in I.$$

Logo,

$$R^+(\lambda,1) = \bigcap_{i\in I} R^+(i,\lambda(h_i),1) = R^+ \setminus \{\beta_{23},\beta_{25},\beta_{26},\beta_{27},\beta_{28},\beta_{29},\beta_{30}\},$$

e,

$$R^+(\lambda,r) = \bigcap_{i\in I} R^+(i,\lambda(h_i),r) = R^+ \quad \text{para todo } r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

Considere v o gerador de $M(\lambda)$ da Definição 5.2.9. Então, ordenando adequadamente uma base de $\mathfrak{g}[t]$, pelo Teorema de PBW,

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-[t])v = U(\mathfrak{n}^-)U(x^-_{\beta_{23},1})U(x^-_{\beta_{25},1})U(x^-_{\beta_{26},1})U(x^-_{\beta_{27},1})U(x^-_{\beta_{28},1})U(x^-_{\beta_{29},1})U(x^-_{\beta_{30},1})v.$$

Dado $\mathbf{r} = (r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_7) \in \mathbb{Z}^7_{\geq 0}$, denotamos

$$\mathbf{x_r} = (x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{27},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_6}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_7}.$$

Então,

$$M(\lambda) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^7_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x_r}v. \tag{5.27}$$

Agora, vamos aplicar o Lema 5.1.5 algumas vezes para simplificar a expressão (5.27). Considere primeiro $x = x^-_6$, $y = x^-_{\beta_{29},1}$, $z = x^-_{\beta_{30},1}$. Observe que $[x,y] = z$, $[x,z] = 0 = [y,z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x,y,z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{29},1})^{r_6}(x^-_{\beta_{30},1})^{r_7}v = a(x^-_6)^{r_7}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_6+r_7}v, \ a \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_6^- comuta com $x^-_{\beta_{28},1}$, $x^-_{\beta_{27},1}$, $x^-_{\beta_{26},1}$, $x^-_{\beta_{25},1}$ e $x^-_{\beta_{23},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_r}v &= a(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{27},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5}(x_6^-)^{r_7}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_6+r_7}v \\
&= a(x_6^-)^{r_7}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{27},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_6+r_7}v.
\end{aligned}$$

Considere agora $x = x_3^-$, $y = x^-_{\beta_{28},1}$, $z = x^-_{\beta_{29},1}$. Observe que $[x,y] = z$, $[x,z] = 0 = [y,z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x,y,z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5}(x^-_{\beta_{29},1})^{r_6+r_7}v = b(x_3^-)^{r_6+r_7}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}v,\ b \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_3^- comuta com $x^-_{\beta_{27},1}$, $x^-_{\beta_{26},1}$, $x^-_{\beta_{25},1}$ e $x^-_{\beta_{23},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_r}v &= ab(x_6^-)^{r_7}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{27},1})^{r_4}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}v \\
&= ab(x_6^-)^{r_7}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{27},1})^{r_4}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}v \\
&= ab(x_6^-)^{r_7}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{27},1})^{r_4}v.
\end{aligned}$$

Considere agora $x = x_1^-$, $y = x^-_{\beta_{25},1}$, $z = x^-_{\beta_{27},1}$. Observe que $[x,y] = z$, $[x,z] = 0 = [y,z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x,y,z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2}(x^-_{\beta_{27},1})^{r_4}v = c(x_1^-)^{r_4}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2+r_4}v,\ c \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_1^- comuta com $x^-_{\beta_{26},1}$, $x^-_{\beta_{23},1}$ e $x^-_{\beta_{28},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_r}v &= abc(x_6^-)^{r_7}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x_1^-)^{r_4}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2+r_4}v \\
&= abc(x_6^-)^{r_7}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x_1^-)^{r_4}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2+r_4}v \\
&= abc(x_6^-)^{r_7}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x_1^-)^{r_4}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2+r_4}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}v.
\end{aligned}$$

Por fim, considere $x = x_5^-$, $y = x^-_{\beta_{23},1}$, $z = x^-_{\beta_{26},1}$. Observe que $[x,y] = z$, $[x,z] = 0 = [y,z]$. Assim, a subálgebra gerada por $\{x,y,z\}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Além disso, $xv = 0$. Pelo Lema 5.1.5,

$$(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1}(x^-_{\beta_{26},1})^{r_3}v = d(x_5^-)^{r_3}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1+r_3}v,\ d \in \mathbb{K}.$$

Agora, x_5^- comuta com $x^-_{\beta_{25},1}$ e $x^-_{\beta_{28},1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_r}v &= abcd(x_6^-)^{r_7}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x_1^-)^{r_4}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2+r_4}(x_5^-)^{r_3}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1+r_3}v \\
&= abcd(x_6^-)^{r_7}(x_3^-)^{r_6+r_7}(x_1^-)^{r_4}(x_5^-)^{r_3}(x^-_{\beta_{28},1})^{r_5+r_6+r_7}(x^-_{\beta_{25},1})^{r_2+r_4}(x^-_{\beta_{23},1})^{r_1+r_3}v.
\end{aligned}$$

Portanto

$$M(\lambda) = \sum_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^7_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{x_r}v = \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)(x^-_{\beta_{28},1})^{k_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{k_2}(x^-_{\beta_{23},1})^{k_3}v = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y_k}v,$$

onde $\mathbf{y_k} := (x^-_{\beta_{28},1})^{k_1}(x^-_{\beta_{25},1})^{k_2}(x^-_{\beta_{23},1})^{k_3}$, se $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$. Dado $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$, definimos

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = m_2\omega_2 + m_4\omega_4 - k_1\beta_{28} - k_2\beta_{25} - k_3\beta_{23} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{gr}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2 + k_3.$$

Observe que

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = (m_2 - k_1 - k_3)\omega_2 + (m_4 - k_1 - k_2)\omega_4 + k_1\omega_3 + k_2\omega_1 + k_3\omega_5$$

é o peso do vetor $\mathbf{y_k}v$. Segue do Lema 5.1.4 que $m_{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}(\lambda, s)$ pode ser não nulo somente se $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) \in P^+$, ou seja, $k_1 + k_3 \leq m_2$ e $k_1 + k_2 \leq m_4$. Além disso, como $\{\beta_{23}, \beta_{25}, \beta_{28}\}$ é linearmente independente, a função $\mathrm{wt} : \mathbb{Z}^3_{\geq 0} \to P$ é injetora. Assim $m_{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}(\lambda, s) \leq 1$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$. Definimos

$$\mathcal{A}(\lambda) = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0} : k_1 + k_3 \leq m_2, k_1 + k_2 \leq m_4\}.$$

Portanto, $M(\lambda)[s]$ é isomorfo a um quociente de

$$\bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}(\lambda) \,:\, \mathrm{gr}(\mathbf{k}) = s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k})), \tag{5.28}$$

como $\mathfrak{g}$-módulo.

Seja v^j_{i,m_i} a imagem de v_{i,m_i} em $M(m_i\omega_i)(j)$, $i = 2, 4$, $j \geq 0$. Dados $l_1 \leq m_2$ e $l_2 \leq m_4$, seja $T_{l_1,l_2}(\lambda)$ o $\mathfrak{g}[t]$-submódulo de $M(m_2\omega_2)(l_1) \otimes M(m_4\omega_4)(l_2)$ gerado por $v_{l_1,l_2} := v^{l_1}_{2,m_2} \otimes v^{l_2}_{4,m_4}$. Observe que $T_{l_1,l_2}(\lambda)$ um quociente de $T(\lambda)(l_1 + l_2)$. Defina os vetores $\mathbf{r}_{ij} = (i + j, l_2 - i, l_1 - j)$, $i = 0, 1, \ldots, \min\{m_2 - l_1, l_2\}$, $j = 0, 1, \ldots, \min\{m_4 - l_2, l_1\}$. Claramente $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}(\lambda)$ e $\mathrm{gr}(\mathbf{r}_{ij}) = l_1 + l_2$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}} v_{l_1,l_2} &= (x^-_{\beta_{28},1})^{i+j}((x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-j}v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2-i}v^{l_2}_{4,m_4}) \\
&= \sum_{k=0}^{i+j} \binom{i+j}{k} (x^-_{\beta_{28},1})^{i+j-k}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-j}v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{28},1})^{k}(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2-i}v^{l_2}_{4,m_4} \\
&= \binom{i+j}{i} (x^-_{\beta_{28},1})^{j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-j}v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{28},1})^{i}(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2-i}v^{l_2}_{4,m_4}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$T_{l_1,l_2}(\lambda)[l_1 + l_2] = \sum_{i,j} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}} v_{l_1,l_2}.$$

Além disso,

$$\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}) = (m_2 - l_1 - i)\omega_2 + (m_4 - l_2 - j)\omega_4 + (i + j)\omega_3 + (l_2 - i)\omega_1 + (l_1 - j)\omega_5,$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}) - \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i'j'}) &= (i' - i)\omega_2 + (i - i' + j - j')\omega_3 + (j' - j)\omega_4 + (i' - i)\omega_1 + (j' - j)\omega_5 \\
&= (i - i')(\omega_2 - \omega_3 + \omega_1) + (j' - j)(\omega_5 + \omega_4 - \omega_3) \\
&= (i' - i)(\alpha_1 + \alpha_2) + (j' - j)(\alpha_4 + \alpha_5).
\end{aligned}$$

Assim, se $i \leq i'$ e $j \leq j'$, então $\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i'j'}) < \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})$. Em particular, $\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00})$ é o único peso maximal de $T_{l_1,l_2}(\lambda)[l_1+l_2]$. Temos o seguinte diagrama que representa a ordenação dos pesos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
 & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{10}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{01}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{20}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{11}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{02}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{30}) \arrow[d, dotted, dash] & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{21}) \arrow[d, dotted, dash] & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{12}) \arrow[d, dotted, dash] & & \mathrm{wt}(\mathbf{r}_{03}) \arrow[d, dotted, dash] \\
 {} & & {} & & {} & & {}
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar, por indução em $l = i+j$, que

$$\sum_{\substack{i,j \\ i+j \leq l}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}} v_{l_1,l_2} = \bigoplus_{\substack{i,j \\ i+j \leq l}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})), \tag{5.29}$$

como $\mathfrak{g}$-módulo. Se $l = 0$, então $i = j = 0$. Segue dos Lemas 5.3.6 e 5.3.8 que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{00}} v_{l_1,l_2} \neq 0$. Como $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{00}} v_{l_1,l_2}$ é vetor de peso máximo para $T_{l_1,l_2}(\lambda)[l_1+l_2]$, pois tem peso maximal em $T_{l_1,l_2}(\lambda)[l_1+l_2]$, segue que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{00}} v_{l_1,l_2}$ gera um $\mathfrak{g}$-submódulo isomorfo a $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00}))$. Assim provamos (5.29) para $l = 0$. Assuma agora $l > 0$ e (5.29) válida para $l-1$. Mostremos (5.29) para l. Pela hipótese de indução, $V := \sum_{\substack{i,j \\ i+j<l}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}} v_{l_1,l_2} = \bigoplus_{\substack{i,j \\ i+j<l}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}))$.

Proposição 5.3.10. Dados $i \in \{0,1,\ldots,\min\{m_2-l_1,l_2\}\}$ e $j \in \{0,1,\ldots,\min\{m_4-l_2,l_1\}\}$, temos

$$\dim V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})-k(\alpha_1+\alpha_2)} = k+1$$

para todos $k = 0,1,\ldots,\min\{m_2-l_1-i, l_2-i\}$, e

$$\dim V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})-k(\alpha_4+\alpha_5)} = k+1,$$

para todos $k = 0,1,\ldots,\min\{m_4-l_2-j, l_1-j\}$.

Demonstração. Restrito à subálgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}_3$ correspondente a $\{\alpha_1,\alpha_2\}$, temos

$$\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}) = (l_2-i)\omega_1 + (m_2-l_1-i)\omega_2.$$

O grupo de Weyl de $\mathfrak{sl}_3$ é $\mathcal{W} = \{e, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, onde $e = \mathrm{Id}$ é o elemento neutro, $g_1 = \sigma_1$, $g_2 = \sigma_2$, $g_3 = \sigma_2\sigma_1$, $g_4 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ e $g_5 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
g_1\alpha_1 &= -\alpha_1 & g_3\alpha_2 &= \alpha_1 \\
g_1\alpha_2 &= \alpha_1+\alpha_2 & g_4\alpha_1 &= -\alpha_2 \\
g_2\alpha_1 &= \alpha_1+\alpha_2 & g_4\alpha_2 &= -\alpha_1 \\
g_2\alpha_2 &= -\alpha_2 & g_5\alpha_1 &= \alpha_2 \\
g_3\alpha_1 &= -\alpha_1-\alpha_2 & g_5\alpha_2 &= -\alpha_1-\alpha_2.
\end{aligned}
$$

Usando que $\omega_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$, $\omega_2 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2$, $\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2$ e $\alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
g_1\omega_1 &= -\omega_1+\omega_2 & g_3\omega_2 &= \omega_1-\omega_2 \\
g_1\omega_2 &= \omega_2 & g_4\omega_1 &= -\omega_2 \\
g_2\omega_1 &= \omega_1 & g_4\omega_2 &= -\omega_1 \\
g_2\omega_2 &= \omega_1-\omega_2 & g_5\omega_1 &= -\omega_1+\omega_2 \\
g_3\omega_1 &= -\omega_2 & g_5\omega_2 &= -\omega_1.
\end{aligned}
$$

Agora, pela fórmula da multiplicidade de Kostant, temos

$$
\begin{aligned}
&\dim(V(\mathrm{wt}(r_{ij}))_{\mathrm{wt}(r_{ij})-k(\alpha_1+\alpha_2)}) = \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} (-1)^{l(\sigma)} p(\sigma(\mathrm{wt}(r_{ij})+\rho) - (\mathrm{wt}(r_{ij}) - k(\alpha_1+\alpha_2)+\rho)) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} (-1)^{l(\sigma)} p(\sigma(\mathrm{wt}(r_{ij})+\omega_1+\omega_2) - (\mathrm{wt}(r_{ij}) - (k-1)(\omega_1+\omega_2))) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} (-1)^{l(\sigma)} p(\sigma((l_2-i+1)\omega_1 + (m_2-l_1-i+1)\omega_2) - ((l_2-i-k+1)\omega_1 \\
&\quad +(m_2-l_1-i-k+1)\omega_2)).
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&\dim(V(\mathrm{wt}(r_{ij}))_{\mathrm{wt}(r_{ij})-k(\alpha_1+\alpha_2)}) = \\
&= \ p((-l_2+i+k-1)\omega_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\omega_2+(l_2-i+1)\omega_1 \\
&\qquad +(m_2-l_1-i+1)\omega_2) \\
&\ -p((-l_2+i+k-1)\omega_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\omega_2-(l_2-i+1)\omega_1 \\
&\qquad +(m_2-l_1+l_2-2i+2)\omega_2) \\
&\ -p((-l_2+i+k-1)\omega_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\omega_2+(m_2-l_1+l_2-2i+2)\omega_1 \\
&\qquad -(m_2-l_1-i+1)\omega_2) \\
&\ +p((-l_2+i+k-1)\omega_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\omega_2+(m_2-l_1-i+1)\omega_1 \\
&\qquad -(m_2-l_1+l_2-2i+2)\omega_2) \\
&\ -p((-l_2+i+k-1)\omega_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\omega_2-(m_2-l_1-i+1)\omega_1 \\
&\qquad -(l_2-i+1)\omega_2) \\
&\ +p((-l_2+i+k-1)\omega_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\omega_2-(m_2-l_1+l_2-2i+2)\omega_1 \\
&\qquad +(l_2-i+1)\omega_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ & p(k\omega_1+k\omega_2) \\
& -p((-2l_2+2i+k-2)\omega_1+(l_2-i+k+1)\omega_2) \\
& -p((m_2-l_1-i+k+1)\omega_1+(-2m_2+2l_1+2i+k-2)\omega_2) \\
& +p((m_2-l_1-l_2+k)\omega_1+(-2m_2+2l_1+3i+k-3)\omega_2) \\
& -p((-m_2+l_1-l_2+2i+k-2)\omega_1+(-m_2+l_1-l_2+2i+k-2)\omega_2) \\
& +p((-m_2+l_1-2l_2+3i+k-3)\omega_1+(-m_2+l_1+l_2+k)\omega_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ & p(k\alpha_1+k\alpha_2) \\
& -p((-l_2+i+k-1)\alpha_1+k\alpha_2) \\
& -p(k\alpha_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\alpha_2) \\
& +p((-l_2+i+k-1)\alpha_1+(-m_2+l_1-l_2+2i+k-2)\alpha_2) \\
& -p((-m_2+l_1-l_2+2i+k-2)\alpha_1+(-m_2+l_1-l_2+2i+k-2)\alpha_2) \\
& +p((-m_2+l_1-l_2+2i+k-2)\alpha_1+(-m_2+l_1+i+k-1)\alpha_2).
\end{aligned}
$$

Observe que $p(a\alpha_1+b\alpha_2)$, com $a \leq b$ e $a, b \geq 0$, é igual a $a+1$, que seriam

$$
\begin{aligned}
& a(\alpha_1+\alpha_2)+(b-a)\alpha_2 \\
& (a-1)(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1)+(\alpha_2)+(b-a)\alpha_2 \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& (\alpha_1+\alpha_2)+(a-1)(\alpha_1)+(a-1)(\alpha_2)+(b-a)\alpha_2 \\
& a(\alpha_1)+a(\alpha_2)+(b-a)\alpha_2,
\end{aligned}
$$

e $p(a\alpha_1 + b\alpha_2)$, com $a < 0$ ou $b < 0$, é igual a zero. Então,

$$\dim(V(\mathrm{wt}(r_{ij}))_{\mathrm{wt}(r_{ij})-k(\alpha_1+\alpha_2)}) = k + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = k + 1.$$

A demonstração da outra parte é análoga, devido à simetria em relação ao diagrama de Dynkin de E_6. $\square$

Lema 5.3.11. Mostrar que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}} v_{l_1,l_2} \notin V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i0}))$, onde $i, j \in \mathbb{Z}_{>0}$, é equivalente a mostrar que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0j}} v_{l_1,l_2} \notin V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00}))$. Também, mostrar que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i0}} v_{l_1,l_2} \notin \bigoplus\limits_{\substack{k\\k<i}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{k0}))$, com $i > 0$, é equivalente a mostrar que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0i}} v_{l_1,l_2} \notin \bigoplus\limits_{\substack{k\\k<i}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0k}))$.

Demonstração. Observe que

$$\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i0}} v_{l_1,l_2} = (x^-_{\beta_{23},1})^{l_1} v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{28},1})^{i} (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2-i} v^{l_2}_{4,m_4},$$

e os vetores de $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i0}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i0})-j(\alpha_4+\alpha_5)} = V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i0}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})}$ são obtidos por combinações lineares de ações de k_1 vetores x^-_4, k_1 vetores x^-_5 e k_2 vetores $x^-_{\alpha_4+\alpha_5}$ (de modo que $k_1 + k_2 = j$) em $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i0}} v_{l_1,l_2}$. Agora,

$$\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{00}} v_{l_1,l_2} = (x^-_{\beta_{23},1})^{l_1} v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2} v^{l_2}_{4,m_4},$$

e os vetores de $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00})-j(\alpha_4+\alpha_5)} = V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0j})}$ são obtidos por combinações lineares de ações de k_1 vetores x^-_4, k_1 vetores x^-_5 e k_2 vetores $x^-_{\alpha_4+\alpha_5}$ (de modo que $k_1 + k_2 = j$) em $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{00}} v_{l_1,l_2}$. Como x^-_4, x^-_5 e $x^-_{\alpha_4+\alpha_5}$ comutam com $x^-_{\beta_{28},1}$, se

$$\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}} v_{l_1,l_2} = \binom{i+j}{i} (x^-_{\beta_{28},1})^{j} (x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-j} v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{28},1})^{i} (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2-i} v^{l_2}_{4,m_4}$$

for uma combinação linear de vetores de $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i0}))$, então

$$\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0j}} v_{l_1,l_2} = (x^-_{\beta_{28},1})^{j} (x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-j} v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2} v^{l_2}_{4,m_4}$$

será a combinação linear análoga de vetores de $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00}))$ (sem $(x^-_{\beta_{28},1})^i$ no segundo fator do produto tensorial e com a potência de $x^-_{\beta_{25},1}$ igual a l_2 ao invés de $l_2 - i$), e vice-versa.

A segunda parte segue da simetria em relação ao diagrama de Dynkin de E_6. $\square$

Lema 5.3.12. Mostrar que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i'j'}} v_{l_1,l_2} \notin \bigoplus\limits_{\substack{i,j\\i+j<l}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}))$, onde $i', j' > 0$ e $i' + j' = l$, é equivalente a mostrar que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i'j'}} v_{l_1,l_2} \notin \bigoplus\limits_{\substack{k\\k<j'}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i'k}))$ e $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i'j'}} v_{l_1,l_2} \notin \bigoplus\limits_{\substack{k\\k<i'}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{kj'}))$.

Demonstração. Os vetores de $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i'j'})} = V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})-(i'-i)(\alpha_1+\alpha_2)-(j'-j)(\alpha_4+\alpha_5)}$ são obtidos por combinações lineares de ações de r_1 vetores x_1^-, r_1 vetores x_2^-, r_2 vetores $x_{\alpha_1+\alpha_2}^-$ (de modo que $r_1 + r_2 = i' - i$), k_1 vetores x_4^-, k_1 vetores x_5^- e k_2 vetores $x_{\alpha_4+\alpha_5}^-$ (de modo que $k_1 + k_2 = j' - j$) em $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}} v_{l_1,l_2}$. Como x_1^-, x_2^- e $x_{\alpha_1+\alpha_2}^-$ comutam com x_4^-, x_5^- e $x_{\alpha_4+\alpha_5}^-$, podemos escrever essas ações com x_1^-, x_2^- e $x_{\alpha_1+\alpha_2}^-$ agindo depois de x_4^-, x_5^- e $x_{\alpha_4+\alpha_5}^-$. Assim, se $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i'j'}} v_{l_1,l_2}$ é uma combinação linear de vetores de $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij}))$ com $i + j < l$, então $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{i'j'}} v_{l_1,l_2}$ é a combinação linear análoga de vetores de $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{i'k}))$ com $k < j'$ (vetores obtidos somente com a ação de x_4^-, x_5^- e $x_{\alpha_4+\alpha_5}^-$, antes de agir x_1^-, x_2^- e $x_{\alpha_1+\alpha_2}^-$). Do mesmo modo, escrevendo as ações com x_4^-, x_5^- e $x_{\alpha_4+\alpha_5}^-$ agindo depois de x_1^-, x_2^- e $x_{\alpha_1+\alpha_2}^-$, obtemos a outra afirmação. A recíproca segue de maneira análoga, usando o Lema 5.3.11. □

Pelos Lemas 5.3.11 e 5.3.12, e pela hipótese de indução, basta mostrar que $\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0l}} v_{l_1,l_2} \notin \bigoplus_{j\,:\,j<l} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0j}))$.

Como $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0j}))_{\mathrm{wt}(r_{0j})-(l-j)(\alpha_4+\alpha_5)}$ tem dimensão $l - j + 1$, $0 \le j \le l$, segue que

$$\begin{aligned}
\dim V_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00})-l(\alpha_4+\alpha_5)} &= \sum_{j=0}^{l-1} \dim V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0j}))_{\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0j})-(l-j)(\alpha_4+\alpha_5)} \\
&= \sum_{j=0}^{l-1} (l-j+1) \\
&= 2 + 3 + \cdots + l + (l+1).
\end{aligned}$$

Vamos precisar da seguinte proposição.

Proposição 5.3.13. Os vetores

$$u_{ji} := (x_5^-)^i (x_4^-)^j (x_5^-)^{j-i} \mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0,l-j}} v_{l_1,l_2}, \quad j = 0, 1, \ldots, l, \quad i = 0, 1, \ldots, j,$$

são linearmente independentes.

Para demonstrar a Proposição 5.3.13 vamos precisar do seguinte lema.

Lema 5.3.14. Fixe $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$ e $i \in \{0, 1, \ldots, j\}$. Então, são não nulos os vetores:

$$(x_{\beta_{28},1}^-)^{l-j} (x_5^-)^{j-s} (x_{\beta_{23},1}^-)^{l_1-l+j} v_{2,m_2}^{l_1}$$

e

$$(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2} (x_5^-)^s (x_4^-)^k v_{4,m_4}^{l_2}$$

para todos $s = 0, \ldots, i$.

Demonstração. Observe que

$$(x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_5)^{j-s}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2} = (x^-_5)^{j-s}(x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2}.$$

Como x^+_4 comuta com $x^-_{\beta_{28}}$ e $x^-_{\beta_{23}}$, temos

$$x^+_4(x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2} = (x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}x^+_4v^{l_1}_{2,m_2} = 0.$$

O vetor $(x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2}$ é não nulo (Lema 5.3.6) e tem peso $(m_2 - l_1)\omega_2 + (l - j)\omega_3 + (j - l)\omega_4 + (l_1 - l + j)\omega_5$, com $l_1 - l + j \geq 0$, já que $l \leq l_1$. Assim, $(x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2}$ é um vetor de peso máximo para a subálgebra, isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$, gerada por $\{x^+_5, x^-_5\}$, de peso $l_1 - l + j$. Então, como $j - s \leq l_1 - l + j$, temos

$$(x^-_5)^{j-s}(x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2} \neq 0.$$

Agora, observe que $(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}(x^-_5)^s(x^-_4)^k v^{l_2}_{4,m_4} = (x^-_5)^s(x^-_4)^k(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4}$. Como, em $U(\mathfrak{g}[t])$, $x^+_4x^-_{\beta_{25},1} - x^-_{\beta_{25},1}x^+_4 = ax^-_{\beta_{22},1}$, $a \in \mathbb{K}$, pelo Lema 5.1.6,

$$x^+_4(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4} = \sum_{r=0}^{\min\{1,l_2\}} \binom{1}{r}\binom{l_2}{r} r!\,(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2-r}(x^+_4)^{1-r}(ax^-_{\beta_{22},1})^r v^{l_2}_{4,m_4}.$$

Além disso, $x^-_{\beta_{22},1}v^{l_2}_{4,m_4} = x^+_4v^{l_2}_{4,m_4} = 0$. Então $x^+_4(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4} = 0$. Observe que o vetor $(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4}$ é não nulo (Lema 5.3.8) e tem peso $\omega_1 + (m_4 - l_2)\omega_4$. Assim, $(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4}$ é um vetor de peso máximo para a ação da subálgebra, isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$, gerada por $\{x^+_4, x^-_4\}$, de peso $m_4 - l_2 \geq 0$. Logo, $(x^-_4)^k(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4} \neq 0$, pois $k \leq m_4 - l_2$. Agora,

$$(x^+_5)(x^-_4)^k(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4} = (x^-_4)^k(x^+_5)(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4} = (x^-_4)^k(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}(x^+_5)v^{l_2}_{4,m_4} = 0.$$

Logo, $(x^-_4)^k(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4}$ é um vetor de peso máximo para a ação da subálgebra, isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$, gerada por $\{x^+_5, x^-_5\}$, de peso $k \geq 0$. Portanto $(x^-_5)^s(x^-_4)^k(x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4} \neq 0$, pois $s \leq k$. □

Demonstração da Proposição 5.3.13. Observe que

$$\begin{aligned}
&(x^-_5)^i(x^-_4)^j(x^-_5)^{j-i}\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0,l-j}}v_{l_1,l_2} = \\
&= (x^-_5)^i(x^-_4)^j(x^-_5)^{j-i}((x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4}) \\
&= (x^-_5)^i(x^-_4)^j((x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_5)^{j-i}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}v^{l_2}_{4,m_4}) \\
&= (x^-_5)^i\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(x^-_{\beta_{28},1})^{l-j}(x^-_4)^{j-k}(x^-_5)^{j-i}(x^-_{\beta_{23},1})^{l_1-l+j}v^{l_1}_{2,m_2} \otimes (x^-_{\beta_{25},1})^{l_2}(x^-_4)^k v^{l_2}_{4,m_4}\right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 5.1.6, temos

$$
\begin{aligned}
&(x_5^-)^i(x_4^-)^j(x_5^-)^{j-i}\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0,l-j}}v_{l_1,l_2} = \\
&= (x_5^-)^i\left(\sum_{k=i}^{j}\binom{j}{k}(x_{\beta_{28},1}^-)^{l-j}(x_4^-)^{j-k}(x_5^-)^{j-i}(x_{\beta_{23},1}^-)^{l_1-l+j}v_{2,m_2}^{l_1}\otimes(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_4^-)^k v_{4,m_4}^{l_2}\right)\\
&= \sum_{k=i}^{j}\binom{j}{k}(x_5^-)^i((x_{\beta_{28},1}^-)^{l-j}(x_4^-)^{j-k}(x_5^-)^{j-i}(x_{\beta_{23},1}^-)^{l_1-l+j}v_{2,m_2}^{l_1}\otimes(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_4^-)^k v_{4,m_4}^{l_2})\\
&= \sum_{k=i}^{j}\binom{j}{k}\left(\sum_{s=0}^{i}\binom{i}{s}(x_{\beta_{28},1}^-)^{l-j}(x_5^-)^{i-s}(x_4^-)^{j-k}(x_5^-)^{j-i}(x_{\beta_{23},1}^-)^{l_1-l+j}v_{2,m_2}^{l_1}\otimes\right.\\
&\left.\otimes(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_5^-)^s(x_4^-)^k v_{4,m_4}^{l_2}\right)\\
&= \sum_{k=i}^{j}\sum_{s=0}^{i}\binom{j}{k}\binom{i}{s}(x_{\beta_{28},1}^-)^{l-j}(x_5^-)^{i-s}(x_4^-)^{j-k}(x_5^-)^{j-i}(x_{\beta_{23},1}^-)^{l_1-l+j}v_{2,m_2}^{l_1}\otimes\\
&\otimes(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_5^-)^s(x_4^-)^k v_{4,m_4}^{l_2}.
\end{aligned}
$$

O peso do vetor $(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_5^-)^s(x_4^-)^k v_{4,m_4}^{l_2}$ é

$$l_2\omega_1 + k\omega_3 + (m_4 - 2k + s - l_2)\omega_4 + (k-2s)\omega_5.$$

Logo, fixado $j \in \{0,1,\dots,l\}$, se $(k_1,s_1) \neq (k_2,s_2)$ com $k_1,k_2 \in \{0\dots,j\}$, $s_1 \in \{0,\dots,k_1\}$ e $s_2 \in \{0,\dots,k_2\}$, os vetores $(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_5^-)^{s_1}(x_4^-)^{k_2}v_{4,m_4}^{l_2}$ e $(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_5^-)^{s_2}(x_4^-)^{k_2}v_{4,m_4}^{l_2}$ têm pesos distintos, assim são linearmente independentes, já que são não nulos pelo Lema 5.3.14. Portanto, os vetores

$$w_{ks}^j := (x_{\beta_{28},1}^-)^{l-j}(x_5^-)^{i-s}(x_4^-)^{j-k}(x_5^-)^{j-i}(x_{\beta_{23},1}^-)^{l_1-l+j}v_{2,m_2}^{l_1}\otimes(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}(x_5^-)^s(x_4^-)^k v_{4,m_4}^{l_2},$$

$k=0,\dots,j$, $s=0,\dots,k$, que forem não nulos são linearmente independentes.

Agora, procederemos por indução sobre j para finalizar a prova. Para $j=0$ $(i=0)$ temos apenas o vetor

$$(x_{\beta_{28},1}^-)^l(x_{\beta_{23},1}^-)^{l_1-l}v_{2,m_2}^{l_1}\otimes(x_{\beta_{25},1}^-)^{l_2}v_{4,m_4}^{l_2},$$

que é não nulo, logo é linearmente independente. Suponha $r>1$ e que os vetores u_{ji}, $i\leq j$, são linearmente independentes para $j=0,1,\dots,r-1$. Mostremos que os vetores u_{ji}, $i \leq j$, com $j=0,1,\dots,r-1,r$, são linearmente independentes. Observe que cada u_{ji} é uma combinação linear dos vetores w_{ks}^j, $k=0,1,\dots,j$, $s=0,\dots,k$. Além disso, o coeficiente do vetor w_{js}^j (não nulo pelo Lema 5.3.14) é não nulo somente em $u_{js}, u_{j,s+1},\dots,u_{jj}$. Assim, suponha

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{j}a_{ji}u_{ji} = 0, \quad a_{ji}\in\mathbb{K}. \tag{5.30}$$

Reescrevendo essa equação como uma combinação linear dos vetores w_{ks}^j, o coeficiente de w_{rr}^r será a_{rr}, logo $a_{rr}=0$. Agora, o coeficiente de $w_{r,r-1}^r$ será $a_{r,r-1}+a_{rr}=a_{r,r-1}$, logo $a_{r,r-1}=0$. Procendendo indutivamente dessa forma até w_{r0}^r, obtemos $a_{r0}=a_{r1}=\ldots=a_{rr}=0$. Logo a equação (5.30) se torna

$$\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{j} a_{ji}u_{ji}=0, \quad a_{ji}\in\mathbb{K}.$$

Por hipótese de indução obtemos que $a_{ji}=0$, para todos $j=0,\ldots,r-1$ e $i=0,\ldots,j$. $\square$

Agora, todos os vetores $(x_5^-)^i(x_4^-)^j(x_5^-)^{j-i}\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{0,l-j}}v_{l_1,l_2}$, $j=0,1,\ldots,l$, $i=0,1,\ldots,j$, têm o mesmo peso $\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0l})=\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{00})-l(\alpha_4+\alpha_5)$ $(1+2+\cdots+l+(l+1)$ vetores). Então $\sum\limits_{\substack{i,j\\ i+j=l}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}}v_{l_1,l_2}$ contém um submódulo isomorfo a $V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{0l}))$. Assim $\sum\limits_{\substack{i,j\\ i+j\le l}} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}}v_{l_1,l_2}\cong \bigoplus\limits_{\substack{i,j\\ i+j\le l}} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})))$, o que conclui a indução. Em particular,

$$\sum_{i,j} U(\mathfrak{n}^-)\mathbf{y}_{\mathbf{r}_{ij}}v_{l_1,l_2}\cong\bigoplus_{i,j} V(\mathrm{wt}(\mathbf{r}_{ij})).$$

Logo,

$$\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathcal{A}(\lambda)\,:\,\mathrm{gr}(\mathbf{k})=s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k}))$$

é um quociente de $M(\lambda)[s]$.

Portanto,

$$M(\lambda)[s]\cong\bigoplus_{\mathbf{k}\in\mathcal{A}(\lambda)\,:\,\mathrm{gr}(\mathbf{k})=s} V(\mathrm{wt}(\mathbf{k})).$$

5.4 Conjectura para $M(m\omega_3)$

Para os módulos $M(m\omega_3)$, o máximo que se tem é a seguinte conjectura:

Conjectura 5.4.1. [14] $M(m\omega_3)[s]$ é isomorfo, como $\mathfrak{g}$-módulo, a

$$\bigoplus_{\substack{j_1+2j_2+j_3+j_4\le m\\ j_1,j_2,j_3,j_4\in\mathbb{Z}_{\ge0}}}\ \bigoplus_{\substack{0\le i\le j_4\\ 3m-2j_1-4j_2+\\ -3j_3-2j_4+i=s}} V(j_1(\omega_1+\omega_5)+j_2(\omega_2+\omega_4)+j_3\omega_3+j_4\omega_6)^{\oplus\min\{1+j_3,1+m-j_1-2j_2-j_3-j_4\}}.$$

Referências Bibliográficas

[1] Beck, Jonathan. *Braid group action and quantum affine algebras*. Commun. Math. Phys. **165** no. 3, 1994, 555–568.

[2] Carter, Roger W. *Lie Algebras of Finite and Affine type*. New York: Cambrige University Press, 2005.

[3] Chari, Vyjayanthi. *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank* 2 *case*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **31** no. 5, 1995, 873–911.

[4] Chari, Vyjayanthi. *On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*. Int. Math. Res. Not. 2001, 629–654.

[5] Chari, Vyjayanthi; Hernandez, David. *Beyond Kirillov-Reshetikhin modules*. arXiv:0812.1716.

[6] Chari, Vyjayanthi; Moura, Adriano. *The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras*. Comm. Math. Phys. **266** no. 2, 2006, 431–454.

[7] Chari, Vyjayanthi; Moura, Adriano. *Kirillov-Reshetikhin modules associated to G_2*. Contemp. Math. **442**, 2007, 41–59.

[8] Chari, Vyjayanthi; Pressley, Andrew. *A guide to quantum groups*. Cambridge: University Press, 1994.

[9] Chari, Vyjayanthi; Pressley, Andrew. *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the nonsimply-laced case*. Lett. Math. Phys. **35** no. 2, 1995, 99–114.

[10] Chari, Vyjayanthi; Pressley, Andrew. *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the simply laced case*. J. of Algebra **184** no. 1, 1996, 1–30.

[11] Chari, Vyjayanthi; Pressley, Andrew. *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the irregular case*. Lett. Math. Phys. **36** no. 3, 1996, 247–266.

[12] Frenkel, Edward; Mukhin, Evgeny. *Combinatorics of q-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras*. Comm. Math. Phys. **216** no. 1, 2001, 23–57.

[13] Frenkel, Edward; Reshetikhin, Nicolai. *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathcal{W}$-algebras*. Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), Contemp. Math. **248**, 1999, 163–205.

[14] Hatayama, Goro; Kuniba, Atsuo; Okado, Masato; Takagi, Taichiro; Yamada, Yasuhiko. *Remarks on the Fermionic Formula*. Contemp. Math. **248**, 1999.

[15] Hatayama, Goro; Kuniba, Atsuo; Okado, Masato; Takagi, Taichiro; Tsuboi, Zengo. *Paths, Crystals and Fermionic Formulae*, Prog. Math. Phys. **23**, 2002, 205–272.

[16] Hernandez, David. *Algebraic approach to q, t-characters*, Adv. Math. **187**, 2004, 1–52.

[17] Hernandez, David. *Kirillov-Reshetikhin Conjecture: The General Case*. Int. Math. Res. Notices, 2009, 0: rnp121v1-rnp121.

[18] Hong, Jin; Kang, Seok-Jin. *Introduction to quantum groups and crystal bases*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics 42, 2002.

[19] Humphreys, James E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer, 1972.

[20] Jacobson, Nathan. *Lie Algebras*. New York: Interscience Publishers, 1962.

[21] Jantzen, Jens C. *Lectures on quantum groups*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics 6, 1996.

[22] Kac, Victor G. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge: University Press, 1985.

[23] Kirillov, Anatol N.; Reshetikhin, Nicolai. *Representations of Yangians and multiplicities of ocurrence of the irreducible components of the tensor product of simplie Lie algebras*. J. Sov. Math. **52**, 1981, 393–40.

[24] Leeuwen, Marc A. A. van; Cohen, Arjeh M.; Lisser, Bert. *LiE, A Package for Lie Group Computations*, Computer Algebra Nederland, Amsterdam, ISBN 90-74116-02-7, 1992. http://www-math.univ-poitiers.fr/∼maavl/LiE/form.html.

[25] Lusztig, George. *Introduction to quantum groups*. Birkhauser Boston: Progress in Mathematics 110, 1994.

[26] Moody, Robert V.; Pianzola, Arturo. *Lie Algebras with Triangular Decompositions*. New York: Wiley-Interscience, 1995.

[27] Moura, Adriano. *Lectures on finite-dimensional representations of quantum affine algebras*. Preprint.

[28] Moura, Adriano. *Restricted limits of minimal affinizations*. Pacific J. Math. **244**, 2010, 359–397.

[29] Moura, Adriano; Pereira, Fernanda. *Characters of minimal affinizations of type E_6*. Em preparação.

[30] Nakai, Wakako; Nakanishi, Tomoki. *On Frenkel-Mukhin algorithm for q-character of quantum affine algebras*. Aparecer em Adv. Stud. in Pure Math., the proceedings volume for the workshop "Exploration of New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physic", Nagoya 2007.

[31] Nakajima, Hiraku. *Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras*. Ann. of Math. **160**, 2004, 1057–1097.

[32] Northcott, Douglas G. *Multilinear Algebra*. Great Britain: Cambrige University Press, 1984.

[33] San Martin, Luis Antonio B. *Álgebras de Lie*. Campinas: UNICAMP, 1999.

Índice Remissivo