

PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA ATUALIZAÇÃO
DOS PROFESSORES DA REDE ESTADUAL DE ENSINO
DO RIO DE JANEIRO EM MATEMÁTICA,
UTILIZANDO VÍDEO-TAPE

Tese apresentada como exigência parcial para obtenção do
título de

MESTRE EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

à Comissão julgadora

do

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

da

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

por

DIVA MARIA BRÊTAS DE NORONHA

1980

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

ORIENTADOR
SÉRGIO LORENZATO

Comissão Julgadora

À minha querida tia

Leontina S. Noronha

AGRADECIMENTOS

Não posso deixar de expressar meus agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, e muito especialmente

À colega e amiga Maria da Conceição V.P. Gomes , pelas críticas e sugestões que tornaram este trabalho possível.

Ao meu orientador Sérgio Lorenzato, pela assistência constante.

À direção da Escola Municipal CHristiano Hamann , pela cooperação quando apliquei o curso de Funções em uma de suas turmas.

ÍNDICE

página

AGRADECIMENTOS..... iv

Capítulo

I INTRODUÇÃO..... 7

1. O desenvolvimento de Recursos Humanos e a Regionalização no Estado do Rio de Janeiro.

2. A reformulação de currículos no Estado do Rio de Janeiro

II JUSTIFICATIVA E PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA 13

III PROPOSTA DE SOLUÇÃO E OBJETIVOS..... 25

IV ESTRATÉGIA..... 28

1. Definição do modelo de treinamento.

2. Contactos com a SEEC/RJ e órgãos financiadores.

	3. Escolha do tema e elaboração de um curso para o 1º Grau.	
	4. Aplicação do curso em turma de escola do 1º Grau.	
	5. Elaboração dos roteiros dos vídeo-tapes.	
	6. Elaboração dos textos complementares.	
	7. Elaboração de pré-testes e pós-testes.	
	8. Descrição do modelo elaborado.	
V	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
VI	BIBLIOGRAFIA	55
	ANEXO I - Curso de funções desenvolvido com alunos da 5ª série do 1º Grau .	58
	ANEXO II- Roteiros dos Vídeo-Tapes.....	82
	ANEXO III-Teste de avaliação I	164

I- INTRODUÇÃO

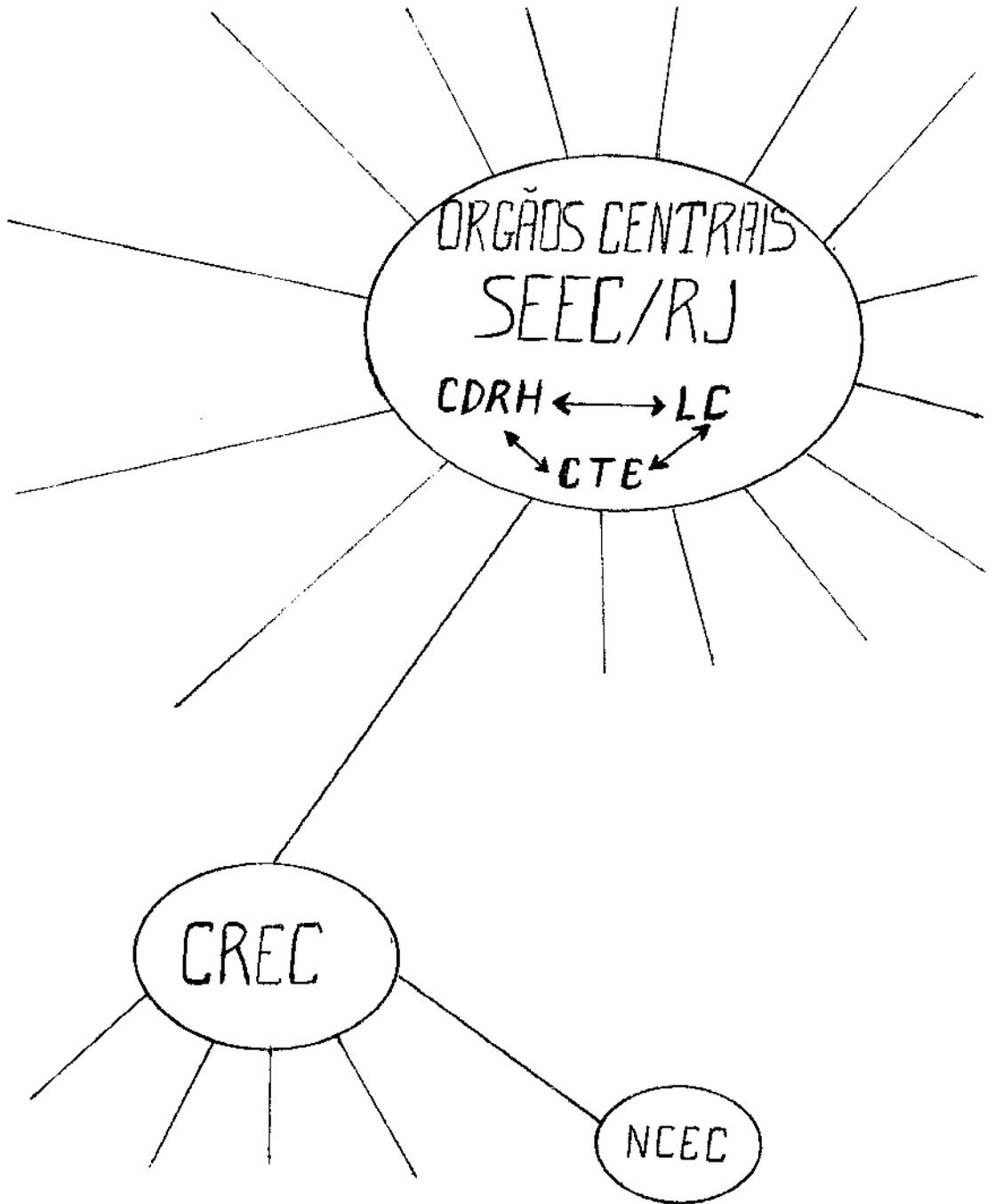
I- 1. O Desenvolvimento de Recursos Humanos e a Regionalização da Educação no Estado do Rio de Janeiro.

A atualização e o aperfeiçoamento de professores e técnicos da SEEC/RJ está a cargo da Fundação Centro de Desenvolvimento de Recursos Humanos (CDRH).

A área de Ciências, em particular, é atendida pelo Centro de Ciências (CECI) do CDRH.

Por outro lado, no sentido de regionalizar a Educação, o Estado do Rio de Janeiro foi dividido em 16 regiões, cada qual centralizada num polo de desenvolvimento, sede de um Centro Regional de Educação e Cultura (CREC). Subordinados aos Centros Regionais, aparecem os Núcleos Comunitários de Educação e Cultura, que devem funcionar como orientadores e transmissores das normas impostas pela estratégia estadual de educação.

São ao todo 16 Centros Regionais e 57 Núcleos Comunitários.



Entre as atribuições dos Centros Regionais encontramos:

- a) Organizar sua programação anual de trabalho de acordo com as diretrizes gerais dos órgãos centrais da Secretaria Estadual de Educação e Cultura.
- b) Prestar assessoramento técnico e administrativo aos órgãos compreendidos em sua área de atuação.
- c) Propor a realização de cursos e atividades relativas ao desenvolvimento de pessoal.

Aos Núcleos Comunitários cabem tarefas de manutenção de uma sintonia perfeita entre os órgãos centrais da Secretaria e todas as agências que, direta ou indiretamente possam contribuir para a difusão e o aprimoramento do sistema educacional e cultural. O que significa em termos de desenvolvimento de pessoal, articulação com o CDRH.

O CDRH, por outro lado, deve manter entrosamento com os demais órgãos da SEEC, em particular com o Laboratório de Currículos, órgão com atribuições de pesquisar e traçar as diretrizes para a elaboração de currículos no Estado de Rio de Janeiro.

I- 2. A reformulação de currículos no Estado do Rio de Janeiro

A lei 5692/71 preconiza a elaboração do currículo pleno de cada escola inserido no contexto geo-sócio-econômico e cultural da comunidade*. Coerente com este princípio a SEEC/RJ, através de seu Laboratório de Currículos, não apresenta uma proposta curricular mas, afim de assegurar a unidade da política estadual de educação, forneceu às unidades da rede os objetivos comuns de ensino válidos para todo o estado.

"Aos Centros Regionais, aos Núcleos Comunitários e às Unidades Escolares, cabe:

- a) o estabelecimento de objetivos próprios ao atendimento das realidades locais;
- b) a seleção e organização de conteúdos adequados aos objetivos a serem atingidos de maneira que sejam respeitadas as características da clientela;

c) a ordenação e a sequência dos conteúdos segundo os princípios de integração horizontal e vertical, inclusive sobre sua seriação". *

O Laboratório de Currículos pretende dar ao processo ensino-aprendizagem um enfoque predominantemente qualitativo e não quantitativo. O conteúdo é compreendido como conjunto de diferentes operações que levam à aquisição do conhecimento. Ele é formado de duas linhas paralelas: o próprio conhecimento - a informação - e as operações lógicas necessárias à manipulação do conhecimento**.

Sua organização é sobretudo decorrência de uma posição metodológica***.

"Na Ciência Contemporânea encontram-se explicitadas as estruturas linguísticas, as estruturas lógico-matemáticas, as estruturas espaço-temporais e as estruturas afetivas. Na atuação educacional, com os re

* Reformulação de Currículos - 1º volume - pag. 21.
Pré-Escolar e 1º Grau.
Estado do Rio de Janeiro-Secretaria de Estado de Educação e Cultura.

** PIAGET-(16)

*** BRUNER-(1)-CAP.3

cursos que hoje a Ciência oferece é importante que o professor possa lidar com elas dominando suas leis de composição. Só assim ele disporá de recursos para se adaptar ao novo e propiciar a criação do novo".*

Dentro desta orientação, o professor deverá participar:

- . da determinação dos objetivos do currículo de sua escola;
- . da decorrente fixação dos critérios de avaliação;
- . da seleção e organização dos conteúdos;
- . da elaboração de estratégias que compatibilizem o processo educacional com as exigências do tempo e lugar em que se processa.

o que requer o domínio da estruturação própria de sua disciplina, assim como o conhecimento dos resultados da investigação das ciências da educação.

* Reformulação de Currículos - 1º volume-pag. 25.

II . JUSTIFICATIVA E PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Porque se faz necessário a atualização em massa do professorado do 1º Grau da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro e como solucionar este problema.

—Em 1977, quando apresentamos o anteprojeto desta tese, já havíamos constatado, durante a aplicação da Proposta Metodológica, iniciada em 1976, em escolas-piloto, que uma atualização do professorado do Estado do Rio de Janeiro, quer em termos de conteúdo, quer em termos de estratégias e métodos de ensino fazia-se necessária, tendo em vista:

- a . que a grande maioria teve uma formação tradicional, onde o futuro professor só recebia aulas expositivas e era orientado no sentido de planejar e ministrar aulas expositivas, e a preparar plano de curso calcado no programa oficial ditado pelo Ministério de Educação e Cultura para todo o país.

b . o tipo de participação que a Secretaria atualmente solicita de seus professores, exposta na introdução deste trabalho.

— Em 1978, teve início a implementação da Proposta Metodológica à nível de rede do 1º Grau, planejada para obedecer às seguintes etapas:

- a • Formação de multiplicadores em treinamentos realizados, na cidade do Rio de Janeiro em fevereiro (56 horas/aulas), e nos municípios em agosto (16 horas/aulas).
- b • Treinamento dado pelos multiplicadores aos professores das Unidades Escolares a nível de município.

Paralelamente, o Laboratório de Currículos desenvolveu o projeto de "Avaliação da Implementação da Proposta Curricular no Estado do Rio de Janeiro" através de avaliação direta e indireta.

A amostra da primeira constituiu-se dos 14 CRECs existentes em 1978 e de 14 Unidades Escolares, uma em cada CREC.

A amostra da avaliação indireta constituiu-se de 42 dos 58 NCECs e 249 Unidades Escolares assim distribuídas: 17 Jardins de Infancia, 49 escolas de 1º Grau - 1º segmento, 150 escolas de 1º Grau - 1º e 2º segmentos-e 33 escolas de 2º Grau.

No ítem 6.3- "Pontos de estrangulamento do Processo Medidas de Solução-" do relatório final desse projeto lemos:

"Os problemas de caracter geral enfrentados pelos NCECs (Núcleos Comunitários de Educação e Cultura) para implantar a Proposta Curricular decorreram principalmente da falta de recursos Humanos, apontada com uma incidência de 69%" (...) "Outros fatores enfatizados foram a resistência às mudanças por parte do professorado, dos multiplicadores e a falta de assistência técnica."

"A descontinuidade na assistência técnica e a inadequação do treinamento dos multiplicadores também foram assinaladas como significativas."

"A nível de Unidade Escolar, o atendimento aos professores por parte da Equipe de Assistência Técnica foi considerado insuficiente pela metade (50%) das unidades constantes da amostra, sendo necessário, para torná-lo mais eficaz e efetivo, intensificá-lo e, em alguns casos, reformulá-lo".

Ainda no mesmo relatório, no item 6.5.3-"Projeto de Reformulação de Currículos - 1º Grau"- onde estão colocados os problemas específicos da implementação no 1º Grau, encontramos:

"Os CRECs declararam encontrar dificuldades na convocação e seleção dos professores para treinamento, com vistas à multiplicação, devido ao período inadequado em que se realizou, à falta de conscientização dos diretores em relação à clientela a ser convocada e à dificuldade de deslocamento, quase sempre decorrente de problemas financeiros."

"Dos 42 NCECs que constituem a amostra, somente 5 (12%) declararam possuir multiplicadores para todas as áreas.

"Em 50% das escolas, a multiplicação não atingiu a todos os professores e as principais razões apontadas como causa foram as seguintes:

- "falta de multiplicadores para todas as áreas"
- "falta de material de apoio"

Verificamos também que a Matemática é a matéria que requer maior atendimento, quando lemos:

"As primeiras séries e a área de Ciências-Matemática são os pontos que têm oferecido as maiores dificuldades para o trabalho."

"... nas 5a e 6a séries a falta de material de apoio, de treinamento são obstáculos à aceitação do trabalho proposto".

A síntese das dificuldades encontradas na implementação a nível de 1º Grau é a seguinte:

"Segundo os dados na entrevista dos NCECs, os fatores que contribuíram para dificultar a implementação da Proposta foram os seguintes:

- Recursos humanos:

- . multiplicadores em número insuficiente e sem disponibilidade
- . resistência da direção, dos responsáveis, dos alunos e principalmente dos professores
- . falta de coordenadores e/ou orientadores pedagógicos
- . falta de professores

- Recursos físicos e materiais:

- . falta de material de apoio
- . atraso no recebimento das Propostas
- . distância das Unidades Escolares

- Treinamento insuficiente"

Finalizando o relatório deste ítem da avaliação, temos um resumo das sugestões apresentadas para corrigir as deficiências apresentadas:

"Sugestões para um desenvolvimento do trabalho em 1979:

- **T**reinamento em tempo hábil e periódico, com maior carga horária, em locais de fácil acesso.
- Seleção cuidadosa, com vistas à multiplicação, envolvendo um maior número, utilizando professores sem regência de turma.
- Quanto aos recursos humanos, conscientização do professorado, montagem da Equipe Técnico-Pedagógica das unidades Escolares e contratação de professores em tempo hábil.
- Redução do número de alunos por turma.
- Troca de experiências
- Material de apoio em número suficiente e em tempo hábil.

- Composição da Assistência Técnica com todos os elementos previstos".

Estas sugestões reafirmam a necessidade de atualização do professorado, prevista quando da implementação da Proposta Metodológica nas escolas-piloto, mostrando a insuficiência do plano desenvolvido e apontando para outras variáveis do problema, quais sejam:

- a deficiência de recursos humanos para proceder a tal treinamento.
- a inconveniência de um período rígido único para o treinamento.
- o obstáculo em que se constituem a distância das Unidades Escolares e as dificuldades de ordem econômica e doméstica para vencerem essa distância.

- No relatório das atividades desenvolvidas em 1979 pela Divisão de Implementação e Avaliação de Currículos, verifica-se que neste segundo ano de implementação da Proposta Curricular:

No 2º semestre, modificou-se a linha de ação em decorrência de maior "carência de recursos humanos" ocasionada pelo retorno às escolas de vários elementos da equipe técnica do Laboratório de Currículos, ou seja, diminuição do número já insuficiente de elementos capacitados a orientar quanto à aplicação da metodologia proposta.

Foram então realizados 8 encontros no Laboratório de Currículos, aos quais compareceram em média 3 representantes de cada CREC.

Este número é obviamente insuficiente para proceder a um treinamento regional, pois não representa nem ao menos um elemento por área de estudo. Sem falar na precariedade da capacitação produzida por 8 encontros de no máximo 4 horas, totalizando 32 horas.

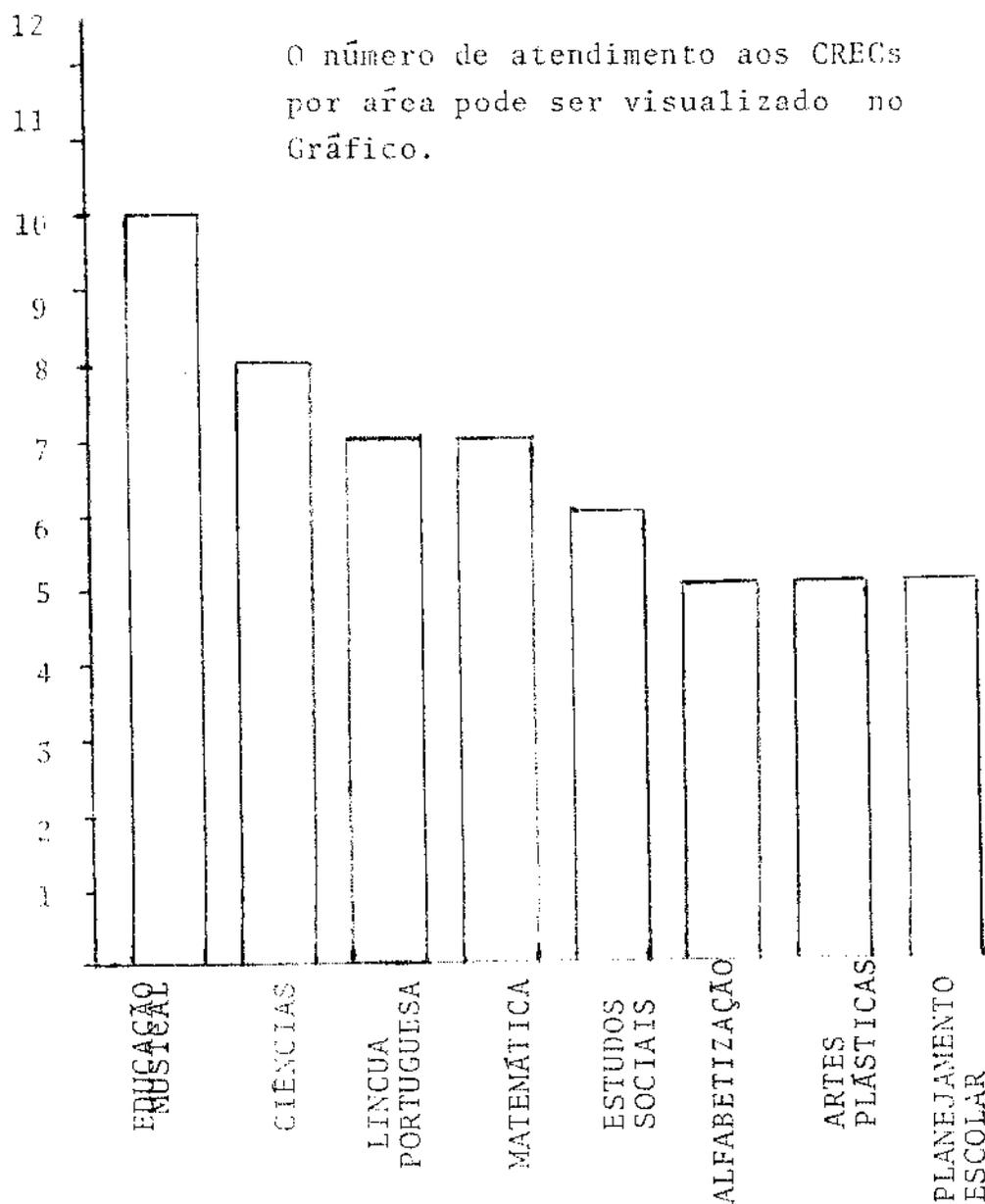
As sugestões colocadas nas avaliações dos encontros incidiram sobretudo em:

- "solicitação de maior número de encontros"
- "solicitação de maior carga horária destinada à Matemática"

Além desses encontros foram estabelecidos plantões de especialistas, no Laboratório de Currículos, para dar atendimento aos professores.

Cada área dispunha de um dia de plantão por semana.

. Optou-se por uma orientação sistemática e direta às Equipes de Assistência Técnica dos CRECs e NCECs, reduzindo-se assim, o universo, nessa etapa da complementação. Foram atingidos somente 10 dos 16 CRECs, no 1º semestre, sendo que esses 10 não receberam orientação em todas as áreas.



O atendimento por área, dado ao professor nesses plantões, foi muito reduzido devido a dificuldades de ordem econômica e de horário, que tornam inviável o deslocamento da maioria.

O relatório das atividades do Laboratório de Currículos no final de 1979 indica que as deficiências detectadas nos anos anteriores persistiam, e alguns dos pontos apresentados como entraves para uma real aplicação da Proposta Metodológica se agravaram.

Considerando:

- . que o principal ponto de estrangulamento da implementação da Proposta Curricular do Estado do Rio de Janeiro é o despreparo dos professores, marcadamente em Matemática.
- . que as formas de treinamento utilizadas — distribuição de material escrito e através de multiplicadores mal preparados — tem se mostrado ineficazes.
- . que em experiências anteriores, constatamos que o meio eficaz de conseguir que um professor com formação tradicional assimile e passe a dominar as estratégias adequadas à execução de uma aula ativa é vivenciar ele mesmo o processo.

. a impossibilidade da pequena equipe do CECI-
CDRH dar atendimento a todo o Estado.

concluimos que faz-se necessário buscar novas formas de
treinamento.

- O problema que se coloca é, portanto, encontrar uma forma de treinamento que atinja simultaneamente o professorado de todos os municípios do Estado do Rio de Janeiro, promovendo a atuação pedagógica pretendida em tempo hábil, dispensando o atendimento direto, dado o número insuficiente de profissionais capacitados.

III- PROPOSTA DE SOLUÇÃO E OBJETIVOS

Partindo da hipótese que a maneira de substituir, com maior possibilidade de êxito, a vivência pelo próprio professor de aulas ativas, é fazer com que ele observe filmes ou vídeo-tapes de tais aulas, antes de receber instruções teóricas sobre a forma de planejá-las e executá-las, foi elaborado um projeto a fim de equacionar o problema do treinamento dos professores do 1º Grau da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, em Matemática.

Entende-se por aula ativa uma aula onde o aluno é o agente da própria aprendizagem.

Partindo do princípio que ninguém ensina nada a ninguém, que a assimilação de novos conceitos se dá pela interação do sujeito com o meio, e que o instrumento de troca inicial é própria ação*, cabe ao professor propor aos alunos atividades que promovam a aprendizagem do conteúdo a ser adquirido.

Na seleção dessas atividades o professor deve respeitar o nível de desenvolvimento intelectual do aluno a que elas se destinam.

* FLAHERTY-(18)-CAP. I -P. 14.

Portanto, particularmente no 1º Grau elas devem ser concretas.

No 1º segmento do 1º Grau, com alunos de 7 a 12 anos de idade, presume-se que encontraremos crianças no estágio pré-operatório ou no estágio operatório concreto. No 2º segmento, com alunos de 11 a 16 anos de idade, podemos esperar, na melhor das hipóteses, encontrar indivíduos que estejam na passagem do estágio operatório concreto para o estágio operatório formal. Logo, mesmo nesta etapa, pelo menos as atividades propostas para a introdução de um conceito devem ser concretas.

É preciso deixar claro que o termo "Concreto" está sendo aqui utilizado no sentido piagetiano, isto é, todo conceito adquirido por um indivíduo é concreto para ele.

Dentro do projeto citado, elaborou-se um curso piloto de um modelo de treinamento utilizando vídeo-tapes.

FUNÇÕES, unidade estudada no 1º Grau, dada sua grande aplicação a diferentes níveis e áreas da matemática, foi conteúdo escolhido para a elaboração desse curso.

O projeto foi desenvolvido na Secretaria Estadual de Educação e Cultura do Rio de Janeiro, envolvendo o Centro de Ciências da Fundação Centro de Desenvolvimento de Recursos Humanos, o Centro de Tecnologia Educacionais e o Laboratório de Currículos, e teve os seguintes objetivos:

- . Modificar a sistemática de treinamento de professores
- . Desenvolver um sistema para aperfeiçoamento e/ou atualização em Educação matemática dos professores da Rede Estadual de Ensino do 1º Grau do Rio de Janeiro, em tempo hábil.
- . Elaborar um modelo de curso de treinamento nos aspectos pedagógico e matemático que atenda às necessidades decorrentes das diretrizes da proposta Metodológica do Estado do Rio de Janeiro, utilizando vídeo-tapes.
- . Propiciar ao professor a observação da dinâmica desenvolvida em aulas ativas.
- . Fornecer modelo de curso de treinamento aos Centros Regionais de Educação e Cultura e aos Núcleos Comunitários de Educação e Cultura.

IV- E S T R A T É G I A

1. Definição do modelo de treinamento

Durante os 10 meses de permanência na UNICAMP , paralelamente à obtenção dos créditos, foram pesquisados todos os recursos capazes de acelerar o processo de treinamento do professorado do Estado do Rio de Janeiro, sem prejuízo da qualidade dos resultados. A maior dificuldade se situava na transmissão da metodologia, baseada na interação do aluno com o meio, colocando o professor na posição de estimulador e coordenador da atividade daquele, posição esta inteiramente nova para a quase totalidade de nosso professorado, tradicionalmente habituado a aulas expositivas.

O trabalho desenvolvido por nossa equipe no Laboratório de Currículos, no sentido de fornecer ao professor textos contendo a descrição detalhada da condução de situações de ensino aprendizagem desenvolvidas em sala de aula, material que embora necessário como apoio e facilitador das tarefas docentes, mostrou-se insuficiente para a iniciação e familiarização do professor com a nova dinâmica proposta.

A utilização de computadores, amplamente pesquisada na UNICAMP, revelou-se indadequada por trabalhar somente dentro de um conjunto de respostas previstas e também por não mostrar a "ação" em sala de aula.

A projeção de slides, ainda acompanhada de audiocassetes, não mostra o encadeamento, a dinâmica da ação, reduzindo-se à transmissão de "flashes" estanques.

Restava experimentar a gravação em vídeo-tape de uma mini-aula dada como se propõe. Sob a orientação do Prof Caban, especialista em tecnologias educacionais, foi redigido um roteiro para uma gravação de 5 a 7 minutos, confeccionado o material necessário e gravado com o auxílio de colegas do curso de mestrado, que, na falta de adolescentes disponíveis desempenharam também o papel de alunos. Esta gravação, feita com uma pequena câmera portátil e numa sala de dimensões reduzidas ($\cong 5m^2$) mostrou que este recurso permitia uma visualização suficientemente nítida do material concreto utilizado pelos alunos, da atuação destes e do professor, ensinando também o conteúdo. Pelas dimensões do local utilizado já se pode deduzir que não se gravou uma aula com 30, 40 alunos, o que é desnecessário, um grupo de 4 ou 5 alunos é suficiente para mostrar a interação professor-aluno.

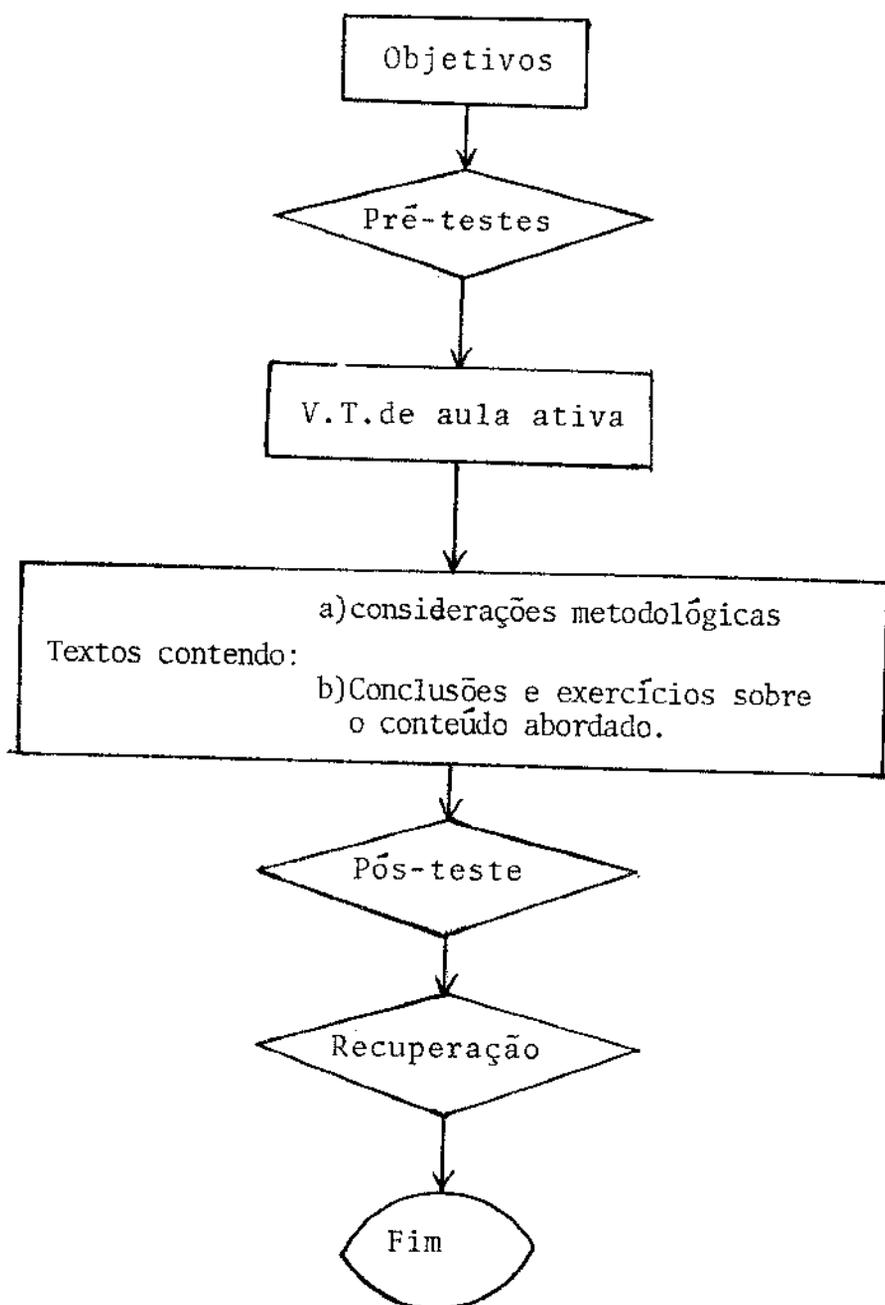
A partir dos resultados favoráveis desta experiência, entramos na fase de estudo de um modelo de curso de treinamento para professores centrado na observação de uma situação concreta de sala de aula através de vídeo-tapes. Para tanto foram estudadas as técnicas concernentes a este meio de comunicação*: redação de roteiros, determinação de tempo de observação real do indivíduo, manejo do equipamento, etc, bem como levantamento de custos e de recursos existentes na SEEC/RJ.

O esquema básico resultante foi o seguinte: cada curso se constituiria de uma série de módulos** cobrindo um conteúdo de Matemática ensinado no 1º Grau por um professor que, partindo de situações concretas propostas aos alunos, os orienta para uma sistematização, até que eles mesmos cheguem à descoberta do conceito matemático subjacente.

Cada módulo obedeceria basicamente ao seguinte fluxograma:

* FREITAS-(11) E STASHEFF-(24).

** NAGEL-(14).



Ao final do curso, seria pedido como parte da avaliação, a elaboração de um plano de aula dentro da metodologia proposta, bem como do material concreto necessário a seu desenvolvimento.

Além dos textos o cursista deveria receber bibliografia sobre o conteúdo e a metodologia estudadas.

Quanto à utilização dos módulos em todo o Estado, teríamos as seguintes opções:

- . A instalação de monitores de vídeo-cassete nos CRECs (Centros Regionais de Educação e Cultura) o que permitiria a realização de cursos de Treinamento nestes Centros, o que já significa uma descentralização.
- . A emissão dos vídeo-tapes em circuito aberto aproveitando horários ociosos da TVE (Televisão Educativa). Neste caso, os professores cursistas poderiam ser reunidos em turmas em qualquer escola que dispusesse de um receptor de televisão, ou receber na sua escola o material escrito correspondente e fazer o curso em sua própria casa, enviando a avaliação final para o CREC a que está subordinado.

- . A transformação dos vídeo-tapes em filmes. Processo mais barato que a filmagem direta e que permitiria a realização dos cursos de treinamento nas escolas que já possuem projetor de filmes.

As duas últimas opções permitem ainda maior flexibilidade na realização do treinamento necessário. Essas três opções não se excluem, podendo ser usadas segundo as necessidades e possibilidades de cada região.

2. Contactos com a SIEC/RJ, e órgãos financiadores.

Na definição do modelo de curso de treinamento a ser proposto, tinha sido levado em conta o equipamento de gravação e reprodução de vídeo-tapes existente no CDRH (Centro de Desenvolvimento de Recursos Humanos).

No retorno ao Rio, após a conclusão dos créditos do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na UNICAMP, no início de 1978, verificamos que aquele equipamento necessitava de reparos que não seriam executados por falta de verba. Este foi o primeiro obstáculo que poderia levar o projeto a ser considerado inviável.

Nova tentativa foi feita junto ao Laboratório de Currículos, que tinha verba disponível, mas alegava não ser sua atribuição treinar professores.

A Sub-secretária de Educação e Cultura, examinando o ante-projeto, considerou-o da maior importância e encarregou-se de levá-lo ao conhecimento da Sra. Secretária, que prometeu discutir o assunto com a diretora do CDRH. O entusiasmo da Sub-secretária se devia sobretudo à constatação de que mesmo instalando equipamento de circuito fechado de televisão nos 12 Centros Regionais então existentes, para aplicação do curso proposto, o custo do projeto seria inferior ao da publicação de uma edição da proposta Metodológica. Edição esta insuficiente para distribuição a todo pro -

fessorado do Estado. Apesar de todos esses argumentos favoráveis, a falta de verba foi novamente a alegação para não se implementar o projeto.

Com a próxima mudança do governo em março de 1979 só restava aguardar e apresentar o mesmo ante-projeto à nova Secretaria.

Em maio de 1979, o novo Secretário leu o ante-projeto e encaminhou-o informalmente ao Diretor do CTE (Centro de Tecnologia Educacionais) recomendando que fosse desenvolvido.

Examinando o material recebido, o Diretor concluiu que a modalidade de treinamento proposta seria a mais adequada para o Estado do Rio de Janeiro, podendo e devendo ser utilizada em todas as áreas e não somente em Matemática. A autora foi então autorizada a se dedicar à elaboração do plano-piloto do projeto, enquanto aquele órgão estudaria a forma de operacionalizá-lo e a captação de recursos necessária. Após várias marchas e contra-marchas, o CTE decidiu-se por um convênio com a **Televisão Educativa**.

O convênio prevê uma série de 60 programas de "Orientação Pedagógica ao professor" abrangendo todas as áreas de ensino, dos quais 10 dedicados à Matemática. A SEEC/RJ se responsabiliza pela produção do conteúdo didático-pedagógico e a TVE pela produção dos vídeo-tapes e sua emissão pe

lo canal 2.

Por outro lado, em convênio com o PREMEN, o Centro de Ciências do CDRH conseguiu recursos para aplicação e avaliação do plano piloto de Matemática, o que será feito em sistema de circuito fechado, numa turma de 30 professores.

3. Escolha do tema e elaboração de um curso para o 1º Grau.

Dada sua grande aplicação a diferentes níveis e áreas da matemática, o conteúdo escolhido para a elaboração do plano piloto do modelo estruturado foi FUNÇÕES.

O primeiro passo dessa elaboração foi montar um curso sobre funções a nível de 1º Grau, numa abordagem coerente com a metodologia proposta pela SEEC/RJ.

A montagem desse curso obedeceu às seguintes etapas:

- . Definição da abordagem a ser adotada
- . Seleção de situações concretas para introdução do conteúdo.*
- . Redação dos textos com instruções sobre as atividades e exercícios a serem executados pelos alunos.
- . Confecção do material concreto necessário.
- . Elaboração de teste de avaliação.

* DIENES-(5).

4. Aplicação do curso em turma de escola do 1º Grau.

A idéia inicial era escrever roteiros para os vídeo-tapes contendo apenas instruções para o vídeo (tomadas de cena) e a fala inicial do professor. A fala dos alunos, assim como as intervenções do professor decorrentes do desenvolvimento da aula, seriam espontâneas.

A partir da viabilização da realização do projeto em convênio da SEEC/RJ com a TVE, ficando esta encarregada da gravação dos vídeo-tapes, fez-se necessária uma reformulação. A TVE exigia os roteiros fechados, ou seja, todas as falas e tomadas de cena pré-estabelecidas.

Com o objetivo de proporcionar aos futuros cursistas a observação de situações reais de sala de aula, aplicamos o curso em uma turma de 27 alunos da Escola Municipal Christiano Hamann, gravando todas as aulas em áudio-cassete. A Christiano Hamann é uma escola de 1º Grau do Município do Rio de Janeiro, situada na Cañea, próxima à favela da Rocinha, sendo a maior parte da sua clientela proveniente desta favela. Portanto, alunos de nível sócio-econômico baixo.

Apesar de algumas dificuldades causadas pelo fato das aulas serem dadas por professora estranha à Escola e não pela regente da cadeira de Matemática, e pela curiosidade despertada pelo gravador, as gravações obtidas, comple

mentadas por algumas anotações, foram suficientes para orientar a redação dos roteiros e dos textos complementares .

5. Elaboração dos roteiros dos vídeo-tapes.

A partir do resultado das aulas dadas na Escola Municipal Christiano Hamann foi definido o esquema final do curso de treinamento de professores. As 12 aulas dadas mostraram-se insuficientes para a fixação da noção de função composta e da utilização do gráfico cartesiano, em decorrência dos alunos não terem estudado relação composta e nunca terem utilizado gráfico cartesiano. Mas, a experiência deixou claro que não há necessidade de apresentar vídeo-tapes de todas as etapas desenvolvidas com os alunos. Algumas atividades, como por exemplo os exercícios de fixação, podem ser apresentadas através de textos.

Foram elaborados 10 roteiros de 10 a 15 minutos de duração no quais constam as proposições das situações concretas colocadas pelo professor, as observações e conclusões dos alunos e as intervenções do professor conduzindo a atenção dos alunos para percepção dos conceitos matemáticos subjacentes às situações concretas examinadas. Mostram como

os próprios alunos, quando desafiados, podem descobrir os conceitos, cabendo ao professor, depois do conceito bem assimilado, dar a nomenclatura e simbologia usuais e "arrumar" a formulação do mesmo.* O tempo despendido pelos alunos lendo as questões propostas, pensando ou escrevendo, é cortado.

A preocupação inicial de fazer com que cada tape correspondesse a um tempo de aula dos alunos foi abandonada, optando-se por fazer com que cada um deles fosse um relato completo de uma atividade ou de uma etapa do conteúdo estudado.

Mais tarde, por solicitação da TVE, os comentários mais importantes sobre a metodologia, e mesmo sobre precisão de conceito, foram inseridos nos roteiros sob a forma de diálogo de duas professoras.

Um dos objetivos desses diálogos é enfatizar a mudança de comportamento que a nova metodologia exige do professor em sala de aula. Incidindo sobre situações observadas no vídeo-tape de uma aula ministrada por uma professora que aplica essa metodologia, os diálogos explicitam suas etapas a partir do concreto evitando explicações puramente teóricas.

Em relação ao conteúdo utiliza-se o mesmo processo. Respondendo ao questionamento de uma colega que sente

* DIENES-(5).

necessidade de orientação para fazer seu próprio planejamento, a professora cujas aulas foram gravadas, vai esclarecendo os pontos do conteúdo abordado que podem suscitar dúvidas.

A introdução e finalização de cada vídeo-tape é feita por um apresentador.

Na introdução, o apresentador explicita os objetivos gerais do curso e específicos de cada programa, e no encerramento, anuncia o programa seguinte e convida o cursista a criar uma atividade que, adequada à realidade de sua sala de aula, atinja os objetivos da aula observada.

O texto do apresentador e do diálogo das duas professoras aumentou o tempo de cada programa para 25 min, o que não prejudica a qualidade da comunicação, tendo em vista que os diálogos intercalados às cenas de sala de aula mudam o foco de observação do espectador, se constituindo em reforço do que foi visto.

6. Elaboração dos textos complementares.

A introdução de considerações sobre a metodologia utilizada, precisão de linguagem e conceituação, bem como conclusões sobre o conteúdo, nos vídeo-tapes, reduziu bastante os textos complementares.

Quer nos roteiros quer nos textos complementares, a orientação didática, ou de conteúdo propriamente dito, é dada sob a forma de comentários objetivos sobre as situações surgidas em sala de aula com os alunos e a serem observadas, pelo professor cursista nos vídeo-tapes.

O cursista deverá receber, também, cópia de todos os textos utilizados pelos alunos do 1º Grau afim de facilitar o acompanhamento e compreensão do desenvolvimento das aulas observadas.

Além disso, constará do material escrito do curso o planejamento das aulas de fixação e sugestões de exercícios de reforço.

7. Elaboração de pré-testes e pós-testes.

Definidos os temas dos roteiros, concluímos que não caberia a aplicação de testes ao final de toda aula, pois nem sempre se conclui uma etapa, quer em termos de conteúdo, quer em termos de processo ensino-aprendizagem, em uma só aula. O número de testes parciais se reduz, assim, a seis. Cada um deles será aplicado como pré-teste e como pós-teste de uma etapa do curso.

Os testes parciais constam de questões objetivas sobre o conteúdo e sobre a metodologia.

O teste final, elaborado nos mesmos moldes, abrange todas as etapas do curso.

Além dos testes, faz parte da avaliação final o planejamento de um tópico de Matemática, a nível de 1º Grau. O planejamento deve incluir a descrição do material concreto necessário a sua implementação.

8. Descrição do modelo elaborado.

. O curso de FUNÇÕES a nível de 1º Grau.

Considerando que bijeção é uma noção intuitiva, que precede a aquisição do conceito de função no desenvolvimento das estruturas lógico-matemáticas na mente humana, as abordagens tradicionais, que definem Função como particular Relação e Bijeção como caso particular de Função, foram abandonadas, e optou-se por partir da introdução do conceito de BIJEÇÃO. O professor, respeitando o presumível estágio operatório concreto dos alunos de uma 5ª série do 1º Grau Regular, os conduz à observação e análise de 3 situações concretas, passando pela representação gráfica (diagrama sagital) e identificação das características da bijeção subjacente a cada uma delas, para depois de estabelecerem as semelhanças e diferenças existentes entre elas, chegaram ao conceito matemático e à linguagem formal. (vide anexo, roteiros 1, 2, 3 e 4, p 83, 94, 103 e 115)

Da classificação de 12 relações, segundo as justificativas de sua identificação como bijeção ou não, chegaram à definição de FUNÇÃO (vide anexo, roteiro 5 , p. 126)

Só então, foram introduzidas as terminologia e a notação usuais de uma relação funcional (domínio, contra-domínio, etc.) e estabelecida a relação de inclusão entre os conjuntos das Relações, das Funções e das Bijeções. (roteiro 6 do anexo , p. 148)

SOBREJEÇÃO foi definida como a função cuja imagem é igual ao contra-domínio e os alunos aprenderam que uma função onde a cada ponto do contra-domínio chega no máximo uma flecha, chama-se INJEÇÃO. (roteiro 7)

A construção de um GRÁFICO CARTESIANO surgiu da necessidade de esquematizar a planta baixa da sala e encontrar uma forma simples e precisa de localizar a carteira de cada aluno. (roteiro 8).

A construção da INVERSA de uma função e da COMPOSTA de duas ou mais funções também partiram de situações concretas. (roteiros 9 e 10).

Resumindo, os conceitos estudados obedeceram à seguinte ordenação: BIJEÇÃO

FUNÇÃO

SOBREJEÇÃO E INJEÇÃO

REPRESENTAÇÃO CARTESIANA

FUNÇÃO INVERSA

FUNÇÃO COMPOSTA

. O curso de treinamento para professores do 1º Grau, sobre Funções.

Tendo como base o curso de Funções aplicado no 1º Grau, foi planejado um curso de treinamento para professores, sobre o mesmo tema com 15 aulas de 8 aulas. Dessas 15 aulas, 10 incluem a observação da atividade desenvolvida com os alunos do 1º Grau através de vídeo-tape, sempre acompanhada de textos com comentários sobre a metodologia utilizada e sobre o conteúdo abordado. As outras 5 constam somente de textos contendo propostas de atividades a serem desenvolvidas pelos cursistas, exercícios de fixação e teste de avaliação.

Em cada aula será aberto debate com os cursistas sobre as situações observadas e sobre os comentários lidos.

Ao final de toda aula, como exercício, o cursista deverá planejar uma atividade com o mesmo objetivo da que observou, adequada à realidade da escola em que leciona.

O esquema geral desse curso de treinamento de professores, cujo material se encontra anexo, é o que segue:

1ª aula: Introdução à noção de bijeção.

V.T. da situação 1.

Considerações sobre a estratégia utilizada.

2^a aula: Introdução à noção de bijeção.

V.T. da situação 2.

Considerações sobre a estratégia utilizada.

3^a aula: Introdução à noção de bijeção.

V.T. da situação 3.

Considerações sobre a estratégia utilizada.

4^a aula: Conceituação de bijeção.

V.T. do exercício 1.

Considerações sobre a estratégia utilizada e o conteúdo abordado.

AVALIAÇÃO I: Conteúdo: Conceito de bijeção.

Metodologia: Processo de abstração de um conceito a partir de situações concretas. *

5^a aula: Conceituação de função.

V.T. do exercício 2 e do preenchimento da tabela de dupla entrada. (p.71)

Considerações sobre a estratégia utilizada e o conteúdo abordado.

7^aaula: Fixação do conceito de função.

Resolução do Exercício 3.

Considerações sobre a estratégia utilizada.

AVALIAÇÃO II: Conteúdo: Conceito de função.

Metodologia: Utilização de um conceito assimilado para aquisição de novo conceito. *

8^aaula: Conceituação de sobrejeção e injeção.

V.T. da atividade desenvolvida com os alunos.

Considerações sobre a estratégia utilizada.

9^aaula: Identificação de sobrejeção e injeção.

Exercício 4.

Considerações sobre a estratégia utilizada.

AVALIAÇÃO III: Conteúdo: Funções injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

Metodologia: Utilização de um conceito assimilado para aquisição de novo conceito.

10^aaula: Construção do Gráfico Cartesiano.

V.T. da atividade desenvolvida com os alunos.

Considerações sobre a estratégia utilizada e a utilização do gráfico.

11^a aula: Identificação de funções, sobrejeções, injeções, ou bijeções por seu gráfico cartesiano.
Exercício 5.

AVALIAÇÃO IV: Conteúdo: Construção e leitura do gráfico cartesiano de uma função.

Metodologia: Real compreensão da representação gráfica. *

12^a aula: Introdução do conceito de função inversa.
V.T. da atividade 1.
Considerações a estratégia utilizada e sobre o conteúdo abordado.

13^a aula: Determinação da inversa de uma função.
Exercício 6.

AVALIAÇÃO V: Conteúdo: Conceito de função inversa.

Metodologia: Promoção da passagem do operatório concreto para o operatório formal.

14^a aula: Composição de funções.
V.T. da atividade 2.
Considerações sobre a estratégia utilizada.

14^a aula: Composição de funções.
V.T. da atividade 2.
Considerações sobre a estratégia utilizada.

15^a aula: Função composta.
Exercício 7.

AVALIAÇÃO VI: Conteúdo: Função composta.

Metodologia: Utilização de uma situação imaginária mas familiar aos alunos para a construção de um conceito.

V- CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo de treinamento proposto e elaborado pode contribuir muito para a melhoria da qualidade do ensino do 1º Grau, não só na Área de Ciências, seu objetivo primeiro, mas em todas as áreas de ensino deste nível, porque:

. Possibilita a observação da dinâmica de aulas ativas. Na impossibilidade, já comprovada, de promover a vivência do processo de participação ativa como aluno por cada um dos 110 000 professores do Estado do Rio de Janeiro, única forma de treinamento já realizada que produziu resultados significativos, o recurso da observação de vídeo-tapes (ou filmes) é o que proporciona maior compreensão da metodologia preconizada pela Secretaria Estadual de Educação e Cultura. O vídeo-tape permite a observação integral do desempenho dos alunos e do professor, de sua movimentação na sala de aula, dos diálogos estabelecidos, dos erros e acertos dos alunos e de como o professor interfere em cada situação, do envolvimento e entusiasmo dos primeiros quando aprendem a buscar soluções, a tirar conclusões próprias e a confiar nelas.

. Pode contribuir para solucionar a atualização e aperfeiçoamento dos professores em todas as áreas de ensino, embora objetivando solucionar o problema em Educação matemática, ponto crítico do ensino básico.

A metodologia oficial do Estado do Rio de Janeiro é uma só, independentemente da área de estudos. A dificuldade dos professores em dominar a dinâmica de uma aula desenvolvida de acordo com as **NOVAS** diretrizes aparece em todas as áreas. Como a maior preocupação deste trabalho foi justamente encontrar uma forma de familiarizar o professor com esta dinâmica, o modelo proposto pode ser utilizado no treinamento das demais áreas, bastando que se utilize conteúdo da área que se deseja atingir.

. Modificar a sistemática de treinamento. A distribuição de um material praticamente auto-suficiente modifica totalmente a sistemática de treinamento até então utilizada.

Pode atingir todo o Estado simultaneamente, porque independe da disponibilidade de especialistas gabaritados. Recebendo todo o material elaborado, qualquer professor pode até se

auto-aperfeiçoar através dele, ou coordenar uma turma de treinamento.

. Possibilita o treinamento dos professores da Rede Estadual de Ensino sem interrupção das aulas.

Contando com a exibição dos vídeo-tapes em circuito aberto, o que seria fora do horário de funcionamento das escolas de 1º Grau, ou em circuito fechado em horário semanal disponível, como o destinado à coordenação e planejamento, os professores podem seguir o curso durante o período letivo.

. Dá maior flexibilidade à determinação do período de realização, uma vez que a distribuição de vídeo-cassetes e textos aos CRECs e NCECs possibilita a cada um organizar turmas de treinamento de acordo com a conveniência do calendário escolar regional.

. Facilita a união da prática à teoria.

Executado durante o ano letivo, o treinamento permite que o professor cursista aplique as atividades que for preparando, como requisito

do curso, em suas próprias aulas. Além da vantagem de unir a prática à teoria, o que aumenta a eficácia do curso, o aproveitamento imediato das atividades deste em seu trabalho docente motiva o cursista, que se sentirá mais envolvido vendo resultados práticos do que está aprendendo e menos sobrecarregado com as tarefas do curso, uma vez que estarão substituindo as de planejamento de aulas que normalmente deveria fazer.

.Permite eliminar um ponto de estrangulamento da implementação da Proposta Metodologica no 1º Grau.

Como foi exposto na justificativa deste trabalho, as avaliações da implementação da Proposta Metodológica no 1º Grau, feitas desde seu início em 1978, apontam como principal ponto de estrangulamento o despreparo dos professores. As formas de treinamento desenvolvidas até agora mostraram-se ineficazes - caso da distribuição de textos e de encontros esparsos; ou incapazes de atingir um número significativo de professores - caso do treinamento direto dado pelos poucos especialistas habilitados.

A aplicação do sistema de treinamento aqui apresentado possibilita a atualização do professorado do Estado do Rio de Janeiro em tempo hábil, eliminando, assim, o principal ponto de estrangulamento da implementação da Proposta Metodológica no 1º Grau.

. Baixa o custo operacional do treinamento.

Um curso de 120 h, carga horária do modelo elaborado, para no máximo 40 professores, custa Cr\$ 150.000,00. O que corresponde a Cr\$ 3.750,00 por professor treinado.

A TVE orçou em Cr\$ 1.2000.000,00 o projeto em convênio com a SEEC/RJ, onde a parte de Matemática representa 1/6 do programa total, seu custo corresponde portanto a Cr\$200,000,00. Considerando que 110 000 professores podem assistir ao mesmo programa, jogado no ar, o custo, por professor, relativo à parte de observação das aulas sai a Cr\$ 1,80.

A reprodução do material escrito do curso aqui proposto e a coordenação de uma turma de 40 professores pelos orçamentos atuais, custa Cr\$ 30.000,00, o que corresponde a Cr\$ 750,00 por professor.

O mesmo curso que atualmente custa C\$3.750,00 por cabeça, passará a custar C\$751,80.

Se quisermos considerar a aplicação em circuito fechado, teremos que computar o custo de uma cópia dos vídeo-tapes para cada CREC, o que importa em Cr\$15.897,60. Para simplificar esta estimativa, vamos considerar os 110.000 professores distribuídos em igual número pelos 16 CRECs, o que significaria 6.875 professores por CREC. Logo, uma cópia para ser utilizada em circuito fechado aumentaria o custo do professor treinado em Cr\$2,30 (Cr\$ 15897,60÷6875) dando um total de Cr\$754,10.

A instalação de um monitor no CREC não pode, é claro ser computada num só curso, pois o equipamento, uma vez instalado, pode ser usado para todos os cursos que se quiser realizar nos mesmos moldes. Mas se imaginarmos que não o utilizaremos para outros cursos, o que é sem dúvida absurdo, isto significaria um acréscimo de Cr\$24,20 (Cr\$ 166.200,00÷6.875) por cabeça, totalizando Cr\$778,30, quantidade ainda bem inferior aos atuais Cr\$3750,00.

Além dos pontos considerados, convém assinalar que o modelo elaborado utiliza a televisão como estimulador da criatividade e atuação do espectador, eliminando uma característica deste meio de comunicação de massa muito criticada, que é a de produzir o espectador passivo.

VI- BIBLIOGRAFIA

1. BRUNER, Jerome S.- Uma nova teoria de aprendizagem
Rio de Janeiro
Bloch Editores S.A. - 1976.
2. O processo da Educação-São Paulo.
Cia.Ed. Nacional - 1976
3. BRASIL-MEC - Departamento de Apoio-Diretoria
de Documentos e Divulgação-Brasília-D.F. -Ensino de 1º e 2º Graus-
Apex Gráfica e Editora LTDA - S.D.
4. DIENES, Zoltan Paul- Aprendizado moderno da Matemática
Rio de Janeiro.
Zahar Editores-1970.
5. Seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática - São Paulo.
Ed. Herder - 1972.
6. O poder da Matemática - São Paulo.
E.P.U. e I.N.L. - 1975
7. ESTADO DO RIO DE JANEIRO - SEEC- Laboratório de Currículos-Reformulação de Currículos -
-1º volume-Pré-escolar e 1º Grau -
Rio de Janeiro-Bloch Editores S.A.-
1976.

8. ESTADO DO RIO DE JANEIRO _ SEEC _ Laboratório de Currículos-Avaliação da Implementação da Proposta Curricular no Estado do Rio de Janeiro-1978.
9. ESTADO DO RIO DE JANEIRO- SEEC- Laboratório de Currículos-Divisão de Implementação e Avaliação de Currículos- Relatório de 1979-
10. FERREIRA, Oscar M. de C. e Plínio D. da Silva Junior _ Recursos Áudio Visuais para o Ensino - São Paulo -
E.P.U. LTDA - 1975.
11. FREITAS, Luis Carlos e outros Seminário de trabalho:Audio-Visual na Universidade - IMECC-UNICAMP - e TV-2 CULTURA- São Paulo.
não publicado - 1977.
12. HAYS, William L. Quantificação em Psicologia- São Paulo
Ed. Herder- 1970.
13. KILPATRICK, W.H. Educação para civilização em mudança- São Paulo
Ed. Melhoramentos - 1975.
14. NAGEL Thomas S. e Paul T. Richan- Ensino para competência
Porto Alegre
Ed. Globo - 1974
15. OLIVEIRA LIMA, Lauro- Mutações em educação segundo MacLuhan
Petrópolis
Ed. Vozes LTDA. - 1975.

16. PIAGET, Jean Biologie et connaissance- Saint Amand -
Editions Gallimard - 1977
17. A gênese das estruturas lógicas ele -
mentares . Rio de Janeiro -Ed. Zahar-
1971.
18. A epistemologia genética - Petropolis
Ed. Vozes LTDA. - 1973
19. Seis estudos de psicologia-
Rio de Janeiro -Forense -Universitária
1973.
20. Para onde vai a educação ?
Rio de Janeiro. -Livraria José Olympio
e UNESCO - 1976.
21. e Alina Szeminska- A gênese do número
na criança - Rio de Janeiro.
Ed. Zahar - 1971.
22. ROGERS, Carl R. Liberdade para aprender - Belo Hori -
zonte.
Interlivros - 1977.
23. ROSEMBERG, Morris- A lógica da análise do levantamento de
dados - São Paulo.
Ed. Cultrix/Ed. da USP - 1976
24. STASHEFF, Edward e outros-
O Programa de televisão: Sua Direção
e Produção-Tradução e Adaptação de
Luis Antonio Simões de Carvalho-
São Paulo-E.P.U. EDUSP-1978.

ANEXO I

CURSO DE FUNÇÕES
DESENVOLVIDO COM ALUNOS DA 5^a SÉRIE DO 1º GRAU

RESUMO DO CURSO

Inicialmente são exploradas 3 situações concretas trazendo subjacente o conceito de bijeção.

. A 1ª é a relação que associa cada aluno à carteira que ocupa. Convidados a observar sua disposição na sala de aula, e alertados por perguntas feitas pelo professor, os alunos percebem que cada aluno ocupa uma carteira e somente uma e que cada carteira é ocupada por um aluno e somente um, identificam o conjunto dos alunos presentes como conjunto de partida, e o conjunto das carteiras da sala como conjunto de chegada, da relação definida pela expressão verbal "... está sentado na ..." e fazem o diagrama sagital e o conjunto de pares ordenados que representam esta relação.

. A 2ª situação explorada é a relação definida no conjunto dos alunos que ocupam as duas filas de carteiras do centro da sala de aulas, pela expressão "... está ao lado de ..."

A sistematização e o encaminhamento das observações que levariam à noção de bijeção são pedidas por escrito. (Vide "situação 2")(p.63)

. A 3ª situação é criada a partir do relato da organização de uma festa de aniversário. Estória fictícia mas dentro da realidade dos alunos em questão.

Tanto o relato, quanto as questões formuladas, são apresentadas aos alunos por escrito. (Vide "Situação 3")(p.64)

Com o objetivo de enfatizar as características comuns às 3 relações estabelecidas, os alunos preenchem uma tabela com dados a elas referentes e respondem a questões sobre sua disposição na tabela.(66)

Finalmente, bijeção é definida como relação que apresenta as características comuns identificadas.

Definida bijeção, são apresentadas aos alunos 12 relações que devem identificar como bijetoras ou não bijetoras, justificando cada resposta dada. Verificadas as respostas dadas, o professor sugere a distribuição das 12 relações em uma tabela de dupla entrada onde se discrimina se as justificativas apresentadas se referem ao conjunto de partida ou ao conjunto de chegada da relação considerada.

Função é então definida como a relação que apresenta em seu conjunto de partida as características do conjunto de partida de uma bijeção (Vide tabela)(p.71)

Definidos DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO e IMAGEM de uma função, Sobrejeção é definida como a função onde a Imagem coincide com o contradomínio.

Injeção é a função onde um elemento do contradomínio é imagem de no máximo um elemento do domínio.

Após resolução de exercícios sobre os conteúdos abordados, é desenvolvida nova atividade concreta, visando capacitar os alunos a construir o GRÁFICO CARTESIANO de uma função.

As carteiras bem alinhadas em filas paralelas e convencendo-se numerar as filas a partir da porta de entrada pede-se aos alunos que determinem a localização de alguns colegas, ou que digam o nome do colega sentado na emésima fila, enésima carteira.

Em seguida, o professor solicita que façam a planta baixa da sala de aula. A partir da análise e da esquematização dos desenhos apresentados, os alunos chegam a um quadrilado onde cada interseção de retas é o lugar de uma carteira e a parede da porta de entrada é um eixo vertical e a parede do quadro de giz é um eixo horizontal.

Depois de trabalhar a localização de pontos dadas as su as coordenadas, e a determinação das coordenadas de pontos marcados nesse "quadriculado" (quadrante positivo de um par de eixos coordenados), faz-se a extensão aos demais quadrantes, imaginando filas de carteiras colocadas do outro lado das paredes consideradas.

Quando os alunos estão familiarizados com a determinação de pontos em um par de eixos coordenados, utilizando a notação usual, é introduzida a representação cartesiana de uma função, fazendo apelo inicialmente às funções trabalhadas no "Exercício 3". (p.72)

A INVERSA de uma função é definida a partir de uma situação concreta. (Vide "atividade 1")(p.76)

Determinadas as inversas de várias funções, são colocadas perguntas que levam os alunos a concluírem que a inversa de uma função é uma função se, e somente se, esta função é bijetora. (Vide "Exercício 6")(p.77)

A COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES é introduzida a partir do relato do cotidiano de um aluno do 1º Grau, seguido da proposta de algumas atividades. (Vide "Atividade 2")(p.78)

SITUAÇÃO 2

Vamos chamar de "S" a relação que acabamos de estabelecer. Responda às questões abaixo lembrando da atividade que acabaram de desenvolver.

1. Qual o conjunto-partida de S? Defina-o em extensão.
2. Qual o conjunto-chegada de S?
3. O que pode concluir comparando o conjunto-partida e o conjunto-chegada?
4. Escreva o conjunto de pares ordenados da relação S.
5. S tem quantos elementos?
6. O conjunto em que S é definida tem quantos elementos?
7. Quantas vezes cada elemento do conjunto em que S é definida figura como imagem?
8. Quantas vezes cada elemento de conjunto em que S é definida figura como antecedente?
9. Faça um diagrama de flechas que represente S.

SITUAÇÃO 3

João tem 8 convidados para seu lanche de aniversário, Tânia, Vera, Gisa, Flávio, Mauro, Hugo, Paulo e André.

Para enfeitar a mesa e marcar os lugares, sua mãe fez chapéus onde colocou as iniciais de João e de seus amigos. Querendo que todos guardassem uma pequena lembrança desse dia, preparou uma surpresa, mandou fazer para cada um, um chaveiro com seu nome e a data comemorada.

1. Quantos chaveiros precisou encomendar?
2. Ajude a mãe de João a arrumar a mesa escondendo um chaveiro embaixo de cada chapéu.
3. Faça um diagrama sagital da relação "... esconde ..." definida do conjunto de chapéus para o conjunto de chaveiros.
4. O que pode observar no diagrama?
5. Quantos pontos você marcou em cada conjunto?
6. Quantas flechas partem de cada ponto do conjunto dos chapéus?

7. Quantas flechas chegam a cada ponto do conjunto dos chaveiros?
8. Quantas flechas você traçou ?
9. Defina em extensão a relação estabelecida.
- 10- Quantos elementos há neste conjunto?

EXERCÍCIO 1

1. Preencha a tabela abaixo, com os dados dos diagramas que estão no quadro:

1	2	3	4	5	6
RELACÃO	Nº de elementos do conj.-partida	Nº de elementos do conj.-chegada	Nº de flechas do diagrama	Nº de imagens de cada elemento da partida	Nº de antecedentes de cada elementos da chegada.

- Compare as colunas 2, 3 e 4. O que pode constatar? O que significa o que observou, em termos de relação?
- O que pode observar na coluna 5?
- O que pode observar na coluna 6?
- Quais as semelhanças e quais as diferenças que você encontrou entre os 3 diagramas?

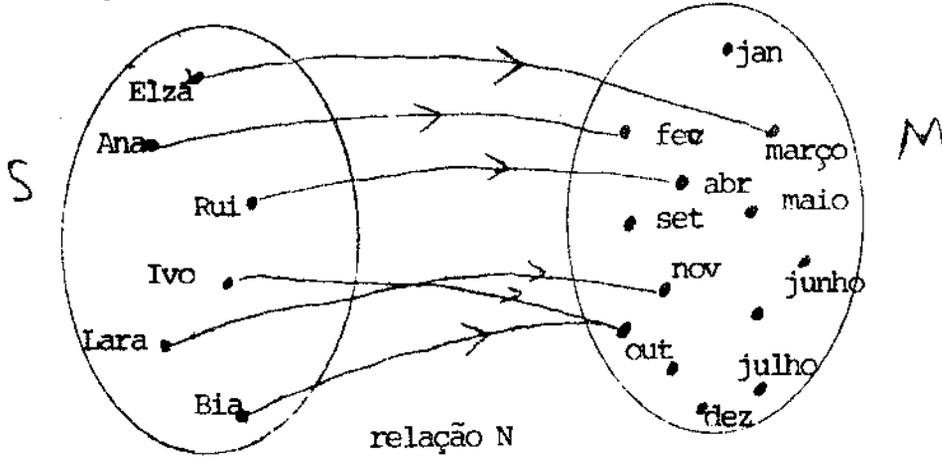
EXERCÍCIO 2

Eis algumas situações onde foram definidas relações, acompanhadas dos respectivos diagramas sagittais. Identifique entre elas as que são bijeções.

Verifique quais as que são bijeções e quais as que não são. Justifique cada resposta.

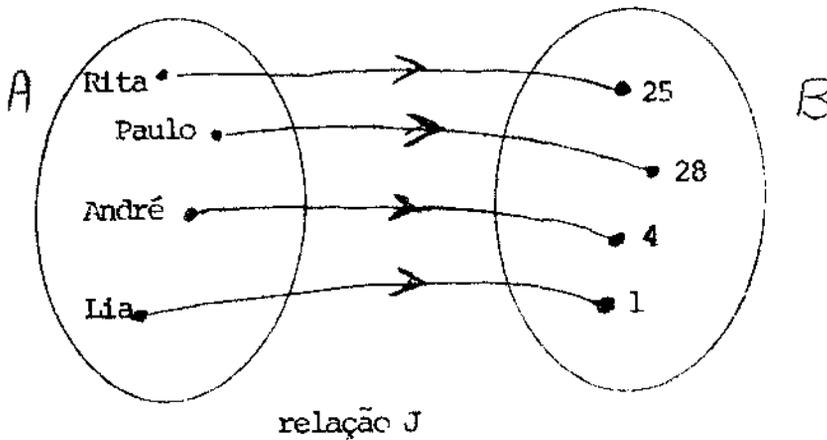
1) S é o conjunto das pessoas da família Santos e M o conjunto dos meses do ano.

N é a relação definida de S para M pela expressão "...rasou em ..."



2) A é o conjunto das pessoas que moram com Rita e B o conjunto das idades dessas pessoas.

J é a relação definida de A para B pela expressão "...tem... anos de idade".



3) A é o conjunto das secretárias da firma Y e $B = \text{Inglês, Francês, Alemão}$

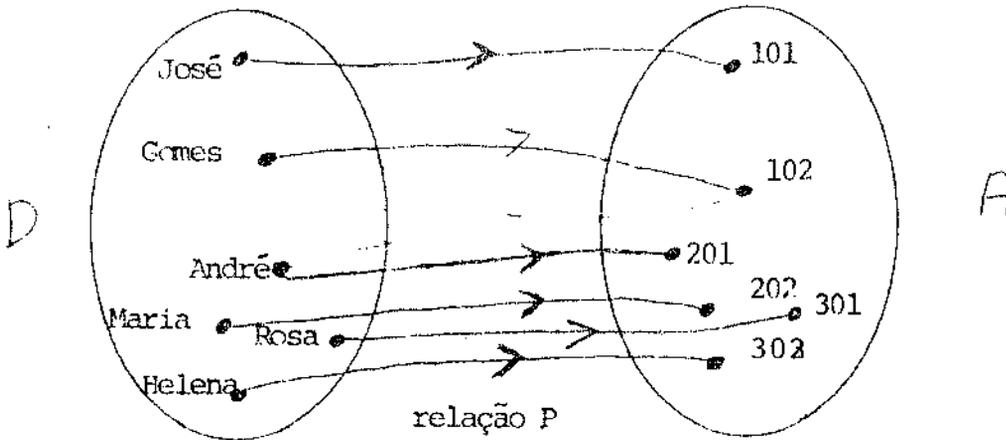
F é a relação definida de A para B pela expressão "... fala ...".



relação F

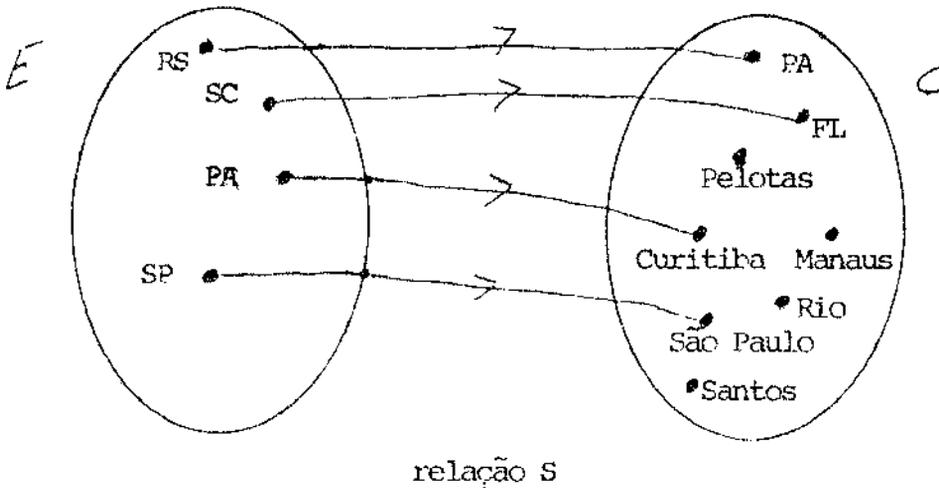
4) D é o conjunto dos proprietários dos apartamentos do prédio de José e A é o conjunto dos apartamentos do prédio de José.

P é a relação definida de D para A pela expressão "... é proprietário do ...".



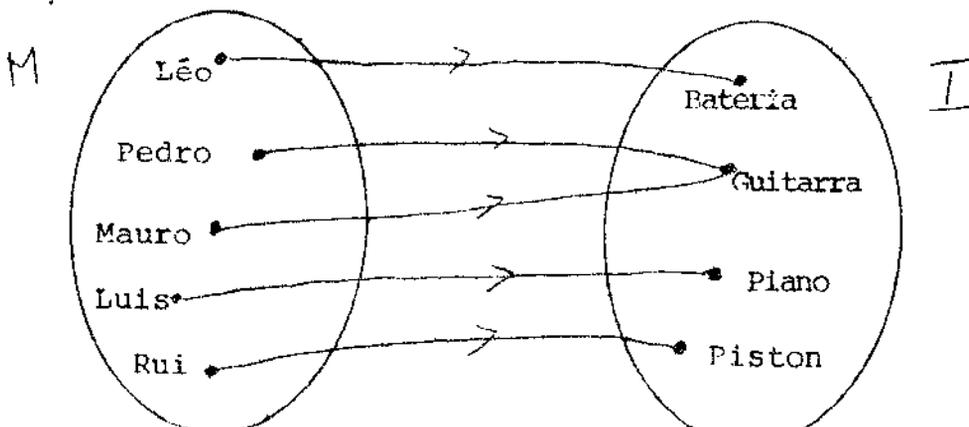
5) E é o conjunto dos estados da região Sul e $C = \{ \text{Porto Alegre, Santos, São Paulo, Rio, Curitiba, Manaus, Pelotas, Florianópolis} \}$.

S é a relação definida de E para C pela expressão "... tem por capital...".

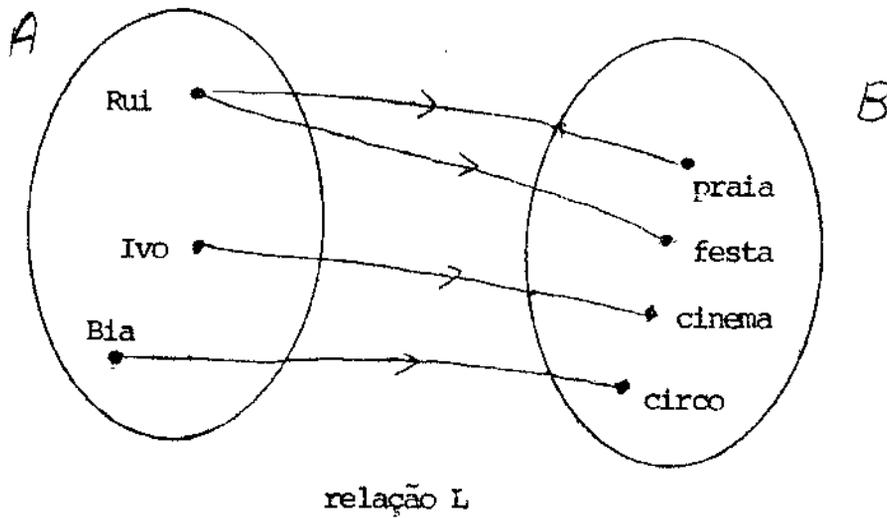


6) M é um conjunto musical formado por 5 pessoas e I é o conjunto dos instrumentos que eles tocam.

T é a relação definida de M para I pela expressão "... toca...".

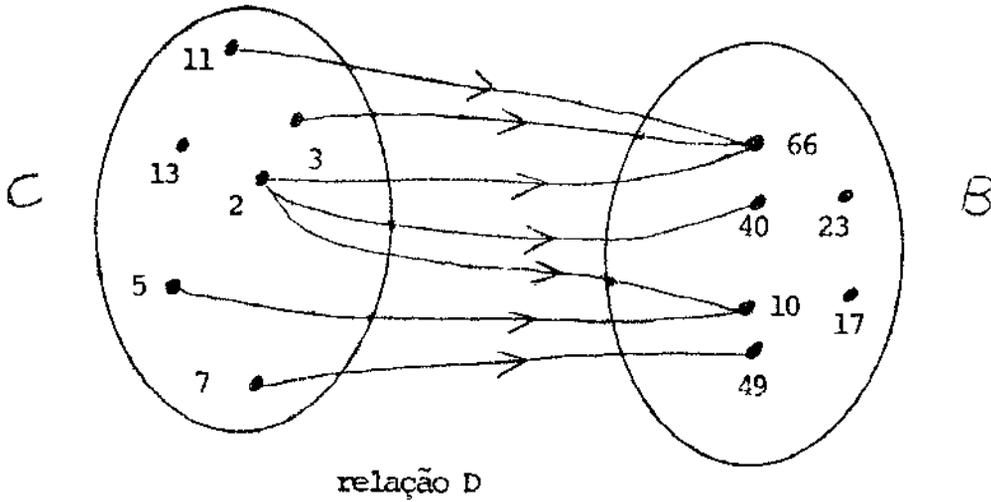


7) O diagrama abaixo mostra onde, Rui, Ivo e Bia foram no domingo. Temos então a relação L, de A para B, definida pela expressão "... foi a ...".



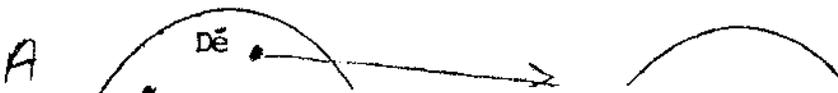
relação L

8) $C = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13 \}$ e $B = \{ 10, 17, 23, 40, 49, 66 \}$
 D é a relação definida de C para B pela expressão "... é divisor de ...".



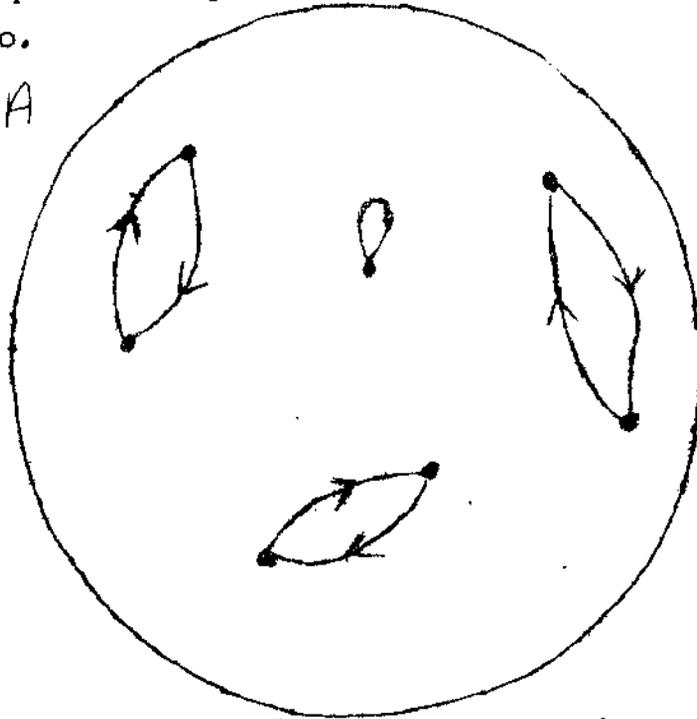
relação D

9) $A = \{ Dê, Zico, Gil, Adílio, Leão, Orlando, Roberto, Zezé, Nunes, Renato \}$ e $C = \{ Botafogo, Flamengo, Vasco, Fluminense \}$.
 J é a relação definida de A para C pela expressão "... é jogador do ...".

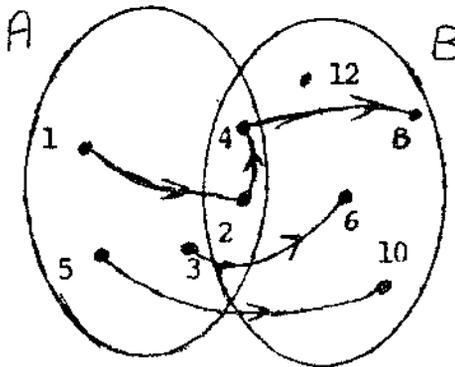


relação J

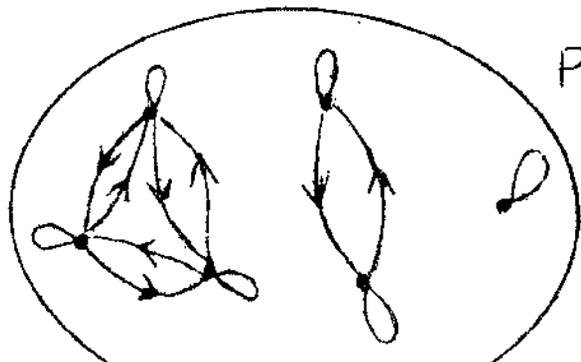
- 10) No conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ foi definida a relação O "... é oposto de ...". Disponha no diagrama abaixo os elementos de A , de modo que ele represente esta relação.

relação O

- 11) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 M é a relação definida de A para B pela expressão "... é a metade de ..."

relação M

- 12) O conjunto de palavras $P = \{\text{casa, mesa, baú, cadeira, banco, cêra}\}$.
 R é a relação definida em P pela expressão "... começa pela mesma letra que ..."



DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

CHEGADA PARTIDA	PODE SER BIJEÇÃO	NÃO PODE SER BIJEÇÃO	
PODE SER BIJEÇÃO			<u>FUNÇÃO</u>
NÃO PODE SER BIJEÇÃO			

Exercício 3

- 1) Maria gosta muito de um bombom que custa R\$ 5,00.
- a) Ajude Maria a calcular quantos bombons pode comprar, preenchendo a tabela abaixo:

Número de bombons	preço
1	
2	
3	
4	
5	
10	

- b) Considere o conjunto dos números da primeira coluna e o conjunto dos números da segunda coluna da tabela acima.
- A relação que associa aos elementos da primeira coluna os elementos da segunda é uma função?
- c) Se for função, determine o domínio, o contra-domínio, o conjunto-imagem.
- d) Como você calculou os valores da segunda coluna da tabela?
Representando o número de bombons por x e o preço por y , escreva a sentença matemática que exprime a relação definida.
- e) Vamos chamar de f a função definida em \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros) pela sentença acima.

Calcule: $f(7)$
 $f(0)$
 $f(-1)$
 $f(-3)$

- 2) Pedro ganhou, de presente de aniversário, um cofrinho com R\$ 100,00. Todo fim de mês ele coloca R\$ 20,00 em seu cofrinho. Quantos cruzeiros há no cofrinho no fim do 1º mês? E no final do 3º mês?
- a) Preencha a tabela abaixo com os dados das economias de Pedro:

Nº de meses contados a partir do aniversário de Pedro	Quantia guardada no cofrinho
0	
1	
2	
3	

- b) Chamemos de A o conjunto dos números da 1ª coluna e de B o conjunto dos números da 2ª coluna. A relação H que associa aos elementos de A os elementos de B é uma função?

- c) Sendo função, determine o domínio, o contra domínio e o conjunto-imagem de H .
- d) Você poderia escrever uma sentença matemática que traduzisse essa relação?
- e) Chamando de h a função definida em \mathbb{Z} pela sentença acima, calcule:
- | | |
|---------|---------|
| $h(0)$ | $h(-5)$ |
| $h(7)$ | $h(5)$ |
| $h(-2)$ | $h(-3)$ |

3) P é a relação que associa o lado de um quadrado a seu perímetro.

a) P é uma função?

b) Escreva a sentença matemática que traduz esta relação.

c) Calcule:

$$P(1)$$

$$P(2)$$

$$P(5)$$

Exercício 4

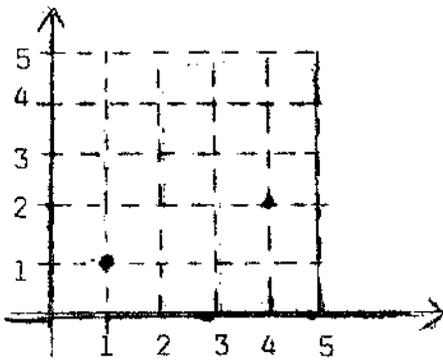
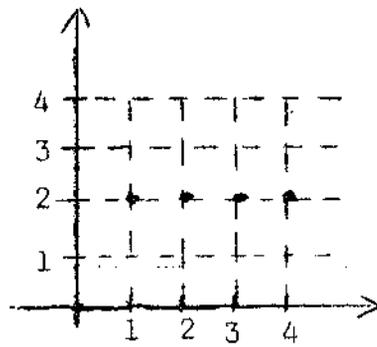
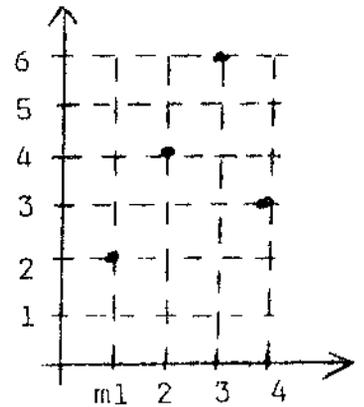
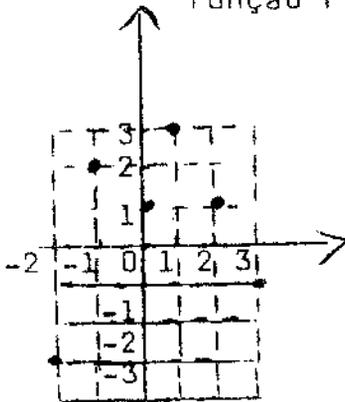
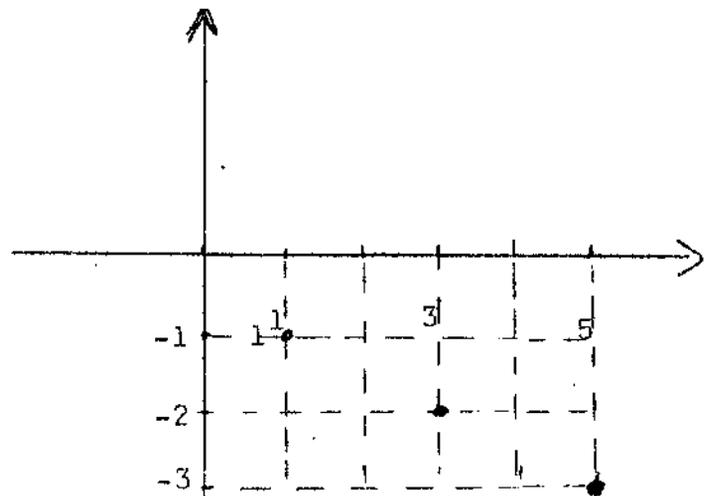
1) Distribua na tabela abaixo as funções estudadas no exercício 2

	funções sobrejetoras	funções não sobrejetoras
funções injetoras	(a)	(b)
funções não injetoras	(c)	(d)

- 2) O que pode dizer sobre as funções da região (a) ?
- 3) Toda bijeção é uma sobrejeção?
- 4) Toda bijeção é uma injeção?
- 5) Que pode concluir das respostas anteriores?
- 6) Toda sobrejeção é uma bijeção?
- 7) Toda injeção é uma bijeção?
- 8) Se uma função não é injetora, isto significa que é sobrejetora?
Justifique sua resposta.

EXERCÍCIO 5

- 1) Retome as funções do Exercício 2. Faça o gráfico cartesiano das funções O e M .
- 2) Retome as funções do Exercício 3.
- a) Faça o gráfico cartesiano da função, definida no nº 1-b, e o da função definida no nº 1-e, no mesmo par de eixos coordenados.
- b) Faça o gráfico cartesiano da função H definida no nº 2-b e o da função h definida no nº 2-e, no mesmo par de eixos coordenados.
- c) Marque num par de eixos coordenados os pontos da função P , determinados em (1), em (2) e em (3).
- 3) Identifique as funções injetoras, sobrejetoras ou bijetoras representadas nos gráficos abaixo:

função f função g função j função k função l

A T I V I D A D E 1

Consideremos : $A = \{ 1, 3, 5 \}$ como domínio, e $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$ como contra-domínio da função m , determinada pela expressão "... é a metade de."

. Faça o diagrama sagital de m :



. Complete

$m = \{ \dots \}$

. No mesmo esquema, represente por flechas vermelhas, a relação d definida de B para A pela expressão "... é o dobro de"

. Complete

$d = \{ \dots \}$

. Compare as flechas azuis da relação m com as flechas vermelhas da relação d . O que pode concluir?

. Compare os conjuntos m e d . O que pode concluir?

INVERSA DE UMA RELAÇÃO - EXERCÍCIO 6

- 1) Determine as relações inversas das funções N, I, P e F .
- 2) a- Quais das relações inversas determinadas no item anterior são funções ?

b- Quais as que são bijeções ?

c) Compare as respostas de a e de b. O que pode concluir?
- 3) A inversa da função h , h^{-1} é uma função. O que pode afirmar sobre h e sobre h^{-1} ?
- 4) A inversa de uma relação não funcional pode ser função ?

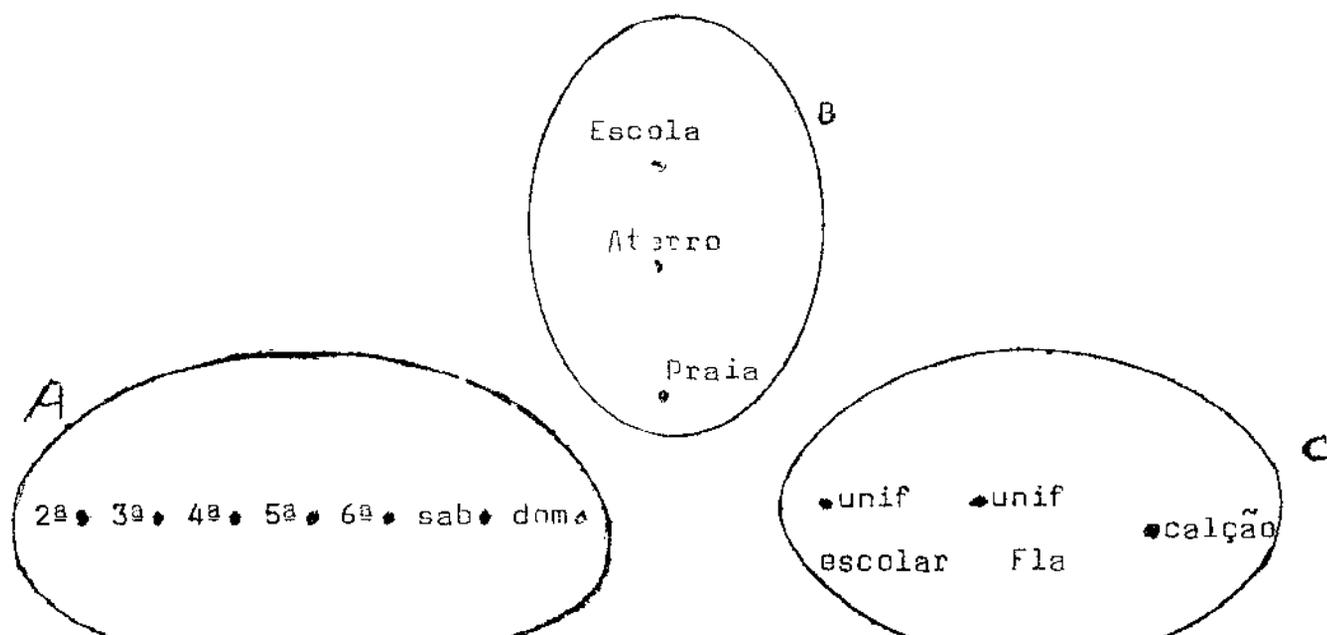
A T I V I D A D E 2

Antonio estuda na Escola Cristiano Hamann de 2ª feira à 6ª feira, pela manhã. Aos sábados ele joga futebol com os amigos no aterro do Flamengo. Aos domingos, ele vai à praia.

Para ir à Escola, Antonio precisa vestir uniforme escolar. Para jogar futebol, ele usa o uniforme do Flamengo. Para ir à praia ele veste calção de banho.

Utilizando as informações dadas, complete o diagrama abaixo, colocando flechas azuis de A para B e flechas verdes de B para C.

A flecha azul diz: "... Antonio vai a ...". A flecha verde diz: "Para ir a ... Antonio veste ...".



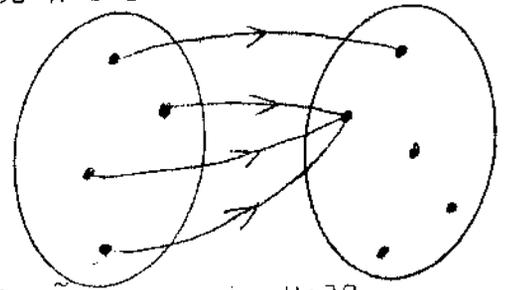
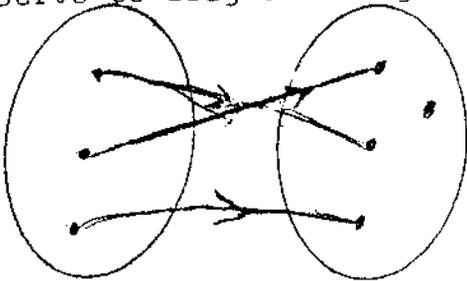
- . Como você traçou as flechas vermelhas? Você poderia traçá-las sem o auxílio das azuis e das verdes ?
- . f é uma função?
- . g é função?
- . h é função ?
- . f é bijeção ?
- . g é bijeção ?
- . h é bijeção?
- . A composta de duas funções é uma função ?
- . A composta de duas bijeções é uma bijeção.?

RELAÇÃO COMPOSTA - EXERCÍCIO 7

- 1) $A = \{x, y, z, t, u\}$ R e S são relações definidas em A.
 Olhe o conjunto-relação de R: $\{(x,x), (x,y), (x,y), (u,x), (t,t), (x,u)\}$;
 e o conjunto-relação de S: $\{(x,x), (y,x), (x,t), (t,y), (t,x)\}$
 Você pode fazer o conjunto-relação da composta SOR?

E o conjunto-relação de ROS? _____

- 2) Observe os diagramas sagitais das relações H e J.



Você pode fazer o diagrama sagital da relação composta $H \circ J$? .. _____

Por que? _____

E o diagrama sagital de $J \circ H$? _____

Faça o que for possível.

- 3) P é a relação "... tem como pai ..." definida num conjunto de pessoas. Qual a relação composta $P \circ P$? _____
- 4) Qual a composta $P \circ P \circ P$ da mesma relação "... tem como pai ..."? _____

1º) Qual a relação $M \circ M$? _____

2º) Qual a relação $M \circ P$? _____

3º) Qual a relação $P \circ M$? _____

4º) $M \circ P$ é igual a $P \circ M$? _____

Por que? _____

- 6) Veja o diagrama sagital da relação P: "... pratica ..." de E em S (flechas contínuas) e da relação recíproca P^{-1} "... é praticada por ..."

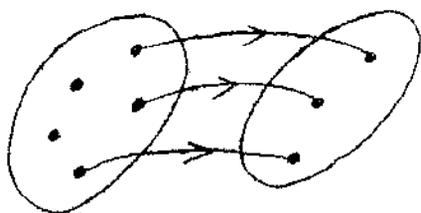
AVALIAÇÃO DE FUNÇÕES

Data

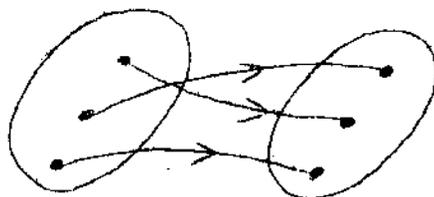
Colégio

Aluno Nº

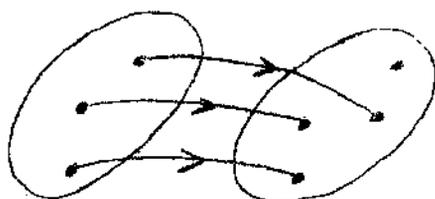
- 1) Classifique as relações abaixo (diga se cada uma é função, injeção, sobrejeção, bijeção).



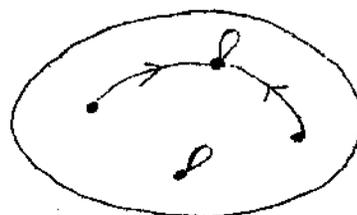
relação R



Relação S



relação T



relação U

- 2) f é uma função definida de A para B . A tem 4 elementos e B tem 5 elementos. f é bijetora?
- 3) Dada a função h :
- $$h = \{(1,3), (2,4), (3,-5), (0,-1), (-3,-2), (-2,2)\}$$
- Faça o gráfico cartesiano de h .
- 4) Determine a função inversa de h , h^{-1} .
- 5) A função f é injetora e não é sobrejetora. f^{-1} é uma função?
- 6) g^{-1} é a inversa da função g .
 g^{-1} é uma função.
 O que pode afirmar sobre estas duas funções?
- 7) Dadas as funções $f = \{(1,2), (3,4), (5,6), (-1,0), (-3,-2)\}$
 $g = \{(-2,-1), (4,2), (0,0), (6,3)\}$
 determine a composta $g \circ f$.
- 8) $g \circ f$ é uma função?

ANEXO II

ROTEIROS DOS VÍDEO-TAPES

PROGRAMA: Proposta de solução para atualização dos professores da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, em Matemática.

MÓDULO 1: Bijeção

TÍTULO : Introdução ao conceito de Bijeção: ATIVIDADE 1.

DURAÇÃO : 25 min.

VÍDEO

ÁUDIO

01- Apresentador.

APRESENTADOR: Iniciamos hoje uma série de 10 programas de Matemática. Esta série se destina a dar ao professor do 1º Grau embasamento de conteúdo e, ao mesmo tempo, apresentar sugestão de estratégia a desenvolver com seus alunos familiarizando-o com uma metodologia ativa.

A unidade escolhida para este programa, dada sua grande aplicação a diferentes níveis e áreas da Matemática é FUNÇÃO.

Nestes 10 programas será apresentada uma abordagem em que o professor, respeitando o presu- nível estágio operatório concreto dos alunos de uma 5ª série, os conduz à observação e análise de situações encontradas na própria sala de aula, passando para sua representação gráfica, para finalmente chegarem à conceituação matemática e introdução da linguagem formal.

Estas aulas são o relato de uma situação real, desenvolvida em uma escola municipal do Rio de Janeiro, acompanhadas de comentários sobre a metodologia. Esses comentários são apresentados na forma de diálogo de duas professoras analisando um planejamento...

02- Duas professoras sentadas a mesa. Livros e papéis sobre a mesa.

CONCEIÇÃO: No próximo semestre devo introduzir o conceito de função na minha 5ª série. Você sabe como é importante que esta noção fique bem assimilada.

DIVA: É ... ela vai ser utilizada no desenvolvimento de praticamente todos os tópicos da Matemática e até mesmo como suporte para a introdução de alguns.

CONCEIÇÃO: Pois é, é preciso que eles realmente aprendam, que não decorem o que eu digo ou o que leem no livro didático.

DIVA: Uma forma de evitar isso é fazer com que eles mesmos construam o conceito, neste nível, partindo de situações concretas.

CONCEIÇÃO: Mas como fazer isso? Quando eu estava no 1º Grau, a professora escrevia no quadro negro os conceitos, em seguida resolvia exercícios de aplicação e finalmente nos propunha outros semelhantes aos já resolvidos no quadro...

DIVA: Assim, encontrar as respostas certas não significava ter aprendido o novo conceito, pois as respostas geralmente eram encontradas por analogia.

CONCEIÇÃO: Quantas vezes, a professora ficava decepcionada ao constatar que o aluno que acertara, pouco depois já "esquecera" o que ela julgara aprendido? Na verdade não tinha havido aprendizagem.

Mais tarde, na faculdade, estudei função a nível formal, totalmente fora do alcance de meus alunos...

Não sei como fazer com que eles próprios construam um conceito,

DIVA: Posso mostrar a você como fiz no ano passado com a minha turma. Talvez daí você possa tirar idéias para seu planejamento,

CONCEIÇÃO: Seria ótimo!

DIVA: Bem, como bijeção é uma noção mais intuitiva e que, embora sem sair deste nível, nem utilizar a nomenclatura matemática, já é trabalhada com as crianças desde as primeiras séries, eu decidi começar por aí.

! Na primeira aula, não havia faltado nenhum aluno, logo as carteiras estavam todas ocupadas. Tínhamos ali, bem concreta, uma bijeção do conjunto dos alunos presentes para o conjunto das carteiras da sala.

03- P.G. Alunos sentados em suas carteiras. (Não pode haver carteiras vazias)

PROFa(OFF): Olhem em volta, observem a arrumação da sala e como vocês estão acomodados.

Há algum aluno em pé?

04- Aluno respondendo

ALUNO: Não.

05- P.G. Sala de aula:alunos nas carteiras.

PROFa(OFF): Há alguma carteira vazia?

ALUNOS: Não.

PROFa(OFF): Quantas carteiras cada aluno ocupa?

06- Aluno respondendo

ALUNO: Uma!

PROFa(OFF): Há alguma carteira ocupada por mais de um aluno?

ALUNO: Não.

07- P.G. Sala de aula:alunos nas carteiras.

PROFa(OFF): Podemos então dizer que, cada aluno está sentado em uma carteira, e que, cada carteira está ocupada por um aluno. Temos, então, o conjunto dos alunos presentes na sala e temos o conjunto das carteiras da sala.

Para me referir a um aluno, digo seu nome. O que posso fazer para distinguir uma carteira das outras?

08- Aluna respondendo

ALUNA: Põe números.

09- P.A: Professora encaminhando-se para as carteiras e numerando-as com giz.

PROFa: Está bem. Vou numerar as carteiras.

10- P.A. Aluno e sua carteira (Câmera mostra cada aluno citado).

PROFa(OFF): O Romildo está sentado na carteira 2, o Ivan está sentado na carteira 1, Zélia está sentado na carteira 4, Antonio está sentado na carteira 23.

11- Professora mostrando no quadro de giz as frases escritas:

PROFa: Qual a expressão que está associando cada aluno a sua carteira?

"Romildo está sentado na carteira 2"
Ivan está sentado na carteira 1.
Zélia está sentada na carteira 4.
Antonio está sentado na carteira 23

ALUNOS: Está sentado na !

12- Professora escrevendo no quadro:

"... está sentado na..."
A: conjunto dos alunos presentes
C: conjunto das carteiras da sala
relação R

PROFa: Com essa expressão: "... está sentado na..." estamos estabelecendo uma relação do conjunto dos alunos presentes, que chamaremos de A, para o conjunto das carteiras da sala, que chamaremos de C. Vamos chamar esta relação de R.

13- Jorge sentado numa carteira.

PROFa(OFF): Jorge está sentado na carteira 13.

Jorge está sentado em mais alguma carteira?

ALUNOS: Não, não pode.

PROFa(OFF): Neste caso dizemos que a carteira 13 corresponde, ou está associada, a Jorge, pela relação R.

Há alguma outra carteira correspondendo a Jorge pela relação R?

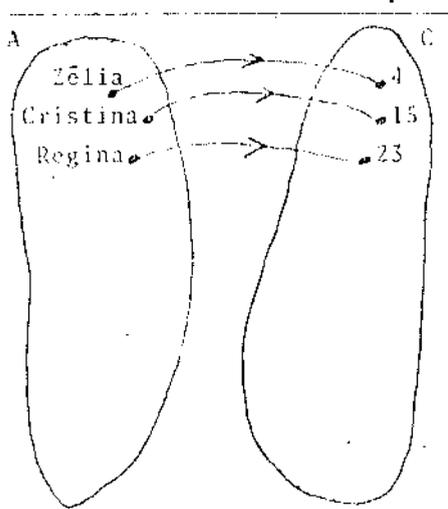
ALUNOS: Não.

PROFa(OFF): Por que?

- ALUNOS: Porque ele está sentado numa carteira só.
 PROFa(OFF): A carteira 13 corresponde a algum aluno além de Jorge?
 ALUNOS: Não.
 PROFa(OFF): Por que?
- 14- CLOSE: Outro aluno respondendo.
 ALUNO: Porque duas pessoas não podem ocupar o mesmo lugar no espaço.
- 15- P.A. ALUNA-VÂNIA sentada em sua carteira
 PROFa(OFF): Que elemento do conjunto das carteiras corresponde à Vânia pela relação R?
 ALUNOS: A carteira 18.
 PROFa(OFF): Por que?
 ALUNOS: A Vânia está sentada na carteira 18.
 PROFa(OFF): Há algum outro elemento de C correspondendo à Vânia, pela relação R?
 ALUNOS: Não.
 PROFa(OFF): Podemos então afirmar que, à Vânia corresponde um elemento e somente um, pela relação R.
- 16- CLOSE: Aluno - Antonio
 PROFa(OFF): E a carteira 22?
 Corresponde a quantos alunos por esta relação?
 ALUNOS: Um só, o Antonio.
- 17- P.G. Sala de aula
 PROFa(OFF): Quantas carteiras corresponde a cada aluno, por R?
 ALUNOS: Uma
 PROFa(OFF): Cada carteira corresponde a quantos alunos por esta relação?
 ALUNOS: Um.
 PROFa(OFF): Há algum aluno sem correspondente pela relação R?
 ALUNOS: Não.
- 18- CLOSE Professora
 PROFa; Então podemos afirmar que todo elemento do conjunto A tem um correspondente e apenas um, no conjunto C, e que todo elemento do conjunto C corresponde a um e apenas um elemento do conjunto A, pela relação R.

19- Quadro de giz e mão da professora desenhando.

Obs: Se possível não empurrar a professora.



PROF^a: Vamos, então, representar esta relação que acabamos de definir, por um diagrama.

Aqui representaremos o conjunto A, que é o conjunto de partida da relação R, e aqui, o conjunto C que é o conjunto de chegada desta mesma relação. Este ponto está representando um aluno. Vamos dizer que seja a Zélia.

Eu sei que ela vai ter um correspondente aqui, que é a carteira 4.

Ela vai ter mais de um correspondente por esta relação "... está sentada na...?"

ALUNOS(OFF): Não.

PROF^a: Então eu diria: "Zélia está sentada na carteira 4". A flecha vale pela frase "está sentada na".

Cristina está sentada na carteira 15.

Regina está sentada na carteira 23.

Este diagrama, nós chamamos de diagrama de flechas ou, diagrama sagital. Sagital vem do latim onde sa- quer dizer flecha.

20- P.M. Professora mostrando no quadro.

PROF^a: Agora eu queria que vocês fizessem o seguinte: No caderno de vocês, desenhem um diagrama como o que eu comeci no quadro, isto é, o conjunto A com um ponto para representar cada aluno, e o conjunto C com um ponto para representar cada carteira. Flechas indicando em que carteira o aluno está sentado. Todos os alunos devem ser representados. O nome de cada um ao lado de um ponto serve para identificar que aluno está sendo representado. As carteiras vocês numeram como eu numerei. É preciso representar todas.

21- CLOSE Professor

PROF^a: Vamos fazer isso?

22- Duas professoras sentadas a mesa (Cena 02)

DIVA: Você vê? Em uma situação encontrada em qualquer sala de aula, bem concreta e familiar aos alunos, vou encaminhando para a visualização do conceito matemático subjacente.

CONCEIÇÃO: É, depois de observação livre, você vai colocando perguntas para destacar os aspectos que estão interessando e só então você usa terminologia e conceitos matemáticos.

DIVA: Conceitos e termos já conhecidos. Desde as primeiras séries eles vêm trabalhando com conjuntos e relações.

Você deve ter notado que eu me refiro à relação existente mas não à bijeção.

CONCEIÇÃO: E se esta turma ainda não tivesse estudado relações?

DIVA: Você não poderia utilizar os termos "relação" conjunto-partida, conjunto-chegada, como suporte para a aprendizagem do novo conceito, é claro, mas poderia aproveitar a mesma situação para introduzi-los, assinalando que os alunos presentes na sala de aula constituem um conjunto bem definido, assim como as carteiras aí colocadas, e que você está interessada na correspondência entre os elementos do primeiro e os do segundo, ou seja, na relação existente entre os alunos e as carteiras, que pode ser expressa pela sentença "... está sentada na ..."

CONCEIÇÃO: E d'aí introduzir os termos "partida", "chegada", etc...

DIVA: Ou mudar a dinâmica e conceituar bijeção sem definir relação.

CONCEIÇÃO: Outra coisa que observei é que você introduz o diagrama sagital como se fosse uma novidade. No entanto, atualmente, todo professor utiliza esta representação ao ensinar relações.

DIVA: É o que você pensa. Muitos professores não o utilizam, embora seja um bom instrumento para facilitar a passagem do concreto para o abstrato. Mas o cuidado que tomei foi sobretudo para garantir a real compreensão dessa representação gráfica. O diagrama destaca a lei que associa os elementos dos dois conjuntos, e suas propriedades, começando a abandonar os objetos em si, mas é impor

tante que o aluno saiba associá-lo à situação concreta. Eu procurei, então, deixar que eles construíssem o diagrama sagital da situação analisada sozinhos, interferindo o menos possível.

CONCEIÇÃO: A minha turma tem mais de 40 alunos. Não ficaria cansativo e monótono para eles fazer um diagrama com tantos elementos?

DIVA: Em momento algum pretendi que você repetisse minhas aulas. Penso que mostrando como trabalhei com meus alunos, posso ajudá-la a entender melhor a dinâmica de uma aula ativa e despertar sua atenção para a existência, no nosso dia a dia de situações que podem ser utilizadas para introduzir, a partir do concreto, conceitos matemáticos.

CONCEIÇÃO: Tem razão, posso encontrar outras situações mais adequadas à realidade de meus alunos.

Há um outro detalhe que estranhei. Você que se preocupa tanto com a adequação ao nível dos alunos, não acha desnecessário o uso do termo "sagital"? "Diagrama de flechas", que é mais próximo da linguagem usual, não é suficiente?

DIVA: É assim, mas como muitos livros didáticos apresentam essa denominação, prefiro esclarecer logo que diagrama de flechas e diagrama sagital são sinônimos.

CONCEIÇÃO: Realmente... Mas vamos continuar?

DIVA: Bem, quando todos tinham terminado, ou pelo menos feito o suficiente para discutirmos em cima,

23- P.G. Professora andando lentamente pela sala e parando junto às carteiras para observar o trabalho dos alunos.

ALUNOS (DIVERSAS VOZES, cada uma diz uma frase):
-Francisco, qual o número da sua carteira?
-Quem está na 24?
-Acabei.

24- P.A. Professora chegando à carteira do aluno que acabou, pegando seu caderno e olhando.

PROFA: Está bem. Complete o diagrama do quadro, por favor.

- 25- P.A. Aluno dirigindo-se ao quadro de giz com o cader no na mão. ALUNO: Tá legal .
- 26- P.M. Professora parada junto a uma carteira. PROFa: Já acabaram?
ALUNOS: Já.
- 27- P.M. Professora junto ao quadro, mostrando no desenho o que está dizendo, PROFa: O que vocês podem notar neste diagrama?
ALUNO(OFF): Cada bolinha aí representa um aluno.
PROFa: Cada um destes pontos representa um aluno. Exato.
ALUNO(OFF): Cada ponto representa uma carteira.
PROFa: Atenção. Uma observação importante: o que representa o aluno, e o que representa a carteira é o ponto, o nome ou o número que vem junto é apenas para identificar qual é o aluno ou qual é a carteira. O elemento do conjunto é representado pelo ponto.
- 28- CLOSE do diagrama no quadro. Mão da professora mostrando. PROFa(OFF): O que mais vocês observam neste diagrama?
ALUNO(OFF): Que tem flechas de A para C.
PROFa(OFF): É verdade, temos flechas partindo dos elementos de A e chegando aos elementos de C. Mas vocês não podem me dar mais informações sobre essas flechas? Sobre sua distribuição?
- 29- P.G. dos alunos. SILENCIO.
- 30- CLOSE Diagrama no quadro Professora mostra com o indicador cada detalhe a que se refere. (A professora não precisa aparecer). PROFa: Por exemplo, o Ivan está associado a quantas carteiras?
ALUNOS(OFF): Uma.
PROFa: Qual é essa carteira?
ALUNOS(OFF): A carteira 1.
PROFa: Vemos isso pela flecha partindo do Ivan e chegando à carteira 1. O que se lê "Ivan está sentado na carteira 1". A carteira 1 corresponde a algum outro elemento de A por esta relação?
ALUNOS(OFF): Não.
PROFa: Do Ivan parte uma só flecha, e à carteira 1 chega uma só flecha.
- E a carteira 15, corresponde a quantos alunos?

ALUNOS(OFF): Um.

PROFa(OFF): Qual?

ALUNOS(OFF): Cristina.

PROFa(OFF): Da Cristina parte uma flecha e somente uma e a carteira 15 chega uma flecha e somente uma.

- Vocês podem observar neste diagrama que de cada ponto de A...

31- CLOSE Aluna

ALUNA: De cada ponto de A parte uma só flecha.

32- CLOSE Diagrama no quadro
Professora mostra.

PROFa(OFF): E a cada ponto de C?

ALUNOS(OFF): Chega uma só flecha.

33- P.M. Professora e quadro
com diagrama. Professora
mostra.

PROFa: O diagrama mostra claramente que a relação R faz corresponder a todo elemento do conjunto A um elemento e somente um do conjunto C e que todo elemento do conjunto C corresponde a um elemento e somente um de A.

O elemento de C onde chega uma flecha é chamado IMAGEM pela relação R do elemento de A de onde parte a flecha. Assim, a carteira 1 é a imagem de Ivan, pela relação R.

34- CLOSE Diagrama no quadro,
Mão do professor mostra.

PROFa(OFF): A carteira 2 é a imagem...

ALUNOS(OFF): a imagem do Romildo.

PROFa(OFF): Qual a imagem da Cristina pela relação R?

ALUNOS(OFF): A carteira 15.

35- Duas professoras sentadas
à mesa (cena 2)

CONCEIÇÃO: A observação daquele aluno - "cada bolinha aí representa um aluno" - não foi consequência da análise do diagrama, ele sabia disso antes de construí-lo. Além do mais ele chama um ponto de bolinha !?

DIVA: Realmente, mas se critico a terminologia errada, posso deixá-lo com receio de se manifestar novamente, por isso me limitei a corrigir utilizando eu o termo correto. Aceitar uma observação irrelevante, mas verdadeira, também tem como objetivo estimular a autonomia de raciocínio do aluno e sua participação na aula.

CONCEIÇÃO: Eles custaram a chegar ao que interessava.

DIVA: Isso é normal, é preciso ter paciência e ir fazendo perguntas até que eles cheguem lá. Fazendo as observações para os alunos, eu não desenvolvo o raciocínio deles. Mas também não é aconselhável deixar que aula se torne arrastada e monótona. Esses alunos não estavam acostumados a participar de uma aula ativa, assim, no início ajudei com algumas colocações que preferia que partissem deles. Gradativamente, eles foram ganhando confiança e atuando mais.

CONCEIÇÃO: Ninguém assinalou também que o número de carteiras deveria ser igual ao número de alunos.

DIVA: Para destacar esta igualdade propus uma questão...

36- P.M. Professora

PROFa: Agora vamos analisar a seguinte situação. Na sala ao lado há 40 carteiras. Como aqui, cada aluno ocupa uma carteira e somente uma, e em cada carteira está sentado um aluno e somente um.

Vocês podem me dizer quantos alunos estão naquela sala?

37- P.M. Aluno respondendo.

ALUNO: Quarenta.

PROFa(OFF): Por que?

ALUNO: Porque são 40 carteiras.

38- P.G. Alunos da classe.

PROFa(OFF): Todos concordam com a resposta do Antônio?

ALUNOS(VIVO): Claro. Só pode ter quarenta.

39- Duas professoras sentadas a mesa (Cena 02)

DIVA: Neste ponto, eu achei que essa situação já tinha sido suficientemente explorada e propus uma outra.

40- APRESENTADOR:

APRESENTADOR: No próximo programa veremos o estudo de nova situação concreta.

Sugerimos ao professor que nos assiste que procure em sua própria sala de aula situações concretas que envolvam bijeções.

PROGRAMA: Proposta de solução para atualização dos professores da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, em Matemática

MÓDULO 1: Bijeção .

TÍTULO: Introdução ao conceito de bijeção: ATIVIDADE 2.

DURAÇÃO: 25min.

VÍDEO	ÁUDIO
01- Apresentador	APRESENTADOR: No programa de hoje vamos assistir aos trabalhos dos alunos de uma 5ª série analisando a segunda situação proposta pela professora de Matemática com o objetivo de construir o conceito de <u>bijeção</u> .
02- P.S. Alunos na sala de aula. (Cena 03 do 1º programa)	APRESENTADOR(OFF): No programa anterior vimos como a partir do estado da situação dos próprios alunos sentados em suas carteiras, chegaram à relação R , que se traduz pela expressão verbal "... está <u>senta do na ...</u> ", existente entre o conjunto A , dos alunos presentes à aula, e o conjunto C , das carteiras da sala.
03- CLOSE Diagrama sagital de R . (Cena 28 do 1º programa).	APRESENTADOR(OFF): Construindo e analisando o diagrama de flechas da relação R , os alunos concluíram que todo elemento de A tem uma imagem e somente uma em C , e que todo elemento de C é imagem de um e somente um elemento de A , pela relação R .
04- Apresentador.	APRESENTADOR: A Profa <u>Diva</u> explica a sua colega porque uma <u>segunda</u> situação.
05- Duas professoras à mesa.	<p>CONCEIÇÃO: Você dizia que propôs uma segunda situação à análise dos alunos, mas se eu entendi bem, você não chegou a dizer a eles que aquela primeira era uma <u>bijeção</u>.</p> <p>DIVA: Não disse mesmo, e foi intencional. Comparando diferentes situações com as mesmas características é que o aluno poderá descobrir o conceito matemático subjacente, desligando-o das situações concretas estudadas, e passar a reconhecê-lo em outras situações.</p>

CONCEIÇÃO: E q que você apresentou em seguida?

DIVA: Bem, eu procurei explorar ainda uma vez, uma bijeção definida em um conjunto onde os próprios alunos fossem os elementos.

Você sabe que se vendo como objetos da situação, eles se sentem mais envolvidos.

06- P.A. Professora em pé, por trás de sua mesa.

PROFa: Agora, nós vamos analisar uma outra situação. Vamos considerar apenas parte da turma.

07- P.G. Duas filas de carteiras do centro.

PROFa(OFF): Os alunos destas duas filas aqui vão constituir um conjunto, que nós vamos chamar de B. Então, qual é o conjunto B?

08- Professora escrevendo no quadro.

PROFa: É o conjunto formado por: Romildo...

ALUNOS(OFF): Ivan, Zélia, Vânia, Roberto, Heloisa, Marly, Ivonete, Vera, Cláudia.

$B = \{ \text{Romildo, Ivan, Zélia, Vânia, Roberto, Heloisa, Marly, Ivonete, Vera, Cláudia} \}$

09-P.G. Professora/duas filas de carteiras do centro

PROFa: Bem, neste conjunto B, nós vamos definir uma relação com a expressão "... está sentado(a) ao lado de ..."

10-P.M. Primeira carteira das 2 filas do centro. (Dois meninos)

PROFa(OFF): Então vejamos: Romildo está sentado ao lado de ...

ALUNOS: Ivan.

PROFa(OFF): Ivan está sentado ao lado de ...

ALUNOS: Romildo.

11-P.M. Segunda carteira das mesmas filas.

PROFa(OFF): *Continuem* até formar todos os pares possíveis. Zélia...

ALUNOS: está sentada ao lado de Vânia, Vânia está sentada ao lado de Zélia.

12-P.M. Terceira carteira das mesmas filas.

ALUNOS(OFF): Roberto está sentado ao lado de Heloisa. Heloisa está sentada ao lado de Roberto.

13-P.M. Quarta carteira das mesmas filas.

ALUNOS(OFF): Ivonete está sentada ao lado de Marly e Marly está sentada ao lado de Ivonete.

14-P.M. Quinta carteira das mesmas filas.

ALUNOS(OFF): Vera está sentada ao lado de Claudia e Claudia está sentada ao lado de Vera.

15-P.G. Duas filas centrais de carteiras.

PROFa(OFF): Todo elemento do conjunto considerado tem um correspondente pela expressão "... está sentado(a) ao lado de ..."?.

ALUNOS: Tem.

PROFa(OFF): Algum aluno deste conjunto está sentado ao lado de mais de um colega?

ALUNOS: Não.

16-P.M. Professora falando

PROFa: Vamos "arrumar" um pouco o que acabamos de fazer. Nós estabelecemos uma relação num conjunto de pessoas. Toda relação para estar bem definida do ponto de vista matemático precisa ter determinados o conjunto de partida, o conjunto de chegada e o conjunto de pares ordenados.

17-Profa distribuindo folhas mimeografadas.

PROFa: Agora, então, vocês vão responder por escrito, a algumas questões sobre o que acabaram de fazer. Elas estão nestas folhas.

Leiam com atenção, discutam entre vocês o que for necessário e comecem a responder.

18-Duas professoras à mesa.

CONCEIÇÃO: Desta vez você escolheu um exemplo de relação definida em um conjunto.

DIVA: É bom que eles vejam que a classificação de uma relação em bijeção, ou função, independe do fato da partida ser diferente ou igual à chegada.

CONCEIÇÃO: Mas você conservou a mesma dinâmica de observação de uma situação concreta, vivida por eles naquele momento.

DIVA: Na sistematização é que já exijo um pouco mais, pedindo que respondam por escrito a uma série de perguntas.

CONCEIÇÃO: As respostas por escrito exigem que eles reflitam mais um pouco e que, portanto, fixem melhor as conclusões.

DIVA: Na interpretação e execução de tarefas procure sempre interferir, o menos possível, me limitando a observar e estimular a que todos trabalhem realmente. Só quando todos tinham terminado é que passei à verificação e discussão das conclusões.

19- P.M.F. Um aluno.

ALUNO: Já acabamos.

PROFa(OFF): Vamos verificar as respostas que deram.

20- P.M. Professora junto ao quadro com uma folha mimeografada na mão.

PROFa: Segundo a ficha, a relação de finida será chamada "S".

Primeira pergunta: Qual o conjunto-partida de S?

21- P.G. Sala de aula, alunos de frente.

ALUNOS: B.

22- CLOSE do conjunto B no quadro.

PROFa(OFF): Ele já está definido em extensão aqui no quadro.

Segunda pergunta:

Qual o conjunto-chegada de S?

ALUNOS(OFF): B.

23- P.M. Professor lendo.

PROFa: Terceira pergunta:

O que pode concluir comparando o conjunto-partida e o conjunto-chegada? O que vocês concluíram a respeito?

24- P.M. Aluno respondendo.

ALUNO: Que o conjunto B além de chegada é também de partida.

25- P.M. Professora

PROFa: Logo, o conjunto-partida é o próprio conjunto de chegada, ou seja, são iguais. Neste caso dizemos que a relação S é definida em B.

Na primeira relação que definimos, qual era o conjunto de partida?

26- P.G. Alunos.

ALUNOS: Os alunos.

PROFa(OFF): O conjunto dos alunos presentes. E o conjunto de chegada?

ALUNOS: As carteiras.

27- P.M. Professora.

PROFa: Dois conjuntos bem diferentes, portanto. A relação R foi definida do conjunto A, dos alunos da turma, para o conjunto Ç, das carteiras da sala. E em S?

28- P.G. Alunos.

ALUNO: A partida é B e a chegada é B também.

29- P.M.Professora

PROF^a: Na relação S, o conjunto de partida coincide com o conjunto de chegada. Ao analisarmos esta relação devemos lembrar que B é um conjunto, mas ora vamos considerá-lo como partida, ora como chegada de S.

30- Duas professoras sentadas à mesa.

DIVA: A referência à situação anterior visa facilitar o estabelecimento de paralelo entre as duas, embora enfocando uma diferença.

CONCEIÇÃO: Com isso você vai mostrando também que esta diferença não interfere no conceito a ser definido.

DIVA: A terceira pergunta: "O que pode concluir comparando o conjunto-partida e o conjunto-chegada"? tem como objetivo evitar que na construção do diagrama sagital, que é a tarefa do 4º ítem, desenhem a partida e a chegada separadamente.

CONCEIÇÃO: E você atingiu seu objetivo?

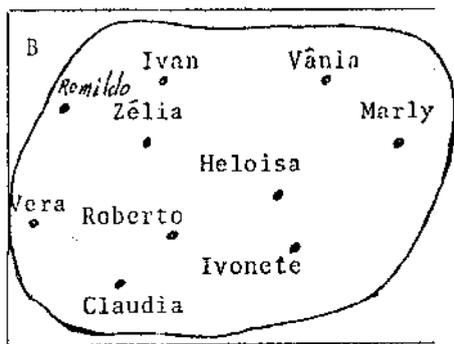
DIVA: Durante a resolução, um ou outro manifestou dúvida quanto a isto, mas conseguiram esclarecer com os próprios colegas e antes de começar a correção eu já tinha verificado que todos tinham construído o diagrama corretamente.

CONCEIÇÃO: Você considera errado representar a partida e a chegada separadamente?

DIVA: Errado propriamente não, toda linguagem é uma convenção e você pode usar a que achar mais adequada.

Acontece que os alunos vinham utilizando o diagrama de Venn, onde a convenção é clara, um elemento é representado por um ponto único, dois pontos representam dois elementos distintos. Se estamos iniciando a construção de um conceito não me parece conveniente usar uma representação que possa confundí-los, se a partida coincide com a chegada, pela convenção de Venn teremos uma só corda.

31- Profª desenhando no quadro o que está dizendo



PROFª: 4º item: Faça um diagrama de flechas que represente S. Vamos lá. A fronteira do conjunto B... Quantos pontos eu coloco dentro desta fronteira?

ALUNO(OFF): Dez

PROFª: Por que?

ALUNO(OFF): Porque tem 10 elementos.

PROFª: Vamos identificar esses pontos: Ivan-Zélia-Vânia-Claudia - *Marly*...

ALUNOS(OFF): Romildo-Vera-Ivonete-Roberto-Heloisa,

PROFª: Como ficam as flechas?

32- P.G. Alunos

ALUNOS: Ligando Romildo e Ivan.

33- P.G.Sala de aula (professora e alunos).

PROFª: Mas como eu desenho a flecha? Partindo de onde e chegando onde?

ALUNOS: Os dois.

34-P.M.Professora traçando uma flecha no diagrama que está no quadro. (de "Ivan" para "Romildo")

PROFª: Para ficar mais fácil, vocês vão dizer para colocar uma flecha partindo de tal ponto e chegando a tal ponto. Tá? Partindo do Ivan e chegando...

35-CLOSE Diagrama no quadro

ALUNOS(OFF): ao Romildo.

PROFª(OFF): Isto significa o que pra vocês?

36-P.M.F.Aluno falando.

ALUNO: Que o Ivan está sentado ao lado de Romildo

PROFª(OFF): Certo. Se o Ivan está sentado ao lado de Romildo, o que podemos dizer do Romildo e do Ivan?

37-P.G.Grupo de alunos.

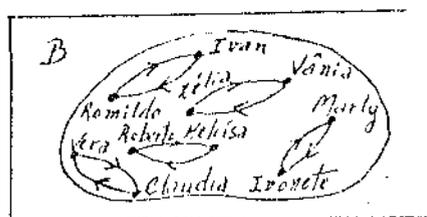
ALUNOS: Que o Romildo está sentado ao lado do Ivan

38-CLOSE Diagrama. Mão do prof. traçando cada flecha citada

PROFª(OFF): Então vai também uma flecha do Romildo para o Ivan. Reparem que ao traçar a primeira flecha, o Ivan é considerado como elemento do conjunto -partida e o Romildo como elemento do conjunto de chegada, já na segunda flecha Ivan é elemento da chegada e Romildo da partida.

ALUNOS(OFF): Vânia, está sentada ao lado da Zélia e Zélia está sentada ao lado de Vânia.

39-CLOSE Diagrama no quadro

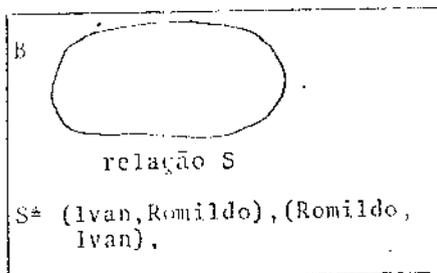


40-P.M. Professora lendo.

41-P.M. Professora escrevendo no quadro:

$$S = \{$$

42-CLOSE Quadro. Mão da professora acompanhado no diagrama cada flecha citada e escrevendo, em seguida o par correspondente:



43-CLOSE Conjunto escrito no quadro:

$$S = \{ (Ivan, Romildo), (Romildo, Ivan), (Vânia, Zélia), (Zélia, Vânia), (Roberto, Heloisa), (Heloisa, Roberto); (Ivonete, Marly), (Marly, Ivonete), (Claudia, Vera), (Vera, Claudia) \}$$

Professora mostrando.

44-Duas professoras à mesa,

PROFa(OFF): No diagrama fica visível o que já tínhamos respondido, que o conjunto de chegada é o próprio conjunto de partida, por isso as flechas, tem origem e extremidade no interior da fronteira de B.

PROFa: Número 5. Escreva o conjunto de pares ordenados da relação S.

PROFa: Como vocês já fizeram aí nos cadernos, abre-se a chave... e do próprio diagrama vou tirando os pares ordenados.

PROFa(OFF): Cada flecha corresponde a um par ordenado. O elemento que está na origem da flecha será o primeiro termo ou o antecedente do par ordenado, e o elemento que está na extremidade da flecha será o segundo termo ou consequente. O consequente é a imagem do antecedente.

Ivan - Romildo

Romildo - Ivan.

PROFa(OFF): Os pares ordenados são os elementos do conjunto S. Nós já sabemos que, em Matemática, uma relação é um conjunto de pares ordenados.

Assim, podemos responder à sexta questão: "S tem quantos elementos?" contando os pares ordenados, que são ...

ALUNOS(OFF): Dez.

PROFa(OFF): Logo, S tem quantos elementos?

ALUNOS(OFF): 10 elementos.

DIVA: Aproveitei a oportunidade para lembrar a definição matemática de Relação, e frisar que um par ordenado constitui um elemento do conjunto-relação, pois contar cada termo do par como um elemento da relação é um erro comum.

questão 5. com muita cuidado para que fique

claro que um par representa um só elemento, apesar de ser composto de dois termos.

DIVA: Por isso frisei esse detalhe, assim como recordei que, em matemática, uma Relação é um conjunto de pares ordenados. Mas, como se tratasse de assunto anteriormente estudado e não surgisse nenhum questionamento a respeito, não insisti para não desviar desnecessariamente a atenção do tema central.

CONCEIÇÃO: Gostei da sua chamada sobre a equivalência da flecha e do par ordenado.

DIVA: É sempre bom estabelecer um paralelo entre as diferentes formas de representação. Favorece a compreensão global.

CONCEIÇÃO: Com a pergunta seguinte você aponta a igualdade entre o número de elementos da relação e o número de elementos do conjunto em que ela é definida.

DIVA: Eles acabarão verificando que tal igualdade se verifica em toda bijeção.

45-CLOSE Conjunto B escrito no quadro.

PROF^a(OFF): E o conjunto em ^{que} S é definida? Quantos elementos possui?

ALUNOS(OFF): Dez.

46-CLOSE Quadros da Professora mostra.

PROF^a(OFF): Quantas vezes cada elemento de B figura como imagem em S?

ALUNOS(OFF): Uma.

PROF^a(OFF): e como antecedente?

ALUNOS(OFF): Uma.

47-P.M. Prof^a diante do quadro, mostrando.

PROF^a: Resumindo, a relação S tem 10 elementos, assim como o conjunto em que ela é definida. Cada elemento de B figura uma única vez como antecedente e uma única vez como imagem. O que significa que temos 10 antecedentes diferentes entre si e dez imagens diferentes entre si.

48-CLOSE Diagrama sagital de S. Mão da professora mostra.

PROF^a(OFF): O diagrama mostra bem isto. Temos 10 elementos e 10 flechas. De cada ponto parte uma flecha e somente uma e a cada ponto chega uma flecha e somente uma.

R que estudamos anteriormente , todo elemento do conjunto de partida tem uma imagem e somente uma e todo elemento do conjunto chegada é imagem de um elemento e somente um.

49-duas professoras sentadas à mesa.

DIVA: Como você viu nesta 2ª situação nos detivemos mais na sistematização.

CONCEIÇÃO: Você explorou essas duas situações na mesma aula?

DIVA: Não me lembro bem, acho que sim, mas o tempo dispendido com as mesmas atividades varia de turma para turma. Numa os alunos são mais lentos na execução das tarefas , noutra fazem mais perguntas prolongando os debates...

CONCEIÇÃO: A mesma turma, varia de comportamento de um dia para outro.

O planejamento deve ser flexível sob todos os aspectos.

50- Apresentador

APRESENTADOR:

PROGRAMA: Proposta de solução para atualização dos professores da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, em Matemática

MÓDULO 1: Bijecção

TÍTULO : Introdução ao conceito de Bijecção: ATIVIDADE 3.

DURAÇÃO : 25 min.

 VÍDEO

 ÁUDIO

01- P.E. Apresentador

APRESENTADOR: Acompanharemos hoje o desenvolvimento da 3ª atividade proposta pela Professora Diva e seus alunos, ainda com o objetivo de construir o conceito de bijecção.

Esta 3ª atividade incide sobre uma situação imaginária, mas familiar aos alunos a que se destina.

Tanto o relato da situação, como as instruções a serem seguidas pelos alunos lidos são apresentadas através de texto mimeografado.

02- Apresentador mostra 9 chapéus de cartolina e 9 chaveiros.

Junto com o texto, cada grupo de quatro alunos recebe nove chapéus de cartolina e nove chaveiros, material que servirá de suporte concreto para suas conclusões.

03- P.A. Professora, folha na mão, diante das carteiras dos alunos.

(Carteiras agrupadas para que os alunos trabalhem em grupos de 4)

PROFª: Hoje vocês vão trabalhar em grupos de 4, seguindo as instruções que estão nesta folha.

Façam uma primeira leitura de todo o texto, e depois voltem a ler item por item para executar as tarefas.

04- Apresentador

APRESENTADOR: O texto que os alunos estão lendo é o seguinte:

05- CLOSE DO TEXTO

APRESENTADOR(OFF): João tem 8 convidados para seu aniversário: Tereza, Vanessa, Gabriela, Flávio, Mauro, Henrique, Paulo e André.

- 06- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): Para enfeitar a mesa e marcar os lugares, sua mãe fez chapéus on de colou as iniciais de João e de seus amigos. Querendo que todos guardassem uma pequena lembrança deste dia, preparou uma surpresa, mandou fazer para cada um, um chaveiro com seu nome e a data comemorada.
- 07- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 1. Quantos chaveiros precisou encomendar?
- 08- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 2. Ajuda a mãe de João a arrumar a mesa escondendo um chaveiro embaixo de cada chapéu.
- 09- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 3. Faça um diagrama de de flechas da relação "... esconde ..." de finida do conjunto de chapéus para o conjunto de chaveiros.
- 10- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 4. O que pode observar no diagrama?
- 11- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 5. Quantos pontos você marcou em cada conjunto?
- 12- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 6. Quantas flechas partem de cada ponto do conjunto dos chapéus?
- 13- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 7. Quantas flechas chegam a cada ponto do conjunto de chaveiros?
- 14- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 8. Quantas flechas você traçou?
- 15- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 9. Defina em extensão a relação estabelecida.
- 16- CLOSE DO TEXTO
- APRESENTADOR(OFF): 10. Quantos elementos há neste conjunto?

17- Duas professoras sentadas à mesa. Sobre a mesa 9 chapéus e 9 chaveiros.

DIVA: Antes de tentar concluir o que é bijeção, propuz aos alunos uma 3ª atividade, desta vez, partindo de uma situação imaginária.

CONCEIÇÃO: Mas você não defende a ideia de que o conceito deve ser construído a partir de situações concretas?

DIVA: Claro . . . Mas embora imaginária, a situação é familiar a crianças dessa idade, e, além disso, eles tinham um apoio concreto.

18- CLOSE dos 9 chapéus e 9 chaveiros.

DIVA: Cada grupo recebeu um material semelhante a este aqui: 9 chapéus, cada um com a inicial de um dos personagens da estória e 9 chaveiros de papel cartão, cada um com o nome de um destes personagens.

19- P.M. Duas professoras sentadas à mesa.

CONCEIÇÃO: Você não podia ter contado a estória e feito as perguntas, oralmente? Não daria menos trabalho?

DIVA: Redigir as instruções em linguagem acessível, e mimeografá-las, dá um pouco mais de trabalho, mas, em compensação, o desenvolvimento da aula fica mais tranquilo. Mas, o que me levou a dar todas as instruções por escrito, foi a necessidade de desenvolver nos alunos autonomia de leitura, a capacidade de interpretar o que leem. Você vai ver como eles têm dificuldade de seguir as instruções contidas no texto, apesar da linguagem simples nele utilizada.

20- P.A. de um grupo de alunos

ALUNO:(do grupo focalizado): Professora, o que é pra fazer com estes chapéus?

PROF*(OFF): Faz o que eu disse? Leia tudo uma vez, depois leia o 1º item, discuta com seus colegas e responda. Todos do grupo já leram?

ALUNOS DO GRUPO : Já.

- 21- P.A. Profª chegando junto ao grupo o grupo.
- PROFESSORA: Então, discutam entre vocês. Só apelem p'ra mim se realmente não conseguirem resolver sozinhos.
- 22- P.A. de outro grupo de alunas
- ALUNA(do grupo focalizado): Profª ! Preciso desenhar os chapéus e os chaveiros?
- 23- P.A. Profª chegando junto ao grupo o grupo.
- PROFª: Júlia, quando você faz um diagrama, o que representa os elementos do conjunto neste diagrama?
- ALUNA: Os pontos.
- PROFª: Então? Você precisa desenhar pontos. Agora, se lhe interessa identificar cada ponto, você identifica de forma mais simples. No caso aí, o que você acha que é suficiente para identificar os chaveiros?
- ALUNA: Os nomes .
- OUTRO ALUNO DO GRUPO: As letras .
- PROFª: Os nomes ou as iniciais dos nomes, tanto faz. O importante aí não é a letra ou o nome, a letra serve para identificar que chaveiro o ponto está representando. Você não vai associar qualquer chapéu a qualquer chaveiro, vai?
- ALUNA: Não.
- PROFª: Então? Você precisa indicar qual é o chaveiro e não há necessidade de desenhá-lo para isso. Mas se quiser desenhar pode.
- 24- Profª junto a outro grupo, observando o que os alunos estão escrevendo e tempo das carteiras.
- PROFª: Roberto, me explique seu diagrama.
- 25- Roberto mostrando sua folha de exercício.
- ROBERTO: Olha só. Relação esconde o chaveiro. O chaveiro do Paulo, o do João...



26- CLOSE do diagrama de Roberto.

PROFA: Quantos conjuntos são, Roberto?

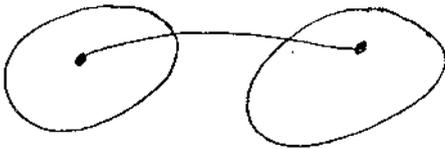
ROBERTO: Um conjunto, profa, um conjunto.

PROFA: É ? !!

27- P.M. Roberto mostrando o material sobre a mesa.

ROBERTO: Ah! São dois, dos chapéus e dos chaveiros, são dois.

28- Roberto falando e desenhando



ROBERTO: Então eu vou fazer um chapéu com um chaveiro, um chaveiro com um chapéu.

PROFA(OFF): Um chapéu com um chaveiro e um chaveiro com um chapéu?... Tu é só um chapéu com um chaveiro ?

ROBERTO: Um chapéu com um chaveiro.

PROFA: Por que?

29- Roberto levantando um chapéu, deixando ver o chaveiro embaixo.

ROBERTO: Porque o chapéu esconde o chaveiro.

30- Professora e Roberto.

PROFA: Ah ! Então, agora, continue. Mas pensando no que está fazendo, sim Roberto?

31- Outro grupo de 4 alunos

ALUNO-RICARDO: Professora. Chega aqui, por favor?

32- Professora chegando junto ao grupo do 14.

PROFA: O que é, Ricardo?

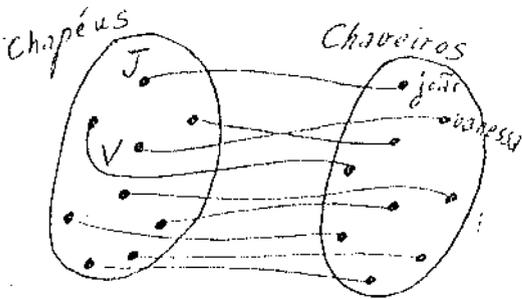
33- Aluno-Ricardo mostrando sua folha de exercícios.

ALUNO-RICARDO: É assim o diagrama de flechas?

PROFA: Me explique o seu diagrama.

34- CLOSE Diagrama de flecha na folha do aluno. Mão do aluno indicando o que diz.

ALUNO-RICARDO: Aqui é o conjunto dos chapéus ... aqui o conjunto dos chaveiros... o chapéu com J esconde o chaveiro do João, o chapéu com V esconde o chaveiro da Vanessa ... cada chapéu esconde um chaveiro.



PROFª(UFF): Qual é o conjunto de partida neste diagrama?

ALUNO-RICARDO: O dos chapéus.

PROFª(UFF): Você acha que olhando o diagrama, sem perguntar a você, eu saberia isso?

ALUNO-RICARDO: Não vem primeiro?!

PROFª(UFF): Você quer dizer que o conjunto dos chapéus é a partida da relação por que está à esquerda do conjunto dos chaveiros?

ALUNO-RICARDO: É isso aí.

35- Aluno-Ricardo e Professora.

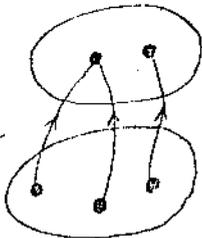
PROFª: Por que?

ALUNO-RICARDO: Não é assim que se escreve o crevo?

36- Professora desenhando.

PROFª: É assim que se escreve um parágrafo, mas o diagrama de flechas constitui uma outra linguagem com suas próprias convenções. Posso inclusive colocar um conjunto em cima e o outro abaixo.

37- CLOSE do diagrama abaixo:



PROFª(UFF): Qual é a partida da relação representada por esse diagrama?

ALUNO-RICARDO(UFF): O de baixo.

PROFª(UFF): Como você descobriu?

ALUNO-RICARDO(UFF): Pela flecha.

PROFª(UFF): Pelo sentido das flechas.

38- CLOSE do diagrama do 34 e mão do aluno indicando.

ALUNO-RICARDO: Então eu preciso por flechas nesse diagrama.

PROFª(UFF): Se você desenhar flechas, em vez de linhas, ligando dois pontos, qualquer pessoa pode identificar a partida e a chegada.

39- Duas professoras sentadas à mesa.

CONCEIÇÃO: Você tinha razão quanto à leitura. Aquele menino não sabia nem por onde começar.

DIVA: É consequência da falta de hábito de ler. E, então, eles tentam levar o professor a interpretar as instruções para eles.

CONCEIÇÃO: E se o professor cede, essa deficiência só tende a se acentuar.

DIVA: Aquela grupo, finalmente, resolveu todos os itens sem voltar a me pedir ajuda, o que mostra que com um pouco de esforço são capazes de entender o texto e executar as tarefas sozinho.

CONCEIÇÃO: Também notei que, apesar de todas as observações feitas anteriormente sobre o diagrama sagital, ainda surgiram dúvidas a respeito. Aquela aluna achava necessário desenhar os chaveiros.

DIVA: Você vê que as explicações dadas o propósito da construção do diagrama da primeira atividade não eram demais. É comum quererem representar os elementos do conjunto por desenhos; quando a ideia é justamente representá-los por pontos, fazendo abstração de forma, cor, etc.

CONCEIÇÃO: Curioso foi o diagrama construído inicialmente pelo Roberto, que colocou os chaveiros e os chapéus como elementos de um só conjunto.

DIVA: Realmente, as soluções mais inusitadas podem aparecer. O importante é não dizer simplesmente que está errado, e sim fazer perguntas, pedir explicações, até que o próprio aluno conclua que se enganou e encontre uma resposta certa.

CONCEIÇÃO: Como você fez com o Ricardo, para que ele sentisse a necessidade do sentido das flechas.

- 40- Carteirac do primeiro grupo, sobre as quais estão arrumados os 9 chapéus e os 9 chaveiros.
- ALBANI: Já acabamos.
- PROFª(DEF): Vamos ver o que vocês fizeram.
- 41- Mão da professora levantando um dos chapéus sobre as carteirac.
- PROFª: Muito bem, embaixo de cada chapéu vocês puseram um chaveiro... Se são 9 chapéus, devemos ter 9 chaveiros. A primeira resposta está certa.
- 42- CLOSE. Diagrama sagital e mão da professora apontando os detalhes que esta menciona.
- PROFª: Temos aqui representados os 9 chapéus e aqui os 9 chaveiros. Do chapéu que marca o lugar de Vanessa parte uma flecha para o chaveiro com o nome "VANESSA", do chapéu com um "F" parte uma flecha para o chaveiro escrito "FLÁVIO"... Enfim, de cada ponto do conjunto de chapéus parte uma e somente uma flecha e a cada ponto do conjunto de chaveiros chega uma e somente uma flecha. Logo, como temos 9 chapéus e 9 chaveiros, temos também 9 flechas.
- 43- CLOSE de conjunto-relação:
- PROFª: O conjunto relação também tem 9 elementos, o que é normal, pois cada par ordenado corresponde a uma flecha do diagrama sagital.
- Es $\{(V, \text{vanessa}), (P, \text{paulo}), (F, \text{flávio}), (A, \text{andré}), (J, \text{joão}), (M, \text{mauro}), (G, \text{gabriela}), (H, \text{henrique}), (T, \text{tereza})\}$
- 44- Duas professoras sentadas à mesa.
- DIVA: Assim fui de grupo em grupo verificando e discutindo as respostas dadas nas deixelas do item 4—"O que pode observar no diagrama?"—para serem lidas em voz alta pelo relator de cada grupo e debatidas por toda a turma, já que se tratava de uma questão aberta.
- CONCEIÇÃO: O que você chama de questão aberta ?
- DIVA: Chamo de questão aberta, uma questão que, como esta, admite várias respostas, em contraposição a questões fechadas como—"Quantos pontos você marcou em cada conjunto?"— que só admite uma resposta — "9".

CONCEIÇÃO: Eu não conhecia esta nomenclatura.

DIVA: E é muito importante propor aos alunos problemas abertos, questões abertas, pois elas permitem a manifestação individual do aluno, exigindo mais envolvimento de sua parte e propiciando maior riqueza de respostas.

CONCEIÇÃO: E surgirão observações interessantes?

DIVA: Você mesma pode julgar...

45- Professora andando entre as carteiras.

PROFª: Agora que todos os grupos terminaram vamos verificar o que mais vocês observaram no diagrama. Eu sugiro que cada um anote as observações diferentes das suas, pois podem ser úteis mais tarde.

46- Aluna-Vera

ALUNA-VERA: Eu observei que cada chapéu é ligado a um chaveiro.

PROFª(OFF): Muito bem, Vera. Mais alguma observação?

ALUNA-VERA: Não. O resto está nas outras perguntas.

47- Aluno-Ricardo

ALUNO-RICARDO: Eu observei que o número de chapéus é igual ao número de chaveiros

PROFª(OFF): Certo. E o que mais?

48- P.M. Aluna-Heloisa

ALUNA-HELOISA: Eu respondi que cada chapéu está escondendo um chaveiro.

PROFª(OFF): Como você viu isto, Heloisa?

ALUNA-HELOISA: Não tem uma flecha de cada chapéu para um chaveiro? Então cada chapéu esconde um chaveiro.

PROFA(OFF): Como você viu isto, Heloisa?

ALUNA-HELOISA: Não tem uma flecha de cada chapéu para um chaveiro? Então cada chapéu esconde um chaveiro.

49- CLOSE dos chapéus e diagrama sobre a mesa da aluna.
Ação da professora mostrando.

PROFA: É isso aí. Você percebeu que a sua resposta é equivalente à da Vera? Ela disse que cada chapéu está ligada a um chaveiro e isto aconteceu porque na atividade concreta, cada chapéu esconde um chaveiro, e a flecha que liga o chapéu ao chaveiro nesta relação está dizendo "esconde".

50- P.E. Aluna-Vânia

ALUNA-VÂNIA: Profa, eu observei que cada chapéu esconde um e apenas um chaveiro—que cada chaveiro figura como imagem apenas uma vez—e que cada chapéu só figura como antecedente uma vez.

PROFA: Muito bem Vânia, tudo isto é visível no diagrama. Você quer repetir a sua primeira observação?

ALUNA-VÂNIA: Cada chapéu esconde um e apenas um chaveiro.

51- P.E. Professora.

PROFA: Vocês repararam que a Vânia diz "esconde um e apenas um chaveiro?" É uma resposta mais precisa que a da Heloisa que diz "esconde um chaveiro".

52- Aluno Ivan.

ALUNO IVAN: Mas é a mesma coisa.

53- P.E. Sala de aula
-alunos e professora.

PROFA: Eu acho que elas quiseram dizer a mesma coisa, Ivan, mas será que é exatamente o mesmo? Eu digo a você: "Eu tenho uma bolsa" e é verdade ela está aqui. Mas, se amanhã eu venho com outra bolsa você vai dizer que eu menti?

ALUNO-IVAN: Não, mas ...

PROFA: Pois é. Você só poderia dizer que eu menti se eu tivesse dito: "Eu tenho uma bolsa e apenas uma" ou "uma só bolsa". Percebeu a diferença?

ALUNO-IVAN: É, é diferente.

PROFª: Eu aceitei a resposta da Heloísa, assim como a da Vera, porque elas são verdadeiras e foi o que elas observaram, mas quanto mais precisas forem as respostas que vocês derem, melhor. E, particularmente em matemática, a precisão é muito importante.

Bem..., alguém tem alguma observação diferente das que já foram citadas?

ALUNOS: Não.

54- Duas professoras sentadas à mesa.

DIVA: As observações feitas levaram praticamente à caracterização de bijeção.

CONCEIÇÃO: É, e eu notei que você aceitou mesmo as respostas menos precisas como as da Vera e da Heloísa.

DIVA: Não se pode esperar que alunos dessa idade se expressem com rigor matemático, o que não quer dizer que não se aproveite a oportunidade para mostrar a imprecisão de suas colocações.

CONCEIÇÃO: Para o Ivan, um era equivalente a um e apenas um.

DIVA: Realmente não é fácil estabelecer a diferença. Na linguagem usual não há a preocupação com a precisão exigida em Matemática, e para que sintam a necessidade desse rigor só mesmo apelando para o contra-exemplo, como fiz com a bolsa.

CONCEIÇÃO: Você propôs outras situações antes de formalizar o conceito de bijeção?

DIVA: Não. Pelas respostas obtidas, achei que os alunos já estavam aptos a explicitar o conceito implícito nas situações analisadas. Pedi, então, que levassem na aula seguinte todo o material resultante dessas análises—diagramas, exercícios, etc.—para, por comparação, definirmos bijeção.

55- P.M.F. Apresentador: APRESENTADOR: No próximo programa veremos como os alunos chegam à definição da SIJECÃO.

Antes de assisti-lo, o professor que acompanha nossas aulas poderá planejar uma atividade com o mesmo objetivo e compará-la com a que vamos apresentar.

PROGRAMA : Proposta de solução para atualização dos professores da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, em Matemática.

MÓDULO 1 ; Bijeção.

TÍTULO : Definição de bijeção : EXERCÍCIO 1

DURAÇÃO : 25 min

VÍDEO

ÁUDIO

01- P.M.F. Apresentador

APRESENTADOR: Dando prosseguimento ao processo de construção do conceito de bijeção, os alunos, na aula de hoje, identificam as características comuns às relações anteriormente analisadas, chegando à definição de bijeção.

02- P.G. da sala de aula.

Alunos em carteiras (agrupadas de 4 em 4) - professora distribuindo folhas mimeografadas - um aluno afixando, com percevejos, no quadro-mural os diagramas sagitais das 3 relações trabalhadas nas aulas anteriores, reproduzidos em folhas de cartolina.

PROFA (OFF): O Francisco está colocando no quadro os diagramas sagitais das três relações que nós trabalhamos até agora. Vocês vão preencher a tabela que está nesta folha, com os dados dessas relações. Já sabem que devem ler as questões com atenção, discutir com os colegas do grupo o que for necessário e depois então, responder.

03- CLOSE dos 3 diagramas

04- Diva e Conceição sentadas à mesa

DIVA: A tabela que peço para preencherem é esta aqui:

-CLOSE da tabela do exercício I

Na primeira coluna vem o nome da relação; na 2ª, o número de elementos do conjunto de partida; na 3ª, o número de elementos do conjunto de chegada, na 4ª, o número de flechas; na 5ª o número de imagens de cada elemento da partida e na 6ª, o número de antecedentes de cada elemento da chegada.

05- Conceição e Diva olhando a tabela sobre a mesa,

CONCEIÇÃO: Aqui você enfatiza as semelhanças entre as relações estuda - das.

DIVA: Você que é professora de *Matemática* viu logo isso, mas para os alunos achei que não seria tão evi-dente. Fiz algumas perguntas sobre os dados preenchidos para destacar ainda mais as características comuns a es - sas relações.

06- CLOSE do texto:

2. Compare as colunas 2,3 e 4. O que pode constatar? O que significa e que observou, em termos de relação?

DIVA(OFF): Compare as colunas 2,3 e 4. O que pode constatar? O que significa e que observou, em termos de relação?

07- CLOSE do texto:

3. O que pode observar na colu - na 5?

DIVA(OFF): Depois: O que pode obser - var na coluna 5?

08- CLOSE do texto:

4. O que pode observar na colu - na 6?

DIVA(OFF): O que pode observar na coluna 6?

09- CLOSE do texto:

5. Quais as semelhanças e quais as diferenças que você encontrou entre os 3 diagramas?

DIVA(OFF): E, finalmente: Quais as diferenças e quais as semelhanças que você encontrou entre os 3 diagramas?

10- Diva e Conceição sentadas à mesa.

CONCEIÇÃO: Respondendo a estas pergun - tas, os alunos chegaram à definição de bijeção?

DIVA: Não foi assim tão imediato. Quan - do vi que tinham terminado o exercí - cio...

11- P.A. Professora com folha de exer - cícios na mão, alunos nas carteiras.

PROFª: Vamos ler as conclusões, então?

ALUNOS: Vamos.

12- CLOSE Quadro mural com 3 diagramas de flechas afixados.

PROFª(OFF): Seguindo a ordem dos diagramas afixados no quadro mural, na 1ª linha temos a relação S. Quem ordenou de outra forma, atenção para não se enganar na correção.

13- CLOSE Relação S no quadro mural.
Mão da profª mostrando.

PROFª(OFF) Relação S: 10 elementos no conjunto de partida ...

14- CLOSE Mesas de um grupo.
Folhas do exercício 1 sobre as mesas.

ALUNOS: 10 elementos no conjunto de chegada, 10 flechas.

ZOOM INU P/

15- CLOSE Duas primeiras linhas da tabela (preenchida) sobre a mesa.

PROFª(OFF): Cada elemento da partida tem quantas imagens?

ALUNO(OFF): Uma (bem nítida).

PROFª(OFF): E cada elemento da chegada da ...

ALUNOS(OFF): tem um antecedente.

16- CLOSE Diagrama de flechas da relação R.
Mão da profª mostrando

PROFª(OFF): Relação R, definida do conjunto de alunos, para o conjunto de carteiras.

ALUNOS(OFF): 27 elementos no conjunto de partida - 27 elementos no conjunto de chegada - 27 flechas - uma imagem para cada elemento da partida e um antecedente para cada elemento da chegada.

17- CLOSE Três primeiras linhas da tabela

PROFª(OFF) Relação E, definida do conjunto de chapéus para o conjunto de chaveiros.

ALUNOS(OFF): 9 chapéus no conjunto de partida - 9 chaveiros no conjunto de chegada - uma imagem para cada chapéu - um antecedente para cada chaveiro.

18- CLOSE Diagrama da relação E e mão da professora mostrando.

19- CLOSE Tabela preenchida..

PROFª(OFF): Quanto ao preenchimento

- dificuldade. Vamos ver as outras, que recae sobre esses dados.
- 20- CLUSE Colunas 2,3 e 4 da tabela.
- PROFª(UFF): Ítem 2: compare as colunas 2, 3 e 4. O que pode constatar?
- 21- P.G. Alunos
- PROFª(UFF): LE do Socorro! Você contatou alguma coisa?
- 22- P.R. Aluna #8 do Socorro.
- ALUNA-SOCORRO: Que elas são semelhantes. Porque o número da partida, o número de chegada e o número de flechas são iguais.
- 23- CLUSE Colunas 2, 3 e 4 da tabela. Lã do professor mostrando cada coluna.
- PROFª(UFF): Você quer dizer que o número de elementos do conjunto de partida, o número de elementos do conjunto de chegada e o número de flechas, de cada relação, são iguais.
- 24- P.R. Alunos.
- ALUNOS: É! !
- PROFª(UFF): É. Olhando a coluna 2, a coluna 3 e a coluna 4, vemos que elas são iguais. Elas não são apenas similhanças, elas são ...
- ALUNOS: Iguais!
- 25- P.R. Profª com folha de exercícios na mão.
- PROFª: Você concorda, Socorro? que números você tem na coluna 2? Leia a sua coluna 2.
- 26- P.R. Aluna- Socorro lendo.
- ALUNA-SOCORRO: O número de elementos do conjunto-partida, 10, 27, e 9.
- 27- CLUSE Coluna 2, 3, e 4 da tabela.
- PROFª(UFF): 10, 27 e 9. Na coluna 3 você tem: 10, 27 e 9 e na 4 também, 10, 27 e 9. Então elas não são "semelhantes" basta olhar para verificar que elas são iguais. Como consequência dessa igualdade, podemos concluir que em cada relação, o número de elementos do conjunto de partida ...

28- P.G. Alunos

ALUNOS: ... é igual ao número de elementos do conjunto de chegada, é igual ao número de flechas.

29- Professora junto ao quadro mural mostrando nos diagramas o que cita.

PROFA. Realmente, quando estudamos estas 3 relações, tínhamos observado que em cada uma delas, todo elemento do conjunto de partida tem como imagem um elemento e somente um do conjunto de chegada, o que significa que de cada elemento parte uma flecha e apenas uma. Ora, se são 27 elementos na partida da relação R, por exemplo, e cada um tem um elemento por imagem de cada ponto deve partir uma flecha. São 27 pontos, partem 27 flechas, logo só podem "chegar", 27. Como a cada ponto "chega" uma flecha e somente uma, devemos ter também 27 elementos no conjunto -chegada. A sua resposta está bem coerente com o que tínhamos visto anteriormente e creio que é tudo que podemos concluir até aqui..

30- Duas professoras sentadas à mesa.

CONCEIÇÃO: Todos preencheram a tabela corretamente?

DIVA: Todos os grupos. Percorrendo a sala enquanto os alunos resolviam o exercício, vi que alguns, mais apressadinhos, colocaram 10, 27 e 9 nas colunas 5 e 6, mas os próprios colegas do grupo se encarregaram de assinalar que se pedia o número de cada elemento e não da relação toda.

CONCEIÇÃO: Você atribui os poucos enganos constatados à falta de atenção na leitura ?

DIVA: Pelo tipo de discussão que ouvi acho que posso concluir que sim. Mesmo porque não se trate de tarefa difícil, a idéia é mesmo que não seja, o maior interesse não está no preenchimento da tabela e sim nas conclusões que se pode tirar dos aí reunidos. E de modo geral, procuro sem

pre dosar o nível de dificuldade das atividades à capacidade dos alunos que vão desenvolvê-las, de modo que não sejam tão fáceis que não exijam nenhum esforço de sua parte, nem tão difíceis que representem um obstáculo intransponível.

CONCEIÇÃO: Há um outro ponto que me deixou intrigada. Quando uma aluna disse que as colunas 2, 3 e 4 são semelhantes você contrapôs que não são apenas semelhantes, são iguais.

O que você chama de colunas semelhantes?

DIVA: Eu não chamo. A aluna foi quem chamou, e não creio que querendo emprestar nenhum significado matemático ao termo.. Ela deve ter usado semelhante com o sentido de parecido, quase igual, e eu precisei que essas sequências numéricas são iguais.

CONCEIÇÃO: Você com esta observação está querendo alertar para o fato de que a igualdade do número de elementos de dois conjuntos é condição necessária para que se possa estabelecer uma bijeção entre eles?

DIVA: Exatamente. E mais, que eles concluíam que em consequência das características que poderemos tirar dos valores das colunas 5 e 6, uma bijeção terá sempre o mesmo número de elementos que esses conjuntos. E de modo geral procuro sempre dosar o nível de dificuldade das atividades à capacidade dos alunos que vão desenvolvê-las, de modo que não sejam tão fáceis que não exijam nenhum esforço de sua parte, nem tão difíceis que representem um obstáculo intransponível.

- 31- P.E. Professora com folha de exercícios na mão. PROFª: O que pode observar na coluna 5? Roberto !
- 32- P.G. Alunos. (SILÊNCIO)
- 33- CLOSE da coluna 5 da tabela. PROFª(OFF): Olhe para a coluna 5. O que você vê? !
- 34- P.E. Aluna-Vânia. ALUNA-VÂNIA: Todos os elementos da coluna são iguais.
 PROFª(OFF): O que mais?
- 35- P.E. Aluno-Roberto. ALUNO-ROBERTO: O mesmo número de imagens.
 PROFª(OFF): O mesmo número de imagens?
 ALUNO-ROBERTO: Cada elemento tem uma só.
 PROFª(OFF): Cada elemento tem uma só imagem em todas essas relações. Na verdade, cada elemento tem uma imagem e somente uma, nessas relações.
- 36- CLOSE Colunas 5 e 6 da tabela. PROFª(OFF): A coluna 5 e a coluna 6 são preenchidas com o número?...
 ALUNOS(OFF): Com o número "1".
 PROFª(OFF): O que significa isso?
- 37- Aluno Romildo ALUNO-ROMILDO: Nas tres relações cada elemento figura uma só vez.

38- P.S. Sala de aula, profes-
sora e alunos.

PROFª (Pausado): Todo elemento da par-
tida tem por imagem um elemento da che-
gada e somente um, e todo elemento da
chegada, é imagem de um elemento da
partida e de somente um. Então, nessas
três relações, há uma correspondência
um a um, entre os elementos do conjun-
to de partida e os elementos do conjun-
to de chegada.

UM ALUNO: Uma correspondência única !

39- P.M. Professora diante do quadro
de giz.

PROFª: Então, agora, vamos aprender um
termo que, suponho, é novo para vocês.

40- Professora escrevendo no quadro

BIJEÇÃO

PROFª: Quando uma relação apresenta as
características que acabamos de assi-
gnalar nessas 3 relações, ela é chamada
BI-JE-ÇÃO.

ALUNOS(CFF) : BI-JE-ÇÃO.

PROFª: Ou dizemos que a relação é bije-
tora. Uma relação bijetora ou uma bije-
ção.

41- Duas professoras sentadas à mesa.

CONCEIÇÃO: O termo bijetora só foi apre-
sentado depois de construído o conceito.
Achei isso positivo, desse modo a nomen-
clatura matemática tem um significado
para o aluno, não se tornando um conjun-
to de palavras vazias.

DIVA: f , a primeira preocupação é ter o
conceito assimilado. Só depois de veri-
ficar que havia consenso sobre que ca-
racterísticas eram relevantes nas rela-
ções estudadas, dei um "nome" a estas
relações.

Mesmo assim, acho que não doi-
xpi bem claro o que chamamos de bije-
ção, porque ...

42- Professora diante do quadro onde
se lê: BIJEÇÃO

PROFª: O que é uma bijeção?

ALUNO-IVAN: É uma relação.

PROFª: Qualquer uma?

43- Alunos

ALUNA-VÂNIA: Não, quando um elemento figura mais de uma vez como imagem.

44- Alunos e professora. (pelo menos "Vânia" e a professora)

PROFª: Figura mais de uma vez, Vânia? Foi isso que nós concluímos? É que nós vimos nessas três relações?

45- Quadro mural com as 3 relações e professora mostrando.

PROFª: Então? Essas três relações são bijeções.

46- ALUNA-Vânia.

ALUNA-VÂNIA: Ah, bom! Eu entendi que quando a relação não é assim é que se chama bijeção.

47- P.G. Professora e alunos.

PROFª: Não, Vânia, eu disse "Quando isso ocorre numa relação, nós lhe damos o nome de bijeção!"

Então o que é uma bijeção para nós?

Nós chamamos qualquer relação de bijeção?

ALUNOS: Não.

ALUNA-VÂNIA: É quando cada elemento da partida tem uma só imagem.

PROFª: Bijeção é uma relação em que cada elemento do conjunto de partida tem uma imagem e somente uma no conjunto de chegada. Mas é só isso?

ALUNO: Não! Precisa também cada elemento da chegada ser imagem de um elemento e somente um, da partida.

PROFª: Então, bijeção é uma relação onde todo elemento do conjunto de partida tem por imagem um elemento e somente um e, todo elemento do conjunto de chegada é imagem de um elemento e somente um. Agora está claro para todos o que é bijeção?

ALUNOS: Está!

40- Professora com um maço de folhas mimeografadas nas mãos.

PROFª: Então eu vou dar para vocês essas folhas, onde temos várias relações. Vocês vão identificar quais as que são bijeções e quais as que não são. E dizer como identificaram. Isto é, vocês vão explicar o que, em cada relação, mostrou se ela é ou não uma bijeção.

41- Duas professoras sentadas à mesa.

CONCEIÇÃO: A Vânia entendeu o aspecto de que você disse.

DIVA: É muito comum o aluno não entender ou nem prestar atenção ao que lhe é dito, se ele mesmo conclui e diz já é diferente.

CONCEIÇÃO: Mas no caso se tratava de uma denominação universal. Como as alunas chegarão lá? Adivinhando?

DIVA: Eu poderia ter pedido que elas procurassem um nome adequado a esse tipo de relação e depois dizer que já existe um usado universalmente.

CONCEIÇÃO: Nesse caso, acho que não foi bem por isso que ela fez confusão. Você poderia ter usado uma linguagem mais simples, em vez de dizer "vocês aprender um termo novo, superior, é novo para vocês" dizer simplesmente, "vamos dar um nome a este tipo de relação" expressão que você usou ainda há pouco, falando comigo.

DIVA: Você tem razão. E eu poderia talvez ter frisado: R é um bijeção, S é um bijeção e E é uma bijeção.

CONCEIÇÃO: De todo modo, a aluna se referia apenas à parte do conceito relativa ao conjunto de partida.

DIVA: Mesmo tendo entendido, nem sempre o aluno sabe verbalizar, definir um conceito.

Deve-se estimulá-lo a se expressar com clareza e precisão, mostrando as falhas ou dúvidas decorrentes de sua

colocação, mas não pretender que ele o faça desde o início.

CONCEIÇÃO: Mas se o aluno não consegue definir corretamente, como você pode ter certeza de que o conceito está bem compreendido?

DIVA: Para verificar se o conceito estava assimilado foi que dei o exercício 2 onde eles deveriam identificar, entre 12 relações apresentadas, as bijeções.

50- P.M.F. Apresentador

APRESENTADOR: No próximo programa acompanhemos a correção do exercício 2, que a professora propôs ao aluno e veremos como ela utiliza as justificativas apresentadas para definir função.

Elabore você também uma série de relações, definidas a partir de situações familiares a seus alunos, incluindo nessa série, relações bijetoras e não bijetoras.

PROGRAMA: Proposta de solução para atualização dos professores de Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, em Matemática.

MÓDULO 2: Função.

TÍTULO : Definição de função

DURAÇÃO : 25 min.

VÍDEO	ÁUDIO
01- P.M.F. Apresentador	<p>APRESENTADOR: Na aula que assistiremos hoje, a professora inicialmente verifica a resolução do exercício 2. O primeiro objetivo deste exercício é avaliar a aquisição do conceito de bijeção, pelos alunos. Ele visa também, desenvolver nos alunos, o hábito de justificar as próprias conclusões.</p> <p>No exercício 2, os alunos encontram a descrição de 12 situações, a partir das quais foram definidas relações aí representadas por seus diagramas sagitais.</p>

As justificativas das soluções apresentadas pelos alunos são ainda utilizadas para introduzir o conceito de função.

02- P.G. Sala de aula:
Professora e alunos

PROFa: Vocês conseguiram identificar todas as relações ?

ALUNO: Tem uma que eu não consegui.

PROFa: Qual foi ?

ALUNO: Foi a 11.

03- CLOSE Diagrama sagittal da relação M.

Maõ da professora mostrando o que é citado.

PROFa: A relação M, do ítem 11? Qual foi a dificuldade encontrada?

ALUNO(OFF): É esse negócio aí em A e B.

OUTRO-ALUNO: A intersecção !

PROFa: Vamos analisar juntos esta relação. O conjunto de partida é o A, não é?

ALUNO(OFF): É :

PROFa: E o de chegada?

ALUNOS(OFF): É o B :

PROFa: O que acontece, nesse caso, é que o A e o B têm dois elementos comuns. Quais são eles?

ALUNOS(OFF): O 2 e o 4.

PROFa: O 2 e o 4. Então vocês tem que analisar o 2 e o 4 duplamente. Têm que analisá-los como elementos de A e têm que analisá-los como elementos de B. Ou seja, a cada um desses elementos deve chegar uma flecha e apenas uma e de cada um deles deve partir uma flecha e apenas uma.

04- P.G. Alunos na sala de aula.

ALUNOS: É uma bijeção.

PROFa(OFF): Pode ser uma bijeção dependendo dos demais elementos.

PROFa(OFF): E se isso não ocorrer ?

ALUNOS: Não é bijeção.

05- CLOSE Diagrama sagital da relação M. Mão da professora mostrando o que é citado.

PROFa: Analisem no gráfico M o ponto 2. Ao 2 chega uma flecha?

ALUNOS(OFF): Chega !

PROFa: A flecha vem de onde?

ALUNOS(OFF): Vem do número 1.

PROFa: Logo, o 2 é imagem do 1 pela relação M. Agora, vamos analisá-lo como elemento da partida. Parte uma flecha desse ponto ?

ALUNOS(OFF): Parte.

PROFa: Então, pelo 2, a relação M pode ser bijeção.

Nós acabamos de ver que ao 4 chega uma só flecha, que parte do 2. E do 4, parte uma flecha?

ALUNOS(OFF): Parte.

PROFa: Para onde?

ALUNOS(OFF): Para o 8.

PROFa: Logo, o 4 tem uma imagem, que é o 8. O 4 tem mais alguma imagem?

ALUNOS(OFF): Não, só essa.

PROFa: Então, por esses dois elementos M pode ser uma bijeção.

Agora examinem os outros pontos. O que vocês podem ver em B ?

ALUNOS(OFF): O 12 não tem nada.

PROFa: Ao 12 não chega nenhuma flecha. O 12 não é imagem de nenhum elemento de A , pela relação M . Então essa relação é bijeção?

ALUNOS(OFF): Não, não, não!

06- P.G. Alunos na sala de aula.

PROFa(OFF): Por que não é bijeção?

07- Duas professoras sentadas à mesa.

ALUNO: Porque não chega nenhuma flecha no 12.

DIVA: A relação M foi a única que os alunos tiveram dificuldade em classificar como bijetora, devido aos elementos comuns aos conjuntos de partida e de chegada.

CONCEIÇÃO: Quer dizer que o conceito ficou realmente assimilado, pelos alunos?

DIVA: Foi o que concluí, pois, circulando pela sala, pude observar que classificavam corretamente. Já nas justificativas eles se atrapalharam um pouco.

CONCEIÇÃO: O que é natural, explicitar o que foi identificado exige um nível de desenvolvimento intelectual mais elevado.

DIVA: E além disso, cada caso pode admitir várias justificativas o que me levou a fazer a correção em duas etapas: primeiro conferi a classificação e depois discutimos as justificativas.

Depois procurei sintetizar com o auxílio de uma tabela.

08- P.G. Professora e alunos

PROFa: Bem, vocês verificaram que, das 12 relações apresentadas, apenas 3, "I", "P" e "O" são bijeções. Falta justificar cada caso.

09- CLOSE Diagrama de flechas de "N".

PROFa(OFF): Antonio, como você concluiu que a relação N não é uma bijeção?

10- Aluno-Ivan.

ALUNO-ANTONIO: Não é porque sobram meses.

11- Professora mostrando no diagrama o que cita

PROFa: Realmente, para que uma relação seja uma bijeção é condição necessária que todo elemento do conjunto-chegada seja imagem de um elemento do conjunto de partida. O que não ocorre nesta relação.

12- Aluno-Ivan

ALUNO-IVAN: Eu botei que não é, porque em outubro chegam duas flechas.

13- P.G. Professora e alu - PROFa: Sua justificativa também
nos(aparecendo Ivan) está correta Ivan.

Não chegarem flechas a alguns pontos é suficiente para afirmarmos que N não é bijeção, e chegarem duas flechas ao mesmo ponto, também.

Ma JULIA: Eu botei os dois.

PROFa: Também está certo, Ma Júlia. Mas é necessário colocar as duas causas ?

VÂNIA: Não. Basta uma.

PROFa: Realmente, uma condição não satisfeita é suficiente para afirmarmos que N não é bijeção.

14- CLOSE Diagrama sagital da relação I .

PROFa(OFF): Marly, qual a sua justificativa para dizer que a relação I é bijetora?

ALUNA-MARLY: Porque todos os pontos de A têm uma flecha partindo, e todos os pontos de B têm uma flecha chegando.

PROFa: (OFF): De todo ponto de A parte uma flecha e somente uma, e a todo ponto de B chega uma flecha e somente uma. Logo, f satisfaz às condições relativas à partida e às relativas à chegada.

A relação f , Francisco ?

15- P.M. Professora falando aos alunos.

PROFa: Para verificarmos se uma relação é ou não bijetora, precisamos analisar o conjunto de partida e o conjunto de chegada desta relação. Vamos usar uma tabela para agrupar essas relações segundo o que foi observado na partida e na chegada de cada uma.

16-CLOSE Quadro onde a professora está desenhando a tabela abaixo:

PARTIDA	Pode ser bijeção	
	Não pode ser bijeção	

PROFa: Primeiro vamos observar o conjunto-de-partida. Se por seu conjunto-de-partida a relação pode ser bijeção vamos colocá-la acima desta linha, se não pode, colocamos abaixo

17- Quadro onde a professora está completando o desenho da tabela.

		CHEGADA	
		Pode ser bijeção	Não pode ser bijeção
PARTIDA	Pode ser bijeção		
	Não pode ser bijeção		

18- Quadro onde a professora indica com giz os dois retângulos superiores da tabela.

19- Quadro onde a professora está escrevendo a letra N no retângulo superior da direita.

PROFa: Depois vamos analisar o conjunto-de-chegada. Se de acordo com seu conjunto de chegada a relação pode ser bijetora vamos colocá-la do lado esquerdo e se não pode, do lado direito.

Façam tabelas iguais em seus cadernos e anotem também. A relação "N".

ALUNOS: Não pode ser bijeção.

PROFa: Pela partida e pela chegada?

ALUNOS: Só pela chegada.

PROFa: Pela partida, pode ?

ALUNOS: Pode.

PROFa: Pela partida pode. Então colocamos aqui. É pela chegada?

ALUNOS: Não !

PROFa: Então a relação N vem para cá.

20- CLOSE Diagrama sagital da relação I.

PROFa: Continuem. Relação "I"

ALUNOS: Pode. Pela partida e pela chegada.

PROFa: Se pode pela partida e pela chegada onde eu coloco a relação I?

21- Quadro com a tabela da cena 17 e professora com giz na mão.

ALUNOS(OFF): (ao mesmo tempo);
Em cima. Pr'a cá.

22- Quadro com a tabela da cena 17 e professora numerando as quatro regiões.

PROFa: Calma... Para facilitar, vou numerar as regiões da tabela. Assim é só dizer: coloca na região 1, 2, 3 ou 4.

	11	N	12
	13		14

23- Mão da professora escrevendo "I" na região 1 da tabela.

ALUNOS: Na um !

24- CLOSE Diagrama sagital da relação F.

PROFa: A "F"?

- ALUNOS(OFF): Na 3 !
- PROFa (OFF): Por que ?
- ALUNOS(OFF): Não pode pela partida e pode pela chegada.
- 25- CLOSE Tabela e mão da professora escrevendo "F" na região 3.
- 26- CLOSE Diagrama sagital da relação P.
- PROFa(OFF): Relação P.
- ALUNOS(OFF): Na 1 !
- PROFa: Por que ?
- ALUNOS: Porque pode e pode.
- 27- CLOSE Tabela e mão da professora escrevendo "P"na região 1.
- PROFa:Então o que podemos afirmar sobre esta relação ?
- ALUNOS: Ela é bijeção.
- 28- CLOSE Diagrama sagital da relação S.
- PROFa(OFF): S?
- ALUNOS(OFF):(ao mesmo tempo): Na 2 ! Na 3 ! É na 2! É na 3!
- PROFa(OFF): Se há dúvida, vamos esclarecer.Quem está dizendo que é na 2, explique porque.

ALUNOS(OFF): Porque pode ser bi
jeção na partida, não pode ser
bijeção na chegada.

PROFa(OFF): Quem acha que é na
3, diga porque.

29- P.G. Alunos se entre
olhando.

SILÊNCIO.

ALGUNS ALUNOS: Quem acha que é
na 3!

30- P.G. Professora e alu
nos.

PROFa: Quem disse 3 não pensou,
não é? Porque não tem nenhuma
justificativa. Não é porque res
pondeu errado que estou dizendo
que não pensou. A pessoa pode
atê raciocinar errado, mas ela
tem uma justificativa para a
resposta errada. Quando não tem
justificativa é porque respondeu
sem raciocinar, não é ?

31- Tabela preenchida no
quadro.

PROFa(OFF): Observem bem a ta-
bela . O que podemos dizer so-
bre as relações colocadas na
região 1 ?

		1	2
	I P O	N T	S J M
		3	4
	F L	D R	

ALUNOS(OFF): Que elas são bijeções.

PROFa(OFF): Por que?

ALUNA(OFF). Por que pode pela partida e pela chegada.

PROFa(OFF): Há alguma bijeção nas outras regiões?

ALUNOS(OFF): Não !

PROFa(OFF): Realmente, a região 1 é a única que satisfaz às exigências referentes ao conjunto de partida e ao conjunto de chegada.

32-Duas professoras sentadas

DIVA: Procuro sempre enfatizar que uma condição não satisfeita é suficiente para afirmarmos que a relação não é bijeção, mas uma condição satisfeita não é suficiente para afirmarmos que a relação é uma bijeção. Para podermos afirmar que uma relação é bijetora é necessário que ela satisfaça a todas as condições estabelecidas.

CONCEIÇÃO: Eu acho que a distri
buição das realações nessa ta-
bela ajuda a destacar a neces-
sidade da verificação simultâ-
nea das condições referentes à
partida, e das condições refe-
rentes à chegada, para que uma
relação seja bijetora.

DIVA: Também é importante que
os alunos tenham claro, que a
não verificação das caracterís-
ticas de bijeção em um só pon-
to é suficiente para afirmar -
mos que a relação analisada
não é bijetora.

CONCEIÇÃO: Em outras palavras,
que eles percebam que a negação
de "todo " é "não pelo menos um".
Acho que além da dificuldade
que têm em verbalizar, o fato
de não terem ainda esses esque-
mas lógicos, também é responsá-
vel pela dificuldade que apre-
sentam em justificar as próprias
conclusões.

DIVA: Concordo com você, mas nem se pode esperar que alunos do 1º Grau sejam capazes dessa generalização. Exigir que justifiquem e discutir as diferentes justificativas visa a que percebam esses esquemas concretamente, em relação ao conceito que estão trabalhando, etapa que precede a generalização.

Outro objetivo da organização das relações na tabela foi facilitar a introdução do conceito de função.

33- Professora apontando na tabela o que diz.

PROFa:A gora vamos nos preocupar apenas com o conjunto-de-partida. Com esta informação aqui. Quais as relações que estão acima desta linha ?

ALUNO(OFF):As que são bijeção pela partida.

34- P.G. Sala de aula: Professora falando aos alunos.

PROFa: As que podem ser bijeção pela situação da partida. Nós sabemos que examinar apenas o conjunto de partida não nos dá o direito de afirmar que uma relação ~~é~~ bijetora. Só nos dá direito de dizer o que ?

ALUNO: Que ela pode ou não pode ser bijeção.

PROFa: Se ela não puder já posso dizer que ela não é mesmo bijeção, mas se ela puder não tenho ainda o direito de dizer que é bijeção, pois depende ainda da situação do conjunto-de-chegada.

35-CLOSE Tabela no quadro. Mão da professora mostrando na tabela o que cita.

PROFa: Então, qual é a característica destas relações aqui ? Esquecendo esta linha e considerando isto aqui como um todo O que foi que observamos nestas relações para colocá-las acima desta linha?

- ALUNO(OFF): Que elas podem ser bijeções.
- OUTRO ALUNO(OFF): Pela partida.
- 36- P.M. Professora diante do quadro com a tabela, mostrando.
- PROFa: Está certo, pela situação do conjunto de partida concluímos que estas relações poderiam ser bijeções. Mas eu quero que me expliquem quais as características observadas nas partidas destas relações que nos permitiram tirar esta conclusão.
- 37- P.M. Aluna falando.
- ALUNA-MARLY: Cada elemento tem uma imagem e apenas uma.
- PROFa(OFF): Muito bem, no diagrama você verificou que de cada ponto ...
- 38- P.G. Alunos
- ALUNOS: De cada ponto parte uma flecha e apenas uma.

39- Professora indicando o que cita na tabela escrita no quadro.

PROFa: Então, todas as relações que estão acima desta linha têm essas características não é verdade?

ALUNOS(OFF): É:

40-P.G. Sala de aula alunos e professora.

PROFa: As relações que apresentam essas características em seu conjunto de partida , isto é, todo elemento tem uma imagem e somente uma ^{recebe uma} denominação que já é muito conhecida de vocês, embora vocês provavelmente não soubersem seu significado em Matemática. São chamadas funções.

ALUNO: (junto com a professora ou antes): Função !

ALUNOS: FUNÇÃO !

PROFa: Uma pergunta. A partir do que acabamos de ver , para verificar se uma relação é função, o que precisamos analisar ?

ALUNOS: A partida.

PROFa: Exato, para identificar uma função examinamos apenas o conjunto de partida da relação considerada. E quando dizemos que é uma função ?

ALUNO: Quando todos os elementos da partida têm uma imagem e somente uma.

41- Duas professoras sentadas à mesa conversando.

DIVA: Desta vez os próprios alunos formularam a definição de função, depois de entendidas, através dos exemplos analisados quais as características das relações assim denominadas.

CONCEIÇÃO: O conceito de bijecção foi construído pelos alunos através de situações concretas, já agora, você definiu função, a partir de bijecção.

DIVA: Todo ^cconceito assimilado pode servir de suporte para a aquisição de novo conceito, e os alunos já tinham percebido ao distribuir na tabela as relações analisadas, que as características de bijeção pertinentes à partida independem das pertinentes à chegada. Daí, dar um nome às relações que satisfazem às condições referentes à partida é bem aceito.

CONCEIÇÃO: E também, são caminhos opostos. Ao conceituar bijeção você utilizou o conceito de relação, partindo de um conceito mais amplo para um mais restrito. Na conceituação de função, você se apoiou no conceito de bijeção, partindo de um conceito mais restrito para um mais amplo.

DIVA: Através da construção de um diagrama de Venn, os alunos percebem isso. É o que você vai poder observar na aula seguinte a esta.

42- Apresentador.

APRESENTADOR: Nosso próximo programa mostrará a aula em que os alunos conhecem a nomenclatura específica de função e estabelecem a relação de inclusão entre o conjunto das relações, o conjunto das funções e o conjunto das bijeções.

Até lá o professor que nos assiste poderia planejar uma aula com os mesmos objetivos:

a) Introduzir a nomenclatura específica de função, de forma natural.

b) Verificar que o conjunto das bijeções está contido no conjunto das funções, que está contido no conjunto das relações.

PROGRAMA: Proposta de solução para atualização dos professores da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, em Matemática.

MÓDULO 2: Função.

TÍTULO : Nomenclatura e relação de inclusão $R \supset F \supset B$

DURAÇÃO : 25 min.

VÍDEO

AUDIO

01- Apresentador

APRESENTADOR: Dando continuidade ao estudo de funções e valendo-se de apresentações gráficas que os alunos já dominam, a professora encaminha-os a estabelecer relações entre os conceitos de bijeção, função e relação.

Ainda nesta aula é introduzida a nomenclatura usual relativa a esses conceitos.

02- P.G. Professora e alunos.

PROFª: Vamos retomar o que estudamos na aula passada.

O que é função?

ALUNO: É quando todos os elementos da partida têm uma imagem.

OUTRO-ALUNO: Uma imagem e uma só.

03- CLOSE Texto da professora

PROFª(OFF): Nós chamamos de função uma relação em que todo elemento do conjunto de partida tem uma imagem e somente uma.

ALUNOS: Não !

PROFª(OFF): Por que não ?

ALUNO (OFF): Porque tem aquelas lá, olha, N, T, S... Elas são funções e não são bijeções

05- P.G. Professora e alunos.

PROFª: Certo. Toda bijeção é função, mas nem toda função é bijeção. Isto porque BIJEÇÃO é um conceito mais restritivo que função. Por que mais res-tritivo? Porque à medida que você vai impondo novas condições, a tendência é restringir, diminuir o número de objetos que satisfazem a todas elas.

Por exemplo, se eu pedir que todos os meninos desta turma se levantem, tirei, um, dois, três, quatro, cinco , seis, sete, oito, ...

06- P.G. dos alunos.

ALUNOS: nove, dez, onze.

PROFª(OFF): Onze elementos de pé.

Se eu disser: quero que se levanten os meninos que estão com relógio eu acrescentei uma condição, e agora tenho apenas três alunos em pé. É claro que todos os 11 poderiam estar usando relógios, mas eu não poderia nunca ter mais que 11. Então se eu imponho condições apenas ao conjunto de partida. É provável que obtenha mais

04- Professora mostrando na tabela escrita no quadro o que cita. (tabela da 5ª aula, cena 30)

CHEGADA

	pode ser bijeção	não pode ser bijeção	
pode ser bijeção	I P O	N T S J M	1 2
não pode ser bijeção	F L	D R	3 4

FUNÇÃO

PROFª(OFF): Peguem a tabela que construímos na aula passada. Onde estão situadas as funções ?

ALUNOS (OFF): Em cima !

ALUNO (OFF): Nos dois quadrados de cima.

PROFª(OFF): Nesta faixa aqui, que compreenda as regiões 1 e 2. Todas essas relações são funções, mas umas estão na região 1 e outras na região 2. Por que ? - Há alguma diferença entre as funções da região 1 e as funções da região 2?

ALUNOS (OFF): Na região 1 são bijeções, na região 2, não !

PROFª(OFF): Temos, portanto, funções que são bijeções e outras que não são bijeções. Há bijeções em outra região

ALUNOS (OFF): Não, não pode.

PROFª(OFF): Uma relação pode ser bijeção sem ser função ?

ALUNOS (OFF): Não !

ALUNA(OFF): As bijeções estão todas na faixa de função.

PROFª(OFF): Que podemos concluir daí?

ALUNO (OFF): As bijeções são funções.

PROFª (FF): Toda bijeção é função. E uma função ? É sempre bijeção?

relações do que se além destas, imponho também condições ao conjunto de chegada.

Ficou claro porque eu digo que bijeção é um conceito mais restritivo que função ?

ALUNOS: Ficou !

07- P.M.F. Professora

PROFª: Nós já sabíamos que toda bijeção é relação, pois bijeção é um caso particular de relação. Do momento em que associamos elementos de dois conjuntos, iguais ou não, já temos uma relação. Mas, para afirmarmos que temos uma bijeção é preciso ainda que se verifiquem determinadas condições. Portanto, toda bijeção é relação mas nem toda relação é bijeção.

ALUNA(OF): A bijeção é mais restrita

PROFª: É. E agora, vimos que uma bijeção satisfaz a todas as condições de função. O que podemos concluir ?

08- Aluno falando.

ALUNO: Que toda bijeção é função.

09- Outro aluno falando

OUTRO-ALUNO: Mas nem toda função é bijeção.

- 10- Professora diante do quadro de giz, falando e desenhando
- PROFª : Nós poderíamos fazer um diagrama colocando essa situação? Se eu tenho aqui o conjunto R das relações ... Estou chamando de R o conjunto de todas as relações possíveis. Onde coloco uma linha para representar o conjunto F das funções ?
- 11- P.G. Alunos e professora
- ALUNO: Dentro do conjunto R.
- PROFª: No interior da linha que representa o conjunto das relações. Vem vo cê, colocar.
- 12- Aluno desenhando no quadro
- ALUNO: É aqui assim, né?
- 13- Professora voltada para os alunos e apontando o diagrama no quadro.
- PROFª: É assim ?
- ALUNOS(OFF): É !
- PROFª: Onde coloco uma linha para representar o conjunto das bijeções?
- ALUNO(OFF): Dentro do conjunto F e do conjunto R.
- PROFª: Quer vir desenhar ?
- 14- CLOSE do diagrama no quadro. Aluno desenhando a 3ª curva fechada.
- PROFª(OFF): Qual a conclusão que podemos tirar olhando para esse diagrama?
- ALUNA(OFF): Bijeção é função e relação.
- PROFª(OFF): Toda bijeção é função e é também relação. E toda função é rela-

15- CLOSE da tabela da cena 04. PROFª(OFF): Onde coloco um ponto para representar a relação I ?

16- CLOSE do diagrama no quadro ALUNOS (OFF): Dentro do B.

Professora marcando o ponto

I.

17- CLOSE da tabela da cena 04. PROFª(OFF): Onde colocaríamos a relação D ? Ela não é bijeção, nem função.

ALUNA(OFF): Dentro do R .

18- CLOSE do diagrama da cena 16 e mão da professora com giz marcando um ponto no interior da curva B e depois mostrando toda a região interior à curva R.

PROFª: Aqui ?

ALUNA(OFF): Não.

PROFª: Tudo isso é relação ,mas onde eu coloco D ?

ALUNO(OFF): Dentro do R e fora do F.

19- CLOSE do diagrama e professora marcando o ponto D.

PROFª: Nesta região aqui, que fica no interior de R e no exterior de F.

20- CLOSE do quadro de giz:tabela da cena 04 e diagrama da cena 19.

PROFª(OFF): E a relação S? Onde devo colocar?

ALUNO(OFF): Dentro do F, fora do B.

Mão da professora marcando
o ponto s.

PROFA(OFF): Então, agora, vocês vão
completar esse diagrama, colocando
todas as relações que estão nessa
tabela na região certa do diagrama.

21- Duas professoras sentadas à
mesa conversando.

DIVA: Apreveitei a própria tabela
através da qual defini função para
ênfatizar que toda bijeção é função,
mas há funções que não são bijetoras

CONCEIÇÃO: Acho muito importante que
o aluno saiba situar os conceitos em
um contexto mais amplo, saiba discer
nir as relações existentes entre os
vários conceitos. Considero mesmo
mais importante desenvolver a capaci-
dade do aluno de estabelecer tais re-
lações do que a aprendizagem isolada
de conceitos matemáticos, e no entan-
to, o professor nem sempre tem essa
preocupação.

DIVA: A transferência de uma repre-
sentação para outra favorece o desen-
volvimento dessa capacidade, por is-
so sugeri a construção do diagrama
de Venn que apresenta ainda a vanta-
gem de deixar mais nítida a inclusão
do conjunto das bijeções no conjunto
da funções e a deste no conjunto das
relações.

CONCEIÇÃO : Realmente, mas eu faço uma objeção à construção desse diagrama de Venn: os elementos dos conjuntos aí representados são por sua vez conjuntos. Isso não é, muito complexo para ser proposto aos alunos sem nenhum esclarecimento anterior?

DIVA: Você mesma pôde observar que eles não manifestaram nenhuma dúvida a respeito. Assim, não julguei conveniente levantar uma questão que não parecia preocupá-los e cuja discussão poderia desviar o foco das atenções.

CONCEIÇÃO: Realmente ... E você não acha interessante, já que o diagrama foi construído, explorar a correspondência entre as regiões da tabela e as do diagrama de Venn?

DIVA: Sim. Foi o que fiz antes de passar à introdução da nomenclatura específica de funções. Terminada a distribuição das relações no diagrama de Venn ...

22- Aluno no quadro completando o diagrama de Venn.

Burburinho de sala de aula.

23- CLOSE do quadro mostrando tabela da cena 04 e diagrama da cena 22.

Mão da professora indicando o que diz.

PROFª(OFF): As 12 relações que vocês classificaram estão distribuídas na tabela de dupla entrada e no diagrama de Venn que vocês acabaram de construir.

Será que podemos estabelecer uma correspondência entre as regiões da tabela e as regiões do diagrama?

ALUNOS(OFF): (ao mesmo tempo):

- Como ? - Que correspondência?

- Não entendi.

PROFª: Por exemplo: há alguma região da tabela que represente o mesmo que a região interior à fronteira de B?

ALUNOS(OFF): A região 1 !

PROFª(OFF): Por que ?

ALUNA(OFF): Porque na região 1 ficaram as bijeções.

PROFª: Porque na região 1, assim como no interior da fronteira de B, só podem figurar bijeções. Então podemos dizer que a região 1 da tabela corresponde à região situada no interior da corda B do diagrama de Venn.

Vocês vêem correspondência entre outras regiões?

ALUNO(OFF): A região 2 e o pedaço entre B e F .

PROFª: A região 2 da tabela e a região do diagrama exterior à fronteira de B e interior à fronteira de F. Por que?

ALUNO(OFF): Por que são relações que são funções mas não são bijeções.

PROFª: Muito bem ! Essas duas regiões compreendem as funções não bijetoras.

Mais alguma correspondência ?

24- P.G. Alunos.

ALUNO ANTONIO: Não.

ALUNO FRANCISCO: Tem.

PROFª(OFF): Qual, Francisco?

ALUNO FRANCISCO: Entre R e F é igual à 3 e 4.

ALUNO ANTONIO: Mas aí são duas regiões, não é uma só.

25- CLOSE do quadro e professora mostrando.

PROFª: Realmente, Antônio, temos duas regiões na tabela, a 3 e a 4 mas nada nos impede de considerar a reunião das duas, como fez o Francisco.

Então resumindo ...

26- P.G. da sala de aula.
Alunos e professora.

PROFª: Vocês precisam ainda conhecer a nomenclatura específica de

FUNÇÃO. Nós até agora trabalhamos com relações, sabendo que uma relação para estar bem definida deve ter conjunto de partida e

ALUNOS (cortando a professora): E de chegada.

PROFª: Quando todos os elementos do conjunto de partida têm uma imagem e apenas uma, nós chamamos esta relação de FUNÇÃO. O conjunto de partida de uma função recebe uma denominação específica. O conjunto de partida de uma função chama-se DOMÍNIO.

Domínio de uma função é o conjunto de partida dessa função. E o conjunto de chegada? Como vocês acham que poderia se chamar, se a partida é chamada domínio? Ele se contrapõe ao domínio.

27- P.G. Alunos.

ALUNO: Não domínio.

OUTRO ALUNO: Condomínio.

PROFª(OFF): Contradomínio. A partida de uma função chama-se domínio, e

ALUNO (cortando a professora): E a chegada contradomínio.

28- P.M. Professora diante do quadro, com folhas mimeo - grafadas na mão.

PROFª: Então vocês nas próprias folhas do exercício 2, vocês vão assinalar as relações que são funções e determinar qual o domínio e qual o contradomínio de cada uma delas.

29- CLOSE da função N.

PROFª(OFF): Por exemplo, em N, que é função, basta escrever: "Domínio S" - "Contradomínio M".

30- P.G. Alunos e professora com folhas mimeografadas na mão.

PROFª: Atenção: vocês vão verificar qual é o domínio e o contradomínio, nas 12 relações desse exercício ?

ALUNOS: Não.

ALUNA VÂNIA: Só para as que são funções.

31- P.G. dos alunos.

PROFª: Então comecem.

Burburinho dos alunos

ALUNA ZÉLIA : Professora !

PROFESSORA !

PROFª(OFF): O que é, Zélia?

ALUNA ZÉLIA: Chega aqui ?

32- Professora ao lado da carteira da Zélia.

PROFª: O conjunto de chegada de uma função é o contradomínio.

Atenção, por favor! A Zélia me

fez uma pergunta que eu gostaria que todos ouvissem.

33- CLOSE Diagrama sagital de N

PROFª(OFF): Vocês querem todos olhar para a relação N? é a primeira do exercício.

Quer repetir a pergunta para todos ouvirem, Zélia?

34- P.M.F. Zélia sentada na carteira.

ALUNA ZÉLIA: É que, o conjunto de partida é o domínio, porque de todos os pontos partem flechas.

35- CLOSE Diagrama sagital de N.

ALUNA ZÉLIA(OFF): Mas aqui no conjunto M, há elementos aonde não chegam flechas. Esses elementos também são do contradomínio?

ALUNOS(OFF) São !

PROFª(OFF): São. Esses elementos também pertencem ao contradomínio Mas será que não se faz nenhuma distinção entre os elementos que estão associados pela função e os que não estão?

36- P.G. Alunos

SILÊNCIO.

37- CLOSE Diagrama sagital de N.

PROFª(OFF): Quais são os elementos de M que são imagem de algum elemento de S, pela relação N ?

ALUNOS(OFF): março, fevereiro ,
abril, novembro e outubro.

PROFª(OFF): Os outros meses são
elementos do contradomínio mas não
são imagens de nenhum elemento do
domínio, são?

ALUNOS(OFF): Não !!!

38- CLOSE Diagrama sagital de N.
Mãe da professora desenhando
uma curva fechada em torno
dos elementos que cita.

PROFª: Nós dizemos que o conjunto
das imagens, neste caso o conjunto
formado por fevereiro, março, abril
novembro e outubro, chama-se ima -
gem da relação N ou conjunto-ima -
gem desta relação.

Viu Zélia ? Há realmente uma di
distinção entre os elementos da
chegada que figuram como imagem e
os que não figuram.

O que o conjunto-imagem de N é
do contradomínio de N?

ALUNA-VÂNIA : É subconjunto !

PROFª: Isso mesmo. O conjunto-ima-
gem de N é subconjunto do contrado
mínio de N, está contido no contra
domínio de N.

A imagem de uma função está sem
pre contida em seu contradomínio ?

39- P.G. Alunos

ALUNO IVAN: Está .

41- P.M.F. Apresentador

APRESENTADOR: O assunto do próximo programa será a conceituação de sobrejeção e de injeção. Mas, antes de abordar estes conceitos, a professora de matemática propôs aos alunos outras questões explorando a noção de função. Elabore você também situações visando aprofundar e fixar este conceito.

ANEXO III

TESTE-AVALIAÇÃO I

INSTRUÇÕES

— Em cada item deve ser assinalada uma só alternativa, a que lhe parecer mais correta.

— As questões terão os seguintes valores:

1,2,3,4,5,6,7,8..... 8 pontos

9,10,13,16..... 4 pontos

11,12,14,15..... 5 pontos

e o resultado final do teste será dado pela fórmula do acerto casual:

$$X_c = C - \frac{E}{n-1}$$

onde, X_c = escore corrigido

C = número de acertos

E = número de erros

n = número de alternativas

sem outras correções.

— Todas as questões apresentadas referem-se ao ENSINO DO 1º GRAU:

1 . Qual o principal objetivo do ensino da Matemática, no 1º Grau?

- a) desenvolver habilidade de cálculo.
- b) habilitar a resolver problemas.
- c) desenvolver precisão de linguagem.
- d) familiarizar com linguagem científica.
- e) desenvolver estruturas lógico-matemáticas.

2 . Qual a maneira mais eficaz de promover a aprendizagem de um conceito?

- a) Definir o conceito com clareza e propor a resolução de exercícios a respeito.
- b) Definir o conceito com clareza e depois apresentar exemplos concretos.
- c) Citar exemplos concretos e depois definir o conceito.
- d) Propor atividades que tragam subjacente o conceito, contendo questões que o enfatizem.
- e) Propor atividades que tragam subjacente o conceito, deixando ao aluno as possíveis conclusões.

3 . Qual o momento oportuno para introduzir a nomenclatura matemática perinente a determinado conceito?

- a) Antes da definição do conceito.
- b) Depois da definição do conceito.
- c) Depois da definição do conceito e de verificada sua assimilação.
- d) Depois da definição do conceito e de verificada sua assimilação e da resolução de exercícios de fixação.
- e) Todas as alternativas anteriores, dependendo da natureza do conceito.

4 . As atividades propostas devem foçosamente

- a) conter material manipulável.
- b) estar inseridas em situações que fazem parte da realidade do aluno.
- c) estar inseridas em situações reais, independentes ou não da realidade do aluno.
- d) estar inseridas em situações que fazem parte da realidade do aluno e conter material manipulável.
- e) estar inseridas em situações reais, independentes ou não da realidade do aluno e conter material manipulável

- 5 . Que atitude tomar quando o aluno responder corretamente a uma questão?
- a) Dizer que está correta.
 - b) Dizer que está correta e depois pedir justificção.
 - c) Pedir justificção da resposta, dizendo depois que está correta.
 - d) pedir ao aluno a justificção da resposta.
 - e) Dizer que está correta e pedir justificção a outro aluno.
- 6 . Que atitude tomar quando o aluno responde erradamente a uma questão?
- a) Dizer que está errada.
 - b) Dizer que está errada e pedir a resposta de outro aluno.
 - c) Dizer que está errada e pedir a justificção da resposta.
 - d) Dizer que está errada e fazer com que o aluno através da análise descubra seu erro.
 - e) Dizer que está errada e pedir que outro explique a razão do erro.

7 . Quando de uma resposta:

- a) voce a aceita somente se coerente e utilizando a nomenclatura matemática.
- b) voce a aceita, desde que coerente, sem a utilização da nomenclatura matemática.
- c) voce a aceita, desde que coerente, sem a utilização da nomenclatura matemática.
- d) voce a aceita, mesmo que incoerente, mas com a utilização da nomenclatura matemática.
- e) voce aceita todas as alternativas anteriores.

8 . Que atitude tomar quando o aluno fizer observações corretas porém irrelevantes?

- a) Não aceitar as observações.
- b) Não aceitar as observações assinalando a irrelevância.
- c) Aceitar as observações.
- d) Aceitar as observações mas assinalar a irrelevância.
- e) Considerá-las simplesmente irrelevantes.

9 . No diagrama de Venn, um elemento é representado:

- a) por um ponto.
- b) por um desenho.
- c) pelo nome do elemento.
- d) pela inicial de seu nome.
- e) por um desenho e o nome do elemento.

- 10 . Em um diagrama sagital o conjunto de chegada é identificado por:
- a) estarem nele situadas as origens das flechas.
 - b) estarem nele situadas as extremidades das flechas.
 - c) estar à direita do conjunto de partida.
 - d) estar à esquerda do conjunto de partida.
 - e) nenhuma das respostas anteriores.
- 11 . Qual a definição matemática de relação?
- a) Um conjunto de pares ordenados.
 - b) Uma expressão que associa dois conjuntos.
 - c) Uma expressão que associa os elementos de dois conjuntos.
 - d) A associação de dois conjuntos.
 - e) O conjunto de associações dos elementos de um conjunto.
- 12 . Para definir uma relação é necessário e suficiente conhecer:
- a) a expressão que associa os elementos de dois conjuntos.
 - b) o conjunto de partida e o conjunto de chegada.
 - c) o conjunto de partida e a expressão que associa os elementos dos dois conjuntos.
 - d) o conjunto de chegada e a expressão que associa os elementos dos dois conjuntos.

12 . Para definir uma relação é necessário e suficiente conhecer:

e) o conjunto de partida, o conjunto de chegada e a expressão que associa os elementos do primeiro aos do segundo.

13 . Qual o número de elementos de R,

$$R = \{ (a,b), (b,c), (c,d), (c,f), (a,c), (b,f) \}$$

a) 12

b) 6

c) 3

d) 4

e) um

14 . Bijeção é uma relação que satisfaz às seguintes condições:

a) Todo elemento do conjunto de partida tem uma imagem.

b) Todo elemento do conjunto de chegada é imagem de um elemento da partida.

c) Todo elemento do conjunto de partida tem uma imagem e somente uma.

d) Todo elemento do conjunto de chegada é imagem de um elemento da partida e somente um.

e) Todo elemento do conjunto de partida tem uma imagem e somente uma, e todo elemento do conjunto de chegada é imagem de um elemento da partida e somente um.

15 . Sabendo que o número de elementos do conjunto A é igual a x e que o número de elementos do conjunto B é y , quantas bijeções podemos definir de A para B ?

- a) zero
- b) $x!$
- c) $y!$
- d) x^y
- e) 2^{xy}

16 . Assinale a afirmativa verdadeira:

- a) Toda bijeção é função e é relação.
- b) Toda bijeção é função ou é relação.
- c) Toda bijeção é função e não é relação.
- d) Toda bijeção é função ou não é relação.
- e) Toda bijeção não é função ou não é relação.

Unidade	-BC
Proc	
Ar. de	
Preço	doçad
Data	3/12/80