FORMAS QUADRÁTICAS SOB DEPENDÊNCIA:

ESTRUTURAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DA MATRIZ TIPO H

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Júlia Tizue Fukushima e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de janeiro de 1993.

Profa. Dra. Regina C.C.P. Moran

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como registro parcial para obtenção do Título de MESTRE em Estatística.

Aos meus pais
Tamio e Hisayo

À minha avó
Tomie

Aos meus irmãos
Julio e Marcio

Ao meu afilhado
Vítor

AGRADECIMENTOS

À profa. Regina C.C.P. Moran pela orientação, estímulo científico e sobretudo pela amizade de todos os momentos.

Aos amigos da turma de mestrado, em especial, à Cassiana e ao Antônio, sempre presentes em todas as fases sociais e científicas.

Aos amigos da Divisão de Informática - InCor que muito contribuíram para realização deste trabalho.

Às estatísticas: Rita H.A.Cardoso e Creusa M.R. Dal Bó pelas sugestões e amizade.

Aos amigos que compõem a alma deste trabalho: Adriana, Amauri, Cândido, Cardoso, Carlos, Cecília, Delfin, Eduardo, Iara, Ivete, Ivo, José, Lúcia, Lúcia, Luíz, Luíz, Luiza, Marina, Miguel, Rita, Rosa, Roseli, Silvério, Silvia, Simone, Tamari.

ÍNDICE

1. Introdução

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho é desenvolvido no contexto de medidas repetidas entendido com o grau de generalidade colocado por exemplo em Andrade e Singer(1986). Trata-se portanto de situação experimental ou observacional na qual sobre a mesma unidade são feitas medidas da mesma característica em mais de uma ocasião. A forma de medir explica então a adjetivação "repetidas", podendo ser tanto temporal quanto espacial. Desta forma de medir que deriva a espectativa de relações entre medidas. Os campos de aplicação são de fato bastante numerosos e associados por vezes a planejamentos próprios como estudos logitudinais, predominantemente na área médica, curva de crescimento na área biomédica e "split-plot" nas áreas experimentais tais como na agronomia.

A análise, no contexto de medidas repetidas, passa por especializações devido à existência de relações entre medidas sobre a mesma unidade experimental ao longo das condições de avaliação. Neste trabalho são abordados casos com dados contínuos, completos em condições fixas.

A metodologia de análise bifurca-se em duas grandes avenidas: da análise univariada e da análise multivariada (Winer,1962 e Timm, 1975). A natureza intrinsecamente univariada do problema, uma medida de mesma origem e escala ao longo das condições, explica o desenvolvimento no sentido de buscar condições de validade para o uso das técnicas univariadas mais simples.

A própria descoberta dessas condições, somada à necessidade de serem satisfeitas, para colocar a análise univariada com fundamento estatístico apropriado, leva a recomendar a análise multivariada nos casos em que estas não são verificadas.

O ponto nevrálgico deste trabalho está na condição derivada por Huynh e Feldt(1970) sobre a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias que valida a abordagem univariada da análise de variância.

1.1 MOTIVAÇÃO DO PRESENTE ESTUDO

Do estudo do artigo de Huynh e Feldt(1970), surgiram algumas dúvidas com respeito às colocações dos autores. Uma delas é em relação às "(k + 1) constantes arbitrárias com a propriedade de que a matriz resultante de variâncias e covariâncias, Σ, seja positiva definida". Na tentativa de familiarização com o padrão desta matriz, construiu-se algumas matrizes, segundo especificações do artigo, a partir da atribuição de valores constantes obtendo, em alguns casos, matrizes que não eram positivas definidas. Apenas observando a matriz, não foi possível identificar a origem deste problema.

Exemplo: Considerando um experimento em medidas repetidas com seis condições de avaliação, tem-se associado, para cada unidade de investigação, uma matriz de variâncias e covariâncias de dimensão 6x6.

Atribuindo, **arbitrariamente**, às variâncias os valores $\sigma_{11} = 9$, $\sigma_{22} = 6$, $\sigma_{33} = 9, \sigma_{44} = 7$, $\sigma_{55} = 8, \sigma_{66} = 4$ e para $\lambda = 0{,}5$. A construção de uma matriz tipo H baseada na identidade

$$\sigma_{mn} = \frac{\sigma_{mm} + \sigma_{nn}}{2} - \lambda \quad \text{para } m \neq n, \quad m, n=1,\dots,6,$$

do artigo de Huynh e Feldt(1970), resultou na matriz

$$
\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 9{,}0 & 7{,}0 & 8{,}5 & 7{,}5 & 8{,}0 & 6{,}0 \\ 7{,}0 & 6{,}0 & 7{,}0 & 6{,}0 & 6{,}5 & 4{,}5 \\ 8{,}5 & 7{,}0 & 9{,}0 & 7{,}5 & 8{,}0 & 6{,}0 \\ 7{,}5 & 6{,}0 & 7{,}5 & 7{,}0 & 7{,}0 & 5{,}0 \\ 8{,}0 & 6{,}5 & 8{,}0 & 7{,}0 & 8{,}0 & 5{,}5 \\ 6{,}0 & 4{,}5 & 6{,}0 & 5{,}0 & 5{,}5 & 4{,}0 \end{bmatrix}
$$

cujo determinante é igual a -0,5, e conseqüentemente a matriz não é positiva definida. Portanto estas constantes não são arbitrárias para compor uma matriz positiva definida.

A condição sobre as constantes para que a matriz tipo H seja positiva definida é derivada neste trabalho. Esta é de grande de importância para caracterizar propriamente a matriz quando esta é entendida como uma estrutura necessária e suficiente para validar o tratamento univariado. Além disso, é propriedade importante para simulação de dados. Esta, afinal, foi esquecida em função do descortínio de desafios metodológicos que deveriam ser precedentes.

Este fato desencadeou uma série de investigações sobre as características deste padrão de matriz, que despertaram interesses em pesquisar novas técnicas para testar adequabilidade desta estrutura em matrizes de variâncias e covariâncias, além da utilização do teste de condições de esfericidade devido a Mauchly, 1940. Esta motivação inicial e seus desdobramentos fixaram outros objetivos para o trabalho, apresentados a seguir.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Inicialmente, na tentativa de uma reconstrução do artigo de Huynh e Feldt(1970), foi notada a abordagem de planos específicos de delineamento, blocos e "split-plot" para a derivação da estrutura. A recuperação do resultado básico utilizado devido a Box(1954) e Rao(1965) levou, então, não a uma mera reprodução mas uma derivação da condição em situação absolutamente geral. Este passo precedeu a caracterização da matriz tipo H.

Os objetivos deste trabalho ficam estabelecidos entre:

a) Derivar condições necessárias e suficientes, em qualquer delineamento ou estrutura de grupos em estudo, que validem o uso de técnicas univariadas com estatística de distribuição exata. Neste sentido, estendeu-se o teorema de Cochran(1934) para variáveis dependentes.

b) Caracterizar a matriz com estrutura derivada destas condições de validade do uso de técnicas univariadas.

c) Sugerir formas de verificação destas condições através gráfica exploratória ou através de ajustes polinomiais às colunas (linhas) da matriz $(\Sigma-\lambda\mathbf{I})$. Esta deriva do interesse maior de entender a estrutura propriamente dita.

Com estes objetivos desenvolveu-se o presente trabalho onde no capítulo 2, apresenou-se o tratamento univariado para medidas repetidas sob a hipótese de que a matriz de variâncias e covariâncias tem padrão de uniformidade e é comum a todos os grupos. Nos casos em que esta hipótese é rejeitada, pode-se ainda utilizar esta técnica por meio de correção nos graus de liberdade. Alguns destes fatores de correção estão também apresentados neste capítulo.

No capítulo 3 desenvolveu-se o teorema 3.2.3, extensão do teorema de Cochran(1934), que define as condições necessárias e suficientes para que formas quadráticas reais sejam distribuídas como múltiplo de qui-quadrados independentes. Destas condições emerge uma estrutura denominada tipo H para a matriz de variâncias e covariâncias. Esta estrutura é caracterizada pelo polinômio característico, seus autovalores e distância entre suas linhas ou colunas. Estas características são apresentadas no capítulo 4, bem como as condições para se obter uma matriz positiva definida a partir da fixação das variâncias.

No capítulo 5 a matriz construída no capítulo 1 é retomada fazendo uso dos resultados do capítulo 4, a estruturação e padronização são discutidas em comentários finais.

Cabe ressaltar que algumas matrizes com denominações próprias, freqüentemente utilizadas no trabalho encontram-se descritas no apêndice A(conceitos de álgebra matricial), onde além das notações, algumas definições algébricas também são apresentadas. Além destas, outra notação freqüentemente utilizada é em relação às distribuições das variáveis aleatórias:

$N_n(\mu, \Sigma)$ Normal n-variada com vetor de médias μ e matriz de variâncias e covariâncias Σ.

$\chi^2(n, \delta)$ Qui-quadrado com n graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ.

O apêndice B contém um disquete com os programas desenvolvidos com o aplicativo Reduce (Rayna, 1987) e respectivas listagens. Este aplicativo auxiliou, principalmente, na obtenção dos resultados do capítulo 4.

2. Análise univariada de perfis

2. ANÁLISE UNIVARIADA DE PERFIS

2.1 INTRODUÇÃO

O estudo de fenômenos por observações na forma de medidas repetidas em que os indivíduos aparecem estruturados em grupos, tanto experimentais como observacionais, tem como primeiro passo, no tratamento univariado, o exame da decomposição da soma de quadrados TOTAL, ou seja, a análise de variância. Essa decomposição no seu menor grau de refinamento é feita pela soma de quadrados ENTRE e DENTRO de unidades de investigação. A primeira indicando variação entre grupos e a segunda entre condições dentro de grupos.

Uma condição suficiente para utilizar-se o tratamento univariado com a decomposição da soma de quadrados TOTAL via análise de variância é que a matriz de variâncias e covariâncias do vetor multivariado de respostas seja comum a todos os grupos e siga o padrão de uniformidade (Winer,1962).

A análise univariada de perfis consiste em ajustar um modelo misto univariado onde consideram-se grupos e condições de avaliação como dois fatores fixos completamente cruzados, e as unidades experimentais como fator hierárquico dentro de grupo.

Na seção 2.2 é apresentado a estrutura dos dados que fundamenta, através da matriz de especificação, o modelo linear utilizado para representar as médias.

Tabela 2.2.1 Estrutura básica dos dados em planejamentos com medidas repetidas.

GRUPO	UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO	CONDIÇÃO DE AVALIAÇÃO 1	...	k	...	p	NOTAÇÃO VETORIAL
1	1	y_{111}	...	y_{11k}	...	y_{11p}	y'_{11}
.	.	.		.		.	.
1	n_1	$y_{n_1 11}$	...	$y_{n_1 1k}$	...	$y_{n_1 1p}$	$y'_{n_1 1}$
.	.	.		.		.	.
j	1	y_{1j1}	...	y_{1jk}	...	y_{1jp}	y'_{1j}
.	.	.		.		.	.
j	i	y_{ij1}	...	y_{ijk}	...	y_{ijp}	y'_{ij}
.	.	.		.		.	.
j	n_j	$y_{n_j j1}$	...	$y_{n_j jk}$	...	$y_{n_j jp}$	$y'_{n_j j}$
.	.	.		.		.	.
g	1	y_{1g1}	...	y_{1gk}	...	y_{1gp}	y'_{1g}
.	.	.		.		.	.
g	n_g	$y_{n_g g1}$	...	$y_{n_g gk}$	...	$y_{n_g gp}$	$y'_{n_g g}$

onde cada $y'_{ij} = (y_{ij1}, \dots, y_{ijp})$, $i=1,\dots,n_j$; $j=1,\dots,g$. O vetor de médias pode ser representado pelo modelo linear

$$E(y) = X\beta \qquad (2.3.2)$$

onde $X_{(np \times q)}$ é a matriz de especificação do modelo de posto q e $\beta_{(q \times 1)}$ o vetor de univariados (Winer,1962 e Timm, 1975).

2.3 MODELO DE DESVIOS MÉDIOS PARA MEDIDAS REPETIDAS

Nesta seção é considerado um delineamento e respectivo modelo, os quais são adequados para uma versão univariada da estrutura de dados identificada na tabela 2.2.1 e tradução das hipóteses formuladas em 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 em termos de parâmetros do modelo.

Note-se que o problema colocado na sua versão multivariada, através da matriz de dados da tabela 2.2.1 passa para uma forma vetorial conforme 2.3.1 para tradução em modelo univariado. Decorrente deste modelo surge uma estrutura para a matriz de variâncias e covariâncias denominada uniforme que é apresentada em 2.3.7.

Neste contexto a tabela usual de análise de variância correspondente é apresentada e as somas de quadrados envolvidas são expressas como formas quadráticas com o auxílio das correspondentes matrizes de projeção (figura 2.3.1). Os testes respectivos às hipóteses de interesse são apresentados e identificados como tendo distribuição F exatos sob a hipótese da matriz de variâncias e covariâncias ter estrutura tipo uniforme.

Considere, então, um experimento com delineamento completamente casualizado em que n indivíduos são subdivididos em g grupos, tal que n_j unidades experimentais são alocadas ao j-ésimo grupo ($j = 1,...,g$), e uma variável resposta é observada em p condições distintas de avaliação sobre cada uma das unidades.

Denotando por y_{ijk} a medida efetuada na k-ésima condição de avaliação, sobre a i-ésima unidade experimental do j-ésimo grupo ($i = 1,...n_j$; $j = 1,...,g$; $k = 1,...,p$), pode-se representar os dados conforme a estrutura da tabela 2.2.1, da forma matricial para a forma vetorial, por empilhamento das linhas. Ou seja, organizando as $n = \sum_{j=1}^{g} n_j$ observações como segue

$$y'_{(np \times 1)} = \left[y'_{11} \; y'_{21} \cdots y'_{n_1 1} \cdots y'_{1g} \; y'_{2g} \cdots y'_{n_g g} \right] \qquad (2.3.1)$$

parâmetros populacionais. A matriz de variâncias e covariâncias do vetor de respostas y é a seguinte

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} \otimes \Sigma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2} \otimes \Sigma_2 \cdots & & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{n_g} \otimes \Sigma_g \end{bmatrix}_{(np \times np)} \qquad (2.3.3)$$

onde $\Sigma^*_{(np \times np)}$ é uma matriz bloco diagonal, simétrica, positiva definida e

$$\Sigma_j = \begin{bmatrix} \sigma_{j11} & \sigma_{j12} & \cdots & \sigma_{j1p} \\ \sigma_{j12} & \sigma_{j22} & \cdots & \sigma_{j2p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sigma_{j1p} & \sigma_{j2p} & \cdots & \sigma_{jpp} \end{bmatrix}_{(p \times p)} \qquad (2.3.4)$$

ou seja, assume-se a mesma matriz de variâncias e covariâncias para todas as unidades pertencentes ao mesmo grupo e entre os indivíduos a covariância é nula. Sob a pressuposição de que $y_{ij} \sim N_p(\mathbf{X}'_{ij}\beta, \Sigma_j)$ para $i = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots g$ então

$$y \sim N_{np}(\mathbf{X}\beta, \Sigma^*) \qquad (2.3.5)$$

O modelo utilizado para representar cada observação, segundo a parametrização por desvios médios, Andrade e Singer(1986), onde é incorporada a estrutura fatorial, tem a seguinte forma

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \pi_{i(j)} + \beta_k + \alpha\beta_{jk} + \pi'_{i(j)k} + \varepsilon_{ijk} \,,$$
$$i = 1,\dots,n_j \,;\, j = 1,\dots,g \,;\, k = 1,\dots,p \qquad (2.3.6)$$

onde

μ : média geral

α_j : efeito do j-ésimo grupo;

β_k : efeito da k-ésima condição de avaliação;

$\alpha\beta_{jk}$: efeito de interação entre o j-ésimo grupo e a k-ésima condição de avaliação;

$\pi_{i(j)}$: efeito aleatório da i-ésima unidade experimental dentro do j-ésimo grupo;

$\pi'_{i(j)k}$: efeito de interação entre a k-ésima condição de avaliação e a i-ésima unidade experimental dentro do j-ésimo grupo;

ε_{ijk} : erro aleatório;

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{g} \alpha_j = \sum_{k=1}^{p} \beta_k = \sum_{j=1}^{g} \alpha\beta_{jk} = \sum_{k=1}^{p} \alpha\beta_{jk} = \sum_{k=1}^{p} \pi'_{i(j)k} = 0$$

sendo

$$\pi_{i(j)} \sim N_{np}(0\,,\sigma^2_{\pi})\,, \pi'_{i(j)k} \sim N_{np}(0\,,\sigma^2_{\pi'})\,, \varepsilon_{ijk} \sim N_{np}(0\,,\sigma^2_{\varepsilon})$$

onde $\pi_{i(j)}$, $\pi'_{i(j)k}$ e ε_{ijk} são conjuntamente independentes, esta última restrição em termos de ε_{ijk}, pressupõe que a estrutura das variâncias e covariâncias entre medidas tomadas em condições distintas sobre a mesma unidade experimental, comum a todos os grupos, tem padrão de uniformidade, ou seja,

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} I_{n_1} \otimes \Sigma & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & I_{n_g} \otimes \Sigma \end{bmatrix}_{(np \times np)} \tag{2.3.7}$$

onde

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(p\,x\,p)} \tag{2.3.8}$$

e $\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\pi'}^2 + \sigma_\pi^2$ e $\rho = \dfrac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\pi'}^2 + \sigma_\pi^2}$.

Esta pressuposição é base do modelo 2.3.6 e sob tal condição serão válidas as inferências sobre os efeitos de grupo, condição e interação grupo x condição de avaliação.

A partir do modelo proposto podemos testar as hipóteses 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, que em termos de parâmetros do modelo 2.3.6 podem ser traduzidos como

H_{01}: $\alpha\beta_{jk} = 0$, $j = 1,...,(g-1)$; $k = 1,...,(p-1)$

H_{02}: $\beta_k = 0$, $k = 1,...,(p-1)$

H_{03}: $\alpha_j = 0$, $j = 1,...,(g-1)$

A partir das somas de quadrados apresentadas na tabela 2.3.1 de análise de variância para medidas repetidas, pode-se testar as hipótese H_{01}, H_{02} e H_{03} através das estatísticas

$$F_{H01} = \frac{(n-g)}{(g-1)} \frac{SQ_3}{SQ_{E2}} \tag{2.3.9}$$

$$F_{H02} = (n-g) \frac{SQ_2}{SQ_{E2}} \tag{2.3.10}$$

$$F_{H03} = \frac{(n-g)}{(g-1)} \frac{SQ_2}{SQ_{E1}} \tag{2.3.11}$$

respectivamente.

Estas estatísticas, sob as respectivas hipóteses nulas, seguem distribuições

Tabela 2.3.1 Análise de variância para delineamentos com medidas repetidas.

Fonte de variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados*
ENTRE		
Grupo	(g-1)	$SQ_1 = p\sum_{j=1}^{g} n_j (y_{\cdot j \cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot})^2$
Erro 1	(n-g)	$SQ_{E1} = p\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij\cdot} - y_{\cdot j \cdot})^2$
DENTRO		
Condição	(p-1)	$SQ_2 = n\sum_{k=1}^{p} (y_{\cdot\cdot k} - y_{\cdot\cdot\cdot})^2$
Grupo x Condição	(g-1)(p-1)	$SQ_3 = \sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{p} n_j (y_{\cdot jk} - y_{\cdot\cdot k} - y_{\cdot j \cdot} + y_{\cdot\cdot\cdot})^2$
Erro 2	(n-g)(p-1)	$SQ_{E2} = \sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{p} (y_{ijk} - y_{\cdot jk} - y_{ij\cdot} + y_{\cdot j \cdot})^2$
TOTAL	(np-1)	$SQ_{total} = \sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{p} (y_{ijk} - y_{\cdot\cdot\cdot})^2$

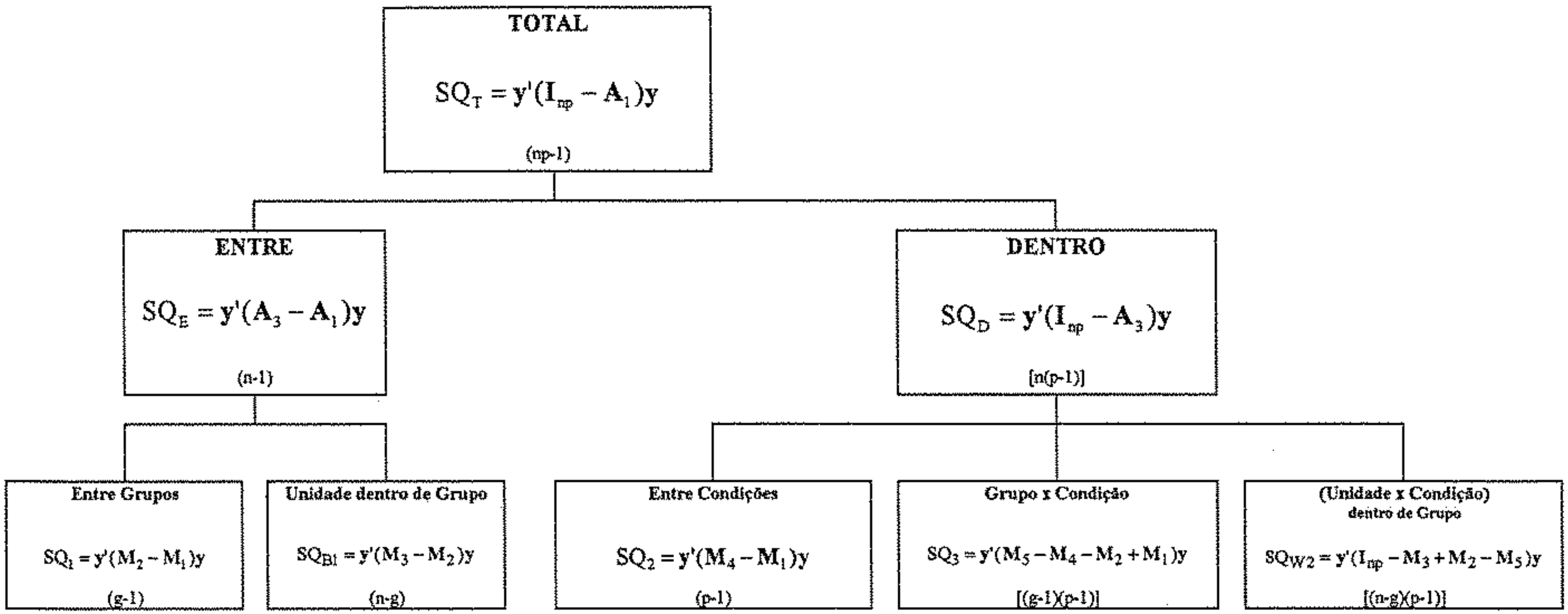
(*) $y_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{gp}\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{p} y_{ijk}$ $\quad y_{\cdot\cdot k} = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_j} \frac{y_{ijk}}{n_j}$

$y_{\cdot j \cdot} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{p} \frac{y_{ijk}}{n_j}$ $\quad y_{\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{gp}\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{p} \frac{y_{ijk}}{n_j}$

exatas F com graus de liberdade iguais a $[(g-1)(p-1) ; (n-g)(p-1)]$, $[(p-1) ; (n-g)(p-1)]$ e $[(g-1) ; (n-g)]$, respectivamente.

As somas de quadrados podem ser representadas em notação vetorial, denominadas formas quadráticas. Um desenho esquemático da decomposição da soma de quadrados nesta notação é apresentado na figura 2.3.1.

Em estudos com delineamentos em medidas repetidas nem sempre é



$$\mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_1 = \frac{1}{np}\mathbf{U}_{np} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1 p}\mathbf{U}_{n_1 p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n_g p}\mathbf{U}_{n_g p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{I}_n \otimes \frac{1}{p}\mathbf{U}_p \qquad \mathbf{A}_4 = \mathbf{U}_n \otimes \frac{1}{n}\mathbf{I}_p \qquad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1}\mathbf{U}_{n_1} \otimes \mathbf{I}_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n_g}\mathbf{U}_{n_g} \otimes \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

Figure 2.3.1 Representação vetorial da partição da soma de quadrados TOTAL em soma de quadrados ENTRE e DENTRO de unidades de investigação e principais somas de quadrados de interesse com os respectivos graus de liberdade.

razoável esperar que a matriz Σ siga o padrão de uniformidade 2.3.8, como exige o modelo 2.3.6. Neste sentido, alguns autores propuseram correções nos graus de liberdade para os casos em que esta matriz tem a forma não estruturada, ou seja,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sigma_{1p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}_{(p \times p)} \tag{2.3.12}$$

A seguir são apresentados alguns procedimentos de análise sob a pressuposição de que a matriz de variância e covariância é não estruturada. Destaca-se a proposição de Box(1954a,1954b), mais especificamente a de Geisser e Greenhouse(1958) sobre o fator de correção no contexto de medidas repetidas.

2.4 TRATAMENTO UNIVARIADO SOB MATRIZ DE VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS NÃO ESTRUTURADA

Nesta seção são apresentados algumas técnicas para correção nos graus de liberdade para a distribuição das estatísticas que decompõem a soma de quadrados DENTRO de unidades de investigação e o procedimento de três estágios os quais viabilizam a utilização do tratamento univariado para delineamentos com medidas repetidas sob matrizes de variâncias e covariâncias não estruturadas.

2.4.1Fator de Correção ε

O fator de correção ε é uma aplicação dos resultados de Box(1954a,b). Uma extensão destes resultados foi desenvolvido por Geisser e Greenhouse(1958), onde é considerado um modelo misto univariado de um experimento com p condições de avaliação, onde n indivíduos são subdivididos em g grupos cada um com n_j elementos, $j=1,...g$; e o vetor de observações y, conforme 2.3.1, onde y tem distribuição normal multivariada com $E(y) = \mu'$ e matriz de variâncias e covariâncias não estruturada (2.3.12).

Particionando-se convenientemente a soma de quadrados TOTAL em cinco parcelas tem-se

$$SQ_1 = y'Ay \qquad SQ_2 = y'Cy$$

$$SQ_{E1} = y'By \qquad SQ_3 = y'Dy$$

$$SQ_{E2} = y'Ey$$

onde

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \qquad \mathbf{C} = \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2 \qquad \mathbf{D} = \mathbf{A}_5 - \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}_{np} - \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_5$$

e

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{np}\mathbf{U}_{np}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1 p}\mathbf{U}_{n_1 p} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdots & \frac{1}{n_g p}\mathbf{U}_{n_g p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{I}_n \otimes \frac{1}{p}\mathbf{U}_p$$

$$A_4 = \frac{1}{n}(U_n \otimes I_p)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} U_{n_1} \otimes I_p & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n_g} U_{n_g} \otimes I_p \end{bmatrix}$$

Para qualquer matriz Σ^*, positiva definida, tem-se

$$A \Sigma^* B = A \Sigma^* E = C \Sigma^* E = D \Sigma^* E = B \Sigma^* E = 0$$

Portanto, pelos resultados de Carpenter(1950), SQ_1 é independente de SQ_{E1} e SQ_{E2}, SQ_2 e SQ_3 são independentes de SQ_{E2}, e SQ_{E1} é independente de SQ_{E2}. Sendo estas formas quadráticas independentes, utilizando-se o teorema 6.1 de Box(1954a), que diz se Q' tem distribuição aproximada $g'\chi^2(h')$ e Q $g\chi^2(h)$ então Q'/Q tem distribuição aproximada bF(h',h), onde

$$b = \frac{K_1(Q')}{K_1(Q)} = \frac{g'h'}{gh},$$

$$h' = \frac{2\,[K_1(Q')]^2}{K_2(Q')}, \qquad e$$

$$h = \frac{2\,[K_1(Q]^2}{K_2(Q)}$$

onde K_s é a s-ésima cumulante da forma quadrática.

A s-ésima cumulante de uma forma quadrática $Q = (y - \mu)' M (y - \mu)$ é dada por

$$K_s(Q) = 2^{s-1}(s-1)! \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s$$

onde $r \leq q$ é o posto de Q e λ_j, $j = 1,...,r$ são os autovalores de ΣM reais e diferentes de zero. Na tabela 2.4.1 estão apresentadas as cumulantes de ordens 1 e 2 desenvolvidas por Geisser e Greenhouse(1958) para as formas quadráticas SQ_1, SQ_{E1}, SQ_2, SQ_3, SQ_{E2} . Na tabela 2.4.2 encontram-se as esperanças dos quadrados médios sob respectivas hipóteses nulas de não haver diferença entre as médias da variável resposta em relação aos grupos, à interação entre condição de avaliação e grupo e à condição de avaliação, sendo $E(y_{ijk}) = \mu_{jk}$ onde y_{ijk} é a medida efetuada na k-ésima condição de avaliação sobre a i-ésima unidade experimental do j-ésimo grupo ($i = 1,...,n_j$; $j = 1,...,g$; $k = 1,...,p$), as médias são denotadas por

$$\mu_{\cdot k} = n^{-1} \sum_{j=1}^{g} n_j \mu_{jk} \quad \text{média da k-ésima condição de avaliação,}$$

$$\mu_{j\cdot} = p^{-1} \sum_{k=1}^{p} \mu_{jk} \quad \text{média do j-ésimo grupo, e}$$

$$\mu_{\cdot\cdot} = p^{-1} \sum_{k=1}^{p} \mu_{\cdot k} \quad \text{média geral.}$$

Pode-se observar, na tabela 2.4.2, que sob as respectivas hipóteses nulas o numerador e o denominador da estatística F_{H01} (2.3.9) estimam a mesma quantidade $\left(\mathrm{tr}\left[\Sigma\left(I - \frac{J}{p}\right)\right]\right)$, assim como o numerador e o denominador da estatística F_{H02} (2.3.10), sob a respectiva hipótese nula.

O numerador e o denominador da estatística F_{H03} (2.3.11), sob a respectiva hipótese nula, estimam a mesma quantidade $\left(\mathrm{tr}\left[\Sigma\left(\frac{J}{p}\right)\right]\right)$.

Assim, segundo o teorema 6.1 de Box(1954,a), as estatísticas F_{H01} e F_{H02}, sob as respectivas hipóteses nulas, têm distribuição aproximada F com $[(g-1)(p-1)\varepsilon\ ;\ (n-g)(p-1)\varepsilon]$ e $[(p-1)\varepsilon\ ;\ (n-g)(p-1)\varepsilon]$ graus de liberdade, respectivamente, onde

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{tr}\left[\Sigma\left(I - \frac{J}{p}\right)\right]^2}{\mathrm{tr}\left\{\left[\Sigma\left(I - \frac{J}{p}\right)\right]^2\right\}(p-1)} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k\right)^2}{(p-1)\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^2}$$

e as quantidades λ_k , $k = 1,...,(p-1)$ são autovalorespositivoss e não nulos de $\Sigma\left(I - \frac{J}{p}\right)$ e conseqüentemente $\varepsilon \geq (p-1)^{-1}$.

Note que F_{H03}, sob a respectiva hipótese nula, tem distribuição exata F com

Tabela 2.4.1 Cumulantes

Formas Quadráticas	$K_s(Q) = s^{(s-1)}(s-1)! \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^s$	
	$s = 1$	$s = 2$
SQ_1	$(g-1)a + \sum_{j=1}^{g} n_j (\mu_{j\cdot} - \mu_{\cdot\cdot})^2$	$2(g-1)c$ se $\mu_{j\cdot} = \mu_{\cdot\cdot}$
SQ_{E1}	$(n-g)a$	$2(n-g)c$
SQ_2	$b + n\sum_{k=1}^{p} (\mu_{\cdot k} - \mu_{\cdot\cdot})^2$	$2d$ se $\mu_{\cdot k} = \mu_{\cdot\cdot}$
SQ_3	$(g-1)b + \sum_{j=1}^{g} n_j \sum_{k=1}^{p} (\mu_{jk} - \mu_{\cdot k} - \mu_{j\cdot} + \mu_{\cdot\cdot})^2$	$2(g-1)$ se $\mu_{jk} - \mu_{\cdot k} - \mu_{j\cdot} + \mu_{\cdot\cdot} = 0$
SQ_{E2}	$(n-g)b$	$2(n-g)d$

$a = tr\left[\Sigma\,(U/p)\right]$, $b = tr\left[\Sigma\,(I - U/p)\right]$, $c = tr\left\{\left[\Sigma\,(U/p)\right]^2\right\}$, $d = tr\left\{\left[\Sigma\,(I - U/p)\right]^2\right\}$

[(g-1);(n-g)] graus de liberdade pois o fator de correção é

$$\varepsilon = \frac{2.\left\{tr\left[\Sigma\,(U/p)\right]\right\}^2}{2.\,tr\left\{\left[\Sigma\,(U/p)\right]^2\right\}} = 1$$

ou seja, a distribuição de F_{H03} independe da estrutura de Σ.

2.4.2 Procedimento de três estágios

Box(1954,a) demonstrou que os valores extremos de ε são $(p-1)^{-1}$ e 1. Com esses valores extremos obtêm-se um teste muito conservativo ou muito liberal. Greenhouse e Geisser(1959) propuseram o procedimento de três estágios onde utiliza-se estes valores limites do fator de correção ε. O procedimento é o seguinte

Tabela 2.4.2 Quadrado médio (QM) e esperanças (EQM) sob as respectivas hipóteses nulas.

QM	EQM
$\frac{SQ_1}{(g-1)}$	a
$\frac{SQ_{E1}}{(n-g)}$	a
$\frac{SQ_2}{(p-1)}$	$\frac{b}{(p-1)}$
$\frac{SQ_3}{[(g-1)(p-1)]}$	$\frac{b}{(p-1)}$
$\frac{SQ_{E2}}{[(n-g)(p-1)]}$	$\frac{b}{(p-1)}$

$a = tr\left[\Sigma\,(U/p)\right],\ b = tr\left[\Sigma\,\left(I - U/p\right)\right]$

a) Utiliza-se o valor $\varepsilon = 1$ obtendo-se um teste exato F liberal (F_L). Se o teste for não significativo, não se rejeita a hipótese nula, pois se fosse necessário fazer uma correção os graus de liberdade diminuiriam e a probabilidade de significância associada seria maior do que num teste liberal; neste caso o procedimento é encerrado. Caso contrário passa-se ao estágio seguinte;

b) utiliza-se o valor $\varepsilon = (p-1)^{-1}$ obtendo-se um teste exato F conservativo (F_C). Se o teste for significativo rejeita-se a hipótese nula e o procedimento é encerrado, uma vez que esta é a maior redução possível nos graus de liberdade; caso contrário passa-se para o estágio seguinte;

c) utiliza-se o teste aproximado F (F_A) estimando-se ε, denotado por $\hat{\varepsilon}$, a partir da matriz de variâncias e covariâncias amostral. Onde

$$\hat{\varepsilon} = \frac{tr\left[S\left(I - 1/p\right)\right]^2}{tr\left\{\left[S\left(I - 1/p\right)\right]^2\right\}}$$

onde

$$S = \sum_{j=1}^{g} \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(y_{ij} - y_{\cdot j})(y_{ij} - y_{\cdot j})'}{(n_j - 1)}$$

2.4.3 Fator de correção $\tilde{\varepsilon}$

Collier e cols.(1967) e Stoloff(1970) concluíram, através de simulações, que $\hat{\varepsilon}$ é negativamente viciado para valores próximos de 1 e positivamente viciado para valores baixos de ε. Huynh e Feldt(1976) desenvolveram um estimador $\tilde{\varepsilon}$ menos viciado do que $\hat{\varepsilon}$ quando $\varepsilon \geq 0{,}75$.

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{[n(p-1)\,\hat{\varepsilon} - 2]}{(p-1)[n - g - (p-1)\,\hat{\varepsilon}]}$$

Nos casos em que $\tilde{\varepsilon}$ for maior do que um, adota-se o valor $\tilde{\varepsilon} = 1$ já que este é o valor máximo para o fator de correção.

2.4.4 Testes GA ("General Approximate Test") e IGA ("Improved General Approximate Test")

Box(1954,a) estudou as distribuições aproximadas para as estatísticas F_{H01} e F_{H02} nos casos em que a matriz de variâncias e covariâncias Σ não é estruturada e pode ser diferente para cada grupo, ou seja, Σ^* tem a forma 2.3.3. As estatísticas F_{H01} e F_{H02} são aproximadamente distribuídas como cF(h",h) e bF(h',h), respectivamente. Onde as constantes b, c, h, h' e h" são dadas por

$$b = \frac{(n-g)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}\overline{\Sigma})}{\sum_{j=1}^{g}(n_j-1)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}\Sigma_j)}$$

$$c = \frac{(n-g)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{G}\tilde{\Sigma})}{(g-1)\sum_{j=1}^{g}(n_j-1)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}\Sigma_j)}$$

$$h = \frac{\left[\sum_{j=1}^{g}(n_j-1)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}\Sigma_j)\right]^2}{\sum_{j=1}^{g}(n_j-1)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}\Sigma_j)^2}$$

$$h' = \frac{[\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}\overline{\Sigma})]^2}{\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}\overline{\Sigma})^2}$$

$$h'' = \frac{[\mathrm{tr}\,(\mathbf{G}\tilde{\Sigma})]^2}{\mathrm{tr}\,(\mathbf{G}\tilde{\Sigma})^2}$$

onde

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}_p - \frac{\mathbf{U}_p}{p}$$

$$\overline{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{g} n_j\,\Sigma_j$$

$$\tilde{\Sigma} = \mathrm{diag}\left[\frac{\Sigma_1}{n_1}, \cdots, \frac{\Sigma_g}{n_g}\right]$$

$$G = \begin{bmatrix} n_1\left(1-\frac{n_1}{n}\right) & \frac{-n_1 n_2}{n} & \cdots & \frac{-n_1 n_g}{n} \\ \frac{-n_1 n_2}{n} & -n_2\left(1-\frac{n_2}{n}\right) & \cdots & \frac{-n_2 n_g}{n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{-n_1 n_g}{n} & \frac{-n_2 n_g}{n} & \cdots & n_g\left(1-\frac{n_g}{n}\right) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{D}$$

Huynh(1978) propuseram duas maneiras de estimar as constantes b, c, h, h' e h''.

O teste GA propõe a substituição de Σ_j, $j=1,\ldots g$ pelas suas respectivas estimativas não viciadas S_j obtendo as estimativas $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{h}$, $\hat{h}'$, $\hat{h}''$ onde

$$S_j = (n_j - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - y_{\cdot j})(y_{ij} - y_{\cdot j})' \,, \qquad j=1,\ldots,g$$

Quando o fator de correção é próximo de um, o teste IGA é preferível ao GA.

No teste IGA as estimativas são dadas por

$$\tilde{b} = \hat{b}$$

$$\tilde{c} = \hat{c}$$

$$\tilde{h} = \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\delta}}$$

$$\tilde{h}' = \frac{n\hat{h}' - 2}{n - g - \hat{h}'}$$

$$\tilde{h}'' = \frac{(g-1)[n\hat{h}'' - 2(g-1)]}{(n-g)(g-1) - \hat{h}''}$$

onde

$$\tilde{\eta} = \sum_{j=1}^{g} \frac{(n_j - 1)^3}{(n_j + 1)(n_j - 2)} (n_j a_j^2 - 2 b_j) + \sum_{j \neq j'} (n_j - 1)(n_{j'} - 1)_j a_j a_{j'}$$

$$\tilde{\delta} = \sum_{j=1}^{g} \frac{(n_j - 1)^2}{(n_j + 1)(n_j - 2)} [(n_j - 1) b_j - a_j^2]$$

sendo

$$a_j = \text{tr}(\mathbf{DS}_j) \ \text{ e } \ b_j = \text{tr}(\mathbf{DS}_j)^2$$

Portanto quando a matriz de variâncias e covariâncias é não estruturada, pode-se usar uma das técnicas anteriores ou recorrer à análise multivariada (Timm, 1975).

A exigência do padrão de uniformidade é relaxada pelos resultados de Huynh e Feldt(1970), estes são abordados no próximo capítulo onde são apresentados as condições necessárias e suficientes para obter-se estatísticas distribuídas como múltiplos de qui-quadrados independentes e conseqüentemente estatísticas obtidas pelas razões destas serão distribuídas como F exatas.

3. Condições necessárias e suficientes para que formas quadráticas se distribuam como múltiplos de qui-quadrados independentes

grupo, sejam iguais; de outra forma uma extensão do problema de Behrens-Fisher (Mardia, 1979) deveria ser utilizada.

No tratamento univariado, a estrutura tipo H para Σ é testada para o número de condições de avaliação maior ou igual a três; porém não se tem considerado quais modificações esta estrutura provoca na análise multivariada. Os procedimentos não são equivalentes e a comparação entre os tratamentos faz parte de investigação futura. Cabe salientar, que a estrutura emergente deste tratamento no contexto de medidas repetidas, não são particulares deste, podendo ocorrer em situações mais gerais, onde os resultados obtidos são aplicáveis.

3.2 EXTENSÃO DO TEOREMA DE COCHRAN PARA VARIÁVEIS DEPENDENTES E ESTRUTURA DA MATRIZ DE VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS

A distribuição exata F na análise de variância é decorrência de razão entre distribuições das formas quadráticas envolvidas com as decomposições de interesse. No contexto de medidas repetidas, a hipótese de independência entre observações não é razoável, trata-se portanto de reformular os teoremas básicos de análise de variância.

O objetivo desta seção é derivar condição necessária e suficiente para obter distribuição exata F ou, equivalentemente, tratando de forma geral a decomposição de uma forma quadrática de um vetor aleatório com estrutura de correlação, obter soma de qui-quadrados independentes. Trata-se portanto de contexto de análise de variância recuperado através de matrizes simétricas e idempotentes com propriedades já bastante exploradas e neste trabalho consideradas na presença de correlação.

Com este intuito, a seção é estruturada em uma seqüência de teoremas necessários ao resultado principal no teorema 3.2.3, que é uma extensão do teorema de Cochran(1934).

O teorema 3.2.1, a seguir, trata de um resultado algébrico necessário como parte do resultado principal do teorema 3.2.3.

TEOREMA 3.2.1 (James, 1952) Sejam $\mathbf{A}_i$, $i=1,\dots,s$, matrizes de ordem n, $r(\mathbf{A}_i) = n_i$, simétricas tais que $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{A}_i$. Então as três condições seguintes são equivalentes

1) $\mathbf{A}_i$ é idempotente, $i=1,\dots,s$

2) $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$, $i,j=1,\dots,s$

3) $n = \sum_{i=1}^{s} n_i$

Prova

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Seja $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{A}_i$, de ordem n, onde $\mathbf{A}_i$, $i=1,\dots,s$, são idempotentes e simétricas, $r(\mathbf{A}_i) = n_i$, então, pelo teorema 2 de matrizes idempotentes (Apêndice A), existe uma matriz ortogonal **T** tal que

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}_i\mathbf{T} = \Lambda_i$$

onde Λ_i é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são 1 e 0, e

$$\Lambda_i\Lambda_j = \mathbf{0}, \quad i \neq j, \quad i,j=1,\dots,s$$

portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \Lambda_i\Lambda_j &= \mathbf{T}'\mathbf{A}_i\mathbf{T}\mathbf{T}'\mathbf{A}_j\mathbf{T} \\ &= \mathbf{T}'\mathbf{A}_i\mathbf{I}\mathbf{A}_j\mathbf{T} \\ &= \mathbf{T}'\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j\mathbf{T} \end{aligned}$$

ou seja

$$\mathbf{T'A_iA_jT} = \mathbf{0} \tag{3.2.1}$$

pré multiplicando 3.2.1 por **T** e pós multiplicando por **T'** tem-se

$$\mathbf{A_iA_j} = \mathbf{0}$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Para qualquer que seja i = 1,...,s tem-se

$$\mathbf{A_i} = \mathbf{A_iI} = \mathbf{A_i} \sum_{j=s}^{s} \mathbf{A_j} = \sum_{j=s}^{s} \mathbf{A_i A_j} \tag{3.2.2}$$

seja $\mathbf{A_iA_j} = \mathbf{0}$, $i \neq j$, $i,j=1,...,s$, então 3.2.2 se reduz a

$$\mathbf{A_i} = \mathbf{A_i^2}$$

isto é, $\mathbf{A_i}$ é idempotente.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$

Pelo teorema 2 de matrizes idempotentes (Apêndice A) tem-se que

$$\mathbf{T'A_iT} = \Lambda_i$$

pois $\mathbf{A_i}$, $i=1,..,s$ é idempotente, e

$$r(\mathbf{A_i}) = r(\Lambda_i) = tr(\Lambda_i) = n_i$$

Como $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{A_i}$ e **T** é uma matriz ortogonal tem-se

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{T'A_iT} = \sum_{i=1}^{s} \Lambda_i \tag{3.2.3}$$

aplicando o traço nos dois membros de 3.2.3 segue que

$$\mathrm{tr}(\mathrm{I}) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{s} \Lambda_i\right)$$

$$n = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{tr}(\Lambda_i) = \sum_{i=1}^{s} n_i$$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$

Seja $\mathbf{T}_j$ uma matriz ortogonal de autovetores de $\mathbf{A}_j$, então para cada $j = 1,\ldots,s$, tem-se

$$\mathbf{T}_j'\mathbf{T}_j = \mathbf{I} = \mathbf{T}_j'\mathbf{I}\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_j'\left(\sum_{i=1}^{s} \mathbf{A}_i\right)\mathbf{T}_j$$

$$= \mathbf{T}_j'\mathbf{A}_j\mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j'\left(\sum_{i\neq j}^{s} \mathbf{A}_i\right)\mathbf{T}_j$$

$$= \Lambda_j + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

logo $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{0}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{I}_{(n-n_j)x(n-n_j)}$

$$r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) = r\left[\mathbf{T}_j'\left(\sum_{i\neq j}^{s} \mathbf{A}_i\right)\mathbf{T}_j\right]$$

$$= r\left(\sum_{i\neq j}^{s} \mathbf{T}_j'\mathbf{A}_i\mathbf{T}_j\right)$$

$$\leq \sum_{i\neq j}^{s} r(\mathbf{T}_j'\mathbf{A}_i\mathbf{T}_j)$$

$$\leq \sum_{i\neq j}^{s} r(\mathbf{A}_i) = n - r(\mathbf{A}_j) = n - n_j$$

como

$$r(\mathrm{I}) = n = r\left(\Lambda_j + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right)$$

$$\leq n_j + r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) \leq n_j + (n - n_j) = n$$

tem-se

$$r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) = n - n_j \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

portanto,

$$\mathbf{T}_j'\mathbf{A}_j\mathbf{T}_j = \Lambda_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ou seja, os autovalores de $\mathbf{A}_j$ são 1 ou 0, e pelo teorema 1 de matrizes idempotentes (Apêndice A), $\mathbf{A}_j$ é idempotente.

O diagrama abaixo resume a demonstração do teorema 3.2.1.

$$2 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 3$$

Portanto, as três condições são equivalentes. ■

O lema a seguir garante a existência de uma transformação linear, através da qual uma forma quadrática reduz-se a uma soma ponderada de quadrados.

LEMA 3.2.1 Considere uma forma quadrática $Q = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$, onde $\mathbf{y}$ é um vetor n-variado com matriz de variâncias e covariâncias Σ. Então existe uma transformação linear $\mathbf{z} = \mathbf{TPy}$, onde $\mathbf{P}$ é uma matriz não singular e $\mathbf{T}$ uma matriz ortogonal tal que $Q = \sum_{v=1}^{r(A)} \lambda_v z_v^2$, onde $\lambda_1, \ldots ,\lambda_{r(A)}$ são autovalores positivos e não nulos de $\mathbf{A}\Sigma$.

Prova

Como Σ é positiva definida, existe uma matriz não singular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}\Sigma\mathbf{P}' = \mathbf{I}$ ou seja

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})' \tag{3.2.4}$$

Sendo **A** simétrica e idempotente então $(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ é simétrica, positiva semi-definida, portanto existe uma matriz **T** tal que

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}' = \Lambda \tag{3.2.5}$$

onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & \lambda_{r(A)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{r(A)}$ são autovalores positivos e não nulos de $(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$, então de 3.2.5

$$\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda\mathbf{T}$$

pós multiplicando por $(\mathbf{P}^{-1})'$ tem-se

$$\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})' = \mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda\mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})'$$

de 3.2.4

$$\mathbf{A}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda\mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})' \tag{3.2.7}$$

como $(\mathbf{P}'\mathbf{T}')^{-1} = \mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})'$, então $\mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})'$ é a matriz que diagonaliza $\mathbf{A\Sigma}$, portanto, os elementos diagonais de Λ são também autovalores de $\mathbf{A\Sigma}$.

Analogamente à derivação de 3.2.5

$$(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A} = \mathbf{T}'\Lambda\mathbf{T}\mathbf{P} \tag{3.2.8}$$

pré multiplicando 3.2.8 por $\mathbf{P}^{-1}$, segue

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}'\Lambda\mathbf{T}\mathbf{P}$$

de 3.2.4

$$\Sigma\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}'\Lambda\mathbf{T}\mathbf{P}$$

como $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}')^{-1} = \mathbf{TP}$ então $\mathbf{TP}$ é a matriz que diagonaliza $\Sigma\mathbf{A}$, portanto, os elementos diagonais de Λ também são autovalores de $\Sigma\mathbf{A}$.

Portanto, definindo a transformação $\mathbf{z} = \mathbf{TPy}$ segue que

$$Q = \mathbf{z}'\mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{z} = \mathbf{z}'\Lambda\mathbf{z} = \sum_{v=1}^{r(A)} \lambda_v z_v^2$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r(A)}$ são autovalores positivos e não nulos de $A\Sigma$ bem como de ΣA. ■

O teorema 3.2.2, a seguir, é uma reedição do teorema 2.1 de Box(1954,a). A reedição acontece por permitir que as observações não sejam centradas, logo, para efeito do teste, fica formulado a função de variáveis aleatórias não centrais de cuja distribuição de probabilidade depende o tratamento sob hipóteses alternativas, e também por definir a distribuição de uma forma quadrática sob matrizes de variâncias e covariâncias não estruturadas podendo ser distintas para cada grupo.

TEOREMA 3.2.2 Seja $y \sim N_n(\mu, \Sigma)$, onde μ é o vetor de médias e Σ é a matriz de variâncias e covariâncias, então a forma quadrática $Q = y'Ay$ é distribuída como uma combinação linear de qui-quadrados não centrais independentes.

Prova

Seja a forma quadrática $Q=y'Ay$ onde $y \sim N_n(\mu, \Sigma)$ então, pelo lema 3.2.1, existe uma transformação linear $\mathbf{z} = \mathbf{TPy}$, onde $\mathbf{P}$ é uma matriz não singular e $\mathbf{T}$ uma matriz ortogonal tal que

$$Q = y'Ay = z'\Lambda z = \sum_{v=1}^{r(A)} \lambda_v z_v^2$$

e neste caso, $\mathbf{z} \sim N_n(\mathbf{TP}\mu, \mathbf{I})$, então

$$Q = y'Ay = z'\Lambda z = \sum_{v=1}^{r(A)} \lambda_v \chi^2$$

onde $\chi^2 \sim \chi^2(1,\delta_A)$, ou seja, z_v^2 tem distribuição qui-quadrado não central de parâmetro δ_A de não centralidade e 1 grau de liberdade, e as quantidades $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r(A)}$ são autovalores positivos e não nulos de ΣA. ■

O resultado do lema 3.2.2 será utilizado na demostração do teorema 3.2.3. A condição $A\Sigma A = \lambda_A A$ provém do artigo de Huynh e Feldt(1970) a qual é necessária e suficiente para que a forma quadrática se distribua como um múltiplo de qui-quadrado, estruturando a matriz de variâncias e covariâncias.

LEMA 3.2.2 Seja Σ positiva definida como em 2.3.3 se $A\Sigma A = \lambda_A A$ então λ_A é autovalor de ΣA com multiplicidade $r(A)$.

Prova

Do lema 3.2.1, tem-se

$$\Sigma = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})' \tag{3.2.9}$$

e

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda_A\mathbf{T}\mathbf{P} \tag{3.2.10}$$

onde Λ_A é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são autovalores de $\Sigma\mathbf{A}$.

Seja $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A} = \lambda_A\mathbf{A}$ por 3.2.9 e 3.2.10 segue que

$$\mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda_A\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda_A\mathbf{T}\mathbf{P} = \lambda_A\,\mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda_A\mathbf{T}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda_A^2\mathbf{T}\mathbf{P} = \lambda_A\,\mathbf{P}'\mathbf{T}'\Lambda_A\mathbf{T}\mathbf{P}$$

ou seja $\lambda_v^2 = \lambda_A\lambda_v$, v=1,...,r(A), onde λ_v são autovalores positivos e não nulos. Então $\lambda_v = \lambda_A$, r=1,...,r(A), isto é, λ_A é autovalor de ΣA de multiplicidade r(A). ■

O teorema 3.2.3 trata de condições necessárias e suficientes para que formas quadráticas de multinormais, não necessariamente independentes, se distribuam como múltiplo de qui-quadrados independentes. Neste sentido é uma extensão do teorema de Cochran(1934) na versão univariada. Extensão porque permite dependência entre as componentes da multinormal na forma quadrática.

Há que se recuperar aqui a inspiração no contexto de medidas repetidas e particularmente nos resultados de Huynh e Feldt(1970). De fato, a justificativa para tratar formas quadráticas reais derivadas de multinormais repousa na natureza intrinsecamente univariada das componentes de mesma origem e mesma escala.

Neste contexto, em particular no caso de medidas repetidas, Huynh e Feldt(1970) derivaram a estrutura tipo H de Σ, matriz de variâncias e covariâncias, que viabiliza o tratamento univariado através de testes exatos. Neste sentido o teorema 3.2.3 é uma versão generalizada do resultado de Huynh e Feldt(1970), a matriz tipo H é resultado da solução do sistema formado pelos elementos da igualdade $A_D\Sigma A_D=\lambda A_D$ (fixando-se $p+1$ constantes), onde A_D é a matriz de projeção da soma de quadrados denominada DENTRO, tratado como conseqüência do teorema 3.2.3, adiante.

TEOREMA 3.2.3 Seja $y \sim N_n(\mu,\Sigma)$, onde μ é o vetor de médias e Σ matriz de variâncias e covariâncias. Seja $A_i\Sigma A_i = \lambda_i A_i$, onde λ_i é o autovalor de ΣA_i de multiplicidade $r(A_i)$, e A_i, $i=1,\dots,s$, matrizes simétricas de ordem n, com posto denotado por $r(A_i) = n_i$ tais que $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{s} A_i$. Então as seguintes condições são equivalentes

1) $y'A_iy$ independe de $y'A_jy$, $i\neq j$, $i,j=1,\dots,s$.

2) $A_i\Sigma A_j = \mathbf{0}$, $i\neq j$, $i,j=1,\dots,s$.

3) $A_{i_t}\Sigma A_{i_t} = \lambda_i A_{i_t}$, $i=1,\dots,s$, $t=1,\dots,m$, onde A_{i_t}, $t=1,\dots,m$ são matrizes idempotentes e $A_i=\sum_{t=1}^{m} A_{i_t}$.

4) $y'A_iy \sim \lambda_i\chi^2(n_i,\delta_i)$, $i=1,\dots,s$.

5) $y'A_{i_t}y \sim \lambda_i\chi^2(n_{i_t},\delta_i)$, $i=1,\dots,s$, $t=1,\dots,m$, onde $A_i=\sum_{t=1}^{m} A_{i_t}$ e $n_{i_t} = r(A_{i_t})$.

Prova

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Seja $y'A_iy$ independente de $y'A_jy$, $i\neq j$, $i,j=1,\dots,s$, então as funções $\mathbf{w} = A_iy$ e $\mathbf{z} = A_jy$, são independentes, ou seja

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{cov}(\mathbf{w}, \mathbf{z}') &= \operatorname{cov}(A_iy, y'A_j) \\ &= A_i\Sigma A_j \end{aligned}$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

$A_i \Sigma A_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,s$, ou seja

$$\mathbf{0} = A_i \Sigma A_j = \mathrm{cov}(A_i y\,,\, y' A_j) = \mathrm{cov}(\mathbf{w}\,,\, \mathbf{z}')$$

então como $A_i y$ e $A_j y$ são multinormais (porque são combinações lineares de multinormais) segue-se que são independentes.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$

$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{m} A_i$ então $A_j = \mathbf{I} - \sum_{k \neq j}^{m} A_k$, seja $A_i \Sigma A_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$, então

$$A_i \Sigma \left(\mathbf{I} - \sum_{k \neq j}^{m} A_k \right) = \mathbf{0}$$

$$A_i \Sigma - A_i \Sigma \left(\sum_{k \neq j}^{m} A_k \right) = \mathbf{0} \tag{3.2.11}$$

Como $A_i \Sigma A_j = \mathbf{0}$, 3.2.11 reduz-se a

$$A_i \Sigma - A_i \Sigma A_i = \mathbf{0}$$

$$A_i \Sigma = A_i \Sigma A_i \tag{3.2.12}$$

mas, por hipótese, $A_i \Sigma A_i = \lambda_i A_i$, então de 3.2.12

$$A_i \Sigma = \lambda_i A_i$$

fazendo $A_i = \sum_{t=1}^{m} A_{i_t}$, onde A_{i_t} é idempotente

$$\sum_{t=1}^{m} A_{i_t} \Sigma = \lambda_i \sum_{t=1}^{m} A_{i_t} \tag{3.2.13}$$

Pela conseqüência (i) de matrizes idempotentes (Apêndice A), tem-se

$$\Lambda_{i_t}\Lambda_{i_t} = \mathbf{0}, \quad t \neq k, \quad t,k = 1,\ldots,m$$

ou seja,

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}_{i_t}\mathbf{T}\mathbf{T}'\mathbf{A}_{i_t}\mathbf{T} = \mathbf{0}$$

como T é ortogonal

$$\mathbf{A}_{i_t}\mathbf{A}_{i_t} = \mathbf{0}, \quad t \neq k, \quad t,k = 1,\ldots,m$$

Então pós multiplicando 3.2.13 por $\mathbf{A}_{i_t}$, $t=1,\ldots,m$ obtêm-se as igualdades

$$\begin{array}{lll}
\text{para} & t = 1 \Rightarrow & \mathbf{A}_{i_1}\Sigma\mathbf{A}_{i_1} = \lambda_i\mathbf{A}_{i_1} \\
 & t = 2 \Rightarrow & \mathbf{A}_{i_2}\Sigma\mathbf{A}_{i_2} = \lambda_i\mathbf{A}_{i_2} \\
 & \quad\vdots & \qquad\vdots \\
 & t = m \Rightarrow & \mathbf{A}_{i_m}\Sigma\mathbf{A}_{i_m} = \lambda_i\mathbf{A}_{i_m}
\end{array}$$

ou seja

$$\mathbf{A}_{i_t}\Sigma\mathbf{A}_{i_t} = \lambda_i\mathbf{A}_{i_t}, \quad t=1,\ldots,m$$

onde, pelo lema 3.2.2, λ_i é autovalor de $\Sigma\mathbf{A}_{i_t}$ de multiplicidade $r(\mathbf{A}_{i_t})$.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$

Seja $\mathbf{A}_{i_t}\Sigma\mathbf{A}_{i_t} = \lambda_i\mathbf{A}_{i_t}$, somando sobre o índice t, tem-se

$$\sum_{t=1}^{m}\left(\mathbf{A}_{i_t}\,\Sigma\,\mathbf{A}_{i_t}\right) = \lambda_i\left(\sum_{t=1}^{m}\mathbf{A}_{i_t}\right) \tag{3.2.14}$$

como $\mathbf{A}_i = \sum_{t=1}^{m}\mathbf{A}_{i_t}$, então a igualdade 3.2.14 pode ser reescrita como

$$A_i\Sigma A_i + 2\sum_{t\neq k}^{m}\left(A_{i_t}\Sigma A_{i_t}\right) = \lambda_i A_i \tag{3.2.15}$$

pós multiplicando 3.2.15 por A_i tem-se

$$A_i\Sigma A_i + 2\sum_{t\neq k}^{m}\left(A_{i_t}\Sigma A_{i_t}\right)\sum_{t=1}^{m} A_{i_t} = \lambda_i A_i$$

ou seja $A_i\Sigma A_i = \lambda_i A_i$, pois $A_{i_t} A_{i_k} = \mathbf{0}$, $t \neq k$. Analogamente $A_j\Sigma A_j = \lambda_j A_j$, então

$$A_i\Sigma A_i + A_j\Sigma A_j = \lambda_i A_i + \lambda_j A_j$$

$$(A_i + A_j)\Sigma(A_i + A_j) - 2\,A_i\Sigma A_j = \lambda_i A_i + \lambda_j A_j \tag{3.2.16}$$

pós multiplicando 3.2.16 por A_j tem-se

$$A_i\Sigma A_j + A_j\Sigma A_j - 2\,A_i\Sigma A_j = \lambda_j A_j$$

$$A_i\Sigma A_j = A_j\Sigma A_j - \lambda_j A_j$$

mas $A_j\Sigma A_j = \lambda_j A_j$, então

$$A_i\Sigma A_j = \mathbf{0}$$

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$

Pelo teorema 3.2.1 existe uma matriz não singular **P** e uma matriz ortogonal **T** tais que

$$\Sigma = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})' \tag{3.2.17}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})'A_{i_t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}' = \Lambda_{i_t} \tag{3.2.18}$$

onde Λ_{i_t} é uma matriz diagonal cujos elementos são autovalores de $(\mathbf{P}^{-1})'A_{i_t}\mathbf{P}^{-1}$. Pré multiplicando 3.2.18 por **P'T'** e pós multiplicando por **TP** obtém-se

$$A_{i_t} = P'T'\Lambda_{i_t}TP \tag{3.2.19}$$

Seja $A_{i_t}\Sigma A_{i_t} = \lambda_i A_{i_t}$, onde λ_i é autovalor de ΣA_{i_t}, por 3.2.17 e 3.2.19

$$P'T'\Lambda_{i_t}TPP^{-1}(P^{-1})'P'T'\Lambda_{i_t}TP = \lambda_i P'T'\Lambda_{i_t}TP$$

sendo **P** uma matriz não singular e **T** ortogonal, segue

$$P'T'\Lambda_{i_t}^2TP = \lambda_i P'T'\Lambda_{i_t}TP$$

pela igualdade acima

$$\lambda_{i_{t_v}}^2 = \lambda_i \lambda_{i_{t_v}},\ v=1,\ldots,r(A_{i_t})$$

onde $\lambda_{i_{t_v}}$ são autovalores positivos e não nulos de ΣA_{i_t}, então

$$\lambda_{i_{t_v}} = \lambda_i,\ v=1,\ldots,r(A_{i_t}) \tag{3.2.20}$$

pelo lema 3.2.2, $y'A_{i_t}y \sim \sum_{v=1}^{r(A_{i_t})} \lambda_{i_{t_v}} \chi^2(1, \delta_{i_t})$, por 3.2.20, $y'A_{i_t}y \sim \lambda_i \sum_{t=1}^{r(A_{i_t})} \chi^2(1, \delta_{i_t})$.

$\boxed{4 \Rightarrow 3}$

Pelo teorema 3.2.1, existe uma transformação linear **z = TPy** tal que

$$y'A_{i_t}y = \sum_{v=1}^{r(A_{i_t})} \lambda_{i_{t_v}} \chi^2(1, \delta_{i_t}) \tag{3.2.21}$$

onde $\lambda_{i_{t_v}}$, $v=1,\ldots,r(A_{i_t})$ são autovalores positivos e não nulos de ΣA_{i_t}

Para que a forma quadrática $y'A_{i_t}y$ seja distribuída como um múltiplo de qui-quadrado, segundo resultado de Baldessari(1965), $\lambda_{i_{t_v}} = \lambda$, $v=1,\ldots,r(A_{i_t})$, ou seja

$$y'A_{i_t}y = z'T(P^{-1})'A_{i_t}P^{-1}T'z = \lambda\, z'I_{i_t}^*z \tag{3.2.22}$$

onde

$$\mathbf{I}_{it}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r(A_{it})} & \mathbf{0}_{r(A_{it}) \times r(A_{it})} \\ \mathbf{0}_{[n - r(A_{it})] \times r(A_{it})} & \mathbf{0}_{[n - r(A_{it}) \times r(A_{it})]} \end{bmatrix}$$

de 3.2.22 tem-se

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A}_{it}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}' = \lambda\, \mathbf{I}_{it}^{*}$$

ou seja

$$\mathbf{A}_{it} = \lambda\, \mathbf{P}'\mathbf{T}'\mathbf{I}_{it}^{*}\mathbf{T}\mathbf{P} \tag{3.2.23}$$

mas **P** é uma matriz não singular tal que

$$\Sigma = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})' \tag{3.2.24}$$

pré e pós multiplicando 3.2.24 por $\mathbf{A}_{it}$ obtém-se

$$\mathbf{A}_{it}\Sigma\mathbf{A}_{it} = \mathbf{A}_{it}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{A}_{it} \tag{3.2.25}$$

por 3.2.23 segue que 3.2.25 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{it}\Sigma\mathbf{A}_{it} &= \lambda^{2}\mathbf{P}'\mathbf{T}'\mathbf{I}_{it}^{*}\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{P}'\mathbf{T}'\mathbf{I}_{it}^{*}\mathbf{T}\mathbf{P} \\ &= \lambda^{2}\mathbf{P}'\mathbf{T}'(\mathbf{I}_{it}^{*})^{2}\mathbf{T}\mathbf{P} \end{aligned}$$

mas $\mathbf{I}_{i}^{*2} = \mathbf{I}_{i}^{*}$ então

$$\mathbf{A}_{it}\Sigma\mathbf{A}_{it} = \lambda^{2}\mathbf{P}'\mathbf{T}'\mathbf{I}_{it}^{*}\mathbf{T}\mathbf{P} \tag{3.2.26}$$

e por 3.2.23, 3.2.26 se reduz a

$$\mathbf{A}_{it}\Sigma\mathbf{A}_{it} = \lambda\mathbf{A}_{it}$$

Pelo lema 3.2.2, λ é autovalor de $\Sigma\mathbf{A}_{it}$, fazendo $\lambda = \lambda_{i}$

$$A_{i_t}\Sigma A_{i_t} = \lambda_i A_{i_t}$$

$\boxed{3 \Rightarrow 5}$

Seja $A_{i_t}\Sigma A_{i_t} = \lambda_i A_{i_t}$, somando sobre o índice t, tem-se

$$\sum_{t=1}^{m} \left(A_{i_t} \Sigma A_{i_t}\right) = \lambda_i \left(\sum_{t=1}^{m} A_{i_t}\right) \tag{3.2.27}$$

mas $A_i = \sum_{t=1}^{m} A_{i_t}$, então a igualdade 3.2.27 pode ser reescrita como

$$A_i\Sigma A_i + 2\sum_{t\neq k}^{m} \left(A_{i_t}\Sigma A_{i_t}\right) = \lambda_i A_i \tag{3.2.28}$$

pós multiplicando 3.2.28 por A_i tem-se

$$A_i\Sigma A_i + 2\sum_{t\neq k}^{m} \left(A_{i_t}\Sigma A_{i_t}\right) \sum_{t=1}^{m} A_{i_t} = \lambda_i A_i$$

ou seja $A_i\Sigma A_i = \lambda_i A_i$, pois $A_{i_t} A_{i_t} = \mathbf{0}$, $t \neq k$. A prova prossegue análoga à demostração $3 \Rightarrow 4$ substituindo A_{i_t} por A_i, portanto $y'A_iy \sim \lambda_i \chi^2(n_i, \delta_i)$

$\boxed{5 \Rightarrow 3}$

Análogo a demonstração $4 \Rightarrow 3$, substituindo A_{i_t} por A_i, se $y'A_iy \sim \lambda_i \chi^2(n_i, \delta_i)$ então

$$A_i\Sigma A_i = \lambda_i A_i$$

mas $A_i = \sum_{t=1}^{m} A_{i_t}$, então

$$\left(\sum_{k=1}^{m} A_{i_t}\right) \Sigma \left(\sum_{k=1}^{m} A_{i_t}\right) = \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{m} A_{i_t}\right)$$

pós multiplicando por A_{i_t}, obtém-se para $t = 1,\ldots,m$

$$A_D\Sigma^* A_D = \lambda A_D \tag{3.3.4}$$

como A_D e Σ^* são matrizes bloco diagonais, então 3.3.4 pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\Sigma_1\mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}\Sigma_2\mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}\Sigma_g\mathbf{A} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{I}_p - \frac{1}{p}\mathbf{U}_p$, ou seja

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\Sigma_1\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}\Sigma_2\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A} = \mathbf{0} \\ &\quad\vdots \\ &\mathbf{A}\Sigma_g\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

A matriz $\mathbf{A}\Sigma_j\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A}$, para cada $j = 1,...,g$, tem $\frac{p(p-1)}{2}$ elementos diferentes de zero, e formam um sistema de equações, quando igualados a zero, para determinar λ e os $\frac{p(p+1)}{2}$ elementos de Σ_j. Portanto, para se determinar Σ_j é necessário solucionar o sistema formado pelas equações independentes, ou seja, atribuindo valores a $p+1$ incógnitas. No artigo de Huynh e Feldt(1970), por exemplo, os valores fixados como constantes foram as variâncias e λ. Neste caso a solução das covariâncias fica determinada por

$$\sigma_{mnj} = \frac{\sigma_{mmj} + \sigma_{nnj}}{2} - \lambda, \quad m \neq n, \quad m,n = 1,...,p \tag{3.3.6}$$

É fácil notar que, para todo $j = 1,...,g$, satisfazendo a igualdade 3.3.6, a igualdade 3.3.5 também é satisfeita, ou seja, as matrizes Σ_j, $j = 1,...,g$, não presisam ser necessariamente iguais, desde que tenham o mesmo fator de multiplicação λ. Matrizes que seguem 3.3.6 são denominadas tipo H.

No próximo capítulo são apresentados algumas características de uma matriz estruturada tipo H. Estes resultados foram obtidos através de programas desenvolvidos com o aplicativo Reduce (Rayna, 1987). Os programas e respectivas listagens encontram-se no apêndice B.

4. Características da matriz tipo H

4. CARACTERÍSTICAS DA MATRIZ TIPO H

4.1 INTRODUÇÃO

A estrutura tipo H da matriz de variâncias e covariâncias não é facilmente reconhecida por observação (como é a matriz uniforme, seriada, etc.). Uma construção da matriz tipo H é aquela tratada em 3.3.6. Na prática emerge a necessidade de testar a adequação deste padrão, como tratado em Huynh e Feldt(1970) cujo resultado é apresentado na seção 4.2.

Outra necessidade, já mencionada como motivação deste trabalho, é caracterizar a matriz tipo H para efeito de simulação de dados. Isto é, atribuir às constantes sugeridas por Huynh e Feldt de tal forma que a matriz seja positiva definida. O exemplo apresentado no capítulo 1 ilustra que não há arbitrariedade nesta atribuição, ou seja, a matriz nem sempre é positiva definida para quaisquer constantes.

Mantendo a construção sugerida por Huynh e Feldt, construiu-se uma matriz a partir dos elementos da diagonal principal (correspondendo às variâncias) e da constante λ, sendo esta última a mesma constante da condição apresentada no teorema 3.2.3, ou seja, λ é o autovalor de ΣA_D. Sob a estrutura tipo H os demais elementos da matriz (covariâncias) ficam determinados por

$$\sigma_{mn} = \frac{\sigma_{mm} + \sigma_{nn}}{2} - \lambda \quad \text{para } m \neq n,\ m,n = 1,\dots,p \qquad (4.1.1)$$

No sentido de ganhar mais conhecimento sobre a matriz com padrão tipo H, daqui por diante sempre construído segundo 4.1.1, são desenvolvidas as outras seções deste capítulo.

Na seção 4.2 é apresentado um teste do padrão tipo H devido a Mauchly(1940). Na seção 4.3 estão caracterizados os autovalores de uma matriz tipo H através da solução literal das equações características. Esta solução apresenta três distintos autovalores sendo que um deles é λ. É derivado também o campo de variação dos possíveis valores de λ, para os quais a matriz de variâncias e covariâncias seja positiva definida.

Ainda na última seção são exploradas de forma literal padrões de diferenças entre linhas (ou colunas) da matriz que podem ser úteis para operacionalizar o exame do padrão tipo H.

4.2 TESTE PARA O PADRÃO TIPO H

Huynh e Feldt(1970) mostraram que as condições necessárias e suficientes sobre Σ são dadas por

$$\mathbf{C\Sigma C'} = \lambda \mathbf{I}$$

onde $\mathbf{C}$ é qualquer submatriz semiortogonal, $(p-1)\,x\,p$ da matriz ortogonal de Helmert

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{j}'}{\sqrt{p}} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

e λ é o autovalor de ΣA_D. Sendo $\mathbf{j}'$ um vetor 1xp de uns. O teste de validade do padrão tipo H é devido a Mauchly(1940) que testa se uma matriz de variâncias e covariâncias é esférica. A estatística é dada por

$$W = \frac{(p-1)^{p-1}|CSC'|}{\left[tr(CSC')\right]^{p-1}}$$

e

$$\chi^2 = -\left[v - \frac{2p^2 - 3p + 3}{6(p-1)}\right] \ln W$$

onde S é estimativa não viciada de Σ baseada em v graus de liberdade, v=n-1 para uma amostra aleatória simples e ln é o logaritmo natural. χ^2 tem distribuição qui-quadrado com $\frac{1}{2}p(p-1) - 1$ graus de liberdade quando v é "grande" e Σ tem o padrão tipo H. Anderson(1958) mostrou que, em particular para p=3, χ^2 tem distribuição exata qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Consul(1967) fornece distribuição exata para W para outros valores de p.

4.3 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DE Σ COM PADRÃO TIPO H

A derivação do polinômio característico da matriz tipo H na sua forma literal foi obtida da seguinte maneira: matrizes tipo H a partir da dimensão três até oito foram tratadas literalmente através do aplicativo Reduce conforme programas apresentados no apêndice B. Exame dos polinômios característicos resultou no diagnóstico de diferença por paridade da dimensão da matriz, estes podem ser consultados no apêndice B.

Os fatores do polinômio característico, $|\Sigma - \mathbf{xI}|$, decompõem-se de duas maneiras distintas, segundo a paridade do número de linhas (ou colunas) da matriz Σ.

O polinômio característico de uma matriz tipo H é dada por

a) Se p é par

$$\left\{x^2 + \left[(p-2)\lambda - \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}\right] x - (p-1)\lambda^2 + \lambda \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} - \frac{p-1}{4} \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=m+1}^{p} \sigma_{mm}\sigma_{nn}\right\} (x-\lambda)^{p-2} \qquad (4.2.1)$$

cujas raízes são dadas por

$$x_1 = \sum_{m=1}^{p} \frac{\sigma_{mm}}{2} - \frac{p-2}{2}\lambda + \left(\frac{p^2}{4}\lambda^2 - \frac{p}{2}\lambda \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \frac{p}{4}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \sum_{m=1}^{p} \frac{\sigma_{mm}}{2} - \frac{p-2}{2}\lambda - \left(\frac{p^2}{4}\lambda^2 - \frac{p}{2}\lambda \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \frac{p}{4}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e $x_3 = \lambda$ com multiplicidade (p-2).

b) Se p é ímpar

$$\left\{ -x^2 + \left[-(p-2)\lambda + \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} \right] x + (p-1)\lambda^2 - \lambda \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p} \sum_{n=m+1}^{p} \sigma_{mm}\sigma_{nn} \right\} (x-\lambda)^{p-2} \qquad (4.2.2)$$

cujas raízes são dadas por

$$x_1 = \sum_{m=1}^{p} \frac{\sigma_{mm}}{2} - \frac{p-2}{2}\lambda + \left(\frac{p^2}{4}\lambda^2 - \frac{p}{2}\lambda \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \frac{3}{4}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \sum_{m=1}^{p} \frac{\sigma_{mm}}{2} - \frac{p-2}{2}\lambda - \left(\frac{p^2}{4}\lambda^2 - \frac{p}{2}\lambda \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \frac{3}{4}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e $x_3 = \lambda$ com multiplicidade (p-2).

Os autovalores x_1, x_2 e λ devem ser positivos e não nulos para qua a matriz seja positiva definida. Portanto para garantir que x_1 e x_2 sejam reais a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\begin{aligned} &\frac{p^2\lambda^2}{4} - \frac{p\lambda}{2}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \frac{p}{4}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 \geq 0 \quad \text{se p é par} \\ &\frac{p^2\lambda^2}{4} - \frac{p\lambda}{2}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \frac{3}{4}\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2 \geq 0 \quad \text{se p é ímpar} \end{aligned} \qquad (4.2.3)$$

Fixando-se as variâncias, 4.2.3 é uma função de λ e a sua região de variação para obter x_1 e x_2 (autovalores) reais é dada por

$$\begin{cases} 0 < \lambda < L_1 \text{ ou } \lambda > L_2 & \text{se } \Delta_1 \geq 0, L_1 > 0 \\ \lambda > L_2 & \text{se } \Delta_1 \geq 0, L_1 \leq 0, L_2 > 0 \\ \lambda > 0 & \text{se } \Delta_1 \geq 0, L_2 \leq 0 \end{cases} \tag{4.2.4}$$

onde

- se $p = 2v$, $v = 2,3,4,\ldots$

$$\Delta_1 = 2 \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=m+1}^{p} \sigma_{mm}\sigma_{nn} + (1-p)\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2$$

- se $p = 2v + 1$, $v = 1,2,3,\ldots$

$$\Delta_1 = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=m+1}^{p} \sigma_{mm}\sigma_{nn} - 2\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2$$

e

$$L_1 = \frac{\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} - \Delta_1^{1/2}}{p}$$

$$L_2 = \frac{\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \Delta_1^{1/2}}{p}$$

Se Δ_1 for negativo a região fica determinada por $\lambda > 0$.

Além de x_1 e x_2 serem reais, eles devem ser positivos e diferentes de zero. Mas $x_2 \leq x_1$, então basta que $x_2 > 0$. Novamente fixando-se as variâncias, x_2 é função de λ, e a sua variação fica determinada por

$$\begin{cases} L_3 < \lambda < L_4 & \text{para } \Delta_2 \geq 0, L_3 > 0 \\ 0 < \lambda < L_4 & \text{para } \Delta_2 \geq 0, L_3 \leq 0, L_4 \geq 0 \end{cases} \tag{4.2.5}$$

onde

- se $p = 2v$, $v = 2,3,4,...$

$$\Delta_2 = 2p \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=m+1}^{p} \sigma_{mm}\,\sigma_{nn} + (2p - p^2) \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2$$

- se $p = 2v + 1$, $v = 1,2,3,...$

$$\Delta_2 = 2p \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=m+1}^{p} \sigma_{mm}\,\sigma_{nn} + (3 - 2p) \sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm}^2$$

e

$$L_3 = \frac{\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} - \Delta_2^{1/2}}{2\,(p-1)}$$

$$L_4 = \frac{\sum_{m=1}^{p} \sigma_{mm} + \Delta_2^{1/2}}{2\,(p-1)}$$

A região 4.2.5 é determinada para $\Delta_2 \geq 0$, caso contrário não existe λ real para que x_2 seja positivo e não nulo, assim como se $L_4 < 0$.

Portanto para obter uma matriz positiva definida, tipo H, a partir das variâncias, λ deve satisfazer 4.2.4 e 4.2.5.

4.4 DIFERENÇA ENTRE COLUNAS (OU LINHAS) DA MATRIZ TIPO H

Considerando as constantes λ , σ_{11} , ... , σ_{pp}, a diferença entre duas colunas (ou linhas) de uma matriz tipo H é dada por

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{ii}+\sigma_{11}}{2}-\lambda \\ \dfrac{\sigma_{ii}+\sigma_{22}}{2}-\lambda \\ \cdots \\ \sigma_{ii} \\ \cdots \\ \dfrac{\sigma_{ii}+\sigma_{jj}}{2}-\lambda \\ \cdots \\ \dfrac{\sigma_{ii}+\sigma_{pp}}{2}-\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{jj}+\sigma_{11}}{2}-\lambda \\ \dfrac{\sigma_{jj}+\sigma_{22}}{2}-\lambda \\ \cdots \\ \dfrac{\sigma_{jj}+\sigma_{ii}}{2}-\lambda \\ \cdots \\ \sigma_{jj} \\ \cdots \\ \dfrac{\sigma_{jj}+\sigma_{pp}}{2}-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{2} \\ \dfrac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{2} \\ \cdots \\ \dfrac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{2}+\lambda \\ \cdots \\ \dfrac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{2}-\lambda \\ \cdots \\ \dfrac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{2} \end{bmatrix}$$

Observa-se que os valores correspondentes à diferença entre duas colunas i e j, i<j, são iguais ao valor constante

$$\frac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{2}$$

exceto pelo resultado que envolve as variâncias, neste caso os valores constantse são

$$\frac{\sigma_{ii}+\sigma_{jj}}{2}+\lambda \quad \text{e} \quad \frac{\sigma_{ii}+\sigma_{jj}}{2}-\lambda$$

O resultado é análogo às linhas, pois a matriz Σ é simétrica. Assim, subtraindo-se λ das variâncias, a diferença entre os elementos de duas colunas (ou duas linhas) é constante, ou seja os perfis formados pelas colunas da matriz são paralelos.

5. Aplicação prática e comentários finais

5. APLICAÇÃO PRÁTICA E COMENTÁRIOS FINAIS

5.1 EXEMPLO

Retornando ao exemplo apresentado no capítulo 1, constatou-se que a matriz é tipo H porém não é positiva definida. Nesta seção serão apresentados os limites de variação de λ, fixando-se as variâncias $\sigma_{11} = 9$, $\sigma_{22} = 6$, $\sigma_{33} = 9$, $\sigma_{44} = 7$, $\sigma_{55} = 8$ e $\sigma_{66} = 4$, tem-se

$$\sum_{m=1}^{6} \sigma_{mm} = 43$$

$$\sum_{m=1}^{6} \sigma_{mm}^2 = 327$$

$$\sum_{m=1}^{5} \sum_{n=m+1}^{6} \sigma_{mm}\, \sigma_{nn} = 761$$

$$\Delta_1 = -113$$

$$\Delta_2 = 1284$$

$$L_3 = \frac{43 - 1284^{1/2}}{10} \sim 0{,}7167$$

$$L_4 = \frac{43 + 1284^{1/2}}{10} \sim 7{,}8833$$

Tomando-se $\lambda = 0{,}5$, como foi feito no capítulo 1, a matriz **H** não é positiva definida, já que $\lambda < L_3$. O mesmo acontece com $\lambda = 8 > L_4$, onde o determinante da matriz é -17408. Então, escolheu-se um valor entre L_3 e L_4, ou seja $\lambda = 5$ e a matriz passou a ser

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 9{,}0 & 2{,}5 & 4{,}0 & 3{,}0 & 3{,}5 & 1{,}5 \\ 2{,}5 & 6{,}0 & 2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}0 & 0 \\ 4{,}0 & 2{,}5 & 9{,}0 & 3{,}0 & 3{,}5 & 1{,}5 \\ 3{,}0 & 1{,}5 & 3{,}0 & 7{,}0 & 2{,}5 & 0{,}5 \\ 3{,}5 & 2{,}0 & 3{,}5 & 2{,}5 & 8{,}0 & 1{,}0 \\ 1{,}5 & 0 & 1{,}5 & 0{,}5 & 1{,}0 & 4{,}0 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é 38593,75.

Na figura 5.1.1 está representada no eixo das ordenadas as variâncias subtraindo-se 5 e as covariâncias e no eixo das abscissas a correspondente ordem na coluna (linha). Os pontos foram unidos para melhor visualizar, cada linha corresponde a uma coluna (linha) da matriz **H**.

Pode-se observar pela fig. 5.1.1 que as colunas (linhas) de H formam "perfis paralelos".

5.2 COMENTÁRIOS FINAIS

A estrutura tipo H da matriz de variâncias e covariâncias, emerge da necessidade de obter-se estatísticas exatas na análise univariada para delineamentos com medidas repetidas. A importância e conseqüências desta caracterização são motivos para investigações futuras. Entre eles pode-se destacar a interpretação geométrica latente; a estimação da matriz de variâncias e covariâncias tipo H, onde o número de parâmetros poderia eventualmente diminuir; desenvolver novas técnicas para testar adequabilidade deste padrão, seja por métodos gráficos ou ajustando-se polinômios às colunas (linhas).

Cabe ainda salientar a investigação do impacto desta estrutura na análise multivariada, uma vez que os grupos não necessitam ter matriz de variâncias e

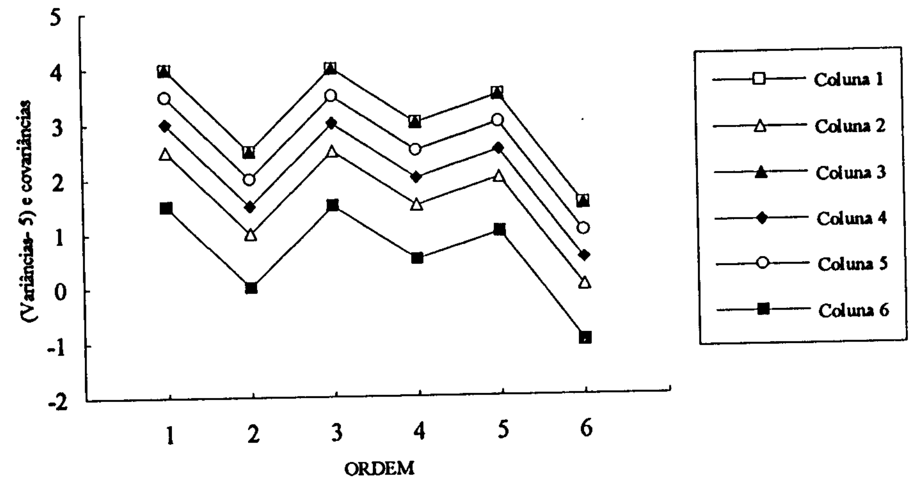


Figura 5.1.1 Representação gráfica das colunas (linhas) de H. Das variâncias foi subtraído a constante $\lambda = 5$.

covariâncias comum, desde que todas elas satisfaçam a condição $A_D \Sigma A_D = \lambda A_D$ com o mesmo fator de multiplicação λ.

6. Referências bibliográficas

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, T.W., **An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.** John Wiley & Sons, Inc. New York, 1958.

Andrade, D.F., Singer, J.M., **Análise de Dados Longitudinais.** VII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Campinas, SP, 1986.

Baldessari, B., Remarque sur le rapport de combinaisons linéaires de χ^2. **Plubli. Inst. Statist. Univ. Paris,** 14: 379-392, 1965.

Box, G.E.P., Some theorems on quadratic forms applied to the study of analysis of variance problems. I. Effect of inequality of variance in the one-way classification. **Ann. Math. Statist.** 25: 290-302, 1954a.

Box, G.E.P., Some theorems on quadratic forms applied to the study of analysis of variance problems. I. Effect of inequality of variance and of correlation between errors in the two-way classification. **Ann. Math. Statist.** 25: 484-498, 1954b.

Carpenter, O., Note on the extension of Craig's theorem to non-central variates, **Ann. Math. Statist.,** 21:455-457, 1950.

Cochran, W.G., The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance. **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, 30: 178-191, 1934.

Collier, R.O., Baker, F.B., Mandeville, G.K., Hayes, T.F., Estimates of test size for several test procedures based on conventional variance ratios in the repeated measures design. **Psychometrika**, 32: 339-353, 1967.

Consul, P.C., On the exact distributions of the criterion W for testing sphericity in a p-variate normal distribution. **The Annals of Math. Statist.**, 38: 1170-4, 1967

Geisser, S. and Greenhouse, S., An extension of Box's results of the use of the F-distribution in multivariate analysis. **The Annals of Math. Statist.**, 29: 885-91, 1958.

Greenhouse, S.W. and Geisser, S., On methods in the analysis of profile data. **Psychometrika**, 24:95-112, 1959.

Huynh, H., Some approximate tests for repeated measurement designs. **Psychometrika**, 43(2):161-175, 1978.

Huynh, H., Feldt, L.S., Conditions under which mean square ratios in repeated measurements designs have exact f-distributions. **JASA**, 65(332): 1582-89, 1970.

Huynh, H., Feldt, L.S., Estimation of the Box correction for degrees of freedom from sample data in randomized block and split-plot designs. **J. Ed. Statist.**, 1: 69-82, 1976.

James, G.S., Note on a theorem of Cochran. **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, 48:443.

Mardia, K.V., Kent, J.T., Bibby, J.M., **Multivariate analysis.** Academic Press Inc., London, 1979.

Mauchly, J.W., Significance test for sphericity of a normal n-variate distribution. The **Annals of Math. Statist.**, 11: 204-9, 1940.

Moran, R.C.C.P., Interpretação geométrica do teorema de James em sua versão multivariada não-central. **Dissertação (mestrado), IMECC-UNICAMP**, Campinas, 1979.

Noble, B., Daniel, J.W., **Applied linear Algebra**. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977.

Rao, C.R., **Linear Statistical Inference and its Applications.** John Wiley & Sons, Inc., Second edition, New York, 1965.

Rayna, G., **Reduce: Software for Algebraic Computation.** Springer-Verlag New York Inc., 1987.

Stoloff, P.H., Correcting for heterogeneity of variance for repeated measures designs of the analysis of variance. **Educational and Psychological Measurement**, 30: 909-924, 1970.

Timm, N.H., **Multivariate Analysis with Applications in Education and Psychology.** Brooks/Cole Publishing Company, Monterrey, California, 1975.

Winer, B.J., **Statistical Principles in Experimental Design.** McGraw-Hill Book Co., New York, 1962.

APÊNDICE A- Conceitos de álgebra matricial

APÊNDICE A - CONCEITOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL

A.1 INTRODUÇÃO

Neste apêndice são apresentados algumas notações, definições e resultados da álgebra matricial que são utilizados ao longo do trabalho. Maiores detalhes poderão ser consultados em Noble(1977).

Definição A.1.1 Uma matriz **A** é uma disposição retangular de números. Se **A** tem n linhas e p colunas, diz-se que a matriz tem ordem n x p.

Notação A.1.1 Uma matriz **A** de ordem n x p é escrita como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}_{(n \times p)} = (a_{ij})$$

onde a_{ij} é o elemento da linha i e coluna j de uma matriz **A**, i = 1,...,n e j = 1,...,p. Para enfatizar a ordem da matriz ela pode ser escrita como $\mathbf{A}_{n \times p}$. As matrizes, neste trabalho, são representadas por letras maiúsculas e em negrito, por exemplo **A**, **B**, **X**, **Y**. Os seus elementos são representados por letras minúsculas com respectivos índices.

Definição A.1.2 A transposta de uma matriz $\mathbf{A}_{n\,x\,p}$ é a matriz $\mathbf{A}'_{(p\,x\,n)}$ definida por

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}_{(p\,x\,n)}$$

Definição A.1.3 Uma matriz de ordem n x 1 é chamada de vetor coluna.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

Os vetores coluna são representados por letras minúsculas, em negrito.

Notação A.1.2 A matriz **A** pode ser representada pelos seus vetores coluna ou linha

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_p] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}'_n \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}'_i = [a_{i1} \cdots a_{ip}]$.

Na tabela A.1.1 encontra-se uma lista de matrizes particulares freqüentemente utilizada neste trabalho.

Tabela A.1.1 Matrizes particulares e tipos de matrizes

Denominação	Definição	Notação
Vetor coluna	$p=1$	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdots$
Vetor unidade	$[1 \ldots 1]'$	$\mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}_p$
Diagonal	$n=p$, $a_{ij}=0, i \neq j$	diag (a_{ii})
Identidade	diag $(1 \ldots 1)$	$\mathbf{I}$ ou $\mathbf{I}_p$
Matriz unidade	$n=p$, $a_{ij}=1$	$\mathbf{U}_p=\mathbf{11}'$
Não singular	$\|\mathbf{A}\| \neq 0$	
Singular	$\|\mathbf{A}\|=0$	
Ortogonal	$\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{I}$	
Idempotente	$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$	
Positiva definida	$\mathbf{x}'\mathbf{Ax}>0$, para qualquer $\mathbf{x}\neq 0$	
Positiva semi-definida	$\mathbf{x}'\mathbf{Ax}\geq 0$, para qualquer $\mathbf{x}\neq 0$	

A.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Na tabela A.2.1 encontra-se um resumo das operações básicas de matrizes com as respectivas restrições.

Tabela A.2.1 Operações com matrizes

Operação	Restrição	Definição
Adição	$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de mesma ordem	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})$
Subtração	$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de mesma ordem	$\mathbf{A}-\mathbf{B}=(a_{ij}-b_{ij})$
Multiplicação por um escalar		$c\mathbf{A}=(ca_{ij})$
Multiplicação	número de colunas de $\mathbf{A}$ igual ao número de linhas de $\mathbf{B}$	$\mathbf{AB}=(\mathbf{a}_i'\mathbf{b}_j)$

A.2.1 Transposta - propriedades

A matriz transposta, representada por **A'** é obtida trocando-se as linhas pelas colunas de **A**, satisfaz as seguintes propriedades

a.) $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$

b.) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$

c.) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$

d.) se **A** é simétrica então $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

A.2.2 Traço - propriedades

A função traço, $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, satisfaz as seguintes propriedades para matrizes $\mathbf{A}_{(p \times p)}$, $\mathbf{B}_{(p \times p)}$, $\mathbf{D}_{(p \times n)}$, $\mathbf{E}_{(n \times p)}$ e o escalar c

a.) $tr(c) = c$

b.) $tr(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) \pm tr(\mathbf{B})$

c.) $tr(c\mathbf{A}) = c\, tr(\mathbf{A})$

d.) $tr(\mathbf{DE}) = tr(\mathbf{ED}) = \sum_{i,j} e_{ij}\, d_{ji}$

A.2.3 Deternimantes e cofatores

Definição A.2.3.1 O determinante de uma matriz $\mathbf{A}_{(p \times p)}$ é definido como

$$|\mathbf{A}| = \sum (-1)^{|\tau|}\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{p\tau(p)}$$

onde o somatório é tomado sobre todas as permutações τ de (1,...,p), e $|\tau|$ é igual a +1 ou -1, se τ é um produto de um número par ou ímpar de transposições, respectivamente.

Definição A.2.3.2 O cofator de a_{ij}, denominado A_{ij}, é definido por $(-1)^{i+j}$ vezes o valor do determinante da matriz **A** retirando-se a linha i e a coluna j.

Definição A.2.3.3 Se uma matriz **A** é não singular seguem os seguintes resultados

a) $|A| = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}A_{ij}$ para qualquer i,j

b) $|A| = c^p|A|$

c) $AB = |A|\,|B|$

d) $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = |A_{11}|\,|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| = |A_{22}|\,|A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$

A.2.4 Inversa

Definição A.2.4.1 A inversa de uma matriz $A_{(p \times p)}$ é a matriz única A^{-1} que satisfaz

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A inversa existe se e só se **A** é não singular, isto é, $|A| \neq 0$

A.2.5 Produto de Kronecker

Definição A.2.5.1 Seja $A_{(m \times n)} = (a_{ij})$ e $B_{(p \times q)} = (b_{kl})$. O produto de Kronecker de **A** e **B** é denotado e definido como

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{(mp \times nq)}$$

A.3 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Seja $\mathbf{A}_{(p \times p)}$ uma matriz quadrada qualquer,

$$q(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$

é um polinômio de ordem p em λ. As p raízes de $q(\lambda), \lambda_1, \cdots, \lambda_p$, possivelmente números complexos, são chamados de autovalores de **A**. Alguns dos λ_i podem ser iguais se $q(\lambda)$tem múltiplas raízes.

Para cada $i = 1,...p$, $|\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}| = 0$, então $\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}$ é singular. Existe um vetor não nulo γ que satisfaz

$$\mathbf{A}\gamma = \lambda_i \gamma$$

Qualquer vetor que satisfaça a igualdade acima é chamada de autovetor (direito) de **A** para o autovalor λ_i.

Se **x** e y são autovetores de λ_i e $\alpha \in \mathbf{R}$, então (**x** + y) e αx também são autovetores de λ_i. O conjunto de todos os autovalores de λ_i forman um subespaço o qual é denominado autoespaço de **A** para λ_i.

Teorema A.3.1.1 (teorema da decomposição espectral) Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}_{(p \times p)}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \Gamma\Lambda\Gamma' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \gamma_i \gamma_i'$$

onde Λ é uma matriz diagonal de autovalores de A, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_p)$, $\Gamma = [\gamma_1 \ldots \gamma_p]$ é uma matriz ortogonal.

A.4 ESPAÇO VETORIAL, POSTO

A.4.1 Espaço vetorial

O conjunto de vetores em $\mathbf{R}^n$ satisfaz as seguintes propriedades. Para todo $x,y \in \mathbf{R}^n$ e todo $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

a) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

b) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

c) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

d) $1x=x$

e $\mathbf{R}^n$ pode ser considerado um espaço vetorial sobre os números reais $\mathbf{R}$.

A.4.2 Posto

Definição A.4.2.1 O posto de uma matriz $\mathbf{A}_{(n \times p)}$ é definido como o número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes em **A**, é denotado por r(**A**).

As seguintes propriedades são verificadas

a.) $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min(n,p)$

b) $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}')$

c) $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$

d) Se $\mathbf{B}_{(n \times n)}$ e $\mathbf{C}_{(p \times p)}$ são matrizes não singulares então $r(\mathbf{BAC}) = r(\mathbf{A})$

e) Se n=p então r(**A**)=p se e só se **A** é não singular.

A.5 MATRIZES IDEMPOTENTES

Teorema 1: A matriz simétrica $\mathbf{A}_{nn}$ é idempotente se e só se os autovalores de **A** forem 1 ou 0.

Prova

($\Rightarrow$) Seja **T** uma matriz ortogonal de autovetores de **A**, ou seja

$$\mathbf{T'AT} = \Lambda$$

onde Λ é uma matriz diagonal, cujos elementos diagonais são autovalores de **A** e $r(\mathbf{A}) = s$, então

$$\begin{aligned}\Lambda^2 &= \mathbf{T'ATT'AT}\\ &= \mathbf{T'AIAT} = \mathbf{T'A^2T}\end{aligned}$$

sendo **A** idempotente, isto é, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, então

$$\mathbf{T'AT} = \Lambda^2$$

logo

$$\lambda_i^2 = \lambda_i, \quad i=1,\dots,s$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_s & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

mas **A** é uma matriz simétrica, portanto $\lambda_i = 1, \quad i=1,\dots,s$.

($\Leftarrow$) Seja $\lambda_i = 1, i=1,\dots,s$ e $\lambda_i = 0, \ i= (s + 1),\dots,n$ então

$$\Lambda^2 = \Lambda$$

ou seja

$$T'ATT'AT = T'A^2T = T'AT$$

então $A^2 = A$, pois T é ortogonal. ■

Teorema 2: Seja $I = \sum_{i=1}^{s} A_i$, de ordem n, onde A_i são matrizes idempotentes e simétricas, $r(A_i) = n_i$ e $A_i = \sum_{t=1}^{m} A_{i_t}$, onde A_{i_t} são m matrizes idempotentes e simétricas, $r(A_{i_t}) = n_{i_t}$. Então existe uma matriz ortogonal T tal que

$$T'A_{i_t}T = \Lambda_{i_t}, \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,s \\ t=1,\dots,m \end{array}$$

onde Λ_{i_t} é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são 1 e 0.

Prova

A prova procede-se por indução sobre o número de matrizes que se somam. O teorema é válido para i=1 e t=1. Supondo válido para (i-1) e (t-1) matrizes parcelas, então seja T_1 uma matriz de autovalores ortonormais de A_{1_1}, ou seja

$$T_1'A_{1_1}T_1 = \Lambda_{1_1} = \begin{bmatrix} I_{n_{1_1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo $n_{1_1} = r(A_{1_1})$ e

$$\begin{aligned} I = T_1'T_1 = T_1'IT_1 &= T_1' \sum_{i=1}^{s} A_iT_1 \\ &= T_1'A_{1_1}T_1 + \sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} T_1'A_{i_t}T_1 \end{aligned}$$

logo

$$I = \Lambda_{1_1} + \sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} T_1' A_{i_t} T_1$$

seja

$$T_1' A_{i_t} T_1 = \begin{bmatrix} B_{i_t} & C_{i_t} \\ C_{i_t}' & D_{i_t} \end{bmatrix}$$

onde as dimensões de B_{i_t}, C_{i_t} e D_{i_t} são $(n_{1_1} \times n_{1_1})$, $n_{1_1} \times (n \times n_{1_1})$ e $(n - n_{1_1}) \times (n - n_{1_1})$, respectivamente. Então

$$I_n = \begin{bmatrix} I_{n_{1_1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} \begin{bmatrix} B_{i_t} & C_{i_t} \\ C_{i_t}' & D_{i_t} \end{bmatrix}$$

logo $\sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} B_{i_t} = 0$, $\sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} C_{i_t} = 0$ e $\sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} D_{i_t} = I_{(n - n_{1_1})}$

Mas $T_1' A_{i_t} T_1$ é idempotente para $i = 2,\ldots,s$ e $t = 2,\ldots,m$ pois

$$T_1' A_{i_t} T_1 T_1' A_{i_t} T_1 = T_1' A_{i_t} T_1$$

portanto B_{i_t} é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonais principal são maiores ou iguais a zero, mas

$$\sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} B_{i_t} = 0$$

logo $B_{i_t} = 0$.

Analogamente $C_{i_t} = 0$. Então

$$I = \begin{bmatrix} I_{n_{1_1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=2}^{s}\sum_{t=2}^{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{i_t} \end{bmatrix}$$

mas $T_1'A_{i_t}T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{i_t} \end{bmatrix}$.

Como $T_1'A_{i_t}T_1$ é idempotente, $1=2,...,s$, $t=2,...,m$, D_{i_t} é idempotente e simétrica.

Aplicando a hipótese de indução, tem-se que existe uma matriz T_2 ortogonal, tal que

$$T_2'D_{i_t}T_2 = \Lambda_{i_t}^* \quad \begin{matrix} i=2,...,s \\ t=2,...,m \end{matrix}$$

onde $\Lambda_{i_t}^*$ é diagonal e os elementos da diagonal principal são 1 e 0.

Seja agora

$$T = T_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

então T é ortogonal pois

$$TT' = T_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2' \end{bmatrix} T_1'$$

$$= T_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2T_2' \end{bmatrix} T_1' = T_1IT_1' = I$$

Portanto T diagonaliza todas as matrizes A_{i_t} pois

$$T'A_{1_1}T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2' \end{bmatrix} T_1'A_{1_1}T_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Lambda_{1_1}$$

e para $i=2,...,s$, $t=2,...,m$ segue que

$$T'A_{i_t}T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2' \end{bmatrix} T_1'A_{i_t}T_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{i_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2'D_{i_t}T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{i_t}^* \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Conseqüências

i) $\Lambda_{i_t}^*$, $i=2,...,s$, $t=2,...,m$ são sucessivas matrizes diagonais de ordem $(n - n_{1_1}) \times (n - n_{1_1})$ com 1 e 0 na diagonal principal e como $\sum_{i=2}^{s} \sum_{t=2}^{m} D_{i_t} = I_{(n - n_{1_1})}$ tem-se

$$\sum_{i=2}^{s} \sum_{t=2}^{m} \Lambda_{i_t}^* = I_{(n - n_{1_1})}$$

portanto

$$\Lambda_{i_t}\Lambda_{i_k} = \mathbf{0}, \quad \begin{array}{l} t \neq k \\ i=1,...,s \\ t=1,...,m \\ k=1,...,n \end{array}$$

ii) $T'A_iT = \Lambda_i$, $i=1,...,s$ onde $A_i = \sum_{t=1}^{m} A_{i_t}$ e Λ_i é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são 1 e 0, pois

$$T'A_{i_t}T = \Lambda_{i_t}, \quad \begin{array}{l} i=1,...,s \\ t=1,...,m \end{array}$$

$$\sum_{t=1}^{m} T'A_{i_t}T = \sum_{t=1}^{m} \Lambda_{i_t}$$

$$\mathbf{T}' \sum_{t=1}^{m} \mathbf{A}_{i_t}\mathbf{T} = \Lambda_i$$

ou seja

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}_i\mathbf{T} = \Lambda_i$$

iii) $\Lambda_i\Lambda_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$, $i,j=1,\ldots,s$, onde $\Lambda_i = \sum_{t=1}^{m} \Lambda_{i_t}$ e $\Lambda_j = \sum_{k=1}^{m} \Lambda_{j_k}$.

APÊNDICE B- Programas

APÊNDICE B - PROGRAMAS E LISTAGENS

Este apêndice consta de um disquete de 5"¼, dupla densidade e dupla face, onde encontram-se arquivados os programas desenvolvidos com o aplicativo REDUCE e respectivas listagens necessários para estudar o polinômio característico e os autovalores de uma matriz tipo H construído segundo 4.4.1, fixando-se as variâncias e a constante λ.

Os arquivos, cuja extensão é RED, estão denominados segundo a dimensão da matriz a ser estudada. Por exemplo, AUTO3.RED é o nome do arquivo que contém o programa a ser processado no aplicativo REDUCE referente à dimensão 3. A respectiva listagem está arquivada com a denominação AUTO3.LST.

As dimensões estudadas vão de 3 até 8. Todos os arquivos (programas e listagens) estão em formato texto e podem ser consultados por meio de microcomputador compatível IBM.