SOBRE UMA TEORIA DE MODELOS TRIVALENTE

Itala M. Loffredo D'Ottaviano

Orientador: *Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa*

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Agosto - 1982

Para Roberto

INDICE

INTRODUÇÃO

Uma teoria T diz-se inconsistente, se existe pelo menos uma fórmula A da linguagem da teoria, tal que A e sua negação $\neg A$ são teoremas de T; em caso contrário, a teoria diz-se consistente.

Uma teoria é trivial, se toda fórmula de sua linguagem é teorema.

Uma lógica é paraconsistente, se ela pode ser usada como lógica subjacente para teorias inconsistentes e não triviais; uma teoria é paraconsistente, se sua lógica subjacente é paraconsistente.

Observemos que o princípio da contradição $\neg(A \& \neg A)$, bem como outras teses correlatas, não são necessariamente não válidos numa lógica paraconsistente; entretanto, em toda lógica paraconsistente, de A e $\neg A$ não podemos deduzir, em geral, qualquer fórmula (veja [4] e [6]).

Vários filósofos, a partir de Heráclito, têm proposto a tese de que as contradições são fundamentais para a compreensão da realidade; ou, em outras palavras, têm afirmado que a realidade é contraditória (veja [4] e [6]).

Entretanto, foram J. Łukasiewicz, influenciado por idéias de Aristóteles (veja [3] e [33]), e N.A. Vasil'év (veja [5]) os dois verdadeiros impulsionadores da lógica paraconsistente e das lógicas não clássicas em geral.

Ambos, trabalhando independentemente, entre 1910 e 1911, ponderaram, inspirados na geometria não-Euclideana, que uma revisão dos princípios básicos da lógica clássica poderia conduzir a outros tipos de cálculos lógicos; e sugeriram a eliminação do princípio da contradição (veja [31], [34], [49], [50], [52] e [52]).

Alguns anos mais tarde, em 1920, Łukasiewicz introduziu os primeiros sistemas de lógicas polivalentes, como uma tentativa de investigar proposições modais e as noções de possibilidade e de necessidade intimamente relacionadas com tais proposições. Considerou a expressão "é possível que p" (em símbolos, ∇p) como primitiva e expressou suas propriedades básicas. E concluiu que, para poder interpretar o operador possibilidade ∇ através de tábua de verdade, seria necessário considerar uma semântica para o cálculo proposicional, na qual as proposições admitissem mais valores de verdade que os clássicos verdadeiro e falso (veja [9], [32] e [35]).

Independentemente do trabalho de Łukasiewicz, e motivado por certas propriedades formais de sistemas de proposições, E.L. Post, em 1921 (veja [41]), também introduziu cálculos proposicionais polivalentes.

Em 1940, G. Moisil (veja [36], [37], [38] e [11]) iniciou o estudo das estruturas algébricas associadas aos cálculos proposicionais n-valentes de Łukasiewicz, mostrando as relações entre tais cálculos e outros sistemas conhecidos, como, por exemplo, com o cálculo proposicional intuicionista de Heyting.

As idéias de Moisil, sob o ponto de vista algébrico, foram especialmente desenvolvidas pelo matemático português A. Monteiro e seus discípulos, na Argentina (veja [12], [39], [40] e [10]).

Entretanto, o primeiro lógico a construir um sistema de cálculo proposicional paraconsistente foi, em 1948, o polonês S. Jaśkowski, (veja [26], [27] e [6]), inspirado nos trabalhos de Łukasiewicz.

Suas principais motivações para a construção de uma lógica paraconsistente foram as seguintes: o problema da sistematização de teorias que contêm contradições, como ocorre na dialética; o estudo de teorias nas quais existem contradições causadas por imprecisões; o estudo direto de algumas teorias empíricas, cujos postulados ou suposições básicas poderiam, sob certos aspectos, ser considerados como contraditórios (veja [26] e [25]).

Baseado nessas idéias, Jaśkowski (veja [25], pg. 145) propôs o problema da construção de um cálculo proposicional com as seguintes propriedades:

i) um sistema contraditório (inconsistente) baseado em tal cálculo não deveria ser necessariamente trivial;

ii) o cálculo deveria ser suficientemente rico, para poder tornar possível grande parte dos raciocínios usuais, possibilitando inferências práticas;

iii) o cálculo deveria ter uma interpretação intuitiva.

Jaśkowski apresentou sua própria solução, a nível proposicional, conhecida como lógica discussiva (ou discursiva) e afirmou: "Obviamente, essas condições não determinam univocamente uma solução, desde que podem ser justificadas em graus diferentes, sendo que a condição (iii) é, de fato, a mais difícil de se avaliar objetivamente" (veja [25], pg. 145).

Entretanto, apesar de Jaśkowski ter construído um cálculo proposicional paraconsistente, podemos dizer que o lógico brasileiro N.C.A. da Costa é, de fato, o fundador da lógica paraconsistente (veja [4]). Independentemente de Jaškowski, em 1958, começou a desenvolver algumas idéias, que o levaram a construir diversos sistemas de lógicas paraconsistentes, incluindo não apenas o nível proposicional, mas também o nível de predicados, com ou sem igualdade, o correspondente cálculo de descrições e algumas aplicações à teoria de conjuntos (veja [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21] e [22]).

Da Costa, seus discípulos e colaboradores, em especial A.I. Arruda, têm pesquisado diversos sistemas paraconsistentes, tendo obtido inclusive alguns resultados relativos a teoria de modelos (veja [2]).

Em um artigo já publicado (veja [23]), definimos e examinamos um sistema proposicional trivalente com mais de um valor distinguido de verdade, que reflete aspectos de certos tipos de lógicas modais e pode servir de base para teorias paraconsistentes. Este sistema, que denotamos por $\mathbb{J}_3$, é uma solução para o problema de Jaškowski.

No mesmo artigo, extendemos $\mathbb{J}_3$ ao cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade $\mathbb{J}_3^{*=}$.

Alguns desses resultados, relativos a $\mathbb{J}_3$, foram generalizados por J. Kotas e N.C.A. da Costa (veja [30]).

Agora, procuramos aprofundar o estudo de $\mathbb{J}_3$.

No Capítulo I deste trabalho, adaptando uma sugestão inicial de M. Fidel, axiomatizamos o cálculo proposicional $\mathbb{J}_3$ e provamos sua completude. Estabelecemos também as relações entre este cálculo e diversos sistemas lógicos conhecidos. Salientamos, em especial, a estreita analogia entre $\mathbb{J}_3$ e o cálculo proposicional trivalente $\mathcal{L}_3$ de Łukasiewicz.

Uma parte importante deste capítulo é destinada à obtenção de um teorema de equivalência. Tentamos fortificar gradativamente a equivalência básica do sistema, até definirmos uma relação de equivalência forte compatível com o fato de $\mathbb{J}_3$ ser trivalente com mais de um valor distinguido de verdade. Esta relação nos possibilitou provarmos um teorema de equivalência aparentemente bastante siginificativo para o estudo de $\mathbb{J}_3$.

No Capítulo II, introduzimos as linguagens - $\mathbb{L}_3$, entre cujos símbolos de predicados, além da igualdade estrita =, podem constar outros símbolos correspondentes a igualdades generalizadas. Axiomatizamos as teorias - $\mathbb{J}_3$, que são extensões trivalentes de $\mathbb{J}_3^*=$.

Damos também uma semântica para as teorias - $\mathbb{J}_3$, obtemos um teorema de redução para não trivialização e, por meio de uma definição compatível de estrutura canônica, demonstramos o Teorema da Completude, via método de Henkin, e o Teorema da Compacidade para as teorias - $\mathbb{J}_3$.

Observemos que, nas linguagens - $\mathbb{L}_3$, não definimos o quantificador universal a partir do quantificador existencial. Preferimos introduzir o $\exists$ e $\forall$ como quantificadores primitivos e os caracterizamos na axiomatização de $\mathbb{J}_3^*=$, utilizando a equivalência básica. Entretanto, pelo Teorema da Equivalência para teorias - $\mathbb{J}_3$, demonstrado relativamente à equivalência forte, podemos provar que, para toda fórmula A, $\forall x A$, $\nabla \exists x A$ e $\nabla \forall x A$ podem ser substituidos, nas teorias - $\mathbb{J}_3$, por $\neg \exists x \neg A$, $\exists x \nabla A$ e $\forall x \nabla A$, respectivamente.

Com base nos resultados anteriores, pudemos desenvolver, no Capítulo III, uma teoria de modelos para teorias trivalentes com mais de um valor distinguido, o que constitui e objetivo central deste trabalho.

A teoria de modelos para as teorias-$\mathbb{J}_3$ reflete muito da teoria clássica de modelos. Provamos versões generalizadas dos principais resultados clássicos, como do Teorema da Extensão de Modelos de Keisler, Teorema da Consistência Conjunta de Craig-Robinson, Teorema da Interpolação de Craig, Teorema da Definibilidade de Beth-Padoa, Teorema da Eliminação de Quantificadores de Tarski, Teorema de Ehrenfeucht, Teorema de Ryll-Nardzewski e outros.

Em alguns casos, como o Teorema da Extensão de Modelos e Teorema da Definibilidade, damos mais de uma generalização dos teoremas clássicos, todas elas compatíveis com o fato das teorias-$\mathbb{J}_3$ serem trivalentes com mais de um valor distinguido de verdade, poderem ser paraconsistentes e refletirem certos aspectos das lógicas de tipo modal.

As idéias utilizadas nas generalizações acima citadas, salientando-se também a versão do Teorema da Eliminação de Quantificadores, parecem significativas para teorias polivalentes em geral e lógicas de tipo modal.

Alguns dos resultados deste trabalho foram apresentados no V Simpósio Latinoamericano de Lógica Matemática, realizado em Bogotá, em julho de 1981 (veja [24]); outros, relativos à eliminação de quantificadores, foram apresentados no V Encontro Brasileiro de Lógica, em dezembro de 1981.

Observemos ainda que, como o cálculo $\mathbb{J}_3$ foi construido a partir de $\mathcal{L}_3$, é possível obtermos cálculos semelhantes $\mathbb{J}_n$, a partir dos cálculos n-valentes $\mathcal{L}_n$ de Łukasiewicz, para $n = 4, 5, \ldots, \aleph_0$. Alguns resultados relativos às teorias-$\mathbb{J}_n$, inclusive sobre teoria de modelos, já foram por nós obtidos e serão oportunamente publicados.

F.G. Asenjo definiu um cálculo de antinomias (veja [7] e [8]), usando como conectivos primitivos $\rightarrow$, &, $\vee$ e $\neg$. Entretanto, como $\rightarrow$ não satisfaz a regra de modus ponens, para operarmos com antinomias, no sentido de Asenjo, parece-nos razoável a utilização do cálculo $\mathbb{J}_3$.

Körner (veja [29]), na elaboração de uma lógica conveniente para manipular "conceitos exatos" e "conceitos inexatos", utilizou um cálculo de Kleene (veja [28], § 64), definido pela matriz $M = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{1\}, \rightarrow, \&, \vee, \neg \rangle$, cujo conjunto de tautologias é vazio; também neste caso, parece-nos adequado o uso do cálculo $\mathbb{J}_3$.

Em trabalhos futuros, além de pretendermos estudar a utilização de $\mathbb{J}_3$ em lógicas com o sentido das de Asenjo e Körner, tencionamos continuar a linha de investigação desta tese em duas direções básicas: numa, estudando aplicações matemáticas dos resultados obtidos, especialmente relativas a "estruturas polivalentes", como a aritmética e certos tipos de corpos, e relativas a teorias de conjuntos paraconsistentes e polivalentes; noutra, procurando utilizar os resultados já obtidos para o esclarecimento de certos pontos de teorias, como a Dialética e a teoria de Meinong (veja [46] e [47]), que em algumas de suas formulações são necessariamente paraconsistentes.

Ao verdadeiro fundador das lógicas paraconsistentes, meu orientador de tese, Prof. Newton Carneiro Affonso da Costa, meu agradecimento pelo apoio e ensinamentos recebidos. Agradeço-lhe, não apenas por me ter proposto os principais problemas a serem estudados, mas, sobretudo, pela orientação segura e pela indicação dos principais caminhos a seguir.

Com a Profa. Ayda Ignez Arruda e Prof. Roberto Cignoli, mantivemos discussões constantes sobre os assuntos estudados neste trabalho.

À Profa. Ayda I. Arruda, agradeço por todas as sugestões recebidas e pelos comentários precisos sobre a redação desta tese.

A reconhecida competência do Prof. Roberto Cignoli, especialmente no tocante às lógicas polivalentes, suas oportunas e seguras sugestões, seu interesse e estímulo foram fatores valiosos para a preparação deste trabalho. Ao Prof. Cignoli, meu agradecimento especial.

CAPÍTULO I

O CÁLCULO PROPOSICIONAL $\mathbf{J}_3$

1. O CÁLCULO $\mathbf{J}_3$ E O TEOREMA DA COMPLETUDE

O cálculo proposicional $\mathbf{J}_3$ é dado pela matriz $M = \langle \{0,\frac{1}{2},1\}, \{\frac{1}{2},1\}, \vee, \nabla, \neg \rangle$, onde $\vee$, ∇ e $\neg$ são definidos pelas seguintes tábuas:

A ∨ B

A \ B	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

A	∇A
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	1

A	$\neg$A
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

O conjunto de valores de verdade e o *conjunto de valores distinguidos* são denotados, respectivamente, por V e V_d.

As *fórmulas* de $\mathbf{J}_3$ são construidas como usualmente, a partir das variáveis proposicionais, por meio de $\vee$, ∇ e $\neg$ e parênteses. Para escrever as fórmulas, esquemas, etc, usamos as convenções e notações de [28], com adaptações evidentes.

O conceito de *função de verdade* é o habitual. $H_\vee$, H_∇ e $H_\neg$ são notações para as funções de verdade definidas pelas tábuas acima.

O valor de verdade $v(A)$, para cada fórmula A de $\mathbf{J}_3$, é obtido da meneira usual, e lembramos que A é válida em M se $v(A)$

pertence a V_d, para cada valoração ν (veja, por exemplo, [48]).

DEFINIÇÃO 1.1.1: Em $\mathbf{J}_3$, definimos os seguintes *conectivos*:

$A \,\&\, B =_{def} \neg(\neg A \vee \neg B)$

$\Delta A =_{def} \neg\nabla\neg A$

$\neg^* A =_{def} \neg\nabla A$

$A \rightarrowtail B =_{def} \nabla\neg A \vee B$

$A \supset B =_{def} \neg\nabla A \vee B$

$A \supset\!\!\rightarrow B =_{def} (A \rightarrowtail B) \,\&\, (\neg B \rightarrowtail \neg A)$

$A \equiv B =_{def} (A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$

$\neg$ é chamado *negação fraca*, ou simplesmente *negação*; $\neg^*$ é chamado *negação forte* e $\supset$, *implicação básica*.

Apresentamos as tábuas de alguns dos conectivos introduzidos pela Definição 1.1.1:

$\neg^* A$

A	$\neg^* A$
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

ΔA

A	ΔA
0	0
$\frac{1}{2}$	0
1	1

$A \rightarrowtail B$

$A \backslash B$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$A \supset B$

A \ B	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$A \equiv B$

A \ B	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

No teorema que se segue, mencionamos apenas os resultados que são importantes para demonstrações de teoremas posteriores.

TEOREMA 1.1.1: *São válidos em* M, *entre outros, os seguintes esquemas de* $\mathbf{J}_3$:

$\neg\neg A \equiv A$

$\neg^* A \supset \neg A$

$A \vee \neg A$

$\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$

$A \mathbin{\&} (B \vee \neg B) \equiv A$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \mathbin{\&} \neg B$

$A \vee B \equiv \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B)$

$\neg(A \mathbin{\&} B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$A \mathbin{\&} B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

$\nabla A \equiv A$

$\nabla A \equiv \nabla\nabla A$

$\neg A \vee \nabla A$

$A \mathbin{\&} \neg A \equiv \neg A \mathbin{\&} \nabla A$

$A \vee \nabla A \equiv \nabla A$

$\neg\nabla A \supset (\nabla A \supset B)$

$A \supset (\neg\nabla A \supset B)$

$\nabla(A \mathbin{\&} B) \equiv \nabla A \mathbin{\&} \nabla B$

$\nabla(A \vee B) \equiv \nabla A \vee \nabla B$

$(A \supset \neg A) \supset \neg A$

$(\neg A \supset A) \supset A$

$\neg(\nabla A \vee \neg\nabla A) \supset B$

$((A \supset B) \supset A) \supset A$

$(A \supset B) \supset (A \supset\!\!\rightarrow B)$

$(A \supset\!\!\rightarrow B) \supset (\neg B \supset\!\!\rightarrow \neg A)$

$A \supset\!\!\rightarrow (B \supset\!\!\rightarrow A)$

$(\neg A \supset\!\!\rightarrow \neg B) \supset\!\!\rightarrow (B \supset\!\!\rightarrow A)$

$(A \supset\!\!\rightarrow B) \supset\!\!\rightarrow ((B \supset\!\!\rightarrow C) \supset\!\!\rightarrow (A \supset\!\!\rightarrow C))$

$((A \supset\!\!\rightarrow \neg B) \supset\!\!\rightarrow A) \supset\!\!\rightarrow A$

$\Delta(A \supset\!\!\rightarrow B) \supset\!\!\rightarrow \Delta(\Delta A \supset\!\!\rightarrow \Delta B)$

TEOREMA 1.1.2: *Não são válidos em* M, *entre outros, os esquemas abaixo:*

$\neg A \supset (A \supset B)$

$A \supset (\neg A \supset B)$

$\neg A \supset (A \supset B)$

$A \supset (\neg A \supset \neg B)$

$A \,\&\, \neg A \supset B$

$A \,\&\, \neg A \supset \neg B$

$(A \equiv \neg A) \supset B$

$(A \equiv \neg A) \supset \neg B$

$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

$(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

$(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$

$(\neg A \supset B) \supset (\neg B \supset A)$

$(A \equiv B) \supset (\neg A \equiv \neg B)$

$A \vee (B \,\&\, \neg B) \equiv A$

$A \supset B \equiv \neg(A \,\&\, \neg B)$

$A \supset B \equiv \neg A \vee B.$

Podemos verificar facilmente que, em lugar de $\vee$, ∇, e $\neg$, é possível usarmos apenas $\neg$ e $\supset\!\!\rightarrow$ como conectivos primitivos de $\mathbf{J}_3$, considerando $A \vee B$ e ∇A definidos, respectivamente, por $(A \supset\!\!\rightarrow B) \supset\!\!\rightarrow B$ e $\neg A \supset\!\!\rightarrow A$.

Portanto, existe uma estreita analogia entre $\mathbf{J}_3$ e o cálculo trivalente $\mathcal{L}_3$ de Łukasiewicz, definido pela matriz $M' = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{1\}, \neg, \supset\!\!\rightarrow \rangle$, onde os operadores $\neg$ e $\supset\!\!\rightarrow$ de Łukasiewicz-Tarski são dados pelas respectivas tábuas de $\mathbf{J}_3$ (veja [1]).

$\mathbf{J}_3$ *pode ser axiomatizado por:*

Axioma 1: $\Delta(A \supset\!\!\rightarrow (B \supset\!\!\rightarrow A))$

Axioma 2: $\Delta((A \supset\!\!\rightarrow B) \supset\!\!\rightarrow ((B \supset\!\!\rightarrow C) \supset\!\!\rightarrow (A \supset\!\!\rightarrow C)))$

Axioma 3: $\Delta((\neg A \supset\!\!\rightarrow \neg B) \supset\!\!\rightarrow (B \supset\!\!\rightarrow A))$

Axioma 4: $\Delta(((A \supset\!\!\rightarrow \neg A) \supset\!\!\rightarrow A) \supset\!\!\rightarrow A)$

Axioma 5: $\Delta(\Delta(A \supset\!\!\rightarrow B) \supset\!\!\rightarrow \Delta(\Delta A \supset\!\!\rightarrow \Delta B))$

Regra R_1: $\dfrac{A, \Delta(A \supset\!\!\rightarrow B)}{B}$

Regra R_2: $\dfrac{\nabla A}{A}$

Obtivemos o teorema da completude para $\mathbf{J}_3$, a partir da completude de $\mathcal{L}_3$, provada por Wajsberg (veja [53]), usando o seguinte teorema.

TEOREMA 1.1.3: *Se* A *é teorema de* $\mathcal{L}_3$, *então* ΔA *é teorema de* $\mathbf{J}_3$.

DEMONSTRAÇÃO: Como os axiomas 1 a 4 são os axiomas de $\mathcal{L}_3$ precedidos de Δ, se A é um axioma de $\mathcal{L}_3$, então ΔA é teorema de $\mathbf{J}_3$.

Seja A obtido a partir de B e $B \supset\!\!\to A$, pela regra $\dfrac{B, B \supset\!\!\to A}{A}$ de $\mathcal{L}_3$. Pela hipótese de indução, ΔB e $\Delta(B \supset\!\!\to A)$ são teoremas de $\mathbf{J}_3$. Pelo axioma 5 e R_1 obtemos $\Delta(\Delta B \supset\!\!\to \Delta A)$. Aplicando novamente R_1, temos que ΔA é teorema de $\mathbf{J}_3$. ■

TEOREMA 1.1.4 (Teorema da Completude para $\mathbf{J}_3$): *Uma fórmula* A *é teorema de* $\mathbf{J}_3$ *se, e somente se,* A *é válida em* M.

DEMONSTRAÇÃO: Da esquerda para a direita, pelo Teorema 1.1.1, a implicação é imediata.

Se A é válida em M, então $v(\nabla A) = 1$, para toda valoração v. Pela completude e axiomática de $\mathcal{L}_3$, ∇A e $\Delta\nabla A \supset\!\!\to \nabla A$ são teoremas de $\mathcal{L}_3$. Pelo teorema anterior e R_1, ∇A é teorema de $\mathbf{J}_3$. Por R_2, A é o teorema de $\mathbf{J}_3$. ■

COROLÁRIO (Regra de Modus Ponens para $\supset$): Se A e $A \supset B$ são teoremas de $\mathbf{J}_3$, então B é teorema de $\mathbf{J}_3$.

É conveniente observarmos que a regra de modus ponens não vale para $\supset\!\!\to$, como no cálculo $\mathcal{L}_3$, pois A e $A \supset\!\!\to B$ podem ser válidas em M, sem que B o seja. Isto decorre do fato de existir mais de um elemento no conjunto de valores distinguidos de verdade. Por exemplo, podemos ter v, A e B, tais que $v(A) = \frac{1}{2}$ e $v(A \supset\!\!\to B) = \frac{1}{2}$, com $v(B) = 0$.

O teoremas que se seguem devem ser salientados, pois permitem demonstrar muitos dos resultados de J_3.

TEOREMA 1.1.5: $\mathbf{J}_3$ *é uma extensão própria da lógica trivalente* $\mathcal{L}_3$ *de Łukasiewicz, relativamente a* $\neg$ *e* $\supset\!\!\to$.

DEMONSTRAÇÃO: $A \equiv \nabla A$ não é teorema de $\mathcal{L}_3$, porém é teorema de $\mathbf{J}_3$. ∎

TEOREMA 1.1.6: J_3 *é uma extensão própria do cálculo proposicional positivo clássico, relativamente a* $\vee$, $\&$, $\supset$ e $\equiv$.

TEOREMA 1.1.7: $\mathbf{J}_3$ *é uma extensão própria da lógica clássica, relativamente a* $\neg^*$, $\vee$, $\&$, $\supset$ e $\equiv$.

TEOREMA 1.1.8: $\mathbf{J}_3$ *não é funcionalmente completo.*

DEMONSTRAÇÃO: Não é possível definirmos um conectivo, a partir dos conectivos primitivos de J_3, tal que seu valor de verdade seja $\frac{1}{2}$, para toda valoração de verdade. ∎

Entretanto, se acrescentarmos aos conectivos primitivos de $\mathbf{J}_3$, o operador T de Słupecki, o cálculo torna-se funcionalmente completo (veja [45]).

2. O TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA PARA $\mathbf{J}_3$

Em $\mathbf{J}_3$, como no caso clássico, se $A \equiv B$ é teorema, então A é teorema se, e somente se, B é teorema.

Entretanto, o teorema da equivalência clássico (veja, por exemplo, [48]) não pode ser provado em $\mathbf{J}_3$, relativamente à equivalência $\equiv$.

Devido à existência de mais de um elemento em V_d e à definição da negação, existem fórmulas A e B, tais que $A \equiv B$ é teorema e $\neg A \equiv \neg B$ não é teorema: por exemplo, $A \equiv \nabla A$ é teorema de $\mathbf{J}_3$, porém $\neg A \equiv \neg\nabla A$ não é teorema de $\mathbf{J}_3$.

Nessas condições, apenas para certos tipos especiais de fórmulas é que poderíamos demonstrar uma versão fraca do teorema de equivalência clássico, o que nos impediria de podermos obter, na teoria de modelos para teorias-$\mathbf{J}_3$, versões generalizadas de teoremas clássicos importantes.

Com o objetivo de provarmos um teorema de equivalência conveniente para $\mathbf{J}_3$, procuramos definir uma nova relação de equivalência que, entretanto, preservasse os resultados relativos à equivalência $\equiv$, que é básica no sistema e desempenha o papel da equivalência clássica.

Devido à estreita analogia entre $\mathbf{J}_3$ e $\mathcal{L}_3$ e pelo Teorema 1.1.5, parecia natural definirmos uma equivalência a partir do operador $\supset\!\rightarrow$ de Łukasiewicz-Tarski, já que em $\mathcal{L}_3$ vale o teorema da equivalência relativo a uma equivalência análoga.

Definimos a *equivalência de Łukasiewicz* em $\mathbf{J}_3$ e a denotamos por $\equiv_{\mathcal{L}}$.

DEFINIÇÃO 1.2.1: $A \equiv_{\mathcal{L}} B =_{def} (A \supset\!\!\to B) \,\&\, (B \supset\!\!\to A)$

Através da tábua de $A \equiv_{\mathcal{L}} B$, podemos visualizar alguns resultados relativos a $\mathbf{J}_3$:

$A \equiv_{\mathcal{L}} B$

A \ B	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

É óbvio que, se $A \equiv B$, então $A \equiv_{\mathcal{L}} B$.

TEOREMA 1.2.1: *Se* $A \equiv_{\mathcal{L}} B$, *então* $\neg A \equiv_{\mathcal{L}} \neg B$.

Pelo teorema acima, $\equiv_{\mathcal{L}}$ não apresenta um dos inconvenientes de $\equiv$. Entretanto, como não vale a regra de modus ponens relativamente a $\supset\!\!\to$, $A \equiv_{\mathcal{L}} B$ e A podem ser teoremas de $\mathbf{J}_3$, sem que B o seja. Por exemplo, consideremos o caso em que $v(A) = \frac{1}{2}$ e $v(B) = 0$, para uma valoração v.

Além disso, não é possível provarmos um teorema de equivalência geral relativo a $\equiv_{\mathcal{L}}$, pois podem existir fórmulas A e B, como no exemplo anterior, tais que $A \equiv_{\mathcal{L}} B$ é teorema e $\nabla A \equiv_{\mathcal{L}} \nabla B$ não é teorema de $\mathbf{J}_3$.

DEFINIÇÃO 1.2.2: $A \equiv^* B =_{def} (A \equiv B) \,\&\, (\neg A \equiv \neg B)$

A equivalência $\equiv^*$ é chamada *equivalência forte* de $\mathbf{J}_3$ e tem a seguinte tábua:

$A \equiv^* B$

A \ B	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	1

TEOREMA 1.2.2: *Se* $A \equiv^* B$ *é teorema, então* A *é teorema de* $\mathbf{J}_3$ *se, e somente se,* B *é teorema de* $\mathbf{J}_3$.

TEOREMA 1.2.3 (Teorema da Equivalência-I para $\mathbf{J}_3$): *Seja* A *uma fórmula de* $\mathbf{J}_3$ *e* A' *obtida substituindo-se algumas ocorrências de* $B_1,\ldots,B_n$*, em* A*, por* $B'_1,\ldots,B'_n$*, respectivamente.* Se $B_1 \equiv^* B'_1,\ldots,B_n \equiv^* B'_n$ *são teoremas de* $\mathbf{J}_3$*, então* $A \equiv^* A'$ *é teorema de* $\mathbf{J}_3$.

DEMONSTRAÇÃO: Por indução sobre o comprimento de A.

Se A é atômica, o resultado é óbvio.

Se A é do tipo $\neg C$ e A' do tipo $\neg C'$, tal que C' resulta, a partir de C, de substituições do tipo descrito no teorema, então, pela hipótese de indução, $C \equiv^* C'$ é teorema de $\mathbf{J}_3$. Ou seja, $C \equiv C'$ e $\neg C \equiv \neg C'$, em $\mathbf{J}_3$. Como pelo Teorema 1.1.4, $C \equiv \neg\neg C$ e $C' \equiv \neg\neg C'$, temos que, pelo Teorema 1.1.7, $\neg\neg C \equiv \neg\neg C'$. Logo, $\neg C \equiv^* \neg C'$.

Se A é do tipo ∇C e A' do tipo $\nabla C'$, com $C \equiv^* C'$, então, pelo Teorema 1.1.7, $\neg^* C \equiv \neg^* C'$. Ou seja, $\neg \nabla C \equiv \neg \nabla C'$. Pelo Teorma 1.1.4, $\nabla C \equiv C$ e $\nabla C' \equiv C'$ e, portanto $\nabla C \equiv \nabla C'$. Logo, $\nabla C \equiv^* \nabla C'$ é teorema de $\mathbf{J}_3$.

Se A é do tipo $C \vee D$ e A' é do tipo $C' \vee D'$, com $C \equiv^* C'$ e $D \equiv^* D'$, como pelo Teorema 1.1.7,

$$(C \equiv C') \;\&\; (D \equiv D')) \supset (C \vee D) \equiv (C' \vee D'))$$

e

$$((\neg C \equiv \neg C') \;\&\; (\neg D \equiv \neg D') \supset ((\neg C \;\&\; \neg D) \equiv (\neg C' \;\&\; \neg D'))$$

são teoremas de $\mathbf{J}_3$, então, pelo Corolário do Teorema 1.1.4 e Teorema 1.1.7, temos que $C \vee D \equiv C' \vee D'$ e $\neg(C \vee D) \equiv \neg(C' \vee D')$. Logo, $C \vee D \equiv^* C' \vee D'$. ∎

Da mesma maneira que parecia natural definirmos uma nova relação de equivalência a partir do operador $\supset\!\!\rightarrow$, também parece razoável tentarmos fortalecer a equivalência $\equiv_{\mathcal{L}}$, de modo que possamos generalizar $\equiv^*$ e o teorema anterior.

DEFINIÇÃO 1.2.3: $A \equiv_{\mathcal{L}}' B =_{def} (A \equiv_{\mathcal{L}} B) \;\&\; (\nabla A \equiv_{\mathcal{L}} \nabla B)$.

A equivalência $\equiv_{\mathcal{L}}'$ tem a seguinte tábua:

$A \equiv'_{\mathcal{L}} B$

A \ B	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

É óbvio que $A \equiv B$ se, e somente se, $A \equiv'_{\mathcal{L}} B$.

TEOREMA 1.2.4. *Se* $A \equiv'_{\mathcal{L}} B$ *é teorema de* $\mathbf{J}_3$, *então* A *é teorema se, e somente se,* B *é teorema.*

Entretanto, também não é possívek obtermos um teorema geral de equivalência para $\equiv'_{\mathcal{L}}$, pois $A \equiv'_{\mathcal{L}} B$ pode ser teorema de $\mathbf{J}_3$, sem que $\neg A \equiv'_{\mathcal{L}} \neg B$ o seja. Por exemplo, consideremos o caso em que $v(A) = 1$ e $v(B) = \frac{1}{2}$.

Assim sendo, para generalizarmos convenientemente $\equiv_{\mathcal{L}}$, necessitamos de uma equivalência mais forte, denotada por $\equiv^*_{\mathcal{L}}$ e chamada da *equivalência forte de Łukasiewicz.*

DEFINIÇÃO 1.2.4: $A \equiv^*_{\mathcal{L}} B =_{def} (\nabla A \equiv_{\mathcal{L}} \nabla B) \;\&\; (\Delta A \equiv_{\mathcal{L}} \Delta B)$.

Apresentamos, a seguir, a tábua de $\equiv^*_{\mathcal{L}}$.

$A \equiv^*_{\mathcal{L}} B$

A \ B	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	0
1	0	0	1

TEOREMA 1.2.5. (Teorema da Equivalência-II para $\mathbf{J}_3$): *Seja* A *uma fórmula de* $\mathbf{J}_3$ *e* A' *obtida substituindo-se algumas ocorrências de* $B_1, \ldots, B_n$, *em* A, *por* $B'_1, \ldots, B'_n$, *respectivamente. Se* $B_1 \equiv^*_{\mathcal{L}} B'_1, \ldots, B_n \equiv^*_{\mathcal{L}} B'_n$ *são teoremas de* $\mathbf{J}_3$, *então* $A \equiv^*_{\mathcal{L}} A'$ *é teorema de* $\mathbf{J}_3$.

TEOREMA 1.2.6: *O Teorema da Equivalência* -I *é equivalente ao Teorema da Equivalência* -II.

DEMONSTRAÇÃO: Basta verificarmos que $A \equiv^* B$ é teorema de $\mathbf{J}_3$ se, e somente se, $A \equiv^*_{\mathcal{L}} B$ é teorema de $\mathbf{J}_3$. ■

No espírito dos teoremas de equivalência para $\mathbf{J}_3$, temos o seguinte corolário e observação:

COROLÁRIO 1.2.1: Em $\mathbf{J}_3$, é possível substituirmos:

i) $\neg\neg A$ por A;

ii) $\neg^*\neg^* A$ por $\neg\neg^* A$;

iii) $\neg(A \vee B)$ por $\neg A \,\&\, \neg B$;

iv) $\neg^*(A \vee B)$ por $\neg^* A \,\&\, \neg^* B$

v) ∇A por $\neg\Delta\neg A$

DEMONSTRAÇÃO: Basta verificarmos que $\neg\neg A \equiv^* A$ (ou $\neg\neg A \equiv^*_{\mathcal{L}} A$), $\neg^*\neg^* A \equiv^* \neg\neg^* A$ (ou $\neg^*\neg^* A \equiv^*_{\mathcal{L}} \neg\neg^* A$), etc, são teoremas de J_3. ∎

OBSERVAÇÃO: Embora $\neg^*\neg^* A \equiv A$ e $\neg^*\neg^* A \equiv_{\mathcal{L}} A$ sejam teoremas de J_3, não é possível, em geral, substituirmos $\neg^*\neg^* A$ por A. Porém, é possível substituirmos $\neg^*\neg^*\neg^* A$ por $\neg^* A$.

3. J_3 E O PROBLEMA DE JAŠKOWSKI

Pelo Teorema 1.1.2 e Teorema 1.1.4, fórmulas do tipo $\neg A \supset (A \supset B)$, $A \supset (\neg A \supset B)$, $A \supset (\neg A \supset \neg B)$, $(A \,\&\, \neg A) \supset B$, $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$, $A \vee (B \,\&\, \neg B) \equiv A$, etc, não são teoremas de J_3. Assim sendo, em J_3 não é possível, em geral, deduzirmos uma fórmula qualquer, a partir de uma contradição. Portanto, baseados em tal cálculo, podemos construir sistemas dedutivos inconsistentes e não triviais, no sentido de [25]. Logo, J_3 satisfaz a condição (i) do problema de Jaškowski.

Pelos Teoremas 1.1.5 a 1.1.7, J_3 é um sistema suficientemente rico, que evidentemente satisfaz a condição (ii) de Jaškowski.

J_3 admite interpretações intuitivas. Por exemplo, consideremos uma teoria, tal que em sua formulação preliminar possam aparecer certas contradições, contradições essas que devem ser eliminadas em uma reformulação posterior. J_3 pode ser usado como a lógica subjacente dessa teoria, da seguinte forma: entre os valores de verdade de J_3, 0 pode representar o falso, 1 o verdadeiro e

$\frac{1}{2}$ pode representar o valor provisório de uma proposição A, de modo que A e a negação de A sejam teoremas da teoria em sua formulação inicial; em uma reformulação posterior, o valor de verdade $\frac{1}{2}$ deve ser reduzido, pelo menos em princípio, a 0 ou a 1.

Assim sendo, $\mathbf{J}_3$ é uma solução para o problema de Jaśkowski.

$\mathbf{J}_3$ também pode ser usado como fundamento para sistemas paraconsistentes, no sentido de da Costa (veja [15] e [16]), mudando-se a interpretação do valor $\frac{1}{2}$. Neste caso, o valor 0 representa o falso, 1 o verdadeiro e $\frac{1}{2}$ representa o valor lógico de uma fórmula que é simultaneamente verdadeira e falsa.

A demonstração do Teorema 1.3.6 nos mostra que, ao fortalecermos as equivalências $\equiv$ e $\equiv'_{\mathcal{L}}$, definidas a partir da implicação básica $\supset$ de $\mathbf{J}_3$ e da implicação $\supset\!\!\rightarrow$ de Łukasiewicz, obtemos as equivalências $\equiv^*$ e $\equiv^*_{\mathcal{L}}$, sintaticamente equivalentes em $\mathbf{J}_3$.

Entretanto, a equivalência $\equiv^*_{\mathcal{L}}$ só assume, como valor distinguido, o valor 1, enquanto que $\equiv^*$ assume os valores $\frac{1}{2}$ e 1.

De acordo com a interpretação intuitiva de $\mathbf{J}_3$ mencionada, $\equiv^*$ parece ser uma equivalência forte mais natural para o sistema $\mathbf{J}_3$, pois $v(A \equiv^* B) = \frac{1}{2}$, quando $v(A) = v(B) = \frac{1}{2}$. Logo, quando $v(A)$ e $v(B)$ puderem ser reduzidos, pelo menos em princípio, a 0 ou a 1, parece razoável que $v(A \equiv^* B)$ seja $\frac{1}{2}$, para que também possa, pelo menos em princípio, numa reformulação da teoria posterior à inicial, ser reduzido a 0, ou 1.

Por outro lado, $v(A \equiv^*_{\mathcal{L}} B) = 1$, quando $v(A) = v(B) = \frac{1}{2}$, dá um caráter de veracidade a $A \equiv^*_{\mathcal{L}} B$, mesmo quando A e B têm um valor de verdade de caráter provisório.

Devido às considerações acima, relativas a $\equiv^*$ e a $\equiv^*_{\mathcal{L}}$, na teoria de modelos para as teorias-$\mathbb{J}_3$, no Capítulo III, optaremos, em várias definições, pela equivalência $\equiv^*$.

Observamos ainda que, além de $\mathbb{J}_3$ refletir certos aspectos das lógicas de tipo modal, provavelmente possa ser utilizado na formalização de certas concepções da dialética.

Finalmente, como o cálculo $\mathbb{J}_3$ foi construido a partir de $\mathcal{L}_3$, é possível obtermos cálculos semelhantes $\mathbb{J}_n$, a partir dos cálculos n-valentes $\mathcal{L}_n$ de Łukasiewicz, para $n = 4,5,\ldots,\aleph_0$.

CAPÍTULO II

TEORIAS - $\mathbf{J}_3$ DE PRIMEIRA ORDEM

1. SEMÂNTICA PARA AS TEORIAS - $\mathbf{J}_3$

Os *símbolos* de uma linguagem - $\mathbb{L}_3$ de primeira ordem são as *variáveis individuais*, os *símbolos de funções*, os *símbolos de predicados*, os *conectivos primitivos* $\vee$, ∇ e $\neg$, os *quantificadores* $\exists$ e $\forall$, e os *parênteses*.

Consideremos sempre, entre os símbolos de predicados de toda linguagem - $\mathbb{L}_3$, a *igualdade estrita* = . Outros símbolos de *igualdades generalizadas* podem, ou não, ser especificados entre os símbolos de predicados.

Usamos x, y e z como variáveis sintáticas para as variáveis individuais; f e g, para os símbolos não lógicos de funções; p e q, para os símbolos não lógicos de predicados, e e para constantes.

As definições de *termo*, *fórmula atômica* e *fórmula* são as usuais, com adaptações óbvias; a, b, c e d são variáveis sintáticas para termos e A, B, C, etc, para fórmulas.

DEFINIÇÃO 2.1.1: Uma *linguagem* - $\mathbb{L}_3$ *de primeira ordem* é uma linguagem na qual os símbolos e fórmulas são como os acima descritos (veja [42]).

Os símbolos &, $\rightarrowtail$, $\supset\!\rightarrow$, $\supset$, $\equiv$, Δ e $\neg^*$ são definidos, nas linguagens - $\mathbb{L}_3$, da mesma maneira que em J_3.

Os conceitos de *ocorrência livre de uma variável*, *fórmula fechada*, *termo livre de variáveis* e *fecho de uma fórmula* são os usuais.

A definição de x *é substituível por* a *em* A também é a usual.

Usamos $b_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]$ para denotar o termo obtido, a partir de b, substituindo-se todas as ocorrências de $x_1,\ldots,x_n$ por $a_1,\ldots,a_n$, respectivamente; e usamos $A_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]$ para denotar a fórmula obtida, a partir de A, substituindo-se todas as ocorrências livres de $x_1,\ldots,x_n$ por $a_1,\ldots,a_n$, respectivamente, supondo que $x_1,\ldots,x_n$ são distintos e que cada x_i é substituível por a_i em A, $1 \leq i \leq n$.

Nas definições que se seguem, seja L uma linguagem $\mathbb{L}_3$.

DEFINIÇÃO 2.1.2: Uma *estrutura* $\mathfrak{A}$ para L consiste de:

i) um conjunto não vazio $|\mathfrak{A}|$, chamado universo de $\mathfrak{A}$;

ii) funções $f_{\mathfrak{A}}$ de $|\mathfrak{A}|^n$ em $|\mathfrak{A}|$, uma para cada símbolo de função n-ária f de L;

iii) predicados n-ários $p_{\mathfrak{A}}$, um para cada símbolo de predicado n-ário p de L, distinto de $=$, tal que $p_{\mathfrak{A}}$ é uma aplicação de $|\mathfrak{A}|^n$ em $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura para L. Para cada indivíduo a de $\mathfrak{A}$, escolhemos uma nova constante, chamada *nome de* a. Como usualmente, a linguagem - $\mathbb{L}_3$ de primeira ordem obtida, a partir de L, acrescentando-se os nomes dos indivíduos de $\mathfrak{A}$ é denotada por L($\mathfrak{A}$).

Usamos i e j como variáveis sintáticas para os nomes de indivíduos de $\mathfrak{A}$.

DEFINIÇÃO 2.1.3: O *indivíduo* $\mathfrak{A}$(a) de $\mathfrak{A}$, para cada termo a sem variáveis livres, é definido por indução sobre o comprimento de a: se a é um nome, então $\mathfrak{A}$(a) é o indivíduo cujo nome é a; se a não é um nome, então $\mathfrak{A}$(a) é $f_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(a_1),\ldots,\mathfrak{A}(a_n))$, sendo f um símbolo de função de L.

DEFINIÇÃO 2.1.4: O *valor de verdade* $\mathfrak{A}$(A), para cada fórmula fechada A de L($\mathfrak{A}$), é dado por:

i) se A é a = b, então $\mathfrak{A}(A) = 1$ see $\mathfrak{A}(a) = \mathfrak{A}(b)$; em caso contrário, $\mathfrak{A}(A) = 0$;

ii) se A é $p(a_1,\ldots,a_n)$, com p distinto de =, então para v em V, $\mathfrak{A}(A) = v$ see $p_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(a_1),\ldots,\mathfrak{A}(a_n)) = v$;

iii) se A é $\neg B$, então $\mathfrak{A}(A)$ é $H_{\neg}(\mathfrak{A}(B))$;

iv) se A é ∇B, então $\mathfrak{A}(A)$ é $H_{\nabla}(\mathfrak{A}(B))$;

v) se A é B V C, então $\mathfrak{A}(A)$ é $H_{V}(\mathfrak{A}(B), \mathfrak{A}(C))$;

vi) se A é $\exists xB$, então $\mathfrak{A}(A) = \max\{\mathfrak{A}(B_x[i])/i \in L(\mathfrak{A})\}$;

vii) se A é $\forall xB$, então $\mathfrak{A}(A) = \min\{\mathfrak{A}(B_x[i])/i \in L(\mathfrak{A})$.

DEFINIÇÃO 2.1.5: Dada uma fórmula A qualquer de L, uma *$\mathfrak{A}$-instância* de A é uma fórmula fechada de $L(\mathfrak{A})$, do tipo $A_{x_1,\ldots,x_n}[\dot{\imath}_1,\ldots,\dot{\imath}_n]$.

DEFINIÇÃO 2.1.6: Uma fórmula A de L é *válida* em $\mathfrak{A}$ se $\mathfrak{A}(A')$ pertence a V_d, para toda $\mathfrak{A}$-instância A' de A.

O *cálculo de predicados de primeira ordem* $\mathbf{J}_3^{*}=$ é o sistema formal cuja linguagem é uma linguagem $-\mathbb{L}_3$ e cujos axiomas e regras, além dos de $\mathbf{J}_3$, são, com as restrições usuais (veja [28]), os seguintes:

Axioma 6: $\forall x(x = x)$

Axioma 7: $x = y \supset (A[x] \equiv A[y])$

Axioma 8: $A_x[a] \supset \exists x A$

Axioma 9: $\forall x A \supset A_x[a]$

Axioma 10: $\exists x A \equiv \neg\forall x \neg A$

Axioma 11: $\forall x A \equiv \exists x \neg A$

Axioma 12: $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$

Axioma 13: $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$

Axioma 14: $\nabla\exists x A \equiv \exists x \nabla A$

Axioma 15: $\nabla\forall x A \equiv \forall x \nabla A$

Regra R_3 (Introdução do $\exists$): $\dfrac{A \supset C}{\exists x A \supset C}$

Regra R_4 (Introdução do $\forall$): $\dfrac{C \supset A}{C \supset \forall x A}$

TEOREMA 2.1.1: $\mathbf{J}_3^{*=}$ *é uma extensão conservativa de* $\mathbf{J}_3$.

DEMONSTRAÇÃO: Aplicamos o Teorema das k-transformadas de Hilbert-Bernays, que pode ser extendido a este caso (veja [28]). ∎

TEOREMA 2.1.2: $\mathbf{J}_3^{*=}$ *é uma extensão própria do cálculo de predicados clássico, relativamente a* $\neg^*$, $\vee$, &, $\supset$, $\equiv$, $\exists$ e $\forall$.

DEFINIÇÃO 2.1.7: Uma *teoria* - $\mathbf{J}_3$ *de primeira ordem* é um sistema formal T, tal que:

i) a linguagem de T é uma linguagem - $\mathbb{L}_3$, denotada por L(T);

ii) os axiomas de T são os axiomas de $\mathbf{J}_3^{*=}$, chamados axiomas lógicos de T, e certos axiomas adicionais, chamados axiomas não lógicos;

iii) as regras de T são as de $\mathbf{J}_3^{*=}$.

Os conceitos de *teorema* e *consequência semântica* de um conjunto Γ de fórmulas de T, são os usuais.

Se A é um *teorema* da teoria -$\mathbf{J}_3$ T, escrevemos $\vdash_T$ A.

DEFINIÇÃO 2.1.8: Um *modelo* de uma teoria - $\mathbf{J}_3$ T é uma estrutura para L(T), na qual todos os axiomas não lógicos de T são válidos.

Se A é uma *conseqüência semântica* do conjunto Γ de fórmulas da linguagem - $\mathbb{L}_3$ L, escrevemos $\Gamma \models$ A.

DEFINIÇÃO 2.1.9: Uma fórmula é *válida* na teoria $-\mathbf{J}_3$ T se ela é conseqüência semântica dos axiomas não lógicos de T, ou seja, se ela é válida em todos os modelos de T.

TEOREMA 2.1.3 (Teorema da Validade): *Todo teorema de uma teoria-$-\mathbf{J}_3$T é válido em* T.

2. O TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA PARA AS TEORIAS $-\mathbf{J}_3$ E O TEOREMA DA REDUÇÃO PARA NÃO TRIVIALIZAÇÃO.

DEFINIÇÃO 2.2.1: Uma teoria $-\mathbf{J}_3$ é finitamente trivializável, se existe uma fórmula fixa F, tal que, para toda fórmula A, $F \supset A$ é teorema da teoria (veja [4]).

TEOREMA 2.2.1: *As teorias* $-\mathbf{J}_3$ *são finitamente trivializáveis.*

DEMONSTRAÇÃO: Qualquer fórmula do tipo $\neg(\neg\nabla A \vee \nabla A)$ trivializa qualquer teoria $-\mathbf{J}_3$. ∎

Nos teoremas que se seguem, os quais serão explicitamente usados no decorrer deste trabalho, T é sempre uma teoria $-\mathbf{J}_3$.

TEOREMA 2.2.2 (Regra da Generalização): *Se* $\vdash_T A$, *então* $\vdash_T \forall xA$.

TEOREMA 2.2.3 (Regra da Substituição): *Se* $\vdash_T A$ *e* A' *é da forma* $A_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]$, *então* $\vdash_T A'$.

TEOREMA 2.2.4 (Teorema da Substituição):

a) $\vdash_{T} A_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n] \supset \exists x_1 \ldots \exists x_n\, A$;

b) $\vdash_{T} \forall x_1 \ldots \forall x_n \supset A_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]$.

TEOREMA 2.2.5 (Regra da Distribuição): *Se* $\vdash_{T} A \supset B$, *então* $\vdash_{T} \exists x A \supset \exists x B$ *e* $\vdash_{T} \forall x A \supset \forall x B$

TEOREMA 2.2.6 (Teorema do Fecho): *Se* A' *é o fecho de* A, *então* $\vdash_{T} A$ *se, e somente se,* $\vdash_{T} A'$.

TEOREMA 2.2.7 (Teorema da Dedução): *Seja* A *uma fórmula fechada em* T. *Para toda fórmula* B *de* T, $\vdash_{T} A \subset B$ *se, e somente se,* $\vdash_{T[A]} B$.

TEOREMA 2.2.8 (Teorema sobre Constantes): *Sejam* T *uma teoria-* $\mathbf{J}_3$ *e* T' *obtida, a partir de* T, *acrescentando-se novas constantes (mas não novos axiomas não lógicos). Para toda fórmula* A *de* T *e toda sequência* $e_1,\ldots,e_n$ *de novas constantes,* $\vdash_{T} A$ *se, e somente se* $\vdash_{T} A_{x_1,\ldots,x_n}[e_1,\ldots,e_n]$.

TEOREMA 2.2.9 (Teorema da Equivalência para as Teorias - $\mathbb{J}_3$): *Seja* A *uma fórmula de* T *e* A' *obtida substituindo-se algumas ocorrências de* $B_1,\ldots,B_n$, *em* A, *por* $B'_1,\ldots,B'_n$, *respectivamente. Se* $B_1 \equiv^* B'_1,\ldots,B_n \equiv^* B'_n$ *(ou* $B_1 \equiv^*_{\mathcal{L}} B'_1,\ldots,B_n \equiv^*_{\mathcal{L}} B'_n$*) são teoremas de* $\mathbf{J}_3$, *então* $A \equiv^* A'$ *(ou* $A \equiv^*_{\mathcal{L}} A'$*) é teorema de* $\mathbb{J}_3$.

DEMONSTRAÇÃO: Por indução sobre o comprimento de A, pelo Teorema 1.2.3 e Teorema 1.2.5, basta considerarmos os casos em que A é $\exists x C$ e A é $\forall x C$.

Se A é $\exists x C$ e A' é $\exists x C'$, com $\vdash_T C \equiv^* C'$, então, pela Regra da Distribuição, $\vdash_T \exists x C \equiv \exists x C'$ e $\vdash_T \forall x \neg C \equiv \forall x \neg C'$. Pelo Axioma 1.2 e Teorema 1.1.7, $\vdash_T \exists x C \equiv^* \exists x C'$.

Quando A é $\forall x C$ e A' é $\forall x C'$, com $\vdash_T C \equiv^* C'$, a demonstração é análoga à do caso anterior, usando-se o Axioma 13. ∎

COROLÁRIO 1: Se $\vdash_T x = y$, então, nos termos do Teorema da Equivalência, A(x) pode ser substituida por A(y), para toda fórmula A de T, na qual x e y são livres.

COROLÁRIO 2: Em T é possível, no espírito do Teorma da Equivalência, substituirmos:

i) $\forall x A$ por $\neg \exists x \neg A$;

ii) $\neg \exists x A$ por $\forall x \neg A$;

iii) $\neg \forall x A$ por $\exists x \neg A$;

iv) $\nabla \exists x A$ por $\exists x \nabla A$;

v) $\nabla \forall x A$ por $\forall x \nabla A$.

DEFINIÇÃO 2.2.2: Para toda fórmula A, A' é uma *variante* de A, se A' pode ser obtida, a partir de A, através de uma seqüência de substituições:

i) de uma parte $\exists x B$, onde y não é variável livre, por $\exists y B_x[y]$;

ii) de uma parte $\forall x B$, onde y não é variável livre, por $\forall y\, B_x[y]$.

TEOREMA 2.2.10 (Teorema da Variante): *Se* A' *é uma variante de* A, *então* $\vdash_T A$ *se, e somente se,* $\vdash_T A'$

DEMONSTRAÇÃO: Basta provarmos que $\vdash_T A \equiv^* A'$, ou que $\vdash_T A \equiv^*_{\mathcal{L}} A'$.

Pelo Axioma 8, $\vdash_T B_x[y] \supset \exists x B$; logo, por R_3, $\vdash_T \exists y B_x[y] \supset \exists x B$. Novamente pelo Axioma 8, $\vdash_T B \supset \exists y B_x[y]$, já que y não é livre em B; logo, por R_3, $\vdash \exists x B \supset \exists y B_x[y]$.

Portanto, $\vdash_T \exists x B \equiv \exists y B_x[y]$.

Por outro lado, pelo Axioma 9, $\vdash_T \forall x \neg B \supset \neg B_x[y]$; logo, por R_4, $\vdash_T \forall x \neg B \supset \forall y \neg B_x[y]$. De maneira análoga, $\vdash_T \forall y \neg B_x[y] \supset (\neg B_x[y])_y[x]$ e, portanto, $\vdash_T \forall y \neg B_x[y] \supset \neg B$ e $\vdash_T \forall y \neg B_x[y] \supset \forall x \neg B$.

Logo, $\vdash_T \forall x \neg B \equiv \forall y \neg B_x[y]$, o que é equivalente, pelo Corolário 2, a $\vdash_T \neg\exists x B \equiv \neg\exists y B_x[y]$.

Assim sendo, $\vdash_T \exists x B \equiv^* \exists y B_x[y]$.

Então, pelo Teorema da Equivalência e Definição 2.2.2, $\vdash_T A \equiv^* A'$. ∎

O Teorema da Variante é um resultado necessário, por exemplo, para a demonstração do Teorema da Completude para teorias-$\mathbf{J}_3$, via método de Henkin. Caso não fosse possível demonstrá-lo para as teorias - $\mathbf{J}_3$ em geral, deveríamos, além de enunciá-lo como axioma, efetuar modificações em algumas definições relativas às teorias - $\mathbf{J}_3$.

Como o Teorema da Variante é nada mais do que um corolário do Teorema da Equivalência, salientamos aqui, mais uma vez, a importância da obtenção da relação de equivalência $\equiv^*$, compatível com as teorias - $\mathbf{J}_3$.

TEOREMA 2.2.11 (Teorema da Redução): *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas de* T *e* A *uma fórmula de* T. A *é um teorema de* $T[\Gamma]$ *se, e somente se, existe um teorema de* T *da forma* $B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset A$, *onde cada* B_i *é o fecho de uma fórmula de* Γ, $1 \leq i \leq n$.

DEMONSTRAÇÃO: Idêntica à clássica, pelo Teorema de Dedução para as teorias - $\mathbf{J}_3$. ∎

Observamos, pelo teorema anterior, que como no caso das teorias bivalentes, para resolvermos o problema da caracterização para as teorias - $\mathbf{J}_3$, basta que o façamos para o caso das teorias - $\mathbf{J}_3$ sem axiomas não lógicos.

TEOREMA 2.2.12 (Teorema da Redução para não Trivialização): *Sejam* T *uma teoria* - $\mathbf{J}_3$ *e* Γ *um conjunto não vazio de fórmulas de* T. A *teoria* $T[\Gamma]$ *é trivial se, e somente se, existe um teorema de* T *que é uma disjunção de negações de fechos de fórmulas distintas do tipo* ∇A, *com* A *em* Γ.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Corolário 2.2.2, uma fórmula que é uma disjunção de negações de fechos de fórmulas distintas de tipo ∇A, é fortemente equivalente a uma fórmula que é uma disjunção de negações de fórmulas de tipo $\nabla A'$, onde A' é o fecho de A e A pertence a Γ. Então, pelo Teorema 1.1.7, e pela definição da negação forte de uma fórmula A, obtemos o resultado desejado. ∎

COROLÁRIO: Se A' é o fecho de A, então, a fórmula A é teorema de T se, e somente se, $T[\neg^* A']$ é trivial.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 2.2.12, $T[\neg^* A]$ é trivial se, e somente se, $\vdash_T \neg\nabla\neg\nabla A'$, o que é equivalente a $\vdash_T \neg^*\neg^* A'$. Usando o Teorema 1.1.7, obtemos que $T[\neg^* A]$ é trivial se, e somente se, $\vdash_T A$. ∎

3. FORMA PRENEX

DEFINIÇÃO 2.3.1: Uma fórmula de uma linguagem - $\mathbb{L}_3$ L é *aberta*, se ela não contém quantificadores.

DEFINIÇÃO 2.3.2: Uma fórmula A está na *forma prenex*, se ela está na forma $Qx_1 \ldots Qx_n B$, onde Qx_i é $\exists x_i$ ou $\forall x_i$, $x_1, \ldots, x_n$ são distintos e B é aberta.

$Qx_1 \ldots Qx_n$ é chamado *prefixo* e B a *matriz* de A.

Observamos que o prefixo de uma fórmula A pode ser vazio.

DEFINIÇÃO 2.3.4: Dada uma fórmula A, chamamos *operações prenex* às seguintes operações:

i) substituição de A por uma variante;

ii) substituição de uma parte $\neg QxB$ de A por $Q'x\neg B$, tal que, se Qx é $\exists x$ então $Q'x$ é $\forall x$, e se Qx é $\forall x$ então $Q'x$ é $\exists x$;

iii) substituição de uma parte ∇QxB de A por $Qx\nabla B$;

iv) substituição de uma parte $QxB \vee C$ de A por $Qx(B \vee C)$, com a restrição de x não ser variável livre em C;

v) substituição de uma parte $B \vee QxC$ de A por $Qx(B \vee C)$, com a restrição anterior sobre B.

TEOREMA 2.3.1: *Se* A' *for obtida, a partir da fórmula* A *de* L(T), *por meio de uma operação prenex, então* $\vdash_T A \equiv^* A'$.

DEMONSTRAÇÃO: Se A' for obtida, a partir de A, por meio das operações prenex (i), (ii), ou (iii), então pelo Teorema da Variante e Corolário 2 do Teorema 2.2.9, $\vdash_T A \equiv^* A'$.

Se A' for obtida por meio da operação (iv), provemos que $\vdash_T QxB \vee C \equiv^* Qx(B \vee C)$.

Como as teorias - $\mathbf{J}_3$ extendem o cálculo de predicados clássico, temos que $\vdash_T QxB \vee C \equiv Qx(B \vee C)$.

Como, também pelo Teorema 2.1.2, $\vdash_T QxM \,\&\, N \equiv Qx(M \,\&\, N)$, para M e N fórmulas quaisquer, então $\vdash_T Q'x\neg B \,\&\, \neg C \equiv$ $\equiv Q'x(\neg B \,\&\, \neg C)$.

Pela parte inicial do teorema, pelo Corolário 2, e Corolário 1 do Teorema 2.2.9, $\vdash_T \neg QxB \,\&\, \neg C \equiv Qx\neg(B \vee C)$.

Logo, $\vdash_T \neg(QxB \vee C) \equiv \neg Qx(B \vee C)$.

Assim sendo, $\vdash_T QxB \vee C \equiv^* Qx(B \vee C)$.

Finalizando, se A' for obtida por meio da operação ($\dot{v}$), a prova é semelhante à do caso anterior. ■

TEOREMA 2.3.2: *Toda fórmula de uma linguagem -$\mathbb{L}_3$ L pode ser convertida em uma fórmula na forma prenex, por aplicações de operações prenex.*

DEMONSTRAÇÃO: Semelhante à clássica, por indução sobre o comprimento de A.

Apenas acrescentamos o caso em que A é do tipo ∇B, no qual fazemos aplicações sucessivas da operação prenex (iii). ■

DEFINIÇÃO 2.3.5: A *forma prenex* de A é a fórmula, na forma prenex, para a qual A pode ser convertida, por meio de operações prenex.

Observamos que, como no caso clássico, as operações prenex independem da teoria - $\mathbb{J}_3$ na qual estejamos trabalhando.

Também como nos casos bivalentes, para obtermos a forma prenex de uma fórmula A de L(T), devemos eliminar os símbolos definidos de L, o que pode ser evitado se introduzirmos algumas operações prenex adicionais, relativas a tais símbolos.

4. O TEOREMA DA COMPLETUDE E O TEOREMA DA COMPACIDADE PARA AS TEORIAS - $\mathbb{J}_3$.

Estudamos certos aspectos das teorias - $\mathbb{J}_3$ e apresentamos uma demonstração, via método de Henkin, do teorema da completude para esse tipo de teorias polivalentes.

Seja L uma linguagem - $\mathbb{L}_3$ e L' uma extensão de L. Se $\mathfrak{A}'$ é uma estrutura para L', definimos da maneira habitual a *restrição* $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}'$ para L e a denotamos por $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \mid L$.

TEOREMA 2.4.1: *Se* T *é uma teoria -* $\mathbb{J}_3$ *,* T' *é uma extensão de* T *e* $\mathfrak{A}$ *é um modelo de* T'*, então a restrição de* $\mathfrak{A}'$ *a* L(T) *é um modelo de* T.

DEFINIÇÃO 2.4.1: Se T é uma teoria - $\mathbb{J}_3$ que contém uma constante e a e b são termos sem variáveis, então:

$$a \sim b =_{def} \vdash_{T} a = b,$$

e denotamos a classe de equivalência de a por a^{o} .

DEFINIÇÃO 2.4.2: A *estrutura canônica* para uma teoria - $\mathbf{J}_3$ T é a estrutura $\mathfrak{A}$:

i) cujo universo $|\mathfrak{A}|$ é o conjunto formado por todas as classes de equivalência determinadas pela relação ~;

ii) $f_{\mathfrak{A}}(a_1^o,\ldots,a_n^o) = (f(a_1,\ldots,a_n))^o$;

iii) $p_{\mathfrak{A}}(a_1^o,\ldots,a_n^o)$ pertence a V_d se, e somente se, $\vdash_T P(a_1,\ldots,a_n)$.

É imediato que $\mathfrak{A}$ está bem definida; que, para todo termo a sem variáveis, $\mathfrak{A}(a) = a^o$; e que $p_{\mathfrak{A}}(a_1^o,\ldots,a_n^o) = 0$ se, e somente se, $\nvdash_T p(a_1,\ldots,a_n)$.

TEOREMA 2.4.2: *Se* $\mathfrak{A}$ *é a estrutura canônica para* T e $p(a_1,\ldots,a_n)$ *é um predicado de* L(T), *então:*

i) $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n)) = \frac{1}{2}$ *see* $\vdash_T P(a_1,\ldots,a_n)$ *e* $\vdash_T \neg P(a_1,\ldots,a_n)$;

ii) $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n)) = 1$ *see* $\vdash_T P(a_1,\ldots,a_n)$ *e* $\nvdash_T \neg P(a_1,\ldots,a_n)$.

DEMONSTRAÇÃO: i) Se $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n)) = \frac{1}{2}$, então $\mathfrak{A}(\neg P(a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{2}$. Pela definição anterior, $\vdash_T P(a_1,\ldots,a_n)$ e $\vdash_T \neg P(a_1,\ldots,a_n)$.

Por outro lado, se $\vdash_T P(a_1,\ldots,a_n)$ e $\vdash_T \neg P(a_1,\ldots,a_n)$, também pela Definição 2.4.2, $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n)$ e $\mathfrak{A}(\neg P(a_1,\ldots,a_n))$ pertencem a V_d. Logo, $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{2}$.

ii) Se $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n) = 1$, então $\mathfrak{A}(\neg P(a_1,\ldots,a_n)) = 0$; logo, pela Definição 2.4.2, $\vdash_T P(a_1,\ldots,a_n)$ e $\nvdash_T \neg P(a_1,\ldots,a_n)$.

Por outro lado, se $\vdash_T P(a_1,\ldots,a_n)$ e $\not\vdash_T \neg P(a_1,\ldots,a_n)$ como acima, temos que $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n))$ pertence a V_d e $\mathfrak{A}(\neg P(a_1, \ldots,a_n))$ não pertence a V_d; se $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n)) = \frac{1}{2}$, então $\mathfrak{A}(\neg P(a_1,\ldots,a_n)) = \frac{1}{2}$ e, portanto, $\vdash_T \neg P(a_1,\ldots,a_n)$. Logo, $\mathfrak{A}(P(a_1,\ldots,a_n)) = 1$. ∎

Em uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T qualquer, não é verdade, em geral, que para toda fórmula fechada A, A pertence a V_d se, e somente se, $\vdash_T A$.

Na realidade, os teoremas de T não podem determinar a veracidade ou falsidade de todas as fórmulas de T, pois podem existir fórmulas A, tais que $\not\vdash_T A$, $\not\vdash_T \neg A$ e $\not\vdash \neg^* A$.

Assim sendo, o teorema anterior não é necessariamente verdadeiro para toda fórmula fechada A de T.

Em uma teoria - $\mathbf{J}_3$ qualquer, podemos obter apenas a equivalência abaixo.

TEOREMA 2.4.3: *Se* A *é uma teoria* - $\mathbf{J}_3$ *e* $\mathfrak{A}$ *é a estrutura canônica para* T, *então, para toda fórmula fechada* A *de* T, *as seguintes condições são equivalentes:*

i) $\mathfrak{A}(A) = \frac{1}{2}$ *see* $\vdash_T A$ *e* $\vdash_T \neg A$

e

$\mathfrak{A}(A) = 1$ *see* $\vdash_T A$ *e* $\not\vdash_T \neg A$;

ii) $\mathfrak{A}(A) = 0$ *see* $\not\vdash_T A$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos (i). Nessas condições,

$$\mathfrak{A}(A) = \frac{1}{2} \quad \text{see} \quad \nvdash_T A \quad \text{ou} \quad \nvdash_T \neg A$$

e

$$\mathfrak{A}(A) \neq 1 \quad \text{see} \quad \nvdash_T A \quad \text{ou} \quad \vdash_T \neg A$$

Como $\mathfrak{A}(A) = 0$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(A) \neq \frac{1}{2}$ e $\mathfrak{A}(A) \neq 1$, temos que $\mathfrak{A}(A) = 0$ se, e somente se, $\nvdash_T A$.

Agora, suponhamos (ii).

Se $\mathfrak{A}(A) = \frac{1}{2}$, então $\mathfrak{A}(A) \neq 0$ e $\mathfrak{A}(\neg A) \neq 0$; logo, temos que $\vdash_T A$ e $\vdash_T \neg A$.

Por outro lado, se $\vdash_T A$ e $\vdash_T \neg A$, então $\mathfrak{A}(A) \neq 0$ e $\mathfrak{A}(\neg A) \neq 0$. Logo, $\mathfrak{A}(A) = \frac{1}{2}$.

Portanto, $\mathfrak{A}(A) = \frac{1}{2}$ se, e somente se, $\vdash_T A$ e $\vdash_T \neg A$.

Se $\mathfrak{A}(A) = 1$, então $\mathfrak{A}(A) \neq 0$ e $\mathfrak{A}(\neg A) = 0$; logo, temos que $\vdash_T A$ e $\nvdash_T \neg A$.

Por outro lado, se $\vdash_T A$ e $\nvdash_T \neg A$, então $\mathfrak{A}(A) \neq 0$ e $\mathfrak{A}(\neg A) = 0$. Logo, $\mathfrak{A}(A) = 1$.

Portanto, $\mathfrak{A}(A) = 1$ se, e somente se, $\vdash_T A$ e $\nvdash_T \neg A$. ∎

Em geral, numa teoria - $\mathbf{J}_3$ T, dada uma fórmula fechada A qualquer, para que "A é teorema T" seja equivalente a "A é válida em $\mathfrak{A}$", como nos casos bivalentes, é necessário que T satisfaça a determinadas condições especiais.

DEFINIÇÃO 2.4.3: Uma fórmula A de uma teoria - $\mathbf{J}_3$ T é *indecidível* em T, se A e $\neg^* A$ não são teoremas de T.

Caso contrário, A diz-se *decidível* em T.

DEFINIÇÃO 2.4.4: Uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T diz-se *completa* se ela é não trivial e se toda fórmula fechada de T é decidível em T.

TEOREMA 2.4.4: *Uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T é completa se, e somente se, T é maximal na classe das teorias não triviais.*

DEFINIÇÃO 2.4.5: Uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T é uma *teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin se,* para toda fórmula fechada $\exists x A$ de T existe uma constante e, tal que $\exists x A \supset A_x[e]$ é teorema de T.

TEOREMA 2.4.5: *Se* T *é uma teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin, então, para toda fórmula fechada* $\forall x A$ *de* T *existe uma constante* e, *tal que* $A_x[e] \supset \forall x A$ *é teorema de* T.

DEMONSTRAÇÃO: Como T é teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin, existe e, tal que $\vdash_T \exists x \neg^* A \supset \neg^* A_x[e]$.

Obtemos o resultado desejado, por aplicações sucessivas do Teorema 1.1.7. ■

TEOREMA 2.4.6: *Seja* T *uma teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin completa e* A *uma fórmula fechada de* L(A). *Se* $\mathfrak{A}$ *é a estrutura canônica para* T, *então:*

i) $\mathfrak{a}(A) = \frac{1}{2}$ *see* $\vdash_T A$ *e* $\vdash_T \neg A$;

ii) $\mathfrak{a}(A) = 1$ *see* $\vdash_T A$ *e* $\nvdash_T \neg A$.

DEMONSTRAÇÃO: Por indução sobre o peso de A.

Para A *atômica*, vale o Teorema 2.2.2.

A é $\neg B$: i) $\mathfrak{a}(A) = \frac{1}{2}$ see $\mathfrak{a}(B) = \frac{1}{2}$, o que é equivalente, pela hipótese de indução e Teorema 1.1.7, a $\vdash_T \neg\neg B$ e $\vdash_T \neg B$.

ii) $\mathfrak{a}(A) = 1$ see $\mathfrak{a}(B) = 0$, o que é equivalente, pela hipótese de indução, Teorema 2.4.3 e Teorema 1.1.7 a $\nvdash_T \neg\neg B$.

Como T é completa, $\nvdash_T \neg\neg B$ implica que $\vdash_T \neg^* B$ e, portanto, $\vdash_T \neg B$. Logo, se $\mathfrak{a}(\neg B) = 1$, então $\vdash_T \neg B$ e $\nvdash_T \neg\neg B$.

Por outro lado, se $\nvdash_T \neg\neg B$ e $\vdash_T \neg B$, é imediato que $\mathfrak{a}(B) =$ $= 0$, portanto, $\mathfrak{a}(\neg B) = 1$.

A é ∇B: $\mathfrak{a}(A) = 1$ see $\mathfrak{a}(B) = \frac{1}{2}$ ou $\mathfrak{a}(B) = 1$, o que, pela hipótese de indução, é equivalente a $\vdash_T B$. Como $\vdash_T B \equiv \nabla B$, $\vdash_T B$ se, e somente se, $\vdash_T \nabla B$; além disso, como T é completa, $\vdash_T B$ se, e somente se, $\nvdash_T \neg^* B$, ou seja, se, e somente se, $\nvdash_T \neg\nabla B$.

Logo, $\mathfrak{a}(\nabla B) = 1$ se, e somente se, $\vdash_T$, $\vdash_T \nabla B$ e $\nvdash_T \neg\nabla B$.

A é $B \vee C$: i) $\mathfrak{a}(A) = \frac{1}{2}$ see $\mathfrak{a}(B) = \frac{1}{2}$ e $\mathfrak{a}(c) = \frac{1}{2}$, ou $\mathfrak{a}(B) = \frac{1}{2}$ e $\mathfrak{a}(c) = 0$, ou $\mathfrak{a}(B) = 0$ e $\mathfrak{a}(c) = \frac{1}{2}$. Como T é completa, pela hipótese de indução e pelo Teorema 2.4.3, $\mathfrak{a}(A) = \frac{1}{2}$ se, e somente se,

$\vdash_{T} \neg B \,\&\, \neg C$ e $\vdash_{T} B \vee C$

ou

$\vdash_{T} B$, $\vdash_{T} \neg B$ e $\vdash_{T} \neg^{*} C$

ou

$\vdash_{T} C$, $\vdash_{T} \neg C$ e $\vdash_{T} \neg^{*} B$.

O resultado acima implica que $\vdash_{T} \neg B \,\&\, \neg C$ e $\vdash_{T} B \vee C$, o que é equivalente a $\vdash_{T} \neg(B \vee C)$ e $\vdash_{T} B \vee C$.

Por outro lado, como T é completa, $\vdash_{T} \neg(B \vee C)$ e $\vdash_{T} B \vee C$ implicam que $\vdash_{T} \neg B$, $\vdash_{T} \neg C$ e $\nvdash_{T} \neg^{*}(B \vee C)$. Logo, pelo Corolário 1 do Teorema 2.2.9 e pelo Teorema 1.1.7,

$\vdash_{T} \neg B$, $\vdash_{T} \neg C$ e $\nvdash_{T} \neg^{*} B$

ou

$\vdash_{T} \neg B$, $\vdash_{T} \neg C$ e $\nvdash_{T} \neg^{*} C$.

Então, pela hipótese de indução e Teorema 2.4.3, temos que $\mathfrak{a}(B \vee C) = \frac{1}{2}$.

ii) $\mathfrak{a}(A) = 1$ see $\mathfrak{a}(A) = 1$, ou $\mathfrak{a}(C) = 1$.

Pela hipótese da indução, $\mathfrak{a}(B) = 1$, ou $\mathfrak{a}(C) = 1$, implicam que $\vdash_{T} B \vee C$ e $\nvdash_{T} \neg B \,\&\, \neg C$.

Por outro lado, se $\vdash_{T} B \vee C$ e $\nvdash \neg(B \vee C)$, temos que $\nvdash_{T} \neg B$, ou $\nvdash_{T} \neg C$. Logo, pela hipótese da indução e Teorema 2.4.3, $\mathfrak{a}(\neg B) = 0$, ou $\mathfrak{a}(\neg C) = 0$. Donde, $\mathfrak{a}(B \vee C) = 1$.

A é $\exists x B$: $\mathfrak{A}(A) = 0$ see $\max\{\mathfrak{A}(B_x[i])/i \in L(\mathfrak{A})\} = 0$, o que é equivalente a $\mathfrak{A}(B_x[b]) = 0$, para todo termo b sem variáveis, tal que i é o nome de $\mathfrak{A}(b)$, para todo i em $L(\mathfrak{A})$. Pela hipótese de indução, esse fato é equivalente a $\not\vdash_T B_x[b]$, para todo termo b sem variáveis.

Como T é uma teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin, se $\not\vdash_T B_x[b]$, para todo termo b sem variáveis, então $\not\vdash_T \exists x B$.

Por outro lado, pelo Axioma 8, $\not\vdash_T \exists x B$ implica que $\not\vdash_T B_x[b]$, para todo termo b sem variáveis.

Portanto, $\mathfrak{A}(\exists x B) = 0$ see $\vdash_T \exists x B$.

Usando o Teorema 2.4.3, completamos a demonstração. ∎

COROLÁRIO 1: Se T é uma teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin completa, $\mathfrak{A}$ é a estrutura canônica para T e A é uma fórmula fechada de L(T), então $\mathfrak{A}(A)$ pertence a V_d se, e somente se, A é teorema de T.

DEMONSTRAÇÃO: $\mathfrak{A}(A) = \frac{1}{2}$, ou $\mathfrak{A}(A) = 1$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(A) \neq 0$. Pelo Teorema 2.4.3 e Teorema anterior, $\mathfrak{A}(A) \neq 0$ se, e somente se, $\vdash_T A$. ∎

COROLÁRIO 2: Se T é uma teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin completa, então a estrutura canônica para T é um modelo de T.

Em virtude do corolário anterior, para demonstrarmos a completude de uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T, como no caso clássico, basta mostrarmos que é possível extender T a uma teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin completa.

Assim sendo, a partir de T vamos construir uma teoria - $\mathbb{J}_3$ de Henkin T_c, extensão conservativa de T, a qual, por sua vez, extendemos a uma teoria completa T'_c, que satisfaz as condições acima mencionadas.

Seja T uma teoria - $\mathbb{J}_3$, com linguagem - $\mathbb{L}_3$ L.

Definimos as *constantes especiais de nível* n, por indução sobre n.

DEFINIÇÃO 2.4.6: Considerando-se como já definidas as constantes especiais de níveis menores que n, seja $\exists xA$ uma fórmula fechada, a qual contém símbolos de L, e, para $n > 0$, contém pelo menos um símbolo de constante especial de nível $n - 1$. O símbolo que consiste da letra c com subscrito $\exists xA$, é uma *constante especial de nível* n, chamada *constante especial relativa a* $\exists xA$.

A linguagem obtida, acrescentando-se a L todas as constantes especiais de todos os níveis, é denotada por L_c.

Usamos r, s, t como variáveis sintáticas para as constantes especiais de L_c.

DEFINIÇÃO 2.4.7: Se r é a constante especial relativa à fórmula fechada $\exists xA$, a fórmula $\exists xA \supset A_x[r]$ é chamada *axioma especial relativo a* r.

DEFINIÇÃO 2.4.8: Seja T uma teoria - $\mathbb{J}_3$ com linguagem - $\mathbb{L}$. T_c é a teoria cuja linguagem é L_c e cujos axiomas não lógicos são os de T e os axiomas especiais relativos às constantes especiais de L_c.

TEOREMA 2.4.7: T_c *é uma teoria* - $\mathbf{J}_3$ *de Henkin.*

TEOREMA 2.4.8: T_c *é uma extensão conservativa de* T.

DEMONSTRAÇÃO: Acrescentando-se as constantes especiais a L(T), sem novos axiomas, obtemos a teoria - $\mathbf{J}_3$ T', que é uma extensão conservativa de T, pelo Teorema sobre Constantes.

Portanto, para obtermos o resultado desejado, basta provarmos que toda fórmuma de T, que é teorema de T_c, é teorema de T'.

Já que foi possível definirmos a relação de equivalência $\equiv^*$, compatível com as teorias - $\mathbf{J}_3$, tendo sido obtido um teorema da variante para tais teorias, pelo Teorema 2.2.10 e pelo Teorema 2.4.5, a demonstração fica idêntica à clássica. ∎

Dizemos que uma teoria - $\mathbf{J}_3$ T' é uma *extensão simples* da teoria - $\mathbf{J}_3$ T, quando T e T' tem a mesma linguagem.

TEOREMA 2.4.9 (Teorema de Lindenbaum): *Se* T *é uma teoria* - $\mathbf{J}_3$ *não trivial, então* T *admite uma extensão simples completa.*

DEMONSTRAÇÃO: Considerando-se o conjunto F de todas as fórmulas de T, e a classe M de todos os subconjuntos A de F, tais que $T[A]$

é não trivial, como no caso clássico, podemos provar que $\mathcal{M}$ tem *caráter finito*, isto é, provamos que $T[A]$ é não trivial se, e somente se, $T[A']$ é não trivial, para todo subconjunto finito A' de A.

Como $\mathcal{M}$ é não vazia, pelo Lema de Teichmüller-Tukey, existe um elemento maximal A em $\mathcal{M}$ e $T[A]$ é uma extensão simples não-trivial de T.

Para provarmos que $T[A]$ é completa, basta provarmos que, se B é uma fórmula fechada de T e $\nvdash_{T[A]} B$, então $\vdash_{T[A]} \neg^* B$.

Pelo Corolário do Teorema da Redução, $T[A \cup \{\neg^* B\}]$ é trivial se, e somente se, $\vdash_{T[A]} B$. Logo, $A \cup \{\neg^* B\}$ pertence a $\mathcal{M}$ e, portanto, $\neg^* B$ está em A. ■

Finalmente, podemos obter o teorema da completude para as teorias - $\mathfrak{J}_3$.

Daremos duas formulações para o teorema da completude e, como nas teorias bivalentes, demonstraremos uma delas e mostraremos que esta implica a outra.

TEOREMA 2.4.10 (Teorema da Completude): *Uma teoria - $\mathfrak{J}_3$ T é não trivial se, e somente se, T tem modelo.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $\mathfrak{A}$ é um modelo de T e A é uma fórmula fechada de T, então $\mathfrak{A}(A \,\&\, \neg^* A) = 0$. Logo, pelo Teorema da Validade, $A \,\&\, \neg^* A$ não é teorema de T. Logo, T é não trivial.

Se T é não trivial, ao extendermos T a T_c, pelo Teorema 2.4.8, obtemos uma teoria - $\mathfrak{J}_3$ de Henkin não trivial. Pelo Teorema de Lindenbaum, podemos extender T_c a uma teoria - $\mathfrak{J}_3$ de Henkin completa T'_c. Pelo Corolário 2 do Teorema 2.4.6, T'_c tem modelo $\mathfrak{A}$. Logo, pelo Teorema 2.4.1, $\mathfrak{A}|T$ é modelo de T. ■

TEOREMA 2.4.11 (Teorema da Completude de Gödel): *Uma fórmula* A *de uma teoria*-$\mathbb{J}_3$ T *é teorema de* T, *se, e somente se, ela é válida em* T.

DEMONSTRAÇÃO: Supondo que a fórmula fechada A é teorema de T, usando o Teorema da Completude anterior, demonstraremos que não existe modelo de T no qual A não seja válida.

Assim sendo, suponhamos que a fórmula fechada A é teorema de T.

Pelo Corolário do Teorema da Redução para não Trivialização $\vdash_T A$ se, e somente se, $T[\neg\nabla A]$ é trivial, o que é equivalente, pelo Teorema 2.4.10, a $T[\neg\nabla A]$ não ter modelo.

Entretanto, um modelo de $T[\neg\nabla A]$ seria um modelo $\mathfrak{A}$ de T, no qual $\neg\nabla A$ seria válida, ou seja, uma estrutura $\mathfrak{A}$, tal que $\mathfrak{A}(\neg\nabla A) = 1$. Isto seria equivalente a $\mathfrak{A}(\nabla A) = 0$ e, portanto, $\mathfrak{A}(A) = 0$.

Logo, $\vdash_T A$ se, e somente se, A é válida em T. ■

TEOREMA 2.4.12: *Seja* T *uma teoria*-$\mathbb{J}_3$ *não trivial e* U *uma extensão simples não trivial de* T_c. *Então,* U *tem um modelo* $\mathfrak{A}$, *tal que cada indivíduo de* $\mathfrak{A}$ *é* $\mathfrak{A}(r)$, *para uma infinidade de constantes especiais* r.

COROLÁRIO: Sejam T e T' teorias - $\mathbf{J}_3$ com a mesma linguagem. T e T' são equivalentes se, e somente se, têm os mesmos modelos.

TEOREMA 2.4.13 (Teorema da Compacidade): *Uma fórmula* A *é válida em uma teoria -* $\mathbf{J}_3$ T *se, e somente se,* A *é válida em uma parte finitamente axiomatizada de* T.

COROLÁRIO: Uma teoria - $\mathbf{J}_3$ T têm modelo se, e somente se, toda parte finitamente axiomatizada de T tem modelo.

CAPÍTULO III

TEORIA DE MODELOS

A teoria de modelos para as teorias - $\mathbb{J}_3$ reflete muito da teoria clássica de modelos. Assim sendo, neste capítulo, provamos versões generalizadas dos principais resultados clássicos e, em alguns casos, mais de uma versão.

Usaremos as notações e convenções de [48], com adaptações adequadas.

Quando as definições, teoremas ou demonstrações são muito semelhantes ao caso clássico correspondente, nós os omitimos.

Entretanto, indicamos algumas provas análogas às clássicas correspondentes, como a do Teorema de Chang-Łoś Suszko, Teorema da não Trivialização Conjunta e Teorema de Ehrenfeucht, pois não é óbvio, "a priori", que tais resultados possam valer para as teorias - $\mathbb{J}_3$.

1. ISOMORFISMOS, SUB-ESTRUTURAS E TEOREMAS DE EXTENSÃO DE MODELOS

Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ estruturas para a linguagem-$\mathbb{L}_3$L.

DEFINIÇÃO 3.1.1: Um *isomorfismo* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ é uma aplicação bijetora ϕ de $|\mathfrak{A}|$ em $|\mathfrak{B}|$ tal que, para quaisquer indivíduos $a_1,\ldots,a_n$ de $|\mathfrak{A}|$:

i) $\phi(f_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)) = f_{\mathfrak{B}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$, para todo símbolo de função f de L;

ii) $p_{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n) = p_{\mathcal{B}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$, para todo símbolo de predicado p de L.

Se ϕ é uma aplicação de $|\mathcal{A}|$ em $|\mathcal{B}|$ e i é o nome de um indivíduo a de $|\mathcal{A}|$, então indicamos o nome do indivíduo $\phi(a)$ de $|\mathcal{B}|$, por i^{ϕ}.

Se u é uma expressão de $L(\mathcal{A})$, então indicamos por u^{ϕ} a expressão de $L(\mathcal{B})$ obtida, substituindo-se cada i, em u, por i^{ϕ}

TEOREMA 3.1.1: *Seja ϕ um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Então, $\phi(\mathcal{A}(a)) = \mathcal{B}(a^{\phi})$, para todo termo sem variáveis a de $L(\mathcal{A})$; e $\mathcal{A}(A) = \mathcal{B}(A^{\phi})$, para toda fórmula fechada A de $L(\mathcal{A})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Provamos a primeira parte por indução sobre o comprimento de a.

Se a é um nome, o resultado é imediato.

Se a é $f(a_1,\ldots,a_n)$, como

$$\phi(\mathcal{A}(f(a_1,\ldots,a_n))) = \phi(f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(a_1),\ldots,\mathcal{A}(a_n)))$$

e ϕ é um isomorfismo, pela hipótese de indução, temos que

$$\phi(\mathcal{A}(f(a_1,\ldots,a_n))) = f_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}(a_1^{\phi}),\ldots,\mathcal{B}(a_n^{\phi})) =$$

$$= \mathcal{B}((f(a_1,\ldots,a_n))^{\phi}).$$

Provamos a segunda parte do teorema, também por indução sobre o comprimento de A.

Se A é do tipo $a = b$, então, pela Definição 2.1.4, $\mathcal{A}(A) = 1$

se, e somente se, $\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(b)$; o que é equivalente, já que ϕ é injetiva, a $\phi(\mathcal{A}(a)) = \phi(\mathcal{A}(b))$. Logo, $\mathcal{A}(A) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{B}(a^{\phi}) = \mathcal{B}(b^{\phi})$; o que é equivalente a $\mathcal{B}(a^{\phi} = b^{\phi}) = 1$, ou seja, $\mathcal{B}(A^{\phi}) = 1$. Ainda pela Definição 2.1.4, temos que $\mathcal{A}(A) = \mathcal{B}(A^{\phi})$.

Se A é do tipo $p(a_1,\ldots,a_n)$, com $p(a_1,\ldots,a_n)$ distinto de $a = b$, então, para v pertencente a V, pela definição acima citada, $\mathcal{A}(A) = v$ se, e somente se, $p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(a_1),\ldots,\mathcal{A}(a_n)) = v$. Logo, como ϕ é um isomorfismo, $\mathcal{A}(A) = v$ se, e somente se, $p_{\mathcal{B}}(\phi(\mathcal{A}(a_1)),\ldots,\phi(\mathcal{A}(a_n))) = v$; o que é equivalente, pela primeira parte do teorema, a $p_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}(a_1^{\phi}),\ldots,\mathcal{B}(a_n^{\phi})) = v$. Portanto, $\mathcal{A}(A) = \mathcal{B}(A^{\phi})$.

Se A é do tipo $\neg B$, suponhamos $\mathcal{A}(\neg B) = v$. Pela Definição 2.1.4, $\mathcal{A}(B) = 1 - v$, o que é equivalente, pela hipótese de indução e definição citada, a $\mathcal{B}(B^{\phi}) = 1 - v$ e, portanto, $\mathcal{B}(\neg B^{\phi}) = 1-(1 - v)$. Logo, $\mathcal{A}(\neg B) = v$ se, e somente se, $\mathcal{B}((\neg B)^{\phi}) = v$.

Se A é do tipo ∇B, $\mathcal{A}(\nabla B) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{A}(B) = \frac{1}{2}$ ou $\mathcal{A}(B) = 1$, o que é equivalente, pela hipótese de indução, a $\mathcal{B}(B^{\phi}) = \frac{1}{2}$ ou $\mathcal{B}(B^{\phi}) = 1$; o que é equivalente a $\mathcal{B}(\nabla B^{\phi}) = 1$. Como é trivial que $\mathcal{A}(\nabla B) = 0$ é equivalente a $\mathcal{B}(\nabla B^{\phi}) = 0$, temos que $\mathcal{A}(\nabla B) = \mathcal{B}((\nabla B)^{\phi})$.

Se A é do tipo $B \vee C$, suponhamos $\mathcal{A}(B \vee C) = v$. Pela hipótese de indução, como $\mathcal{A}(B \vee C) = \max\{\mathcal{A}(B), \mathcal{A}(C)\}$, então $\mathcal{A}(B \vee C) = v$ se, e somente se, $\max\{\mathcal{B}(B^{\phi}), \mathcal{B}(C^{\phi})\} = v$, o que é equivalente a $\mathcal{B}((B \vee C)^{\phi}) = v$.

Se A é do tipo $\exists x B$, pela hipótese de indução,

$$\mathcal{A}(A) = \max\{\mathcal{A}(B_x[i])/i \in L(\mathcal{A})\} = v$$

se, e somente se,

$$\max\{\mathcal{B}(B_x^{\phi}[i^{\phi}])/i \in L(\mathfrak{A})\} = v.$$

Como ϕ é sobrejetora e, portanto, todo nome j de $L(\mathcal{B})$ é i^{ϕ}, para algum i de $L(\mathfrak{A})$, temos que $\mathfrak{A}(A) = v$ se, e somente se,

$$\max\{\mathcal{B}(B_x^{\phi}[j])/j \in L(\mathcal{B})\} = v.$$

Logo, $\mathfrak{A}(\exists xB) = v$ é equivalente a $\mathcal{B}((\exists xB)^{\phi}) = v$.

As definições que se seguem de estruturas elementarmente equi valentes e imersão de estruturas são similares às clássicas.

DEFINIÇÃO 3.1.2: Se $\mathfrak{A}$ e $\mathcal{B}$ validam as mesmas fórmulas da linguagem - $\mathbb{L}_3$L, dizemos que $\mathfrak{A}$ e $\mathcal{B}$ são *elementarmente equivalentes* e indicamos este fato por $\mathfrak{A} \cong \mathcal{B}$.

Como no caso clássico, se $\mathfrak{A}$ e $\mathcal{B}$ são elementarmente equivalentes, então são modelos das mesmas teorias - $\mathbf{J}_3$.

Entretanto, se $\mathfrak{A} \cong \mathcal{B}$ e A é uma fórmula fechada de L, não podemos concluir que $\mathfrak{A}(A) = \mathcal{B}(A)$.

Observamos ainda que, pelo Teorema anterior e Teorema do Fecho, duas estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes, não valendo a recíproca, como no caso clássico.

DEFINIÇÃO 3.1.3: Uma *imersão* de $\mathfrak{A}$ em $\mathcal{B}$ é uma aplicação injetora $\phi : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathcal{B}|$, que satisfaz as condições (i) e (ii) da definição de isomorfismo, para toda n-upla $(a_1,\ldots,a_n)$ de indivíduos de $|\mathfrak{A}|$.

DEFINIÇÃO 3.1.4: Dizemos que $\mathfrak{A}$ é uma *subestrutura* de $\mathfrak{B}$, ou que $\mathfrak{B}$ é uma *extensão* de $\mathfrak{A}$, quando $|\mathfrak{A}|$ é subconjunto de $|\mathfrak{B}|$ e a aplicação identidade de $|\mathfrak{A}|$ em $|\mathfrak{B}|$ é uma imersão, ou seja:

i) $f_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n) = f_{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n)$, para todo símbolo de função f de L;

ii) $p_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n) = p_{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n)$, para todo símbolo de predicado p de L.

Se $|\mathfrak{A}| \subset |\mathfrak{B}|$ e a é um indivíduo de $\mathfrak{A}$, então usamos o mesmo nome para a em $L(\mathfrak{A})$ e $L(\mathfrak{B})$. Dessa forma, $L(\mathfrak{B})$ torna-se uma extensão de $L(\mathfrak{A})$.

DEFINIÇÃO 3.1.5: Nas condições da definição anterior, se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são modelos de uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T, dizemos que $\mathfrak{A}$ é um *submodelo* de $\mathfrak{B}$.

TEOREMA 3.1.2: *Uma aplicação ϕ é uma imersão de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{B}(A^{\phi})$, para toda fórmula sem variáveis A de $L(\mathfrak{A})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Semelhante à do teorema anterior.

COROLÁRIO: A estrutura $\mathfrak{A}$ é uma subestrutura de $\mathfrak{B}$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{B}(A)$, para toda fórmula sem variáveis A de $L(\mathfrak{A})$.

Seja Γ um conjunto de fórmulas da linguagem - $\mathbb{L}_3$ L e $\mathfrak{A}$ uma estrutura para L. Como na teoria de modelos clássica, denotamos o *conjunto das $\mathfrak{A}$ - instâncias das fórmulas de* Γ por $\Gamma(\mathfrak{A})$.

DEFINIÇÃO 3.1.6: Seja Γ um conjunto de fórmulas da linguagem $-\mathbb{L}_3 L$ e sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estruturas para L, com $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{B}|$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma Γ-*subestrutura* de $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é uma Γ-*extensão* de $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A}(A) \in V_d$ implica $\mathcal{B}(A) \in V_d$, para toda fórmula A de $\Gamma(A)$.

TEOREMA 3.1.3: *Seja Γ um conjunto de fórmulas de L tal que, para toda fórmula A de Γ, $\neg\nabla A$ está em Γ. Se $\mathcal{A}$ é uma Γ-subestrutura de $\mathcal{B}$, então $\mathcal{A}(A) \in V_d$ se, e somente se, $\mathcal{B}(A) \in V_d$, para toda fórmula A de $\Gamma(\mathcal{A})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $\mathcal{A}$ é uma Γ-subestrutura de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(A) = 0$ implica $\mathcal{A}(A) = 0$, para toda fórmula A de $\Gamma(\mathcal{A})$.

Se $\mathcal{A}(A) = 0$, então $\mathcal{A}(\neg\nabla A) = 1$. Nas condições do teorema, temos que $\mathcal{B}(\neg\nabla A)$ é distinguido, o que acarreta que $\mathcal{B}(\neg\nabla A) = 1$. Logo, $\mathcal{B}(A) = 0$.

Assim sendo, $\mathcal{A}(A) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{B}(A) = 0$.

Portanto, $\mathcal{A}(A) \in V_d$ se, e somente se, $\mathcal{B}(A) \in V_d$.

Se Γ é um conjunto de fórmulas tal que, para toda fórmula A de Γ, $\neg A$ pertence a Γ, parace não ser possível obtermos o resultado anterior.

De fato, $\mathcal{A}(A) = 0$ e $\mathcal{A}$ é Γ-subestrutura de $\mathcal{B}$ implicam que $\mathcal{B}(\neg A)$ é distinguido. Podemos concluir que $\mathcal{B}(A) = \frac{1}{2}$, ou $\mathcal{B}(A) = 0$, e não que $\mathcal{B}(A) = 0$.

Podemos, entretanto, provar que $\mathcal{A}(A) = \frac{1}{2}$ implica $\mathcal{B}(A) = \frac{1}{2}$, e que $\mathcal{B}(A) = 1$ implica $\mathcal{A}(A) = 1$.

Também não parece possível obtermos o resultado anterior, quando Γ é um conjunto de fórmulas tal que, para toda fórmula A em Γ, ∇A pertence a Γ.

Porém, se para toda fórmula A de um conjunto Γ, as fórmulas $\neg A$ e ∇A pertencerem a Γ, então podemos provar um resultado mais forte que o anterior.

TEOREMA 3.1.4: *Seja Γ um conjunto de fórmulas de L tal que, para toda fórmula A de Γ, $\neg A$ e ∇A estão em Γ. Se $\mathcal{A}$ é uma Γ-subestrutura de $\mathcal{B}$, então $\mathcal{A}(A) = \mathcal{B}(A)$, para toda fórmula A de $\Gamma(\mathcal{A})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Nas condições do teorema, para toda fórmula A de Γ, $\neg\nabla A$ está em Γ.

Pelo teorema anterior, $\mathcal{A}(A)$ é distinguido se, e somente se, $\mathcal{B}(A)$ é distinguido, para toda fórmula A de $\Gamma(\mathcal{A})$.

Suponhamos que exista uma fórmula A em $\Gamma(\mathcal{A})$, tal que $\mathcal{A}(A) = \frac{1}{2}$ e $\mathcal{B}(A) = 1$.

Então, $\mathcal{A}(\neg A) = \frac{1}{2}$ e $\mathcal{B}(\neg A) = 0$. Portanto, temos a fórmula $\neg A$ em $\Gamma(\mathcal{A})$, que é válida em $\mathcal{A}$ e não é válida em $\mathcal{B}$, o que é absurdo.

Logo, se $\mathcal{A}(A) = \frac{1}{2}$, então $\mathcal{B}(A) = \frac{1}{2}$

Agora, suponhamos que exista uma fórmula A em $\Gamma(\mathcal{A})$, tal que $\mathcal{A}(A) = 1$ e $\mathcal{B}(A) = \frac{1}{2}$.

Então, $\mathcal{A}(\neg A) = 0$ e $\mathcal{B}(\neg A) = \frac{1}{2}$, o que contraria o teorema anterior.

Logo, se $\mathcal{A}(A) = 1$, então $\mathcal{B}(A) = 1$.

TEOREMA 3.1.5: 1. *Se* Γ *é o conjunto de todas as fórmulas abertas de* L, $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *são estruturas para* L, *e* $\mathcal{A}$ *é uma* Γ-*subestrutura de* $\mathcal{B}$, *então* $\mathcal{A}$ *é uma subestrutura de* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}$ *é uma extensão de* $\mathcal{A}$.

2. *Se* Γ *é o conjunto de todas as fórmulas de* L *e* $\mathcal{A}$ *é uma* Γ-*subestrutura de* $\mathcal{B}$, *então* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *são elementarmente equivalentes.*

DEMONSTRAÇÃO: Se Γ é o conjunto de todas as fórmulas abertas de L, então $\Gamma(\mathcal{A})$ é o conjunto de todas as fórmulas sem variáveis de L($\mathcal{A}$). Logo, a primeira parte do teorema, pelo Corolário do Teorema 3.1.2, é consequência do Teorema 3.1.4.

Por outro lado, se Γ é o conjunto de todas as fórmulas de L, então $\Gamma(\mathcal{A})$ é o conjunto das fórmulas fechadas de L($\mathcal{A}$). Logo, a segunda parte do teorema, pela Definição 3.1.2, é consequência do Teorema 3.1.3.

DEFINIÇÃO 3.1.7: Se Γ é o conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem - $\mathbb{L}_3$ L e $\mathcal{A}$ é uma Γ-subestrutura de $\mathcal{B}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *subestrutura elementar* de $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é uma *extensão elementar* de $\mathcal{A}$, o que indicamos por $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

TEOREMA 3.1.6: *Se* $\mathcal{A}$ *é uma subestrutura elementar de* $\mathcal{B}$, *então* $\mathcal{A}$ *é uma subestrutura de* $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ *é elementarmente equivalente a* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{A}$(A) $= \mathcal{B}$(A), *para toda fórmula fechada* A *de* L.

DEMONSTRAÇÃO: É óbvia, pelo Corolário do Teorema 3.1.2, Teorema

3.1.4 e Teorema 3.1.5.

Como no caso clássico, não vale a recíproca do Teorema 3.1.6, pois $\mathfrak{A}$ pode ser subestrutura de $\mathfrak{B}$, elementarmente equivalente a $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{B}(A)$ para toda fórmula fechada A de L, sem que $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{B}(A)$ para toda fórmula fechada A de $L(\mathfrak{A})$.

Além disso, no caso das linguagens - $\mathbb{L}_3$, é conveniente observarmos que, mesmo $\mathfrak{A}$ sendo subestrutura de $\mathfrak{B}$ e elementarmente equivalentes a $\mathfrak{B}$, podem existir fórmulas fechadas A em $L(\mathfrak{A})$, tais que $\mathfrak{A}(A)$ e $\mathfrak{B}(A)$ sejam distinguidos, porém distintos.

TEOREMA 3.1.7: *Se* $x = e$ *pertence ao conjunto* Γ *de fórmulas de* L *e* $\mathfrak{A}$ *é uma* Γ*-subestrutura de* $\mathfrak{B}$, *então* $\mathfrak{A}(e) = \mathfrak{B}(e)$.

Dada uma estrutura $\mathfrak{A}$ para a linguagem - $\mathbb{L}_3$ L, definimos a teoria Γ-diagrama de $\mathfrak{A}$, de maneira semelhante à clássica.

DEFINIÇÃO 3.1.8: Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ estruturas para a linguagem - $\mathbb{L}_3$ L, com $|\mathfrak{A}| \subset |\mathfrak{B}|$. A estrutura $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ para a linguagem $L(\mathfrak{A})$ é uma *expansão da estrutura* $\mathfrak{B}$ tal que, se i é o nome de um indivíduo a de $|\mathfrak{A}|$, então $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(i) = a$.

Lembramos que, como no caso clássico, um nome i de $L(\mathfrak{A})$ exerce dois papéis em $(L(\mathfrak{A}))(\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}})$: i é uma constante de $L(\mathfrak{A})$ e, simultaneamente, é o nome de um indivíduo de $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$.

DEFINIÇÃO 3.1.9: Se Γ é um conjunto de fórmulas de L e $\mathcal{A}$ é uma estrutura para L, a *teoria Γ-diagrama de $\mathcal{A}$*, denotada por $D_\Gamma(\mathcal{A})$, é a teoria-$\mathbb{J}_3$ cuja linguagem é $L(\mathcal{A})$ e cujos axiomas não lógicos são as fórmulas A de $\Gamma(\mathcal{A})$ tais que $\mathcal{A}(A)$ pertence a V_d.

Quando Γ é o conjunto das fórmulas abertas de L, denotamos $D_\Gamma(\mathcal{A})$ por $D(\mathcal{A})$; quando Γ é o conjunto de todas as fórmulas de L, denotamos $D_\Gamma(\mathcal{A})$ por $D_\varepsilon(\mathcal{A})$.

TEOREMA 3.1.8 (Lema do Diagrama): *Seja Γ um conjunto de fórmulas de* L *e sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estruturas para* L *tais que $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{B}|$. Então, $\mathcal{A}$ é uma Γ-subestrutura de $\mathcal{B}$ se, e somente se, $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ é modelo de $D_\Gamma(\mathcal{A})$.*

A seguir, apresentamos dois teoremas de extensão de modelos para teorias-$\mathbb{J}_3$. Ambos generalizam o Teorema Clássico da Extensão de Modelos de Keisler: o primeiro (Teorema 3.1.9) parece bastante natural, dado o papel desempenhado pelo $\neg^*$ nas teorias-$\mathbb{J}_3$ e devido ao Teorema da Redução para não Trivialização obtido no Capítulo II; o segundo (Teorema 3.1.12) parece bastante compatível com o fato das teorias-$\mathbb{J}_3$ serem trivalentes com mais de um valor distinguido de verdade, de poderem ser paraconsistentes e de também refletirem certos aspectos das lógicas de tipo modal.

Portanto, dos dois teoremas citados, o segundo parece mais significativo para as teorias-$\mathbb{J}_3$, bem como para outras teorias polivalentes e lógicas de tipo modal.

DEFINIÇÃO 3.1.10: Um conjunto Γ de fórmulas de L é *quase regular*, se todas as fórmulas do tipo $x = y$ e $\neg(x = y)$ estão em Γ, e se, para cada fórmula A de Γ, toda fórmula do tipo $A[x_1,\ldots,x_n]$ está em Γ.

TEOREMA 3.1.9 (Teorema da Extensão de Modelos - I): *Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura para a linguagem - $\mathbb{L}_3$L, T uma teoria - $\mathbb{J}_3$ com linguagem L e seja Γ um conjunto quase regular de fórmulas de L. Então, $\mathfrak{A}$ tem uma Γ-extensão que é um modelo de T se, e somente se, todo teorema de T que é uma disjunção de negações fortes de fórmulas de Γ, é válido em $\mathfrak{A}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que existe um modelo $\mathfrak{B}$ de T, que é uma Γ-extensão de $\mathfrak{A}$.

Se $\vdash_T \neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$, com $A_1,\ldots,A_n$ fórmulas de Γ e $\neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$ não é válida em $\mathfrak{A}$, então existem $\mathfrak{A}$-instâncias $A_1',\ldots,A_n'$ de $A_1,\ldots,A_n$, tais que $\mathfrak{A}(\neg^* A_i') = 0$, para todo i, $1 \leq i \leq n$. Logo, $\mathfrak{A}(A_i')$ pertence a V_d, para todo i, $1 \leq i \leq n$. Como $\mathfrak{B}$ é uma Γ-extensão de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}(A_i')$ pertence a V_d e, portanto, $\mathfrak{B}(\neg^* A_i') = 0$, para todo i, $1 \leq i \leq n$.

Portanto, $(\neg^* A_1' \vee \ldots \vee \neg^* A_n') = 0$, o que é absurdo, pois $\mathfrak{B}$ é modelo de T.

Logo, $\vdash_T \neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$ implica que $\neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$ é válida em $\mathfrak{A}$.

Por outro lado, suponhamos que, se $\vdash_T \neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$, então $\neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A$ é válida em $\mathfrak{A}$, para $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ fórmulas de Γ.

Seja T' a teoria - $\mathbb{J}_3$ obtida, a partir de T, acrescentando-se todos os nomes de $L(\mathcal{A})$ como novas constantes; e seja T" obtida, a partir de T', acrescentando-se todos os axiomas não lógicos de $D_{\Gamma}(\mathcal{A})$, como novos axiomas.

Agora, provamos que T" é não trivial.

Por redução ao absurdo, se T" é trivial, pelo Teorema da Redução para não Trivialização, existe uma fórmula do tipo $\neg^* A_1' \vee \ldots \vee \neg^* A_n'$, com $A_1', \ldots, A_n'$ em $\Gamma(\mathcal{A})$, tal que $\vdash_{T'} \neg^* A_1' \vee \ldots \vee \neg^* A_n'$ e $\mathcal{A}(A_i')$ pertence a V_d, para $i = 1, \ldots, n$. Pelo Teorema sobre Constantes, se $A_1, \ldots, A_n$ forem obtidas, a partir de $A_1', \ldots, A_n'$, substituindo-se nomes de $L(\mathcal{A})$ por novas variáveis, então $\vdash_T \neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$. Como Γ é quase regular, $A_1, \ldots, A_n$ pertencem a Γ e portanto, pela hipótese do teorema, $\neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$ é válida em $\mathcal{A}$. Logo, para algum i, i variando de 1 a n, e A_i' em $\Gamma(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}(A_i') = 0$, o que é uma contradição.

Portanto, T" é não trivial, tem modelo $\mathcal{B}'$, e a prova do teorema fica idêntica à clássica.

Ou seja, se i e j são os nomes de dois indivíduos distintos de $\mathcal{A}$, como $i \neq j$ estão em Γ e $\mathcal{A}(i \neq j) = 1$, então $i \neq j$ é um axioma de $D_{\Gamma}(\mathcal{A})$. Logo, $\mathcal{B}'(i \neq j)$ é distinguido e, portanto, $\mathcal{B}'(i) \neq \mathcal{B}''(j)$.

Se $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \mid L$, então $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$. Como $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ é modelo de $D_{\Gamma}(\mathcal{A})$, pelo Lema do Diagrama, $\mathcal{B}$ é uma Γ-extensão de $\mathcal{A}$. Pelo Teorema 2.4.1, $\mathcal{B}$ é modelo de T.

COROLÁRIO: Seja Γ um conjunto quase regular de fórmulas de L e Λ um conjunto de fórmulas ao qual pertence toda fórmula do tipo

$\forall x_1 \ldots \forall x_n A$, tal que A é uma disjunção de negações fortes de fórmulas de Γ. Se $\mathfrak{A}$ é uma estrutura para L e $\mathcal{B}$ é uma Λ-extensão de $\mathfrak{A}$, então existe uma Γ-extensão $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$, que é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja Γ' o conjunto formado pelas fórmulas $A[i_1,\ldots,i_n]$ de $L(\mathfrak{A})$, tais que A pertence a Γ e $i_1, \ldots, i_k$ são nomes de $L(\mathfrak{A})$.

Como Γ' é quase regular, pelo teorema anterior, existe uma Γ'-extensão de $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ que é modelo de $D_\varepsilon(\mathfrak{A})$ se, e somente se, todo teorema de $D_\varepsilon(\mathfrak{A})$ do tipo $\neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$, com $A_1,\ldots,A_n$ fórmulas de Γ', é válido em $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$.

Consideremos $A_1,\ldots,A_n$ nas condições acima, com $\vdash_{D_\varepsilon(\mathfrak{A})} \neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$. Como $\mathfrak{A}$ é uma Γ-subestrutura de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}$, pelo Lema do Diagrama, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}$ é modelo de $D_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Portanto, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}(B)$ pertence a V_d e é igual a $\mathfrak{A}(B)$, sendo B o fecho de $\neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$.

Como B é uma $\mathfrak{A}$-instância de uma fórmula de Λ, ou seja, B pertence a $\Lambda(\mathfrak{A})$ e, portanto, é um axioma de $D_\Lambda(\mathfrak{A})$, pelo Lema do Diagrama, $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(B)$ é distinguido. Logo, pelo Teorema do Fecho, $\neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_n$ é válido em $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$.

Portanto, existe uma Γ'-extensão $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$, que é modelo de $D_\varepsilon(\mathfrak{A})$.

Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}' | L$.

Como Γ é subconjunto de Γ', $\mathcal{C}$ é uma Γ-extensão de $\mathcal{B}$.

Se i é o nome de um indivíduo a de $\mathfrak{A}$, pelo Teorema 3.1.7 $\mathcal{C}'(i) = \mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(i) = a$. Logo, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ e, portanto $\mathcal{C}$ é $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}} | L$ e $|\mathfrak{A}| \subset |\mathcal{C}'|$.

Como $\mathcal{B}'$ é modelo de $D_\varepsilon(\mathcal{A})$, pelo Lema do Diagrama, $\mathcal{A}$ é subestrutura elementar de $\mathcal{B}$.

Não poderíamos provar o Teorema 3.1.9, na forma em que está proposto e seguindo o mesmo processo de demonstração, se em seu enunciado substituíssemos "disjunção de negações fortes de fórmulas de Γ", por "disjunção de negações de fórmulas de Γ".

Dado um conjunto Γ quase regular de fórmulas de T e uma estrutura $\mathcal{A}$ para T, se supusermos que existe um modelo $\mathcal{B}$ de T que é uma Γ-extensão de $\mathcal{A}$, não poderemos provar, por redução ao absurdo, que $\vdash_T \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ implica que $\mathcal{A} \models \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$. De fato, se existirem $\mathcal{A}$-instâncias $A_1', \ldots, A_n'$ de formulas $A_1, \ldots, A_n$ de Γ, tais que $\mathcal{B}(A_i')$ pertence a V_d, para todo i, i variando de 1 a n, não podemos concluir, dada a característica do $\neg$ básico das teorias $-\mathbf{J}_3$, que $\mathcal{B}(\neg A_1' \vee \ldots \vee \neg A_n') = 0$.

Por outro lado, se supusermos que $\vdash_T \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ implica que $\mathcal{A} \models \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ e construirmos as teorias T' e T" como na demonstração do Teorema 3.1.9, não podemos provar, por redução ao absurdo, que T" é não trivial. De fato, se $\vdash_T \neg A_1' \vee \ldots \vee \neg A_n'$ e $\mathcal{A} \models \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$, com $A_1, \ldots, A_n$ em Γ e $A_1', \ldots, A_n'$ em $\Gamma(\mathcal{A})$, não podemos concluir que, para algum i variando de 1 a n, $\mathcal{A}(A_i') = 0$.

Pelas observações acima, para obtermos um teorema de extensão de modelos que generalize o Teorema clássico de Extensão de Modelos de Keisler e utilize a negação primitiva $\neg$ das teorias $-\mathbf{J}_3$, temos que considerar conjuntos quase regulares , com características especiais.

modelo de T.

Logo, $\vdash_T \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ implica que $\mathfrak{A} \models \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$.

TEOREMA 3.1.12 (Teorema da Extensão de Modelos - II). *Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura para a linguagem - $\mathbb{L}_3$L, T uma teoria - $\mathbb{J}_3$ com linguagem L e seja Γ um conjunto regular de fórmulas de L. Então, $\mathfrak{A}$ tem uma Γ-extensão que é um modelo de T se, e somente se, todo teorema de T que é uma disjunção de negações de fórmulas de Γ, é válido em $\mathfrak{A}$.*

COROLÁRIO 1: Seja Γ um conjunto regular de fórmulas de L e Λ um conjunto de fórmulas, ao qual pertence toda fórmula do tipo $\forall x_1 \ldots \forall x_n A$, tal que A é uma disjunção de negações de fórmulas de Γ. Se $\mathfrak{A}$ é uma estrutura para L e $\mathfrak{B}$ é uma Λ-extensão de $\mathfrak{A}$, então existe uma Γ-extensão $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{B}$, que é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}$.

COROLÁRIO 2: Seja $\mathfrak{A}$ uma extrutura para a linguagem - $\mathbb{L}_3$L, T uma teoria - $\mathbb{J}_3$ com linguagem L e seja Γ um conjunto quase regular de fórmulas de L tal que, para toda fórmula A de Γ, $\neg A$ e ∇A pertencem a Γ. Então, $\mathfrak{A}$ tem uma Γ-extensão que é um modelo de T se, e somente se, todo teorema de T que é uma disjunção de negações de fórmulas de Γ, é válido em $\mathfrak{A}$.

Pelo Corolário 2 do Teorema 1.2.6, $\vdash_T \nabla A \equiv^* \neg\Delta\neg A$ e $\vdash_T \nabla A$ se, e somente se, $\vdash_T \neg\Delta\neg A$. Logo, se Γ é um conjunto quase regular de fórmulas de L tal que, para toda fórmula A de Γ, $\neg A$ e ΔA pertencem a Γ, então, apesar de Γ poder não ser regular, podemos provar um resultado análogo ao obtido no corolário acima.

Parece que nenhuma das duas versões dos teoremas de extensão de modelos para as teorias-$\mathbb{J}_3$ pode ser obtida a partir da outra. Ou seja, o Teorema 3.1.9 parece não implicar o Teorema 3.1.12 e vice-versa.

Convém ainda observarmos que, nas demonstrações de alguns teoremas que se seguem, como é o caso do Teorema de Łoś-Tarski, do Teorema de Chang-Łoś-Suszko e do Teorema da não Trivialização Conjunta, ao aplicarmos um dos teoremas de extensão de modelos, necessitamos apenas de uma condição suficiente para que uma estrutura $\mathfrak{A}$ para L(T) possa ser Γ-extendida a um modelo $\mathfrak{B}$ da teoria-$\mathbb{J}_3$T.

Nesses casos, dadas as características específicas dos conjuntos Γ utilizados, podemos aplicar indistintamente o Teorema da Extensão de Modelos - I, ou o Teorema da Extensão de Modelos - II.

Estudamos, agora, versões trivalentes dos Teoremas de Łoś-Tarski e de Chang-Łoś-Suszko.

TEOREMA 3.1.13: *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas de* L(T) *e* Γ' *o conjunto formado pelas fórmulas de* Γ *que são teoremas de* T. *Se cada estrutura para* L(T) *na qual todas as fórmulas de* Γ *são válidas, é um modelo de* T, *então* T *é equivalente a uma teoria cujos axiomas não lógicos estão em* Γ.

TEOREMA 3.1.14 (Teorema de Łoś-Tarski): *Uma teoria-*$\mathbb{J}_3$T *é equivalente a uma teoria-*$\mathbb{J}_3$ *aberta se, e somente se, cada subestrutura* *de um modelo de* T *é um modelo de* T.

DEFINIÇÃO 3.1.14: Uma sequência $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ de estruturas para a linguagem - $\mathbb{L}_3$ L é uma *cadeia* se, para todo n, $\mathfrak{A}_{n+1}$ é uma extensão de $\mathfrak{A}_n$.

DEFINIÇÃO 3.1.15: Dada uma cadeia de estruturas para L, a estrutura *união da cadeia* é a estrutura $\mathfrak{A}$, cujo universo é a união dos universos $|\mathfrak{A}_1|$, $|\mathfrak{A}_2|, \ldots$ tal que, para $a_1, \ldots, a_k$ pertencentes a $|\mathfrak{A}|$,

$$f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = f_{\mathfrak{A}_n}(a_1, \ldots, a_k)$$

e

$$p_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = p_{\mathfrak{A}_n}(a_1, \ldots, a_k),$$

sendo $\mathfrak{A}_n$ uma estrutura da cadeia à qual pertencem $a_1, \ldots, a_k$.

É óbvio que a definição acima independe da escolha do n, e que $\mathfrak{A}$ é uma extensão de cada $\mathfrak{A}_n$.

DEFINIÇÃO 3.1.16: Se $\mathfrak{A}$ é a união da cadeia $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ e A é uma fórmula fechada de $L(\mathfrak{A})$, então $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{A}_n(A)$, para alguma estrutura $\mathfrak{A}_n$ da cadeia, com A em $L(\mathfrak{A}_n)$.

DEFINIÇÃO 3.1.17: Se $\mathfrak{A}$ é a união da cadeia $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ e A é uma fórmula de L, então A é válida em $\mathfrak{A}$ se $\mathfrak{A}_n(A')$ pertence a V_d, para toda $\mathfrak{A}_n$-instância A' de A, $n = 1, 2 \ldots$.

DEFINIÇÃO 3.1.18: Uma *cadeia elementar* de estruturas é uma cadeia $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ tal que, para todo n, $\mathfrak{A}_{n+1}$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}_n$.

TEOREMA 3.1.15: (Lema de Tarski): *Se $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ é uma cadeia elementar, então a união $\mathfrak{A}$ da cadeia é extensão elementar de cada $\mathfrak{A}_n$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como no caso clássico, pela definição de subestrutura elementar, basta mostrarmos que $\mathfrak{A}_n(A) = \mathfrak{A}(A)$, para toda fórmula fechada A de $L(\mathfrak{A}_n)$, o que provamos por indução sobre o comprimento de A.

Como $\mathfrak{A}$ é extensão de cada um dos $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, pelo Corolário do Teorema 3.1.2, temos que $\mathfrak{A}_n(A) = \mathfrak{A}(A)$, para toda fórmula sem variáveis A de $L(\mathfrak{A}_n)$. Logo, se A é uma fórmula atômica, então $\mathfrak{A}_n(A) = \mathfrak{A}(A)$.

Se A é do tipo $\neg B$, então $\mathfrak{A}_n(\neg B) = 0$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_n(B) = 1$; pela hipótese de indução, $\mathfrak{A}_n(B) = \mathfrak{A}(B)$, logo, $\mathfrak{A}_n(\neg B) = 0$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(B) = 1$, o que é equivalente a $\mathfrak{A}(\neg B) = 0$. O raciocínio é análogo, para $\mathfrak{A}_n(\neg B) = \frac{1}{2}$ e $\mathfrak{A}_n(\neg B) = 1$.

Se A é do tipo ∇B, então $\mathfrak{A}_n(\nabla B) = 0$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_n(B) = 0$, o que é equivalente, pela hipótese de indução, a $\mathfrak{A}(B) = 0$; o que é equivalente a $\mathfrak{A}(\nabla B) = 0$. Por outro lado $\mathfrak{A}_n(\nabla B) = 1$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_n(B) = 1$ ou $\mathfrak{A}_n(B) = \frac{1}{2}$, o que é equivalente, pela hipótese de indução, a $\mathfrak{A}(B) = 1$ ou $\mathfrak{A}(B) = \frac{1}{2}$; o que é equivalente a $\mathfrak{A}(\nabla B) = 1$.

Se A é do tipo $B \vee C$, procedemos de modo análogo.

Seja A do tipo $\exists xB$. Então, $\mathfrak{A}(\exists x B) = 0$ se, e somente se,

$$\max\{\mathfrak{A}(B_x[i])/i \in L(\mathfrak{A})\} = 0,$$

o que é equivalente, pela hipótese de indução, a $\mathfrak{A}_n(B_x[i]) = 0$, para todo i em $L(\mathfrak{A}_n)$; o que é equivalente a $\mathfrak{A}_n(\exists x B) = 0$.

Se $\mathfrak{A}(\exists x B) = \frac{1}{2}$, então

$$\max\{\mathfrak{A}(B_x[i])/i \in L(\mathfrak{A})\} = \frac{1}{2},$$

ou seja, $\mathfrak{A}(B_x[i] = \frac{1}{2}$, para algum i em $L(\mathfrak{A})$; escolhemos k tal que $k > n$ e i é um nome em $L(\mathfrak{A}_k)$; pela hipótese de indução, $\mathfrak{A}_k(B_x[i]) = \frac{1}{2}$; como $\mathfrak{A}_k$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}_n$, temos que $\mathfrak{A}_n(A) = \frac{1}{2}$.

Se $\mathfrak{A}(\exists x B) = 1$, procedemos como no caso anterior.

TEOREMA 3.1.16: (Teorema de Chang-Łoś-Suszko): *Uma teoria* - $\mathbb{J}_3$ T *é equivalente a uma teoria* - $\mathbb{J}_3$ *cujos axiomas não lógicos são existenciais se, e somente se, a união de toda cadeia de modelos de* T *é um modelo de* T.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que T é equivalente a uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T' cujos axiomas não lógicos são existenciais.

Pelo Corolário do Teorema 2.4.12, basta provarmos que a união $\mathfrak{A}$ de uma cadeia $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ de modelos de T' é modelo de T'

Se $\exists x_1 \ldots \exists x_n A$ é uma $\mathfrak{A}$- instância qualquer de um axioma não lógico de T', então, para um k suficientemente grande, $\mathfrak{A}_k$ valida

$\exists x_1 \ldots \exists x_n A$. Portanto, existem $i_1, \ldots, i_n$ em $L(\mathfrak{A}_k)$ tais que $\mathfrak{A}_k(A[i_1, \ldots, i_n])$ é distinguido. Logo, pelo Corolário do Teorema 3.1.2 $\mathfrak{A}(A[i_1, \ldots, i_n]) \in V_d$ e, portanto, $\mathfrak{A}(\exists x_1 \ldots \exists x_n A) \in V_d$ e $\mathfrak{A}$ é modelo de T'.

Por outro lado, consideremos, por hipótese, que a união de toda cadeia de modelos de T é modelo de T.

Se Γ é o conjunto das fórmulas existenciais de L e Γ' é o conjunto das fórmulas existenciais que são teoremas de T, para completarmos a demonstração do teorema usando o Teorema 3.1.13, como no caso clássico, basta provarmos que qualquer estrutura $\mathfrak{A}$ para L(T), na qual as fórmulas de Γ' são válidas, é modelo de T.

Construimos, então, uma cadeia $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ de estruturas para L(T), conforme a descrição abaixo.

Consideremos que $\mathfrak{A}_{2n-1}$ já esteja definida e seja extensão elementar de $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$.

Se Λ é o conjunto das fórmulas universais de L(T), como Λ é regular, para mostrarmos que existe uma Λ-extensão $\mathfrak{A}_{2n}$ de $\mathfrak{A}_{2n-1}$, que é modelo de T, podemos aplicar o Teorema 3.1.9, ou o Teorema 3.1.12. Portanto, basta mostrarmos que, se A é uma fórmula do tipo $\neg\nabla A_1 \vee \ldots \vee \neg\nabla A_n$, com $A_1, \ldots, A_n \in \Lambda$ e, portanto, pelo Corolário 2 do Teorema 2.2.9, com $\nabla A_1, \ldots, \nabla A_n \in \Lambda$, então $\vdash_T A$ implica $\mathfrak{A}_{2n-1} \models A$.

Pelo mesmo corolário e pelo Teorema 2.3.2, A pode ser convertida na forma prenex B que é existencial.

Como por hipótese $\mathfrak{A} \models B$, então $\mathfrak{A}_{2n-1} \models B$ e, portanto, $\mathfrak{A}_{2n-1}$ é modelo para a teoria $-\mathbb{J}_3$ cujo único axioma não lógico é B.

Como A é teorema dessa teoria, temos que $\mathfrak{A}_{2n-1} \models A$ e, portanto, $\mathfrak{A}_{2n}$ é uma Λ-extensão de $\mathfrak{A}_{2n-1}$, que é modelo de T.

Como toda fórmula aberta está em Λ, $\mathfrak{A}_{2n}$ é uma extensão de $\mathfrak{A}_{2n-1}$ e, pelo Corolário 1 do Teorema 3.1.12, existe uma extensão $\mathfrak{A}_{2n+1}$ de $\mathfrak{A}_{2n}$, que é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}_{2n-1}$.

Portanto, construimos uma cadeia $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots,$ tal que $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{2n}$ é modelo de T e $\mathfrak{A}_{2n+3}$ é extensão elementar de $\mathfrak{A}_{2n+1}$.

Seja $\mathfrak{B}$ a união dessa cadeia.

Como $\mathfrak{B}$ é a união da cadeia $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_4, \ldots$ de modelos de T, por hipótese, $\mathfrak{B}$ é modelo de T.

Porém, como $\mathfrak{B}$ é também a união de $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, \ldots,$ $\mathfrak{B}$ é extensão elementar de cada um dos $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, \ldots$. Logo, $\mathfrak{B}$ é extensão elementar de $\mathfrak{A}$.

Portanto, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes e, como consequência, $\mathfrak{A}$ é modelo de T.

2. NÃO TRIVIALIZAÇÃO CONJUNTA E TEOREMAS DE DEFINIBILIDADE

DEFINIÇÃO 3.2.1: Sejam T e T' teorias-$\mathbb{J}_3$. A *teoria-$\mathbb{J}_3$ união* de T e T', denotada por $T \cup T'$, é a teoria-$\mathbb{J}_3$ cujos símbolos não lógicos são os símbolos não lógicos de T e os de T', e cujos axiomas não lógicos são os de T e os de T'.

Como no caso clássico, a teoria-$\mathbb{J}_3$ $T \cup T'$ pode ser inconsistente mesmo que T e T' não o sejam, pois basta que exista uma fórmula A tal que $\vdash_{T} A$ e $\vdash_{T'} \neg A$.

Além disso, no caso das teorias-$\mathbb{J}_3$, $T \cup T'$ pode ser trivial, mesmo sem T e T' o serem.

O Teorema da não Trivialização Conjunta, a seguir, é uma generalização do Teorema da Consistência Conjunta clássico de Craig-Robinson.

Observamos que não é possível provarmos, para as teorias-$\mathbb{J}_3$, uma versão idêntica à do Teorema de Craig-Robinson, pois $T \cup T'$ pode ser inconsistente, sem que exista uma fórmula A tal que $\vdash_{T} A$ e $\vdash_{T'} \neg A$, já que as teorias-$\mathbb{J}_3$ podem ser paraconsistentes.

Entretanto, se existir uma fórmula A nas condições acima, é óbvio que $T \cup T'$ é inconsistente.

TEOREMA 3.2.1 (Teorema da não Trivialização Conjunta): *Se* T *e* T' *são teorias*-$\mathbb{J}_3$, *então* $T \cup T'$ *é trivial se, e somente se, existe uma fórmula fechada* A *tal que* $\vdash_{T} A$ e $\vdash_{T'} \neg^* A$.

DEMONSTRAÇÃO: Se existir uma fórmula A, tal que $\vdash_{T} A$ e $\vdash_{T'} \neg^* A$, então $\vdash_{T \cup T'} A \,\&\, \neg^* A$. Logo, $\vdash_{T \cup T'} B$, para toda fórmula B de $T \cup T'$ e, portanto, $T \cup T'$ é trivial.

Por outro lado, suponhamos que não existe uma fórmula A nas condições acima.

Provemos, então, que $T \cup T'$ é não trivial.

Se Γ é o conjunto das fórmulas fechadas de L(T) que são teoremas de T', então $T[\Gamma]$ é não trivial, pois se não o fosse, pelo Teorema da Redução para não Trivialização, teríamos uma fórmula A, com $\vdash_{\overline{T}} A$ e $\vdash_{\overline{T'}} \neg^* A$, o que seria uma contradição.

Seja L a linguagem - $\mathbb{L}_3$ de primeira ordem, cujos símbolos não lógicos são os símbolos não lógicos comuns a L(T) e a L(T').

Construiremos agora uma cadeia elementar $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ de modelos de T e uma cadeia elementar $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots$ de modelos de T', tal que $\mathfrak{A}_1 | L, \mathfrak{A}'_1 | L, \mathfrak{A}_2 | L, \mathfrak{A}'_2 | L, \ldots$ seja uma cadeia elementar.

Como $T[\Gamma]$ é não trivial, seja $\mathfrak{A}_1$ um modelo de $T[\Gamma]$ e seja $\mathfrak{B}$ uma expansão de $\mathfrak{A}_1 | L$ para L(T').

Logo, $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{B}$ validam as mesmas fórmulas de L; então, se uma fórmula A de L é um teorema de T', pelo Teorema do Fecho, temos que A é válida em $\mathfrak{A}_1$ e, portanto, é válida em $\mathfrak{B}$.

Se Λ é o conjunto de todas as fórmulas de L, então, por qualquer um dos dois Teoremas de Extensão de Modelos, existe uma Λ-extensão $\mathfrak{A}'_1$ de $\mathfrak{B}$, que é modelo de T'.

Nessas condições, $\mathfrak{A}'_1 | L$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{B} | L$ e, portanto, de $\mathfrak{A} | L$.

Se considerarmos $\mathfrak{A}_{n-1}$ e $\mathfrak{A}'_{n-1}$ já construidos, seja $\mathfrak{b}$ uma expansão de $\mathfrak{A}'_{n-1} | L$ para L(T).

Então, $\mathfrak{b}$ é uma Λ-extensão de $\mathfrak{A}_{n-1}$ e $\mathfrak{b} | L$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}_{n-1} | L$. Pelo Corolário do Teorema 3.1.9 (ou Corolário 1 do Teorema 3.1.12), existe uma Λ-extensão $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{b}$, que é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Logo, $\mathfrak{A}_n$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}_1$ e, portanto, é modelo de T.

Além disso, $\mathfrak{A}_n | L$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{b} | L$ e, portanto, de $\mathfrak{A}'_{n-1} | L$.

Finalmente, a construção de $\mathfrak{A}'_n$, a partir de $\mathfrak{A}_n$, é semelhante à de $\mathfrak{A}'_1$.

Se $\mathfrak{A}$ é a união de $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, então, pelo Lema de Tarski, $\mathfrak{A}$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}_1$ e, portanto, é modelo de T.

Se $\mathfrak{A}'$ é a união de $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots$, então $\mathfrak{A}'$ é também modelo de T.

Como $\mathfrak{A} | L$ coincide com $\mathfrak{A}' | L$, pois ambos são a união da cadeia $\mathfrak{A}_1 | L$, $\mathfrak{A}'_1 | L$, $\mathfrak{A}_2 | L$, $\mathfrak{A}'_2 | L, \ldots$, vemos que existe uma estrutura $\mathfrak{D}$ para $T \cup T'$, tal que $\mathfrak{D} | L(T)$ é $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{D} | L(T')$ é $\mathfrak{A}'$.

Então, $\mathfrak{D}$ é um modelo de $T \cup T'$ e, portanto, $T \cup T'$ é não trivial.

Assim sendo, se não existe uma fórmula A tal que $\vdash_T A$ e $\vdash_{T'} \neg^* A$, então $T \cup T'$ é não trivial.

Logo, se $T \cup T'$ é trivial, então existe uma fórmula A nas condições do teorema.

COROLÁRIO (Lema de Interpolação de Craig): Se T e T' são teorias-$\mathbb{J}_3$ e $A \supset B$ é teorema de $T \cup T'$, com A fórmula de L(T) e B fórmula de L(T'), então existe uma fórmula C tal que $\vdash_T A \supset C$ e $\vdash_{T'} C \supset B$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que A e B sejam fórmulas fechadas.

Como $A, \neg^* B$ e $A \supset B$ são teoremas da teoria-$\mathbb{J}_3$ $T[A] \cup T'[\neg^* B]$, temos que tal teoria-$\mathbb{J}_3$ é trivial.

Então, pelo teorema anterior, existe uma fórmula fechada C tal que $\vdash_{T[A]} C$ e $\vdash_{T'[\neg^* B]} \neg^* C$.

Logo, pelo Teorema da Dedução, $\vdash_{T} A \supset C$ e $\vdash_{T'} \neg^{*}B \supset \neg^{*}C$.

Pelo Teorema 1.1.7, $\vdash_{T} A \supset C$ e $\vdash_{T'} C \supset B$.

Agora, se A e B forem fórmulas quaisquer, como no caso clássico, substituimos as variáveis livres de A e B por novas constantes, extendemos T e T' às teorias $-\mathbb{J}_3$ U e U' acrescentando as novas constantes, e obtemos as fórmulas A', B' e C', tais que $\vdash_{U} A' \supset C'$ e $\vdash_{U'} C' \supset B'$.

Usando o Teorema da Variante e substituindo as novas constantes pelas variáveis originais, obtemos uma fórmula C nas condições do teorema.

O Lema de Interpolação de Craig desempenha, para as teorias-$\mathbb{J}_3$, um papel tão importante quanto na teoria clássica de modelos. Pois, permite-nos obter teoremas de definibilidade característicos para as teorias-$\mathbb{J}_3$.

DEFINIÇÃO 3.2.2: Seja Q um conjunto de símbolos não lógicos de L(T). Um símbolo p de predicados, que não pertence a Q, é *quase definível em* T *em termos de* Q, se existe uma fórmula A, cujos símbolos não lógicos estão todos em Q, tal que $\vdash_{T} p(x_1 \ldots x_n) \equiv A$, com $x_1, \ldots, x_n$ distintos.

DEFINIÇÃO 3.2.3: Um símbolo f de função, que não pertence a Q, é *quase definível em* T *em termos de* Q, se existe uma fórmula A, cujos símbolos não lógicos estão todos em Q, tal que $\vdash_{T} (y = f(x_1, \ldots, x_n)) \equiv A$, com $x_1, \ldots, x_n$, y distintos.

DEFINIÇÃO 3.2.3: Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ estruturas para a linguagem - $\mathbb{L}_3 L$, u um símbolo não lógico de L e ϕ uma aplicação bijetora de $|\mathfrak{A}|$ em $|\mathfrak{B}|$. Dizemos que ϕ é um u-*isomorfismo* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, se ϕ é um isomorfismo entre as restrições de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ à linguagem - $\mathbb{L}_3$ cujo único símbolo não lógico é u.

TEOREMA 3.2.2 (Teorema da Quase Definibilidade): *Seja* Q *um conjunto de símbolos não lógicos de* T *e* u *um símbolo não lógico de* T *que não está em* Q. *Então,* u *é quase definível em* T *em termos de* Q *se, e somente se, para todo par de modelos* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *de* T *e toda aplicação bijetora* ϕ *de* $|\mathfrak{A}|$ *em* $|\mathfrak{B}|$, *que é um* q-*isomorfismo para todo* q *em* Q, ϕ *é um* u-*isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja u um símbolo p de predicado quase definível em termos de Q.

Então, $\vdash_T p(x_1,\dots,x_n) \equiv A$, para alguma fórmula A cujos símbolos não lógicos estão todos em Q.

Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ e ϕ nas condições do teorema.

Se $i_1,\dots,i_n$ são nomes em $L(\mathfrak{A})$ e B é $A_{x_1\dots x_n}[i_1,\dots,i_n]$, então $\mathfrak{A}(p(i_1,\dots,i_n) \equiv B) \in V_d$ e $\mathfrak{B}(p(i_1^\phi,\dots,i_n^\phi \equiv B^\phi) \in V_d$.

Portanto, $\mathfrak{A}(p(i_1,\dots,i_n)) \in V_d$ see $\mathfrak{A}(B) \in V_d$, e $\mathfrak{B}(p(i_1^\phi,\dots,i_n^\phi) \in V_d$ see $\mathfrak{B}(B^\phi) \in V_d$.

Como ϕ é um q-isomorfismo, para todo q em Q, pelo Teorema 3.1.1, temos que $\mathfrak{A}(B) = \mathfrak{B}(B^\phi)$ e, portanto, $p_{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n) \in V_d$ see $p_{\mathfrak{B}}(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n)) \in V_d$, para $a_1,\dots,a_n$ em $|\mathfrak{A}|$.

Logo, ϕ é um p-isomorfismo.

Por outro lado, se a condição do teorema se verifica, provemos que u é quase definível em termos de Q.

Obtemos a teoria $\mathcal{J}_3$ T' , a partir de T, substituindo cada símbolo não lógico n-ário w de T, que não está em Q, por um novo símbolo de predicado ou função n-ário w'.

Mostraremos agora que a fórmula $p(x_1,\dots,x_n) \supset p'(x_1,\dots,x_n)$ é válida em qualquer modelo $\mathfrak{A}$ de $T \cup T'$.

Se $\mathfrak{A}$ é um modelo de $T \cup T'$, então $\mathfrak{A}|L(T)$ é modelo de T e $\mathfrak{A}|L(T')$ é modelo de T'.

Construimos uma estrutura $\mathcal{B}$ para L(T) tomando $|\mathcal{B}| = |\mathfrak{A}|$, $w_{\mathcal{B}} = w_{\mathfrak{A}}$ para w em Q, e $w_{\mathcal{B}} = w'_{\mathfrak{A}}$ para w símbolo não lógico não pertencente a Q.

Como $\mathfrak{A}|L(T')$ é modelo de T', então $\mathcal{B}$ é modelo de T.

A aplicação identidade de $\mathfrak{A}|L(T)$ em $\mathcal{B}$ é um q-isomorfismo, para todo q em Q. Portanto, por hipótese, ela é um p-isomorfismo.

Então, $p_{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n) = p_{\mathcal{B}}(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n))$, para $a_1,\dots,a_n$ em $|\mathfrak{A}|$ e, portanto, $p(x_1,\dots,x_n) \supset p'(x_1,\dots,x_n)$ é válida em $\mathfrak{A}$.

Logo, pelo Teorema da Completude, $\vdash_{T \cup T'} p(x_1,\dots,x_n) \supset$ $\supset p'(x_1,\dots,x_n)$.

Então, pelo Lema de Interpolação de Craig, existe uma fórmula A tal que $\vdash_T p(x_1,\dots,x_n) \supset A$ e $\vdash_{T'} A \supset p'(x_1,\dots,x_n)$.

Como A é uma fórmula de T e de T' e, portanto, só contém símbolos não lógicos de Q, então, pela escolha de T', $\vdash_{T'} A \supset$ $\supset p'(x_1,\dots,x_n)$ implica que $\vdash_T A \supset p(x_1,\dots,x_n)$.

Logo, $\vdash_T p(x_1,\dots,x_n) \equiv A$ e, portanto, p é quase definível a partir de Q.

A demonstração do Teorema é idêntica, quando u é um símbolo de função.

DEFINIÇÃO 3.2.4: Seja Q um conjunto de símbolos não logicos de L(T). Um símbolo p de predicado, que não pertence a Q, é *definível em T em termos de* Q, se existe uma fórmula A, cujos símbolos não lógicos estão todos em Q, tal que $\vdash_T p(x_1,\ldots,x_n) \equiv^* A$, com $x_1,\ldots,x_n$ distintos.

DEFINIÇÃO 3.2.5: Um símbolo f de função, que não pertence a Q, é *definível em* T *em termos de* Q, se existe uma fórmula A, cujos símbolos não lógicos estão todos em Q, tal que $\vdash_T (y = f(x_1,\ldots,x_n)) \equiv^*$ $\equiv^*$ A, com $x_1,\ldots,x_n$, Y distintos.

TEOREMA 3.2.3: *Seja* Q *um conjunto de símbolos não lógicos de* T *e* u *um símbolo não lógico de* T *que não está em* Q. *Se* u *é definível em* T *em termos de* Q, *então, para todo par de modelos* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *de* T *e toda aplicação bijetora* ϕ *de* $|\mathfrak{A}|$ *em* $|\mathfrak{B}|$, *que é um* q-*isomorfismo para todo* q *em* Q, ϕ *é um* u-*isomorfismo*.

DEMONSTRAÇÃO: Seja u um símbolo p de predicado, definível em termos de Q.

Então, $\vdash_T p(x_1,\ldots,x_n) \equiv^* A$, para alguma fórmula A cujos símbolos não lógicos estão todos em Q.

Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ e ϕ nas condições do teorema.

Se $i_1,\ldots,i_n$ são nomes em $L(\mathfrak{A})$ e B é $A_{x_1\ldots x_n}[i_1,\ldots,i_n]$, então $\mathcal{A}(p(i_1,\ldots,i_n) \equiv^* B) \in V_d$ e $\mathcal{B}(p(i_1^\phi,\ldots,i_n^\phi) \equiv^* B^\phi) \in V_d$, e, portanto, $\mathcal{A}(p(i_1,\ldots,i_n)) = \mathcal{A}(B)$ e $\mathcal{B}(p(i_1^\phi,\ldots,i_n^\phi)) = \mathcal{B}(B^\phi)$.

Como ϕ é um q-isomorfismo para todo q em Q, pelo Teorema 3.1.1, temos que $\mathcal{A}(B) = \mathcal{B}(B^\phi)$.

Logo, $p_{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n) = p_{\mathcal{B}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$, para $a_1,\ldots,a_n$ em $|\mathcal{A}|$ e, portanto, ϕ é um p-isomorfismo.

Se u é um símbolo f de função, a demonstração é análoga.

TEOREMA 3.2.4: *Sejam* Q *e* u *nas condições do teorema anterior. Se para todo par de modelos* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *de* T *e toda aplicação bijetora* ϕ *de* $|\mathcal{A}|$ *em* $|\mathcal{B}|$ *que é um* q-*isomorfismo para todo* q *em* Q, ϕ *é um* u-*isomorfismo, e se para toda fórmula* A *cujos símbolos não lógicos estão em* Q, $\vdash_T u \equiv A$ *implica que* $\vdash_T \Delta u \equiv \Delta A$, *então* u *é definível em* T *em termos de* Q.

DEMONSTRAÇÃO: Pela segunda parte da prova do Teorema 3.2.2, temos que se p é um símbolo de predicado que não pertence a Q, então existe uma fórmula A cujos símbolos não lógicos pertencem a Q,tal que $\vdash_T p(x_1,\ldots,x_n) \equiv A$.

Pelo Teorema 1.1.7, $\vdash_T \nabla p(x_1,\ldots,x_n) \equiv \nabla A$, e pela hipótese do teorema, $\vdash_T \Delta p(x_1,\ldots,x_n) \equiv \Delta A$.

Logo, pela Definição 1.2.1, $\vdash_T \nabla p(x_1,\ldots,x_n) \equiv_{\mathcal{L}} \nabla A$ e $\vdash_T \Delta p(x_1,\ldots,x_n) \equiv_{\mathcal{L}} \Delta A$.

Então, pela Definição 1.2.4, $\vdash_T A \equiv_{\mathcal{L}}^* B$ e, portanto, pelo Teorema 1.2.6, $\vdash_T A \equiv^* B$.

Assim sendo, p é definível em termos de Q.

Quando u é um símbolo de função, a demonstração é análoga.

DEFINIÇÃO 3.2.6: Seja Q um conjunto de símbolos não lógicos de L(T). Um símbolo p de predicado, que não pertence a Q, é *fortemente definível em* T *em termos de* Q, se existe uma fórmula A, cujos símbolos não lógicos estão em Q, tal que $\vdash_T p(x_1,\ldots,x_n) \equiv^* A$ com $x_1,\ldots,x_n$ distintos, e se, para toda fórmula B cujos símbolos não lógicos estão todos em Q, $\vdash_T p(x_1,\ldots,x_n) \equiv B$ implica que $\vdash_T p(x_1,\ldots,x_n) \equiv^* B$.

DEFINIÇÃO 3.2.7: Seja Q um conjunto de símbolos não lógicos de L(T). Um símbolo f de função, que não está em Q, é *fortemente definível em* T *em termos de* Q, se existe uma fórmula A, cujos símbolos não lógicos estão todos em Q, tal que $\vdash_T (y=f(x_1,\ldots,x_n)) \equiv^* A$ com $x_1,\ldots,x_n$, y distintos, e se, para toda fórmula B cujos símbolos não lógicos estão todos em Q, $\vdash_T (y=f(x_1,\ldots,x_n)) \equiv B$ implica que $\vdash_T (y=f(x_1,\ldots,x_n)) \equiv^* B$.

TEOREMA 3.2.5 (Teorema da Definibilidade Forte): *Seja* Q *um conjunto de símbolos não lógicos de* T *e* u *um símbolo não lógico de* T *que não está em* Q. *Então,* u *é fortemente definível em* T *em termos de* Q *se, e somente se, para todo par de modelos* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *de* T *e toda aplicação bijetora* ϕ *de* $|\mathfrak{A}|$ *em* $|\mathfrak{B}|$ *que é um* q*-isomorfismo para todo* q *em* Q, ϕ *é um* u*-isomorfismo, e* $\vdash_T u \equiv B$ *implica* $\vdash_T \Delta u \equiv \Delta B$, *para toda fórmula* B *cujos símbolos não lógicos estão em* Q.

Observamos que obtivemos, como no caso dos Teoremas de Extensão de Modelos, dois Teoremas de Definibilidade, um de Quase Definibilidade e um de Definibilidade Forte.

O primeiro, generaliza o Teorema de Beth-Padoa clássico, porém é um resultado pouco satisfatório para as teorias - $\mathbb{J}_3$, pois, no espírito do Teorema de Equivalência, um símbolo não lógico, quando quase definível por uma fórmula A, não poderia ser substituido, em geral, por A.

No segundo, acrescentamos uma hipótese às do teorema clássico, compatível com as características das teorias - $\mathbb{J}_3$, para podermos de fato substituir, em fórmulas de uma teoria - $\mathbb{J}_3$, $p(x_1,\dots,x_n)$ ou $y = f(x_1,\dots,x_n)$, por fórmulas cujos símbolos não lógicos estejam em um conjunto dado.

Apesar de considerarmos necessária a inclusão de alguma hipótese adicional à condição do Teorema 3.2.2, pois a equivalência $\equiv$ é mais fraca que a equivalência $\equiv^*$, acreditamos que a hipótese escolhida impõe uma condição relativamente forte ao conjunto Q de símbolos não lógicos. Talvez seja possível obter o mesmo resultado com uma hipótese mais fraca.

3. TEORIAS COMPLETAS E O TEOREMA DA ELIMINAÇÃO DE QUANTIFICADORES

DEFINIÇÃO 3.3.1: Se $\mathfrak{A}$ é uma estrutura para a linguagem - $\mathbb{L}_3 L$, *a teoria* - $\mathbb{J}_3$ *de* $\mathfrak{A}$, denotada por $T_{\mathbb{J}_3}(\mathfrak{A})$ é a teoria - $\mathbb{J}_3$ cuja linguagem é L e cujos axiomas não lógicos são as fórmulas de L que são válidas em $\mathfrak{A}$.

TEOREMA 3.3.1: *Se* T *é uma teoria*-$\mathbb{J}_3$ *não trivial, então as seguintes condições são equivalentes:*

i) T *é completa;*

ii) *dois modelos quaisquer de* T *são elementarmente equivalentes;*

iii) *para todo modelo* $\mathfrak{A}$ *de* T, T *é equivalente a* $T_{\mathbb{J}_3}(\mathfrak{A})$.

Pelo teorema acima, como no caso clássico, se T é uma teoria-$\mathbb{J}_3$ completa e a fórmula A é válida em algum modelo de T, então A é válida em todo modelo de T. Portanto, é relevante podermos encontrar métodos que permitam provar se uma teoria-$\mathbb{J}_3$ é completa.

DEFINIÇÃO 3.3.2: Dizemos que a teoria-$\mathbb{J}_3$ T *admite eliminação de quantificadores*, se toda fórmula de T é fortemente equivalente em T a uma fórmula aberta, ou seja, para toda fórmula A de T existe uma fórmula aberta B, tal que $\vdash_T A \equiv^* B$.

TEOREMA 3.3.2: *Se* T *é não trivial, admite eliminação de quantificadores, contém uma constante e toda fórmula sem variáveis de* T *é decidível em* T, *então* T *é completa.*

DEMONSTRAÇÃO: Se A é uma fórmula fechada de T, então $\vdash_T A \equiv^* B$, para alguma fórmula aberta B.

Como, pelo Teorema sobre Constantes, podemos substituir as variáveis livres em B por uma constante, então podemos supor que B não tem variáveis.

Então, por hipótese, B é decidível em T e, portanto, pelo Teorema 2.2.9, A é decidível em T.

Logo, T é completa.

DEFINIÇÃO 3.3.3: Dizemos que uma fórmula é *simplesmente existencial* se ela é da forma $\exists xA$, sendo A uma fórmula aberta.

Nos teoremas que se seguem, seja T uma teoria$-\mathcal{J}_3$ não trivial.

TEOREMA 3.3.3: *Se toda fórmula simplesmente existencial é fortemente equivalente em* T *a uma fórmula aberta, então* T *admite eliminação de quantificadores.*

DEMONSTRAÇÃO: Por indução sobre o comprimento de A, provamos que toda fórmula A é equivalente em T a uma fórmula aberta, ou seja, que T admite eliminação de quantificadores.

Se A é atômica, o resultado é óbvio.

Se A é do tipo $\neg B$, então, pela hipótese de indução, $B \equiv^* B'$, com B' fórmula aberta. Logo, pelo Teorema de Equivalência para teorias$-\mathcal{J}_3$, $\neg B \equiv^* \neg B'$ e, portanto, A é fortemente equivalente a uma fórmula aberta.

Se A é do tipo ∇B, ou A é do tipo $B \vee C$, procedemos como no caso anterior.

Se A é do tipo $\exists xB$, com $B \equiv^* B'$ e B' fórmula aberta, então, pelo Teorema 2.2.9, $\exists xB \equiv^* \exists xB'$. Como $\exists xB'$ é simplesmente existencial, pela hipótese do teorema é fortemente equivalente em T a uma fórmula aberta.

Logo, A é fortemente equivalente a uma fórmula aberta.

TEOREMA 3.3.4: *Seja* A *uma fórmula fechada em* T. *Suponhamos que* T *contém uma constante e que, para cada dois modelos* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{A}'$ *de* T, $\mathfrak{A}(B) = \mathfrak{A}'(B)$ *para toda fórmula* B *sem variáveis de* T *implica que* $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{A}'(A)$. *Então,* A *é equivalente em* T *a uma fórmula sem variáveis.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja Γ o conjunto das fórmulas sem variáveis que são teoremas de T[A].

Mostraremos que $\vdash_{T[\Gamma]} A$.

Por redução ao absurdo, se $\nvdash_{T[\Gamma]} A$, então, pelo Teorema da Completude para teorias-$\mathbb{J}_3$, existe um modelo $\mathfrak{A}$ de $T[\Gamma]$, tal que $\mathfrak{A}(A) = 0$.

Seja Λ o conjunto das fórmulas sem variáveis que são válidas em $\mathfrak{A}$, e seja $\mathfrak{A}'$ um modelo qualquer de $T(\Lambda)$.

É óbvio que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são modelos de T.

Se B é uma fórmula sem variáveis de T, então $\mathfrak{A}(B) \in V_d$ see $B \in \Lambda$ e, portanto, $\mathfrak{A}'(B) \in V_d$. Como $\mathfrak{A}'(B) \in V_d$ implica que $\vdash_{T[\Lambda]} B$, então $\mathfrak{A}'(B) \in V_d$ implica que $\mathfrak{A}(B) \in V_d$.

Logo, para toda fórmula B sem variáveis de T, $\mathfrak{A}(B) \in V_d$ see $\mathfrak{A}'(B) \in V_d$.

Nas condições acima, se $\mathfrak{A}(B) = \frac{1}{2}$ e $\mathfrak{A}'(B) = 1$, então $\mathfrak{A}(\neg B) = \frac{1}{2}$ e $\mathfrak{A}'(\neg B) = 0$, o que não é possível, pois $\mathfrak{A}$ valida $\neg B$ e $\mathfrak{A}'$ não valida $\neg B$, com $\neg B$ fórmula sem variáveis.

Logo, $\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}'(B)$, para toda fórmula B sem variáveis de T e, portanto, pela hipótese do teorema, $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}'(A)$.

Como, por hipótese, $\not\vdash_{T[\Gamma]} A$ e $\mathcal{A}(A) = 0$, temos que $\mathcal{A}'(A) = 0$.

Logo, $\mathcal{A}'(\neg^* A) = 1$ e, portanto, como $\mathcal{A}'$ é um modelo qualquer de $T[\Lambda]$, $\vdash_{T[\Lambda]} \neg^* A$.

Então, pelo Teorema de Redução, existem fórmulas $C_1, \ldots, C_n$ em Λ tal que $\vdash_T C_1 \supset \ldots \supset C_n \supset \neg^* A$; portanto, pelo Teorema 1.1.7, $\vdash_T \neg^* \neg^* A \supset \neg^*(C_1 \supset \ldots \supset C_n)$.

Logo, como $\vdash_{T[A]} \neg^* \neg^* A$, temos que $\vdash_{T[A]} \neg^*(C_1 \supset \ldots \supset C_n)$.

Então, $\neg^*(C_1 \supset \ldots \supset C_n) \in \Gamma$ e, portanto, $C_1, \ldots, C_n$ e $\neg^*(C_1 \supset \ldots \supset C_n)$ são válidas em $\mathcal{A}$.

Logo, $C_1, \ldots, C_n$ são válidas em $\mathcal{A}$ e $C_1 \supset \ldots \supset C_n$ não é válida em $\mathcal{A}$, o que é absurdo.

Assim sendo, $\vdash_{T[\Gamma]} A$.

Então, pelo Teorema da Redução, existem fórmulas $B_1, \ldots, B_n$ em Γ, com $\vdash_T B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset A$.

Por outro lado, pela construção de Γ e pelo Teorema de Dedução, $\vdash_T A \supset B_i$, para todo i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Então, como T é uma extensão da lógica clássica, $\vdash_T A \equiv (B_1 \,\&\, \ldots \,\&\, B_n)$.

Logo, A é equivalente em T a uma fórmula sem variáveis.

Observamos que não parece possível demonstrar, nas hipóteses do teorema anterior, que A seja fortemente equivalente em T a uma fórmula sem variáveis.

Portanto, para obtermos uma generalização do Teorema da Eliminação de Quantificadores clássico parece necessário, como para outros teoremas generalizados da teoria de modelos, que uma teoria-$\mathbb{J}_3$ T satisfaça alguma condição especial, compatível com as características das teorias-$\mathbb{J}_3$.

DEFINIÇÃO 3.3.4: Uma teoria-$\mathbb{J}_3$ T *satisfaz a condição de isomorfismo* se, para cada dois modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ de T e cada isomorfismo ϕ de uma subestrutura de $\mathfrak{A}$ em uma subestrutura de $\mathfrak{A}'$, existe uma extensão de ϕ que é um isomorfismo de um submodelo de $\mathfrak{A}$ em um submodelo de $\mathfrak{A}'$.

DEFINIÇÃO 3.3.5: Uma teoria-$\mathbb{J}_3$ T *satisfaz a condição de submodelo* se, para todo modelo $\mathfrak{B}$ de T, todo submodelo $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{B}$ e toda fórmula simplesmente existencial A de $L(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{B}(A)$.

DEFINIÇÃO 3.3.6: Uma teoria-$\mathbb{J}_3$ T satisfaz a *condição de ∇-equivalência* se, para toda fórmula simplesmente existencial $\exists x A$, $\exists x A$ é fortemente equivalente a uma fórmula aberta se, e somente se, $\exists x \nabla A$ é fortemente equivalente a uma fórmula aberta.

TEOREMA 3.3.5: *Seja* T' *obtida, a partir de* T, *acrescentando-se uma nova constante* e. *Se* T *satisfaz a condição de isomorfismo (ou de submodelo, ou a condição de ∇-equivalência), então* T' *também a satisfaz.*

DEMONSTRAÇÃO: Se T satisfaz a condição de isomorfismo, ou se T satisfaz a condição de submodelo, a prova é idêntica à clássica.

Se T satisfaz a condição de $\forall$-equivalência, pelo Teorema sobre Constantes, T' também a satisfaz.

TEOREMA 3.3.6: *Se* T *contém uma constante e se* T *satisfaz a condição de isomorfismo, a condição de submodelos e a condição de* $\forall$-*equivalência, então toda fórmula fechada simplesmente existencial de* T *é fortemente equivalente em* T *a uma fórmula sem variáveis.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja A uma fórmula fechada simplemente existencial.

Pelo Teorema 3.3.4, para A ser fracamente equivalente em T a uma fórmula aberta, basta mostrarmos que, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são modelos de T tais que $\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}'(B)$ para toda fórmula sem variáveis B, então $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}'(A)$.

Seja M o conjunto não vazio formado por todos os $\mathcal{A}(a)$, com a termo sem variáveis.

Temos que M é fechado para as $f_{\mathcal{A}}$, pois, se $a_1, \ldots, a_n \in M$ então $f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in M$, para todo símbolo de função f de L(T).

Logo, M é o universo de uma subestrutura $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{B}'$ a subestrutura correspondente de $\mathcal{A}'$.

Provaremos que a função $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$, definida por $\phi(\mathcal{A}(a)) = \mathcal{A}'(a)$, para a termo sem variáveis, é um isomorfismo.

De fato, ϕ está bem definida e é bijetiva, pois $\mathcal{A}(a = b) = \mathcal{A}'(a=b)$, para a e b termos sem variáveis.

Logo, $\mathcal{A}(f(a_1, \ldots, a_n) = b) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{A}'(f(a_1, \ldots, a_n) = b) = 1$.

Portanto, $\mathcal{A}(f(a_1,\ldots,a_n)) = \mathcal{A}(b)$ se, e somente se, $\mathcal{A}'(f(a_1,\ldots,a_n)) = \mathcal{A}'(b)$.

Então, $f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(a_1),\ldots,\mathcal{A}(a_n)) = \mathcal{A}(b)$ se, e somente se, $f_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}'(a_1),\ldots,\mathcal{A}'(a_n)) = \phi(\mathcal{A}(b))$.

Logo, $\phi(f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(a_1),\ldots,\mathcal{A}(a_n)) = \phi(\mathcal{A}(b))$ se, e somente se, $f_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}'(a_1),\ldots,\mathcal{A}'(a_n)) = \phi(\mathcal{A}(b))$.

Assim sendo, $\phi(f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(a_1),\ldots,\mathcal{A}(a_n))) = f_{\mathcal{A}'}(\phi(\mathcal{A}(a_1)),\ldots,\phi(\mathcal{A}(a_n)))$, para todo símbolo de função f e toda n-upla $(a_1,\ldots,a_n)$ de termos sem variáveis de L(T).

Se $p(a_1,\ldots,a_n)$ é uma fórmula sem variáveis, então,por hipótese, $\mathcal{A}(p(a_1,\ldots,a_n)) = \mathcal{A}'(p(a_1,\ldots,a_n))$.

Logo, $p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(a_1),\ldots,\mathcal{A}(a_n)) = p_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}'(a_1),\ldots,\mathcal{A}(a_n)) =$
$= p_{\mathcal{A}'}(\phi(\mathcal{A}(a_1)),\ldots,\phi(\mathcal{A}(a_n)))$, para todo símbolo de predicado p de L(T).

Assim sendo, ϕ é um isomorfismo.

Como, pela hipótese do teorema, T satisfaz a condição de isomorfismo, ϕ pode ser extendido a um isomorfismo de um submodelo $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ em um submodelo $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{A}'$.

Como A é uma fórmula fechada simplesmente existencial e T, por hipótese, satisfaz a condição de submodelo, então $\mathcal{A}(A) = \mathcal{B}(A)$ e $\mathcal{A}'(A) = \mathcal{B}'(A)$.

Logo, como $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são isomorfos, $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}'(A)$ e, portanto, $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}'(A)$.

Logo, pelo Teorema 3.3.4, A é fracamente equivalente em T a uma fórmula aberta C ou seja $\vdash_T A \equiv C$.

Como A é uma fórmula fechada do tipo $\exists xB$, $\vdash_T \exists xB \equiv C$ e, portanto, pelo Teorema 1.1.4 e Teorema 1.1.7, temos que $\vdash_T \nabla\exists x B \equiv \nabla C$; ainda pelo Teorema 1.1.7, $\vdash_T \neg^* \exists x B \equiv \neg^* C$.

Logo, $\vdash_T \nabla\exists x B \equiv^* \nabla C$.

Então, pelo Corolário 2 do Teorema 2.2.9, $\vdash_T \exists x \nabla B \equiv^* \nabla C$, com ∇C fórmula aberta.

Portanto, como T satisfaz a condição de ∇-equivalência, $\vdash \exists x B \equiv^* D$, com D fórmula aberta. Ou seja, toda fórmula fechada simplesmente existencial é fortemente equivalente em T a uma fórmula aberta.

TEOREMA 3.3.7 (Teorema da Eliminação de Quantificadores): *Se a teoria-$\mathbb{J}_3$ T satisfaz a condição de isomorfismo, a condição de submodelo e a condição de ∇-equivalência, então T admite eliminação de quantificadores.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja A uma fórmula simplesmente existencial e seja A' obtida, a partir de A, substituindo-se cada variável livre em A por uma nova constante.

Seja T' obtida, a partir de T, acrescentando-se tais novas constantes, ou uma nova constante se A é fechada.

Então, pelo Teorema 3.3.5 e Teorema 3.3.6, A' é fortemente equivalente em T' a uma fórmula sem variáveis.

Logo, pelo Teorema sobre Constantes, A é fortemente equivalente, em T, a uma fórmula aberta.

Logo, toda fórmula simplesmente existencial é fortemente equivalente em T a uma fórmula aberta.

Portanto, pelo Teorema 3.3.3, T admite eliminação de quantificadores.

4. CARDINALIDADE DE MODELOS E CATEGORICIDADE.

DEFINIÇÃO 3.4.1: O *cardinal de uma estrutura* $\mathfrak{A}$ é o cardinal de seu universo $|\mathfrak{A}|$.

DEFINIÇÃO 3.4.2: Dizemos que a linguagem - $\mathbb{L}_3$ L é uma m-*linguagem*, se m é um cardinal infinito e se o conjunto de símbolos não lógicos de L tem cardinal menor ou igual a m.

DEFINIÇÃO 3.4.3: Uma teoria - $\mathbb{J}_3$ T é uma m-*teoria*, se L(T) é uma m-linguagem.

Chamamos as $\aleph_0$-linguagens e $\aleph_0$-teorias de *linguagens*-$\mathbb{L}_3$ *enumeráveis* e *teorias* - $\mathbb{J}_3$ *enumeráveis*, respectivamente.

TEOREMA 3.4.1: *Se* m *é um cardinal infinito e* L *é uma* m-*linguagem, então* L_c *contém no máximo* m *constantes especiais.*

TEOREMA 3.4.2 (Teorema da Cardinalidade de Tarski): *Se* m *é um cardinal infinito e* T *é uma* m-*teoria que tem um modelo infinito, então* T *tem um modelo de cardinal* m.

COROLÁRIO (Teorema de Löwenheim-Skolem): Se T é uma teoria-$\mathbb{J}_3$ enumerável que tem um modelo, então T tem um modelo enumerável.

As definições de teoria $-\mathbb{J}_3$ categórica e m-categórica são idênticas às clásssicas.

DEFINIÇÃO 3.4.4: Dizemos que uma teoria $-\mathbb{J}_3$ não trivial T é *categórica*, se dois modelo quaisquer de T são isomorfos.

DEFINIÇÃO 3.4.5: Se m é um cardinal infinito e cada dois modelos de T de cardinal m são isomorfos, então dizemos que a teoria-$\mathbb{J}_3$ T é m-*categórica*.

TEOREMA 3.4.3 (Teorema de Łoś-Vaught): *Seja* m *um cardinal infinito. Se* T *é uma* m-*teoria*-$\mathbb{J}_3$ *que só tem modelos infinitos e* T *é* m-*categórica, então* T *é completa.*

DEMONSTRAÇÃO: Por redução ao absurdo, suponhamos que T não é completa.

Então, como T tem modelo, existe uma fórmula A fechada de L(T) não decidível em T; ou seja, $\nvdash_T$ A e $\nvdash_T$ $*$A.

Pelo Corolário do Teorema da Redução para não Trivialização, temos que T[$\neg^*$A] e T[$\neg^*\neg^*$A] são não triviais e, portanto, têm modelos.

Como, por hipótese, os modelos de T[$\neg^*$A] e T[$\neg^*\neg^*$A] são infinitos, pelo Teorema da Cardinalidade de Tarski, existem modelos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de T[$\neg^*$A] e T[$\neg^*\neg^*$A], respectivamente, de cardinal m.

Logo, como T é m-categórica, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfos e, portanto, $\mathcal{A}$(A) = $\mathcal{B}$(A).

Como $\mathfrak{A} \models \neg^* A$ e $\mathfrak{B} \models \neg^* \neg^* A$, temos que $\mathfrak{A}(A) = 0$ e $\mathfrak{B}(A)$ pertence a V_d, o que é um absurdo.

Logo, A é decidível em T e, portanto, T é completa.

Nos resultados finais deste capítulo, $z_1, z_2, \ldots$ indicarão *variáveis em ordem alfabética*. Indicaremos $A_{z_1,\ldots,z_n}[a_1,\ldots,a_n]$, por $A[a_1,\ldots,a_n]$. Além disso, denotaremos o *conjunto das fórmulas de* L, *nas quais as variáveis livres entre* $z_1,\ldots,z_n$, por $S_n(L)$.

DEFINIÇÃO 3.4.6: Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura para L e sejam $a_1,\ldots,a_n$ indivíduos de $|\mathfrak{A}|$. O *tipo* da n-upla $(a_1,\ldots,a_n)$ é o conjunto de todas as fórmulas A de $S_n(L)$ tais que $\mathfrak{A}(A[i_1,\ldots,i_n])$ pertence a V_d, com $i_1,\ldots,i_n$ nomes de $a_1,\ldots,a_n$, respectivamente.

DEFINIÇÃO 3.4.6: Um n-*tipo* em $\mathfrak{A}$ é um tipo de uma n-upla de indivíduos de $\mathfrak{A}$.

Como no caso clássico, o único 0-tipo em uma estrutura $\mathfrak{A}$ é o conjunto das fórmulas fechadas válidas em $\mathfrak{A}$.

Se T é uma teoria-$\mathcal{J}_3$, denotamos $S_n(L(T))$, por $S_n(T)$.

DEFINIÇÃO 3.4.8: Um n-*tipo* em T é um n-tipo em um modelo de T.

TEOREMA 3.4.4: *Se* Γ *é um n-tipo em uma estrutura* $\mathfrak{A}$ *para* L *e a fórmula* A *pertence a* $S_n(L)$, *então exatamente uma das fórmulas* A *ou* $\neg^* A$ *está em* Γ.

COROLÁRIO: Se un n-tipo em uma estrutura está contido em outro, então ambos são idênticos.

TEOREMA 3.4.5: *Se* $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_k$, *com* $A_1, \ldots, A_k$ *em* $S_n(T)$, *então cada* n-*tipo em* T *contém pelo menos um dos* A_i, i *variando de* 1 *a* k.

COROLÁRIO: Se $\vdash_T A_1 \supset \ldots \supset A_k \supset B$, com $A_1, \ldots, A_k$, B em $S_n(T)$, então cada n-tipo em T que contém $A_1, \ldots, A_k$, também contém B.

TEOREMA 3.4.6: *Seja* T *uma teoria*-$\mathbf{J}_3$ *enumerável e* Γ *um conjunto não vazio de fórmulas de* $S_n(T)$ *tal que nenhuma disjunção de negações fortes de fórmulas de* Γ *é teorema em* . *Então, existe un* n-*-tipo em um modelo enumerável de* T *que contém* Γ.

DEMONSTRAÇÃO: Como no caso clássico, extendemos T à teoria-$\mathbf{J}_3$ T', acrescentando a L(T) as constantes $e_1, \ldots, e_n$ e acrescentando, para cada fórmula A de Γ, o novo axioma $A[e_1, \ldots, e_n]$.

Completamos a demonstração, usando o Teorema da Redução para não Trivialização, o Teorema sobre Constantes e o Teorema de Löwenhein-Skolen.

COROLÁRIO: Se T é uma teoria-$\mathbf{J}_3$ enumerável e Γ é um n-tipo em T, então Γ é um n-tipo em um modelo enumerável de T.

DEMONSTRAÇÃO: Usamos o Teorema 3.4.5 e aplicamos o teorema anterior.

DEFINIÇÃO 3.4.9: Dizemos que uma fórmula A de $S_n(T)$ é um *gerador* do conjunto Γ de fórmulas de $S_n(T)$, se $\not\vdash_T \neg^* A$ e, para toda fórmula B de Γ, $\vdash_T A \supset B$.

DEFINIÇÃO 3.4.10: Um conjunto Γ de fórmulas de $S_n(T)$ é *principal*, se tem um gerador.

TEOREMA 3.4.7: *Se* A *é um gerador de um* n-*tipo* Γ *em* T, *então* A *pertence a* Γ.

Observamos que, como no caso clássico, os n-tipos principais são determinados por qualquer um de seus geradores.

TEOREMA 3.4.8 (Teorema de Ehrenfeucht): *Seja* T *uma teoria*-$\mathbf{J}_3$ *enumerável não trivial e seja* Γ *um subconjunto não principal de* $S_n(T)$. *Então, existe um modelo enumerável* $\mathfrak{A}$ *de* T *tal que nenhum* n-*tipo em* $\mathfrak{A}$ *contém* Γ.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 3.4.1, podemos ordenar o conjunto de n-uplas de constantes distintas de T_c em uma seqüência.

Vamos construir indutivamente uma seqüência $A_1, A_2, \ldots$ de fórmulas fechadas de T_c, tal que:

i) A_k é $\neg^* A[r_1, \ldots, r_n]$, com A em Γ e $(r_1, \ldots, r_n)$ é a k-ésima n-upla na sequência acima citada;

ii) $T_k = T_c[A_1, \ldots, A_k]$ é não trivial.

Pelo Teorema 2.4.8, $T_o = T_c$ é não trivial.

Como no caso clássico, supondo que $A_1, \ldots, A_{k-1}$ tenham sido selecionadas e indicando por Λ o conjunto das fórmulas A de $S_n(T)$, tais que $\vdash_T A[r_1, \ldots, r_n]$, temos que

$$\vdash_{T_c} A_1 \supset \ldots \supset A_{k-1} \supset A[r_1, \ldots, r_n],$$

para todo A em Λ.

Pela prova do Teorema 2.4.8, se B é a conjunção de $A_1, \ldots, A_{k-1}$ e axiomas especiais para $r_1, \ldots, r_n$ de T_c, então $B \supset A[r_1, \ldots, r_n]$ pode ser provado em T_c, sem axiomas especiais, para todo A em Λ.

Como podemos indicar B por $C[r_1, \ldots, r_m]$, com $r_1, \ldots, r_m$ distintos, $m \geq n$ e C em $S_m(T)$, pelo Teorema sobre Constantes, temos que $\vdash_T C \supset A$, para todo A em Λ.

Pela regra R_3, $\vdash_T \exists z_{n+1} \ldots \exists z_m\, C \supset A$.

Como $\vdash_{T_{k-1}} C[r_1, \ldots, r_n]$, então $\vdash_{T_{k-1}} \exists z_{n+1} \ldots \exists z_m\, C$.

Como T_{k-1} é não trivial, então $\not\vdash_{T_{k-1}} \neg^* (\exists z_{n+1} \ldots \exists z_m\, C)$ e, portanto, $\not\vdash_T \neg^* (\exists z_{n+1} \ldots \exists z_m) C$.

Como não é principal, então existe pelo menos uma fórmula A em Γ tal que $\not\vdash_T \exists z_{n+1} \ldots \exists z_m\, C \supset A$. Logo, tal fórmula A não está em Γ.

Seja A_k a fórmula $\neg^* A[r_1, \ldots, r_n]$.

Nessas condições, pelo Teorema da Redução para não Trivialização, T_k é não trivial.

Agora, construimos T', a partir de T_c, acrescentando-se todos os $A_1, A_2, \ldots$ como novos axiomas.

Pelo Teorema da Compacidade e Teorma da Completude, T' é não trivial e tem um modelo $\mathfrak{A}$ que é enumerável.

Se $a_1,\ldots,a_n$ são indivíduos quaisquer de $\mathfrak{A}$, então, pelo Teorema 2.4.12, existem constantes especiais $r_1,\ldots,r_n$ tais que $\mathfrak{A}(r_1) = a_1,\ldots,\mathfrak{A}(r_n) = a_n$. Como, para algum A em Γ, $\neg^* A[r_1,\ldots,r_n]$ é axioma de T', temos que $\neg^* A$ está no tipo de $(a_1,\ldots,a_n)$.

Logo, Γ não está contido em nenhum n-tipo em $\mathfrak{A}$.

TEOREMA 3.4.9 (Teorema de Ryll-Nardzewski): *Seja* T *uma teoria* - $\mathbb{J}_3$ *enumerável completa que tem apenas modelos infinitos. Então, são equivalentes:*

i) T *é* $\aleph_0$*-categórica;*

ii) *para todo* n, T *tem apenas um número finito de* n*-tipos;*

iii) *para cada* n, *todo* n*-tipo em* T *é principal.*

DEMONSTRAÇÃO: Em primeiro lugar, demonstraremos que a negação de (iii) implica a negação de (i) e a negação de (ii); posteriormente, demonstraremos que (iii) implica (ii) e, por último, que (iii) implica (i).

Suponhamos que, para algum n, T tem um número infinito de n-tipos.

Então, pelo Corolário do Teorema 3.4.6 e Teorema de Ehrenfeucht, existem dois modelos de T, enumeráveis e não isomorfos.

Além disso, como Γ não é principal, podemos escolher indutivamente fórmulas $A_1, A_2,\ldots$ em Γ, tais que, para todo k, $\nvdash_T (A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_{k-1}) \supset A_k$. Então, pelo Teorema 1.1.7,

$\vdash_T \neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* A_{k-1} \vee \neg^* \neg^* A$. Logo, pelo Teorema 3.4.6 e Teorema 2.2.9, existe um n-tipo Γ_k em T que contém $A_1, \ldots, A_{k-1}, \neg^* A_k$. Como os Γ_k são distintos, então, nas condições analisadas, T tem um número infinito de n-tipos, para algum n .

Portanto, (i) implica (iii) e (ii) implica (iii).

Agora, suponhamos que, para cada n, todo n-tipo em T é principal.

Fixado n, e escolhidos geradores $A_1, A_2, \ldots$, um para cada n-tipo, então nenhum n-tipo pode conter todos os $\neg^* A_1, \neg^* A_2, \ldots$.

Pelo Teorema 3.4.6, considerando o conjunto $\{\neg^* A_1, \neg^* A_2, \ldots\}$, temos que existe k tal que $\vdash_T \neg^* \neg^* A_1 \vee \ldots \vee \neg^* \neg^* A_k$.

Logo, todo n-tipo em T contém pelo menos um dos $\neg^* \neg^* A_i$, $1 \leq i \leq k$ e,portanto, pelo Teorema 1.1.7, contém pelo menos um dos A_i, $1 \leq i \leq k$.

Portanto, como todo n-tipo que contém A_i, coincide com o n-tipo gerado por A_i, os únicos n-tipos são os gerados por $A_1, \ldots, A_k$.

Logo, (iii) implica (ii).

Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são modelos de T com cardinal $\aleph_0$, podemos arranjar $|\mathfrak{A}|$ e $|\mathfrak{B}|$ respectivamente, em duas sequências de elementos distintos.

Para completar a demonstração, devemos rearranjar os elementos de $|\mathfrak{A}|$ e $|\mathfrak{B}|$ em novas sequências $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$, respectivamente, de modo que, para cada n, $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ tenham o mesmo tipo, o que faremos por indução.

Pelo Teorema 3.3.1, como T é completa, temos que $\mathfrak{A}$ é elementarmente equivalente a $\mathfrak{B}$ e, portanto, validam as mesmas fórmulas fechadas de T. Logo, a afirmação do parágrafo anterior se verifica para $n = 0$.

Agora, supondo que todo n-tipo em T é principal, para todo n, consideremos que $a_1,\ldots,a_{n-1}$, $b_1,\ldots,b_{n-1}$ tenham sido escolhidos.

Se n é par, seja a_n o primeiro indivíduo, na sequência inicial de indivíduos de $\mathfrak{A}$, que não está entre $a_1,\ldots,a_{n-1}$. Se Γ é o tipo de $(a_1,\ldots,a_n)$ e A é um gerador de Γ, então $\exists z_n A$ pertence ao tipo de $(a_1,\ldots,a_{n-1})$ e $(b_1,\ldots,b_{n-1})$. Logo, podemos escolher b_n em $|\mathfrak{B}|$, de modo que A esteja no tipo de $(b_1,\ldots,b_n)$, o qual, por conter Γ, coincide com Γ. Além disso, como $a_n \neq a_i$, para $i \leq n$, então $b_n \neq b_i$. Logo, $\neg(z_n = z_i)$ está em Γ.

Se n é ímpar, tomamos b_n como o primeiro indivíduo, na seqüência inicial de indivíduos de $|\mathfrak{B}|$, que não está entre $b_1, \ldots,b_{n-1}$. Então, escolhemos a_n como acima.

Pela construção indicada, os primeiros n elementos da seqüência inicial de indivíduos de $|\mathfrak{A}|$, aparecem entre $a_1,\ldots,a_n$. Portanto, cada indivíduo $\mathfrak{A}$ é um a_i.

De maneira análoga, cada indivíduo de $\mathfrak{B}$ é um b_i.

Definimos, então, uma aplicação bijetora $\phi : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ por $\phi(a_i) = b_i$.

Pelo Teorema 3.1.2, ϕ é um isomorfismo.

Logo, (iii) implica (i) e completamos a prova do teorema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. Ackermann, INTRODUCTION TO MANY-VALUED LOGICS, Dover, N. York, 1967.

[2] E. H. Alves, *Paraconsistent logic and model theory*, a ser publicado.

[3] Aristotle, DE INTERPRETATIONE, versão inglesa por E. M. Edghill, em THE WORKS of ARISTOTLE, Vol.I, ENCICLOPAEDIA BRITANNICA Inc., Chicago, 1978, p. 29.

[4] A.I. Arruda, *A survey of paraconsistent logic*, MATHEMATICAL LOGIC IN LATIN AMERICA, North-Holland, Amsderdam, 1980, pp. 1-41.

[5] A.I. Arruda, *On the imaginary logic of N.A. Vasil'ev*, NON-CLASSICAL LOGICS, MODEL THEORY AND COMPUTABILITY, North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 3-24.

[6] A.I. Arruda, *Aspects of the historical development of paraconsistent logic*, a ser publicado.

[7] F.G. Asenjo, *A calculus of antinomies*, Notre Dame Journal of Formal Logic VII, 1966, pp. 103-105.

[8] F.G. Asenjo e J. Tamburino, *Logic of antinomies*, Notre Dame Journal of Formal Logic XVI, 1975, pp. 272-278.

[9] L. Borkowski (Ed.), SELECTED WORKS OF J. ŁUKASIEWICZ, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[10] R. Cignoli, ESTUDIO ALGEBRAICO DE LÓGICAS POLIVALENTES: ÁLGEBRAS DE MOISIL DE ORDEM N (Tese), Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1969.

[11] R. Cignoli, *Some algebraic aspects of many-valued logics*, MATHEMATICAL LOGIC, Sociedade Brasileira de Lógica, Campinas, 1980, pp. 49-69.

[12] R. Cignoli, *Antônio Monteiro:* 1907, 1980, a ser publicado nas Atas do V Simpósio Latinoamericano de Lógica Matemática.

[13] N.C.A. da Costa, *Nota sobre o conceito da contradição*, Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática 1, pp. 6-8.

[14] N.C.A. da Costa, *Observações sobre o conceito de existência em matemática*, Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática 2, 1959, pp. 16-19.

[15] N.C.A. da Costa, SISTEMAS FORMAIS INCONSISTENTES (Tese), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963.

[16] N.C.A. da Costa, *Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants*, C.R. Acad. Sc. Paris 257, 1963, pp. 3790-3793.

[17] N.C.A. da Costa, *Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants*, C.R. Acad. Sc. Paris 258, 1964, pp. 27-29.

[18] N.C.A. da Costa, *Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants*, C.R. Acad. Sc. Paris 258, 1964, 1111-1113.

[19] N.C.A. da Costa, *Calculs de descriptions pour les systèmes formels inconsistants*, C.R. Acad. Sc. Paris 258, 1964, pp. 1366-1368.

[20] N.C.A. da Costa, *Sur un système inconsistant de théorie des ensembles*, C.R. Acad. Sc. Paris 258, 1964, pp.3144-3147.

[21] N.C.A. da Costa, *On the theory of inconsistent formal systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic XV, 1974, pp.497-510.

[22] N.C.A. da Costa e E.H. Alves, *A semantical analysis of the calculi* C_n, Notre Dame Journal of Formal Logic XVIII , 1977, pp. 621-630.

[23] I.M.L. D'Ottaviano e N.C.A. da Costa, *Sur un problème de Jaśkowski*, C.R. Acad. Sc. Paris 270A, 1970, pp.1349-1353.

[24] I.M.L. D'Ottaviano, *The completeness of a three-valued first-order logic*, a ser publicado nas Atas do V Simpósio Latinoamericano de Lógica Matemática.

[25] S. Jaśkowski, *Propositional calculus for contradictory deductive systems*, Studia Logica XXIV, 1969, pp. 143-157. (Tradução para o inglês de [26]).

[26] S. Jaśkowski, *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sec. A, I, nº 5, 1948, pp. 55-57 (Tradução para o inglês em [25]).

[27] S. Jaśkowski, *O konjunkcji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnuch sprzeczcych*, Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sec. A, I, nº 8, 1949, pp. 171-172.

[28] S.C. Kleene, INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS, Van Nostrand , N. York, 1952.

[29] S. Körner, EXPERIENCE AND THEORY, 1966.

[30] J. Kotas e N.C.A. da Costa, *On the problem of Jaśkowski and the logics of Łukasiewicz*, MATHEMATICAL LOGIC, Marcel Dekker, N. York, 1978, pp. 127-139.

[31] J. Łukasiewicz, *Über densatz des widerspruchs bei Aristoteles*, Bull. Inter. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe d'Histoire et de Philosophie, 1910, pp. 15-38 (Tradução para o inglês em [33]).

[32] J. Łukasiewicz, *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen systemen des Aussagenkalküls*, C.R. Soc. Sci. Lett. Varsovie 23, 1930, pp. 51-77 (Tradução para o inglês em [9], pp. 153-178).

[33] J. Łukasiewicz, *On the principle of contradiction in Aristotle*, Review of Metaphysics XXIV, 1971, pp. 485-509, (Tradu para o inglês de [31] e [34])

[34] J. Łukasiewicz, *O zasadzie sprzeczności u Aristotelesa*, (Sobre o princípio da contradição em Aristóleles), Studium Krytyczne, Cracow, Polônia, 1910, (Tradução para o inglês em [33]).

[35] J. Łukasiewicz e A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, C.R. Soc. Sci. Lett. Varsovie 23, 1930, pp. 39--50 (Tradução para o inglês em [9], pp. 131-152).

[36] G. Moisil, ESSAIS SUR LES LOGIQUES NON-CHRYSSIPPIÊNNES, Acad. R.S. Roumaine, Bucharest, 1972.

[37] G. Moisil, *Recherches sur les logiques non-chryssippiènnes*, Ann. Sci. Univ. Jassy 26, 1940, pp. 431-436 (Reproduzido em [36], pp. 195-232).

[38] G. Moisil, *Logique Modale*, Disquis. Math. Phys. 2, 1942, pp. 2-98 (Reproduzido em [36], pp. 341-431).

[39] A. Monteiro, *Sur la definition des algèbres de Łukasiewicz Trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum, 7(55), 1964 , pp. 3-12.

[40] A. Monteiro, *Construction des algèbres de Łukasiewicz Trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques*, Math. Japon. 12,, 1967, pp. 1-23.

[41] E.L. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer. J. Math. 43, 1921, pp. 163-185.

[42] H. Rasiowa, AN ALGEBRAIC APPROACH TO NON-CLASSICAL LOGICS , North-Holland, Amsterdam, 1974.

[43] H. Rasiowa e R. Sikorski, THE MATHEMATICS OF METAMATHEMATICS, Warsaw, 1963.

[44] N. Rescher, MANY-VALUED LOGICS, McGraw-Hill, N. York, 1969.

[45] J.B. Rosser e A. Turquette, MANY-VALUED LOGICS, North-Hol-land, Amsderdam, 1952.

[46] R. Routley, *Exploring Meinong's jungle and beyond*, Australian National University, Camberra, 1980.

[47] R. Routley and R.K. Meyer, *Dialectical logic, classical logic and the consistency od the world*, Studies in Soviet Thought 16, 1976, pp. 1-25.

[48] J.R. Shoenfield, MATHEMATICAL LOGIC, Addison Wesley, Reading, 1967.

[49] N.A. Vasil'ēv, *Imaginary (non-aristotelian) logic*, Atti del V Congresso Internazionale di Filosofia, Naples, 1925, pp. 107-109.

[50] N.A. Vasil'ēv, *Logika i metalogika* (lōgica e metalōgica), Logos 1-2, 1913, pp. 53-81.

[51] N.A. Vasil'ēv, *O cāstnyh susdēniah, o trēugol'nikē protivopoložnostēj, o sakonē isklucennego čētvertogo* (Sobre proposições particulares, o triângulo de oposições e a lei do quarto excluído), Učēniē Zapiski Kanzan'skogo Universitēta, 47 pp.

[52] N.A. Vasil'ēv, *Voobražaēmaā (nēaristotēlēva) logika* (Lōgica imaginária (não-Aristotēlica)), Žurna Ministērstva Norodnogo Prosveščeniā 40, pp. 207-246.

[53] M. Wajsberg, *Aksjomatyzacja trōjwartōsciowego rachunku zdań* (Axiomatização do cālculo sentencial trivalente), C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie 24, 1931, pp. 126-148.