

TESTES DE IGUALDADE DE MÉDIAS DE MANOVA:
ROBUSTEZ À DESIGUALDADE DAS DISPERSÕES

CARLOS ALBERTO RIBEIRO DINIZ



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

D615t

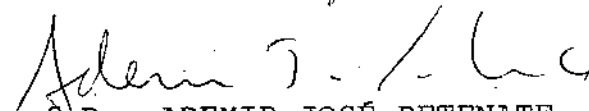
7258/BC

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

TESTES DE IGUALDADE DE MÉDIAS DE MANOVA-ROBUSTEZ
À DESIGUALDADE DAS DISPERSÕES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 14 de julho de 1986


Prof.Dr. ADEMIR JOSÉ PETENATE

Presidente

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

À

Dag e

ao Thy

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Antônio Cordeiro, pela orientação, amizade e incentivo.

Ao Prof. Dr. Ademir José Petenate, pelos preciosos comentários que muito nos auxiliaram.

Aos amigos do Departamento de Computação e Estatística da Universidade Federal de São Carlos, pelo apoio de todas as horas.

Aos CNPq e FAPESP, que financiaram parte do meu programa de pós-graduação.

Aos colegas de curso, Anselmo, Creusa, Enrico, Francisco, Jair, Manoel, Marta, Massanao, Roberto e Ronaldo, pela amizade e solidariedade.

Aos colegas Adilson, Lourival e Sérgio, pelos valiosos auxílios à parte de computação.

À Maria José G. da Costa, pelo eficiente trabalho de dactilografia.

Í N D I C E

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II	- ANÁLISE DE VARIÂNCIA MULTIVARIADA (MANOVA) ...	3
2.1	- Introdução	3
2.2	- Exposição do Problema e Resultados em MANOVA .	3
2.3	- Critério da Razão de Verossimilhança	13
2.4	- Critério do Máximo Autovalor	18
2.5	- A Escolha dos Critérios	24
CAPÍTULO III	- ALGUNS ESTUDOS DE ROBUSTEZ EM MANOVA	25
3.1	- Introdução	25
3.2	- Casos Especiais em MANOVA	26
3.3	- Alguns Trabalhos em Robustez	26
CAPÍTULO IV	- ESTUDO DA ESTABILIDADE DOS CRITÉRIOS RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA E MÁXIMO AUTOVALOR QUANTO À HETEROSCEDASTICIDADE	32
4.1	- Introdução	32
4.2	- O Gerador	34
4.3	- Geração das Populações	34
4.4	- Duas Populações de Dimensão 2	38
4.5	- Três Populações de Dimensão 2	53
4.6	- Quatro Populações de Dimensão 2	73
4.7	- Três Populações de Dimensão 3	81
4.8	- Conclusão Geral	91
APÊNDICE I		93

APÊNDICE II 100

APÊNDICE III 109

REFERÊNCIAS 113

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Multivariate Analysis of Variance ou MANOVA provavelmente começou com Wishart em 1928. É o análogo multivariado da ANOVA (Analysis of Variance).

Na classificação "one-way" multivariada, MANOVA é uma técnica usada, quando certas condições são satisfeitas, para investigar se os vetores de médias das populações são os mesmos. Estas condições são as seguintes:

1. As amostras aleatórias de diferentes populações são independentes;
2. todas as populações têm uma matriz de covariâncias comum;
3. cada população é normal multivariada.

A decisão entre a igualdade ou não dos vetores de médias das populações está baseada na aceitação ou rejeição de uma hipótese multivariada.

O primeiro desenvolvimento importante em teste de hipótese multivariada foi a extensão por Hotelling (1931) da estatística t-Student para a estatística T^2 multivariada. Um ano depois, Wilks (1932), utilizando o princípio da razão de verossimilhança, estendeu a estatística T^2 para k amostras, criando o que hoje é conhecido como critério *lambda de Wilks* ou critério da razão de verossimilhança. Lawley (1939) e Hotelling (1951) cria

ram o que hoje é conhecido como critério do traço. Roy (1953), usando o *princípio da união-intersecção*, desenvolveu o critério do máximo autovalor.

Todos estes critérios (Wilks, Lawley-Hotelling e Roy) podem ser aplicados para testar igualdade de vetores de médias quando as condições 1, 2 e 3, mencionadas anteriormente, estão satisfeitas.

Uma preocupação que está sempre presente nos usuários de MANOVA diz respeito à aplicação destes critérios quando uma ou mais condições são violadas. Surge, então, a necessidade de se estudar a estabilidade dos critérios de MANOVA quando nem to das as condições estão satisfeitas.

Este trabalho se concentra no estudo da estabilidade dos critérios razão de verossimilhança e máximo autovalor quando a condição de homoscedasticidade é relaxada, ou seja, quando as dispersões populacionais são diferentes.

No capítulo II, veremos formalmente a técnica MANOVA, os desenvolvimentos e as distribuições exatas dos critérios razão de verossimilhança e máximo autovalor.

No capítulo III, apresentaremos alguns trabalhos feitos em estabilidade dos critérios de MANOVA, e destacaremos dois entre eles.

No capítulo IV, trataremos do nosso estudo da estabilidade quanto à heteroscedasticidade dos critérios de Wilks e Roy para grandes amostras usando as respectivas distribuições exatas.

CAPÍTULO II

ANÁLISE DE VARIÂNCIA MULTIVARIADA (MANOVA)

2.1. INTRODUÇÃO

Usualmente quando desejamos testar a hipótese de igualdade de vetores de médias de várias populações, sob certas condições, usamos a técnica MANOVA (Análise de Variância Multivariada) que é um caso especial da hipótese linear geral multivariada.

A técnica MANOVA é aqui apresentada e discutida com a finalidade de aprimorar nosso conhecimento teórico sobre o método e ao mesmo tempo auxiliar-nos numa melhor compreensão do trabalho como um todo.

Os desenvolvimentos dos critérios usuais de MANOVA: razão de verossimilhança e máximo autovalor, são apresentados nas seções 2.3 e 2.4, respectivamente, juntamente com suas distribuições exatas.

Na seção 2.5 comentamos a escolha dos dois critérios.

2.2. EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA E RESULTADOS EM MANOVA

Seja n o número total de unidades experimentais ou pontos observados no experimento. Vamos assumir que p respostas são medidas em cada uma das n unidades experimentais. Escrevendo na forma matricial as pn peças de informações, temos a matriz resposta pxn .

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad (2.1)$$

onde x_i representa o vetor coluna de "p" respostas medidas sobre o i-ésimo ponto observado no experimento. O modelo fixo usual ou Modelo I de MANOVA (Roy e Gnanadesikan, 1959) pode ser escrito como:

$$X' = A\beta + \epsilon, \quad (2.2)$$

onde,

- i) A é a matriz do modelo nxm (ou matriz de delineamento), cujos elementos descrevem completamente o modelo sob a qual os dados são obtidos e tem rank $r \leq m < n$;
 - ii) β é uma matriz mxp de parâmetros desconhecidos; os efeitos fixos dos fatores envolvidos no experimento;
 - iii) ϵ é uma matriz nxp cujas linhas são supostas serem amostras aleatórias de tamanho n de uma normal p-variada não singular, $N_p \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \Sigma \end{smallmatrix} \right]_{(px1)}, \Sigma_{(pxp)}$;
- e,
- iv) $p \leq (n-r)$.

Dessas suposições segue que os n vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ de (2.1) são amostras independentes e $x_i \sim N_p(\mu_i, \Phi)$, $i=1, 2, \dots, n$, onde $\mu_i = E(x_i)$ e a matriz de dispersão desconhecida, Φ , é comum a todos os n vetores. A suposição que $p \leq (n-r)$ assegura que a matriz "devido ao erro", definida posteriormente, é positiva definida quase certamente.

Como a matriz do modelo A é de rank $r \leq m < n$, nós podemos particioná-la na forma $\begin{bmatrix} A_I & A_D \end{bmatrix}$, onde A_I é uma base de A consistindo de n linhas e r colunas e A_D é uma matriz com n linhas e as remanescentes $m-r$ colunas de A . Correspondendo a este particionamento de A , podemos particionar a matriz β e reescrevemos (2.2) como:

$$X' = \begin{bmatrix} A_I & A_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_D \end{bmatrix} + \epsilon. \quad (2.3)$$

O problema, na prática, é usualmente reparametrizado (i.e., usa restrições semelhante à soma de todos os efeitos dos tratamentos igual a zero ou a retirada do efeito global) e A é escrito de tal forma que seu rank é igual ao seu número de colunas.

As técnicas gerais disponíveis para problemas de estimação linear em ANOVA são essencialmente as mesmas em MANOVA e portanto não serão apreciados aqui (ver, por exemplo, Roy e outros, 1971).

Apenas para fixar idéias, vamos considerar um experimento com três "tratamentos" e supor que em cada unidade experimental duas respostas (x_1, x_2) são medidas. Vamos escrever os efei

tos fixos dos três tratamentos nas duas respostas na seguinte forma:

Tratamento	Resposta	
	x_1	x_2
T_1	β_{11}	β_{12}
T_2	β_{21}	β_{22}
T_3	β_{31}	β_{32}

Portanto, usando o modelo (2.2), neste caso, teremos:

$$\begin{aligned}
 X_{(pxn)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} x_{11}x_{12}\dots x_{1n_1} & x_{1n_1+1}x_{1n_1+2}\dots x_{1n_1+n_2} & x_{1n_1+n_2+1}x_{1n_1+n_2+2}\dots x_n \\ \hline x_{21}x_{22}\dots x_{2n_2} & x_{2n_2+1}x_{2n_2+2}\dots x_{2n_2+n_3} & x_{2n_2+n_3+1}x_{2n_2+n_3+2}\dots x_n \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{c|c|c} X_1(px n_1) & X_2(px n_2) & X_3(px n_3) \end{array} \right], \quad n = n_1+n_2+n_3,
 \end{aligned}$$

onde $X_j(px n_j)$ representa as observações do j -ésimo tratamento, (ou $X_j(px n_j)$ é a j -ésima matriz resposta), $j = 1, 2, 3$.

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \text{é matriz do modelo}$$

e

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad \text{é matriz de parâmetros desconhecidos.}$$

O modelo fixo usual de MANOVA, para o nosso exemplo, pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n_1} & x_{2n_1} \\ \hline x_{1n_1+1} & x_{2n_1+1} \\ x_{1n_1+2} & x_{2n_1+2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n_1+n_2} & x_{2n_1+n_2} \\ \hline x_{1n_1+n_2+1} & x_{2n_1+n_2+1} \\ x_{1n_1+n_2+2} & x_{2n_1+n_2+2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \epsilon_{1n_1} & \epsilon_{2n_1} \\ \hline \epsilon_{1n_1+1} & \epsilon_{2n_1+1} \\ \epsilon_{1n_1+2} & \epsilon_{2n_1+2} \\ \vdots & \vdots \\ \epsilon_{1n_1+n_2} & \epsilon_{2n_1+n_2} \\ \hline \epsilon_{1n_1+n_2+1} & \epsilon_{2n_1+n_2+1} \\ \epsilon_{1n_1+n_2+2} & \epsilon_{2n_1+n_2+2} \\ \vdots & \vdots \\ \epsilon_{1n} & \epsilon_{2n} \end{bmatrix}$$

$$X'_{(nx2)} = A_{(nx4)} \cdot \beta_{(4x2)} + \epsilon_{(nx2)},$$

ou, usando o modelo (2.3), teremos

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n_1} & x_{2n_1} \\ x_{1n_1+1} & x_{2n_1+1} \\ x_{1n_1+2} & x_{2n_1+2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n_1+n_2} & x_{2n_1+n_2} \\ x_{1n_1+n_2+1} & x_{2n_1+n_2+1} \\ x_{1n_1+n_2+2} & x_{2n_1+n_2+2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \hline \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \epsilon_{1n_1} & \epsilon_{2n_1} \\ \epsilon_{1n_1+1} & \epsilon_{2n_1+1} \\ \epsilon_{1n_1+2} & \epsilon_{2n_1+2} \\ \vdots & \vdots \\ \epsilon_{1n_1+n_2} & \epsilon_{2n_1+n_2} \\ \epsilon_{1n_1+n_2+1} & \epsilon_{2n_1+n_2+1} \\ \epsilon_{1n_1+n_2+2} & \epsilon_{2n_1+n_2+2} \\ \vdots & \vdots \\ \epsilon_{1n} & \epsilon_{2n} \end{bmatrix}$$

$$x'_{(nx2)} = \left[A_I_{(nx3)} \mid A_D_{(nx1)} \right] \begin{bmatrix} \beta_I_{(3x2)} \\ \hline \beta_D_{(1x2)} \end{bmatrix} + \epsilon_{(nx2)},$$

desse modo, cada vetor de respostas, x_{ij} , pode ser escrito a partir do modelo

$$x_{ij} = \mu + \beta_j + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

onde ϵ_{ij} = independentes $N_2(0, \Phi)$, $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ = efeito global e

β_j = efeito devido ao j -ésimo tratamento. Também,

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} \beta_{31} \\ \beta_{32} \end{bmatrix}.$$

Notamos que β_{jp} é o efeito do tratamento T_j na resposta x_p para $j = 1, 2, 3$ e $p = 1, 2$.

Este delineamento pode ser visto como um problema multi amostral, isto é, podemos considerar x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n_j$ como uma amostra aleatória de uma $N_2(\mu_j, \sigma^2)$, $j = 1, 2, 3$, onde

$$\mu_j = \mu + \beta_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Nós usualmente desejamos testar a hipótese

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (2.6)$$

que, por sua vez, é equivalente a testar a hipótese que não há diferença entre os tratamentos, isto é,

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \quad (2.7)$$

ou melhor,

$$H_0 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{31} \\ \beta_{32} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

a qual, naturalmente, é verdadeira se e somente se $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31}$ e $\beta_{12} = \beta_{22} = \beta_{32}$. A hipótese alternativa é H_1 : Não H_0 ; no mínimo uma igualdade no conjunto acima é violada.

Em notação matricial, a hipótese H_0 de (2.8), pode ser

reescrita como $C\beta = 0$, onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e 0 denota a matriz nula 2x2. Vale salientar que se o pesquisador deseja testar outro tipo de hipótese, tal como todos os efeitos relativos à primeira resposta são iguais, o raciocínio é o mesmo.

Em geral, a hipótese linear geral, sob o modelo (2.2), pode ser formulada como

$$H_0 : C\beta M = 0, \quad (2.10)$$

onde C é matriz $s \times m$ de rank $s \leq r \leq m < n$ e M é uma matriz $p \times u$ de rank $u \leq p$. A hipótese alternativa é formulada na forma,

$$H_1 : C\beta M = \eta, \quad (2.11)$$

quando η não é uma matriz nula, mas nada é especificado sobre seus elementos. Para *testabilidade* de H_0 (2.10) contra H_1 (2.11) ($H_0 : C\beta M = 0$ é testável se $C\beta M$ é estimável) a condição necessária e suficiente é que (ver, por exemplo, Roy e outros, 1971)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} [A] \quad (2.12)$$

ou, equivalentemente,

$$C_D = C_I (A_I' A_I)^{-1} A_I' A_D, \quad (2.13)$$

onde $\begin{bmatrix} C_I & C_D \end{bmatrix}$ forma uma partição de C, determinada pelo particionamento de β na forma

$$\begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_D \end{bmatrix}$$

a qual, por sua vez, foi determinada pelo particionamento de A na forma $\begin{bmatrix} A_I & A_D \end{bmatrix}$ onde A_I é uma base de A. A matriz M, na hipótese (2.10), em muitos casos, será apenas a matriz identidade I, mas, quando desejarmos testar hipóteses "entre respostas" tal como a hipótese que o efeito de um tratamento é o mesmo em todas as (ou um dado subconjunto de) p respostas, usamos a matriz M. A matriz C, por outro lado, é usada para a hipótese "entre tratamentos" como visto em (2.9).

Vamos definir duas matrizes, S_H e S_E , as quais são calculadas a partir das observações da matriz do modelo A e das matrizes C e M. Primeira, chamada *matriz devido à hipótese*, no caso (2.10) é dada por

$$S_H = M' X A_I (A_I' A_I)^{-1} C_I' \left[C_I' (A_I' A_I)^{-1} C_I' \right]^{-1} C_I (A_I' A_I)^{-1} A_I' X' M. \quad (2.14)$$

A segunda, chamada *matriz devido ao erro*, é dada por

$$S_E = M' X \left[I_n - A_I (A_I' A_I)^{-1} A_I' \right] X' M, \quad (2.15)$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n.

Vemos que S_H e S_E são essencialmente matrizes de soma

de quadrados (elementos da diagonal) e soma de produtos (elementos fora da diagonal). S_H é simétrica e no mínimo positiva semi-definida de rank $t = \min[\text{rank}(M), \text{rank}(C)]$. Como vimos anteriormente (suposição (iv), página 4), desde que $u \leq p \leq (n-r)$, a matriz S_E é simétrica positiva definida. Veremos adiante as matrizes correspondentes a S_H e S_E no caso de testar a hipótese de igualdade de médias ou, equivalentemente, de testar a hipótese de efeitos de tratamentos nulos.

Ao contrário de ANOVA, em MANOVA temos no mínimo três critérios alternativos para testar (2.10) contra (2.11), isto é, $H_0: C\beta M = 0$ contra $H_1: C\beta M = n$. Os três são exatamente equivalentes para $t=1$ ($\text{rank}(S_H) = 1$). Os critérios são:

$$\left. \begin{aligned} \text{I)} \quad \Lambda &= |S_E| / |S_E + S_H| = 1 / |I + S_H S_E^{-1}|; \\ \text{II)} \quad R &= \text{Ch}_{\max}(S_H S_E^{-1}) / [1 + \text{Ch}_{\max}(S_H S_E^{-1})]; \\ \text{III)} \quad T &= \text{tr}(S_H S_E^{-1}); \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

com " $| \quad |$ " denotando determinante, " $\text{Ch}_{\max}$ " denotando o máximo autovalor e " tr " denotando traço. O primeiro é o critério da razão de verossimilhança, onde Λ usualmente é conhecido como o *lambda de Wilks*, o segundo é devido a Roy e o terceiro é o critério devido a Lawley e Hotelling. Estes critérios são algumas vezes referidos como critério do produto das raízes, da máxima raiz e critério da soma das raízes, respectivamente.

Veremos nas seções posteriores as razões para testar H_0 usando estas funções de raízes características.

Quando $t=1$ ($\text{rank}(S_H) = 1$), $S_H S_E^{-1}$ tem somente uma raiz ca

racterística não-nula e, portanto, o produto das raízes (não-nulas), a máxima raiz e a soma das raízes são todos os mesmos. Assim os três critérios são equivalentes neste caso.

Detalharemos, a seguir, a distribuição exata, sob a hipótese nula, dos critérios razão de verossimilhança e máximo autovvalor. Lembramos que a hipótese nula à qual estamos nos referindo é a igualdade de vetores de médias de k populações normais p -variada tendo a mesma matriz de covariâncias.

2.3. CRITÉRIO DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

2.3.1. SUMÁRIO HISTÓRICO

Na suposição que amostras aleatórias tenham sido retiradas de uma ou mais populações normais p -variada, Wilks (1932) deu atenção (e foi o primeiro a fazer um estudo compreensível) para um número de problemas, dos quais três são de particular interesse,

Problema 1 - O teste de igualdade de vetores de médias de k populações p -variada tendo matrizes de covariâncias comuns.

Problema 2 - O teste de independência de um conjunto p_1 e um conjunto p_2 de variáveis em uma população $p = (p_1 + p_2)$ -variada.

Problema 3 - O teste de igualdade de matrizes de covariâncias entre k populações p -variada.

O teste que Wilks sugeriu para o problema 1 é análogo

aquele já usado no caso univariado (Scheffé, 1959). A estatística apropriada é obtida pela aplicação do *princípio da razão de verossimilhança*.

2.3.2. TESTE DE HIPÓTESE LINEAR GERAL - TRATAMENTO DE WILKS - PROBLEMA 1

Basicamente, como em um problema simples de análise de variância, o procedimento consiste em obter dos dados amostrais dois estimadores independentes,

$$W/v_1 \quad \text{e} \quad B/v_2 \quad (2.17)$$

dependendo dos graus de liberdade v_1 e v_2 , tendo sob a hipótese nula a mesma matriz de dispersão. W e B são as matrizes da soma de quadrados e produtos para o "erro" e "hipótese", respectivamente, tendo v_1 e v_2 graus de liberdade. Dentro das colocações devidas, W corresponde a S_E de (2.15) e B corresponde a S_H de (2.14).

O nosso problema é testar se os vetores de médias μ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) nas k populações são os mesmos, quando assumimos que estas populações têm matrizes de covariâncias comuns.

Vamos definir x_{irj} como a i -ésima observação da r -ésima variada para uma amostra da j -ésima população, $i = 1, 2, \dots, n_j$; $r = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, k$.

Usando uma notação conhecida para valor de média amostral, podemos escrever

$$w_{rv} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{irj} - \bar{x}_{.rj}) (x_{ivj} - \bar{x}_{.vj}), \quad (2.18)$$

$$b_{rv} = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_{.rj} - \bar{x}_{.r.}) (\bar{x}_{.vj} - \bar{x}_{.v.}), \quad (2.19)$$

com

$$\bar{x}_{.rj} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{irj}, \quad \bar{x}_{.vj} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ivj}$$

e

$$\bar{x}_{.r.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{irj}, \quad \bar{x}_{.v.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ivj}, \quad n = \sum_{j=1}^k n_j.$$

Então as matrizes W e B de (2.17) serão:

$$W = (w_{rv}), \quad B = (b_{rv}), \quad (2.20)$$

com

$$v_1 = \sum_{j=1}^k n_j - k = n - k, \quad v_2 = k - 1. \quad (2.21)$$

(n é o número total de observações e k é o número de populações). A estatística para testar a hipótese de igualdade de vetores de médias é dada por

$$\Lambda = \frac{\det(W)}{\det(W+B)} = \frac{|W|}{|W+B|} \quad (2.22)$$

ou, mais estritamente, $\Lambda^{\frac{1}{2}n}$.

Λ tem uma distribuição *lambda de Wilks* com parâmetros p, v_1 e v_2 , ou melhor,

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W+B|} \sim \Lambda(p, v_1, v_2). \quad (2.23)$$

A distribuição de $\Lambda(p, v_1, v_2)$ é dada pelo seguinte teorem

ma:

TEOREMA 2.3.1. - A distribuição de $\Lambda(p, v_1, v_2)$ é a distribuição de um produto de variáveis aleatórias independentes $z_1, z_2, \dots, z_{v_2}$ com distribuição Beta, onde z_i tem densidade

$$\beta \left[z_i; \frac{1}{2}(v_1+i-p), \frac{1}{2} p \right], \quad i = 1, 2, \dots, v_2$$

(ver Anderson, 1958, p. 194).

Outro teorema importante que envolve a distribuição Λ é o seguinte:

TEOREMA 2.3.2. - $\Lambda(p, v_1, v_2)$ e $\Lambda(v_2, v_2+v_1-p, p)$ seguem a mesma distribuição (ver Anderson, 1958, p. 193).

A construção de tabelas para a distribuição Λ requer cálculo demasiadamente extensivo, e por esta razão algumas distribuições especiais calculadas através da relação existente entre variáveis β e F (Beta e F-Snedecor) foram necessárias. Estes resultados são expressos a seguir:

TEOREMA 2.3.3. - A distribuição de

$$\frac{1 - \Lambda(1, v_1, v_2)}{\Lambda(1, v_1, v_2)} \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

é a distribuição F com v_2 e v_1 graus de liberdade; a distribuição de

$$\frac{1 - \Lambda(p, v_1, 1)}{\Lambda(p, v_1, 1)} \cdot \frac{v_1-p+1}{p}$$

é a distribuição F com p e v_1-p+1 graus de liberdade (ver Ander

son, 1958, p. 195).

TEOREMA 2.3.4. - A distribuição de

$$\frac{1 - \sqrt{\Lambda}(2, v_1, v_2)}{\sqrt{\Lambda}(2, v_1, v_2)} \cdot \frac{v_1 - 1}{v_2}$$

é a distribuição F com $2v_2$ e $2(v_1 - 1)$ graus de liberdade; a distribuição de

$$\frac{1 - \sqrt{\Lambda}(p, v_1, 2)}{\sqrt{\Lambda}(p, v_1, 2)} \cdot \frac{v_1 - p + 1}{p}$$

é a distribuição F com $2p$ e $2(v_1 - p + 1)$ graus de liberdade (ver Anderson, 1958, pág. 195).

Como dissemos anteriormente, o teste da razão de verossimilhança pode ser expresso através de uma função dos autovalores. Podemos escrever:

$$\Lambda = |I + W^{-1}B| = \prod_{r=1}^p (1 + \lambda_r)^{-1}, \quad (2.24)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ são os autovalores de $W^{-1}B$

Na prática, quando estamos trabalhando com grandes amostras, frequentemente, usamos a aproximação de Bartlett (ver Johnson, 1982, pág. 254). Bartlett mostrou que

$$- \left(\frac{n - 1 - (p + v_2 + 1)}{2} \right) \ln \Lambda \quad (2.25)$$

tem aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com pv_2 graus de liberdade, sob H_0 .

2.4. CRITÉRIO DO MÁXIMO AUTOVALOR

Roy (1953), através do *princípio da união e intersecção*, desenvolveu o critério do máximo autovalor.

Usaremos o critério do máximo autovalor para o problema 1 de Wilks, mas antes faremos um breve resumo do *princípio da união e intersecção*.

Suponhamos que $\underline{x}_j \sim N_p[\underline{\mu}_j(p \times 1), \underline{\Phi}(p \times p)]$, $j = 1, 2, \dots, k$, em palavras, cada vetor $\underline{x}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, é multi-normalmente distribuído com um vetor de médias $\underline{\mu}_j$ e matriz de covariâncias positiva definida $\underline{\Phi}$.

Queremos testar:

$$H_0 : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \dots = \underline{\mu}_k. \quad (2.26)$$

Vamos considerar combinações lineares dos $\underline{x}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, da forma $\underline{a}'\underline{x}_j$ ($\underline{a}$ é um vetor não aleatório p -dimensional). Facilmente verificamos que $\underline{a}'\underline{x}_j$ é um escalar cuja distribuição é $N(\underline{a}'\underline{\mu}_j, \underline{a}'\underline{\Phi}\underline{a})$. Portanto, construímos a hipótese

$$H_{0\underline{a}} : \underline{a}\underline{\mu}_1 = \underline{a}\underline{\mu}_2 = \dots = \underline{a}\underline{\mu}_k. \quad (2.27)$$

Para todos os vetores $\underline{a}$ p -dimensional não nulos, escrevemos a hipótese H_0 de (2.26) como a intersecção do conjunto de hipóteses univariadas $H_{0\underline{a}}$, como segue,

$$H_0 : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \dots = \underline{\mu}_k = \bigcap_{\underline{a}} H_{0\underline{a}} : \underline{a}\underline{\mu}_1 = \underline{a}\underline{\mu}_2 = \dots = \underline{a}\underline{\mu}_k, \quad (2.28)$$

o sinal de intersecção é usado aqui porque todas as hipóteses $H_{0\underline{a}}$ devem ser aceitas para que H_0 seja aceita. Este é o *princípio*

pio da união-intersecção de Roy.

Na situação do problema 1 de Wilks, vamos assumir que temos:

- i) k matrizes de dados $X_j (p \times n_j)$;
- ii) k vetores de médias $\bar{x}_j (p \times 1)$;
- iii) um vetor de médias global $\bar{x} (p \times 1)$ tal que $\bar{x} = \sum_{j=1}^k n_j \bar{x}_j / n$, onde $n = \sum_{j=1}^k n_j$ e $p \leq n-k$;
- iv) uma matriz $W = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ij} - \bar{x}_j)'$ e uma matriz $B = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{x})(\bar{x}_j - \bar{x})'$, sendo x_{ij} o i-ésimo vetor de observações da j-ésima matriz de dados. As matrizes W e B são as mesmas W e B de (2.20) escritas agora na forma vetorial.

Uma região de rejeição para H_{0a} tem a forma

$$F_a = a' B a / a' W a \geq F_0, \quad (2.29)$$

(ver Roy, 1953). F_0 é obtido de

$$P(F_a \geq F_0 | H_0) = \alpha, \quad (2.30)$$

onde α é conhecido como erro Tipo I.

Uma vez que H_0 é rejeitada se alguma componente de hipótese H_{0a} é rejeitada, isto conduz a uma região de rejeição para H_0 que é a união das regiões de rejeição dos componentes de H_0 .

póteses H_{0a} , definida como

$$U_{\underline{a}}\{F_{\underline{a}} : F_{\underline{a}} \geq F_0\}. \quad (2.31)$$

Notamos que

$$U_{\underline{a}}\{F_{\underline{a}} : F_{\underline{a}} = \underline{a}'B\underline{a}/\underline{a}'W\underline{a} \geq F_0\}$$

é precisamente equivalente a:

$$\text{Max}_{\underline{a}}\{\underline{a}'B\underline{a}/\underline{a}'W\underline{a} \geq F_0\}. \quad (2.32)$$

O máximo existe sob variação de $\underline{a}$ (para um dado conjunto de observações, isto é, para um dado conjunto de W e B).

Dados W e B verificamos que o valor máximo de $\underline{a}'B\underline{a}/\underline{a}'W\underline{a}$ é a máxima raiz $\lambda_{\max}$ da equação determinante em λ de p -ésimo grau

$$|B - \lambda W| = 0, \quad (2.33)$$

ou o valor máximo de $\underline{a}'B\underline{a}/\underline{a}'W\underline{a}$ é o máximo autovalor $\theta_{\max}$ de $(W+B)^{-1}B$, isto é, o máximo autovalor da equação determinante

$$|B - \theta(W+B)| = 0. \quad (2.34)$$

Se λ é um autovalor de $W^{-1}B$, então $\lambda/(1+\lambda)$ é um autovalor de $(W+B)^{-1}B$. Desde que $\lambda/(1+\lambda)$ é uma função monótona de λ , $\theta_{\max}$ é dado por

$$\theta_{\max} = \frac{\lambda_{\max}}{1 + \lambda_{\max}}, \quad (2.35)$$

onde $\lambda_{\max}$ é o máximo autovalor de $W^{-1}B$. Como $\lambda_{\max}$ é positivo,

temos $0 < \theta_{\max} < 1$.

Dessa maneira, as raízes λ são imediatamente obtidas das raízes θ e vice-versa. Esta relação corresponde à que existe entre as distribuições Beta e F no caso univariado.

2.4.1. A DISTRIBUIÇÃO DO MÁXIMO AUTOVALOR (BETA GENERALIZADA)

A distribuição conjunta das p raízes $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ foi elaborada por Fisher (1939), Hsu (1939), Roy (1939) e Girshick (1939). A função de densidade é

$$K = \prod_{r=1}^p \theta_r^{m_1-1} (1-\theta_r)^{m_2-1} \prod_{r>1} (\theta_r - \theta_s) \quad (0 < \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p < 1), \quad (2.36)$$

onde

$$K = \pi^{\frac{1}{2}p} \prod_{r=1}^p \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(2m_1+2m_2+p+r-2))}{\Gamma(\frac{1}{2}(2m_1+r-1)) \Gamma(\frac{1}{2}(2m_2+r-1)) \Gamma(\frac{1}{2}r)} \quad (2.37)$$

e

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}(v_2 - p + 1), & m_2 &= \frac{1}{2}(v_1 - p + 1) \\ v_2 &= k - 1, & v_1 &= \sum_{j=1}^k n_j - k. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

($k = \#$ de populações).

A função de distribuição da raiz máxima ou máximo autovalor é dada por

$$I_x(p; m_1, m_2) = K \int_0^x d\theta_p \int_0^{\theta_p} d\theta_{p-1} \dots \int_0^{\theta_2} d\theta_1 \prod_{r=1}^p \theta_r^{m_1-1} (1-\theta_r)^{m_2-1} \prod_{r>s} (\theta_r - \theta_s). \quad (2.39)$$

Vemos que $I_X(p; m_1, m_2)$ reduz-se à distribuição Beta $I_X(m_1, m_2)$ quando $p=1$. Esta é a razão do nome *distribuição Beta Generalizada*.

No uso da distribuição do máximo autovalor, trabalharemos somente com $p=2$, ou seja, apenas duas respostas estarão sendo medidas.

Para $p=2$, dois métodos para construção da tabela da distribuição do máximo autovalor estão disponíveis: método por computação e interpolação. Usaremos o método por computação.

2.4.2. MÉTODO POR COMPUTAÇÃO

Seja $\theta_{\max}$ denotando o máximo autovalor de

$$|B - \theta(W+B)| = 0, \quad (2.40)$$

onde W e B são estimadores independentes, baseados em v_1 e v_2 graus de liberdade, da matriz de dispersão da população normal bivariada. Definimos

$$I_X(2; m_1, m_2) = P(\theta_{\max} \leq x), \quad (2.41)$$

para v_1, v_2, m_1 e m_2 como definidos em (2.38). Pillai (1956) obteve a expressão de $I_X(2; m_1, m_2)$ a qual pode ser escrita como:

$$I_X(2; m_1, m_2) = K \{ 2B_X(2m_1, 2m_2) - x^{m_1} (1-x)^{m_2} B_X(m_1, m_2) \}, \quad (2.42)$$

onde

$$K = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(m_1 + m_2) \Gamma(m_1 + m_2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_1) \Gamma(m_1 + \frac{1}{2}) \Gamma(m_2) \Gamma(m_2 + \frac{1}{2})} \quad (2.43)$$

e $B_x(m_1, m_2)$ é a função *Beta incompleta*. Substituindo K na fórmula de Pillai, obtém-se

$$I_x(2; m_1, m_2) = I_x(2m_1, 2m_2) - I_x(m_1, m_2) a_x(m_1, m_2) \quad (2.44)$$

onde $I_x(m_1, m_2)$ é a distribuição *Beta*, isto é,

$$I_x(m_1, m_2) = \frac{B_x(m_1, m_2)}{\frac{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2)}{\Gamma(m_1 + m_2)}} = \frac{\Gamma(m_1 + m_2)}{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2)} \int_0^x t^{m_1-1} (1-t)^{m_2-1} dt \quad (2.45)$$

e

$$a_x(m_1, m_2) = x^{m_1-1} (1-x)^{m_2} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(m_1 + m_2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_1 + \frac{1}{2}) \Gamma(m_2 + \frac{1}{2})} \quad (2.46)$$

para $m_1 > 0$ e $m_2 = 0, 1, 2, \dots$.

Devido ao fato de m_1 ser estritamente maior que zero e $m_1 = \frac{1}{2}(v_2 - 1)$, v_2 deve ser também estritamente maior que zero. Sabemos que $v_2 = k - 1$ ($k = \#$ de populações), logo, só podemos aplicar o critério do máximo autovalor (com $p=2$) quando o número de populações k é maior ou igual a 3.

Portanto, quando $k=3$, temos $v_2=2$ e consequentemente $m_1 = \frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} I_x(2, \frac{1}{2}, m_2) &= I_x(1, 2m_2) - \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + m_2) \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1 + m_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(m_2) \Gamma(1) \Gamma(\frac{1}{2} + m_2)} x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{m_2} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{m_2-1} dt \\ &= I_x(1, 2m_2) - m_2 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{m_2} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{m_2-1} dt \end{aligned} \quad (2.47)$$

Quando $k=4$, temos $v_2=3$ e conseqüentemente $m_1=1$. Logo,

$$I_x(2,1,m_2) = I_x(2,2m_2) - I_x(1,m_2)a_x(1,m_2) \quad (2.49)$$

$$= I_x(2,2m_2) - I_x(1,m_2) [2(m_2+1)-1] x(1-x)^{m_2}. \quad (2.50)$$

Ver no apêndice III a tabela da distribuição do máximo autovalor, para alguns graus de liberdade, calculada usando os Programas 3 e 4 (em anexo).

2.5. A ESCOLHA DOS CRITÉRIOS

Nenhum teste de MANOVA é *uniformemente mais poderoso* (U.M.P.), portanto, comparações dos poderes dos testes pode ser de grande valia na seleção de um teste para uma situação particular.

Vários autores, entre eles, Gnanadesikan e outros (1965), Roy (1966), Pillai (1967), Lee (1971), e Roy e Gnanadesikan (1971), fizeram estudos para distinguir entre os critérios em amostras pequenas e moderadamente grandes. Em amostras muito grandes, qualquer um dos critérios pode ser usado, uma vez que eles são assintoticamente equivalentes.

CAPÍTULO III

ALGUNS ESTUDOS DE ROBUSTEZ EM MANOVA

3.1. INTRODUÇÃO

Como dissemos no Capítulo 1, para que testes de MANOVA sejam aplicáveis, certas condições devem estar satisfeitas. Por exemplo, normalidade dos dados e matriz de covariâncias comum a todas as populações. O pesquisador, acostumado a lidar com a técnica MANOVA, sabe que nem sempre será possível satisfazer estas condições. Portanto, um estudo da estabilidade dos testes de MANOVA se faz necessário com o objetivo principal de subsidiar o usuário desta técnica de informações relevantes quanto à validade dos critérios quando certas condições são violadas.

Na seção 3.2, apresentamos dois casos especiais de MANOVA. O primeiro caso especial é quando o número de respostas medidas é um. O segundo é quando os graus de liberdade da hipótese é um. Apresentamos, também, os testes usados nestes casos e a robustez destes testes.

Na seção 3.3 citamos alguns trabalhos voltados para robustez em MANOVA, com especial atenção àqueles quando a condição de igualdade de dispersões populacionais é relaxada. Dentre estes trabalhos, faremos um breve resumo das notas de Korin (1971) e do artigo de Olson (1974).

3.2. CASOS ESPECIAIS EM MANOVA

Existem dois casos especiais de análise de variância multivariada nas quais os critérios usuais escolhidos como teste não indicam uma boa saída.

Primeiro, quando $p=1$ (= número de respostas medidas), o teste indicado, neste caso, é o teste F que é U.M.P. e é invariante com respeito às transformações lineares (Scheffé, 1959, p. 46-51). O segundo caso especial é quando os graus de liberdade da hipótese é um, usa-se, nesta situação, o teste T^2 de Hotelling que é o teste U.M.P. e é invariante para transformações afins (Anderson, 1958, p. 115-118).

Vários autores examinaram a robustez destes testes. A conclusão geral dos dois casos especiais de MANOVA é que os testes F e T^2 são robustos contra heteroscedasticidade de variâncias e especialmente contra não-normalidade.

Quando o mínimo entre p e os graus de liberdade da hipótese é maior que um, os critérios usuais (razão de verossimilhança de Wilks, máximo autovalor de Roy e traço de Lawley-Hotelling) devem ser usados.

3.3. ALGUNS TRABALHOS EM ROBUSTEZ

Em 1962, G.P. Williams da General Electric já sentia a necessidade de investigar a robustez dos critérios usuais de MANOVA. Nenhum trabalho, neste sentido, foi encontrado na literatura, até o presente momento, que se atribuisse a Williams.

Ito e Schull (1964) e Ito (1969) estudaram a robustez dos testes traço de Lawley-Hotelling e razão de verossimilhança de Wilks em grandes amostras (usando teoria assintótica) e concluíram que am bos os testes respondem à não-normalidade e covariâncias heterogêneas do mesmo modo que o teste F univariado. Korin (1969) es tudou a estabilidade de alguns critérios em pequenas amostras e notou que covariâncias heterogêneas produzem, de certo modo, muitos resultados significativos no teste devido a Wilks, um pouco mais no teste devido a Hotelling e ainda mais no teste devido a Roy.

Resumiremos agora os casos observados e os resultados do trabalho de Korin.

Lembramos que $n_1, n_2, \dots, n_k$ são os tamanhos de amostras para observações independentes de k populações p -variada, $\tilde{x}_{ij}$ é o i -ésimo vetor de observações do j -ésimo grupo, $i = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, e

$$W = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\tilde{x}_{ij} - \bar{\tilde{x}}_j) (\tilde{x}_{ij} - \bar{\tilde{x}}_j)'$$

e

$$B = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{\tilde{x}}_j - \bar{\tilde{x}}) (\bar{\tilde{x}}_j - \bar{\tilde{x}})'$$

são as matrizes da soma de quadrados e produtos para o "erro" e "hipótese" respectivamente.

Lembramos ainda que a estatística T de Lawley-Hotelling é definida como $T = t_r(W^{-1}B)$, a estatística *Lambda de Wilks* é $\Lambda = |W|/(W+B)$ e se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ são as raízes de $|B - \lambda W| = 0$, en tão

$$T = \sum_{r=1}^p \lambda_r, \quad \Lambda = \prod_{r=1}^p (1 + \lambda_r)^{-1}$$

e

$$R = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \lambda_{\max}$$

($\lambda_{\max}$ é a estatística do máximo autovalor de Roy).

Na tabela 1 (abaixo), k representa o número de populações, p a dimensão e $N_0 = N_1 = \dots = N_k$ os graus de liberdade associados com cada matriz de covariâncias. Duas formas diferentes de matrizes diagonais, indicada por $W(d)$ e $B(d)$ foram usadas. O símbolo $W(d)$ indicam matrizes $\{I, dI, 2dI\}$ para $k=3$ e $\{I, I, I, I, dI, 2dI\}$ para $k=6$. O símbolo $B(d)$ indicam as formas $\{I, I, dI\}$ para $k=3$ e $\{I, I, I, I, I, dI\}$ para $k=6$. Melhor explicando, o símbolo $W(d)$, para $k=3$, quer dizer que a matriz de covariâncias da primeira população é I , para a segunda população é dI e para a terceira é $2dI$. O símbolo $B(d)$, para $k=3$, implica que a primeira população tem matriz de covariâncias I , a segunda população tem matriz de covariâncias I e a terceira população dI . Portanto, fica caracterizado a heteroscedasticidade.

Entre outras verificações nos procedimentos, amostras foram geradas sem violações das afirmações para observar se a proporção esperada dos cálculos estatísticos caia na região crítica especificada. Concordância muito próxima entre o esperado e o resultado empírico ocorreu.

As três estatísticas (T , Λ e R) foram calculadas a partir dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de $W^{-1}B$ e um mínimo de 1000 testes para cada conjunto de parâmetros foram feitos.

TABELA 3.1 - Resultados Amostrais dos Níveis de Significância de
T, A e R

(p,k,N ₀)	Forma das matrizes de covariâncias	Nível de Significância observado com nível suposto de 0.05		
		T	A	R
(2,3,5)	B(1.5)	0.06	0.06	0.06
	W(1.5)	0.08	0.07	0.08
	B(10.0)	0.12	0.12	0.13
(2,3,10)	B(1.5)	0.05	0.05	0.05
	W(1.5)	0.06	0.05	0.07
	B(10.0)	0.09	0.08	0.10
(2,6,5)	B(1.5)	0.05	0.05	0.05
	W(1.5)	0.06	0.06	0.08
	B(10.0)	0.14	0.13	0.17
	W(10.0)	0.17	0.15	0.19
(2,6,10)	W(1.5)	0.07	0.07	0.08
	B(10.0)	0.14	0.13	0.17
	W(10.0)	0.13	0.12	0.16
(4,3,10)	B(1.5)	0.07	0.06	0.07
	W(1.5)	0.07	0.06	0.08
	B(10.0)	0.14	0.12	0.20
(4,6,7)	B(1.5)	0.05	0.04	0.06
	W(1.5)	0.06	0.06	0.08
	B(10.0)	0.22	0.18	0.31

Podemos notar pela tabela 1 que não existe uma grande diferença entre as três estatísticas T, A e R, embora R exibe um pouco mais de afastamento do nível de significância suposto do que os outros dois. Notamos também que para pequeno afastamento da condição de homoscedasticidade, os afastamentos do nível de significância suposto para T, A e R podem ser considerados moderados, mas, para grandes violações de covariâncias homogêneas os afastamentos são considerados grandes.

Olson (1974), em sua tese de doutorado, fez um dos trabalhos mais completos com respeito ao estudo da estabilidade dos critérios em MANOVA. Olson comparou robustez de seis testes em MANOVA: i) razão de verossimilhança (Wilks); ii) máxima raiz (Roy); iii) traço (Lawley-Hotelling); iv) traço (Pillai-Bartlett); v) critério do determinante (Gnanadesikan) e vi) critério alternativo do determinante (Olson). Olson usou métodos de Monte Carlo para estudar a performance destes seis critérios quando certas afirmações são violadas. Os dados foram gerados para simular experimentos no qual $p = 2, 3, 6$ ou 10 respostas são medidas. Todos os experimentos simulados tinham um delineamento simples "one-way" com $k = 2, 3, 6$ ou 10 grupos de tratamentos e eram pequenos para moderadamente grandes, com $5, 10$ ou 50 unidades experimentais em cada grupo (os grupos tinham tamanhos iguais).

Existe, é claro, uma conexão entre os parâmetros do experimento (dimensionalidade, número de grupos e número de observações por grupo) e a robustez nos testes de MANOVA, mas, Olson notou que propriedades de robustez não são sempre otimizadas com o crescimento do tamanho do grupo. Alguns testes, como traço

(Hawley-Hotelling), razão de verossimilhança, máximo autovalor e traço (Pillai-Bartlett) levam vantagens com grandes amostras, isto é, são robustos, enquanto os testes critério do determinante e critério alternativo do determinante não têm essa qualidade. Para proteção apenas contra heterogeneidades de covariâncias, os testes traço (Hotelling), máximo autovalor e razão de verossimilhança devem ser evitados. Em casos de não-normalidade e matrizes de covariâncias heterogêneas em modelo de efeitos-fixos de MANOVA, o teste traço (Pillai-Bartlett) é recomendado como o mais robusto dos testes de MANOVA.

CAPÍTULO IV

ESTUDO DA ESTABILIDADE DOS CRITÉRIOS RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA E MÁXIMO AUTOVALOR QUANTO À HETEROSCEDASTICIDADE

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo iniciamos o nosso estudo referente à estabilidade dos critérios razão de verossimilhança e máximo autovalor quanto à heteroscedasticidade. É um estudo baseado em simulações e, como tal, recursos computacionais são de grande valia. O computador usado nas realizações das simulações foi o DEC 10 da Digital. Para confecções dos gráficos, empregamos o plotter IBM 1627 II. O gerador de números randômicos que usamos é o que está implementado no computador. Na seção 4.2 faremos alguns comentários a respeito deste gerador. Na seção 4.3 pormenorizamos o procedimento de geração das populações e as transformações utilizadas para chegarmos às populações desejadas.

Estudaremos a estabilidade do teste da razão de verossimilhança para 2, 3 e 4 populações de dimensão 2 e para 3 populações de dimensão 3. O estudo da estabilidade do teste do máximo autovalor será feito para 3 e 4 populações de dimensão 2. Lembramos que, para $p=2$, o teste do máximo autovalor é aplicado quando o número de populações excede 2. Para $p=3$, o teste do máximo autovalor é aplicado quando o número de populações é maior que 3. Os tamanhos dos grupos são considerados grandes e os grupos têm tamanhos desiguais. Na tabela 4.1 (abaixo), descrevemos os tam
nhos dos grupos para os quatro casos em que estudaremos a estabi

lidade dos testes.

TABELA 4.1 - Tamanhos dos Grupos

Tamanho do j-ésimo grupo	DIMENSÃO 2			DIMENSÃO 3
	2 Populações	3 Populações	4 Populações	3 Populações
n_1	120	120	95	105
n_2	123	140	100	110
n_3	—	146	105	90
n_4	—	—	107	—

Na seção 4.4 damos as configurações usadas com respeito ao relaxamento da condição de homocedasticidade, para 2 populações de dimensão 2, bem como os resultados obtidos, isto é, os percentuais de rejeição observados a cada passo do afastamento da igualdade das matrizes de covariâncias e a interpretação destes resultados. A seção 4.5 é semelhante à seção 4.4 exceto que agora é para 3 populações de dimensão 2. A seção 4.6 é para 4 populações de dimensão 2 e, finalmente, na seção 4.7 damos as configurações, os percentuais de rejeição observados e a interpretação dos resultados para 3 populações de dimensão 3.

Apesar dos tamanhos dos grupos serem considerados grandes, é importante frisar que trabalhamos com as distribuições exatas dos testes.

4.2. O GERADOR

Existem vários métodos para gerar números aleatórios. Pela facilidade de uso e por satisfazer as nossas necessidades, usamos o gerador implementado no DEC 10.

O algoritmo usado pelo Programa RAN (Single-Precision Random Number Function) que está implementado no computador DEC 10 da Digital tem como finalidade gerar números pseudo-aleatórios de precisão simples. Este algoritmo foi retirado do artigo de Payne, Rabring e Bogyo (1969) utilizando o método de Lehme.

Existem três pontos de entrada no programa. Uma em RAN, outra em SAVRAN e outra em SETRAN. A entrada em SETRAN apresenta o número aleatório gerado com ponto de inicialização não padronizado. A SETRAN espera um argumento inteiro no intervalo $0 \leq \text{arg} \leq 2^{31}-1$. Denominamos este argumento por *semente*. O resultado de uma chamada a RAN é um número uniforme no intervalo $0 < x < 1$, na SAVRAN é um inteiro no intervalo $0 < x < 2^{31}$.

4.3. GERAÇÃO DAS POPULAÇÕES

A partir das gerações de números aleatórios uniformes entre 0 e 1, descritos na seção 4.2, empregamos o método proposto por Box-Muller (1958), que consiste em transformar variáveis uniformes em normais padrões. Os programas 1 e 2 (ver apêndice II), geram vetores aleatórios de dimensão p , $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{n_j}$, onde $\underline{x}_i \sim N_p(0, I_p)$, $i = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, criando assim as

matrizes de dados

$$X_j (n_j \times p) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n_j} \end{bmatrix}', \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad (4.1)$$

perturba as variâncias sob independência, através da transformação

$$\underline{y}_i = D \underline{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (4.2)$$

onde,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

(é evidente que $\underline{y}_i \sim N_p(\underline{0}, DD')$); cria estruturas de correlações através das transformações

$$\underline{z}_i = \begin{cases} R_\theta \underline{y}_i & \text{para } p=2, \quad i=1, 2, \dots, n_j, \quad j=1, 2, \dots, k \\ R_{\alpha\beta\gamma} \underline{y}_i & \text{para } p=3, \quad i=1, 2, \dots, n_j, \quad j=1, 2, \dots, k. \end{cases} \quad (4.4)$$

R_θ é um operador que produz uma rotação de θ graus no plano e $R_{\alpha\beta\gamma}$ é um operador que produz uma rotação no espaço tridimensional, com

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

e

$$R_{\alpha\beta\gamma} = (r_{ab}), \quad a = 1, 2, 3, \quad b = 1, 2, 3 \quad (4.6)$$

onde

$$r_{11} = \cos\alpha\cos\beta$$

$$r_{12} = -\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$r_{13} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$r_{21} = \sin\alpha\cos\beta$$

$$r_{22} = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$r_{23} = -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$r_{31} = \sin\beta$$

$$r_{32} = \cos\beta\sin\gamma$$

$$r_{33} = \cos\beta\cos\gamma$$

É fácil verificar que $\underline{z}_i \sim N_2(\underline{0}, R_\theta DD' R'_\theta)$ para $p=2$ e $\underline{z}_i \sim N_3(\underline{0}, R_{\alpha\beta\gamma} DD' R'_{\alpha\beta\gamma})$ para $p=3$. As relações entre os ângulos de rotações e as correlações entre os componentes de $\underline{z}_i$ são dadas através das expressões:

para $p=2$;

$$\rho_{12} = \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\theta + \sigma_2^2 \sin^2\theta} \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2\theta + \sigma_2^2 \cos^2\theta}} \quad (4.7)$$

para $p=3$;

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}, \quad \rho_{13} = \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{33}}}, \quad \rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{33}}} \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned}\sigma'_{12} &= \sigma_1^2(\text{sen}\alpha\cos\alpha\cos^2\beta) - \sigma_2^2(\text{sen}\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma) \times \\ &\times (\cos\alpha\cos\gamma - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma) - \sigma_3^2(\text{sen}\alpha\text{sen}\gamma - \cos\alpha\text{sen}\beta\cos\gamma) \times \\ &\times (\cos\alpha\text{sen}\gamma + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\cos\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{13} &= \sigma_1^2(\cos\alpha\cos\beta\text{sen}\beta) - \sigma_2^2(\cos\beta\text{sen}\gamma)(\text{sen}\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma) + \\ &+ \sigma_3^2(\cos\beta\cos\gamma)(\text{sen}\alpha\text{sen}\gamma - \cos\alpha\text{sen}\beta\cos\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{23} &= \sigma_1^2(\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\cos\beta) + \sigma_2^2(\cos\beta\text{sen}\gamma)(\cos\alpha\cos\gamma - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma) - \\ &- \sigma_3^2(\cos\beta\cos\gamma)(\cos\alpha\text{sen}\gamma + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\cos\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_1^2(\cos\alpha\cos\beta)^2 + \sigma_2^2(\text{sen}\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma)^2 + \\ &+ \sigma_3^2(\text{sen}\alpha\text{sen}\gamma - \cos\alpha\text{sen}\beta\cos\gamma)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{22} &= \sigma_1^2(\text{sen}\alpha\cos\beta)^2 + \sigma_2^2(\cos\alpha\cos\gamma - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma)^2 + \\ &+ \sigma_3^2(\cos\alpha\text{sen}\gamma + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\cos\gamma)^2\end{aligned}$$

$$\sigma'_{33} = \sigma_1^2(\text{sen}\beta)^2 + \sigma_2^2(\cos\beta\text{sen}\gamma)^2 + \sigma_3^2(\cos\beta\cos\gamma)^2$$

com ρ_{ij} = correlação entre o i-ésimo e j-ésimo componente do vetor $\underline{z}$.

Os parâmetros de entrada nos programas 1 e 2 (apêndice II) são:

i) $n_1, n_2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$ (n_j = número de linhas na

j-ésima matriz de dados, ou seja, tamanho do j-ésimo grupo);

- ii) $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$, que são os elementos da matriz diagonal D. Se pelo menos um σ_r , $r = 1, 2, \dots, p$ for diferente de 1, estaremos perturbando as variâncias sob independência dos vetores $\underline{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n_j$;
- iii) θ^0 para $p=2$ e α^0 , β^0 e γ^0 para $p=3$, que são os ângulos que produzem rotações no plano e no espaço tridimensional, respectivamente, criando assim, correlações entre as variáveis;
- iv) a semente S, que inicializa a sequência de geração dos números aleatórios.

4.4. DUAS POPULAÇÕES DE DIMENSÃO 2

Com 10000 "*simulações de Monte Carlo*", gerando em cada "*rodada*" duas matrizes de dados normais bivariadas, com vetores de médias $\underline{\mu}_1$ e $\underline{\mu}_2$, respectivamente, e matriz de covariâncias comum Σ , teremos 10000 estatísticas (que já saem ordenadas após a execução do programa) da razão de verossimilhança.

As configurações usadas, no relaxamento da condição de homoscedasticidade, são apresentadas abaixo.

CONFIGURAÇÃO 1 - Perturbamos as variâncias sob independência de uma população e mantemos a outra com representação circular.

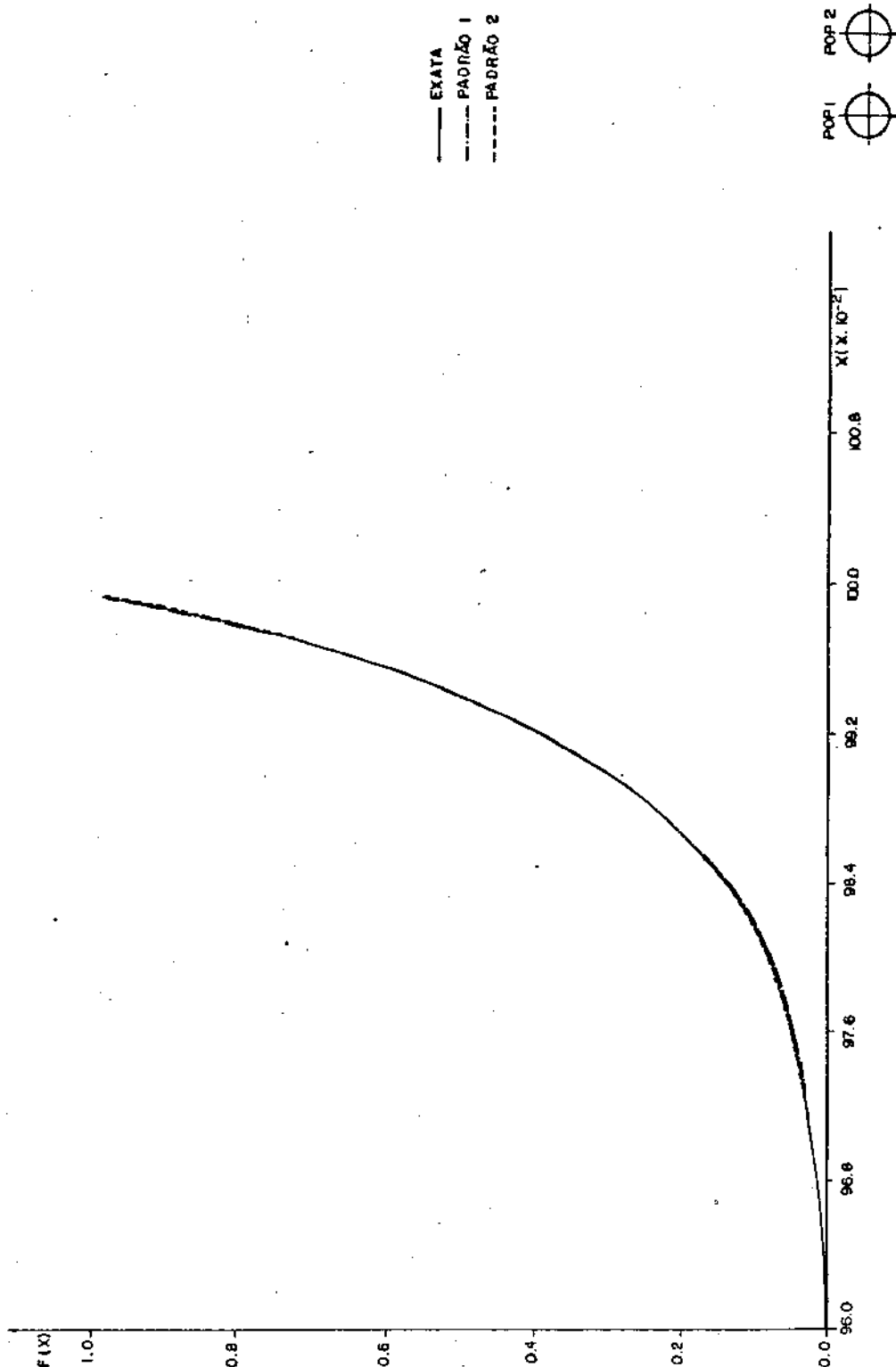
CONFIGURAÇÃO 2 - Perturbamos as variâncias sob independência das duas populações.

CONFIGURAÇÃO 3 - Criamos estruturas de correlações em uma população e mantemos a outra com representação circular.

CONFIGURAÇÃO 4 - Criamos estruturas de correlações nas duas populações.

A seguir, na figura 4.1, damos as curvas comparativas da distribuição exata da estatística da razão de verossimilhança e de duas distribuições empíricas da referida estatística na situação de igualdade de vetores de médias e igualdade das matrizes de covariâncias, mas especificamente, $\mu_1 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_2$, onde μ_j , $j = 1, 2$ é o vetor de médias da j -ésima população, Σ_j , $j = 1, 2$ é a matriz de covariâncias da j -ésima população e I_2 é a matriz identidade de ordem 2. Denominamos a situação $\mu_1 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_2$ de "padrão". No canto inferior direito da figura, a situação *padrão* é vista geometricamente.

FIGURA 4.1 - Função de Distribuição Exata da Razão de Verossimilhança Comparada com Duas Empíricas



Podemos notar, através da figura 4.1, que existe uma grande similaridade entre a distribuição exata e as empíricas, evidenciando a isenção de erros no programa.

4.4.1. QUADROS CORRESPONDENTES ÀS CONFIGURAÇÕES

Detalharemos, neste item, todas as configurações citadas no início da seção 4.4. Os quadros (páginas seguintes) 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 referentes às configurações 1, 2, 3 e 4, respectivamente, estão divididos em duas partes. Apresentamos, no lado esquerdo de cada quadro, os parâmetros de entrada: σ_1 , σ_2 e θ^0 da população 1 e σ_1 , σ_2 e θ^0 da população 2. Portanto, na execução 1 e população 1 (Quadro 4.1), temos $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0.5$ e $\theta^0 = 0^0$, também na execução 1, mas na população 2, temos $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ e $\theta^0 = 0^0$; isto nos diz que uma amostra foi retirada de uma população que teve as variâncias perturbadas sob independência e uma outra amostra foi retirada de uma população com representação circular. Notamos que, com $\theta^0 = 0^0$, R_θ não produz rotação. No lado direito de cada quadro, temos os percentuais de rejeição observados. Em outras palavras, sabendo que duas populações de dimensão 2 são geradas e este procedimento é repetido $N = 10000$ vezes (*10000 simulações de Monte Carlo*), teremos, após o teste, 10000 estatísticas da razão de verossimilhança. Se o nível de significância α suposto para o teste é 1% esperamos rejeitar 100 dos 10000 testes; se o suposto é 5% esperamos rejeitar 500. Podemos ver, na execução 1 (Quadro 4.1), que tivemos 104 rejeições em 10000 (1.04% de rejeição observado) quando o suposto era 1% e 503 rejeições (5.03 de rejeição observado) quando

o suposto era 5%. A análise destes resultados será feita no final desta seção.

Uma observação que vale a pena ser ressaltada diz respeito à *semente* (seção 4.2). Fixamos a *semente* em todas as execuções. Entende-se por *execução* a cada passo do relaxamento da condição de homoscedasticidade. Por conseguinte, quando simulamos a "*padrão*" ($\mu_1 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_2$) necessitamos de uma *semente* e esta *semente*, que é um parâmetro de entrada, foi usada em todas as *execuções* subsequentes.

Seria humanamente impossível esboçarmos todas as combinações que relaxam a condição de homoscedasticidade. Trabalhamos com algumas delas, de maneira que caracterizem de forma satisfatória o afastamento da igualdade das matrizes de covariâncias. Vamos aos quadros.

QUADRO 4.1 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 1

	POPULAÇÃO 1			POPULAÇÃO 2			Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq x$) / N	
	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
							com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$
EXECUÇÃO								
PADRÃO	1	1	0°	1	1	0°	1.10%	4.80%
1	2	0.5	0°	1	1	0°	1.04%	5.03%
2	4	0.5	0°	1	1	0°	1.06%	5.52%
3	8	0.05	0°	1	1	0°	0.97%	5.53%

OBS.: N = 10000

QUADRO 4.2 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 2

	POPULAÇÃO 1			POPULAÇÃO 2			Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq x$)/N	
	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
							com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$
EXECUÇÃO								
4	3	0.5	0°	0.5	3	0°	0.99%	5.54%
5	8	0.05	0°	0.05	8	0°	0.92%	5.61%

OBS.: N = 10000

QUADRO 4.3 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 3

	POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2				Razão de Verossimilhança # (A ≤ x)/N	
	σ ₁		σ ₂		σ ₁		σ ₂		PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
	EXECUÇÃO	θ°	θ°	θ°	θ°	θ°	θ°	θ°	com α = 0.01	com α = 0.05
6	3	0.05	15°	1	1	0°	1.11%	5.47%		
7	5	0.05	30°	1	1	0°	1.05%	5.54%		
8	8	2	45°	1	1	0°	1.14%	5.64%		

OBS.: N = 10000

QUADRO 4.4 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 4

	POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2		Razão de Verossimilhança # (Λ ≤ x) / N	
	σ ₁		σ ₂		θ ^o	θ ^o	PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
	EXECUÇÃO	3	0.5	15 ^o			com α = 0.01	com α = 0.05
9		3	0.5	15 ^o	0.5	3	1.05%	5.51%
10		4	0.05	30 ^o	2	6	1.07%	5.65%

OBS.: N = 10000

4.4.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para verificar se realmente o percentual de rejeição observado estava próximo do esperado, várias *padrões* (gerações sem violações das condições, isto é, $\mu_1 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = I_2$) com *sementes* diferentes foram simuladas. Confirmada a aproximação fixamos uma destas *sementes* e simulamos diversas situações tendo como base as configurações 1, 2, 3 e 4 descritas no início da seção 2.3. Estas situações estão detalhadas nos quadros 4.1 a 4.4.

Analisaremos a seguir os resultados referentes aos quadros 4.1 a 4.4, testando se a proporção populacional é igual a 0.01 nas colunas onde $\alpha = 0.01$ e se é igual a 0.05 nas colunas onde $\alpha = 0.05$, ou seja, feitas as perturbações, queremos avaliar afirmações sobre a proporção da população baseado na premissa de que a proporção amostral será igual à verdadeira proporção populacional, a menos da variabilidade amostral.

Sabendo-se que existe uma correspondência entre região de aceitação e intervalo de confiança e que o intervalo de confiança para a proporção populacional a um nível de confiança 95% é dado por

$$p' \pm z_{2.5\%} \sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{N}} \quad (4.9)$$

(estamos trabalhando com grandes amostras), onde p_o é o valor especificado em H_0 . Concluimos que:

- a) Não rejeitamos H_0 : proporção populacional = 0.01 a um nível de significância 0.05, em nenhuma das execuções de 1 a 10, o que nos indica uma quase inexistência de discrepância entre os resultados empíricos e o esperado.
- b) Não rejeitamos H_0 : proporção populacional = 0.05 a um nível de significância 0.05, apenas para a execução 1 e não rejeitamos H_0 : proporção populacional = 0.05 a um nível de significância 0.01 para as execuções 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 9. Portanto existe uma evidência de não robustez para o teste da razão de verossimilhança quando o afastamento da condição de igualdade das dispersões populacionais é bastante acentuado e o nível de significância suposto para testar igualdade de vetores de médias é 0.05.

Uma análise mais completa poderá ser feita posteriormente, baseada nos afastamentos ordenados da condição de homoscedasticidade para todas as configurações. Isto é, pretendemos estimar um ponto de ruptura que será um raio máximo permitido para as distâncias entre as dispersões populacionais de modo que os critérios ainda funcionem. Para isso, devemos trabalhar com uma métrica que calcule as distâncias entre conjuntos formados pelas matrizes de covariâncias.

Como uma análise preliminar, vamos considerar apenas os casos quando perturbamos as variâncias sob independência de uma população e mantemos a outra com representação circular e quando criamos estruturas de correlações em uma população e mantemos a outra com representação circular.

Nestes dois casos, uma das matrizes de covariâncias é a identidade e a outra está afastada da identidade. Vamos medir estes afastamentos (distâncias) e fazermos o gráfico da ordenação versus percentual de rejeição observado, pois, desta maneira, teremos o comportamento dos percentuais de rejeição observados quando nos afastamos gradualmente da condição de homoscedasticidade.

Sabendo-se que existe uma correspondência biunívoca entre $M(p)$ e o espaço euclidiano R^p , onde $M(p)$ é o conjunto das matrizes quadradas reais com p linhas, temos para $p=2$

$$M(2) \rightarrow R^4$$

$$M \rightarrow (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}).$$

Em particular, se $M = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos a correspondência

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (1, 0, 0, 1),$$

portanto, o afastamento entre a matriz identidade de ordem 2 e uma matriz $M_{(2 \times 2)}$ qualquer será dada por

$$\begin{aligned} d(I_2, M) &= d((1, 0, 0, 1), (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})) \\ &= \sqrt{(1-m_{11})^2 + m_{12}^2 + m_{21}^2 + (1-m_{22})^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ordenando as execuções 1, 2, 3 (Quadro 4.1) e as execuções 6, 7, 8 (Quadro 4.3) que são as que se enquadram nos dois casos que analisaremos, temos a seguinte correspondência entre

as execuções e a ordem induzida pelas distâncias

ORDEM : 1 2 3 4 5 6

EXECUÇÃO: 1 2 3 6 7 8

Os gráficos 4.1 e 4.2 (páginas seguintes) mostram o comportamento do percentual de rejeição observado quando afastamos gradualmente da condição de homoscedasticidade para $\alpha = 0.01$ e 0.05 , respectivamente.

GRÁFICO 4.1 - Comportamento do Percentual de Rejeição Observado Quando Afastamos Gradualmente da Condição de Homoscedasticidade ($\alpha = 0.01$)

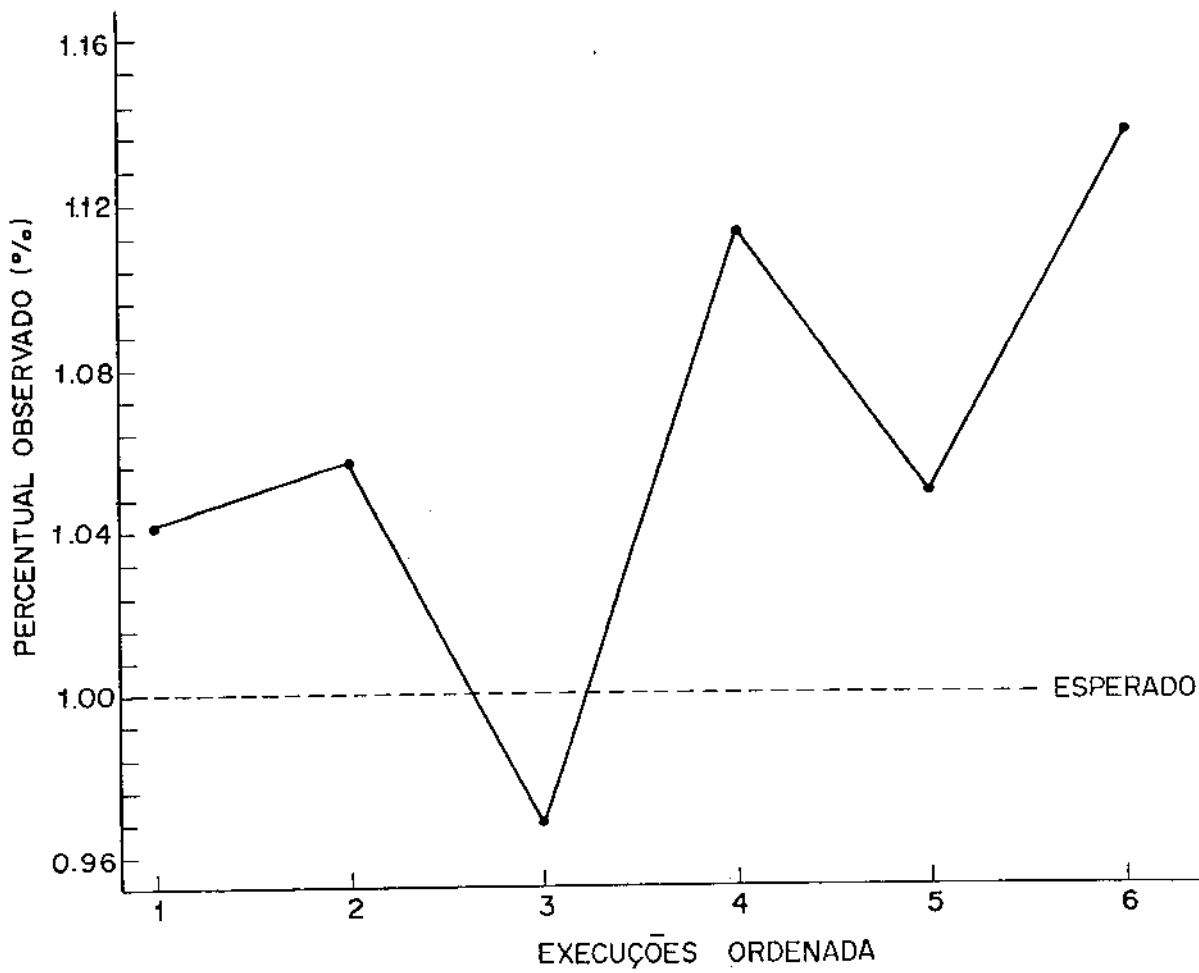
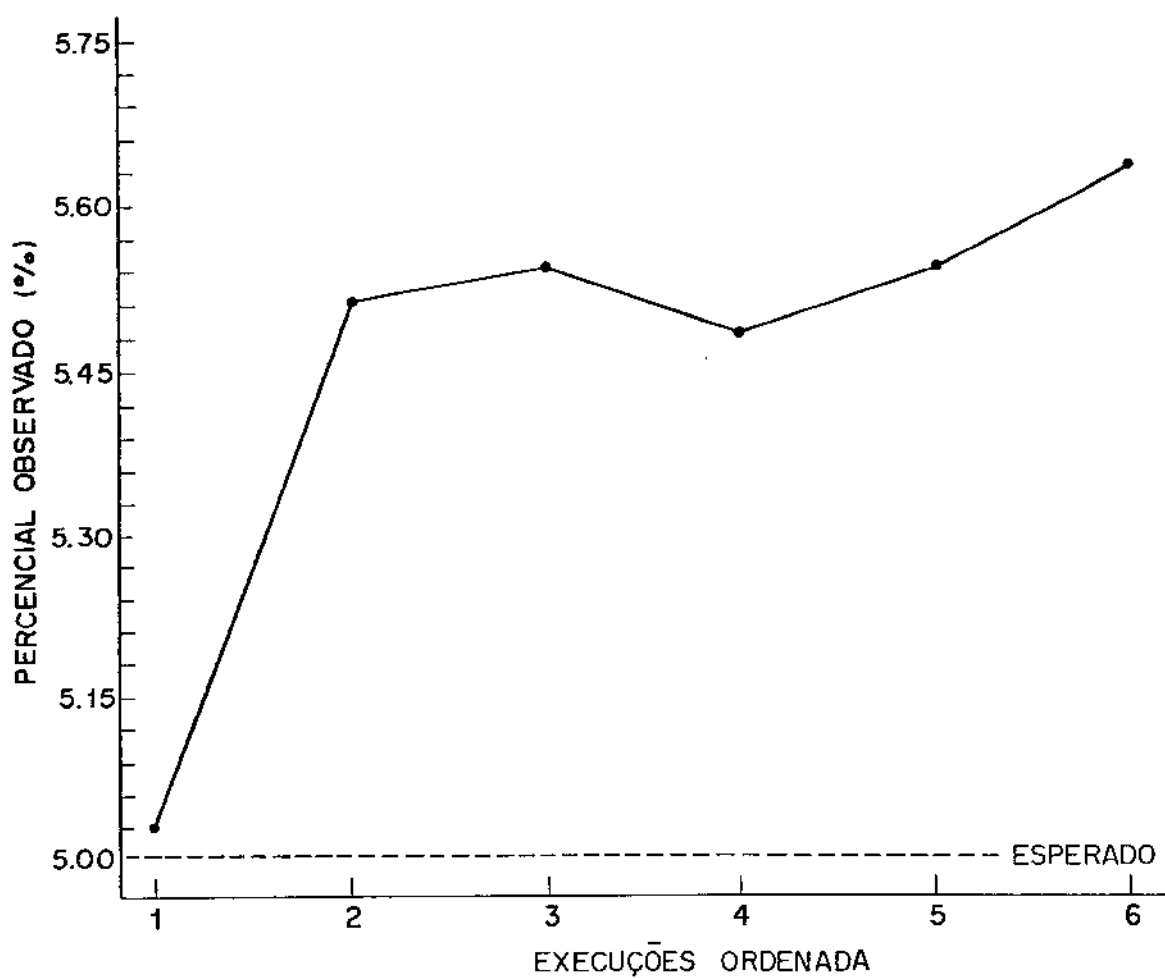


GRÁFICO 4.2 - Comportamento do Percentual de Rejeição Observado Quando Afastamos Gradualmente da Condição de Homoscedasticidade ($\alpha = 0.05$)



Podemos notar pelos gráficos 4.1 e 4.2 que quando nos afastamos gradualmente da condição de homoscedasticidade, a estatística *lambda de Wilks* se afasta moderadamente (afastamento positivo) do nível de significância α suposto igual a 0.05; enquanto que, a mesma estatística oscila crescentemente em torno do nível de significância α suposto igual a 0.01.

4.5. TRÊS POPULAÇÕES DE DIMENSÃO 2

Três matrizes de dados normais bivariadas com vetores de médias μ_1 , μ_2 e μ_3 , respectivamente, e matriz de covariâncias comum Σ são geradas 1000 vezes a cada *execução* (1000 *simulações de Monte Carlo*), onde $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\Sigma = I_2$ (= matriz identidade de dimensão 2).

Relaxaremos a condição de homoscedasticidade usando as seguintes configurações:

CONFIGURAÇÃO 1 - Perturbamos as variâncias sob independência de uma população e mantemos duas com representações circulares.

CONFIGURAÇÃO 2 - Perturbamos as variâncias sob independência de duas populações e mantemos uma com representação circular.

CONFIGURAÇÃO 3 - Perturbamos as variâncias sob independência das três populações.

CONFIGURAÇÃO 4 - Criamos estruturas de correlações em uma população e mantemos duas com representações circulares.

CONFIGURAÇÃO 5 - Mantemos a primeira população com representação

circular, perturbamos as variâncias sob independência da segunda e criamos estruturas de correlações na terceira população.

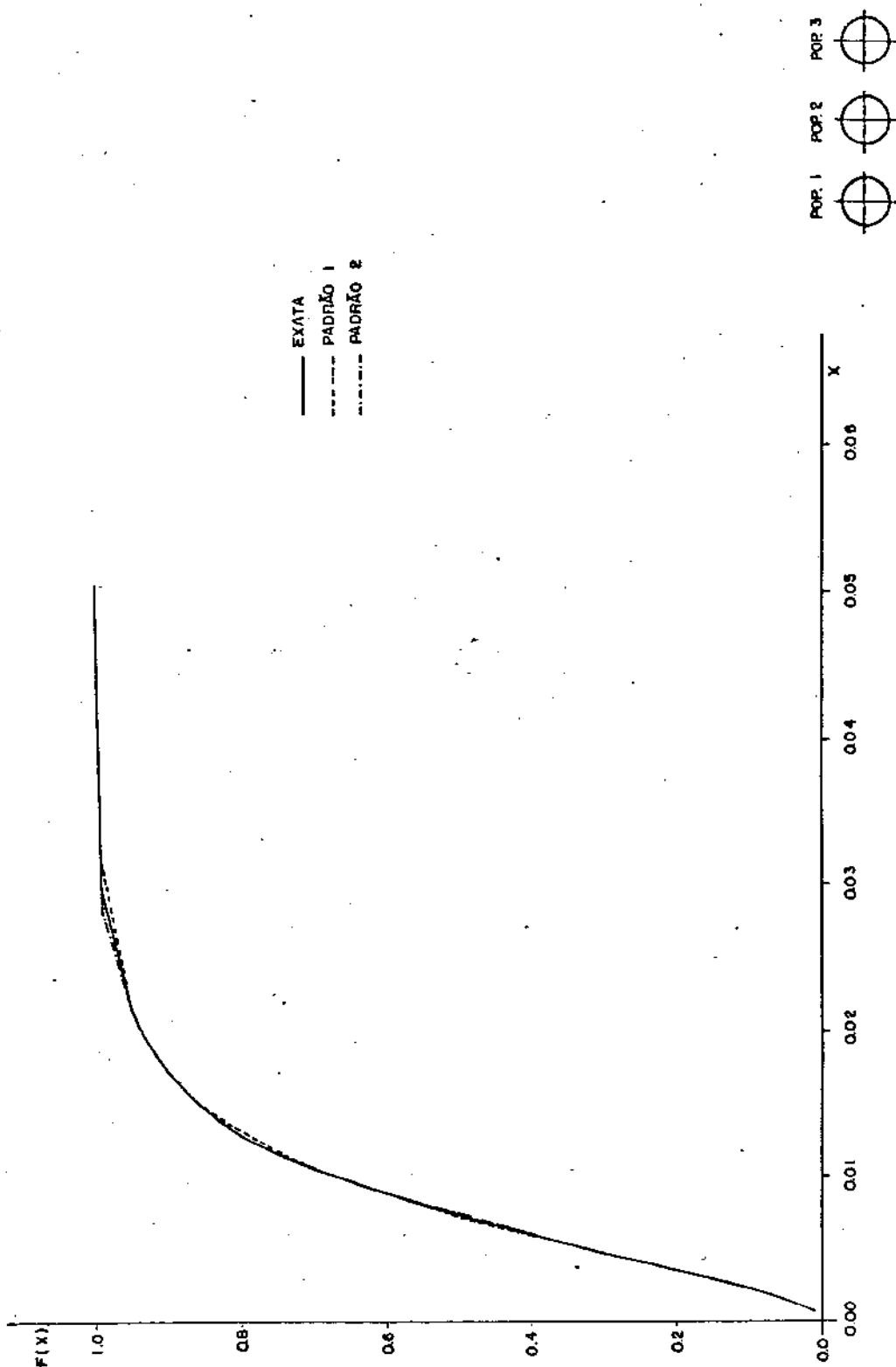
CONFIGURAÇÃO 6 - Mantemos a primeira população com representação circular e criamos estruturas de correlações positivas na segunda e estruturas de correlações negativa na terceira população.

CONFIGURAÇÃO 7 - Perturbamos as variâncias sob independência da primeira população e criamos estruturas de correlações nas outras duas.

CONFIGURAÇÃO 8 - Criamos estruturas de correlações nas três populações.

A figura 4.2 (página seguinte) mostra as curvas comparativas da distribuição exata e de duas distribuições empíricas da estatística do máximo autovalor. Todas na situação "padrão", isto é, $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{\Phi}_1 = \underline{\Phi}_2 = \underline{\Phi}_3 = I_2$. A descrição geométrica da situação *padrão* se encontra no canto inferior direito da figura.

FIGURA 4.2 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Duas Empíricas



Mais uma vez, através da figura 4.2, podemos notar o quão próximo as distribuições empíricas se encontram da exata, evidenciando assim, a inexistência de erros nas simulações.

Para três populações de dimensão 2, ao contrário de duas populações de dimensão 2, usamos *sementes* diferentes a cada *execução*, ou seja, a cada passo do afastamento da igualdade das matrizes de covariâncias, um ponto diferente de inicialização da sequência de geração dos números aleatórios foi usado. A justificativa desse procedimento é para confirmar se as variações causadas pelas gerações tinham ou não influências nos resultados.

4.5.1. QUADROS CORRESPONDENTES ÀS CONFIGURAÇÕES

Similarmente a 4.4.1, exprimiremos agora, detalhadamente, todas as quarenta e sete *execuções* ajustando-as nas configurações mencionadas. Novamente os quadros estão divididos em duas partes; no lado esquerdo os parâmetros de entrada e no lado direito os percentuais de rejeição observados para as duas estatísticas. No item 4.5.2, analisaremos os resultados obtidos nas simulações.

QUADRO 4.6 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 2

	POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2				POPULAÇÃO 3				Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$) / N		Razão de Verossimilhança # ($\lambda \leq y$) / N	
	σ_1 σ_2		θ^0		σ_1 σ_2		θ^0		σ_1 σ_2		θ^0		PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO			
													com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$		com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$	
EXECUÇÃO	σ_1	σ_2	θ^0		σ_1	σ_2	θ^0		σ_1	σ_2	θ^0					
9	1	1	0°		1.5	0.5	0°		.5	1.5	0°		1%	5.1%	1.3%	5.5%
10	1	1	0°		2	0.5	0°		.5	2	0°		1.1%	5.1%	1.2%	5.5%
11	1	1	0°		3	0.5	0°		.5	3	0°		1.8% **	4.9%	2.0% *	5.6%
12	1	1	0°		4	0.25	0°		.25	4	0°		1.9% *	6.3%	2.2% *	5.7%
13	1	1	0°		5	0.125	0°		.125	5	0°		1.8% *	5.8%	1.8% **	5.9%
14	1	1	0°		6	0.05	0°		.05	6	0°		2.1% *	7.1% *	2.3% *	7.9% *
15	1	1	0°		15	0.005	0°		.005	15	0°		2.6% *	8.6% *	3.0% *	8.7% *
16	1	1	0°		25	0.0005	0°		.0005	25	0°		3.3% *	7.7% *	3.4% *	8.0% *

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.7 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 3

		POPULAÇÃO 1		POPULAÇÃO 2		POPULAÇÃO 3		Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$)/N		Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq y$)/N	
EXECUÇÃO		σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	
		σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	
17		2	0.5	0°	3	0.5	0°	0.5	3	0°	
18		2	.5	0°	4	0.25	0°	0.25	4	0°	
19		2	.5	0°	5	0.125	0°	0.125	5	0°	
20		2	.5	0°	6	0.05	0°	0.05	6	0°	
21		2	.5	0°	15	0.005	0°	0.005	15	0°	
22		3	.5	0°	4	0.25	0°	0.25	4	0°	
23		3	.5	0°	5	0.125	0°	0.125	5	0°	
24		3	.5	0°	6	0.05	0°	0.05	6	0°	
25		3	2	0°	6	0.05	0°	.05	6	0°	
PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											
com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$											

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.9 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 5

POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2				POPULAÇÃO 3				Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$) / N	Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq y$) / N	
EXECUÇÃO		σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO			
		σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$	com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$
33		1	1	0°	2	0.5	0°	0.5	2	15°	1.3%		1.4%	5.3%
34		1	1	0°	2	0.5	0°	0.5	2	45°	1.6%		1.4%	5.5%
35		1	1	0°	4	0.25	0°	0.25	4	15°	2.0%*		1.8%**	7.3%*
36		1	1	0°	4	0.25	0°	0.25	4	45°	1.9%*		1.6%	7.7%*
37		1	1	0°	15	0.005	0°	0.005	15	60°	2.6%*		2.8%*	7.8%*

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.10 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 6

POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2				POPULAÇÃO 3				Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$)/N	Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq y$)/N			
EXECUÇÃO				σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO			
				σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$	com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$
38				1	1	0°	2	0.5	15°	0.5	2	15°	1.2%	5.3%	1.8% **	6.0%
39				1	1	0°	2	0.5	45°	0.5	2	45°	1.9% *	5.5%	2.2% *	6.5% **
40				1	1	0°	4	0.25	15°	0.25	4	15°	3.6% *	8.3% *	3.0% *	8.8% *
41				1	1	0°	4	0.25	45°	0.25	4	45°	2.7% *	7.6% *	3.0% *	7.8% *
42				1	1	0°	6	0.05	45°	0.05	6	45°	2.0% *	7.5% *	2.1% *	7.1% *
43				1	1	0°	15	0.005	45°	0.005	15	45°	2.7% *	8.7% *	3.3% *	8.9% *

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.11 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 7

	POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2				POPULAÇÃO 3				Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$)/N	Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq y$)/N
	σ_1		σ_2		σ_1		σ_2		σ_1		σ_2		PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	θ^0	com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$
EXECUÇÃO													com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$
44	0.05	6	0°	0°	6	0.5	45°	45°	0.05	6	45°	45°	2.0% *	7.4% *
45	0.005	15	0°	0°	15	0.005	45°	45°	0.005	15	45°	45°	2.6% *	6.9% *
													2.7% *	8.3% *
													2.8% *	8.0% *

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.12 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 8

	POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2				POPULAÇÃO 3				Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$) / N	Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq Y$) / N	
	σ_1		σ_2		θ^0	σ_1		σ_2		θ^0	σ_1		σ_2		θ^0
	4	0.25	15	15		6	0.05	30	30		0.005	15	60		
EXECUÇÃO															
46															
47															

OBS.: N = 1000

4.5.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Diversas situações *padrão* ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = I_2$) com *sementes* diferentes foram simuladas com o intuito de checarmos a existência de concordância entre os resultados empíricos e o esperado. No quadro 4.5 mostramos duas destas *padrões* denominadas de PADRÃO 1 e PADRÃO 2.

Na execução PADRÃO 1 (ver quadro 4.5), os percentuais de rejeição observados para o teste do máximo autovalor são 1% e 5.3% com os supostos iguais a 1% e 5%, respectivamente, e para o teste da razão de verossimilhança são 1.3% e 5.4% com os supostos iguais a 1% e 5%, respectivamente, e na execução PADRÃO 2 (ver quadro 4.5), os percentuais de rejeição observados para o teste do máximo autovalor são 1% e 4.6% e para o teste da razão de verossimilhança são 1% e 4.8%.

Claramente uma concordância muito próxima entre os resultados empíricos e os esperados ocorreu.

Vamos analisar, conjuntamente, os resultados empíricos do teste do máximo autovalor e razão de verossimilhança.

Feitos os testes para avaliar se a proporção populacional é igual a 0.01 e 0.05 baseado nos percentuais de rejeição observados nas colunas onde $\alpha = 0.01$ e $\alpha = 0.05$ (quadros 4.5 a 4.12), concluímos o seguinte:

- a) Rejeitamos H_0 : proporção populacional = 0.01 a um nível de significância 0.01 usando as proporções amostrais marcadas com "*" (ver quadros 4.5 a 4.12), além destes, rejeitamos, também, a um nível de significância igual a 0.05 os que estão marca

dos com "***" (ver quadros 4.5 a 4.12).

- b) Rejeitamos H_0 : proporção populacional = 0.05 ao nível 0.01 usando as proporções amostrais marcadas com "*" e rejeitamos, também, usando as proporções amostrais marcadas com "***" quando o teste é feito ao nível 0.05.

Podemos notar pelos quadros 4.5 a 4.12 que não existe uma grande diferença entre as duas estatísticas.

Observando apenas os resultados empíricos do teste do máximo autovalor, notamos que a grande maioria das rejeições das hipóteses H_0 : proporção populacional = 0.01 e H_0 : proporção populacional = 0.05 ocorreram quando os afastamentos da condição de homoscedasticidade eram acentuados. Não foi maioria, pois, nas execuções 7 e 8 (quadro 4.5), onde os afastamentos eram extremamente acentuados não rejeitamos. A variação casual devido à geração pode ser inteiramente responsável por isto.

Para fazermos uma análise preliminar através do comportamento empírico do teste do máximo autovalor, vamos considerar as execuções de 1 a 8 e as execuções de 26 a 32. As execuções de 1 a 8 são aquelas nas quais perturbamos as variâncias sob independência de uma população e mantemos duas com representações circulares e as execuções de 26 a 32 são as que criamos estruturas de correlações em uma população e mantemos duas com representações circulares.

A ordem induzida pelas distâncias nestes dois casos será:

ORDEM	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
EXECUÇÃO:		1	2	3	4	26	27	28	5	6	7	8	29	30	31	32

Os gráficos 4.3 e 4.4 (páginas seguintes) mostram o comportamento empírico do teste do máximo autovalor quando afastamos gradualmente da condição de homoscedasticidade para $\alpha = 0.01$ e 0.05 , respectivamente.

GRÁFICO 4.3 - Comportamento do Percentual de Rejeição Observado do Teste do Máximo Autovalor Quando Afastamos Gradualmente da Condição de Homoscedasticidade ($\alpha = 0.01$)

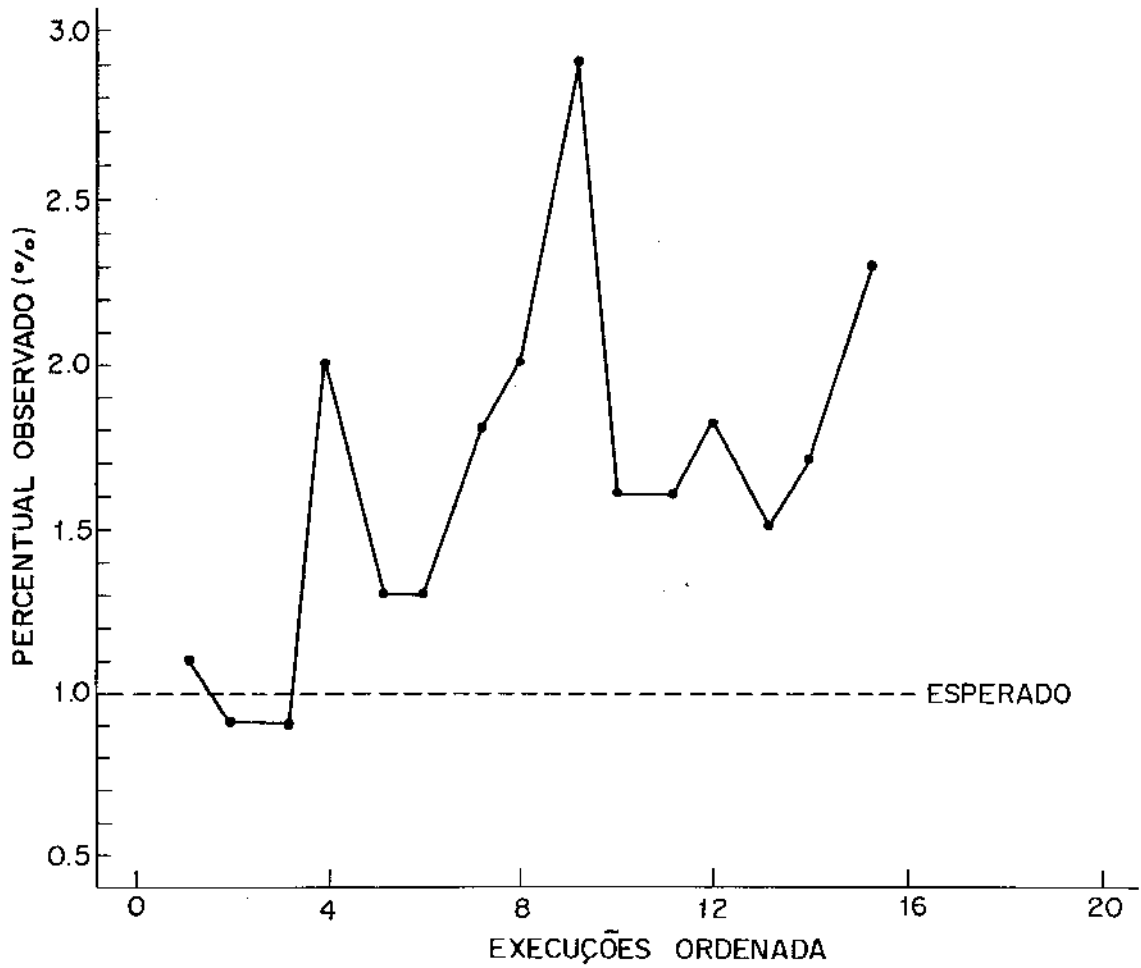
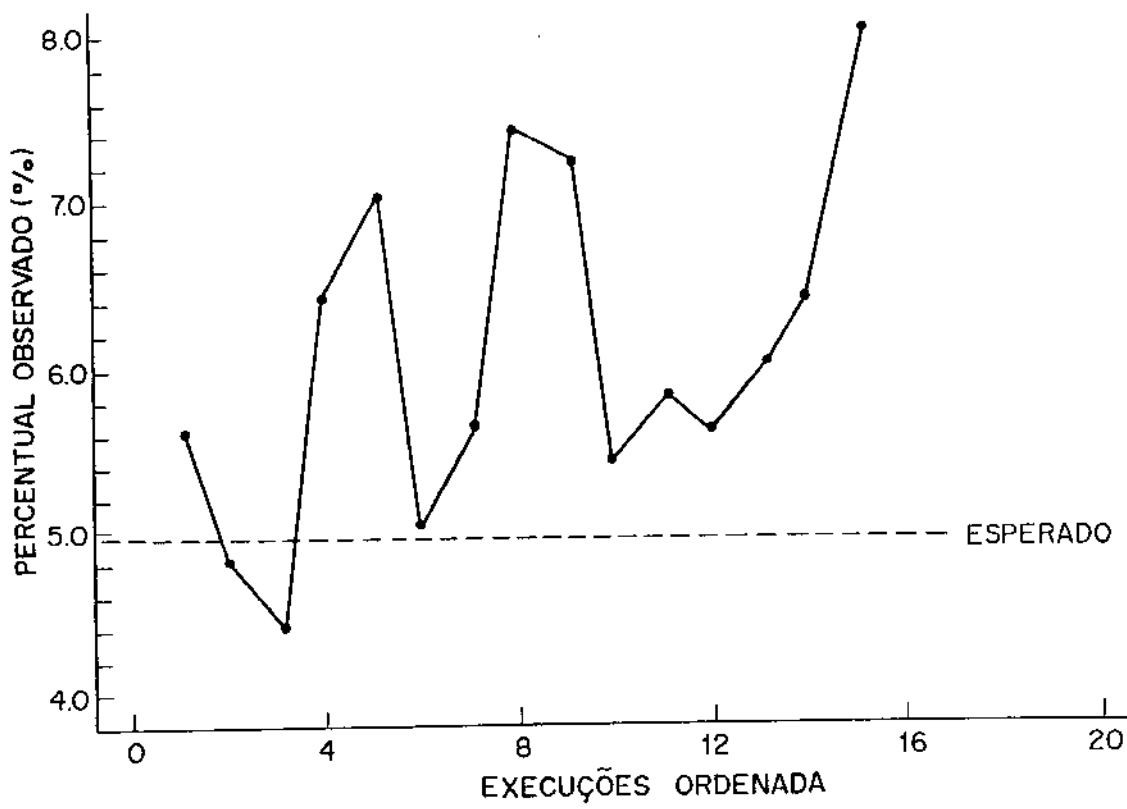


GRÁFICO 4.4 - Comportamento do Percentual de Rejeição Observado do Teste do Máximo Autovalor Quando Afastamos Gradualmente da Condição de Homoscedasticidade ($\alpha = 0.05$)



Observando os gráficos 4.3 e 4.4 notamos que os resultados empíricos do teste do máximo autovalor se afastam moderadamente (afastamento positivo) dos níveis de significância supostos iguais a 0.01 e 0.05, respectivamente.

Com as mesmas execuções (e mesma ordem) usadas para analisar o comportamento empírico do teste do máximo autovalor, analisaremos o comportamento do teste da razão de verossimilhança. Os gráficos 4.5 e 4.6 mostram esse comportamento para $\alpha = 0.01$ e 0.05, respectivamente.

GRÁFICO 4.5 - Comportamento do Percentual de Rejeição Observado do Teste da Razão de Verossimilhança Quando Afastamos Gradualmente da Condição de Homoscedasticidade ($\alpha = 0.01$)

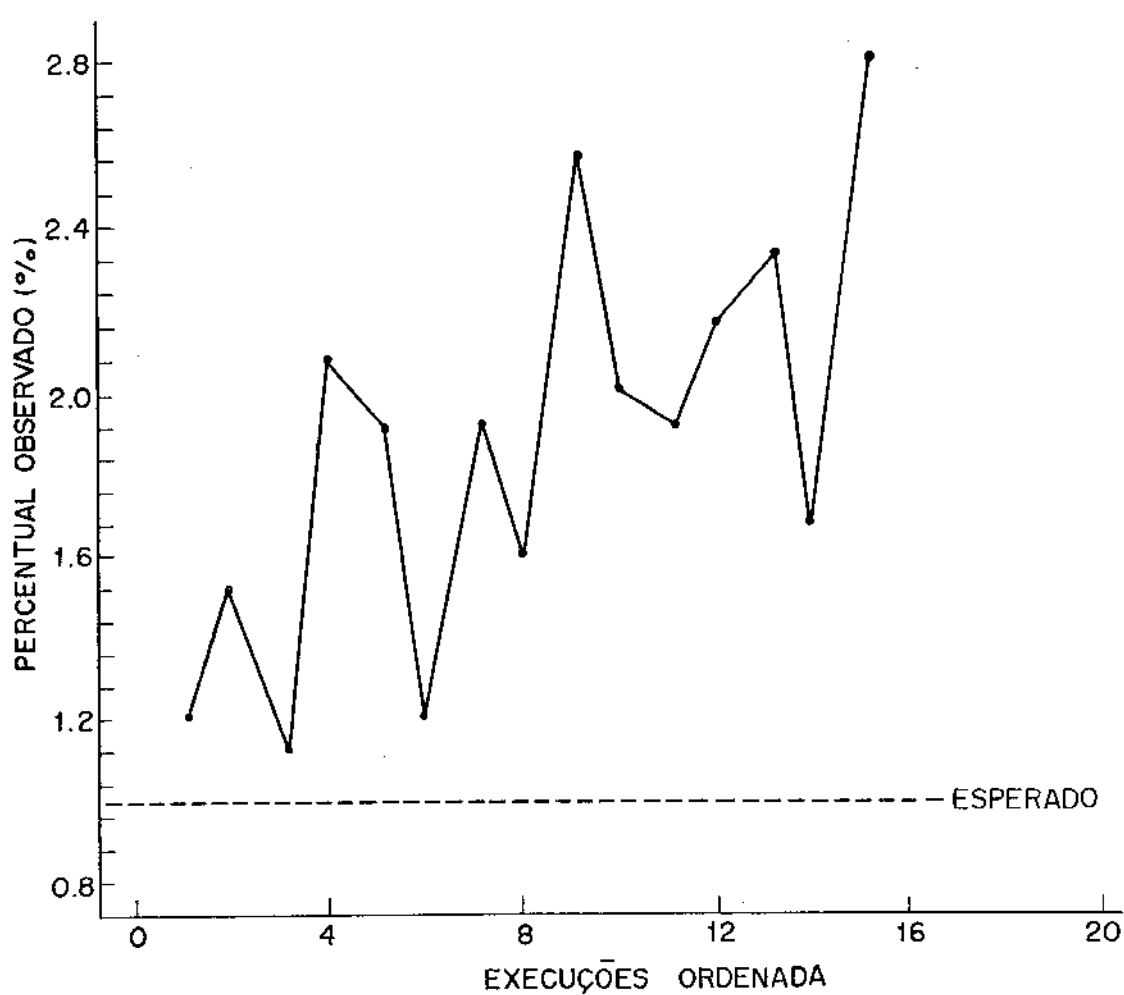
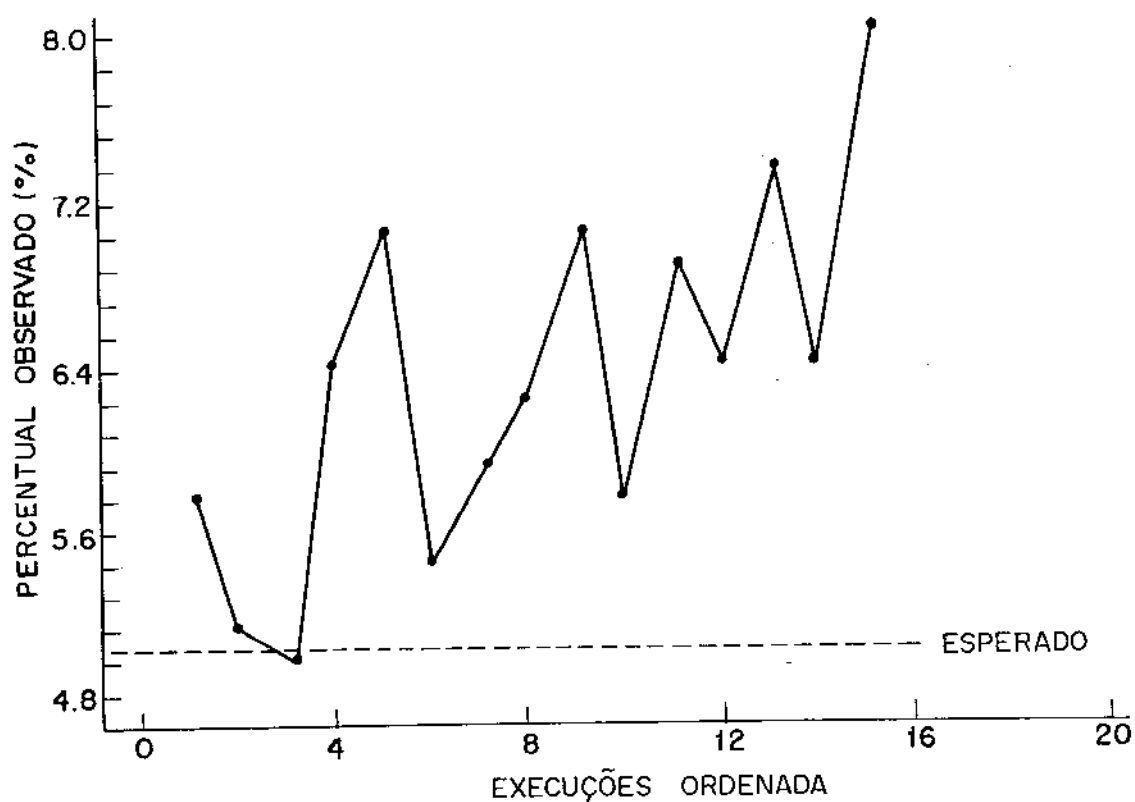


GRÁFICO 4.6 - Comportamento do Percentual de Rejeição Observado do Teste da Razão de Verossimilhança Quando Afastamos Gradualmente da Condição de Homoscedasticidade ($\alpha = 0.05$)



Está claro, pelos gráficos 4.5 e 4.6, que quanto mais nos afastamos da condição de homoscedasticidade, mais os resultados empíricos se afastam dos esperados.

4.6. QUATRO POPULAÇÕES DE DIMENSÃO 2

Para finalizar as simulações usando populações de dimensão 2, geramos quatro matrizes de dados normais bivariadas com vetores de médias μ_1 , μ_2 , μ_3 e μ_4 , respectivamente, e matriz de covariâncias comum Σ . Para cada *execução* este procedimento é repetido $N = 1000$ vezes.

Estudaremos a estabilidade dos critérios usando as seguintes configurações:

CONFIGURAÇÃO 1 - Mantemos duas populações com representações circulares e perturbamos as variâncias sob independência de duas populações.

CONFIGURAÇÃO 2 - Mantemos uma população com representação circular e perturbamos as variâncias sob independência de três populações.

CONFIGURAÇÃO 3 - Perturbamos as variâncias sob independência das quatro populações.

CONFIGURAÇÃO 4 - Mantemos duas populações com representações circulares e criamos estruturas de correlações nas outras duas.

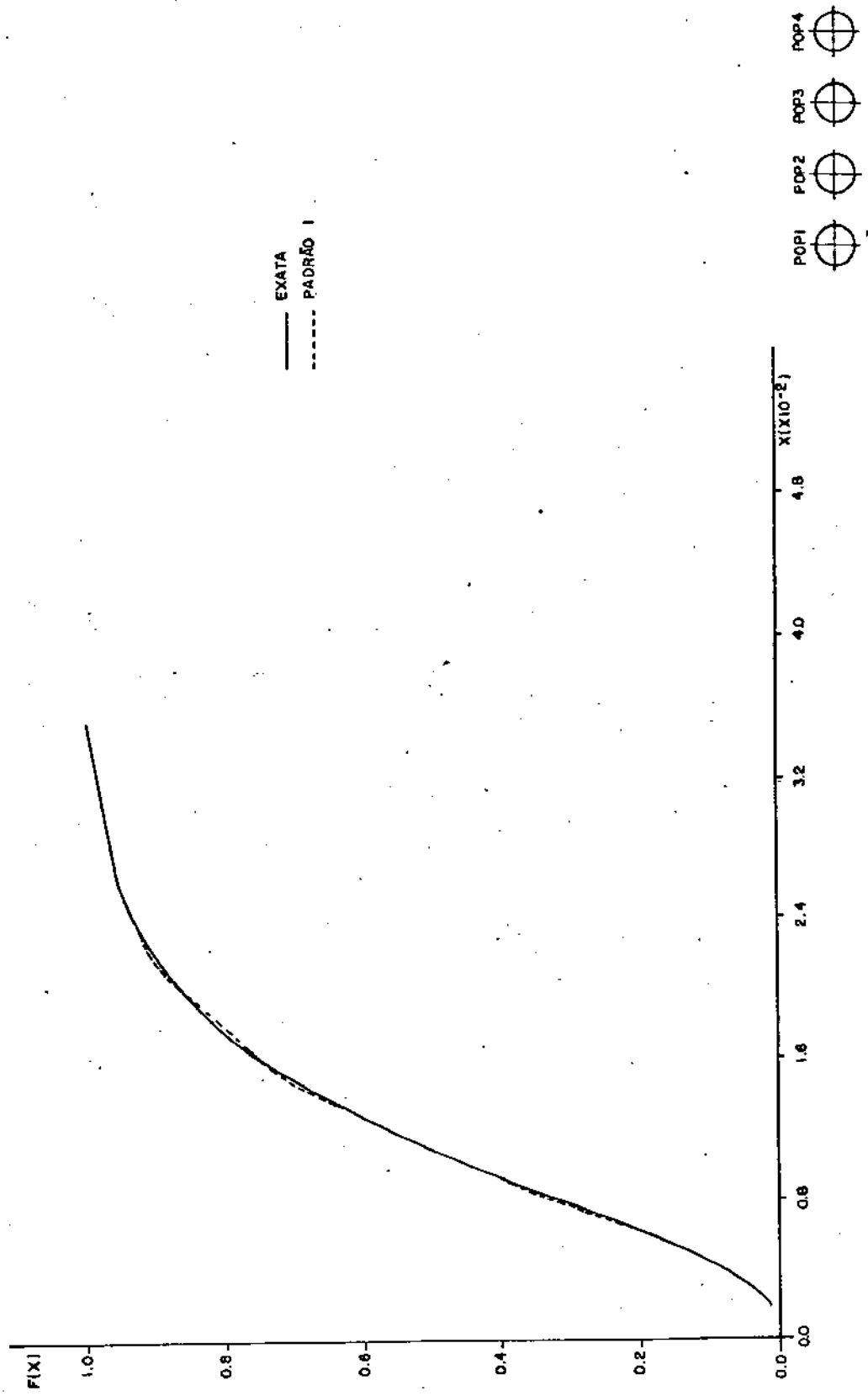
Outros tipos de configurações foram feitas, mas o com

portamento empírico foi muito semelhante ao encontrado nas configurações 1, 2, 3 e 4 e por este motivo não os citamos.

No caso de quatro populações de dimensão 2, mantivemos a semente fixa em todas as execuções.

A figura 4.3 mostra as curvas comparativas na situação padrão ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_4 = I_2$) da distribuição exata e de uma distribuição empírica da estatística do máximo autovalor. Pela figura, notamos uma grande aproximação entre as duas curvas.

FIGURA 4.3 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Uma Empírica



4.6.1. QUADROS CORRESPONDENTES ÀS CONFIGURAÇÕES

Similar a 4.4.1 e 4.5.1. No lado direito dos quadros temos os parâmetros de entrada e no lado esquerdo os percentuais de rejeição observados para as duas estatísticas.

QUADRO 4.14 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 2

	POPULAÇÃO 1						POPULAÇÃO 2						POPULAÇÃO 3						POPULAÇÃO 4						Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$) / N		Razão de Verossimilhança # ($\lambda \leq y$) / N	
	EXECUÇÃO	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$	com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$
7		1	1	0°	2	0.5	0°	1.5	0.5	0°	0.5	1.5	0°	1.5	0.5	0°	1.5	0.5	0°	5.9%	1.5%	5.9%	1.5%	5.9%	2.2%		2.2%	6.8%
8		1	1	0°	2	0.5	0°	2	0.5	0°	0.5	2	0°	0.5	2	0°	0.5	2	0°	5.8%	1.4%	5.8%	1.4%	5.8%	1.8%		1.8%	6.6%
9		1	1	0°	2	0.5	0°	3	0.5	0°	0.5	3	0°	0.5	3	0°	0.5	3	0°	7.0%	2.6%	7.0%	2.6%	7.0%	2.6%		2.6%	7.6%
10		1	1	0°	2	0.5	0°	4	0.25	0°	0.25	4	0°	0.25	4	0°	0.25	4	0°	8.9%	3.4%	8.9%	3.4%	8.9%	2.9%		2.9%	8.4%
11		1	1	0°	2	0.5	0°	6	0.05	0°	0.05	6	0°	0.05	6	0°	0.05	6	0°	9.9%	4.0%	9.9%	4.0%	9.9%	3.8%		3.8%	9.2%
12		1	1	0°	2	0.5	0°	15	0.005	0°	0.005	15	0°	0.005	15	0°	0.005	15	0°	10.7%	5.3%	10.7%	5.3%	10.7%	4.7%		4.7%	9.6%
13		1	1	0°	3	0.5	0°	4	0.25	0°	0.25	4	0°	0.25	4	0°	0.25	4	0°	7.3%	2.9%	7.3%	2.9%	7.3%	2.8%		2.8%	8.1%
14		1	1	0°	3	0.5	0°	6	0.05	0°	0.05	6	0°	0.05	6	0°	0.05	6	0°	9.5%	3.6%	9.5%	3.6%	9.5%	3.5%		3.5%	9.0%

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.15 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 3

EXECUÇÃO	POPULAÇÃO 1				POPULAÇÃO 2				POPULAÇÃO 3				POPULAÇÃO 4				Máximo Autovalor # ($\theta_{\max} \geq x$) / N	Razão de verossimilhança # ($\lambda \leq y$) / N
	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	σ_1	σ_2	θ^0	PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO		
																com $\alpha = 0.01$	com $\alpha = 0.05$	com $\alpha = 0.05$
15	1.5	0.5	0°	0.5	1.5	0°	2	0.5	0°	0.5	2	0°	1.5%	6.1%	1.2%	6.6%		
16	2	0.5	0°	0.5	2	0°	4	0.25	0°	0.25	4	0°	2.4%	9.0%	2.6%	9.0%		
17	3	0.5	0°	0.5	3	0°	6	0.05	0°	0.05	6	0°	2.9%	8.7%	2.9%	9.2%		
18	4	0.25	0°	0.25	4	0°	15	0.005	0°	0.005	15	0°	4.1%	10.6%	4.0%	9.9%		
19	3	2	0°	2	3	0°	3	0.5	0°	0.5	2	0°	2.2%	7.8%	1.7%	8.0%		
20	3	2	0°	2	3	0°	3	0.5	0°	0.5	3	0°	1.0%	6.4%	1.1%	6.1%		
21	3	2	0°	2	3	0°	6	0.05	0°	0.05	6	0°	1.8%	8.0%	1.9%	8.2%		
22	4	3	0°	3	4	0°	15	0.005	0°	0.005	15	0°	4.0%	9.1%	4.1%	9.5%		

OBS.: N = 1000

4.6.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Podemos notar pelos quadros 4.13 a 4.16 que não existe uma grande diferença entre as estatísticas máximo autovalor e razão de verossimilhança. Podemos notar também que os afastamentos dos níveis de significância supostos para as duas estatísticas são considerados moderados quando o afastamento da condição de homoscedasticidade é pequeno e são considerados grandes quando as violações de covariâncias homogêneas são de moderadas a grandes.

4.7. TRÊS POPULAÇÕES DE DIMENSÃO 3

Três matrizes de dados normais multivariadas de dimensão 3 são geradas 1000 vezes a cada execução.

As configurações adotadas no relaxamento da condição de homoscedasticidade são:

CONFIGURAÇÃO 1 - Mantemos duas populações esféricas e perturbamos as variâncias sob independência da terceira.

CONFIGURAÇÃO 2 - Mantemos uma população esférica e perturbamos as variâncias sob independência das outras duas.

CONFIGURAÇÃO 3 - Perturbamos as variâncias sob independência das três populações.

CONFIGURAÇÃO 4 - Mantemos duas populações esféricas e criamos estruturas de correlações na terceira população.

CONFIGURAÇÃO 5 - Criamos estruturas de correlações na primeira população, perturbamos as variâncias sob independência da segunda e mantemos a terceira população esférica.

CONFIGURAÇÃO 6 - Mantemos uma população esférica e criamos estruturas de correlações nas outras duas.

CONFIGURAÇÃO 7 - Criamos estruturas de correlações nas três populações.

Neste caso, também, fixamos a *semente* em todas as execuções.

4.7.1. QUADROS CORRESPONDENTES ÀS CONFIGURAÇÕES

Similar aos quadros das seções 4.4.1, 4.5.1 e 4.6.1, exceto que agora temos três ângulos de rotações em lugar de um, pois estamos trabalhando com $p=3$.

QUADRO 4.17 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 1

	POPULAÇÃO 1										POPULAÇÃO 2										POPULAÇÃO 3										Razão de Verossimilhança # (Λ ≤ x) / N	
																															PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
																															com α = 0.01	
																															com α = 0.05	
EXECUÇÃO	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰								
PADRÃO 1	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	5.0%							
1	2	1.5	0.5	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	4.6%							
2	4	1.5	0.5	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	5.6%							
3	6	1.5	0.5	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	5.9%							

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.18 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 2

EXECUÇÃO	POPULAÇÃO 1							POPULAÇÃO 2							POPULAÇÃO 3							Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq x$) / N	
	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO			com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$	
4	2	1.5	0.5	0°	0°	0°	0.5	1.5	2	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°				1.7% **	5.6%
5	4	1.5	0.5	0°	0°	0°	0.5	1.5	4	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°				1.7% **	6.4% **
6	6	1.5	0.5	0°	0°	0°	0.5	1.5	6	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°				1.9% *	6.4% **

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.20 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 4

	POPULAÇÃO 1										POPULAÇÃO 2										POPULAÇÃO 3										Razão de Verossimilhança H ($\lambda \leq x$)/N	
																															PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
																															com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$	
EXECUÇÃO	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0								
11	2	1.5	0.5	15°	15°	15°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1.2%	5.5%						
12	4	1.5	0.5	15°	15°	15°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1.8% **	6.2%						
13	6	1.5	0.05	15°	15°	15°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1.9% *	6.0%						
14	6	3	0.05	30°	30°	30°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	2.2% *	7.1% *						

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.21 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 5

		POPULAÇÃO 1										POPULAÇÃO 2										POPULAÇÃO 3										Razão de Verossimilhança			
																																# (A ≤ x) / N			
																																PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO			
																																com α = 0.01		com α = 0.05	
EXECUÇÃO	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰	σ ₁	σ ₂	σ ₃	α ⁰	β ⁰	γ ⁰											
15	2	1.5	0.5	15°	15°	15°	0.5	1.5	2	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1.6%	4.9%									
16	4	1.5	0.5	15°	30°	30°	0.5	1.5	4	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1.9% *	6.2%									
17	6	1.5	0.5	30°	30°	30°	0.5	1.5	6	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1.9% *	6.5% **									
18	8	3	0.05	45°	45°	45°	0.05	3	8	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	1	1	1	0°	0°	0°	2.3% *	5.3%									

OBS.: N = 1000

QUADRO 4.23 - Percentual de Rejeição Observado Referente à Configuração 7

		POPULAÇÃO 1										POPULAÇÃO 2										POPULAÇÃO 3										Razão de Verossimilhança # ($\Lambda \leq x$) / N	
																																PERCENTUAL DE REJEIÇÃO OBSERVADO	
																																com $\alpha = 0.01$ com $\alpha = 0.05$	
EXECUÇÃO	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0	σ_1	σ_2	σ_3	α^0	β^0	γ^0									
23	3	2	1	15°	0°	0°	0.5	1.5	2	0°	15°	0°	2	1.5	0.5	0°	0°	15°	2	1.5	0.5	0°	0°	15°	1.4%	5.4%							
24	3	2	1	30°	15°	0°	0.5	1.5	4	0°	15°	30°	2	1.5	0.5	15°	0°	30°	2	1.5	0.5	15°	0°	30°	1.6%	6.1%							
25	5	3	2	60°	45°	30°	0.5	1.5	6	30°	45°	60°	6	1.5	0.5	30°	30°	30°	6	1.5	0.5	30°	30°	30°	1.4%	6.5% **							
26	5	3	2	30°	45°	60°	0.05	2	6	30°	45°	60°	6	3	0.05	45°	45°	45°	6	3	0.05	45°	45°	45°	2.1% *	6.3%							

OBS.: N = 1000

4.7.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Várias situações *padrão* ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = I_3$) foram simuladas com *sementes* diferentes para verificarmos se os percentuais observados estavam próximos dos esperados. As aproximações ocorreram.

Uma destas situações *padrão*, que denominamos de *execução* PADRÃO 1, está no quadro 4.17.

Feitos os testes para avaliar se a proporção populacional é igual a α (com $\alpha = 0.01$ e 0.05) baseados nas proporções observadas nas amostras (em cada *execução*), concluímos:

- a) Rejeitamos H_0 : proporção populacional = 0.01 a um nível de significância 0.01, usando as proporções observadas marcadas com "*" e rejeitamos, também, a um nível 0.05 os que estão marcados com "***" (ver quadros 4.17 a 4.23).
- b) Rejeitamos H_0 : proporção populacional = 0.05 a um nível de significância 0.01, usando as proporções observadas marcadas com "*" e rejeitamos, também, a um nível 0.05 os que estão marcados com "***" (ver quadros 4.17 a 4.23).

É muito difícil compararmos os resultados dos quadros 4.17 a 4.23 (três populações de dimensão 3) com os resultados dos quadros 4.5 a 4.12 (três populações de dimensão 2), pois não temos uma homogeneidade nas perturbações. Algumas simulações esporádicas foram feitas mantendo esta homogeneidade e verificamos que o aumento da dimensionalidade ocasiona aumento do afastamento dos níveis de significância suposto no teste da razão de ve

rossimilhança.

4.8. CONCLUSÃO GERAL

Em nenhum momento afirmamos taxativamente, neste capítulo, a robustez ou não dos testes. Portanto, uma pergunta que certamente o leitor deve estar fazendo é a seguinte:

"Os testes são ou não robustos quanto à heteroscedasticidade?"

Esta é uma pergunta que deve ser respondida levando em consideração quatro fatores:

1. Em todos os quatro casos que estudamos, existe um aumento significativo no número de rejeições quando os afastamentos da igualdade de dispersões populacionais vão de moderados a acentuados.
2. O número de rejeições aumenta quando o número de populações, com matrizes de covariâncias diferentes, aumentam.
3. O número de rejeições aumenta quando a dimensão p aumenta.
4. Os testes funcionam muito bem para pequenos afastamentos da condição de homoscedasticidade. Tipo execução 1 e 2 (quadro 4.1).

Assim, respondendo à pergunta, podemos dizer que os testes razão de verossimilhança e máximo autovalor, quando trabalhamos com grandes amostras e distribuições exatas, são não robustos quanto à heteroscedasticidade, mas que podem ser usados sem receios se tomadas as devidas precauções.

APÊNDICE I

ALGUMAS CURVAS COMPARATIVAS ENTRE DISTRIBUIÇÃO EXATA E
EMPÍRICAS COM PERTURBAÇÕES

FIGURA A1 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Três Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.5)

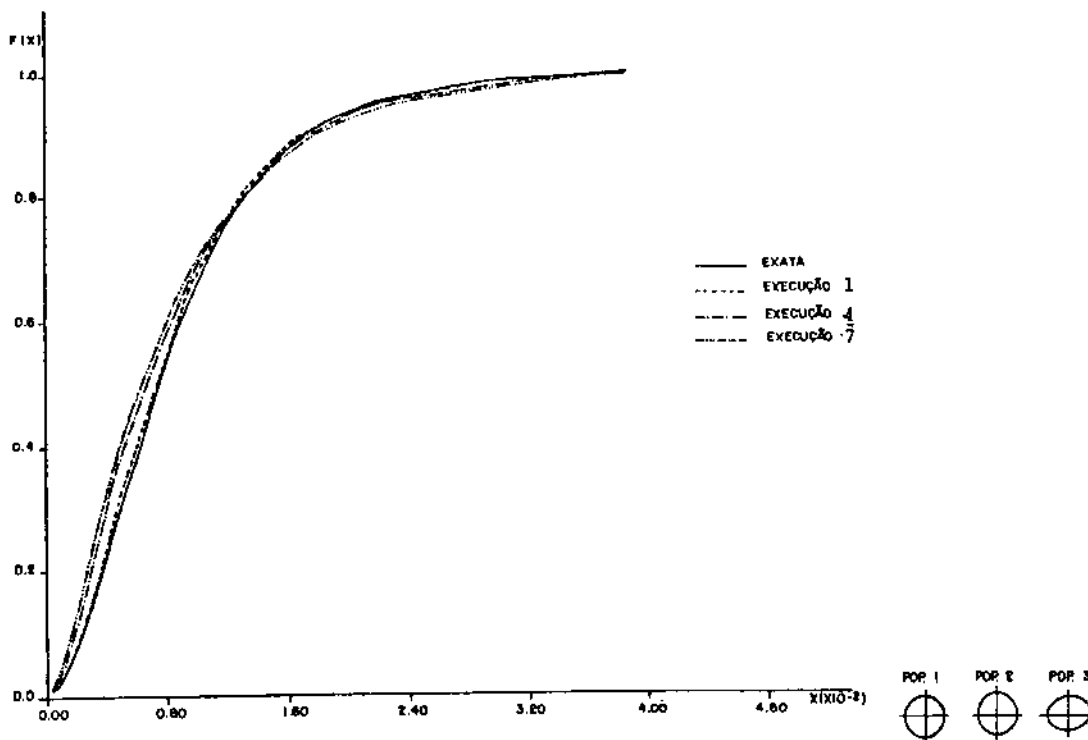


FIGURA A2 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Quatro Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.6)

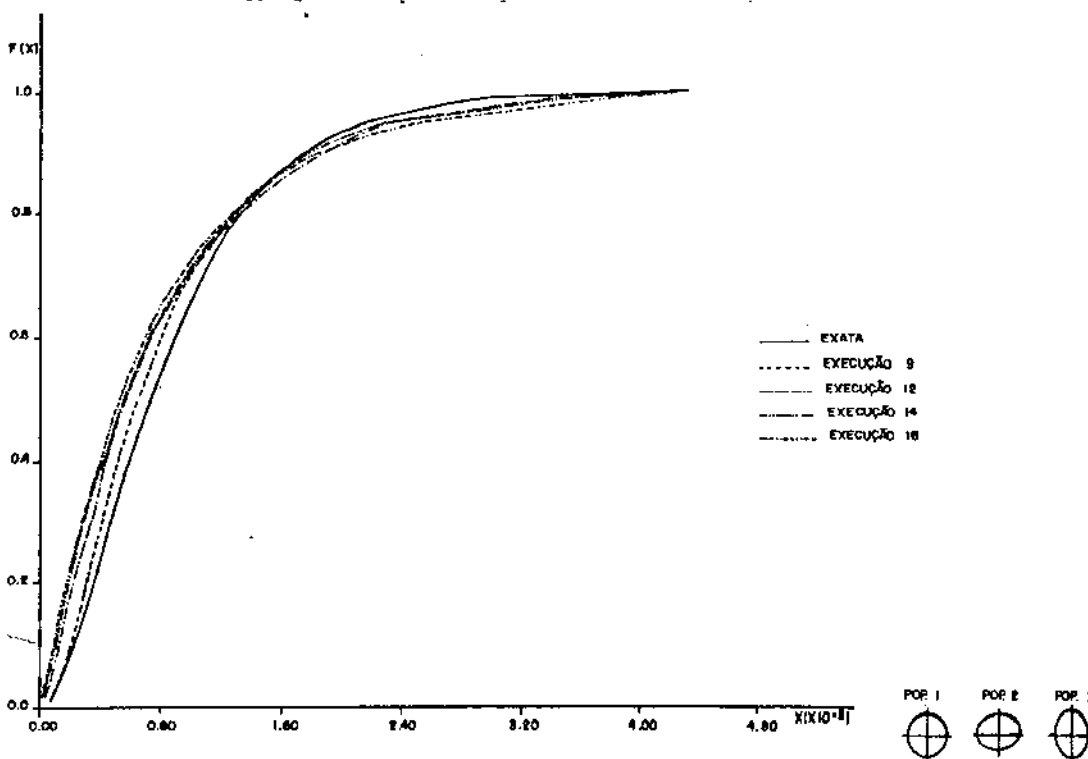


FIGURA A3 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Quatro Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.7)

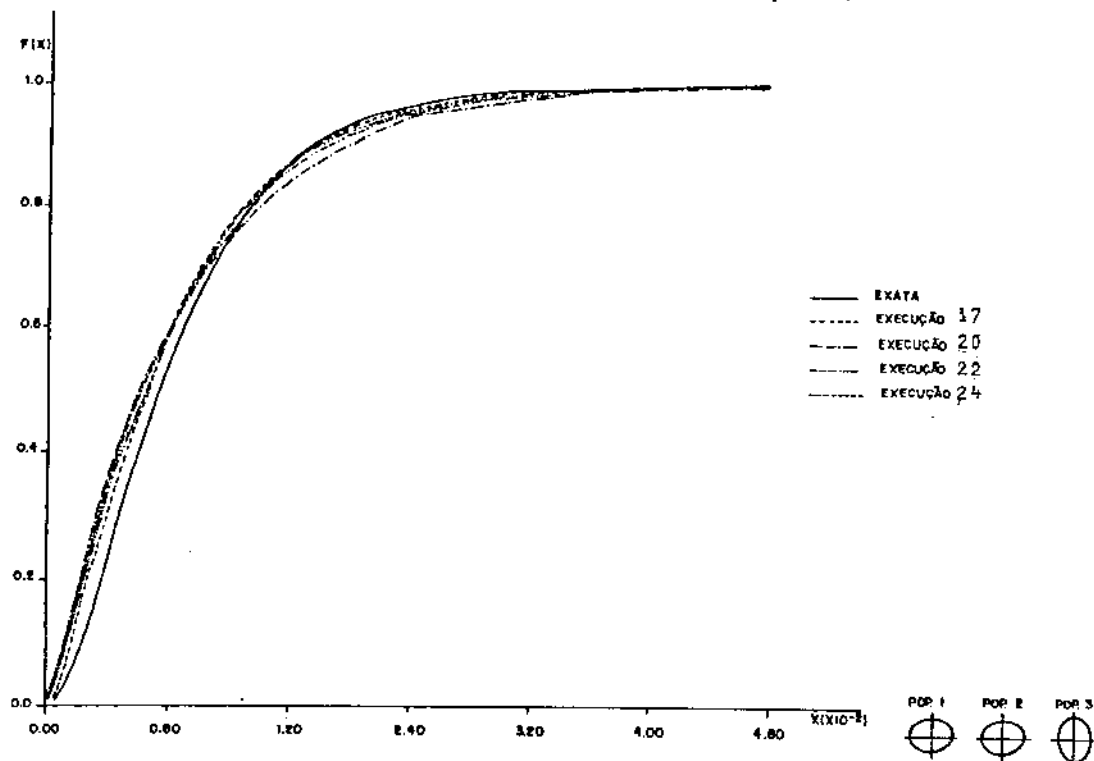


FIGURA A4 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Três Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.8)

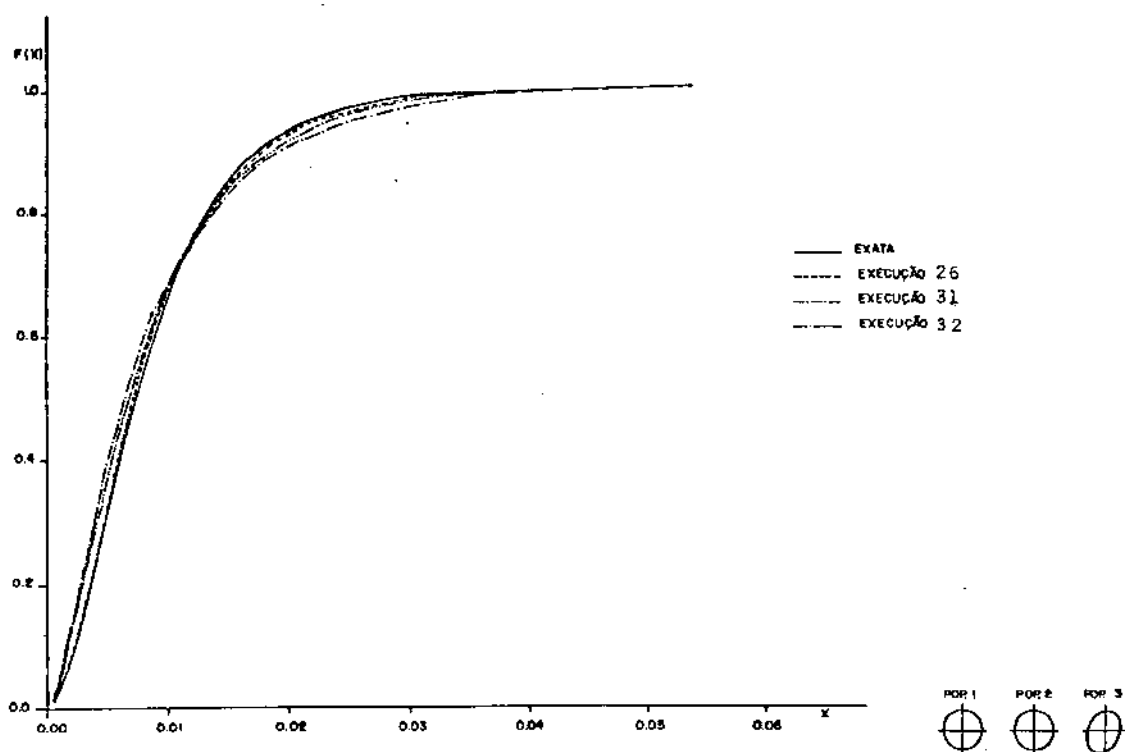


FIGURA A5 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Três Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.9)

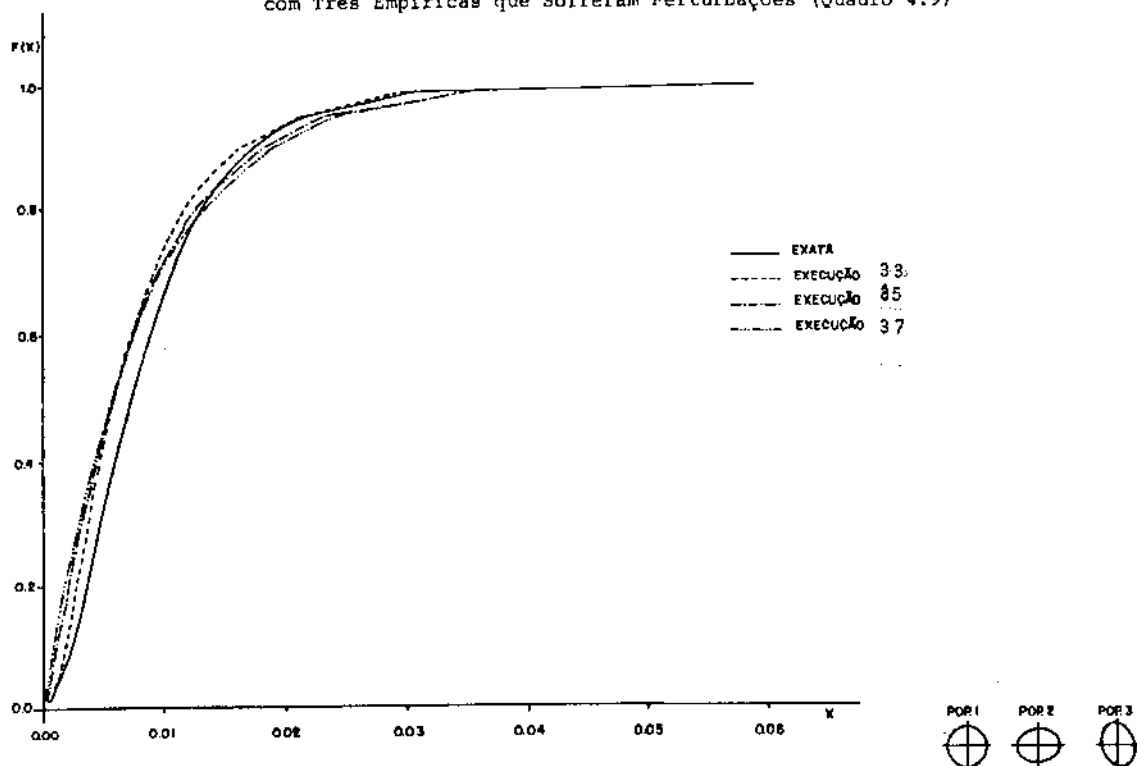


FIGURA A6 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Três Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.10)

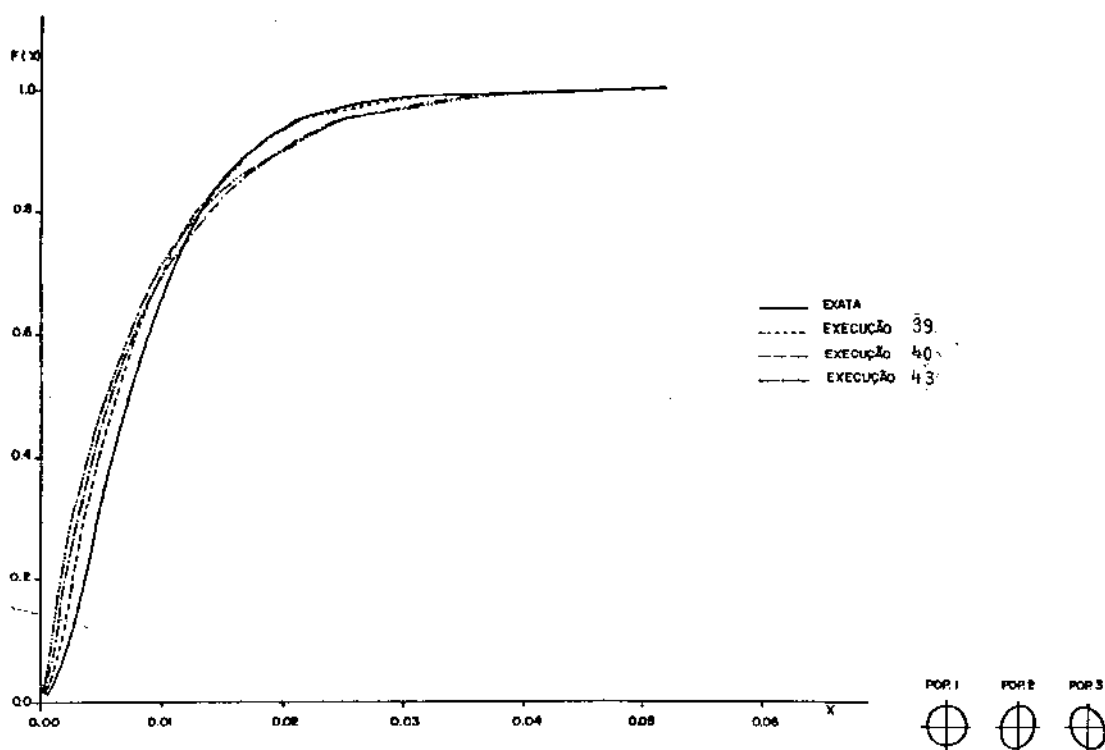


FIGURA A7 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Duas Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.11)

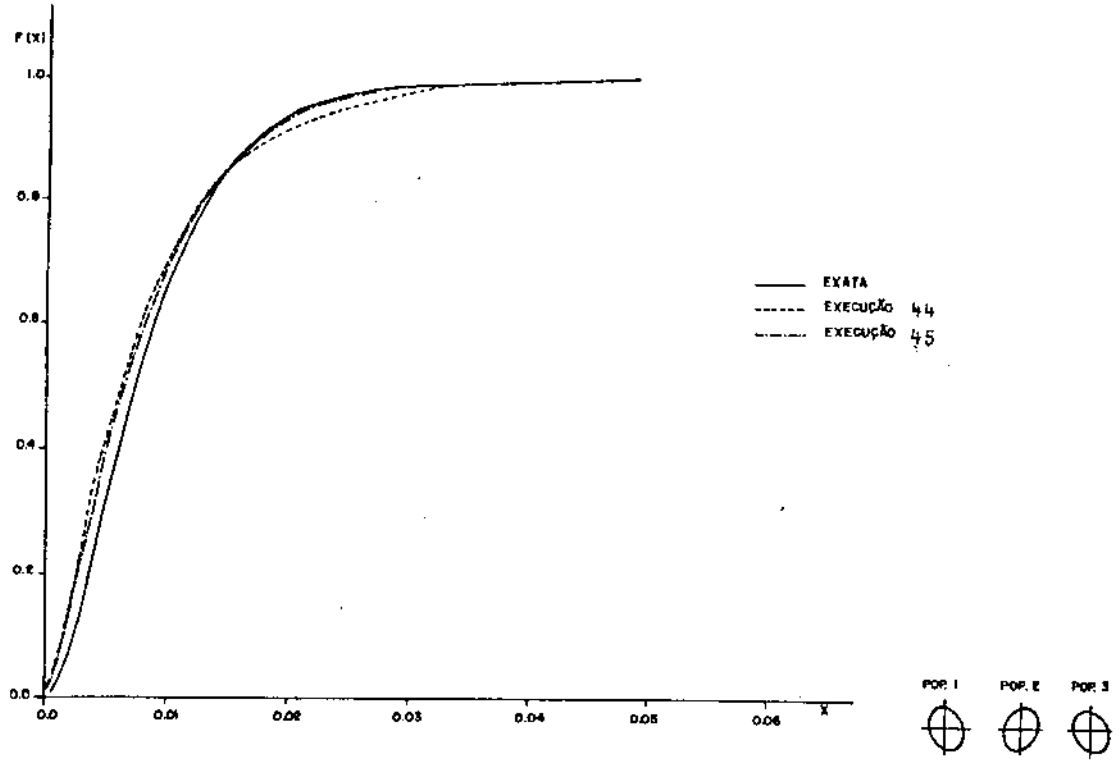


FIGURA A8 - Função de Distribuição Exata da Razão de Verossimilhança Comparada com Três Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.6)

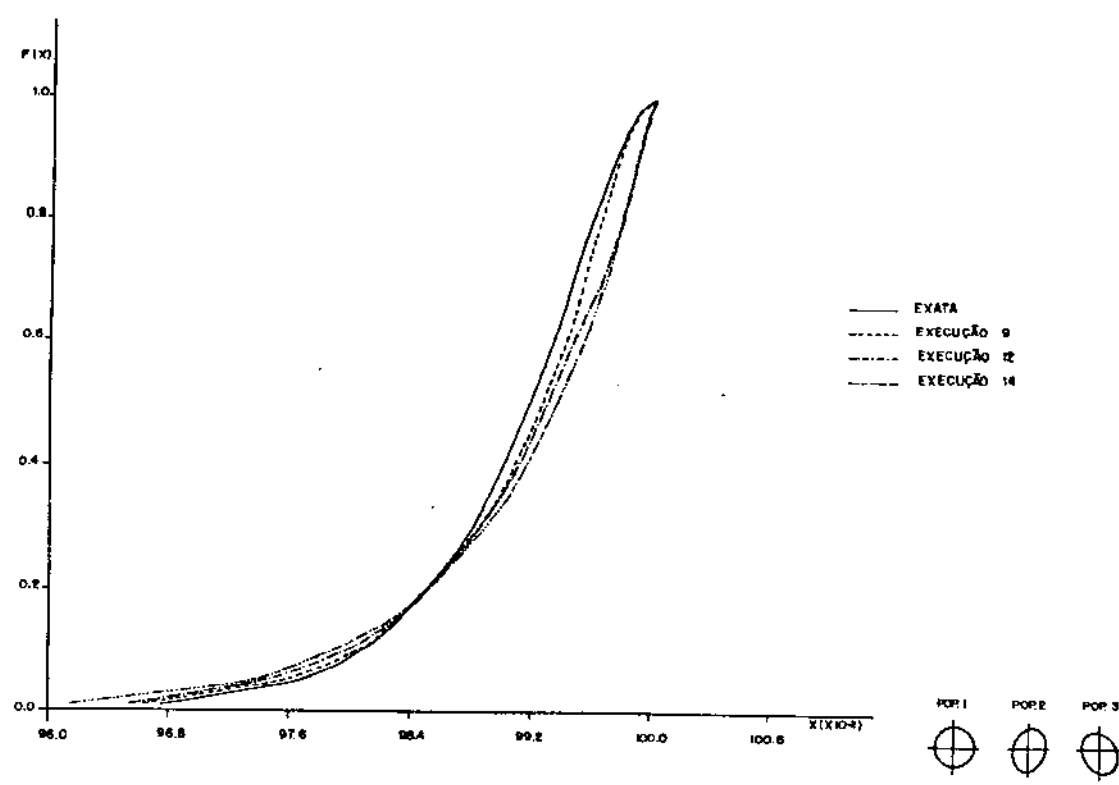


FIGURA A9 - Função de Distribuição Exata da Razão de Verossimilhança Comparada com Duas Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.9)

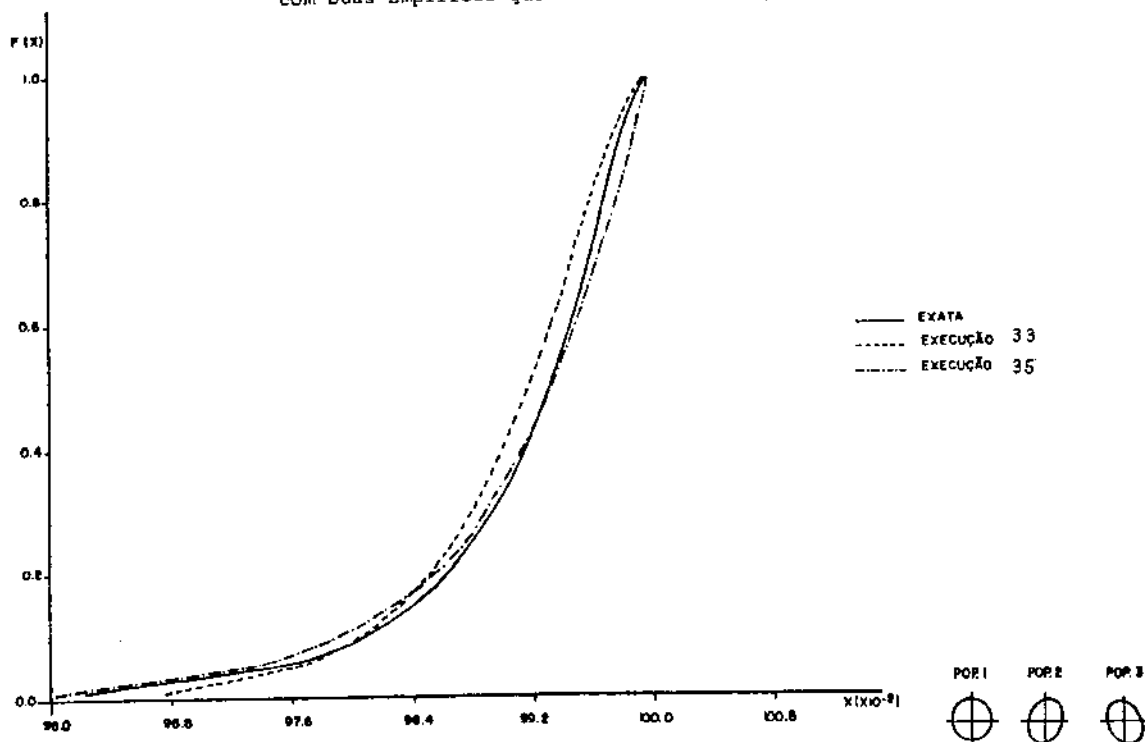


FIGURA A10 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com Três Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.15)

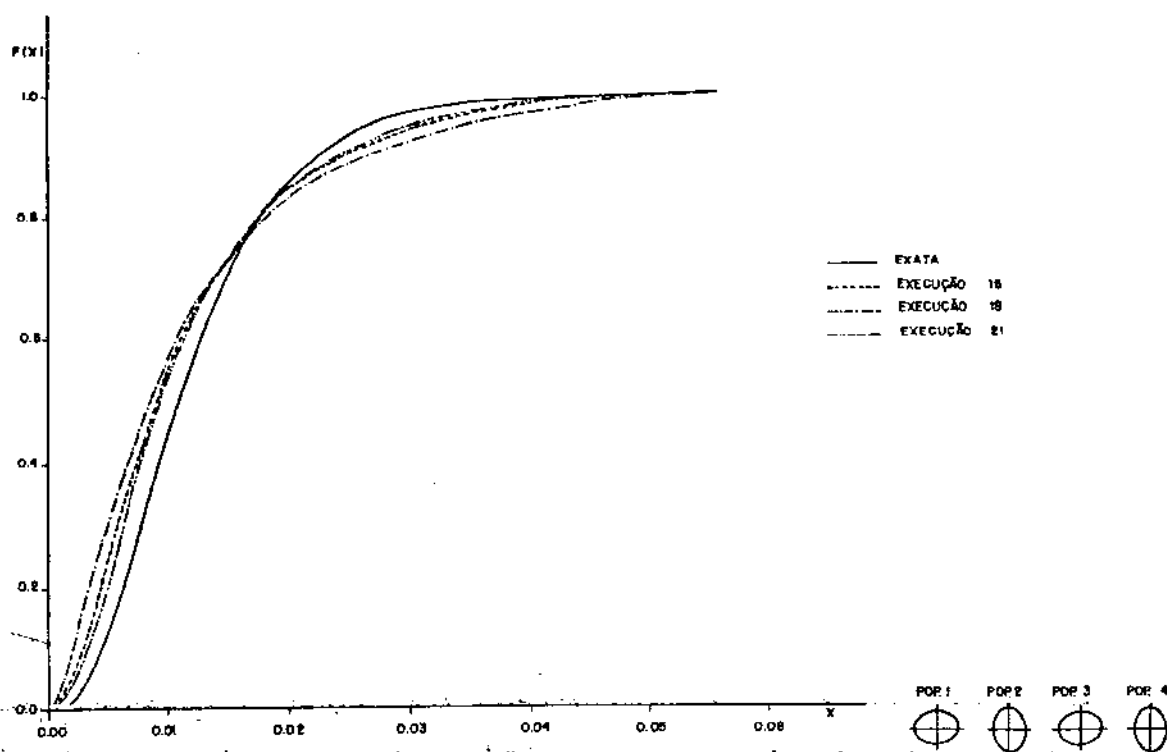
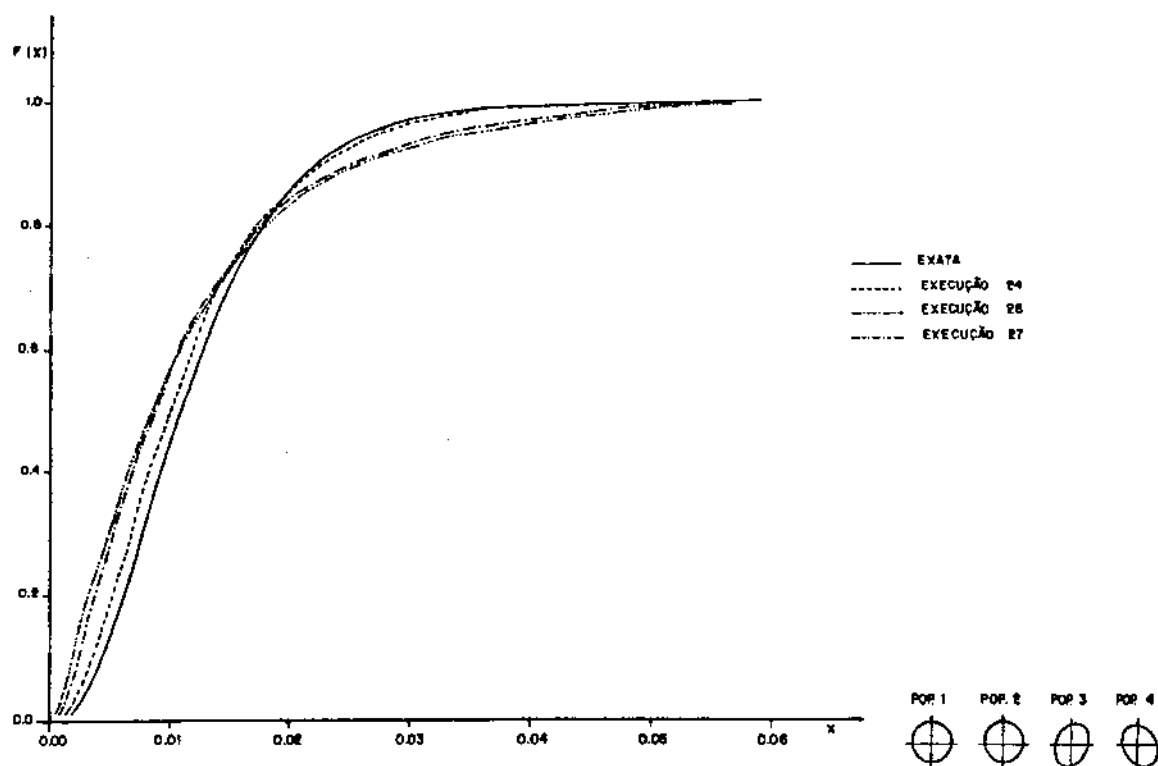


FIGURA A11 - Função de Distribuição Exata do Máximo Autovalor Comparada com
Três Empíricas que Sofreram Perturbações (Quadro 4.16)



APÊNDICE II

PROGRAMAS USADOS NAS SIMULAÇÕES

PROGRAMA 1 PARA $p=2$

PROGRAMA 2 PARA $p=3$



```
DIMENSION X(300,2),Y(300,2),C1(2,2),C2(2,2),C3(2,2)
DIMENSION NP(10), Z(300,2,10), Z3(2,10),WG(2,2),B(2,2), ZBAR(2)
DIMENSION P(2,2), P2(2,2), W1(2,2),BWIN(2,2),AVMAX(1000)
DIMENSION Z1(2), Z2(2), W1(2,2), W2(2,2),PAV(1000),SAV(1000)
DIMENSION TETA(10),V1(10),V2(10)
```

```
TYPE 15
```

```
FORMAT(1X,'ENTRE COM O NUMERO DE POPULACOES E RODADAS')
```

```
ACCEPT 16,KI,KA
```

```
FORMAT(2I)
```

```
TYPE 30
```

```
FORMAT(5X,'ENTRE COM A SEMENTE (S)')
```

```
ACCEPT 40, S
```

```
FORMAT(G)
```

```
C..... MATRIZ (X) DE DADOS NORMAIS GERADO DE FORMA ALEATORIA
```

```
C
CALL SETRAM(S)
```

```
DO 200 L=1,KI
```

```
TYPE 10,L
```

```
FORMAT(5X,'ENTRE COM O TAMANHO N DA AMOSTRA DA POPULACAO',I2)
```

```
ACCEPT 20,N
```

```
FORMAT(G)
```

```
NP(L)=N
```

```
TYPE 70,L
```

```
FORMAT(5X,'ENTRE COM OS PARAMETROS V1 E V2 DA POPULACAO',I2)
```

```
ACCEPT 60,V1(L),V2(L)
```

```
FORMAT(2G)
```

```
TYPE 162,L
```

```
FORMAT(5X,'ENTRE COM O VALOR DE TETA (RAD) DA POP.',I2)
```

```
ACCEPT 170,TETA(L)
```

```
FORMAT(G)
```

```
CONTINUE
```

```
DO 400 IKA=1,KA
```

```
SC1=0.
```

```
SC2=0.
```

```
SN=0.
```

```
DO 111 I=1,2
```

```
DO 111 J=1,2
```

```
WG(I,J)=0.
```

```
P(I,J)=0.
```

```
CONTINUE
```

```
DO 210 L=1,KI
```

```
DO 113 I=1,2
```

```
DO 113 J=1,2
```

```
C1(I,J)=0.
```

```
C2(I,J)=0.
```

```
C3(I,J)=0.
```

```
CONTINUE
```

```
DO 50 I=1,NP(L)
```

```
S1= RAN(S)
```

```
S2= RAN(S)
```

```
A(I,1)= SQRT(-2.*ALOG(S1))*COS(6.283185307*S2)
```

```
A(I,2)=SQRT(-2.*ALOG(S1))*SIN(6.283185307*S2)
```

```
CONTINUE
```

```
FORMAT(18X, 2F15.4)
```

```
C..... DETERMINACAO DA MATRIZ (Y)
```

```
DO 90 I=1, NP(L)
```



INICAMP

```

Y(I,1)= V1(L)*X(I,1)
Y(I,2)= V2(L)*X(I,2)
90 CONTINUE
C
C.... DETERMINACAO DA MATRIZ Z=Y*P'
C
SI=SIN(TETA(L))
CO=COS(TETA(L))
DO 44 I=1, NP(L)
Z(I,1,L)=Y(I,1)*CO-Y(I,2)*SI
Z(I,2,L)=Y(I,1)*SI+Y(I,2)*CO
44 CONTINUE
C
C.... CALCULO DO VETOR DE MEDIA DE Z
C
DO 55 J=1, 2
ZZ=0.
DO 17 I=1, NP(L)
ZZ=ZZ + Z(I,J,L)
17 CONTINUE
Z3(J,L)=ZZ/FLOAT(NP(L))
55 CONTINUE
C
C.... CALCULO DOS VETORES DE MEDIAS DE X E Y
C
DO 100 J=1, 2
X1=0.
Y1=0.
DO 110 I=1, NP(L)
X1=X1 + X(I,J)
Y1=Y1 + Y(I,J)
110 CONTINUE
Z2(J)=Y1/FLOAT(NP(L))
Z1(J)=X1/FLOAT(NP(L))
100 CONTINUE
C
C.... DETERMINACAO DAS MATRIZES DE COVARIANCIA C1 E C2
C
DO 120 I=1, 2
DO 120 J=1, 2
X1=0.
Y1=0.
DO 130 K=1, NP(L)
X1=X1 + X(K,I)*X(K,J)
Y1=Y1 + Y(K,I)*Y(K,J)
130 CONTINUE
C1(I,J)=X1/(FLOAT(NP(L))-1)
C2(I,J)=Y1/(FLOAT(NP(L))-1)
120 CONTINUE
DO 140 I=1, 2
DO 140 J=1, 2
W1(I,J)=Z1(I)*Z1(J)
W2(I,J)=Z2(I)*Z2(J)
C1(I,J)=C1(I,J)-W1(I,J)*FLOAT(NP(L))/FLOAT(NP(L)-1)
C2(I,J)=C2(I,J)-W2(I,J)*FLOAT(NP(L))/FLOAT(NP(L)-1)
140 CONTINUE
C
C.... CALCULO DA MATRIZ DESEJADA C3
C
SC=SI*CO

```

ICAMP

SQ=SI*SI

CQ=CQ*CO

C3(1,1)=C2(1,1)*CQ-2.*C2(1,2)*SC + C2(2,2)*SQ

C3(2,1)=C2(2,1)*CQ + (C2(1,1)-C2(2,2))*SC-C2(1,2)*SQ

C3(1,2)=C3(2,1)

C3(2,2)=C2(2,2)*CQ + 2.*C2(1,2)*SC + C2(1,1)*SQ

C

C.... CALCULO DA MATRIZ SSP DEVIDO AO ERRO (WG)

C

DO 210 I=1,2

DO 210 J=1,2

*G(I,J)=(FLOAT(NP(L))-1.)*C3(I,J)+SG(I,J)

CONTINUE

210

C

C.... CALCULO DO VETOR DE MEDIAS GLOBAL ZBAR

C

DO 300 LL=1,KI

SN=SN+FLOAT(NP(LL))

CONTINUE

300

DO 370 L=1,KI

DO 370 I=1,NP(L)

SC1=SC1+Z(I,1,L)

SC2=SC2+Z(I,2,L)

CONTINUE

370

ZBAR(1)=SC1/SN

ZBAR(2)=SC2/SN

C

C.... CALCULO DA MATRIZ SSP DEVIDO AO TRATAMENTO (B)

C

DO 230 L=1,KI

PNP=FLOAT(NP(L))

P(1,1)=PNP*Z3(1,L)*Z3(1,L)+P(1,1)

P(1,2)=PNP*Z3(1,L)*Z3(2,L)+P(1,2)

P(2,1)=P(1,2)

P(2,2)=PNP*Z3(2,L)*Z3(2,L)+P(2,2)

CONTINUE

230

DO 240 I=1,2

DO 240 J=1,2

P2(I,J)=ZBAR(1)*ZBAR(J)*SN

CONTINUE

240

DO 250 I=1,2

DO 250 J=1,2

B(1,J)=P(1,J)-P2(1,J)

CONTINUE

250

C

C.... CALCULO DA MATRIZ INVERSA DE WG

C

DETWG=WG(1,1)*WG(2,2)-WG(1,2)*WG(2,1)

WIN(1,1)=(1./DETWG)*WG(2,2)

WIN(1,2)=-(1./DETWG)*WG(1,2)

WIN(2,1)=WIN(1,2)

WIN(2,2)=(1./DETWG)*WG(1,1)

C

C.... CALCULO DA MATRIZ BWIN

C

BWIN(1,1)=B(1,1)*WIN(1,1)+B(1,2)*WIN(1,2)

BWIN(1,2)=B(1,1)*WIN(1,2)+B(1,2)*WIN(2,2)

BWIN(2,1)=B(1,2)*WIN(1,1)+B(2,2)*WIN(1,2)

BWIN(2,2)=B(1,2)*WIN(1,2)+B(2,2)*WIN(2,2)

C



INICAMP

CALCULO DOS AUTOVALORES DE BWIN

```

C
D1=BWIN(1,1)+BWIN(2,2)
D2=BWIN(1,1)*BWIN(2,2)
D3=BWIN(2,1)*BWIN(1,2)
AV1=(D1+SQRT((D1*D1)-4.*(D2-D3)))/2.
AV2=(D1-SQRT((D1*D1)-4.*(D2-D3)))/2.
C
AVMAX(1KA)=AV1/(1+AV1)
PAV(1KA)=1/((1+AV1)*(1+AV2))
C
SAV(1KA)=AV1+AV2
400 CONTINUE
5 K=0
DO 277 I=1,KA-1
IF(PAV(I)-PAV(I+1))277,277,377
377 AUX=PAV(I)
PAV(I)=PAV(I+1)
PAV(I+1)=AUX
K=1
277 CONTINUE
IF(K)177,177,5
177 N1=0
N2=0
DO 1111 I=1,KA
IF(PAV(I).LE.0.96229)GO TO 577
GO TO 1222
577 N1=N1+1
GO TO 1111
1222 IF(PAV(I).LE.0.97556)GO TO 578
GO TO 188
578 N2=N2+1
1111 CONTINUE
188 N2=N2+N1
WRITE(20,311)N1,N2
311 FORMAT(5X,'N1 =' 13,/,5X,' N2 =' 13)
199 WRITE(21,411)((PAV(I)),I=1,KA)
411 FORMAT(10F8,5)
STOP
END

```

```

DIMENSION X(200,3),Z(200,3),V1(5),V2(5),V3(5),TETA(5),ALFA(5)
DIMENSION PAV(1000), GAMA(5),WG(3,3),P(3,3),C3(3,3),WINB(10,10)
DIMENSION SGB(10,10),Z(200,3,5),NP(5),WIN(3,3),W3(3,3),W(3,3)
DIMENSION ZBAR(5),P2(3,3),B(3,3),WGAD(3,3)
DIMENSION Z3(3,3)

```

```

TYPE 15

```

```

FORMAT(5X,'ENTRE COM O NUMERO DA POPULACOES E RODADAS')

```

```

ACCEPT 16,KI,KA

```

```

FORMAT(2I)

```

```

TYPE 30

```

```

FORMAT(5X,'ENTRE COM A SEMENTE (SS)')

```

```

ACCEPT 40, SS

```

```

FORMAT(G)

```

```

CALL SETRAN(SS)

```

```

DO 200 L=1,KI

```

```

TYPE 10,L

```

```

FORMAT(5X,'ENTRE COM O TAMANHO N DA AMOSTRA DA POP.',I2)

```

```

ACCEPT 20,N

```

```

FORMAT(G)

```

```

NP(L)=N

```

```

TYPE 70,L

```

```

FORMAT(5X,'ENTRE COM OS PARAMETROS V1,V2 E V3 DA POP.',I2)

```

```

ACCEPT 80, V1(L),V2(L),V3(L)

```

```

FORMAT(3G)

```

```

TYPE 162,L

```

```

FORMAT(5X,'ENTRE OS ANGULOS TETA,ALFA,GAMA DA POP.',I2)

```

```

ACCEPT 170, TETA(L),ALFA(L),GAMA(L)

```

```

FORMAT(3G)

```

```

CONTINUE

```

```

DO 400 IKA=1,KA

```

```

SC1=0

```

```

SC2=0

```

```

SC3=0

```

```

SN=0

```

```

DO 111 I=1,3

```

```

DO 111 J=1,3

```

```

WG(I,J)=0

```

```

P(I,J)=0

```

```

CONTINUE

```

```

DO 210 L=1,KI

```

```

DO 113 I=1,3

```

```

DO 113 J=1,3

```

```

C3(I,J)=0

```

```

CONTINUE

```

```

...MATRIZ(X) DE DADOS NORMAIS GERADA DE FORMA ALEATORIA

```

```

DO 50 I=1,NP(L)

```

```

S1=РАН(SS)

```

```

S2=РАН(SS)

```

```

S3=РАН(SS)

```

```

S4=РАН(SS)

```

```

X(I,1)=SQRT(-2*ALOG(S1))*COS(6.283185307*S2)

```

```

X(I,2)=SQRT(-2*ALOG(S1))*SIN(6.283185307*S2)

```

```

X(I,3)=SQRT(-2*ALOG(S3))*COS(6.283185307*S4)

```

```

CONTINUE

```

```

...DETERMINACAO DA MATRIZ (Y)

```

```

DO 90 I=1,NP(L)

```

```

MP      Y(1,1)=V1(L)*X(1,1)
        Y(1,2)=V2(L)*X(1,2)
        Y(1,3)=V3(L)*X(1,3)
90      CONTINUE
C
C...DETERMINAÇÃO DA MATRIZ Z=Y*P-1
C
        CTA=COS(TETA(L))*COS(ALFA(L))
        STCG=SIN(TETA(L))*COS(GAMA(L))
        CTSAG=COS(TETA(L))*SIN(ALFA(L))*SIN(GAMA(L))
        STG=SIN(TETA(L))*SIN(GAMA(L))
        CTGSA=COS(TETA(L))*SIN(ALFA(L))*COS(GAMA(L))
        STCA=SIN(TETA(L))*COS(ALFA(L))
        CTG=COS(TETA(L))*COS(GAMA(L))
        STAG=SIN(TETA(L))*SIN(ALFA(L))*SIN(GAMA(L))
        CTSG=COS(TETA(L))*SIN(GAMA(L))
        STACG=SIN(TETA(L))*SIN(ALFA(L))*COS(GAMA(L))
        SA=SIN(ALFA(L))
        CASG=COS(ALFA(L))*SIN(GAMA(L))
        CAG=COS(ALFA(L))*COS(GAMA(L))
        DO 44 I=1, NP(L)
            Z(I,1,L)=Y(I,1)*CTA-Y(I,2)*(STCG+CTSAG)+Y(I,3)*(STG-CTGSA)
            Z(I,2,L)=Y(I,1)*STCA+Y(I,2)*(CTG-STAG)-Y(I,3)*(CTSG+STACG)
            Z(I,3,L)=Y(I,1)*SA+Y(I,2)*CASG+Y(I,3)*CAG
44      CONTINUE
C
C...CÁLCULO DO VETOR DE MÉDIAS DE Z
C
        DO 55 J=1,3
            ZZ=0.
            DO 17 I=1, NP(L)
                ZZ=ZZ+Z(I,J,L)
17      CONTINUE
            Z3(J,L)=ZZ/FLOAT(NP(L))
55      CONTINUE
C
C...CÁLCULO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DE Z
C
        DO 120 I=1,3
            DO 120 J=1,3
                ZZ=0.
                DO 130 K=1, NP(L)
                    ZZ=ZZ+Z(K,I,L)*Z(K,J,L)
130      CONTINUE
                C3(I,J)=ZZ/FLOAT(NP(L)-1)
120      CONTINUE
            DO 140 I=1,3
                DO 140 J=1,3
                    W3(I,J)=Z3(I,L)*Z3(J,L)
                    C3(I,J)=C3(I,J)-W3(I,J)*FLOAT(NP(L))/FLOAT(NP(L)-1)
140      CONTINUE
C
C...CÁLCULO DA MATRIZ SSP DEVIDO AO ERRO (WG)
C
        DO 210 I=1,3
            DO 210 J=1,3
                WG(I,J)=FLOAT(NP(L)-1)*C3(I,J)+WG(I,J)
210      CONTINUE
C
C...CÁLCULO DO VETOR DE MÉDIAS GLOBAIS ZBAR

```

```

300 DD 300 LL=1,K1
    SN=SN+FLOAT(NP(LL))
    CONTINUE
300 DD 370 L=1,K1
    DD 370 I=1,NP(L)
    SC1=SC1+Z(I,1,L)
    SC2=SC2+Z(I,2,L)
    SC3=SC3+Z(I,3,L)
370 CONTINUE
    ZBAR(1)=SC1/SN
    ZBAR(2)=SC2/SN
    ZBAR(3)=SC3/SN
C
C...
C...CALCULO DA MATRIZ SSP DEVIDO AO TRATAMENTO (B)
    DD 230 L=1,K1
    PNP=FLOAT(NP(L))
    DD 233 I=1,3
    DD 233 J=1,3
    P(I,J)=PNP*Z(I,L)*Z(J,L)+P(I,J)
233 CONTINUE
230 CONTINUE
    DD 240 I=1,3
    DD 240 J=1,3
    P2(I,J)=ZBAR(I)*ZBAR(J)*SN
240 CONTINUE
    DD 250 I=1,3
    DD 250 J=1,3
    B(I,J)=P(I,J)-P2(I,J)
250 CONTINUE
C
C...CALCULO DO DET DE WG (DETWG)
C
    D1=WG(1,1)*WG(2,2)*WG(3,3)+2*WG(1,2)*WG(2,3)*WG(1,3)
    D2=WG(1,3)*WG(1,3)*WG(2,2)+WG(2,3)*WG(2,3)*WG(1,1)
    D3=WG(1,2)*WG(1,2)*WG(3,3)
    DETWG=D1-D2-D3
    DD 399 I=1,3
    DD 399 J=1,3
399 SWGB(I,J)=WG(I,J)+B(I,J)
C CALCULO DE DETERMINANTE DA MATRIZ SWGB
C
    T1=SWGB(1,1)*SWGB(2,2)*SWGB(3,3)+2*SWGB(1,2)*SWGB(2,3)*SWGB(1,3)
    DE2=SWGB(1,3)*SWGB(1,3)*SWGB(2,2)+SWGB(2,3)*SWGB(2,3)*SWGB(1,1)
    DE3=SWGB(1,2)*SWGB(1,2)*SWGB(3,3)
    DETSWB=T1-DE2-DE3
    PAV(1KA)=DETWG/DETSWB
400 CONTINUE
5 K=0
    DD 277 I=1,KA-1
    IF(PAV(I)=PAV(I+1))277,277,377
377 AUX=PAV(I)
    PAV(I)=PAV(I+1)
    PAV(I+1)=AUX
    K=1
277 CONTINUE
    IF(K)177,177,5
177 N1=0
    N2=0

```

```

MP      DO 1111 I=1,KA
        IF(PAV(I).LE.0.94555)GO TO 577
        GO TO 1222
577      N1=N1+1
        GO TO 1111
1222     IF(PAV(I).LE.0.95911)GO TO 578
        GO TO 188
578      N2=N2+1
1111     CONTINUE
188      N2=N2+N1
        WRITE(20,311)N1,N2
311      FORMAT(5X,'N1 =' I3,/,5X,' N2 =' I3)
199      WRITE(21,411)((PAV(I)),I=1,KA)
411      FORMAT(10F10.5)
        STOP
        END

```

APÊNDICE III

DISTRIBUIÇÃO DO MÁXIMO AUTOVALOR - VALORES DE x PARA O QUAL

$$p(\theta_{max} < x) = I_x(2; m_1, m_2) = P$$

PROGRAMA 3 - CALCULA x PARA $k=3$ E $p=2$

PROGRAMA 4 - CALCULA x PARA $k=4$ E $p=2$

(k # POPULAÇÕES E p = DIMENSÃO)

TABELA A1 - Valores da Função de Distribuição do Máximo Autovalor

$$p(\theta_{max} < x) = I_x(2; m_1, m_2) = P$$

(p = 2)

P	$v_1 = 403$ $v_2 = 2$	$v_1 = 403$ $v_2 = 3$
0.01	0.00064	0.00175
0.05	0.00154	0.00327
0.10	0.00230	0.00439
0.15	0.00296	0.00532
0.20	0.00358	0.00615
0.25	0.00418	0.00694
0.30	0.00467	0.00769
0.35	0.00538	0.00846
0.40	0.00601	0.00922
0.45	0.00665	0.01002
0.50	0.00734	0.01085
0.55	0.00807	0.01171
0.60	0.00886	0.01264
0.65	0.00974	0.01367
0.70	0.01072	0.01479
0.75	0.01185	0.01609
0.80	0.01320	0.01758
0.85	0.01490	0.01947
0.90	0.01720	0.02208
0.95	0.02110	0.02624
0.99	0.02970	0.03537

$$m_1 = \frac{1}{2}(v_2 - 1), \quad m_2 = \frac{1}{2}(v_1 - 1)$$



```

1  DIMENSION D(2,500)
2  TYPE 10
3  FORMAT(5X,'ENTRE COM M')
4  ACCEPT 20,M
5  FORMAT(I3)
6  TYPE 30
7  FORMAT(5X,'ENTRE COM X')
8  ACCEPT 40,X
9  FORMAT(G)
10 D(1,1)=X
11 DO 50 I=2,2*M
12 D(1,I)=X+(1-X)*D(1,I-1)
13 CONTINUE
14 W1=133.33333
15 W2=7960.
16 W3=375257.1429
17 W4=14374433.33
18 W5=461027280
19 W6=12678250200.
20 W7=304519495300.
21 T=SQRT(X)
22 S1=2*T-W1*T**3+W2*T**5-W3*T**7+W4*T**9-W5*T**11+W6*T**13-W7*T**15
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44 RINT=M*SQRT(X)*(1-X)**M*S1
45 M2=2*M
46 PROB=D(1,M2)-RINT
47 WRITE(05,75)PROB
48 FORMAT(G)
49 TYPE 27
50 FORMAT(2X,'QUEP CALCULAR DE NOVO? - /N')
51 ACCEPT 99,RESP
52 FORMAT(A1)
53 IF(RESP.EQ.'S')GOTO 1
54 IF(RESP.NE.'N')GOTO 98
55 STOP
56 END
```

PROGRAMA 4

ICAMP

```

1      DIMENSION D(2,800)
2      TYPE 10
10     FORMAT(5X,'ENTRE COM D')
      ACCEPT 20,S
20     FORMAT(13)
      TYPE 30
30     FORMAT(5X,'ENTRE COM X')
      ACCEPT 40,X
40     FORMAT(G)
      D(1,1)=X
      D(2,1)=X*X
      DO 49 I=2,M
      D(1,I)=X+(1-X)*D(1,I-1)
49     CONTINUE
      DO 50 I=2,2*M
      D(1,I)=X+(1-X)*D(1,I-1)
      D(2,I)=X*D(1,I)+(1-X)*D(2,I-1)
50     CONTINUE
      N2=2*M
      PROB=D(2,N2)-D(1,N)*X*(1-X)**201*403
      WRITE(05,75)PROB
75     FORMAT(G)
98     TYPE 97
97     FORMAT(2X'QUER CALCULAR DE NOVO? - ,N')
      ACCEPT 99,RESP
99     FORMAT(A1)
      IF(RESP.EQ.'S')GOTO 1
      IF(RESP.NE.'N')GOTO 98
100    STOP
      END

```

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, T.N. (1958) - *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons.
- BOX, G.E.P. and MULLER, M.E. (1958) - "A Note on the Generation of Randon Normal Deviates", *Annals of Mathematical Statistics*, 29, 610-611.
- FOSTER, F.G. (1957) - "Upper Percentage Points of the Generalized Beta Distribution II", *Biometrika*, 44, 441-453.
- FOSTER, G.E. and REES, D.H. (1957) - "Upper Percentage of the Generalized Beta Distribution I", *Biometrika*, 44, 237-247.
- GNANADESIKAN, R. and others (1965) - "Efficiency Comparisons of Certain Multivariate Analysis of Variance Test Procedures", *abstract in Annals of Mathematical Statistics*, 36, 356-357.
- HOTELLING, H. (1931) - "The Generalization of Student's Ratio", *Annals of Mathematical Statistics*, 2, 360-378.
- ITO, K. (1969) - "On the Effect of Heteroscedasticity and Nonnormality Upon Some Multivariate Test Procedures", in PARUCHURU R. KRISHNAIAH, ed., *Multivariate Analysis*, vol. 2, Academic Press Inc., 87-120.
- ITO, K.; and SCHULL, W.J. (1964) - "On the Robustness of the T_0^2 Test in Multivariate Analysis of Variance when Variance - Covariance Matrices are not Equal", *Biometrika*, 51, 71-82.

- JOHNSON, R.A. and WICHERN, D.W. (1984) - *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall.
- KORIN, B.P. (1972) - "Some Comments on the Homoscedasticity Criterion M and the Multivariate Analysis of Variance Tests T^2 , W and R", *Biometrika*, 59, 215-216.
- KRISHNAIAH, P.R. (1969) - "Simultaneous Test Procedures Under General MANOVA Models", *Multivariate Analysis II*, ed. P.K. KRISHNAIAH, Academic Press.
- LAWLEY, D.N. (1938) - "A Generalization of Fisher's z Test", *Biometrika*, 30, 180-187. Corrections in *Biometrika*, 30, 467-469.
- LEE, YOONG-SIN (1971) - "Asymptotic Formulae for the Distribution of a Multivariate Tests", *Biometrika*, 58, 647-651.
- MARDIA, K.V., KENT, J.T. and BIBBY, J.M. (1979) - *Multivariate Analysis*, Academic Press.
- MORRISON, D.F. (1976) - *Multivariate Statistical Methods*, McGraw-Hill.
- OLSON, C.L. (1974) - "Comparative Robustness of Six Tests in Multivariate Analysis of Variance", *Journal of the American Statistical Association*, 69, 894-908.
- PAYNE, W.H., RABUNG, J.R. and BOGYO, T.P. (1969) - "Coding the Lehmer Pseudo Random Number Generator", *Communications of the ACM*, 12, 85-86.

- PEARSON, E.S. and HARTEY, H.O. (1972) - *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 2, Cambridge University Press.
- PEARSON, E.S. and WILKS, S.S. (1933) - "Methods of Statistical Analysis Appropriate for k Samples of Two Variables", *Biometrika*, 25, 353-378.
- PILLAI, K.C.S. (1955) - "Some New Test Criteria Multivariate Analysis", *Annals of Mathematical Statistics*, 26, 117-121.
- PILLAI, K.C.S. (1956) - "On the Distribution of the Largest or the Smallest Root of a Matrix in Multivariate Analysis", *Biometrika*, 43, 122-127.
- PILLAI, K.C.S. and GUPTA, A.K. (1969) - "On the Exact Distribution of Wilks's Criterion", *Biometrika*, 56, 109-18. Corrections in *Biometrika*, 57, 225 (1970).
- PILLAI, K.C.S. and JAYACHANDRAN, K. (1967) - "Power Comparisons of Tests of Two Multivariate Hypotheses Based on Four Criteria", *Biometrika*, 54, 195-210.
- ROY, J. (1966) - "Power of the Likelihood-Ratio Test Used in Analysis of Dispersion", in P.R. KRISHNAIAH, ed., *Multivariate Analysis*, vol. 1, Academic Press, 105-127.
- ROY, S.N. (1953) - "On a Heuristic Method of Test Construction and its Use in Multivariate Analysis", *Annals of Mathematical Statistics*, 24, 220-238.
- ROY, S.N. and GNANADESIKAN, R. (1959) - "Some Contributions to ANOVA in One or More Dimensions: I", *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 304-317.