Fundamentos Matemáticos das Teorias de Calibre

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de Fevereiro de 1992.

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Um homem com uma idéia é considerado um excêntrico até que sua idéia seja bem sucedida.

Mark Twain (1835–1910)

Ciência é acreditar na ignorância dos cientistas.

Richard Phillips Feynman (1918–1988)

Para os crentes, Deus está no princípio de todas as coisas. Para os cientistas, no final de toda reflexão.

Max Planck (1858–1947)

Dedicatória

Dedico esta dissertação à minha mãe e aos meus irmãos.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo apoio e compreensão dispensados nesses dois anos de curso de mestrado.

Agradeço ao Prof. Waldyr, pelo constante estímulo, amizade, compreensão, e por ter-me proporcionado liberdade de escolha e de pensamento.

Agradeço em especial ao Jayme e ao José Emílio pela paciência em ler e discutir o manuscrito que originou esta dissertação.

Agradeço a todo o pessoal do Grupo de Física-Matemática pelo bom ambiente de trabalho, discussões e estímulo.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro, ainda que deficiente.

Sumário

O propósito desta dissertação é rever, sob o ponto de vista de alguns métodos da matemática moderna, a fundamentação matemática das teorias de calibre. Estudamos em detalhes as teorias de fibrados e de conexões em fibrados. Reformulamos as teorias de calibre em uma linguagem de fibrados principais, encontrando a equação de Klein-Gordon e a equação de Klein-Gordon acoplada ao campo eletromagnético. Nesse formalismo discutimos o campo de Yang-Mills e instantons. Mostramos que instantons existem somente em dimensão quatro, e que não podemos encontrar para tais objetos uma interpretação física satisfatória.

Abstract

The purpose of this dissertation is to revisit, from the point of view of some modern mathematical methods, the mathematical foundation of gauge theories. We study in detail the theories of fiber bundles and of conections on fiber bundles. We formulate the gauge theories in the language of principal fiber bundles, finding the Klein-Gordon equation and the Klein-Gordon equation coupled to the electromagnetic field. In this formalism we discuss the Yang-Mills fields and Instantons. We show that instantons exist only in dimension four, and that such objects have no satisfactory physical interpretation.

Conteúdo

Introdução

Uma das maiores descobertas da física neste século, é o reconhecimento que grupos de Lie não-abelianos são de grande importância para a física de partículas. Por muitos anos, isto foi considerado como um aspecto peculiar da mecânica quântica que não possuia análogo clássico. No ano de 1954 C. N. Yang e R. Mills [42] propuseram uma teoria clássica de campos incorporando estes grupos. Esta teoria é um caso especial do que chamamos hoje *Teoria de Calibre*.

O grande interesse demonstrado atualmente pelos físicos teóricos e matemáticos pelas teorias de calibre é devido, por um lado, ao sucesso da unificação das interações fraca e eletromagnética em uma teoria renormalizável com várias predições verificadas experimentalmente, e a quase unânime convicção da comunidade física de que o modelo quark-gluon de hadrons é uma teoria de calibre da cor, e por outro lado, o reconhecimento de que, como a teoria da gravitação, teorias de calibre têm um profundo significado geométrico, e que potenciais e campos de Yang-Mills podem ser identificados com conexões e curvaturas em fibrados principais. Nota-se também que alguns dos resultados obtidos pelos físicos (carga topológica, instantons, anomalias axiais) estão intimamente relacionados com a topologia diferencial de fibrados sobre variedades quadridimensionais, e proporcionam aplicações particularmente transparentes do teorema do índice de Atiyah-Singer.

A crença de que estamos no limiar de uma *grande unificação* das interações fraca, eletromagnética, forte, e possivelmente também a gravitação, explica a proliferação de modelos e teorias, e a necessidade de se distinguir o que tem do que não tem significado neste vasto campo.

Neste trabalho procuramos rever as bases matemáticas das teorias de calibre, de forma a encontrar uma formulação matemática razoável e elegante para estas. Para isso partimos de uma revisão do ferramental matemático necessário, de maneira a estarmos livres de qualquer convenção matemática ou física que diminua a clareza da exposição.

No Capítulo 1 apresentamos a parte de álgebra linear necessária para se entender os conceitos de campos, espaços tangentes, campos de tensores, operador estrela de Hodge e alguns outros conceitos necessários à formalização das estruturas de variedades diferenciáveis, fibrados e o codiferencial.

No Capítulo 2 procuramos fazer uma revisão rápida de análise em espaços de

Banach, dando certa ênfase aos espaços de Hilbert, espacos de Banach e o teorema de Banach do ponto fixo para contrações, a base do método das aproximações sucessivas. Neste capítulo estivemos mais interessados em revisar os conceitos de análise que são necessários para o desenvolvimento da teoria das variedades diferenciáveis, tanto para o caso de dimensão finita como de dimensão infinita. Usamos também o teorema da representação de Riez para introduzir de uma forma natural os operadores $\nabla_k f$, que generalizam o operador gradiente, e são necessários para a formalização adequada da equação de Euler-Lagrange em fibrados principais.

No Capítulo 3 usamos os resultados e definições dos capítulos 1 e 2 para introduzir as noções de variedade diferenciável e campos de tensores em variedades. Enfatizamos as variedades de dimensão infinita, os cálculos básicos com campos de tensores, métricas semi-Riemannianas e as variedades Lorentzianas que modelam o espaço-tempo.

Sendo os grupos de Lie um dos principais ingredientes para se desenvolver a teoria dos fibrados principais, no Capítulo 4 procuramos apresentar em detalhes todos os conceitos necessários à formalização da noção de fibrado principal. Estudamos ações de grupos de Lie em variedades, campos de vetores invariantes, homomorfismos, subgrupos a um parâmetro, aplicação adjunta e derivada de Lie. Neste capítulo tudo é feito com mais detalhes e exemplos, de forma a tornar tais conceitos mais claros.

No Capítulo 5, estivemos preocupados em introduzir o conceito de forma diferencial e alguns métodos de cálculo com as mesmas. Uma vez que formas diferenciais desempenham um papel fundamental em nossos cálculos para se encontrar as equações dos campos de partículas, procuramos tornar claros os conceitos de diferencial exterior, 'pull-back'e produto interior. Também introduzimos as noções de variedades orientáveis, integração em variedades, variedades com bordo, e por fim demostramos o teorema de Stokes e estudamos de uma maneira confortável as equações de Maxwell na forma diferencial.

O Capítulo 6 desenvolve de uma maneira clara a noção de fibrado em suas principais formas. Iniciamos de uma forma somente topológica, motivando a noção de fibrado como a generalização natural de produto cartesiano, discutindo brevemente os vários modelos de espaço-tempo físico. Em seguida estudamos os fibrados diferenciáveis. dando ênfase ao fibrado principal e às estruturas provenientes do grupo de Lie que age no espaço total. Também desenvolvemos um pouco a teoria dos fibrados associados e dos fibrados vetoriais, enfatizando os fibrados vetoriais associados aos fibrados principais de maneira a tornar claro o conceito de formas horizontais equivariantes introduzido no capítulo 8. Finalizamos este capítulo com operações funtoriais em fibrados principais.

No Capítulo 7 desenvolvemos a teoria das conexões em fibrados principais e vetoriais. Nosso principal objetivo é colocar de maneira clara a geometria por trás da idéia de conexão, de modo a preparar o caminho para se compreender a idéia do acoplamento do campo elétromagnético aos campos de partículas estudados em física. Estudamos também as formas a valores vetoriais, suas derivadas covariantes, terminando com um rápido estudo de conexões em fibrados vetoriais e classes de Chern de um fibrado vetorial.

Existem duas maneiras de se estudar teorias de calibre: uma delas faz uso de fibrados principais, enquanto a outra utiliza os fibrados vetoriais. Ambas as construcões são equivalentes. No nosso caso demos preferência ao estudo de tais teorias por meio de fibrados principais. No entanto introduzimos os conceitos fundamentais necessáros para estudar as teorias de calibre na versão para fibrados vetoriais.

O Capítulo 8 resgata todos os conceitos introduzidos desde o capítulo 1, de modo a se formular matemáticamente as teorias de calibre. Introduzimos as noções de forma horizontal equivariante e codiferencial covariante, e encontramos uma versão do teorema se Stokes para tais objetos. Em seguida, os conceitos de campo de partículas (função de onda da partícula), espaço de jatos e lagrangeana são introduzidos. Neste ponto é enfatizado o significado de se tomar uma representação do grupo de Lie do fibrado principal como uma especificação do tipo de partícula que se quer trabalhar. Como no caso da mecânica lagrangeana, introduzimos uma ação e um princípio de minima ação, culminando finalmente na equação de Euler-Lagrange para os campos de partículas, que é uma equação homogênea para tais campos. Como aplicações de tal formalismo encontramos a equação de Klein-Gordon e a equação de Klein-Gordon acoplada ao campo eletromagnético. Em seguida introduzimos a nocão de corrente, e de maneira análoga àquela feita para a equação de Euler-Lagrange formulamos um princípio de mínima ação, obtendo um par de equações para os campos de partículas: a equação de Euler-Lagrange e a equação de campo não-homogênea, envolvendo a corrente. Para obter isto precisamos introduzir a chamada densidade de ação total, que incorpora a densidade de ação do campo de partículas e a densidade de auto-ação, associada ao espaço das conexões. Para finalizar estudamos ainda o funcional de Yang-Mills e instantons, notando que instantons existem somente em dimensão 4, e que aparentemente não há sentido físico nas definições do funcional de Yang-Mills e dos próprios instantons.

Além dos resultados citados a teoria apresentada possibilita ainda o estudo de outros assuntos como os campos de Dirac, fibrados 'spliced', monopolos topológicos, monopolos via fibrado 'spliced', o nucleon em um potencial de Yang-Mills, renormalização de teorias de calibre e quebra espontânea de simetria, o acesso às teorias de calibre mais modernas e também a reformulação de todos os resultados do capítulo 8 na linguagem de fibrados vetorias. Para maiores detalhes de resultados e estudos recentes, incluindo o uso do teorema do índice de Atiyah-Singer, veja [1,4,9,13,14,28,33,38,39].

Capítulo 1

Álgebra Linear

1.1 Espaços Vetoriais

Um *Espaço Vetorial* V *sobre um corpo* $\mathbb{F}$ é uma tripla (V,+,·) tal que $+ : V \times V \rightarrow V$ goza das seguintes propriedades:

A. $u + v = v + u$, $\forall\, u, v \in V$.

B. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall\, u, v, w \in V$.

C. Existe um único elemento, denotado por 0, de V tal que $v + 0 = v$, $\forall\, v \in V$.

D. Para cada $u \in V$, existe um único elementode V, denotado por $-u$ tal que $u + (-u) = 0$.

E a operação $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ goza das seguintes propriedades :

A. $1 \cdot v = v$, $\forall\, v \in V$, onde 1 é a unidade do corpo $\mathbb{F}$.[1]

B. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $v \in V$.

C. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{F}$ e $u, v \in V$.

D. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $u \in V$.

Os elementos de V são chamados *vetores* e os elementos de $\mathbb{F}$ são chamados *escalares*.

É importante observar que um espaço vetorial é um objeto composto de um corpo, um conjunto de 'vetores' e duas operações com propriedades especiais.

Uma *base* é definida como um conjunto maximal de vetores linearmente independentes; um espaço vetorial é dito ter *dimensão* finita se este tem uma base finita.

[1] No que segue, a aplicação · será denotada, como usual, por justaposição.

Pode-se mostrar neste caso que todas as bases tem o mesmo número de elementos, digamos n, que é chamado a *dimensão* de V.

No caso onde V tem um número infinito de vetores linearmente independentes, dizemos que V tem *dimensão infinita.*

Quando falarmos de espaços de Hilbert estenderemos a noção de base, à espaços de dimensão infinita. Ainda queremos ressaltar que usando o lema de Zorn, é possível mostrar que todo espaço vetorial tem base.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V. Se $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ então, $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ é outra base de V.

Se $u \in$ V, então $u = \sum_{i=1}^{n} u^i e_i$, e os nùmeros $u^1, \ldots, u^n$ são as *componentes* de u com respeito à base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. As componentes de u com respeito à base $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ são $\overline{u}^i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})^i_j\, u^j$.

Se U e V são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$, então definimos sua ***soma direta*** U$\oplus$V como o produto cartesiano de U por V, com a adição e a multiplicação dadas por :

$$\begin{aligned} (u,v) + (u',v') &= (u+u', v+v') \quad \forall\, u,u' \in \mathrm{U} \text{ e } v,v' \in \mathrm{V} \\ \lambda(u,v) &= (\lambda u, \lambda v) \qquad\quad \forall\, u \in \mathrm{U}, v \in \mathrm{V} \text{ e } \lambda \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

1.2 Espaços Afins

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ (V de dimensão n), X um conjunto não vazio e θ:V$\times$X$\rightarrow$X uma ação do grupo aditivo V sobre o conjunto X. Dizemos que o par (X,θ) é um *espaço afim n-dimensional* se :

AF1. Se $A, B \in$ V, e $x \in$ X então $\theta(A, \theta(B, x)) = \theta(A + B, x)$.

AF2. Se 0 denota o vetor nulo, então $\theta(0, x) = x$, $\forall\, x \in$ X.

AF3. Para todo par ordenado (x, y) de pontos de X, existe um único vetor $A \in$ V tal que $\theta(A, x) = y$.

Se denotarmos a ação θ por $\oplus$ (não confundir com soma direta) podemos 'descarregar' um pouco a notação escrevendo **AF1**, **AF2** e **AF3** como

i. $(A + B) \oplus x = A \oplus (B \oplus x)$, $\forall\, A, B \in$ V e $x \in$ X.

ii. $0 \oplus x = x$, $\forall\, x \in$ X.

iii. $\forall\, (x, y) \in$ X$\times$X, existe um único vetor $A \in$ V tal que $A \oplus x = y$.

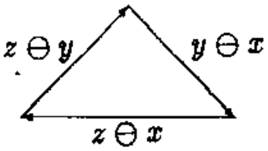


Figura 1.1: A lei do paralelogramo

Nós denotamos o elemento A em **iii** por $y \ominus x \in$ V. Note que $y \ominus x$ é um elemento de V pois, em X nós não temos qualquer operação algébrica definida.

Usando os axiomas **i** a **iii** pode-se mostrar que $z \ominus y + y \ominus x = z \ominus x$, ou seja, vale a lei do paralelogramo (veja a figura 1.1 acima).

Seja W $\subset$ V um subespaço vetorial de V. Nós chamamos ao conjunto

$$\mathrm{S}(x, \mathrm{W}) = \{A \oplus x \,/\, A \in \mathrm{W}\}$$

de *subespaço afim determinado por* $x \in$ X e W $\subset$ V. A dimensão de W é chamada a *dimensão do subespaço afim* S(x,W), e W é chamado *espaço de direções* para S(x,W).

Proposição 1.2.1 *Sejam* S(x,W) *o subespaço afim determinado por* $x \in X$ *e* W $\subset$ V. *Então temos* W $= \{z \ominus x \,/\, z \in \mathrm{S}\}$. *Conseqüentemente* W *está unicamente determinado por* S(x,W) . ■

Definição 1.1 *Seja* $A \in$ V. *A função* T_A :X→X *definida por* $T_A(x) = A \oplus x$ *para cada* $x \in$ X *é chamada* translação de X associada a A.

Proposição 1.2.2 *Seja* T_A :X→X *a translação de* X *associada a* $A \in$ V. *Então as são seguintes condições são verificadas:*

1. T_A *é uma bijeção.*
2. *Uma translação* T *é completamente determinada pela imagem de um único ponto. Se* T *deixa um ponto fixo,* T *é a aplicação identidade* 1_{X} . ■

Dado um subespaço afim k-dimensional S(x, W) $\subset$ X, dizemos que $x_0, E_1, \ldots, E_k$ é um *sistema afim de coordenadas* para S(x,W) se $x_0 \in$ S(x,W) e se $E_1, \ldots, E_k$ é uma base para W. Se $y \in$ S(x,W), as coordenadas afim deste ponto, em relação ao sistema de coordenadas dado, são por definição, as coordenadas do vetor $y \ominus x_0$ na base $\{E_1, \ldots, E_n\}$. O ponto x_0 é chamado a *origem* do sistema afim de coordenadas.

Podemos ainda, para cada ponto $x \in$ X, introduzir uma estrutura de espaço vetorial sobre X (o ponto x está fixado como uma espécie de "origem"), ou seja, como dos axiomas **i** a **iii** segue facilmente que a aplicação f_x:X→V, dada por $f_x(y) = y \ominus x$, é uma bijeção, podemos definir uma adição e uma multiplicação por escalar para os elementos de X.

Note em primeiro lugar que necessitamos fixar o elemento $x \in$ X, a fim de que possamos definir f_x. Portanto, X por si só não tem estrurura de espaço vetorial, mas X com o ponto *x fixo* tem! Na verdade o que estamos fazendo é escolher um ponto $x \in$ X para ser a origem de um espaço vetorial. Com isso, geometricamente, um espaço afim é, a grosso modo, um espaço vetorial sem a origem definida.

A estrutura de espaço vetorial torna-se agora fácil de definir, dado que f_x é uma bijeção. Definimos :

$$\begin{aligned} z+y &= f_x^{-1}(f_x(z)+f_x(y)), \quad \forall\, z,y \in \mathrm{X}. \\ \lambda y &= f_x^{-1}(\lambda \cdot f_x(y), \qquad\qquad \forall\, y \in \mathrm{X}. \end{aligned}$$

Usando os símbolos $\oplus$ e $\ominus$ a definição acima se torna :

$$\begin{aligned} z+y &= (z \ominus x \,+\, y \ominus x) \oplus x; \\ \lambda y &= (\lambda \cdot y \ominus x) \oplus x\,. \end{aligned}$$

Desta definição segue ainda que f_x:X$\to$V é um isomorfismo de espaços vetoriais.

1.3 Tensores

Se V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$, uma transformação linear f de V em $\mathbb{F}$ é também denominada *forma linear* sobre V (ou *funcional linear* sobre V). Se partimos do início, isto significa que f é uma função de V em $\mathbb{F}$ tal que

$$f(\alpha v+u)=\alpha f(v)+f(u),$$

para todos os vetores $u, v \in$ V e todos os escalares $\alpha \in \mathbb{F}$.

Sendo V um espaço vetorial, a coleção de todos os funcionais lineares sobre V constitui um espaço vetorial de uma maneira natural, trata-se do espaço V* que é chamado de *espaço vetorial dual* de V.

Se V é de dimensão finita podemos obter uma descrição bastante explícita do espaço dual V* .

Seja $\mathcal{B}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base de V. Um funcional linear $f \in$ V* fica completamente determinado conhecendo-se os n números

$$f(e_1)=\alpha_1,\ldots,f(e_n)=\alpha_n$$

De fato, se $v=\beta^1 e_1+\cdots+\beta^n e_n$ então

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\beta^1 e_1+\cdots+\beta^n e_n)=\beta^1 f(e_1)+\cdots+\beta^n f(e_n)= \\ &= \beta^1\alpha_1+\cdots+\beta^n\alpha_n. \end{aligned}$$

A cada base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, corresponde uma base $\mathcal{B}^* = \{f^1, \ldots, f^n\}$ de V*, chamada *base dual em relação à base* $\mathcal{B}$, definida da maneira seguinte :

$$\text{se } v = \beta^1 e_1 + \ldots + \beta^n e_n \text{ colocamos } f^i(v) = \beta^i, \; 1 \leq i \leq n$$

isto é, f^i é o funcional linear que associa ao vetor $v \in$ V sua i-ésima coordenada na base $\mathcal{B}$. Em primeiro lugar, é claro que f^i, $1 \leq i \leq n$ são funcionais lineares; vamos agora mostrar que $\mathcal{B}^*$ é, de fato, uma base.

O sistema $\mathcal{B}^*$ é linearmente independente, pois se $\alpha_1 f^1 + \cdots + \alpha^n f^n = 0$ então $(\alpha_1 f^1 + \cdots + \alpha_n f^n)(v) = 0$, e daí,

$$\alpha_1 f^1(v) + \cdots + \alpha_n f^n(v) = 0 \; \forall \, v \in \text{V}.$$

Ora, fazendo-se sucessivamente $v = e_1$, $v = e_2$, $\ldots$, $v = e_n$ obtemos, pela definição dos f^i, que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\ldots$, $\alpha_n = 0$.

Isto mostra que $\mathcal{B}^*$ é linearmente independente. Então, para que $\mathcal{B}^*$ seja uma base, basta mostrar que este gera o espaço V*. Mas todo funcional linear $f \in$ V* é uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}^*$ pois, se $v = \beta^1 e_1 + \cdots + \beta^n e_n$,então $f(v) = f(\beta^1 e_1 + \cdots + \beta^n e_n) = \beta^1 f(e_1) + \cdots + \beta^n f(e_n)$. Como $f^i(v) = \beta^i$, por definição, temos $f(v) = f(e_1)f^1(v) + \cdots + f(e_n)f^n(v) = (\alpha_1 f^1 + \cdots + \alpha_n f^n)(v)$ (chamando $f(e_i) = \alpha_i$; note que estes são nümeros fixos, e independem do vetor v escolhido). Isto é, $f = \alpha_1 f^1 + \cdots + \alpha_n f^n$, demostrando totalmente a afirmação de que $\mathcal{B}$ é base de V*.

Como V e V* tem a mesma dimensão estes são isomorfos, fato este que na teoria clássica dos tensores possibilita certas identificações de formas com vetores e vice-versa, claro, tudo 'nebulosamente' módulo este isomorfismo.

Uma questão com respeito à bases duais, que ainda não foi respondida até aqui, é se cada base de V* é a dual de alguma base de V. Uma maneira de responder a esta questão é considerar o espaço (V*)* = V**, dual de V*.

Se v é um vetor de V, ele induz um funcional linear sobre V* definido por

$$L_v f = f(v). \; \forall \, f \in \text{V}^*.$$

O fato de que L_v é linear é apenas uma reformulação da definição de operações lineares em V*,

$$L_v(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(v) = \alpha f(v) + g(v) = \alpha L_v(f) + L_v(g).$$

Com isto é fácil ver que L:V→ V** é um isomorfismo canônico entre V e V**, ou seja, que não depende de base. Portanto, V '=' V**, a menos de um isomorfismo canônico.

Portanto, podemos dizer que as bases $\mathcal{B} = \{ e_1, \ldots, e_n\}$ de V e $\mathcal{F} = \{ f^1, \ldots, f^n\}$ de V* são duais se, e somente se,

$$f^i(e_k) = \delta^i_k \text{, onde } \delta^i_k \text{ é o } \textit{delta de Kronecker}.$$

Sejam agora V_1 , V_2 e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Uma aplicação $f:V_1 \times V_2 \to W$ é dita *bilinear*, se ela é linear em cada argumento separadamente; isto é, se $v_1, \overline{v_1} \in V_1$, $v_2, \overline{v_2} \in V_2$ e $\alpha, \in \mathbb{F}$,então

$$\begin{aligned} f(\alpha v_1 + \overline{v_1}, v_2) &= \alpha f(v_1, v_2) + f(\overline{v_1}, v_2) \\ f(v_1, \alpha v_2 + \overline{v_2}) &= \alpha f(v_1, v_2) + f(v_1, \overline{v_2}). \end{aligned}$$

A extensão desta definição a funções de mais de duas variáveis é simples, e tais funções são chamadas *funções multilineares.* No caso de k-variáveis nós muitas vezes usamos o termo mais específico *k-linear* , e a definida relação é dada por

$$f(v_1, \ldots, \alpha v_i + \overline{v_i}, \ldots, v_k) = \alpha f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + f(v_1, \ldots, \overline{v_i}, \ldots, v_k)\,,\ 1 \leq i \leq k.$$

Suponha que $f \in V^*$ e $g \in W^*$, isto é, f e g são formas lineares sobre V e W respectivamente. Então obtemos uma função bilinear a valores em $\mathbb{F}$, dada por $f \otimes g: V \times W \to \mathbb{F}$, onde definimos

$$(f \otimes g)(v, w) = f(v)g(w)\,,\ v \in V \text{ e } w \in W.$$

Esta função bilinear é chamada *produto tensorial de f e g*, e lemos 'f tensor g ' .

Funções multilineares podem ser multiplicadas por escalares e, duas funções multilineares de mesma espécie (tendo o mesmo domínio e contra-domínio) podem ser somadas ; em cada caso o resultado é uma função multilinear da mesma espécie. Assim, as funções que são k-lineares e aplicam $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$ em W formam um espaço vetorial, que nós denotaremos por $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k; W)$.

Sejam agora V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{F}$, e V^* seu espaço vetorial dual. Denotamos o produto cartesiano $V \times \cdots \times V$ de q cópias de V por V^q e o produto cartesiano $V^* \times \cdots \times V^*$ de p cópias de V^* por $(V^*)^p$.

Definimos o conjunto $T^{p,q}(V) = \{\ T:(V^*)^p \times V^q \to \mathbb{F}\ /\ T \text{ é } (p+q)\text{-linear}\ \}$ e chamamos a seus elementos *tensores do tipo (p,q) sobre* V. É claro que $T^{p,q}(V)$ é um espaço vetorial , uma vez definidas as operações de soma e multiplicação por escalar da maneira usual.

Como os elementos de $T^{p,q}(V)$ são funções multilineares podemos definir de maneira natural o produto tensorial de $S \in T^{p,q}(V)$ e $T \in T^{r,s}(V)$, como sendo o tensor $S \otimes T \in T^{p+r,q+s}(V)$ que, como sabemos, é definido por

$$\begin{aligned} S \otimes T(v_1^*, \ldots, v_p^*, v_{p+1}^*, \ldots, v_{p+r}^*, v_1, \ldots, v_q, \ldots, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}) &= \\ = S(v_1^*, \ldots, v_p^*, v_1, \ldots, v_q) T(v_{p+1}^*, \ldots, v_{p+r}^*, \ldots, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}), \end{aligned}$$

onde $v_1^*, \ldots, v_{p+r}^* \in V^*$ e $v_1, \ldots, v_{q+s} \in V$.

Note que a ordem dos fatores S e T é crucial pois, $S \otimes T$ e $T \otimes S$ não são iguais no caso geral. Note também que $T^{0,1}(V) = V^*$ e que $T^{1,0}(V) = V$, lembrando que V é canonicamente isomorfo a V^{**}.

Portanto, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V, e $\{e^1, \ldots, e^n\}$ é sua base dual, isto é , $e^i(e_k) = \delta^i_k$, é fácil ver que $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ é um elemento de

$T^{p,q}(V)$ para $1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n$ e $1 \leq j_1, \ldots, j_q \leq n$. Também não é difícil ver que o conjunto $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} / 1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n$ e $1 \leq j_1, \ldots, j_q \leq n\}$ é uma base para o espaço vetorial $T^{p,q}(V)$ e que portanto este tem dimensão n^{p+q}.

Com as considerações feitas acima, dado $T \in T^{p,q}(V)$, a expressão de T na base encontrada para $T^{p,q}$ é dada por

$$T = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} T^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q},$$

onde $T^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}$ são as coordenadas de T na base $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} / 1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n$ e $1 \leq j_1, \ldots, j_q \leq n\}$ de $T^{p,q}(V)$.

> OBS: *Daqui em diande, denotaremos a base dual de uma base dada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ com os índices em cima , ou seja ,$\{e^1, \ldots, e^n\}$, a fim de evitar confusões.*

Segue das nossas definições de produto tensorial, que este satisfaz as seguintes condições :

Proposição 1.3.1 *Sejam* A,B,C $\in T^{p,q}(V)$ *então*

i $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

ii $(\alpha A + \beta B) \otimes C = \alpha(A \otimes C) + \beta(B \otimes C)$. $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

iii $A \otimes (\alpha B + \beta C) = \alpha(A \otimes B) + \beta(A \otimes C)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

iv $A \otimes B = B \otimes A$ *se, e somente se, A e B são linearmente dependentes.*

Dito isto, podemos falar em mudança de coordenadas de um tensor: Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ duas bases de V, e $\{v^1, \ldots, v^n\}$ e $\{u^1, \ldots, u^n\}$ suas respectivas bases duais. Então $u_i = \sum_{k=1}^{n} a^k{}_i v_k$ e $u^i = \sum_{l=1}^{n} b^i{}_l v^l$, onde $(a^k{}_i)$ e $(b^j{}_l)$ são as matrizes de mudança de base de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ para $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e de $\{v^1, \ldots, v^n\}$ para $\{u^1, \ldots, u^n\}$ respectivamente.

Para fixar idéias, seja $A \in T^{1,2}(V)$ então temos que

$$\begin{aligned}
\overline{A}^i{}_{jk} &= A(u^i, u_j, u_k) = A\Big(\sum_{l=1}^{n} b^i{}_l v^l, \sum_{m=1}^{n} a^m{}_j v_j, \sum_{p=1}^{n} a^p{}_k v_p\Big) = \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} b^i{}_l a^m{}_j a^p{}_k A(v^i, v_j, v_k) = \\
&= b^i{}_l a^m{}_j a^p{}_k A^l{}_{mp}.
\end{aligned}$$

(Usando-se a convenção de soma de Einstein.)

No caso geral, se $B \in T^{r,s}(V)$, B pode ser escrito como

$$B = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} B^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q},$$

então chamamos aos índices $i_1, \ldots, i_r$ ***índices contravariantes*** de **B**, **e aos índices** $j_1, \ldots, j_s$ ***índices covariantes*** do tensor B.

Para finalizar, diremos que un tensor é ***simétrico em relação a dois índices contravariantes (ou covariantes)*** se seus componentes permanecem inalterados depois de uma troca de índices entre si. Pode mostrar-se que esa definição não depende da particular base tomada.

Se um tensor é simétrico em relação a dois índices contravariantes e covariantes quaisquer, ele é dito *simétrico*.

> OBS: *Note que não há sentido em definir simetria entre um índice contravariante e um covariante.*

Um tensor é dito ***anti-simétrico em relação a dois índices contravariantes (ou covariantes)*** se seus componentes mudam de sinal quando se trocam entre si os referidos índices. Assim, se o tensor é anti-simétrico em relação a dois índices contravariantes e covariantes quaisquer ele é chamado ***anti-simétrico*** .

1.4 Formas Alternadas e Orientação

Em primeiro lugar, lembremos que uma permutação do conjunto de k elementos $A_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ é uma bijeção σ de A_k em A_k. Denotamos o conjunto de todas as bijeções $\sigma : A_k \to A_k$ por S_k e notamos que este conjunto é de fato um grupo sob a operação de composição de aplicações, chamado ***grupo das permutações de k elementos*** (ou ***grupo simétrico de k elementos***). Note que o número de elementos de S_k é $k!$ e que este grupo, na maioria dos casos, é não-abeliano.

Lembremos também que o sinal de uma permurtação $\sigma \in S_n$ é 1 se σ é par, e -1 se σ é ímpar. Denota-se, em geral, o sinal de $\sigma \in S_n$ por $\text{sinal}(\sigma)$ ou $(-1)^\sigma$.

Seja agora $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz. Recordemos que o determinante de A, $\det(A)$ é definido como

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sinal}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

onde $A = (a_{ij})$, e a soma é feita sobre todos os $n!$ elementos de S_n.

Notamos desta definição que se encaramos as linhas de A como vetores vemos que o determinante é uma função n-linear, ou seja, $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, pertence a

$T^{0,n}(\mathbb{R}^n)$. Além do mais, $\det(v_1,\ldots,v_n)=\det(\alpha_{ij})$, onde $v_1=(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{n1}), 1 \leq i \leq n$ pertencem ao $\mathbb{R}^n$. Portanto, temos que $\det(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_k,\ldots,v_n) = -\det(v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_i,\ldots,v_n), 1 \leq i,k \leq n,\ i \neq k$.

Isto sugere a seguinte definição : Um tensor $\omega \in T^{0,r}(V)$ é dito *alternado* se,

$$\omega(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_k,\ldots,v_r) = -\omega(v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_i,\ldots,v_r),$$

para todos os $v_1,\ldots,v_r \in V$ e $1 \leq i,k \leq r$, $i \neq k$. Na equação acima v_i e v_k são trocados, e todos os outros v's são deixados fixos.

OBS: *Veja que esta é uma generalização natural de determinantes.*

Denotaremos por $\bigwedge^r(V)$ o conjunto de todos os tensores do tipo $(0,r)$ que são alternados. É claro que $\bigwedge^r(V)$ é um subespaço vetorial de $T^{0,r}(V)$.

Como visto há pouco, o aspecto dos determinantes não é muito bonito e é de se esperar que os tensores alternados do tipo $(0,r)$ sejam difíceis de serem escritos formalmente. Existe, no entanto, uma maneira conviniente de expressa-los todos.

Daqui para frente V será um espaço vetorial n-dimensional sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$. Dado então $T \in T^{0,r}(V)$ definimos *alt*(T) por

$$alt(T)(v_1,\ldots,v_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_n} \text{sinal}(\sigma)T(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(r)}),$$

onde $v_1,\ldots,v_r \in V$.

OBS: *É de costume denotar-se os elementos de* $\bigwedge^k(V)$ *por letras gregas* $(\omega,\tau,\varphi,\psi,\ldots)$.

A fim de justificar a definição de *alt*, temos

Teorema 1 *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{R}$. *Temos :*

i *Se* $T \in T^{0,k}(V)$ *então* $alt(T) \in \bigwedge^k(V)$.

ii *Se* $\omega \in \bigwedge^k(V)$ *então* $alt(\omega)=\omega$.

iii *Se* $T \in T^{0,r}(V)$ *então* $alt(alt(T)) = alt(T)$.

Para a prova deste teorema veja [36] .

A fim de determinar a dimensão dos espaços $\bigwedge^k(V)$, vamos definir um novo produto, o chamado ***produto cunha***, para os elementos de $\bigwedge^k(V)$ para diferentes k's.

Antes de mais nada, note que se $\omega \in \bigwedge^k(V)$ e $\tau \in \bigwedge^p(V)$, nós não temos necessariamente que $\omega\otimes\tau \in \bigwedge^{k+p}(V)$, portanto o produto cunha de ω e τ é definido como

$$\omega\wedge\tau = \frac{(k+p)!}{k!p!}alt(\omega\otimes\tau).$$

A razão para o aparecimento deste estranho coeficiente é que sem ele o produto cunha não seria uma operação associativa (veja [16, pag 221] para maiores detalhes). As seguintes propriedades do produto cunha são facilmente verificadas :

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2) \wedge \tau &= \omega_1 \wedge \tau + \omega_2 \wedge \tau \\ \omega \wedge (\tau_1 + \tau_2) &= \omega \wedge \tau_1 + \omega \wedge \tau_2 \\ \omega \wedge \tau &= (-1)^{kp} \tau \wedge \omega \,, \end{aligned}$$

onde $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^k(V)$ e $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \bigwedge^p(V)$.

Existe ainde uma construção que conecta tensores do tipo $(0, k)$ de dois espaços vetoriais.

Sejam f :V→W uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T \in T^{0,k}(W)$, então o *pull-back* $f^*T \in T^{0,k}(V)$ é definido por

$$(f^*T)(v_1, \ldots, v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

para $v_1, \ldots, v_k \in V$.

É também fácil mostrar que $f^*(T \otimes S) = (f^*T) \otimes (f^*S)$ e que $f^*(T \wedge S) = (f^*T) \wedge (f^*S)$ (pode-se mostrar também que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, onde $f : V \to W$ e $g : W \to Z$).

Teorema 2 (Associatividade do produto $\wedge$) *Se $\omega \in \bigwedge^k(V)$, $\tau \in \bigwedge^p(V)$ e $\varphi \in \bigwedge^m(V)$ então*

$$\omega \wedge (\tau \wedge \varphi) = (\omega \wedge \tau) \wedge \varphi = \frac{k + p + m}{k!p!m!} alt(\omega \otimes \tau \otimes \varphi).$$

A demonstração do teorema acima também se encontra em [36, pag 80] .

É claro que denotamos $\omega \wedge (\tau \wedge \varphi)$ e $(\omega \wedge \tau) \wedge \varphi$ por $\omega \wedge \tau \wedge \varphi$ e, produtos de ordem superior $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ são definidos da mesma maneira.

Teorema 3 *Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V, e $\{e^1, \ldots, e^n\}$ sua respectiva base dual, então o conjunto $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} / 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$ é uma base para $\bigwedge^k(V)$, e este portanto tem dimensão $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Demonstração: Como $\omega \in \bigwedge^k(V) \subset T^{0,k}(V)$, podemos escrever $\omega = a_{i_1 \cdots i_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}$. Então como $alt(\omega) = \omega$ vem que $\omega = alt(\omega) = a_{i_1 \cdots i_k} alt(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k})$. Mas como $alt(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k})$ é igual a uma constante vezes $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$, estes elementos geram $\bigwedge^k(V)$, uma vez que ω é uma combinação linear dos mesmos. Demonstrar independência linear é um exercício trivial, assim como no caso de tensores. ■

Segue deste teorema que se V tem dimensão n então a dimensão de $\bigwedge^n(V)$ é 1, e assim vemos que $\det \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$ fornece uma base para o último.

Teorema 4 *Sejam* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base para* V *e* $\omega \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$. *Se* $u_i = \sum_1^n a^j{}_i v_j$ *são* n *outros vetores em* V, *então* $\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(a^j{}_i)\omega(u_1, \ldots, u_n)$.

O teorema acima mostra que uma forma não nula $\omega \in \bigwedge^n(\mathrm{V})$ divide o conjunto das bases de V em duas classes, a saber aquela com $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$ e aquela onde $\omega(v_1, \ldots, v_n) < 0$; se $v_1, \ldots, v_n$ e $u_1, \ldots, u_n$ são duas bases e $\mathrm{A} = (a^i{}_j)$ é definida por $u_j = \sum_1^n a^i{}_j v_i$ então $v_1, \ldots, v_n$ e $u_1, \ldots, u_n$ estão na mesma classe se, e só se, $\det(A) > 0$. Este critério é claramente independente da particular forma $\omega \in \bigwedge^n(\mathrm{V})$ e pode sempre ser usado para dividir as bases de V em duas classes. Cada uma destas classes é chamada uma *orientação* para V. A orientação na qual a base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ pertence é denotada por $[v_1, \ldots, v_n]$ e a outra orientação é denotada por $-[v_1, \ldots, v_n]$. Em $\mathbb{R}^n$ definimos a *orientação usual* como $[e_1, \ldots, e_n]$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

O nome *elemento de volume* vem do fato de que (como $\det \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$ e $\dim(\bigwedge^n(\mathbb{R}^n)) = 1$) dada uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, usando a forma det, encontramos $\det(v_1, \ldots, v_n) =$ *volume do paralelepípedo gerado pelos segmentos de reta de 0 a cada* $v_1, \ldots, v_n$; este volume também é *orientado*, pois o mesmo pode ser positivo ou negativo dependendo se $\{v_1, \ldots, v_n\} \in [e_1, \ldots, e_n]$ ou se $\{v_1, \ldots, v_n\} \notin [e_1, \ldots, e_n]$.

Num espaço vetorial qualquer V, não existe um critério extra para distinguir algum elemento $\omega \in \bigwedge^n(\mathrm{V})$ como no caso de $\mathbb{R}^n$, onde temos naturalmente que $\det \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$. Se supomos, no entanto, que um produto interno $<,>$ é dado para V, então podemos falar em bases ortonormais em relação a este produto interno. Se fixamos uma orientação η para V, segue que existe um único $\omega \in \bigwedge^n(\mathrm{V})$ tal que $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 1$ sempre que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal tal que $[v_1, \ldots, v_n] = \eta$. Este único elemento ω é chamado *elemento de volume de* V, determinado pelo produto interno $<,>$ e a orientação η.

A dependência do produto interno se dá pelo último teorema e pelo fato de não haver uma forma privilegiada em $\bigwedge^n(\mathrm{V})$, ao contrário de $\mathbb{R}^n$. Também o fato da relação entre duas bases ortonormais ser uma matriz ortogonal impõe algumas restrições como veremos posteriormente. Quanto à orientação, esta serve para impor que esta matriz tenha determinante $+1$.

1.5 O Operador Estrela de Hodge

Sejam V um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ e $g : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica e não-degenerada. A forma g induz uma forma bilinear $\tilde{g} \in \mathrm{T}^{0,2}(\bigwedge^k(\mathrm{V}))$, definida abaixo. Sendo $g \in \mathrm{T}^{0,2}(\mathrm{V})$, e sendo $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V, com sua correspondente base dual $\mathcal{B}^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$, temos

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, e^i \otimes e^j,$$

onde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Além disso, como g é não-degenerada, vale $\det(g_{ij}) \neq 0$. Isto nos possibilita definir a matriz (g^{ij}), inversa da matriz (g_{ij}).

Dadas formas $\alpha, \beta \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$, com

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \cdots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$$

e

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \beta_{j_1 \cdots j_k} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}$$

definimos a forma bilinear $\tilde{g}$ por

$$\tilde{g}(\alpha, \beta) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_k = 1 \\ j_1, \ldots, j_k = 1}}^{n} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k}\, \alpha_{i_1 \cdots i_k} \beta_{j_1 \cdots j_k}.$$

é fácil ver que esta definição independe da particular base escolhida, e deste modo, $\tilde{g}$ está bem definida.[2]

Teorema 5 *Sejam g uma forma bilinear sobre* V *e μ o elemento de volume de* V *a esta associado. Então, existe um único isomorfismo canônico $* : \bigwedge^k(\mathrm{V}) \to \bigwedge^{n-k}(\mathrm{V})$, tal que $\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(\alpha, \beta)\mu$, para todos os $\alpha, \beta \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$.*

Demonstração: Para $\eta \in \bigwedge^{n-k}(\mathrm{V})$, definimos $\Theta_\eta : \bigwedge^k(\mathrm{M}) \to \mathbb{R}$ colocando $\Theta_\eta(\alpha)\mu = \alpha \wedge \eta$ para toda k-forma $\alpha \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$. É fácil ver que se $\Theta_\eta(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$ temos $\eta = 0$. Assim, obtemos uma aplicação linear 1-a-1 $D : \bigwedge^{n-k}(\mathrm{V}) \to (\bigwedge^k(\mathrm{V}))^*$ definida por $\eta \mapsto \Theta_\eta$. Para ver que esta aplicação é de fato um isomorfismo, basta ver que

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k(\mathrm{V}))^* = \dim \bigwedge^k(\mathrm{V}) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dim \bigwedge^{n-k}(\mathrm{V}).$$

Vamos ver que $\tilde{g}$ provê um isomorfismo canônico entre $(\bigwedge^k(\mathrm{V}))^*$ e $\bigwedge^k(\mathrm{V})$. Dada $\alpha \in \bigwedge^{n-k}(\mathrm{V})$, definimos uma aplicação $L_\alpha : \bigwedge^k(\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ colocando $L_\alpha(\beta) = \tilde{g}(\alpha, \beta)$ para toda forma $\beta \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$. É fácil ver que a aplicação $E : \bigwedge^k(\mathrm{V})^* \to (\bigwedge^k(\mathrm{V}))^*$ definida por $\alpha \mapsto L_\alpha$ é na verdade um isomorfismo canônico.

Dito isto, dada $\eta \in \bigwedge^{n-k}(\mathrm{V})$ temos $\Theta_\eta \in (\bigwedge^k(\mathrm{V}))^*$, e portanto existe $\beta \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$ tal que $\Theta_\eta(\alpha) = \tilde{g}(\beta, \alpha)$, para toda $\alpha \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$. Isto pode ser visualizado no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^{n-k}(\mathrm{V}) & \overset{D}{\to} & (\bigwedge^k(\mathrm{V}))^* & \overset{E^{-1}}{\to} & \bigwedge^k(\mathrm{V}) \\ \eta & \mapsto & \Theta_\eta & \mapsto & \beta \end{array}.$$

[2] Este fato decorre da maneira pela qual as componentes das k-formas se transformam mediante uma mudança de base.

Como D e E são isomorfismos canônicos, então $D^{-1} \circ E$ também é. Portanto, definimos $*\beta = \eta$, ou ainda, $*\beta = D^{-1}(E(\beta))$. ■

Este teorema afirma mais do que seu enunciado diz. Na verdade, na demonstração pudemos notar que $*$ se fatora como composição de dois isomorfismos canônicos de natureza muito simples. Assim, não é uma tarefa árdua encontrar a expressão de $*$ em termos de coordenadas. De fato, basta determinar de que maneira agem os isomorfismos D e E.

Dada $\beta \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$, temos

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \beta_{i_1 \cdots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

Por meio das coordenadas $\beta_{i_1 \cdots i_k}$, podemos definir um tensor $\widehat{\beta} \in \mathrm{T}^{k,0}(\mathrm{V})$, cujas coordenadas na base $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} / 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$ são definidas por

$$\widehat{\beta}^{j_1 \cdots j_k} = \beta^{j_1 \cdots j_k} = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k} \beta_{i_1 \cdots i_k}.$$

Se $\mathcal{B}$ é uma base de V positivamente orientada com respeito a μ, a expressão do elemento de volume na base $\mathcal{B}^*$ é dada por $\mu = \sqrt{|\det(g_{ij})|}e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$.

Dados números $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$, a função $\sigma : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \{1, \ldots, n\}$ definida por $\sigma(1) = i_1, \ldots \sigma(n) = i_n$ pode ou não ser uma permutação. Se σ não é uma permutação existem pelo menos dois elementos $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $i_r = i_s$ e sendo assim definimos $\mathrm{sinal}(\sigma) = 0$. Se σ é uma pemutação consideramos seu sinal como o usual. Isto nos permite definir o número $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = \mathrm{sinal}(\sigma)$. Portando, se $\mathcal{A} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ é uma base ortonormal positivamente orientada, podemos escrever μ como

$$\mu = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \theta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{i_n},$$

onde $\{\theta^{i_1}, \ldots, \theta^{i_n}\}$ é a base dual da base $\mathcal{A}$.

Coloquemos

$$\mathrm{sinal}(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } \det(g_{ij}) > 0; \\ -1 & \text{se } \det(g_{ij}) < 0. \end{cases}$$

É claro que esta definição independe da particular base $\mathcal{B}$ escolhida, visto que o determinante independe de base.

Por meio das considerações feitas acima, pode-se calcular as componentes de $*\beta$ em uma base positivamente orientada.

Corolário 5.a *Suponhamos que $\mathcal{B}$ seja uma base positivamente orientada com respeito ao elemento de volume μ. Então se $\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots j_k \leq n} \beta_{j_1 \cdots j_k} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k} \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$ temos:*

(1) $*\beta = \frac{1}{k!}\sqrt{|\det(g_{ij})|} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \beta^{j_1\cdots j_k}\, \varepsilon_{j_1\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_n}\, e^{j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes e^{j_n}$,

(2) $**\beta = \mathrm{sinal}\,(g)(-1)^{k(n-k)}\omega$. ■

Este corolário é uma conseqüência direta da definição do operador $*$. Para informações sobre a demonstração deste corolário, veja [7,8].

> Obs: *O objeto ε pode ser também visto como um elemento de $\bigwedge^n(\mathrm{V})$. Para isso, considere $e_{i_1},\ldots,e_{i_n} \in \mathcal{B}$ e defina $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ colocando $\sigma(1) = i_1,\ldots,\sigma(n) = i_n$. Se σ é uma permutação defina* $\mathrm{sinal}\,(\sigma)$ *como de costume, caso contrário defina* $\mathrm{sinal}\,(\sigma) = 0$. *Coloque agora $\varepsilon(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) = \mathrm{sinal}\,(\sigma)$. Para que ε seja um elemento de $\bigwedge^n(\mathrm{V})$ basta estende-la de modo multilinear a $(\mathrm{V})^n$, isto é, exigindo que esta seja linear em cada argumento.*

Capítulo 2

Análise no $\mathbb{R}^n$ e em Espaços de Banach

2.1 Elementos de Topologia Geral

Sejam X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Dizemos que $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ é uma *topologia* em X se τ satisfaz as seguintes propriedades :

i. $\emptyset$, X $\in \tau$.

ii. Se $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ então $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

iii. Uma união qualquer de elementos de τ está em τ.

Se τ satisfaz **i** a **iii** chamamos ao par (X,τ) de *espaço topológico*, e aos elementos $A \in \tau$ de *abertos* (de X na topologia τ).

Exemplos:

1. Seja X um conjunto qualquer, tome τ como sendo :
   - $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ (esta é a chamada *topologia caótica*).
   - $\tau_2 = \mathcal{P}(X)$ (*topologia discreta*).
2. Seja X= $\mathbb{R}$, a reta real e tome $\tau = \{(a,b) = \{t \in \mathbb{R}/a < t < b\}$ e uniões desses intervalos $\}$.
3. Sejam $X = \mathbb{R}^n$ e $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n/\|x - x_0\| < \delta\}$ a bola de centro em x_0 e raio δ. Definimos : $A \subset \mathbb{R}^n$ é *aberto* se $\forall y \in A$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \subset A$. Tome agora τ como sendo o conjunto de todos os A's com esta propriedade.

Sejam agora M um conjunto e d :M×M→ $\mathbb{R}_+$ (reais ≥ 0) uma função. Dizemos que o par (M,d) é um *espaço métrico* se d satisfaz :

i. $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in$ M.

ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in$ M.

d satisfazendo **i** a **iii** é chamada *métrica* em M.

Exemplos: Seja M = $\mathbb{R}^n$, considere as seguintes definições de d :

1. $d_1(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. $d_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

3. $d_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

Notemos que dado um espaço métrico (M,d) este tem uma topologia natural τ_d, induzida pela métrica d, dada por

$$\tau_d = \{\text{A} \subset \text{M}/\forall x \in \text{A}\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \text{B}_\varepsilon(x) \subset \text{A}\},$$

onde $\text{B}_\varepsilon(x) = \{y \in \text{M}/d(x,y) < \varepsilon\}$. Portanto, vemos que (M,τ_d) é um espaço topológico. A topologia τ_d é chamada ***topologia induzida pela métrica d***.

Definição 2.1 *Seja* (X,τ) *um espaço topológico. Dizemos que* A $\subset$ X *é* fechado *se* $\text{A}^C = \text{X}-\text{A}$ *é aberto, ou seja,* $\text{A}^C \in \tau$.

Sejam (X,τ) um espaço topológico e A $\in$ X. Dizemos que $x \in$ X é um ***ponto de** acumulação* de A se $\forall$ U $\in \tau$, $x \in$ U, tem-se $[\text{U}-\{x\}] \cap \text{A} \neq \emptyset$. Se esta condição é trocada pela condição mais fraca U∩A$\neq \emptyset$, então x e chamado ***ponto aderente.***

Definição 2.2 *Sejam* (X,τ) *um espaço topológico e* A⊂X, $\tau_A = \{\text{U} \cap \text{A}/\text{U} \in \tau\}$ *é chamada* topologia induzida em A,*e* (A,τ_A) *é chamado* subespaço topológico de (X,τ).

Definição 2.3 *Seja* A⊂X, $\overline{\text{A}} = \{x \in \text{X}/x$ *é ponto de acumulação de* A$\}\cup$A *é chamado* fecho de A.

Teorema 6 *Sejam* (X,τ) *um espaço topológico e* A⊂X. *Então,*

i. $\overline{\text{A}}$ *é fechado.*

ii. *A é fechado se, e somente se,* A= $\overline{\text{A}}$.

Podemos ter (X,τ_1) e (X,τ_2) onde $\tau_1 \neq \tau_2$. Se por exemplo $\tau_1 \subset \tau_2$, dizemos que τ_2 é uma topologia *mais fina* que τ_1.

Definição 2.4 *Dizemos que* A⊂X *é* denso *em* X *se* $\overline{\text{A}}$ = X.

Definição 2.5 *Um espaço topológico que contém um subconjunto denso e enumerável é dito* separável.

Definição 2.6 *Um espaço topológico* (X,τ) *é dito* conexo *se os únicos subconjuntos de* X *que são simultaneamente abertos e fechados são* $\emptyset$ *e* X.

Teorema 7 (X,τ) *é conexo se, e somente se,* X *não é a união disjunta de dois abertos não vazios.*

Em problemas reais, o teorema acima é bem mais aplicativo que a definição de conexidade.

Sejam (X,τ) um espaço topológico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família onde $U_\alpha \subset$X para cada α ∈A. Dado Y⊂X, dizemos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma *cobertura aberta* de Y se Y⊂ $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Definição 2.7 *Sejam* (X,τ) *um espaço topológico e* Y⊂X. *Dizemos que* Y *é* compacto *se para toda cobertura aberta* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de* Y *existe uma subcobertura finita* $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$, *da cobertura dada, que ainda cobre* Y, *ou seja,* Y⊂ $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow$Y⊂ $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Teorema 8 *Seja* (X,τ) *um espaço topológico. Se* Y⊂X *é compacto e* A⊂X *é fechado, então* A∩X *é compacto.*

Definição 2.8 *Um espaço topológico* (X,τ) *é dito ser de* Hausdorff *se para todos os* x, y ∈X, *com* $x \neq y$, *existem abertos* U *e* V *em* τ *tais que* $x \in$ U *e* $y \in$ V *com* U∩V = $\emptyset$.

Teorema 9 *Se* X *é de Hausdorff e* Y⊂X *é compacto, então* Y *é fechado.*

Teorema 10 *Todo subconjunto compacto de um espaço euclideano é fechado e limitado.*

Definição 2.9 *Sejam* (X,τ_X) *e* (Y,τ_Y) *espaços topológicos. Dizemos que uma função* $f : X \to Y$ *é* contínua *se, e somente se, a imagem inversa de um aberto de* Y *é um aberto de* X, *ou seja,* $\forall$ V $\in \tau_Y$ *temos* $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Teorema 11 *Seja $f : X \to Y$ contínua. Então*

i. *Se $A \subset X$ é compacto então $f(A) \subset X$ é compacto.*

ii. *Se $A \subset X$ é conexo então $f(A) \subset X$ é conexo.*

Definição 2.10 *Seja $f : X \to Y$ bijetora. Então dizemos que f é um* homeomorfismo *se f e f^{-1} são contínuas.*

Dizemos que dois espaços topológicos (X,τ_X) e (Y,τ_Y) são *homeomorfos* se existe um homeomorfismo entre eles. Neste caso X e Y são o mesmo objeto do ponto de vista topológico.

Dado um espaço topológico (X,τ) e coberturas $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ e $\{B_\beta\}_{\beta\in\Sigma}$ de X, dizemos que $\{A_\alpha\}$ *refina* $\{B_\beta\}$ (ou que é um *refinamento* de $\{B_\beta\}$) se para cada A_α existe algum B_β com $A_\alpha \subset B_\beta$.

Definição 2.11 *Uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é dita* localmente finita *se cada ponto de X tem uma vizinhança V tal que $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para no máximo um número finito de índices $\alpha \in \Lambda$.*

Seja (X,τ) um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que X é *paracompacto* se para cada cobertura aberta de X, existe um refinamento aberto que é localmente finito.

Dado um espaço topológico (X,τ), o suporte de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é, por definição, o conjunto fechado

$$\overline{\{x \in X / f(x) \neq 0\}}.$$

Observe que x não está no suporte de f se, e somente se, x possui uma vizinhança em que f se anula identicamente.

Definição 2.12 *Seja Y um espaço de Hausdorff. Uma família $\{\varphi_\alpha / \alpha \in \Lambda\}$ de aplicações contínuas de Y em $[0,1] \subset \mathbb{R}$ é chamada uma* partição da unidade *se:*

i. *Os suportes das φ_α formam uma cobertura localmente finita (fechada) de Y.*

ii. $\sum_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(y) = 1$ *para cada $y \in Y$ (esta soma está bem definida pois cada y pertence ao suporte de, no máximo, um número finito de φ_α's).*

Dada uma cobertura aberta $\{B_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ de Y, dizemos que a partição da unidade $\{\varphi_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ está *subordinada* a $\{B_\beta\}$ se o suporte de cada φ_β está dentro do correspondente U_β. (Note que tanto a cobertura quanto a partição da unidade são indexadas pelo mesmo conjunto de índices.)

Teorema 12 *Um espaço topológico* (X,τ) *é paracompacto se, e somente se, para cada cobertura aberta* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *existe uma partição da unidade a esta subordinada .*

Partições da unidade provém um método poderoso para se expandir propriedades locais em propriedades globais, como por exemplo o fato que toda variedade admite uma métrica Riemanniana, como veremos mais adiante.

No que segue trataremos de propriedades específicas de espaços métricos.

Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de pontos de um espaço métrico (M,d) é dita ser uma *sequência de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n \geq n_\varepsilon$ temos $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.Também pode-se provar que toda sequência convergente é de Cauchy.

Dizemos que um espaço métrico é *completo* se toda sequência de Cauchy for convergente, que é a recíproca da afirmação anterior.

Teorema 13 (Heine-Borel) *Sejam* (M,d) *um espaço métrico e* $K \subset M$. *São equivalentes a seguintes propriedades :*

i. K *é compacto.*

ii. *Todo subconjunto infinito de* K *possui um ponto de acumulação.*

iii. *Toda sequência em* K *possui uma subsequência convergente.*

iv. K *é completo e totalmente limitado.*

Aqui, por totalmente limitatdo entendemos que dado $\varepsilon > 0$, *pode-se obter uma decomposição* $K = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, *de* K *como união de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tendo diâmetro menor que* ε.

2.2 Espaços Normados e Espaços com Produto Interno

Dado um espaço vetorial E sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, uma *norma* sobre E é uma aplicação $\| \ \| : E \to \mathbb{R}_+$, com $x \mapsto \|x\|$, que satisfaz as seguintes propriedades :

N1 $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, para todo $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

N2 $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

N3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in E$.

Um *espaço normado* é um espaço vetorial munido de uma norma.

Em um espaço normado E, a função $(x, y) \in E \mapsto d(x,y) = \|x - y\|$ é uma métrica e consideraremos sempre um espaço normado como munido dessa métrica e a topologia dela deduzida. Um espaço normado completo chama-se um *espaço de Banach*.

Exemplos:

1. Sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, a função $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto |\lambda| = [\lambda\overline{\lambda}]^{1/2} \in \mathbb{R}_+$ é uma norma. Do fato de $\mathbb{R}$ ser completo segue que $\mathbb{C}$ é completo.

2. Dado um espaço métrico compacto K, indiquemos por $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ ao conjunto das funções contínuas definidas em K a valores complexos. Considere sobre $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ a função :
$$x \in \mathcal{C}(\mathrm{K}) \mapsto \|x\| = \sup_{t \in \mathrm{K}} |x(t)| \in \mathbb{R}_+ .$$
É quase que trivial ver que $\| \ \|$ assim definida é uma norma em $\mathcal{C}(\mathrm{K})$. Pode-se mostrar que $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ munido dessa norma é completo.

3. Considere sobre $\mathbb{R}^n$ a seguinte função :
$\| \ \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definida por $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$. Com a ajuda das desigualdades de Hölder e de Minkowski pode-se mostrar que $\| \ \|_p$ é uma norma sobre $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $1 \leq p \leq \infty$, onde o caso $p = \infty$ é entendido como o limite $\lim\limits_{p \to \infty} \| \ \|_p$. (Esta norma é chamada de *norma p*.)

Teorema 14 (Desigualdades de Hölder e Minkowski)

Desigualdade de Hölder *Sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então dados* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *temos* $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$, *onde* $\|xy\| = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$. *Este resultado também vale para* $x, y \in \mathcal{C}([a, b])$.

Desigualdade de Minkowski *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ *se* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *ou* $x, y \in \mathcal{C}([a, b])$.

OBS: *Para* $x \in \mathcal{C}([a, b])$ *a norma p é definida como* $\|x\|_p = (\int_a^b |x(t)|\, dt)^{1/p}$.

Sejam E, F espaços normados, respectivamente com normas $\| \ \|_{\mathrm{E}}$ e $\| \ \|_{\mathrm{F}}$. Dizemos que uma transformação linear T:E$\to$F é *contínua* se existe $\mathrm{M} \geq 0$ tal que $\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{M}\|x\|_{\mathrm{E}}$, para todo $x \in$E.

Dados espaços normados E e F, $\mathcal{L}$(E,F) denota o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas de E em F. Note que podemos munir $\mathcal{L}$(E,F) com a seguinte norma:
$$\|\mathrm{T}\| = \sup_{\substack{x \in \mathrm{E} \\ x \neq 0}} \frac{\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{F}}}{\|x\|_{\mathrm{E}}}.$$
com isso segue facilmente que se F é Banach então $\mathcal{L}$(E,F) também é Banach.

Antes de prosseguirmos o estudo dos espaços de Banach e discutirmos análise em espaços normados, vamos falar um pouco a respeito de espaços de Hilbert.

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um ***produto interno*** sobre E é um funcional $<,>:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{C}$, com $(x,y)\mapsto<x,y>$ que satisfaz as seguintes propriedades :

H1 $$\begin{aligned} <x_1+x_2,y> &= <x_1,y>+<x_2,y>; \quad <\lambda x,y>=\lambda<x,y>, \\ <x,y_1+y_2> &= <x,y_1>+<x,y_2>; \quad <x,\lambda y>=\overline{\lambda}<x,y>. \end{aligned}$$

H2 $<x,y>=\overline{<y,x>}$;

H3 $<x,x>\geq 0$;

H4 $<x,x>=0$ se, e somente se, $x=0$.

Se definimos $\|x\|=(<x,x>)^{1/2}$ vemos que vale a ***desigualdade de Cauchy-Schwarz*** : para quaisquer $x,y\in \mathrm{E}$ temos $|<x,y>|\leq\|x\|\,\|y\|$. Além disso segue facilmente que $\|\ \|$ assim definida é de fato uma norma.

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado ***espaço pré-hilberteano.***

Consideraremos sempre um espaço pré-hilberteano munido da norma deduzida de seu produto interno e da métrica correspondente

$$d(x,y)=\|x-y\|=(<y-x,y-x>)^{1/2}.$$

Um espaço pré-hilberteano que é completo com relação á métrica deduzida de sua norma chama-se *espaço de Hilbert.*

Exemplos:

1. Considere $\mathbb{C}^n$ com o produto interno dado por $<x,y>=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$, onde $z\in\mathbb{C}^n$, $z=(z_1,\ldots,z_n)$. A métrica deduzida deste produto interno é dada por $(x,y)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\mapsto d(x,y)=\|y-x\|=(|x_1-y_1|^2+\cdots+|y_n-x_n|^2)^{1/2}$. Com isso temos que $\mathbb{C}^n$ é um espaço de Hilbert.

2. Considere $\mathcal{C}([a,b])$, o espaço vetorial das funções contínuas definidas em $[a,b]$ a valores reais. O funcional $<,>: \mathcal{C}([a,b])\times\mathcal{C}([a,b])\to\mathbb{R}$, com $(x,y)\mapsto\int_a^b x(t)y(t)\,dt\in\mathbb{R}$ é claramente um produto interno; entretanto com este produto interno $\mathcal{C}([a,b])$ não é completo (na verdade para que tivessemos completude teriamos de considerar as funções integráveis no sentido de Lebesgue).

Teorema 15 (Da representação de Riez) *Sejam* E *um espaço de Hilbert e* $f\in \mathrm{E}^*=\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})$ *um funcional linear contínuo. Então existe um, e só um elemento* $y\in\mathrm{E}$ *tal que* $f(x)=<x,y>$ *para todo* $x\in\mathrm{E}$. *Além disso temos* $\|y\|=\|f\|$.

Dizemos que uma família $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de vetores de E é *ortonormal*, e escrevemos ***o.n.*** se temos $<e_\alpha,e_\beta>=\delta_{\alpha\beta}$ para todos os $\alpha,\beta\in\Lambda$. Temos com isso as componentes $x_\alpha=<x,e_\alpha>$, para um vetor $x\in\mathrm{E}$, na direção e_α.

Vamos agora estender o conceito de base a um espaço de Hilbert. Diremos que um sistema ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma *base hilberteana* (ou simplesmente base – não confundir com base algébrica !) de E se satisfaz as condições abaixo :

B1 Para todo $x \in$ E temos

$$x = \sum_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha e_\alpha$$

(isto é, a família $(x_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é *somável* e tem por soma x).

B2 Para quaisquer $x, y \in$ E temos

$$< x, y >= \sum_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha \overline{y_\alpha}$$

(esta é a *identidade de Parseval*).

B3 $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |x_\alpha|^2$ (identidade de Bessel).

B4 O conjunto das combinações lineares finitas dos $e_\alpha, \alpha \in \Lambda$ é denso em E, isto é, dado $x \in$ E e $\varepsilon > 0$, existe uma combinação linear finita $\sum_{\alpha\in\Omega} \lambda_\alpha e_\alpha$ tal que

$$\|x - \sum_{\alpha\in\Omega} \lambda_\alpha e_\alpha\| \leq \varepsilon,$$

sendo que $\Omega \subset \Lambda$ é um conjunto finito.

B5 Todo funcional linear contínuo T:E$\to\mathbb{C}$ que é nulo sobre todos os e_α, $\alpha \in \Lambda$, é identicamente nulo.

Dizemos que o sistema o.n. satisfazendo **B1** a **B5** é um *sistema o.n. completo* ou um *sistema o.n. fechado* ou ainda um *sistema o.n. total.*

> OBS: *Em* **B1**, *usamos o termo* somável, *isto é, dizemos que uma família* $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de vetores de um espaço normado Z é somável e tem por soma* $z \in$ Z *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe uma parte finita* $\Omega_\varepsilon \subset \Lambda$ *tal que, para qualquer parte finita* Ω, $\Omega_\varepsilon \subset \Omega \subset \Lambda$, *temos*
>
> $$\|z - \sum_{\alpha\in\Omega} z_\alpha\| \leq \varepsilon.$$

Feitas estas considerações a respeito dos espaços de Hilbert, vamos falar um pouco da topologia dos espaços de Banach.

Dizemos que duas normas $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ sobre um espaço vetorial E são *equivalentes* se elas definem a mesma topologia, ou equivalentemente, se existem constantes $a, b > 0$ tais que para todo $x \in$ E temos $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$. Isto garante que todas as bolas que geram as topologias possam ser construidas umas das outras, afirmando que as topologias coincidem.

Com esta definição alguns resultados são facilmente verificados :

Teorema 16 *Sobre um espaço vetorial* E *de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.*

Corolário 16.a *Todo subespaço vetorial, de dimensão finita, de um espaço normado é completo.*

Corolário 16.b *Sejam* E, F *espaços normados, com* E *de dimensão finita. Então toda aplicação linear de* E *em* F *é contínua.*

2.3 Cálculo Diferencial em Espaços de Banach

Sejam E, F espaços de Banach e U⊂E um aberto; dizemos que uma função f :U→F é *diferenciável no ponto a* ∈ U quando existe uma aplicação linear T ∈ $\mathcal{L}$(E,F) tal que

$$f(a+v) = f(a) + \mathrm{T}v + r(v), \text{ onde } \lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{\|v\|_{\mathrm{E}}} = 0.$$

Aqui supõe-se tacitamente que $a + v \in$ U, onde $v \in$E, para que $f(a+v)$ tenha sentido. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $\|v\|_{\mathrm{E}} < \delta \Rightarrow a + v \in$U. A igualdade acima é a definição do *resto* $r(v)$. Uma vez dada T, a diferenciabilidade de f no ponto a tem sua essência na afirmação de que $r(v)$ é infinitésimo em relação a v, o que se exprime com $\lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{\|v\|_{\mathrm{E}}} = 0$.

Em alguns casos, para evitar as exceções causadas pelo denominador zero, é conveniente por o resto sob a forma $r(v) = \rho(v)\|v\|$, onde a aplicação ρ é definida, para todo v tal que $a + v \in$ U, por $\rho(v) = \frac{r(v)}{\|v\|}$ se $v \neq 0$, e $\rho(0) = 0$. Então a diferenciabilidade de f no ponto a se exprime como

$$f(a+v) = f(a) + \mathrm{T}v + \rho(v)\|v\|, \text{ onde } \lim_{v\to 0}\rho(v) = 0,$$

de modo que ρ é contínua no ponto 0.

Também temos a *derivada direcional* de f no ponto a e na direção do vetor v, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

onde pode-se mostrar que $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ =Tv, onde T é a aplicação linear descrita acima, dada pela diferenciabilidade de f no ponto a.

A aplicação linear T descrita acima é chamada *derivada de f no ponto a* e indicada pelas notações $f'(a)$ ou $Df(a)$.

Dizemos que f é *diferenciável em* U se f é diferenciável em todo ponto $x \in$ U, e dizemos que f é *continuamente diferenciável em* U – escrevemos $f \in \mathcal{C}(\mathrm{U,F})$ – se a função $x \in \mathrm{U} \mapsto f'(x) \in \mathcal{L}(\mathrm{E,F})$ é contínua.

Exemplos:

1. Uma *transformação linear* T: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$ e $\mathrm{T}'(x) = \mathrm{T}$. De fato, por linearidade, $\mathrm{T}(x+v) = \mathrm{T}x + \mathrm{T}v$ logo $r(v) = 0$ e $\mathrm{T}'(x) = \mathrm{T}$.

2. Uma *transformação bilinear* B: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e sua derivada é a transformação linear $\mathrm{B}'(x,y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definida por
$$\mathrm{B}'(x,y)(h,k) = \mathrm{B}(x,k) + \mathrm{B}(h,y).$$
De fato, como B é contínua, existe $c > 0$ tal que $\|\mathrm{B}(h,k)\| \leq c\,\|h\|\,\|k\|$ para todo $(h,k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Ora, como B é bilinear temos
$$\mathrm{B}(x+h, y+k) = \mathrm{B}(x,y) + \mathrm{B}(x,k) + \mathrm{B}(h,y) + \mathrm{B}(h,k).$$
Portanto nossa afirmação ficara demonstrada quando provarmos que
$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\mathrm{B}(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$
Usando em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a norma da soma vem $\|(h,k)\| = \|h\| + \|k\|$ e daí,
$$\frac{\|\mathrm{B}(h,k)\|}{\|(h,k)\|} = \frac{\|\mathrm{B}(h,k)\|}{\|h\| + \|k\|} \leq c\frac{\|h\|\,\|k\|}{\|h\| + \|k\|} \leq c\|h\| \text{ e daí } \lim_{(h,k)\to 0} \frac{\|\mathrm{B}(h,k)\|}{\|(h,k)\|} = 0.$$

3. O processo descrito no exemplo anterior pode ser facilmente generalizado para o caso de uma *aplicação multilinear* qualquer.

4. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, temos $f = (f_1, \ldots f_p)$ onde $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daí, se f é diferenciável no ponto a então podemos expressar $f'(a)$ em forma matricial. Lembrando que $\partial f/\partial e_i = \partial f/\partial x_i$ por definição, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Temos então a matriz
$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$
que é chamada *matriz jacobiana* de f no ponto a. (Note que neste processo simplesmente obtemos a matriz da transformação linear $f'(a)$, e não há sentido nisso para espaços de dimensão infinita.)

Dados espaços de Banach E, F, G, abertos U⊂E, V⊂F e uma função f :U×V→G tal que fixado y_0 ∈V, a função $x \in$ U $\mapsto f(x, y_0) \in$ G é diferenciável no ponto x_0, indicamos sua derivada por $D_1 f(x_0, y_0)$. De modo análogo definimos $D_2 f(x_0, y_0)$. A existência de $Df(x_0, y_0) \in \mathcal{L}$(E×F,G) implica a existência de $D_1 f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}$(E,G) e, de $D_2 f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}$(F,G) e, para todo par (h, k) ∈E×F, temos

$$Df(x_0, y_0)(h, k) = D_1 f(x_0, y_0)\, h + D_2 f(x_0, y_0) k.$$

A recíproca não vale nem quando E = F = G = $\mathbb{R}$. De fato, a recíproca é verdadeira se, e somente se, $D_1 f : \Omega \to \mathcal{L}$(E,G) e $D_2 f : \Omega \to \mathcal{L}$(F,G) são contínuas em todos os pontos de Ω. Neste caso, existe $Df : \Omega \to \mathcal{L}$(E×F,G) e é contínua.

Teorema 17 (A Desigualdade do Valor Médio) *Sejam* E, F, *espaços de Banach,* $x, y \in$ E *e* f : U → F *uma função continuamente diferenciável, onde* U⊂E *é um aberto que contém o segmento* $[x, y] = \{x + t(y - x) \subset \text{E}/0 \leq t \leq 1\}$. *Então temos*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'[x + t(y - x)]\|.$$

Teorema 18 (Regra da Cadeia) *Sejam* E, F, G *espaços de Banach,* U∈E e V∈F *abertos e aplicações contínuas* f : U → V *e* g : V → G*; suponha que* f *é diferenciável no ponto* x_0 *e* g *diferenciável no ponto* $f(x_0) \in$ V. *Então* $g \circ f$ *é diferenciável no ponto* x_0 *e vale* $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \circ f'(x_0)$.

Vamos terminar esta seção fazendo algumas considerações, que serão de grande importância mais adiante, a respeito das derivadas de algumas aplicações diferenciáveis e sua relação com alguns operadores que nos lembram muito o operador gradiente de $\mathbb{R}^n$.

Sejam E, F espaços de Banach, $U \subset$ E × F aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável em $a \in U$. Daquilo que vimos anteriormene, vale que

$$Df(a)\, v = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}, \ \forall\, v \in \text{E} \times \text{F}.$$

De fato, $Df(a)$: E × F → $\mathbb{R}$ é uma transformação linear, e sabemos então do capítulo anterior que $Df(a) \in (\text{E} \times \text{F})^*$.

Dado $v \in$ E × F temos $v = (u, w)$, e portanto definimos

$D_1 f(a)$: E → $\mathbb{R}$, onde $D_1 f(a)\, u = Df(a)\, (u, 0)$;

$D_2 f(a)$: F → $\mathbb{R}$, onde $D_2 f(a)\, w = Df(a)\, (0, w)$.

Com isso, $Df(a) v = Df_1(a) u + Df_2(a) w$. Na verdade, se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in U$, temos: $a = (a_1, a_2)$ e $f|_{\text{E}}$ diferenciável em a_1, visto que

$$f|_{\text{E}}(a_1 + u) = f|_{\text{E}}(a_1) + Df|_{\text{E}}(a_1)\, u + r_1(u),,$$

onde $r_1(u) = r(u, 0)$. Segue que $Df|_{\text{E}}(a_1) = D_1 f(a)$. O mesmo raciocínio vale para $f|_{\text{F}}$.

Suponhamos agora que E é um espaço de Hilbert com produto interno $<,>$ e $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in U$. Pelo que acabamos de ver, $Df(a) \in E^*$. Portanto, o teorema da representação de Riez diz que existe um vetor $v_f \in E$ tal que $Df(a)u =< v_f, u >$ para todo $u \in E$. Vamos explicitar um pouco mais nossa construção. Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma base ortonormal para E, temos a expressão para v_f dada por

$$v_f = \sum_{\alpha\in\Lambda} {v_f}^\alpha e_\alpha,$$

onde ${v_f}^\alpha = Df(a)\, e_\alpha$. Com efeito, dado $w \in E$, $w = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} w^\alpha e_\alpha$, e com isso,

$$\begin{aligned} < v_f, w > &= \langle \sum_{\beta\in\Lambda} {v_f}^\beta e_\beta, \sum_{\alpha\in\Lambda} w^\alpha e_\alpha \rangle = \sum_{\beta,\alpha\in\Lambda} {v_f}^\beta w^\beta < e_\alpha, e_\beta >= \\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda} w^\alpha {v_f}^\alpha = \sum_{\alpha\in\Lambda} Df(a)\, [w^\alpha e_\alpha] = \\ &= Df(a)\, w. \end{aligned}$$

No caso em que E é de dimensão finita, obtemos $v_f = \sum\limits_{i=1}^{n} {v_f}^i e_i$, onde ${v_f}^i = Df(a)\, e_i$.

Se supormos f diferenciável em U, podemos definir um operador ∇, por

$$< \nabla f(a), u >= Df(a)\, u, \ \forall\, u \in E \text{ e } \forall\, a \in U.$$

É claro que este operador está bem definido, e das considerações acima, este sempre existe se f é diferenciável. No caso de dimensão finita este operador nada mais é que o gradiente. Note que não precisariamos supor a existência de uma base em E, pois o teorema da representação de Riez garante a existência de $\nabla f(a)$ apenas supondo existir $Df(a)$.

Se E e F são espaços de Hilbert, com produtos internos $<,>_E$ e $<,>_F$, respectivamente, e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável no ponto a do aberto $U \subset E \times F$, vimos primeiro que $D_1 f(a) \in E^*$ e $D_2 f(a) \in F^*$. Ora, estas formas lineares induzem vetores $\nabla_1 f(a) \in E$ e $\nabla_2 f(a) \in F$, onde $< \nabla_1 f(a), u >_E = D_1 f(a)\, u$, $< \nabla_2 f(a), w >_F = D_2 f(a)\, w$, para todos os vetores $u \in E$ e $w \in F$. Portanto, estão bem definidos os operadores ∇_1 e ∇_2. Se f é de classe C^k, $\nabla_1 f$ e $\nabla_2 f$ são de classe C^{k-1}. Nos casos de dimensão finita os operadores $\nabla_1 f$ e $\nabla_2 f$ são facilmente calculados.

Como também E$\times$F é um espaço de Hilbert, está definido $\nabla f(a) \in E \times F$, com $\nabla f(a) = (\nabla_1 f(a), \nabla_2 f(a))$. Mais geralmente, podemos dizer que o operador ∇ 'fatora-se' como $\nabla = \nabla_1 \times \nabla_2$, onde definimos $[\nabla_1 \times \nabla_2](f)|_a = (\nabla_1 f(a), \nabla_2 f(a))$.

O processo descrito acima pode ser generalizado para um número finito de espaços de Hilbert, ou seja, se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no ponto a do aberto $U \subset E_1 \times \cdots E_n$, onde $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Hilbert, ficam definidos os vetores $\nabla_1 f(a), \ldots, \nabla_n f(a)$, onde $< \nabla_k f(a), u >_{E_k} = D_k f(a)\, u$, sendo $1 \leq k \leq n$ e $u \in E_k$. Portanto, ficam definidos os operadores $\nabla_1, \ldots, \nabla_n$ da mesma maneira, gozando da propriedade $\nabla = \nabla_1 \times \cdots \times \nabla_n$.

O operador ∇ definido acima é chamado *operador gradiente* e os operadores $\nabla_1, \ldots, \nabla_n$, são ditos ser uma *fatoração* de ∇.

2.4 Os Teoremas da Função Inversa e da Função Implicita

Sejam X e Y espaços métricos não vazios, e indiquemos por d suas métricas. Dizemos que uma aplicação $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ é uma *contração* se existe uma constante real c, com $0 \leq c < 1$, tal que para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ temos

$$d(\mathrm{T}x_1, \mathrm{T}x_2) \leq c\, d(x_1, x_2).$$

Dizemos que c é a *constante de contração de T*. Evidentemente uma contração é uma função uniformemente contínua. Quando $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, dizemos que T é uma contração de X.

Teorema 19 (Do Ponto Fixo de Banach) *Sejam* X *um espaço métrico completo e* $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *uma contração. Então:*

i. *Existe um único ponto* $\overline{x} \in \mathrm{X}$ *tal que* $\mathrm{T}\overline{x} = \overline{x}$.

ii. *Qualquer que seja* $x_1 \in \mathrm{X}$, *a sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, *onde* $x_{n+1} = \mathrm{T}^n x_1$, *converge a* $\overline{x}$; *onde* T^n *denota a* n*-ésima iterada de* T, *isto é,* $\mathrm{T}^2 = \mathrm{ToT}$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{ToT}^{n-1}$.

Este teorema é uma das bases para a teoria das equações, pois é através dele que se demonstra, por exemplo, o teorema da existência e unicidade para soluções de equações diferenciais e, para equações integrais.

Este teorema não é somente 'moral', ou seja, que diga que existe uma solução mas que é impossível de ser encontrada na prática. Muito pelo contrário, no processo de demonstração deste teorema se obtém o chamado *método das aproximações sucessivas*. Por exemplo, considere a equação integral linear de Fredholm de segunda espécie

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, y(s)\, ds\,,$$

onde $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ é contínua. Ora, E= $C([a,b],\mathbb{C})$ é um espaço métrico completo (quando munido da morma sup). Seja T:E→E definido por

$$(\mathrm{T}y)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, y(s)\, ds,$$

onde $t \in [a,b]$.

Um ponto fixo de T é, evidentemente, solução do nosso problema e vice-versa. Ora, vamos então estudar as condições para que T seja uma contração , e daí o teorema do ponto fixo de Banach nos garante que existe um único ponto fixo $\overline{x}$ $\in$E tal que T$\overline{x} = \overline{x}$.

Dados $x, y \in$E, temos
$(\mathrm{T}x)(t) - (\mathrm{T}y)(t) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,[x(s) - y(s)]\,ds$ e portanto, encontramos $\|\mathrm{T}x - \mathrm{T}y\| = \sup_{t\in[a,b]} |\lambda \int_a^b K(s,t)\,[x(s) - y(s)]\,ds| \leq \sup_{t\in[a,b]} |\lambda| \int_a^b |K(s,t)|\,|x(s) - y(s)|\,ds \leq$ $\leq \|x - y\|\,|\lambda| \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|\,ds$. Como $[a,b] \times [a,b]$ é compacto temos que $|K|$ assume um máximo e um mínimo nele, digamos que M$= \max_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} |K(s,t)|$.

Segue então que $\|\mathrm{T}x - \mathrm{T}y\| \leq \|x - y\|\,|\lambda|\,\mathrm{M}(b-a)$. Ora, para que T seja uma contração basta que $c = |\lambda|\,\mathrm{M}(b-a) < 1$, ou seja, que $|\lambda| < 1/\mathrm{M}(b-a)$.

Com isso, pelo teorema do ponto fixo de Banach, garantimos que (com $|\lambda|$ nas condições acima) a equação integral em questão tem uma única soluc cão.

Pode-se ainda usar o teorema do ponto fixo de Banach para demonstrar o teorema da existência e unicidade para soluções de equações diferenciais parciais, e até fazer algumas aplicações ao problema de Sturn-Liouvile, mas não faremos essas considerações aqui.

Teorema 20 (Da Perturbação da Identidade) *Sejam* E *um espaço de Banach,* U$\subset$E *um aberto e* $f :$ U $\to$ E *uma contração; seja* $g = I + f$, *onde* I *é a aplicação identidade em* E. *Então* g *é um homeomorfismo de* U *sobre um aberto de* E.

Teorema 21 (Da Função Inversa) *Sejam* E *e* F *espcços de Banach;* U$\subset$E *um aberto e* g :U$\to$F *uma função continuamente diferenciável tal que, num ponto* $x_0 \in$ E, *a aplicação linear* $g'(x_0)$ *seja um homeomorfismo linear de* E *sobre* F *(quando* E$= \mathbb{R}^n$ *isto equivale a dizer que o determinante da matriz jacobiana* $(\partial g_i/\partial x_j)(x_0)$ *seja, não nulo. ou ainda, que a transformação linear* $g'(x_0)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *é injetora). Então existe um aberto* A *de* x_0 *tal que* $g|_{\mathrm{A}}$ *é uma aplicação biunívoca e continuamente diferenciável de* A *sobre o aberto* g(A) *e* $(g|_{\mathrm{A}})^{-1}$ *também é continuamente diferenciável.*

O teorema da função inversa é um dos teoremas centrais da análise, e tem aplicação em praticamente todas as áreas da matemática. Como aplicações deste teorema. vamos mencionar dois resultados fundamentalmente importantes : o *Lema de Morse* e o *Teorema da Função Implícita.* Antes porém de começarmos, umas poucas definições são importantes.

Um *sistema de coordenadas* (curvilíneas) de classe C^k num aberto U$\subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo (isto é, uma aplicação inversível e diferenciável cuja inversa também é diferenciável) ξ :V$\to$U, de classe C^k, definido num aberto V$\subset \mathbb{R}^n$. As coordenadas de um ponto $p \in$U no sistema ξ são os múmeros $y_1, \ldots, y_n$ tais que $y = (y_1, \ldots, y_n) \in$V e $\xi(y) = p$.

Teorema 22 (Lema de Morse) *Seja a um ponto crítico não degenerado de $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ (isto significa que $\nabla f(a) = 0$, mas que $\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a) \neq 0$, isto é, a matriz hessiana é um isomorfismo). Considere ainda f de classe C^k, com $k \geq 3$, num aberto $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n$. Existe então um sistema de coordenadas $\xi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, de classe C^{k-2}, com $a \in \mathrm{W} \subset \mathrm{U}$, $0 \in \mathrm{V}$ e $\xi(0) = a$, tal que*

$$(f \circ \xi)(y) - f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, y_i\, y_j\,,$$

para todo $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{V}$, onde

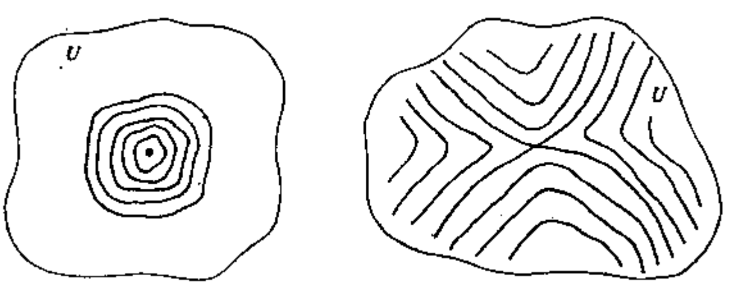
$$a_{ij} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a).$$

Corolário 22.a *Nas condições do lema de Morse, existe um sistema de coordenadas $\psi : \mathrm{V}_0 \to \mathrm{W}$, de classe C^{k-2}, com $a \in \mathrm{W} \subset \mathrm{U}$, $0 \in \mathrm{V}_0$, $\psi(0) = a$ e*

$$(f \circ \psi)(y) - f(a) = -{y_1}^2 - \cdots - {y_i}^2 + {y_{i+1}}^2 + \cdots + {y_n}^2.$$

O número i que aparece no corolário acima chama-se o *índice do ponto crítico* a. Quando $i = n$, o ponto a é um máximo local para f; se $i = 0$, a é um ponto de mínimo local. Para $0 < i < n$, tem-se um ponto de sela de índice i.

Resulta do corolário acima para $n = 2$, que curvas de nível na vizinhança de um ponto crítico não degenerado de uma função $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$, definida num aberto do plano, tem uma das formas abaixo:



À esquerda temos um ponto de máximo ou de mínimo; à direita um ponto de sela.

O lema de Morse pode ser facilmente generalizado a variedades diferenciáveis, como veremos mais adiante.

Teorema 23 (Da Função Implícita) *Sejam* E, F *e* G *espaços de Banach; sejam* $\mathrm{U} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{V} \subset \mathrm{F}$ *abertos e $f : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \to \mathrm{G}$ uma função continuamente diferenciável; seja $(a, b) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V}$ tal que $D_2 f(a, b)$ seja um homeomorfismo linear de* F *sobre* G *(quando $\mathrm{E} = \mathbb{R}^k$ e $\mathrm{F} = \mathbb{R}^n$, isto equivale a dizer que o determinante da matriz jacobiana*

$[(\partial f_i/\partial y_j)(a,b)]$ é não nulo). Seja $f(a,b) = c$; então existe uma vizinhança aberta $U_0 \times V_0$ de (a,b) tal que para todo $x \in U_0$ existe um, e só um elemento $u(x) \in V_0$ com $f[x, u(x)] = c$. A função $u : U_0 \to V_0$ é continuamente diferenciável (e $u(a) = b$). Além disso temos que $u'(x) = -[D_2 f(x, u(x))]^{-1} \circ D_1 f(x, u(x))$.

Este teorema segue do teorema da função inversa e tem também inúmeras aplicações. Como exemplo mencionamos o resultado seguinte.

Sejam X um espaço de Banach e $K : [a,b] \times [a,b] \times X \to X$ uma função contínua tal que existe e é contínua $D_3 K : [a,b] \times [a,b] \times X \to \mathcal{L}(X)$.

Seja agora $g_0 \in \mathcal{C}([a,b],X)$ tal que a equação integral

$$y(t) = g_0(t) + \int_a^t K[t, s, y(s)]\, ds \; t \in [a,b],$$

tem uma solução $u_{g_0} \in \mathcal{C}([a,b],X)$; então existe $\delta > 0$ tal que, para $g \in B_\delta(g_0)$ em $\mathcal{C}([a,b],X)$, a equação integral

$$y(t) = g(t) + \int_a^t K[t, s, y(s)]\, ds \; t \in [a,b],$$

tem uma, e somente uma solução $u_g \in \mathcal{C}([a,b],X)$, e a aplicação $g \in B_\delta(g_0) \mapsto u_g \in \mathcal{C}([a,b],X)$ é continuamente diferenciável.

Capítulo 3

Variedades Diferenciáveis

3.1 Cartas, Atlas, Espaços Tangentes e Subvariedades

Seja M um conjunto. Um *atlas de clase* C^p $(p \geq 0)$ sobre M é uma coleção de pares $\{(U_i, \xi_i)/i \in I\}$ (I é um conjunto de índices), satisfazendo:

AT1 Cada U_i é um subconjunto de M, e $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

AT2 Cada ξ_i é uma bijeção de U_i sobre um subconjunto aberto $\xi_i(U_i)$ de algum espaço de Banach E_i, e para cada par $i, j \in I$, $\xi_i(U_i \cap U_j)$ é aberto em E_i.

AT3 A aplicação

$$\xi_j \circ \xi_i^{-1} : \xi_i(U_i \cap U_j) \to \xi_j(U_i \cap U_j)$$

é um difeomorfismo de classe C^p para cada par de índices $i, j \in I$.

Um atlas em um conjunto M induz, de uma maneira natural, uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M, se $\xi_i(A \cap M)$ é um aberto de E_i, para todo $i \in I$. É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de modo que os conjuntos $\xi_i(U_i)$ são abertos e as aplicações ξ_i são contínuas.

Cada par (U_i, ξ_i) será chamado uma *carta* do atlas. Se um ponto x de M está em U_i, dizemos então que (U_i, ξ_i) é uma *carta em x*.

Na condição **AT2**, não requeremos que os espaços de Banach sejam os mesmos para todos os índices $i \in I$. Na verdade se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a regra da cadeia nos diz que E_i e E_j são isomorfos como espaços de Banach, isto é, existe $f : E_i \to E_j$ que é um homeomorfismo linear.

Se todos os E_i são o mesmo espaço, dizemos que o atlas $\{(U_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ é um E-*atlas*, onde $E_i = E \; \forall i \in I$.

Suponha que seja dado um subconjunto aberto U de M e um homeomorfismo ξ :U$\rightarrow$U$'$ sobre um subconjunto aberto U$'$ de algum espaço de Banach E. Dizemos que o par (U,ξ) é *compatível* com o atlas $\{(U_i, \xi_i)\}_{i\in I}$ se cada aplicação $\xi_i \circ \xi^{-1}$ (definida na adequada intersecção, como em **AT3**) é um difeomorfismo de classe C^p. Dois atlas são ditos serem *compatíveis* se cada carta de um é compatível com o outro atlas. Com isso verifica-se que a relação de compatibilidade é uma relação de equivalência. Uma classe de equivalência de atlas de classe C^p sobre M é dita definir uma *estrutura de variedade* C^p *sobre* M. Se todos os espaços de Banach E_i em algum atlas são isomorfos, então podemos sempre encontrar um atlas equivalente para o qual eles são todos iguais, digamos ao espaço de Banach E. Nós dizemos então que M é uma E-*variedade*, ou que M é *modelada* sobre E.

Se E $= \mathbb{R}^n$ para um n fixo, dizemos que a variedade é de *dimensão n* (ou *n-dimensional*). Neste caso, uma carta ξ :U$\rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por $\xi(p) = (\xi_1(p), \ldots, \xi_n(p))$, $\forall p \in$ U. É comum, no entanto, denotarmos as funções ξ_i :U$\rightarrow \mathbb{R}$ por x_i, dando realmente às funções x_i o sentido de 'coordenadas'. Assim, $\xi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$, $\forall p \in$ U. As funções x_i são chamadas *funções coordenadas* (ou simplesmente *coordenadas*) da carta (U,ξ). Assim $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$:U$\rightarrow \mathbb{R}^n$.

Se M é uma variedade e U um conjunto aberto de M, é possível induzir uma esrutura de variedade sobre U, tomanto como atlas as intersecções $\{(U_i \cap U, \xi_i|_{U_i\cap U})\}_{i\in I}$.

Sejam M e N variedades e f :M$\rightarrow$N uma aplicação. Dizemos que f é *diferenciável de classe* C^k *em* $x \in$ M, se existe uma carta (U,ξ) em x e uma carta (V,ψ) em $f(x)$ tais que f(U)$\subset$V, e a aplicação

$$\psi \circ f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \rightarrow \psi(V)$$

é diferenciável e de classe C^k no ponto $\xi(p)$.

É imediato que esta definição não depende das particulares cartas escolhidas. Portanto, dizemos que variedades M e N são *difeomorfas* se existe f :M$\rightarrow$N tal que $\psi \circ f \circ \xi^{-1}$ é um difeomorfismo para quaisquer cartas (U,ξ) em M e (V,ψ) em N.

Uma variedade P é dita ser uma *subvariedade* de uma variedade M se P é um subespaço topológico de M, a aplicação inclusão j :P$\hookrightarrow$M é diferenciável, e em cada ponto $p \in$P a derivada da aplicação $\psi \circ j \circ \xi^{-1}$: ξ(V)$\rightarrow \psi$(U) é injetora, onde (U,ξ) é uma carta em p e (V,ψ) uma carta em $j(p)$.

O passo seguinte generaliza cálculo desenvolvido para espaços de Banach à variedades arbitrárias.

Sejam M uma variedade, $\mathcal{F}$(M) o conjunto de todas as funções de classe C^∞ de M a valores em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e p um ponto de M.

> OBS: *Para nós, o termo diferenciável significará o mesmo que de classe* C^∞, *caso contrário diremos explicitamente.*

Um *vetor tangente* a M no ponto p é uma função v : $\mathcal{F}$(M)$\rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $v(af+bg) = av(f) + bv(g)$

2. $v(f\,g) = v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g)$,

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$.

Para cada ponto $p \in$M seja $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ o conjunto de todos os vetores tangentes a M no ponto p. As definições usuais de adição de funções e multiplicação por escalar fazem de $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, dependendo sobre que corpo os espaços de Banach E_i, das cartas de M, são definidos). Explicitamente ,

$$\begin{aligned}(v+u)(f) &= v(f) + u(f),\\ (\lambda\, v)(f) &= \lambda\, v(f),\end{aligned}$$

para todos os $v, u \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$, $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ é chamado o ***espaço tangente** a M em p*.

Dadas variedades M e N, e uma função ϕ :M$\rightarrow$N que é diferenciável no ponto $p \in$ M, podemos falar na derivada da aplicação ϕ como sendo uma aplicação linear entre os espaços tangentes $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ e $\mathrm{T}_{\phi(p)}(\mathrm{N})$. Note primeiro que se $v \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$, vamos definir a função $v_\phi : \mathcal{F}(\mathrm{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f \in \mathcal{F}(\mathrm{N}) \mapsto v_\phi(f) = v(f \circ \phi)$. Para provarmos que v_ϕ é um vetor tangente a N em $\phi(p)$, devemos mostrar que este satisfaz a definição de vetor tangente, acima. A parte 1. é trivial, vamos portanto mostrar somente a parte 2. . Sejam $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$, então

$$\begin{aligned}v_\phi(f\,g) &= v[(f\,g)\circ\phi] = v[(f\circ\phi)\,(g\circ\phi)] =\\ &= v(f\circ\phi)\,g(\phi(p)) + f(\phi(p))\,v(g\circ\phi) =\\ &= v_\phi(f)\,g(\phi(p)) + f(\phi(p))v_\phi(g).\end{aligned}$$

Para cada $p \in$ M, a função $d\phi_p$ (ou $\phi'(p)$ ou $D\phi(p)$) definida por $v \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M}) \mapsto d\phi_p(v) = v_\phi \in \mathrm{T}_{\phi(p)}(\mathrm{N})$ é chamada ***diferencial da aplicação** ϕ **em** p* (ou ***derivada*** de ϕ em p). Assim $d\phi_p$ é caracterizada pela equação

$$[d\phi_p(v)](g) = v(g \circ \phi)$$

para todo $v \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ e $g \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$. Segue que a diferencial em um ponto é uma aplicação linear.

Para o caso de variedades de dimensão finita temos uma expressão mais explícita para estes resultados.

Suponha que M seja uma variedade de dimensão finita, e que as cartas sejam definidas tendo suas imagens em $\mathbb{R}^n$. Para definir derivação parcial sobre M, o esquema é mover a função f :M$\rightarrow \mathbb{R}$ para $\mathbb{R}^n$ por meio de uma carta de M. Para tanto seja (U,ξ) uma carta em $p \in$ M. Se $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f\circ\xi^{-1})}{\partial u_i}(\xi(p)),$$

onde $1 \leq i \leq n = \dim(\mathrm{M})$, $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$:U$\to$ $\mathbb{R}^n$ e $u_1, \ldots, u_n$ são as funções coordenadas $\mathbb{R}^n$.

Um cálculo rápido mostra que a função

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathcal{F}(\mathrm{M}) \to \mathbb{R}$$

que associa a cada $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ é um vetor tangente a M em p.

Teorema 24 *Seja* (U,ξ) *uma carta em* $p \in$ M, *com* $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$. *Então seus vetores coordenados* $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$ *formam uma base para* $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$, *e*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p,$$

para todo $v \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$.

Se M é uma variedade de classe C^k chamamos ao conjunto TM$= \bigcup_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ ***fibrado tangente*** de M. Este conjunto pode ser munido com uma estrutura de variedade de classe C^{k-1}, de uma maneira natural. Não entraremos em detalhes quanto a esta construção.

3.2 Campos de Tensores e Formas Diferenciais

Daqui por diante todas as nossas variedades serão consideradas tendo dimensão finita[1] e sobre $\mathbb{R}^n$, isto é, as cartas (U_i, ξ_i) de um atlas para uma variedade M serão tais que ξ_i :U$\to$ $\mathbb{R}^n$, com as ξ_i's tendo as imagens em um mesmo $\mathbb{R}^n$, é claro também que $n < \infty$. Caso contrário, faremos menção explícita.

Definição 3.1 *Um* campo de vetores V *em uma variedade* M *é uma correspondência que a cada ponto* p *de* M *associa um vetor* $V_p \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$.

Se V é um campo de vetores sobre M e $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ denotaremos por Vf a função a valores reais definida por

$$(Vf)(p) = V_p(f) \text{ para todo ponto } p \in \mathrm{M}.$$

Então dizemos que V é diferenciável se Vf é diferenciável para toda $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$.

[1] De fato não precisariamos fazer tal imposição se não quizéssemos considerar bases finitas para os espaços tangentes. Pode-se considerar o produto tensorial de uma maneira inteiramente abstrata.

Campos de vetores sobre M podem ser adicionados, ou multiplicados por uma função $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, de uma maneira óbvia :

$$(fV)_p = f(p)V_p,$$
$$(V + W) = V_p + W_p \text{ para todo } p \in \mathrm{M}.$$

Se (U,ξ) é uma carta em M, $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, então para cada $1 \leq i \leq n$ o campo de vetores $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ sobre U, que associa para cada ponto $p \in$ M o vetor $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ é chamado o *i-esimo campo de vetores coordenado* de ξ. Estes campos de vetores são diferenciáveis, pois $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Segue imediatamente que qualquer campo de vetores V pode ser expresso como

$$V = \sum_{i=1}^{n} V(x_i)\,\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{em U.}$$

Uma *derivação* sobre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$ é uma função $D : \mathcal{F}(\mathrm{M}) \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ que satisfaz:

1. $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$,

2. $D(f\,g) = D(f)\,g + f\,D(g)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$.

A definição de vetores tangentes mostra que para um campo de vetores V, a função $f \mapsto Vf$ é uma derivação sobre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$ (claro, se V é diferencável). Reciprocamente, toda derivação D sobre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$ provém de um campo de vetores. De fato, para cada $p \in$ M, defina $V_p : \mathcal{F}(\mathrm{M}) \to \mathbb{R}$ por $V_p(f) = D(f)(p)$. As propriedades de derivação 1. e 2. acima implicam que V_p é um vetor tangente a M em p; assim V é um campo de vetores bem definido sobre M. Mas $Vf = D(f) \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ para toda $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$. Então V é diferenciável e determina a derivação D.

Daqui para diante, sempre que conveniente, consideraremos campos de vetores como derivações sobre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$.

O conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis de M é denotado por $\mathcal{X}(\mathrm{M})$. Note que temos em $\mathcal{X}(\mathrm{M})$ a operação $[V, W] = V\,W - W\,V$, $\forall V, W \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$, que muni $\mathcal{X}(\mathrm{M})$ com uma estrutura de álgebra de Lie. $[V, W]$ é chamado o *comutador* (ou *colchete*) de V e W.

Em termos da definição original de campos de vetores, $[V, W]$ associa a cada $p \in$ M o vetor tangente $[V, W]_p$ tal que

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

Definição 3.2 *Uma* distribuição Γ de dimensão k *sobre uma variedade diferenciável* M *é uma regra que associa a todo ponto* $x \in$ M *um subespaço k-dimensional* Γ_x *de* $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$. *Dizemos que* Γ *é diferenciável se, e somente se, todo ponto* $x \in$ M *possui uma vizinhança* U *e* k *campos diferenciáveis de vetores* $V^1, \ldots, V^k$ *definidos em* U *tais que* $V^1_y, \ldots, V^k_y$ *formam uma base de* Γ_y *em cada ponto* $y \in U$.

O conjunto $\{V^1, \ldots, V^k\}$ é chamado uma *base local* para a distribuição Γ em uma vizinhança de x.

Dizemos que um campo de vetores V, definido em um aberto U, pertence à distribuição Γ se $V_x \in \Gamma_x$ para todo $x \in U$. Dizemos que a distribuição Γ é ***involutiva***, se para todos os V, W pertencentes a Γ, $[V, W]$ pertence a Γ.

Uma distribuição diferenciável Γ é involutiva se (e somente se), os colchetes $[V_i, V_j]$ de qualquer base local $V_i, \ldots, V_k$ pertencem a Γ.

Definição 3.3 *Seja Γ uma distribuição diferenciável sobre uma variedade diferenciável* M. *Dizemos que uma subvariedade* N *de* M *é uma* variedade integral *da distribuição Γ se Γ_x coincide com o espaço tangente* T_xN *para todo ponto $x \in$* N

Dizemos que esta variedade integral é *maximal*, se toda variedade integral que a contém, coincide com ela.

Teorema 25 *Seja Γ uma distribuição diferenciável involutiva sobre uma variedade diferenciável* M. *Através de todo ponto $x \in$* M, *passa uma única variedade integral maximal* M(x). *Qualquer variedade integral contendo x é uma subvariedade aberta de* M(x). ■

Para a demonstração deste resultado veja [11, pags. 92-94].

As 1-formas sobre uma variedade M são objetos duais a campos de vetores. Em um ponto $p \in$ M, o espaço dual $T_p(M)^*$ ao espaço $T_p(M)$ é chamado ***espaço cotangente*** de M em p. Elementos de $T_p(M)^*$ – algumas vezes chamados covetores – são aplicações lineares de $T_p(M)$ em $\mathbb{R}$.

Definição 3.4 *Uma* 1-forma *θ sobre uma variedade* M *é uma função que associa a cada ponto $p \in$* M *um elemento θ_p do espaço cotangente* $T_p(M)^*$.

Se θ é uma 1-forma sobre M e V é um campo de vetores em M, denotemos por θV a função de M a valores reais cujo valor em cada ponto $p \in$ M é dado por $\theta_p(V_p)$. Dizemos então que θ é diferenciável se θV é diferenciável para todo $V \in \mathcal{X}(M)$

Seja $\mathcal{X}(M)^*$ o conjunto de todas as 1-formas diferenciáveis sobre M. Duas 1-formas podem ser adicionadas e uma 1-forma pode ser multiplicada por uma função a valores reais, exatamente como no caso para campos de vetores.

Definição 3.5 *A* diferencial *de $f \in \mathcal{F}(M)$ é a 1-forma df tal que $(df)_p(v) = v(f)$ para todo vetor tangente $v \in T_p(M)$ e todo ponto $p \in$M.*

Esta definição realmente faz sentido, pois em cada ponto $p \in$ M a função $(df)_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$ é linear, e se V é um campo de vetores a função $(df)(V) = V(f)$ é diferenciável.

Seja (U,ξ) uma carta de M, $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, nós temos então as *1-formas coordenadas* $dx_1, \ldots, dx_n$ sobre U, que provém das funções x_i :U$\to$ IR. A cada ponto de U, estas provém uma base dual à base dos campos de vetores coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ pois $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_k}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$. segue então que para qualquer 1-forma θ,

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta(\frac{\partial}{\partial x_i})\, dx_i\,, \text{ sobre U.}$$

Em particular, se $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ então temos a conhecida expressão

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Feitas as considerações básicas de campos de vetores e formas, podemos facilmente definir campos de tensores.

Dado $p \in$ M, temos o espaço vetorial tangente $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$, daí podemos formar os tensores do tipo (r, s) sobre este espaço vetorial como feito no capítulo 1. Então seja $\mathrm{T}_p^{r,s}(\mathrm{M}) = \mathrm{T}^{r,s}(\mathrm{T}_p(\mathrm{M}))$, o espaço vetorial dos tensores do tipo (r, s) sobre $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$.

Definição 3.6 *Um* campo tensorial T do tipo (r,s) *sobre uma variedade* M *é uma função que associa a cada ponto* $p \in$ M *um tensor* $T_p \in \mathrm{T}_p^{r,s}(\mathrm{M})$.

Se $r = 1$ e $s = 0$, obtemos os campos de vetores, isto é, campos de tensores do tipo $(0, 1)$.

Se $r = 0$ e $s = 1$, obtemos as 1-formas, e se $r = s = 0$, então T associa a cada ponto de M um escalar, ou seja, T é uma função de M em IR.

Dizemos que um tensor T *é simétrico*, se seu valor em cada ponto p, T_p é um tensor simétrico. Define-se anti-simetria de um modo análogo.

Se T é um campo de tensores do tipo (r, s), $\theta_1, \ldots, \theta_r$ 1-formas e, $V_1, \ldots, V_s$ campos de vetores, definimos uma função a valores reais, com domínio na intersecção de todos os $r + s + 1$ domínios (de T, θ's e V's) por

$$T(\theta_1, \ldots, \theta_r, V_1, \ldots, V_s)|_p = T_p(\theta_1|_p, \ldots, \theta_r|_p, V_1|_p, \ldots, V_s|_p).$$

Em particuilar, as componentes de T com respeito às coordenadas $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ são, por definição, as funções a valores reais

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = T(dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_r}, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}).$$

Um campo de tensores T do tipo (r, s) é dito ser diferenciável, se para todas as 1-formas diferenciáveis $\theta_1, \ldots, \theta_r$, e todos os campos diferenciáveis de vetores

$V_1, \ldots, V_n$, a função $T(\theta_1, \ldots, \theta_r, V_1, \ldots, V_s)$ é diferenciável. Como os tensores são aplicações lineares, vem que os campos de tensores são aplicações $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-lineares.

Dada uma carta (U,ξ), onde $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, temos que para cada ponto $p \in \mathrm{U}$, $(\partial/\partial x_i)|_p$, $1 \leq i \leq n$ é uma base para $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$, e $dx_i|_p$, $1 \leq i \leq n$ é uma base para $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})^*$. Definindo, como de costume, os campos de vetores e as 1-formas coordenados obtemos que nesta carta,

$$T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \ldots \otimes dx_{j_s},$$

para os campos de tensores diferenciáveis do tipo (r, s). Sendo que $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ são definidas como acima. Segue disto que

$$T|_p = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right|_p \otimes dx_{j_1}|_p \otimes \ldots \otimes dx_{j_s}|_p .$$

Consequentemente T *é diferenciável em um ponto* $p \in \mathrm{U}$ se, as funções $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis em p. É claro que as duas definições de diferenciabilidade para campos de tensores são equivalentes, e além disso o produto tensorial estende-se a campos de tensores.

Lema 3.2.1 *Existe uma única função* $C : \mathrm{T}^{1,1}(\mathrm{M}) \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$, *que chamamos* (1,1)-contração, *tal que* $C(V \otimes \theta) = \theta(V)$ *para todo* $V \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$ *e* $\theta \in \mathcal{X}(\mathrm{M})^*$.

Um esboço da demonstração é considerar $A \in \mathrm{T}^{1,1}(\mathrm{M})$ em uma carta local, e daí, obtemos que $C(A) = A^i{}_i = A(dx_i, \partial/\partial x_i)$ (estamos usando a covenção de soma), onde como de costume, os índices superiores denotam as componetes contravariantes e os inferiores as componentes covariantes.

Para estender a noção de contração a tensores de maior ordem, o esquema é especificar uma posição covariante e uma contravariante então aplicar C.

Suponha que $T \in \mathrm{T}^{r,s}(\mathrm{M})$, $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$. Fixe 1-formas $\theta_1, \ldots, \theta_{r-1}$ e campos de vetores $V_1, \ldots, V_{s-1}$. Então a função

$$(\theta, V) \mapsto T(\theta_1, \ldots, \theta, \ldots, \theta_{r-1}, V_1, \ldots, V, \ldots, V_{s-1}),$$

onde θ se encontra na i-ésima posição covariante e V na j-ésima posição contravariante, é um campo de tensores do tipo $(1,1)$ que pode ser escrito como $T(\theta_1, \ldots, \cdot, \ldots, \theta_{r-1}, V_1, \ldots, \cdot, \ldots, V_{s-1})$. Aplicando-se a contração $(1,1)$ a este tensor produzimos uma função a valores reais que vamos denotar por

$$(C^i_j T)(\theta_1, \ldots, \theta_{r-1}, V_1, \ldots, V_{s-1}).$$

Evidentemente $(C^i_j T)$ é um tensor do tipo $(r-1, s-1)$, chamado ***contração de T sobre*** i, j.

Para fixar idéias, considere $T \in \mathrm{T}^{2,3}(\mathrm{M})$ e seja (U,ξ) uma carta de M, $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$. Então temos nesta carta,

$$T = T^{m\,k}{}_{i\,j\,l} \frac{\partial}{\partial x_m} \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} \otimes dx_i \otimes dx_j \otimes dx_l$$

e as componentes de $C_3^1 T$ são

$$\begin{aligned} ((C_3^1 T)^i_{jk} &= (C_3^1 T)(dx_k, \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) = C[T(\cdot, dx_k, \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j, \cdot)] = \\ &= \sum_{m=1}^{n} T(dx_m, dx_k, \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j, \partial/\partial x_m) = \\ &= \sum_{m=1}^{n} T^{m\,k}{}_{i\,j\,m}. \end{aligned}$$

Segue disso que

$$C_3^1 T = \sum_{m=1}^{n} T^{m\,k}{}_{i\,j\,m} \frac{\partial}{\partial x_k} \otimes dx_i \otimes dx_j\,,$$

que é um tensor do tipo $(1,2)$. Note que podemos contrair qualquer índice contravariante com qualquer índice covariante.

Um campo de tensores de especial interesse em física-matemática, é o chamado *tensor métrico.*

Definição 3.7 *Um* tensor métrico g *sobre uma variedade* M *é um campo de tensores do tipo* $(0,2)$ *sobre* M, *que é diferenciável, tem índice constante e é simétrico e não-degenerado em cada ponto de* M.

Em outras palavras, g associa a cada ponto $p \in$M um tensor do tipo $(0,2)$ g_p no espaço tangente $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ de maneira diferenciável. Além disso, $g_{ij} = g_{ji}$, $\det(g_{ij}) \neq 0$ e o índice[2] de g_p, que é $\mathrm{tr}(g_{ij})$, é o mesmo para todo $p \in$M. O par (M,g) é chamado *variedade semi-riemanniana* .

Variedades semi-riemannianas são de grande importância para a física-matemática, pois uma classe especial destas, as chamadas variedades *lorentzianas* são usadas para modelar o espaço-tempo em que vivemos.

Definição 3.8 *Uma variedade semi-riemanniana* (M,g) *é chamada* variedade lorentziana *se para cada ponto* $p \in$ M *é possível encontrar uma base em* $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ *tal que a matriz de* g_p *nessa base é diag*$(1, -1, -1, \ldots, -1)$.

Na Seção 5.4 do Capítulo 5, introduziremos a noção de orientabilidade para variedades diferenciáveis. No entanto, além deste conceito, existe o conceito de *orientabilidade no tempo*, que serve para definir o que chamamos *espaço-tempo*, um modelo para nosso mundo real. Para maiores informações a respeito de orientabilidade no tempo veja [31,32].

[2] g_{ij} são as coordenadas de g em alguma carta em p. Lembre-se que traço de uma matriz independe de base.

Definição 3.9 *Um* espaço-tempo *é uma variedade lorentziana quadridimensional conexa, não compacta, Hausdorff, paracompacta, orientável e orientável no tempo.*

As condições de conexidade, Hausdorff e paracompacidade são as definições usuais para variedades que podemos classificar como 'mais interessantes' do ponto de vista matemático, enquanto a condição de não-compacidade tem uma razão física muito séria, que reside no fato de não admitirmos em nosso universo linhas tipo-tempo fechadas[3]. Para maiores detalhes sobre este assunto, veja por exemplo [5,29].

[3]Este fato desagrada alguns matemáticos, frente à tentação de se considerar variedades compactas, pela riqueza de propriedades obtidas de tal fato. O detalhe reside apenas na diferença de se estudar matemática e física de nosso mundo real.

Capítulo 4

Grupos de Lie

4.1 Grupos Topológicos Ações e Quocientes

Considere $S^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$, com a topologia usual, induzida de $\mathbb{C}$. Além da estrutura topológica, podemos dotar S^1 de uma estrutura de grupo, de maneira a 'respeitar' a estrutura topológica. Vamos ser mais explícitos definindo

$$m : S^1 \times S^1 \to S^1 \ \textit{multiplicação},$$

onde $m : (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \mapsto e^{i(\alpha+\beta)}$ e

$$I : S^1 \to S^1 \ \textit{inversão},$$

onde $I : e^{i\alpha} \mapsto e^{-i\alpha}$.

As duas funções acima são contínuas, de modo que temos juntas as estruturas algébrica e topológica.

Definição 4.1 *Um* grupo topológico G, *é um espaço topológico, munido de uma estrutura de grupo compatível com a estrutura topológica, no sentido que as funções multiplicação*

$$\begin{array}{rccl} m: & G \times G & \to & G \\ & (g,h) & \mapsto & m(g,h) \quad \textit{(denotada simplesmente por } g\,h\textit{)}, \end{array}$$

e inversão

$$\begin{array}{rccl} i: & G & \to & G \\ & g & \mapsto & i(g) \quad \textit{(denotada por } g^{-1}\textit{)}, \end{array}$$

são contínuas

As funções m e i serão sempre denotadas como entre os parênteses acima, por simplicidade.

Em uma forma mais completa, podemos definir grupo topológico como segue:

1. Se g e h são elementos do grupo G, para todo aberto W$\subset$G, com $g, h \in$ W, existem abertos U, V de G, com $g \in$ U e $h \in$ V, tais que UV$\subset$W.

2. Se $g \in$ G, para todo aberto V$\subset$G, com $g^{-1} \in$ V, existe um aberto U, com $g \in$ U, tal que U^{-1} $\subset$V.

   Não é difícil ver que as condições 1 e 2 podem ser substituidas pela condição:

3. Se $g, h \in$ G, para todo W$\subset$G, com $gh^{-1} \in$ W, existem abertos U, V de G, com $g \in$ U e $h \in$ V, tais que UV^{-1} $\subset$W.

Exemplos:

1. A reta real $\mathbb{R}$ com a estrutura de grupo dada pela adição de números reais.

2. O círculo S^1 com a estrutura de grupo dada no começo desta seção.

3. Qualquer grupo abstrato G, com a topologia discreta.

4. A esfera tridimensional S^3, considerada como a esfera unitária no espaço dos quatérnios $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, i, j, k,$ onde $ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1)$.

5. O espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, com a adição usual de vetores.

6. O grupo $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ reais inversíveis, com a multiplicação usual de matrizes. A topologia é a induzida pela inclusão $GL(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$.

$$A = (a_{ij}) \mapsto (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn}).$$

Os termos *isomorfismo* e *subgrupo* no contexto de grupos topológicos devem levar em consideração as duas estruturas existentes, algébrica e topológica. Assim:

Definição 4.2 *Um* isomorfismo *entre grupos topológicos é um isomorfismo de grupos que é também um homeomorfismo. De maneira análoga, um* subgrupo *de um grupo topológico é um subgrupo no sentido algébrico cujas operações e a topologia induzidas, o fazem um grupo topológico.*

Assim, os inteiros $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta é um subgrupo da reta real.

O grupo quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com a topologia quociente[1] é isomorfo ao círculo S^1.

Como outro exemplo, identifiquemos cada matriz $(n-1)\times(n-1)$ de $GL(n-1, \mathbb{R})$ com a matriz $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

[1] Dados, um espaço topológico X e um subesço deste A, onde é definido o conjunto quociente X/A, a *topologia quociente* é a topologia em X/A definida dizendo-se que U$\subset$X/A é aberto se, e somente se, π^{-1}(U)$\subset$X é aberto em X.

de $GL(n,\mathbb{R})$. Isto é um isomorfismo de $GL(n-1,\mathbb{R})$ com um subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$.

Sejam G um grupo topológico e $x \in$ G um elemento fixado. a função L_x : G $\rightarrow$ G definida por $L_x(g) = xg$ é chamada *translação à esquerda por* x. Esta é claramente uma bijeção, e é contínua pois é a composta

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{G}\times\mathrm{G} & \xrightarrow{m} & \mathrm{G} \\ g & \longmapsto & (x,g) & \longmapsto & xg. \end{array}$$

A inversa de L_x é $L_{x^{-1}}$ e portanto L_x é um homeomorfismo. Analogamente a translação à direita por x, R_x, definida por $R_x(g) = gx$, também é um homeomorfismo.

Se F é um fechado de G, U um aberto de G, P$\subset$G um conjunto qualquer e $g \in$ G, então segue diretamente das propriedades de L_x e R_x, dadas acima, que Fg, gF e F^{-1} são fechados e UP, PU, U^{-1} abertos.

Todo grupo topológico G é homogêneo. Isto significa que para quaisquer dois elementos x e y de G, existe um homeomorfismo de G sobre si mesmo que transforma x em y, a saber: $L_{yx^{-1}}$.

Dado um espaço topológico (X,τ), dizemos que A$\subset$X é uma componente conexa de X se:

i. A é conexo;

ii. Se B é conexo e A$\subset$B então A=B.

Usando-se o fato de que se A é conexo também é $\overline{\mathrm{A}}$, pode-se mostrar que toda componente conexa é fechada.

Teorema 26 *Sejam* G *um grupo topológico e* K *a componente conexa de* G *que contém o elemento identidade. Então* K *é um subgrupo normal e fechado de* G.

Demonstração: Como as componentes conexas são sempre fechadas, temos que K é fechado. Mostremos então que K é subgrupo normal. Dado $x \in$ K, temos que K$x^{-1} = R_{x^{-1}}$(K) é conexo (pois $R_{x^{-1}}$ é homeomorfismo) e contém a identidade $e = xx^{-1}$. Como K é maximal temos Kx^{-1} $\subset$K, logo K K^{-1} $\subset$K e portanto K é subgrupo de G. Para ver que K é normal, seja $g \in$ G qualquer, então $g\mathrm{K}g^{-1} = R_{g^{-1}}L_g(\mathrm{K})$ é conexo e contém a identidade $e = geg^{-1}$. Da maximalidade de K segue novamente que $g\mathrm{K}g^{-1}$ $\subset$K, e K é normal. ■

Teorema 27 *Em um grupo topológico conexo* G, *qualquer vizinhança do elemento identidade é um conjunto de geradores de* G.

Demonstração: Sejam V uma vizinhança de $e \in$ G e H $=<$ V $>$ o subgrupo de G gerado por V. Se $h \in$ H, então hV $= L_h$(V) é uma vizinhança de h que está em H, de modo que H é aberto. Vamos mostrar que H é fechado. Seja $g \in$ G $-$ H e considere a vizinhança gV. Se gV$\cap$H$\neq \emptyset$, então existe $x \in g$V $\cap$ H, daí $x = gv$ para algum $v \in$ V, mas então $g = xv^{-1}$ está em H, o que é absurdo. Logo L_g(V)= gV é uma vizinhança de g que está contida em G-H, e portanto H é fechado.

Como G é conexo, H é aberto e fechado e H $\neq \emptyset$, temos que H = G. ■

Teorema 28 *Os grupos $O(n)$ e $SO(n)$ são compactos.*

Antes de demonstrarmos este teorema, vamos relembrar as definições destes grupos. O *grupo ortogonal* $O(n)$, é constituido das matrizes ortogonais $n \times n$ reais, ou seja, $A \in O(n)$ se, e somente se, $A^tA = I$. O subgrupo de $O(n)$ constituido das matrizes cujo determinante é igual a $+1$ é chamado *grupo especial ortogonal*, e denotado por $SO(n)$.

Demonstração do teorema: Se $A \in O(n)$ temos $A^tA = I$, daí vem que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}$, $1 \leq i,k \leq n$, onde $A = (a_{ij})$. Definamos agora $f_{ik} : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ por $f_{ik}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk}$.

Note agora que $O(n)$ é a intersecção de todos os conjuntos da forma ${f_{ik}}^{-1}(0), 1 \leq i,k \leq n$, com $i \neq k$, e ${f_{ii}}^{-1}(1)$, $1 \leq i \leq n$. Então

$$O(n) = \Big(\bigcap_{\substack{1\leq i,k\leq n \\ i\neq n}} {f_{ik}}^{-1}(0)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} {f_{ii}}^{-1}(1)\Big),$$

é fechado, pois é uma intersecção de fechados.

Como $A^tA = I$ temos $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk} = 1 \Rightarrow \|A\|_2 = 1$, mostrando que $O(n)$ é limitado. Como temos $O(n)$ fechado e limitado, vem que $O(n)$ é compacto.

Para ver que $SO(n)$ é compacto, considere a função contínua $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$. Temos então que $SO(n) = \det^{-1}(1)$ é fechado, dentro do compacto $O(n)$, portanto compacto. ■

Definição 4.3 *Dizemos que um grupo topológico* G atua (age) *como um grupo de homeomorfismos em um espaço topológico* X *se cada elemento $g \in$* G *induz um homeomorfismo g :* X $\to$ X, *onde $x \mapsto g(x)$, tal que:*

i. $(hg)(x) = h(g(x))$, $\forall\, h, g \in$ G *e* $\forall\, x \in$ X;

ii. e$(x) = x$ $\forall\, x \in$ X, *onde* e *é a identidade de* G;

iii. *A função* G$\times$X$\to$X, *dada por* $(g, x) \mapsto g(x)$ *é contínua.*

O subconjunto $O(x)$ =G(x) = $\{g(x)/g \in$ G$\}$ é chamado *órbita de x pela ação de* G.

Observe que as órbitas em X formam uma partição, isto é, dadas duas órbitas $O(x)$ e $O(y)$ elas coincidem ou são disjuntas. Temos então a seguinte relação de equivalência

$$x \sim y \text{ se e somente se, } \exists g \in \mathrm{G} \text{ tal que } x = g(y).$$

O correspondente espaço quociente, denotado por X/G, é chamado *espaço de órbitas.*

Exemplos:

1. No grupo cíclico dos inteiros, defina a ação $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $(n, x) \mapsto n + x$ (translação). Note que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.

2. Tome a ação de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $((m,n),(x,y)) \mapsto (m+x, n+y)$. Disso segue $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = T$ (toro $S^1 \times S^1$).

3. Considere a ação $\mathbb{Z}_2 \times S^n \to S^n$ do grupo $\mathbb{Z}_2$ na esfera n-dimensional S^n, dada por $(t, x) \mapsto tx$. Daí segue que $S^n/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{P}^n$ (espaço projetivo).

4. Um mesmo grupo pode agir de maneiras diferentes no mesmo espaço. Aqui apresentamos tres ações diferentes de $\mathbb{Z}_2$ no toro.
   Considere o toro T em $\mathbb{R}^3$ formado pela rotação do círculo $(x-3)^2 + z^2 = 1$ em torno do eixo dos z's.
   Seja $\mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$, onde $gg = e$.

   (a) $g(x,y,z) = (x, -y, -z)$, rotação de π radianos em torno do eixo dos x's. Neste caso obtemos a esfera.

   (b) $g(x,y,z) = (-x, -y, z)$, rotação de π radianos em torno do eixo dos z's. Neste caso obtemos o toro.

   (c) $g(x,y,z) = (x, -y, -z)$, reflexão de T na origem. Neste caso obtemos a garrafa de Klein.

Dada uma ação $\mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, o conjunto $\mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G}/gx = x\}$ é chamado *subgrupo de isotropia de x.*

4.2 Grupos de Lie

Definição 4.4 *Um* grupo de Lie G *é um grupo que é ao mesmo tempo uma variedade diferenciável, tal que as operações de grupo:*

$$\begin{array}{rccl} m: & \mathrm{G} \times \mathrm{G} & \to & \mathrm{G} \\ & (x,y) & \mapsto & m(x,y) = x\,y \quad \textit{(multiplicação)} \end{array}$$

$$
\begin{array}{rccl}
i: & G & \to & G \\
 & x & \mapsto & i(x) = x^{-1} \quad \textit{(inversão)},
\end{array}
$$

são diferenciáveis.

É fácil ver, que com a topologia de variedade, todo grupo de Lie é um grupo topológico, e portanto, tudo que desenvolvemos na seção precedente (o que concerne somente aos aspectos topológicos) é ainda válido para um grupo de Lie. Também notamos que na definição de grupo de Lie, a diferenciabilidade das aplicações m e i é equivalente à diferenciabilidade da aplicação[2]:

$$(x, y) \mapsto x\,y^{-1} \text{ (ou } (x, y) \mapsto x^{-1}y).$$

Proposição 4.2.1 *O grupo geral linear real, de grau n,*

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} / \det(A) \neq 0\}$$

é um grupo de Lie sob a operação de multiplicação de matrizes.

Demonstração: Como $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}\{\mathbb{R} - \{0\}\}$ é aberto, este herda a estrutura de subvariedade de $\mathbb{R}^{n^2}$. Para ver que este é, de fato, um grupo de Lie, basta ver que a multiplicação e a inversão de matrizes são aplicações diferenciáveis, o que é trivial. ■

4.3 Campos de Vetores Invariantes

Sejam G um grupo de Lie e $g \in$ G. Para o caso de grupos topológicos, as aplicações L_g :G→G e R_g :G→G eram homeomorfismos. Para o caso de um grupo de Lie, estas aplicações são difeomorfismos, e a demonstração é análoga à feita para grupos topológicos, bastando 'trocar' o termo contínua por diferenciável.

Disso segue que a diferncial $dL_g|_x$ é um isomorfismo entre os espaços tangentes $T_x(G)$ e $T_{gx}(G)$, $\forall x, g \in$ G. Isto capacita-nos a definir campos de vetores invariantes como segue.

Definição 4.5 *Um campo de vetores V sobre* G *é dito* invariante à esquerda *se para todos* $x, g \in$ G,

$$dL_g|_x(V_x) = V_{L_g(x)} = V_{gx}$$

(ou em notação simbólica, $dL_g\, V = V$*).*

---

[2] De fato, basta que a aplicação m seja diferenciável, pois então o teorema da função inversa garante que localmente a aplicação i é diferenciável. Não entraremos em maiores detalhes quanto a esta construção aqui.

Dessa definição segue que $dL_g|_e(V_e) = V_g$, $\forall g \in$ G. Mais precisamente: um campo de vetores invariante é determinado por seu valor na identidade e$\in$ G.

Reciprocamente, este fato implica a definição acima, visto que dado $g, h \in$ G temos: $V_{L_g(h)} = V_{gh} = dL_{gh}|_e(V_e) = d(L_g \circ L_h)|_e(V_e) = dL_g|_h(dL_h|_e(X_e)) = dL_g|_h(V_h)$.

Isto significa que qualquer campo de vetores invariante à esquerda é definido globalmente sobre G. Além disso, para $v \in T_e(G)$, o campo de vetores definido por $\tilde{V}: g \mapsto dL_g|_e(v)$ é invariante à esquerda, uma vez que:

$$\tilde{V}_g = dL_g|_e(v) = dL_g|_e \circ dL_{g^{-1}g}|_e(v) = dL_g|_e(\tilde{V}_{g^{-1}g}) = dL_g|_e(\tilde{V}_e).$$

4.4 Álgebra de Lie de um Grupo de Lie

Vamos relembrar a definição de uma álgebra de Lie abstrata sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) munido de uma operação bilinear $[,] : V \times V \to V$, onde $(u, v) \mapsto [u, v]$. Dizemos que o, par (V,[,]) é uma *álgebra de Lie* se [,] satisfaz:

i. $[v, v] = 0$, $\forall v \in$ V;

ii. $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$, $\forall u, v, w \in$ V.

Esta última condição é chamada *identidade de Jacobi.* A operação [,] é chamada *colchete de Lie ou comutador.*

A teoria das álgebras de Lie é um ramo da matemática que pode ser estudado totalmente a parte da teoria dos grupos de Lie, e é muito importante na teoria dos sistema integráveis e mecânica quântica.

O conjunto $\mathcal{X}$(G) de todos os campos de vetores diferenciáveis sobre G, pode ser visto como uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, onde para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}$(G) e qualquer função f :G$\to \mathbb{R}$,

1. $X + Y \in \mathcal{X}$(G) é definido por $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$; $\lambda X \in \mathcal{X}$(G) é definido por $(\lambda X)(f) = \lambda(X(f))$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $[X, Y] \in \mathcal{X}$(G) é definido, como de costume, por $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Denotemos por L $= \{X \in \mathcal{X}(G)/dL_g(X) = X,\ \forall X \in \mathcal{X}(G)\}$, o conjunto de todos os campos de vetores invariantes á esquerda sobre G. Se $X, Y \in$ L e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha X + \beta Y \in$ L e $[X, Y] \in$ L. De fato,

$$dL_g(\alpha X + \beta Y) = \alpha dL_g(X) + \beta dL_g(Y) = \alpha X + \beta Y,$$

e além disso,

$$\begin{aligned} dL_g([X, Y])(f) &= dL_g[X(Y(f)) - Y(X(f))] = dL_g[X(Y(f))] - dL_g[Y(X(f))] = \\ &= X[dL_g Y(f)] - Y[dL_g X(f)] = \\ &= [X, Y](f). \end{aligned}$$

Assim (L,[,]) é também uma álgebra de Lie, e como $L \subset \mathcal{X}(G)$, dizemos que esta é uma *subálgebra de Lie* de ($\mathcal{X}$(G),[,]).

Definição 4.6 *A álgebra de Lie* L *de todos os campos de vetores invariantes à esquerda , sobre* G, *é chamada* álgebra de Lie do grupo G.

Proposição 4.4.1 *Sejam* G *um grupo de Lie e* L *sua álgebra de Lie dos campos de vetores invariantes à esquerda. Então* $\phi : L \to T_e(G)$, *definida por* $\phi(X) = X_e$ *é um isomorfismo de espaços vetoriais entre* L *e* $T_e(G)$. *Consequentemente temos* $\dim G = \dim T_e(G) = \dim L$.

Demonstrsção: Definindo-se para $v \in T_e(G)$ o campo de vetores $X_g = dL_g|_e(v)$ temos que ϕ é sobrejetiva, uma vez que X assim definido é invariante à esquerda. É claro que ϕ é linear, e além disso $\phi(X) = 0 \Rightarrow X_e = 0$, daí, como $X_g = dL_g|_e(X_e)$ vem que $X_g = 0 \; \forall g \in G$. Portanto ϕ é injetora também. ■

Antes de prosseguirmos vamos falar um pouco em constantes de estrutura. Um dos problemas fundamentais que S. Lie se propos a resolver foi o seguinte: Seja L um espaço vetorial de dimensão finita, munido de uma estrutura de álgebra de Lie, definida pela lei de composição:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k; \; 1 \leq i, j \leq n,$$

onde os elementos $[X_i, X_j]$ são expressos com respeito à base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ da álgebra de Lie L. As n^3 constantes C_{ij}^k são chamadas *constantes de estrutura* da álgebra de Lie L, com respeito à base $\{X_1, \ldots, X_n\}$. O terceiro teorema de Lie, afirma que pode-se sempre reconstruir um grupo contínuo dado somente suas constantes de estrutura, em outras palavras, dado um conjunto de constantes de estrutura C_{ij}^k existe um grupo de Lie tendo C_{ij}^k como constantes de estrutura.

Exemplos de álgebras de Lie:

1. Considere $\mathbb{R}$ com[3] $[x, y] = 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R}$, isto é, $C_{ij}^k = 0$.

2. Considere $\mathcal{M}_{n \times n}$ com $[A, B] = AB - BA$.

3. Considere $\mathbb{R}^3$ com $[u, v] = u \times v$, onde $\times$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

Mais adiante veremos uma maneira simples de se calcular álgebras de Lie de alguns grupos de matrizes importantes.

[3] Dada uma álgebra de Lie L, onde $[a, b] = 0 \; \forall a, b \in L$, dizemos que L é uma álgebra de Lie *abeliana* ou *comutativa*.

4.5 Homomorfismos de Grupos de Lie

Definição 4.7 *Sejam* G *e* H *grupos de Lie. Uma aplicação* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *é chamada* homomorfismo de grupos de Lie *se* ϕ *é diferenciável, pensando em* G *e* H *como variedades, e se* ϕ *também satisfaz:*

$$\phi(a\,b) = \phi(a)\,\phi(b)$$

para todos os $a, b \in \mathrm{G}$.

Se ϕ é um difeomorfismo de G em H, que ao mesmo tempo é um homomorfismo de grupos de Lie, então ϕ é dito ser um *isomorfismo* entre os grupos de Lie G e H. Se ϕ é um isomorfismo de G sobre si mesmo, ϕ é chamado *automorfismo*.

Definição 4.8 *Se* $\mathrm{H} = \mathrm{Aut}(\mathrm{V}) = \{T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}/T$ *é isomorfismo* $\}$ *para algum espaço vetorial* V, *ou se* $\mathrm{H} = GL(n, K)$, *um homomorfismo* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *é chamado* representação *do grupo de Lie* G. *(*$K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*).*

Definição 4.9 *Se* L *e* M *são álgebras de lie, uma aplicação* $\psi : \mathrm{L} \to \mathrm{M}$ *é dita ser um* homomorfismo de álgebras de Lie *se é linear e preserva colchetes, isto é,*
$$\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)],\ \forall X, Y \in \mathrm{L}.$$

Definição 4.10 *Se* $\mathrm{M} = \mathrm{End}(\mathrm{V}) = \{T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}/T$ *é linear* $\}$ *para algum espaço vetorial* V, *ou se* $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{n\times n}$, *então um homomorfismo de álgebras de Lie* $\varphi : \mathrm{L} \to \mathrm{M}$ *é chamado* representação da álgebra de Lie L.

Sejam $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ um homomorfimo de grupos de Lie e L, M suas respectivas álgebras de Lie (de G e H). Temos que se e é a identidade de G, e e' a de H, $\phi(\mathrm{e}) = \mathrm{e}'$. Daí, se $X \in \mathrm{L}$ temos $d\phi|_{\mathrm{e}}(X_{\mathrm{e}}) \in \mathrm{T}_{\mathrm{e}'}H$. Denote por Y o campo de vetores invariante à esquerda tal que $Y_{\mathrm{e}'} = d\phi|_{\mathrm{e}}(X_{\mathrm{e}})$. Afirmamos que $Y_{\phi(g)} = d\phi|_g(X_g)\ \forall g \in \mathrm{G}$. Sendo L_g a translação à esquerda em G que aplica e em g e $L'_{\phi(g)}$ a translação à esquerda em H que aplica e' em $\phi(g)$, do fato de ser ϕ um homomorfismo segue imediatamente que $\phi \circ L_g = L'_{\phi(g)} \circ \phi$. Portanto,

$$\begin{aligned} d\phi|_g X_g &= d(\phi \circ L_g)(X_{\mathrm{e}}) = d(L'_{\phi(g)} \circ \phi)(X_{\mathrm{e}}) = \\ &= dL'_{\phi(g)}(d\phi|_{\mathrm{e}}(X_{\mathrm{e}})) = dL'_{\phi(g)}(Y_{\mathrm{e}'}) = \\ &= Y_{\phi(g)}, \end{aligned}$$

o que prova nossa afirmação.

Sejam agora $p \in \mathrm{G}$ e $f : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $q = \phi(p)$. Sejam $X_1, X_2 \in \mathrm{L}$ e Y_1, Y_2 dois campos de vetores em H tais que $Y_i|_q = d\phi|_g(X_g)$. Então temos

$$[X_i(f \circ \phi)]|_{p'} = [Y_i(f)]|_{\phi(p')} \text{ ou, } [X_i(f \circ \phi)]|_{p'} = [Y_i(f)] \circ \phi|_{p'}$$

que vale para todo ponto p' em um vizinhança conviniente de p. Então

$$(Y_2 Y_1)(f)|\phi(p') = X_2[(Y_2 f) \circ \phi]|_{p'} = [X_2 X_1(f \circ \phi)]|_{p'}.$$

Mudando os índices 1 e 2, obtemos uma igualdade similar. Subtraindo uma identidade da outra encontramos $[Y_1, Y_2](f)|_{\phi(p)} = [X_1, X_2](f \circ \phi)|_{p'}$, e então

$$[Y_1, Y_2](f)|_{\phi(p)} = [X_1, X_2](f \circ \phi)|_{p'},$$

mostrando que $d\phi$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

> OBS: *Note que não há problema na definição dos Y_i, uma vez que os elementos $Y \in$ M são unicamente determinados por seus valores na origem.*

4.6 Subgrupos e Subgrupos a 1–Parâmetro

Definição 4.11 *seja* G *um grupo de Lie. Um grupo de Lie* H *é chamado* subgrupo de Lie de G *se:*

i. H *é uma subvariedade de* G*;*

ii. H *é um subgrupo de* G *(no sentido algébrico).*

Um dos mais importantes critérios para se encontrar exemplos de grupos de Lie, e subgrupos de um dado grupo de Lie é o seguinte.

Teorema 29 (E. Cartan) *Todo subgrupo (no sentido algébrico somente) fechado de um grupo de Lie é um grupo de Lie.*

Para a demonstração do resultado acima vide [11].

De posse do critério acima, podemos agora dar alguns exemplos importantes de grupos de Lie.

Exemplos:

1. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Considere o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$, onde a multiplicação por quatérnios é tomada pela direita, isto é, se $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então $q\lambda = (q_1\lambda, \ldots, q_n\lambda)$. Colocamos $\lambda = \overline{\lambda}$ para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\overline{\lambda} =$ *conjugado de* λ para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Considere a forma quadrática em $\mathbb{K}^n$, $Q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, dada por $Q(q) = \overline{q_1}q_1 + \cdots + \overline{q_k}q_k - \overline{q_{k+1}}q_{k+1} - \cdots - \overline{q_{k+l}}q_{k+l}$, onde $n = k + l$ e $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{K}^n$. O grupo G é definido por:

$$\mathrm{G} = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) / Q(Aq) = Q(q),\ \forall q \in \mathbb{K}^n\},$$

de onde concluimos que,

$$G = \begin{cases} O(k,l) & \text{para } \mathbb{K} = \mathbb{R}; \quad O(n) = O(n,0) \\ U(k,l) & \text{para } \mathbb{K} = \mathbb{C}; \quad U(n) = U(n,0) \\ Sp(k,l) & \text{para } \mathbb{K} = \mathbb{H}; \quad Sp(n) = Sp(n,0) \end{cases}$$

Para ver que em qualquer um dos casos G é fechado, basta ver que G^c é aberto. Mas

$G^c = \{A \in GL(n,\mathbb{K})/Q(Aq) \neq Q(q) \text{ para algum } q \in \mathbb{K}^n\} =$
$= \bigcup_{q\in\mathbb{K}^n} \{A \in GL(n.\mathbb{K})/Q(Aq) \neq Q(q)\} =$
$= \bigcup_{q\in\mathbb{K}^n} (\{a \in GL(n.\mathbb{K})/Q(Aq) > Q(q)\} \bigcup \{A \in GL(n,\mathbb{K})/Q(Aq) < Q(q)\}).$

Como Q é contínua, estes conjuntos são abertos e, consequentemente G^c é aberto. Segue disto que G é fechado. Portanto, o teorema de Cartan garante que G é um grupo de Lie.

> OBS: *$O(n), U(n)$ e $Sp(n)$ são compactos, mas $O(k,l), U(k,l)$ e $Sp(k,l)$, em geral, não são .*

2. Sendo G ainda como acima, considere SG = componente conexa de G que contém a identidade. Segue do que vimos para grupos topológicos que SG é um subgrupo fechado de G, e portanto o teorema de Cartan garante que SG é um grupo de Lie.

   Denotamos por,

$$SG = \begin{cases} SO(k,l) & \text{para } \mathbb{K} = \mathbb{R}; \quad SO(n) = SO(n,0) \\ SU(k,l) & \text{para } \mathbb{K} = \mathbb{C}; \quad SU(n) = SU(n,0) \\ SSp(k,l) & \text{para } \mathbb{K} = \mathbb{H}; \quad SSp(n) = SSp(n,0) \end{cases}$$

3. Sendo $\mathbb{K}$ como acima, ainda, definimos

$$SL(n,K) = \{A \in GL(n,\mathbb{K})/ \det(A) = 1\}.$$

   É claro que este é um grupo de Lie, pois como det é contínua, e $SL(n,\mathbb{K}) = \det^{-1}(1)$ vem que $SL(n,\mathbb{K})$ é fechado. (É evidente que $SL(n,\mathbb{K})$ é um grupo, no sentido algébrico somente).

Definição 4.12 *Seja G um grupo de Lie. Um homomorfismo de grupos de Lie $\psi : \mathbb{R} \to G$ é chamado* subgrupo a 1-parâmetro de G, *e denotado por* $\{\psi(t)/t \in \mathbb{R}\}$.

Isto significa que $\psi(t+t') = \psi(t)\,\psi(t')$. Além disso temos que este grupo é abeliano pois

$$\psi(t)\,\psi(t') = \psi(t+t') = \psi(t'+t) = \psi(t')\,\psi(t).$$

O homomorfismo ψ induz um homomorfismo entre álgebras de Lie, que no caso, é o próprio $d\psi : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathrm{G}}$, onde $\lambda\frac{d}{dt} \mapsto \lambda X$, pois $\dim(\widehat{\mathbb{R}}) = 1$, e a correspondente base canônica para $\widehat{\mathbb{R}}$ é $\frac{d}{dt}$. ($\widehat{\mathrm{G}}$ e $\widehat{\mathbb{R}}$ denotam as álgebras de Lie de G e $\mathbb{R}$ respectivamente.) Portanto $X = d\psi(\frac{d}{dt})$ define um campo de vetores em G, cujo valor na origem $\mathbf{e} \in$ G é:

$$X_{\mathbf{e}} : f \mapsto X_{\mathbf{e}} f = [d\psi(\frac{d}{dt})]|_{t=0}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi)|_{t=0} = \frac{df}{dt}(\psi(t))|_{t=0},$$

para qualquer função diferenciável f definida em uma vizinhança U de $\mathbf{e} \in$ G. Portanto para cada subgrupo a 1-parâmetro de G é associado um campo de vetores invariante à esquerda.

Reciprocamente, todo campo de vetores invariante à esquerda sobre G define um grupo a 1-parâmetro[4]. Para exemplificar, tomemos o campo de vetores X em uma carta local (U,ξ) de G, onde $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$. Então nesta carta temos

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Para encontrar o correspondente grupo a 1-parâmetro, precisamos reolver o sistema de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= a_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}.$$

Para chegarmos a esta conclusão, suponha que temos um grupo a 1-parâmetro ψ que gera X. Então devemos ter
$X_{\psi(t)}f = \frac{df}{dt}(\psi(t))$, $\forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{G})$. Portanto, em uma vizinhança U de $\mathbf{e} \in$ G temos $X = \sum_{k=1}^{n} a_k(X_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_k}$, e então

$$X_{\psi(t)} = \frac{df}{dt}(\psi(t)) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1(\psi(t)), \ldots, x_n(\psi(t))) = \frac{d}{dt}f(\psi(t)).$$

[4]Este grupo a 1-parâmetro não é definido em $\mathbb{R}$ globalmente, no caso geral. Na verdade o grupo a 1-parâmetro encontrado esta definido somente em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$, isto devido ao teorema da existência e unicidade para soluções de equações diferenciais.

Tomando-se sucessivamente $f = x_i$, lembrando que $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$, obtemos n equações $a_i(x_1(\psi(t)), \ldots, x_n(\psi(t))) = \frac{d}{dt}x_i(\psi(t))$, que ainda podem ser escritas na forma

$$a_i((x_1 \circ \psi)(t), \ldots, (x_n \circ \psi)(t)) = \frac{d}{dt}(x_i \circ \psi)(t).$$

Por abuso de notação, denotando-se então as funções $x_i \circ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apenas por x_i temos que $a_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{dx_i}{dt}$, onde $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Feitas estas considerações, temos o seguinte resultado,

Proposição 4.6.1 *Seja* G *um grupo de Lie. Para todo campo de vetores invariante à esquerda* $X \in \mathcal{X}(\mathrm{G})$*, existe um único subgrupo a 1-parâmetro que gera* X.[5]

A prova da existência e unicidade de uma funcão ψ que seja solução do sistema de equações acima descrito, são garantidas pelo teorema da existência e unicidade para soluções de equações diferenciais, onde a condição inicial é que $\psi(0) = \mathrm{e} \in \mathrm{G}$. Para ver que ψ assim obtido é, de fato, um subgrupo a um parâmetro de G, veja [41, pag. 97].

4.7 As Aplicações Exponencial e Adjunta

Sejam G um grupo de Lie, $\widehat{\mathrm{G}}$ sua álgebra de Lie e $X \in \widehat{\mathrm{G}}$. Considere o subgrupo a 1-parâmetro $\psi_X : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$ definido por X. Então, definimos a *aplicação exponencial* $\exp : \widehat{\mathrm{G}} \to \mathrm{G}$ por $\exp X = \psi_X(1)$. Além disso, $t \mapsto \exp tX$ é um subgrupo a 1-parâmetro, e temos:

Proposição 4.7.1 $\psi_X(t) = \exp tX$.

Demonstração: Verifica-se facilmente que $s \mapsto \psi_X(st)$, $s, t \in \mathbb{R}$ é um subgrupo a 1-parâmetro de G. Entâo existe $Y \in \widehat{\mathrm{G}}$ tal que $\psi_Y(s) = \psi_X(st)$, com $Y = d\psi_Y(\frac{d}{ds})$. Além disso temos $d\psi_X(\frac{d}{ds}) = tX$. Portanto $\psi_{tX}(s) = \psi_X(st)$, e tomando-se $s = 1$ obtemos $\exp tX = \psi_{tX}(1) = \psi_X(t)$. ■

Proposição 4.7.2 *Se* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *é um homomorfismo de grupos de Lie então vale* $f(\exp X) = \exp[df(X)]$.

Demonstração: Seja $\widehat{\mathrm{G}}$ a álgebra de Lie de G, então temos que $t \mapsto f(\exp tX)$ é uma curva diferenciável em H cujo vetor tangente em $t = 0$ é $df(X_{\mathrm{e}})$. É claro que este é também um grupo a 1-parâmetro em H, uma vez que f é um homomorfismo. Mas

[5] Mais uma vez salientamos que este resultado só é válido localmente.

$t \mapsto \exp t[df(X_e)]$ é o único subgrupo a 1-parâmetro de H cujo vetor tangente na origem é $df(X_e)$. Segue disso que $f(\exp X) = \exp[df(X)]$. ■

Exemplo:

Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Então o grupo $GL(\mathrm{V})$ de todas as transformações lineares de V em V, é um grupo de Lie.[6] Além disso a álgebra de Lie L de $GL(\mathrm{V})$ pode ser identificada com End(V) munido da operação $[A, B] = AB - BA$. Sejam agora $X \in \mathrm{End(V)}$ e ψ_X seu correspondente subgrupo a 1-parâmetro. Vamos mostrar que nesse caso temos

$$\exp tX = \psi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tX)^n .$$

Seja $\varphi(t) = e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tX)^n$. Então $\left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = X$ e $\varphi(0) = I$, onde I é a transformação identidade de V. Pode-se mostrar que $\varphi : \mathbb{R} \to GL(\mathrm{V})$ é um homomorfismo de grupos de Lie, seguindo portanto, que este é um subgrupo a 1-parâmetro. Pela unicidade de ψ_X devemos ter $\varphi = \psi_X$. Daí, obtemos $\exp tX = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tX)^n$.

Com o exemplo acima fica muito fácil calcular as álgebras de Lie dos grupos clássicos (de matrizes) e suas dimensões.

Proposição 4.7.3 $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{tr}A)$, *onde* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Para a demonstração deste fato, é suficiente demonstrarmos que a derivada da função $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é a função traço[7] $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$.

Sejam G um grupo de Lie, $\widehat{\mathrm{G}}$ sua álgebra de Lie e $i_a : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $i_a(g) = aga^{-1} = (R_{a^{-1}} \circ L_a)(g)$ e denotemos o homomorfismo de $\widehat{\mathrm{G}}$, induzido por i_a, por $di_a = ad(a)$.

Proposição 4.7.4 *A aplicação* $ad : \mathrm{G} \to GL(\widehat{\mathrm{G}})$, $a \mapsto ad(a)$, *define uma representação de* G, *chamada* representação adjunta.

Como $i_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$ temos que $ad(ab) = d(i_{ab}) = d(i_a \circ i_b) = d(i_a) \circ d(i_b) = ad(a) \circ ad(b)$. Assim ad é um homomorfismo de grupos (no sentido algébrico somente). A fim de que ad seja um homomorfismo de grupos de Lie, falta ainda ver que esta é diferenciável. Para tal fim vide [11, pag. 123].

[6] Basta ver que como V é n-dimensional, fixando-se uma base de V obtemos $GL(\mathrm{V}) = GL(n, \mathbb{R})$.

[7] Pode-se também usar a decomposição de Jordan, ou consider-se autovalores. Uma demonstração bastante interessante encontra-se em [11, pags. 5 e 6].

Note que a aplicação $i_a : G \to G$ é um difeomorfismo, pois $i_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$. Podemos também calcular a representação matricial de $ad(a)$ como segue. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma base de $\widehat{G}$, então

$$ad(a)X_j = di_a(X_j) = \sum_{k=1}^{n} p(a)_{ik} X_k\,,$$

onde colocamos $ad(a) = p(a)_{ik} \in GL(\widehat{G})$.

Proposição 4.7.5

i. $a(\exp tX)a^{-1} = \exp t(ad(a)X)$;

ii. *A diferencial da aplicação* $ad : G \to GL(\widehat{G})$, $a \mapsto ad(a)$, *é a* representação adjunta *de* $\widehat{G}$, *denotada por* $Ad : \widehat{G} \to \widehat{GL(\widehat{G})}$, *onde* $\widehat{GL(\widehat{G})}$ *denota a álgebra de Lie de* $GL(\widehat{G})$.[8] *Então* $(AdX)(Y) = [X, Y]$.

iii. $(AdX)([Y, Z]) = [(AdX)(Y), Z] + [Y, (AdX)(Z)]$, *mostrando que Ad é uma derivação*[9] *da álgebra de Lie* $\widehat{G}$.

Demonstração: **i.** Com efeito, $i_a(x) = axa^{-1}$ e como $\varphi(\exp tX) = \exp t(d\varphi X)$ temos $a(\exp tX)a^{-1} = i_a(\exp tX) = \exp t(di_a X) = \exp t(ad(a)X)$, visto que $ad(a) = di_a$ por definição.

iii. Segue de **ii.** pela identidade de Jacobi na álgebra de Lie.

ii. Como $\varphi(\exp tX) = \exp t(d\varphi X)$ vem que $d\varphi X = \frac{d}{dt}\exp t(d\varphi X)|_{t=0}$ (considerando G imerso em um grupo de matrizes). Então, vemos que $AdX = \frac{d}{dt}\exp t(AdX)|_{t=0} = \frac{d}{dt}ad(\exp tX)|_{t=0}$. Vemos que neste caso não há problema, pois $ad(\exp tX) \in GL(\widehat{G})$, que é um grupo de matrizes.

Basta então mostrarmos que $[X, Y] = \frac{d}{dt}ad(\exp tX)(Y)|_{t=0}$, mas para fazê-lo precisamos dos conceitos de coordenadas canônicas de produtos e comutadores, ou ainda, da derivada de Lie, que introduziremos mais adiante. Para uma demonstração completa veja [11, pags. 120-123] ou [26, pags. 7 e 8]. ∎

4.8 Espaços Homogêneos

Teorema 30 *Sejam* H *um subgrupo fechado de um grupo de Lie G,* $G/H = \{gH / g \in G\}$ *o conjunto de classes laterais à esquerda de* H *e* $\pi : G \to G/H$ *a projeção*

---

[8] Notando que $\widehat{GL(\widehat{G})} \subset \mathrm{End}(\widehat{G})$, obtemos que $Ad(X) : \widehat{G} \to \widehat{G}$.

[9] Uma derivação em uma álgebra de Lie $(L, [,])$ é uma aplicação linear $\varphi : L \to L$ que satisfaz a regra de Leibniz com respeito ao produto $[,]$, isto é, $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), b] + [a, \varphi(b)]$ para todos $a, b \in L$.

canônica $\pi(g) = g\mathrm{H}$. *Então,* G/H *admite uma única estrutura de variedade diferênciável tal que:*

a) π *é diferenciável;*

b) Existem secções locais diferenciáveis de G/H *em* G*; isto é, se* $g\mathrm{H} \in \mathrm{G/H}$*, existe uma vizinhança* W *de* $g\mathrm{H}$ *e uma aplicação diferenciável* $\sigma : W \to \mathrm{G}$ *tal que* $\pi \circ \sigma = 1_W$.

Demonstração: Munindo-se G/H da topologia quociente $\tau_{\mathrm{G/H}}$, que é definida por $\tau_{\mathrm{G/H}} = \{U \subset \mathrm{G/H} \,/ \pi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathrm{G}\}$, π torna-se uma aplicação contínua e aberta, isto é, aplica abertos em abertos, visto que $\pi^{-1}(\pi(U)) == \bigcup_{h \in \mathrm{H}} hU$ é aberto.

O restante da demonstração é trabalhoso e foge aos nossos propósitos apresentala aqui. Para a demonstração completa vide [40]. ■

Definição 4.13 *Sejam* M *uma variedade diferenciável e* G *um grupo de Lie. Chamamos* G *de* grupo de Lie de transformações de M *se existe uma aplicação diferenciável* $\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *com* $\varphi(g, x) = gx$, *satisfazendo*

a) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$*;*

b) $\mathrm{e}x = x$ *para o elemento identidade* e *de* G *e para todo* $x \in \mathrm{M}$.

Na verdade, a definição acima expressa que G age sobre a variedade M de uma maneira diferenciável. Tomando-se então os devidos cuidados, podemos definir órbitas de elementos de M, e por fim o quociente, que terá um sentido geométrico adequado sob algumas restrições. Isto será feito com detalhes mais adiante, antes porém, vamos passar a algumas considerações gerais da definição acima.

É fácil ver que a aplicação $x \mapsto gx$ é um difeomorfismo de M, pois é claramente diferenciável e $g^{-1}(gx) = \mathrm{e}x = x$ para todo $x \in \mathrm{M}$. Dizemos então que G age *efetivamente* em M, se $gx = x$ para todo $x \in \mathrm{M}$ implicar que $g = \mathbf{e}$. Dizemos que G age *livremente* em M se $gx = x$ para algum $x \in \mathrm{M}$ implicar $g = \mathbf{e}$. Finalmente, dizemos que G age *transitivamente* em M se para todos os $x_1, x_2 \in \mathrm{M}$ existir $g \in \mathrm{G}$ tal que $gx_1 = x_2$.

Exemplo:

Considere a ação de $SL(2,\mathbb{C})$ em $\mathbb{C}$, definida por

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Não é difícil ver que esta ação é diferenciável, e satisfaz *a)* e *b)* da definição acima. Vamos então calcular o subgrupo de isotropia do elemento $i \in \mathbb{C}$, isto é, vamos ver quem é $\mathrm{G}_i = \{g \in SL(2,\mathbb{C}) / gi = i\}$. Assim, se

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{G}, \text{ temos } \frac{ai + b}{ci + d} = i,$$

e concluimos que $a = d$ e $b = -c$. Mas com $g \in SL(2,\mathbb{C})$ demos $\det(g) = 1$ e daí, $a^2 + b^2 = 1$ e portanto

$$G_i = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})/a = d, b = -c, a^2 + b^2 = 1 \right\} = SO(2,\mathbb{R}).$$

Visto que um subgrupo de isotropia é sempe fechado, usando o teorema 30 concluimos que $SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável.

Definição 4.14 *Uma variedade diferenciável sobre a qual um grupo de Lie* G *age transitivamente como grupo de Lie de transformações é chamada* espaço homogêneo de G.

Proposição 4.8.1 *Sejam* M *um espaço homogêneo de um grupo de Lie* G, $x \in$ M *e* G_x *o grupo de isotropia do elemento* x. *Nestas condições* G/G_x *é uma variedade diferenciável difeomorfa a* M.

Demonstração: Sejam $\varphi_x : G \to M$, com $\varphi_x(g) = gx$, e $G/G_x = \{gG_x/g \in G\}$. Temos então que $\varphi_x(gG_x) = gG_x x = gx = \varphi_x(g)$. Deste modo, definimos $\overline{\varphi_x} : G/G_x \to M$, com $\overline{\varphi_x}(gG_x) = \varphi_x(gG_x) = \varphi_x(g)$. É bastante claro que $\overline{\varphi_x}$ está bem definida. Também $\overline{\varphi_x}$ é sobrejetiva, visto que a ação de G é transitiva. Para ver que $\overline{\varphi_x}$ é injetiva, suponha que $\overline{\varphi_x}(gG_x) = \overline{\varphi_x}(hG_x)$. Da definição de $\overline{\varphi_x}$ obtemos $\varphi_x(g) = \varphi_x(h)$, e portanto $gx = hx$ implicando $h^{-1}gx = x$ e $h^{-1}g \in G_x$. Segue disto que $gG_x = hG_x$.

Notemos que do Teorema 30 da página 58, G/G_x é uma variedade diferenciável, $\overline{\varphi_x} \circ \pi = \varphi_x$ e que $\overline{\varphi_x}$ é diferenciável. A fim de que $\overline{\varphi_x}$ seja um difeomorfismo, basta ver que $(\overline{\varphi_x})^{-1}$ é também diferenciável. Não faremos esta demonstração aqui. Para maiores informações veja [40]. ■

Analizando a proposição acima, concluímos que podemos definir um espaço homogêneo de uma maneira diferente, de modo que as duas definições sejam equivalentes.

Definição 4.15 *Uma variedade da forma* G/H, *onde* H *é um subgrupo fechado de um grupo de Lie* G, *com a estrutura diferenciável unicamente determinada por* a) *e* b) *do Teorema 30 da página 58 é chamada* espaço homogêneo de G.

Notemos que se G/H é um espaço homogêneo no sentido desta última definição, existe uma ação transitiva natural φ de G em G/H dada por $\varphi(g, g'H) = gg'H$.

Para ver que φ é diferenciável, por exemplo, basta ver que $\varphi(g, g'H) = (\pi \circ m)(g, g')$, onde $m : G \times G \to G$, com $m(g, g') = gg'$, é a operação de multiplicação no grupo de Lie G.

BIBLIOTECA CENTRAL

Exemplos:

1. Seja $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n / \|v\|_2 = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Considere a ação $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, com $(A, v) \mapsto Av$. É claro que esta aplicação é uma ação diferenciável. Para ver que ela é transitiva sejam $v_1, v_2 \in S^{n-1}$, então

$$A = I - 2\frac{uu^t}{\|u\|_2{}^2},$$

onde $u = v_1 - v_2$ (consideremos $v_1 \neq v_2$ pois caso contrário seria trivial),

$$uu^t = \begin{pmatrix} u_1u_1 & \cdots & u_1u_n \\ \cdots\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdot \\ u_nu_1 & \cdots & u_nu_n \end{pmatrix}, \; u = (u_1, \ldots, u_n)$$

e onde I é a matriz identidade.[10]

Não é muito difícil de se ver que $A \in O(n)$ e que a ação é transitiva. Notemos que o subgrupo de $O(n)$ cujos elementos são da forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}$ onde $\overline{A} \in O(n-1)$ é um subgrupo fechado de $O(n)$ que é isomorfo (como grupo de Lie) a $O(n-1)$. Vamos mostrar que este grupo, que denotaremos também por $O(n-1)$ é o subgrupo de isotropia de $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$.

Primeiro notemos que $Ae_1 = e_1$ para todo $A \in O(n-1)$, implicando assim que $O(n-1) \subset O(n)$. Reciprocamente, suponhamos que $Ae_1 = e_1$ para algum $A \in O(n)$. Sendo então $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que contém e_1 obtemos que $Ae_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k$, de onde concluimos se $Ae_1 = e_1$ que $a_{k1} = 0$ para $k > 1$. Como as linhas de A formam uma base ortonormal, e $a_{11} = 1$ também $a_{1k} = 0$ para $k > 1$. Portanto temos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \in O(n-1)$.

Destas considerações segue que $O(n)/O(n-1)$ é uma variedade diferenciável difeomorfa a S^{n-1}. Portanto S^{n-1} é um espaço homogêneo. Raciocinando de maneira semelhante pode-se obter que $SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}, U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1}$ e $SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}$.

2. **Variedade Grassmaniana** Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathrm{M}_k(\mathrm{V})$, de todos os subesços k-dimensionais de V é chamado *variedade Grassmaniana k-dimensional.* Se escolhermos uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, temos então uma ação $\varphi : O(k) \times \mathrm{M}_k(\mathrm{V}) \to \mathrm{M}_k(\mathrm{V})$. Note que dados

[10] Uma transformação do tipo descrito acima chama-se ***transformação de Householder***. Estas transformações são usadas para o que chamamos de ***decomposição*** QR para matrizes, sendo Q uma matriz ortogonal e R uma matriz triangular superior.

dois subesços $S_1, S_2 \in \mathrm{M}_k(\mathrm{V})$, existe $A \in O(n)$ tal que $A(S_1) = S_2$. Seja agora P o subesço gerado por $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Considere o subgrupo de $O(n)$ definido como $\mathrm{H} = \{A \in O(n)/A(P) = P\}$. É fácil mostrar que se $A \in \mathrm{H}$, então $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ onde $A_1 \in O(k)$ e $A_2 \in O(n-k)$. É claro que H é um subgrupo fechado de $O(n)$, que pode ser identificado com $O(k) \times O(n-k)$, daí, como $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ é uma variedade diferenciável, podemos munir $\mathrm{M}_k(\mathrm{V})$ de uma estrutura diferenciável impondo que este seja difeomorfo a $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$. Para encerrar, queremos salientar que esta estrutura diferenciável não depende da particular base escolhida para V.

4.9 Derivada de Lie

Sejam M, N uma variedades diferenciáveis. A imagem, por uma aplicação diferenciável $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, de um vetor v tangente a M no ponto x foi definida pela igualdade $d\phi|_x(v) = v_\phi$ sendo v_ϕ o vetor tangente a N no ponto $y = \phi(x)$, definido por $v_\phi(f) = v(f \circ \phi)$, para toda função $f \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$. Sendo então X um campo de vetores em M, temos $[d\phi(X)|_x](f) = [d\phi|_x(X_x)](f) = X_x(f \circ \phi)$. Se ϕ é inversível, podemos reescrever esta igualdade como $[d\phi(X)]|_{\phi^{-1}(y)}(f) = X_{\phi^{-1}(y)}(f \circ \phi)$, ou ainda, $[d\phi(X)](f) = [X(f \circ \phi)] \circ \phi^{-1}$. (Note que não há perigo de confusão.)

Se X é um campo diferenciável, de vetores, sobre M e $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ é um difeomorfismo, então $d\phi(X)$ é um campo diferenciável, de vetores, sobre N. Contudo, se ϕ não é inversível, nada garante que $d\phi(X)$ é um campo de vetores em N. Além disso, se ϕ^{-1} existe mas não é diferenciável, $d\phi(X)$ é um campo de vetores em N que não é necessariamente diferenciável. Assim, se $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ é um difeomorfismo definimos a *imagem de X por ϕ*, denotada por $\phi_*(X)$ como sendo o campo de vetores diferenciável de N, dado por $\phi_*(X) = d\phi(X)$.

Sejam $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ uma aplicação diferenciável, ω uma 1-forma em N e X um campo de vetores em M. Definimos o *pull-back*[11] de ω por ϕ como sendo

$$[\phi^*(\omega)]|_p(X_p) = \omega_{\phi(p)}[d\phi|_p(X_p)], \text{ onde } p \in \mathrm{M}.$$

Podemos ainda escrever $[\phi^*(\omega)](X) = [\omega(d\phi(X))] \circ \phi$. Note que diferentemente do caso de campos de vetores temos $\phi^*(\omega)$ diferenciável apenas se ϕ e ω o forem. Assim se $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ é uma aplicação diferenciável, definimos a *imagem recíproca* de um campo ω, de 1-formas sobre N, como sendo o campo de 1-formas, sobre M dado por $\phi^*(\omega)$. Sendo ω diferenciável, sua imagem recíproca também o é.

Neste ponto nos convém generalizar a noção de "imagem de um objeto geométrico por uma aplicação". Sejam M, N variedades diferenciáveis, $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ um dife-

[11] Esta é a generalização natural de pull-back introduzida anteriormente para formas lineares sobre espaços vetoriais.

omorfismo e f : M $\to$ ℝ, então definimos a *Imagem de f pelo difeomorfismo ϕ*, denotada por $\phi_*(f)$, como sendo

$$\phi_*(f) = f \circ \phi^{-1}, \text{ ou seja, } \phi_*(f) = (\phi^{-1})^*(f).^{12}$$

Dada uma 1-forma ω sobre M, definimos a *imagem de ω por ϕ* como sendo o campo de 1-formas sobre N tal que se $Y = d\phi(X)$ então

$$[\phi_*(\omega)]|_{\phi(p)}(Y_{\phi(p)}) = \omega[(d\phi^{-1})]\Big|_{\phi(p)}(Y_{\phi(p)}), \text{ ou seja } \phi_*(\omega) = (\phi^{-1})^*(\omega).$$

Será bastante agora definirmos a *imagem de um campo diferenciável de tensores $T \in \mathrm{T}^{p,q}\mathrm{M}$ por um difeomorfismo ϕ* : M $\to$ N. Isto se faz exigindo que $\phi_*(T)$ seja um campo de tensores do tipo (p,q) que satisfaça

$$[\phi_*(T)](\phi_*(\omega_1),\ldots,\phi_*(\omega_p),\phi_*(X_1),\ldots,\phi_*(X_q))|_{\phi(p)} = T(\omega_1,\ldots,\omega_p,X_1,\ldots,X_q)|_p$$

para todos os campos de 1-formas $\omega_1,\ldots,\omega_p \in \mathcal{X}(\mathrm{M})^*$ e todos os campos de vetores $X_1,\ldots,X_q \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$. É fácil ver que tomando-se uma carta local (U,ξ), $\xi = (x_1,\ldots,x_n)$, de M temos $T = T^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_n}\dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \dfrac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{k_1} \otimes \cdots \otimes dx_{k_q}$, e que, tendo em mente as definições anteriores de imagens de campos de formas e campos de vetores pelo difeomorfismo ϕ, obtemos

$$\phi_*(T) = \phi_*\left(T^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_n}\right)\phi_*(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}) \otimes \cdots \otimes \phi_*(\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}) \otimes \phi_*(dx_{k_1}) \otimes \cdots \otimes \phi_*(dx_{k_q}).$$

Quando M = N, em vista das definições acima, dizemos que o difeomorfismo ϕ : M $\to$ N induz um *arrastamento* de campos de 1-formas, campos de vetores e campos de tensores e, é claro que a imagem de qualquer um destes objetos geométricos pelo difeomorfismo ϕ será diferenciável se estes o forem.

Com isso feito, temos definido o arrastamento, um dos principais entes geométricos com que trabalharemos.

Queremos agora estender a noção de subgrupo a 1-parâmetro, intoduzido na Seção 4.6, a variedades diferenciáveis.

Definição 4.16 *Seja* M *uma variedade diferenciável. Dizemos que uma aplicação* φ : M $\times$ ℝ $\to$ M *é um* grupo a 1-parâmetro em M *se:*

i. *φ é diferenciável;*

ii. *$\varphi(x,0) = x$, para todo $x \in$ M;*

iii. *$\varphi(\varphi(x,s),t) = \varphi(x,s+t)$ para todos os $x \in$ M e $t,s \in$ ℝ.*

[12] O pull-back de uma função g : N $\to$ ℝ por uma aplicação ψ : M $\to$ N, denotado por $\psi^*(g)$, é definido por $\psi^*(g) = g \circ \psi$: M $\to$ ℝ.

Estas condições podem ser expressas de uma maneira mais conviniente, introduzindo-se as aplicações $\varphi_t : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ definidas por $\varphi_t(x) = \varphi(x,t)$. Além disso, as aplicações φ_t são difeomorfismos. Com efeito, temos que $\varphi_t = \varphi \circ i_t$, onde $i_t : \mathrm{M} \hookrightarrow \mathrm{M} \times \mathbb{R}$ é a inclusão. Então, como φ e i_t são diferenciáveis φ_t o é. Note que a condição **ii.** diz que $\varphi_0 = 1_{\mathrm{M}}$ e a condição **iii.** $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$. Tomando então $s = -t$ obtemos $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = 1_{\mathrm{M}}$. Assim φ_t é um difeomorfismo com $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

Dado um grupo a 1-parâmetro $\varphi : \mathrm{M} \times \mathbb{R} \to \mathrm{M}$, para cada $x \in \mathrm{M}$ podemos construir uma aplicação $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathrm{M}$, com $t \mapsto \varphi_x(t) = \varphi(x,t)$ que, em vista de **ii.** e de consisderações similares às feitas acima, é uma curva diferenciável que passa pelo ponto x em $t = 0$.

Mediante a condição **ii.**, por cada ponto $x \in \mathrm{M}$ passa uma única trajetória (curva) do grupo a 1-parâmetro φ. Este fato simples nos diz que está determinado univocamente um campo de vetores diferenciável X, construido associando-se a cada ponto de M o vetor tangente à órbita do grupo por aquele ponto, isto é,

$$X_x = d\varphi_x|_{t=0}(\frac{d}{dt}), \text{ onde } \frac{d}{dt} \in \mathrm{T}_0\mathbb{R}.$$

Esta definição é claramente equivalente à

$$X_x(f) = [d\varphi_x|_{t=0}(\frac{d}{dt})](f) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_x)|_{t=0}.$$

A diferenciabilidade do X decorre da diferenciabilidade de φ. Este fato não é muito difícil de se demonstrar, mas envolve algum trabalho com o fluxo do campo vetorial X. Para maiores detalhes a respeito disto veja [7].

O campo de vetores X definido acima é chamado *campo de vetores de Killing associado ao grupo* φ.

Dado um campo diferenciável de vetores X, sobre M, este não definirá, em geral, um grupo (nem mesmo local) de difeomorfismos de M. Na verdade será possível encontrar somente um *pseudo-grupo local a 1-parâmetro* que induz o campo X. Um pseudo-grupo local a 1-parâmetro significa que φ_t não está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, mas que para cada $x \in \mathrm{M}$ existe uma vizinhança $V(x)$ de x, um intervalo $I(x) = (-\varepsilon(x), \varepsilon(x))$ e uma família $\{\varphi_t / t \in I(x)\}$ de aplicações de M em M tal que valem as propriedades **i.**, **ii.**, e **iii.** da Definição 4.16 quando $|t| < \varepsilon(x)$, $|s| < \varepsilon(x)$ e $|t+s| < \varepsilon(x)$. Em vista desta observação, o campo vetorial X é também chamado gerador infinitesimal do (pseudo) grupo (local) $\{\varphi_t / t \in I(x)\}$.

Naturalmente, dado um campo de vetores X, obtemos o (pseudo) grupo (local) a 1-parâmetro que induz X, como no caso de grupos de Lie, integrando a equação diferencial

$$\frac{d\varphi_x}{dt}(t) = X(\varphi_x)(t),$$

motivo pelo qual as trajetórias do grupo a 1-parâmetro são também chamadas *curvas integrais do campo vetorial* X.

Feitas essas considerações, vamos ao ponto importante de nosso estudo nesta seção, a derivada de Lie.

Definição 4.17 *Sejam* M *uma variedade diferenciável,* X *um campo de vetores diferenciável sobre* M *e* $\{\varphi_t / t \in I(x)\}$ *o pseudo-gupo local de difeomorfismos de* M *que induz* X. *Dado* $T \in \mathrm{T}^{p,q}(\mathrm{M})$, *definimos a* derivada de Lie $\pounds_X T$ de T na direção de X, *por*

$$\pounds_X T|_x = -\frac{d}{dt}[(\varphi_t)_* T]|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{T|_x - ((\varphi_t)_* T)|_x}{t}.$$

Note que isto mede a taxa de variação do arrasto, em cada ponto, do campo de tensores T na direção do campo de vetores X.

Da definição de derivada de Lie, usando-se as propriedades de $(\varphi_t)_*$, temos o seguinte.

Proposição 4.9.1

i. $\pounds_X$ *preserva valência, isto é, se* $T \in \mathrm{T}^{p,q}(\mathrm{M})$ *então* $\pounds_x T \in \mathrm{T}^{p,q}(\mathrm{M})$;

ii. $\pounds_X$ *aplica tensores linearmente e preserva contrações;*

iii. $\pounds_X$ *satisfaz a regra de Leibniz* :$\pounds_X(T \otimes S) = (\pounds_X T) \otimes S + T \otimes (\pounds_X S)$;

iv. $\pounds_X Y = [X, Y]$, *onde* $Y \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$.

Para finalizar este capítulo vamos dar dois exemplos de derivada de Lie, incluindo neles a demonstração da afirmação **iii.** do teorema acima. A demonstração de **i.** e **ii.**, não passa de um cálculo simples usando as propriedades de $(\varphi_t)_*$ e a definição de derivada de Lie. Quanto à parte **iv.**, não a demonstraremos aqui, pois foge aos nossos propósitos faze-lo. Para maiores detalhes veja [40,6,18].

Exemplos:

1. Seja $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$, vamos calcular $\pounds_X f$. Da definição temos

$$\begin{aligned} \pounds_X f|_x &= \lim_{t\to 0}\frac{(f - (\varphi_t)_* f)(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(f - f\circ {\varphi_t}^{-1})(x)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(f - f\circ \varphi_{-t})(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\circ\varphi_x(0) - f\circ\varphi_x(-t)}{t} = \\ &= -(-X_x(f)) = X_x(f). \end{aligned}$$

2. Vamos mostrar **iii.** da proposição acima. Sejam $T \in \mathrm{T}^{p,q}(\mathrm{M})$ e $S \in \mathrm{T}^{r,s}(\mathrm{M})$. A definição de derivada de Lie nos fornece

$$\begin{aligned} \pounds_X(T\otimes S) &= \lim_{t\to 0}\frac{T\otimes S - (\varphi_t)_*(T\otimes S)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{T\otimes S - (\varphi_t)_*(T)\otimes(\varphi_t)_*(S)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{T\otimes S - (\varphi_t)_*(T)\otimes S + (\varphi_t)_*(T)\otimes S - (\varphi_t)_*(T)\otimes(\varphi_t)_*(S)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{T\otimes S - (\varphi_t)_*(T)\otimes S}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t)_*(T)\otimes S - (\varphi_t)_*(T)\otimes(\varphi_t)_*(S)}{t} = \\ &= \left[\lim_{t\to 0}\frac{T - (\varphi_t)_*(T)}{t}\right]\otimes S + \lim_{t\to 0}\left[(\varphi_t)_*(T)\otimes\left(\frac{S - (\varphi_t)_*(S)}{t}\right)\right] = \\ &= \pounds_X(T)\otimes S + T\otimes\pounds_X(S). \end{aligned}$$

Capítulo 5

Cálculos com Formas Diferenciais

Formas diferenciais desempenharão um papel fundamental em nossos cálculos. Estas servirão, entre outras coisas, como um meio para se encontrar as equações dos campos de partículas.

Praticamente, pode-se formular toda a Teoria de Campos, com as lagrangeanas e os campos, em termos de formas diferenciais somente. Nosso tratamento para as Teorias de Calibre, será somente em termos de formas, uma vez que estas fornecem um método uniforme para se generalizar as Teorias de Calibre clássicas, com uma maior clareza tanto matemática quanto física.

5.1 A Diferencial Exterior

Definição 5.1 *Seja* M *uma variedade diferenciável n-dimensional, de classe C^k. Uma* forma diferencial de grau p *sobre* M *é uma regra ω, que a cada ponto $x \in$* M *associa uma forma p-linear alternada $\omega_x \in \bigwedge^p(\mathrm{T}_x\mathrm{M})$.*

A definição da diferenciabilidade de ω, é a mesma dada para tensores na Seção 3.2. Portanto, dada uma carta (U, ξ), com $\xi = (x^1, \ldots x^n)$, de M e lembrando que $\{dx^1|_x, \ldots, dx^n|_x\}$ é uma base para $\bigwedge^1(\mathrm{T}_x\mathrm{M})$ em cada ponto $x \in U$, temos

$$\omega = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n} \omega_{k_1,\ldots,k_p} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} \,,$$

onde $\omega_{k_1,\ldots,k_p}$ são funções de U em $\mathbb{R}$.

Pela definição de diferenciabilidade, ω é diferenciável em U se, e somente se, as funções $\omega_{k_1,\ldots,k_p}$ o forem.

O conjunto de todas as p-formas diferenciáveis sobre M, é denotado por $\bigwedge^p(\mathrm{M})$.

Dada $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$, é comum denotarmos a expressão de ω na carta (U, ξ), por

$$\omega = \sum_K \omega_K dx^K,$$

onde $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_n\}$. Convenciona-se que $dx^K = 1$ quando $K = \emptyset$, isto é, quando $p = 0$.

A nossa intenção é definir um operador d, de ***diferenciação exterior***, que leve uma forma diferencial $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$ em uma forma diferencial $d\omega \in \bigwedge^{p+1}(\mathrm{M})$, ou seja, que leve uma forma diferencial ω de grau p em uma forma diferencial $d\omega$ de grau $p+1$.

Dada uma carta (U, ξ), de M, introduziremos um operador que, de início, será indicado por d_U, até que demonstremos sua independência da carta escolhida de partida.

Os coeficientes ω_K são funções, e para as funções a diferencial foi definida como (veja a Seção 3.2),

$$d\omega_K = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_K}{\partial x^j} dx^j.$$

Define-se a diferencial d_U, da forma ω em U, como

$$d_U\omega = \sum_K d\omega_K \wedge dx^K.$$

Isto acarreta um resultado importante.

Proposição 5.1.1 *Sejam $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$, $\tau \in \bigwedge^q(\mathrm{M})$ e $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$. O operador d_U satisfaz às seguintes propriedades:*

(1) $d_U(\omega + \tau) = d_U\omega + d_U\tau$;

(2) $d_U f = df$;

(3) $d_U(\omega \wedge \tau) = (d_U\omega) \wedge \tau + (-1)^p\omega \wedge (d_U\tau)$;

(4) $d_U(d_U\omega) = 0$.

Demonstração: As duas primeiras afirmações são uma conseqüência imediata da definição de d_U.

Quanto a *(3)*, pela distributividade do produto exterior com respeito à soma e por *(1)*, basta considerarmos $\omega = g dx^K$ e $\tau = h dx^L$, onde $g, h \in \mathcal{F}(U)$.

Temos $\omega \wedge \tau = g dx^K \wedge h dx^L = gh dx^K \wedge dx^L$. Portanto

$$\begin{aligned} d_U(\omega \wedge \tau) &= d(gh) \wedge dx^K \wedge dx^L = (h\, df + f\, dh) \wedge dx^K \wedge dx^L = \\ &= h\, dg \wedge dx^K \wedge dx^L + g\, dh \wedge dx^K \wedge dx^L = \\ &= (da \wedge dx^K) \wedge h dx^L + (-1)^p g dx^K \wedge (dh \wedge dx^L), \end{aligned}$$

visto que h é uma zero-forma, comuta com todas as outras formas, e também $dh \wedge dx^K = (-1)^p dx^K \wedge dh$. Portanto, obtemos

$$d_U(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau.$$

Pode-se generalizar este resultado para um número m de formas $\omega_1, \ldots, \omega_m$, com graus $p_1, \ldots, p_m$, respectivamente:

$$d_U(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m) = d_U\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_m + (-1)^{p_1}\omega_1 \wedge + d_U\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_m +$$
$$+(-1)^{p_1+p_2}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge d_U\omega_3 \wedge \cdots \wedge \omega_m + \cdots + (-1)^{p_1+\cdots+p_{m-1}}\omega_1 \wedge \cdots \wedge d_U\omega_m.$$

A última afirmação da proposição é demonstrada primeiro para uma forma de grau zero, isto é, uma funçõ $g \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$. Com efeito,

$$d_U(d_U g) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i<j} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i + \sum_{i>j} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i =$$
$$= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i - \sum_{i<j} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0.$$

Para uma forma de grau p qualquer, podemos novamente supor que $\omega = g dx^K = g dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}$.

Uma vez que $g, x^{k_1}, \ldots, x^{k_p}$ são funções, segue do caso anterior que $d_U(dg) = d_U(dx^{k_1}) = \cdots = d_U(dx^{k_p}) = 0$. Isso implica, pela afirmação *(3)* da proposição, que
$$d_U(d_U\omega) = d_U(dg \wedge d_U\omega) = d_U(dg) \wedge dx^K - dg \wedge d_U(dx^K) =$$
$$= d_U(dg) - \sum_{m=1}^{p} (-1)^m dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge d_U(dx^{k_m}) \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} = 0. \ \blacksquare$$

Como dissemos, precisamos ainda ver que este operador não depende da particular carta escolhida. A proposição seguinte estabelece este resultado.

Proposição 5.1.2 *A definição do operador d_U é independente da carta (U,ξ), ou seja, se (V,φ) é outra carta de* M *com $U \cap V \neq \emptyset$, então, em todo ponto de $U \cap V$ e para toda forma $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$, temos*
$$d_U\omega = d_V\omega.$$

Demonstração: Sejam $\sum_K a_K dx^K$ e $\sum_L b_L dy^L$ as expressões de ω nas cartas (U,ξ) e (V,φ) respectivamente, onde $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ e $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$.

Para todo ponto de $U \cap V$, devemos ter $\omega = \sum_K a_K dx^K = \sum_L b_L dy^L$. Então,

$$d_V\omega = \sum_L db_L \wedge dy^L,$$

mas

$$b_L = \sum_K \frac{\partial x^K}{\partial y^L} a_K \ ,$$

onde $\frac{\partial x^K}{\partial y^L}$ é uma notação apenas, análoga às demais, para se expressar o determinante do menor principal $p \times p$, da matriz jacobiana da mudança de coordenadas $\xi \circ \varphi$. (Isto é uma conseqüência da definição do produto exterior e do Teorema 4 da página 14.) Portanto,

$$db_L = \sum_K d\left(\frac{\partial x^K}{\partial y^L}\right) a_K + \sum_K \frac{\partial x^K}{\partial y^L} da_K.$$

Se substituimos isto na equação para $d_V\omega$ temos

$$d_V\omega = \sum_K da_K \wedge \left(\sum_L \frac{\partial x^K}{\partial y^L} dy^L\right) + \sum_K a_K \left(\sum_L d\left(\frac{\partial x^K}{\partial y^L}\right) \wedge dy^L\right).$$

Como $\sum_L \frac{\partial x^K}{\partial y^L} dy^L = dx^K$, obtemos usando a última proposição que

$$\sum_L d\left(\frac{\partial x^K}{\partial y^L}\right) \wedge dy^L = d_V(dx^K) = 0.$$

Substituindo-se estes valores na equação acima, encontramos

$$d_V\omega = \sum_K da_K \wedge dx^K = d_U\omega. \blacksquare$$

Isto define a diferencial em toda variedade M, ou seja, se $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$, definimos $d\omega$ como $d\omega|_U = d_U\omega$. Em vista desta última proposição este operador está bem definido. Além disso, pela nossa definição de diferenciabilidade, temos $d : \bigwedge^p(\mathrm{M}) \to \bigwedge^{p+1}(\mathrm{M})$.

Exemplo:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^i$ uma 1-forma, então

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx^i = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i = \\ &= \sum_{i<k} \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i + \sum_{i \geq k} \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i = \\ &= \sum_{i<k} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right) dx^k \wedge dx^i. \end{aligned}$$

As componentes da diferencial exterior $d\omega$ são as componentes do rotacional do vetor (a_1, a_2, a_3). Finalmente, para qualquer 2-forma: $\omega = P\,dx^2 \wedge dx^3 + Q\,dx^1 \wedge dx^3 + R\,dx^1 \wedge dx^2$, obtemos

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Teorema 31 *Seja $\omega \in \bigwedge^1(\mathrm{M})$. Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$ temos,*

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]),$$

onde $X\omega(Y)$ denota a função obtida aplicando-se X à função $\omega(Y)$ e analogamente para $Y\omega(X)$.

Demonstração: Basta que mostremos a afirmação em uma carta local (U,ξ), com $\xi = (x^1, \dots, x^n)$.

Seja $\omega = \sum_i^n a_i dx^i$. Então,

$$d\omega = \sum_{i<k} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i.$$

Além disso,

$\omega(X) = \sum_{i=1}^n a_i X^i$, $\omega(Y) = \sum_{k=1}^n a_k Y^k$, $d\omega(X,Y) = \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \right) X^i Y^k$,

com $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{k=1}^n Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Então,

$$X(\omega(Y)) = \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} Y^k X^i + a_k \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} X^i \right),$$

$$Y(\omega(X)) = \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} X^i Y^k + a_i \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^k \right),$$

$$\omega([X,Y]) = \sum_{i,k=1}^n a_i \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right),$$

portanto,

$X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x^i} Y^k X^i - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x^k} X^i Y^k + \sum_{i,k=1}^n a_k \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} X^k -$
$\sum_{i,k=1}^n a_k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^k + \sum_{i,k=1}^n a_i \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^k - \sum_{i,k=1}^n a_i X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} = d\omega(X,Y)$. ∎

Corolário 31.a *Dados campos de vetores $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{X}(M)$ e uma forma diferencial $\omega \in \bigwedge^{p-1}(M)$ temos,*

$$d\omega(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p)) +$$
$$+ \sum_{1 \le i \le k \le p} (-1)^{i+k} \omega([X_i, X_k], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_p),$$

onde $\widehat{}$ sobre X_i significa que a variável X_i é omitida.

Demonstração: Não é um cálculo difícil usando indução sobre p. ∎

5.2 O 'Pull-Back' (Retrocesso)

Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões m e n respectivanmente, e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Tendo em vista a definição de pull-back da Seção 1.4, podemos definir o que chamaremos de *pull-back* de uma k-forma sobre N por f.

Definição 5.2 *Seja ω uma p-forma sobre* N *e* $v_1, \ldots, v_p \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$. *Definimos o* pull-back $f^*\omega$ *de* ω, *como sendo a p-forma sobre* M *definida por,*

$$(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_p) = \omega_{f(x)}(df|_x(v_1), \ldots, df|_x(v_p)).$$

Em termos de coordenadas, se (U, ξ), com $\xi = (x^1, \ldots, x^m)$ e (V, φ), com $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$, são cartas locais de M e N, respectivamente, e a forma ω é dada por

$$\omega = \sum_K \omega_K dy^K,$$

então

$$(f^*\omega) = \sum_{L,K} (\omega_K \circ f) \frac{\partial y^K}{\partial x^L} dx^L.$$

Por meio desta expressão podemos concluir que $f^*\omega$ é diferenciável se, e somente se, f e ω o são. No caso particular em que ω é uma 0-forma, ou seja, $\omega = g \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$, temos $f^*g = g \circ f$.

Proposição 5.2.1 *Sejam* M *e* N *variedades diferenciáveis de dimensões m e n, respectivamente, e $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ uma apliação diferenciável. Então a aplicação induzida* $f^* : \bigwedge^p(\mathrm{N}) \to \bigwedge^p(\mathrm{M})$; $p = 0, 1, 2, \ldots$, *definida por*

$$(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_p) = \omega_{f(x)}(df|_x(v_1), \ldots, df|_x(v_p)),$$

onde $v_1, \ldots, v_p \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$, *satisfas as seguintes propriedades:*

(1) f^* *é linear;*

(2) $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*\omega \wedge f^*\tau$;

(3) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$;

(4) Se $g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}'$ *é uma aplicação diferenciável de* N *em uma variedade diferenciável* N', *temos* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Demonstração: A demonstração de *(1)* é óbvia da definição de f^*.

Para demonstrar *(2)*, sejam $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{N})$, $\tau \in \bigwedge^q(\mathrm{N})$ e $v_1, \ldots, v_{p+q} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$. Então, pela definição do produto exterior dada na Seção 1.4, temos

$$\begin{aligned}
&(f^*(\omega \wedge \tau))_x(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \omega_x \wedge \tau_x(df|_x(v_1), \ldots, df|_x(v_{p+q})) = \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sinal}(\sigma)\, \omega_x(df|_x(v_{\sigma(1)}), \ldots, df|_x(v_{\sigma(p)}))\tau_x(df|_x(v_{\sigma(p+1)}), \ldots, df|_x(v_{\sigma(p+q)})) = \\
&= (f^*\omega)_x \wedge (f^*\tau)_x(v_1, \ldots v_{p+q}) = (f^*\omega \wedge f^*\tau)_x(v_1, \ldots, v_{p+q}).
\end{aligned}$$

Como o ponto $x \in \mathrm{M}$ e $v_1, \ldots, v_{p+q} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ são genéricos, a propriedade *(2)* segue.

Para demonstrar *(3)*, seja em primeiro lugar, $\omega = g \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$ uma função diferenciável (0-forma). Tomando cartas (U, ξ), com $\xi = (x^1, \ldots, x^m)$, e (V, φ), com $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$, de M e N, respectivamente, teremos:

$$dg|_{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g}{\partial y^i}\right|_{f(x)} dy^i|_{f(x)}$$

e portanto

$$f^*(dg)_x = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y^i}\bigg|_{f(x)} \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\bigg|_x dx^k|_x = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x^k}\bigg|_x dx^k|_x = d(g\circ f)|_x = d(f^*g)_x,$$

para qualquer ponto $x \in \mathrm{M}$.

No caso geral, onde $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{N})$, teremos

$$\omega = \sum_K \omega_K dy^K \text{ e } d\omega = \sum_K d\omega_K \wedge dy^K,$$

portanto

$$f^*(d\omega) = \sum_{K,L} d(\omega_K \circ f) \wedge \frac{\partial y^K}{\partial x^L} dx^L$$

aplicando-se as propriedades acima demonstradas e a decomposição de dy^K como produto de 1-formas.

Por outro lado, como $f^*\omega = \sum_{K,L}(\omega_K \circ f)\frac{\partial y^K}{\partial x^L}dx^L$, obtemos

$$d(f^*\omega) = \sum_{K,L} d(\omega_K \circ f) \wedge \frac{\partial y^K}{\partial x^L} dx^L,$$

visto que, como na demonstração da parte *(4)* da Proposição 5.1.1, as demais parcelas são nulas.

Quanto à parte *(4)*, esta segue da definição de f^* e da regra da cadeia. ■

Obs: *Sejam* $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{N})$, *e* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *uma aplicação diferenciável. Dadas cartas* (U,ξ), *com* $\xi = (x^1, \ldots, x^m)$, *e* (V,φ), *com* $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$, *de* M *e* N *temos*

$\omega = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le n} \omega_{k_1\cdots k_p} dy^{k_1} \wedge \cdots \wedge dy^{k_p}$, *e, consequentemente,*

$$f^*\omega = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le n} (\omega_{k_1\cdots k_p} \circ f)\frac{\partial(y^{k_1}, \ldots, y^{k_p})}{\partial(x^{l_1}, \ldots, x^{l_p})} dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_p}.$$

Em particular, se $\dim(\mathrm{M}) = \dim(\mathrm{N}) = p$, *temos* $\omega = a(y)dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^p$ *e*

$$f^*\omega = (a\circ f)\frac{\partial(y^1, \ldots, y^p)}{\partial(x^1, \ldots, x^p)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p = (a\circ f) J\, dx^1, \wedge \cdots \wedge dx^p,$$

onde $dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^p = J dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$.

5.3 O Produto Interior e a Derivada de Lie de uma Forma Diferencial

O *produto interior* por um campo de vetores X é um operador i_X sobre p-formas para todo $X \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$. Ele aplica uma p-forma em uma $(p-1)$-forma. Isto é feito fixando-se a primeira variável da p-forma ω em X, e deixando as restantes $(p-1)$ variáveis livres, a fim de que estas sejam variáveis da $(p-1)$-forma $i_X\omega$. Esta operação também é chamada *contração* de ω por X, e denotada por $X \lrcorner\, \omega$.

Definição 5.3 *Sejam $X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$ e $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$, com $p > 0$. O* produto interior *de ω pelo campo de vetores X é a $(p-1)$-forma diferencial $i_X\omega$, definida por*

$$(i_X\omega)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = (X \lrcorner\, \omega)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{p-1}).$$

No caso em que $p = 0$, definimos $i_X\omega = 0$.

Proposição 5.3.1 *A derivação interior goza das seguintes propriedades,*

(1) $i_X|_U\omega|_U = (i_X\omega)|_U$;

(2) $i_X(\omega + \tau) = i_X\omega + i_X\tau$; $i_X(\lambda\omega) = \lambda(i_X\omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(3) Se $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$ e $\tau \bigwedge^q(\mathrm{M})$, então a seguinte regra do produto vale

$$i_X(\omega \wedge \tau) = i_X\omega \wedge \tau + (-1)^p\omega \wedge i_X\tau.$$

(4) Se $\omega \in \bigwedge^1(\mathrm{M})$, então $i_X\omega = \omega(X)$.

Demonstração: As propriedades *(1)*, *(2)* e *(4)* seguem facilmente da Definição 5.3 de produto interior, acima. Vamos então mostrar *(3)*.

Pela Definição 5.3 e pela definição do produto exterior, temos

$$\begin{aligned}
&(i_X(\omega \wedge \tau))(X_1, \ldots, X_{p+q-1}) = (\omega \wedge \tau)(X, X_1, \ldots, X_{p+q-1}) = \\
&= \frac{1}{(p-1)!\,q!}\sum_{\sigma \in S_{p+q-1}} \operatorname{sinal}(\sigma)\Big(\omega(X, X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p-1)})\tau(X_{\sigma(p)}, \ldots, X_{\sigma(p+q-1)})\Big) + \\
&\qquad + \frac{1}{p!\,(q-1)!}\sum_{\sigma \in S_{p+q-1}} \Big((-1)^p\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\tau(X, X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q-1)})\Big) = \\
&= \frac{1}{(p-1)!\,q!}\sum_{\sigma \in S_{p+q-1}} \operatorname{sinal}(\sigma)(i_X\omega)(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p-1)})\tau(X_{\sigma(p)}, \ldots, X_{\sigma(p+q-1)}) + \\
&+ \frac{1}{p!\,(q-1)!}(-1)^p\sum_{\sigma \in S_{p+q-1}} \operatorname{sinal}(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)})(i_X\tau)(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q-1)}) = \\
&= (i_X\omega \wedge \tau)(X_1, \ldots, X_{p+q-1}) + (-1)^p(\omega \wedge i_X\tau)(X_1, \ldots, X_{p+q-1}). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Dada uma carta local (U, ξ), com $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ de M, sendo $\omega = \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_p \le n} \omega_{k_1 \cdots k_p} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}$ e $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, não é difícil ver que temos

$$i_X\omega = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{1 \le k_2 \cdots k_p \le n} X^i\omega_{i\,k_2 \cdots k_p} dx^{k_2} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}.$$

Proposição 5.3.2 *Para todos os $X, Y \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$ e $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, temos*

(1) $i_{X+Y} = i_X + i_Y$;

(2) $i_{fX} = f\,i_X$;

(3) $(i_X)^2 = i_X i_X = 0$.

Demonstração: As propriedades *(1)* e *(2)* seguem facilmente da Definição 5.3. Quanto à propriedade *(3)*, se $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$ e $X_1, \ldots, X_{p-2} \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$, temos

$i_X(i_X\omega)(X_1,\ldots,X_{p-2}) = i_X\omega(X,X_1,\ldots,X_{p-2}) = \omega(X,X,X_1,\ldots,X_{p-2}) = 0,$
visto que ω é alternada. ■

Para o caso de formas diferenciais, a derivada de Lie tem uma expressão muito particular, dada em função dos operadores i_X e d.

Teorema 32 *Seja $X \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$. A derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ goza das seguintes prpriedades,*

(1) $\mathcal{L}_X(\omega\wedge\tau) = \mathcal{L}_X\omega\wedge\tau + \omega\wedge\mathcal{L}_X\tau$, para todas as formas $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$ e $\tau \in \bigwedge(\mathrm{M})$;

(2) Se $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, então $\mathcal{L}_X\, df = d(Xf)$;

(3) $\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X$, para todo $X \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$;

(4) A derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ comuta com d e i_X para todo $X \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$, ou seja, $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$ e $\mathcal{L}_X \circ i_X = i_X \circ \mathcal{L}_X$;

(5) $[\mathcal{L}_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$ e $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$, para todos os $X, Y \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$.

Demonstração: A parte *(1)* é uma conseqüência óbvia da parte **iii** da Proposição 4.9.1 da página 65.

Quanto à parte *(2)*, sendo θ_t o grupo a 1-parâmetro associado ao campo de vetores X, a definição de derivada de Lie nos dá,

$$\mathcal{L}_X df|_x = -\lim_{t\to 0}\frac{df|_x - \theta_{t*}df|_x}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{df|_x - (\theta_t^{-1})^* df|_x}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{df|_x - d((\theta_t^{-1})^* f)|_x}{t} =$$
$$= -d\left(\lim_{t\to 0}\frac{f(x)-(\theta_{t*}f)(x)}{t}\right) = d\mathcal{L}_X f|_x.$$

Seja $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$, vamos mostrar *(3)* usando indução sobre p. Para uma função $f \in \bigwedge^0(\mathrm{M})$, $i_X f = 0$, e temos

$$i_X df + d i_X f = i_X df = df(X) = X(f) = \mathcal{L}_X f.$$

Supondo o resultado válido para p, escrevamos uma $(p+1)$-forma ω como $\sum_{i=1}^{n} df_i \wedge \omega_i$, (isto é sempre possível, bastando tomar uma carta local) onde $\omega_i \in \bigwedge^{p-1}(\mathrm{M})$. Por linearidade, é suficiente demonstrar o resultado para cada termo da soma. Além disso, em virtude de *(1)* temos

$$\mathcal{L}_X(df_i\wedge\omega_i) = (\mathcal{L}_X df_i)\wedge\omega_i + df_i\wedge(\mathcal{L}_X\omega_i),$$

enquanto

$$i_X d(df_i\wedge\omega_i) + d i_X(df_i\wedge\omega_i) = -i_X(df_i\wedge d\omega_i) + d(i_X df_i\wedge\omega_i - df_i\wedge i_X\omega_i) =$$
$$= -(i_X df_i)\wedge d\omega_i + df_i\wedge(i_X d\omega_i) + (d i_X df_i)\wedge\omega_i + (i_X df_i)\wedge d\omega_i + df_i\wedge(d i_X\omega_i) =$$
$$= df_i\wedge(i_X d\omega_i) + (d i_X df_i)\wedge\omega_i + df_i\wedge(d i_X\omega_i).$$

Usando agora a hipótese de indução obtemos

$$(i_X d + d i_X)(df_i\wedge\omega_i) = df_i\wedge(i_X d\omega_i) + (d i_X df_i)\wedge\omega_i + df_i\wedge(d i_X\omega_i) = df_i\wedge\mathcal{L}_X\omega_i +$$
$$+(d i_X df_i)\wedge\omega_i = df_i\wedge\mathcal{L}_X\omega_i + d(\mathcal{L}_X f_i)\wedge\omega_i = df_i\wedge\mathcal{L}_X\omega_i + (\mathcal{L}_X df_i)\wedge\omega_i = \mathcal{L}_X(df_i\wedge\omega_i),$$

provando nossa afirmação.

As propriedades *(4)* e *(5)* são facilmente provadas usando-se *(3)*. ■

5.4 Variedades Orientáveis

Como vimos na Seção 1.4, uma orientação em um espaço vetorial é a escolha de uma certa classe de equivalência de bases ordenadas desse espaço.

Definição 5.4 *Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Dizemos que M é* orientável *quando existe uma aplicação Γ, que a cada ponto $x \in$ M associa uma orientação Γ_x do espaço vetorial* T_xM. *Exigimos ainda que Γ seja contínua no seguinte sentido: se (U,ξ), com $\xi = (x^1,\ldots,x^n)$, é uma carta em x com U conexo, então a base $\mathcal{B}_x = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_x \right\}$ de* T_xM *é ou positiva para todo $x \in U$, isto é $\mathcal{B}_x \in \Gamma_x\ \forall x \in U$, ou negativa para todo $x \in U$, isto é $\mathcal{B}_x \notin \Gamma_x\ \forall x \in U$*

Uma aplicação Γ, nas condições da definição acima, é chamada uma *orientação* da variedade M.

Quando $\mathcal{B}_x \in \Gamma_x$ para todo $x \in U$, dizemos que a carta (U,ξ) é *positiva*. Caso contrário, dizemos que (U,ξ) é *negativa* (relativamente à orientação considerada).

Dizemos que a variedade M está *orientada*, quando M é orientável e fixamos, de uma vez por todas, uma orientação Γ de M.

Se a orientação Γ varia continuamente com o ponto $x \in$ M, como descrito na definição acima, então, dada uma carta (U,ξ) de M, com U conexo, o conhecimento da orientação Γ_{x_0} para um ponto $x_0 \in U$ determina de maneira única, a orientação Γ_x para os demais pontos $x \in U$. Como conseqüência disso, se a variedade M é conexa e orientável, o conhecimento da orientação Γ_x para um ponto $x \in$ M, determina Γ_y para todo ponto $y \in$ M. Uma vez que existem somente duas orientações para o espaço vetorial T_xM, segue que M admite exatamente duas orientações.

Um *atlas coerente*, sobre uma variedade diferenciável M, é um atlas $\mathcal{A}$ cujas mudanças de coordenadas tem jacobiano positivo, isto é, se (U,ξ) e (V,φ) são cartas de $\mathcal{A}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação diferenciável

$$\varphi \circ \xi^{-1} : \xi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

tem determinante jacobiano positivo, para cada ponto de $\xi(U \cap V)$.

Um *atlas coerente máximo* em M é um atlas coerente não contido propriamente em outro da mesma natureza. Todo atlas coerente está contido em um único atlas coerente máximo.

Proposição 5.4.1 *Uma variedade é orientável se, e somente se, admite um atlas coerente.*

Demonstração: Este resultado é uma conseqüência simples das definições de orientabilidade e atlas coerente. ■

Existem ainda algumas maneiras de caracterizar o conceito de orientabilidade para uma variedade M. No que segue, comentaremos duas destas maneiras, que são as mais usadas em geral.

Proposição 5.4.2 *Uma variedade diferenciável* M, *de dimensão n, é orientável se, e somente se, esta possui uma n-forma contínua ω, que não se anula em nenhum ponto.*

Demonstração: Suponhamos que exista em M uma n-forma ω contínua que não se anule em nenhum ponto de M. Seja x um ponto de M, consideremos em $T_x M$, a seguinte orientação: uma base $\{v_1, \ldots, v_n\} \in T_x M$ é positiva se, e somente se, $\omega_x(v_1, \ldots v_n) > 0$.

Isto mostra que se (U, ξ), com $\xi = (x^1, \ldots x^n)$, é uma carta de M com U conexo, o sinal de ξ será o de $\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x\right)$ e este é o mesmo para todo $x \in U$, visto que ω é contínua e nunca se anula.

Reciprocamente, se M é orientável, tomemos um atlas coerente $\{(U_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ e uma partição da unidade $\{\chi_i\}_{i \in I}$ subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$.

Em U_i, temos a n-forma

$$dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n.$$

Por meio da partição da unidade $\{\chi_i\}_{i \in I}$, podemos definir uma n-forma contínua ω em M, que nunca se anula, da seguinte maneira

$$\omega = \sum_{i \in I} \chi_i dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n.$$

Esta forma está bem definida, visto que os para todo $i \in I$, χ_i anula-se fora do aberto U_i. Desta definição, é claro que ω é contínua. Para ver que ω nunca se anula, seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base positivamente orientada de $T_x M$. Então,

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i \in I} \chi_i(x) \, dx_i^1|_x \wedge \cdots \wedge dx_i^n|_x(v_1, \ldots v_n) > 0,$$

visto que cada parcela é maior ou igual a zero, havendo entre elas pelo menos uma que é estritamente positiva. ■

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Considere o conjunto

$$\widehat{M} = \{(x, \Gamma_x)/\Gamma_x \text{ é uma orientação em } T_x M\}.$$

Seja $\pi : \widehat{M} \to M$, definida por $\pi(x, \Gamma_x) = x$. Dada uma carta (U, ξ) de M, com $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, definindo-se

$$\widehat{U} = \left\{(x, \Gamma_x)/x \in U \text{ e } \left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x\right\} \in \Gamma_x\right\}$$

e $\widehat{\xi} : \widehat{U} \to \mathbb{R}^n$, onde

$$\widehat{\xi}(x, \Gamma_x) = \xi(x),$$

não é difícil mostrar que os pares $(\widehat{U}, \widehat{\xi})$ de cartas de M, construidos como acima, formam um atlas diferenciável para $\widehat{M}$, no qual π é diferenciável.

Chamamos a $\widehat{M}$ *recobrimento duplo orientável* de M, e pode-se facilmente mostrar que $\widehat{M}$ é uma variedade orientável, mesmo que M não seja. O conjunto $\widehat{M}$ é um exemplo de *espaço de recobrimento*.

Em geral, sendo M e N variedades diferenciáveis, dizemos que N é um *recobrimento* de M, se existe uma aplicação diferenciável $\pi : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{M}$, tal que cada ponto $x \in \mathrm{M}$ possui uma vizinhança U, cuja imagem inversa $\pi^{-1}(U)$ é a união disjunta de abertos de N, cada um dos quais é aplicado por π difeomorficamente sobre U.

Para terminar, vamos dar a última caracterização da orientabilidade, em termos do recobrimento duplo.

Proposição 5.4.3 *Seja* M *uma variedade diferenciável conexa, de dimensão* n. M *é orientável se, e somente se,* $\widehat{\mathrm{M}}$ *é desconexa.*

A demonstração deste fato não é muito difícil, apenas envolvendo o conceito de levantamento de caminhos. Para a demonstração, veja [40]. ■

A caracterização da orientabilidade em termos do recobrimento duplo de M tem algumas vantagens. Por exemplo, a topologia de $\widehat{\mathrm{M}}$ permite falar da continuidade da aplicação $x \in \mathrm{M} \mapsto (x, \Gamma_x) \in \widehat{\mathrm{M}}$, que nos dá o sentido exato para a afirmação de que a aplicação Γ, onde $x \mapsto \Gamma_x$, que escolhe uma orientação em cada ponto de M, varia continuamente.

5.5 A Integral de uma Forma Diferencial

Sejam M uma variedade diferenciável orientada, de dimensão n, e ω uma n-forma sobre M. Definiremos por etapas a integral de ω sobre M.

Seja $K = \overline{\{x \in \mathrm{M}/\omega_x \neq 0\}}$ o suporte de ω. Se K é um conjunto compacto, e está contido no domínio U, de uma carta positiva (U, ξ), com $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, para cada ponto $x \in \mathrm{M}$, temos

$$\omega_x = a(x) dx^1|_x \wedge \cdots \wedge dx^n|_x \,,$$

sendo que $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. definimos então

$$\int_{\mathrm{M}} \omega = \int_{\xi(U)} (a \circ \xi^{-1})(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \cdots dx^n,$$

onde a integral do segundo membro[1] é tomada no sentido usual de Riemann no $\mathbb{R}^n$. Esta integral sempre existe, dado que a função $a \circ \xi^{-1}$ é nula fora do compacto $\xi(K)$.

Definimos esta integral em função de uma carta local. Devemos portanto mostrar que a definição independe da particular carta tomada.

Seja (V, φ) outra carta positiva de M, com $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$ e $U \cap V \neq 0$, cujo domínio V também contenha o compacto K. Para $x \in V$ temos

$$\omega_x = b(x) dy^1|_x \wedge \cdots \wedge dy^n|_x \text{ com } b(x) = \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)}(x)\, a(x),$$

[1] Estamos fazendo uma identificação das funções $x^1, \ldots x^n$ com as coordenadas de $\mathbb{R}^n$, a fim de simplificar um pouco a notação.

se $x \in U \cap V$. Neste caso, $b : V \to \mathbb{R}^n$ é também uma função contínua. A forma ω anula-se fora do aberto $W = U \cap V$. Sendo o jacobiano acima estritamente positivo, dado que ξ e φ são positivas, temos portanto que

$$\int_{\varphi(V)} (b \circ \varphi^{-1})\, dy^1 \cdots dx^n = \int_{\varphi(W)} (b \circ \varphi^{-1})\, dy^1 \cdots dy^n =$$
$$= \int_{\varphi(W)} (a \circ \xi^{-1}) \frac{\partial(x^1, \ldots x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)}\, dy^1 \cdots dy^n = \int_{\xi(W)} (a \circ \xi^{-1})\, dx^1 \cdots dx^n =$$
$$= \int_{\xi(U)} (a \circ \xi^{-1})\, dx^1 \cdots dx^n,$$

provando nossa afirmação.

No caso em que a variedade M é compacta e ω é uma n-forma contínua qualquer, sobre M, tomamos um atlas coerente finito $\{(U_i, \xi_i)\}_{i=1}^k$ (isto é possível dado que M é compacta) e uma partição da unidade $\{\chi_i\}_{i=1}^n$ subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i=1}^n$. definimos então a integral de ω sobre M como

$$\int_{\mathrm{M}} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} \chi_i \omega,$$

onde cada somando é um caso particular do discutido anteriormente.

É necessário verificarmos que esta definição não depende dos particulares atlas coerente e partição da unidade a ele subordinado. Para tal, sejam $\{(V_j, \varphi_j)\}_{j=1}^p$ um outro atlas coerente e $\{\rho_j\}_{j=1}^p$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{V_j\}_{j=1}^p$. de M. Então, como $\sum_{j=1}^{p} \rho_j = 1$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \chi_i \omega = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} \int_{U_i} \chi_i \rho_j \omega.$$

Agora, como $\chi_i \rho_j$ tem suporte em $U_i \cap V_j$, então

$$\int_{U_i} \chi_i \rho_j \omega = \int_{V_j} \chi_i \rho_j \omega.$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \chi_i \omega = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} \int_{V_j} \chi_i \rho_j \omega = \sum_{j=1}^{p} \int_{V_j} \rho_j \omega.$$

O último caso é quando ω é uma n-forma contínua em uma variedade diferenciável orientada M, que não é compacta.

Como supomos nossas variedades sempre paracompactas, dado um atlas coerente $\{(U_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ e uma partição da unidade $\{\chi_i\}_{i \in I}$ subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$, definiremos a integral de ω sobre M como,

$$\int_{\mathrm{M}} \omega = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \chi_i \omega.$$

Esta soma pode ser convergente ou não, dando a origem à subdivisão das n-formas contínuas sobre M, em formas integráveis e formas não-integráveis. Existe, no entanto, uma classe de n-formas contínuas e integráveis em M. São as *formas com* *suporte compacto.* Para tal ω, existe um conjunto compacto $K \in$ M, tal que $\omega_x = 0$ para todo $x \in$ M $- K$. Quando se toma a partição da unidade para definir $\int \omega$, pode-se sempre toma-la de forma que apenas um número finito de vizinhanças coordenadas U_i, de cartas (U_i, ξ_i), intersecta o compacto K, e neste caso, apenas um número finito de funções χ_i são diferentes de zero em K. Logo, a soma

$$\sum_{i \in I} \int_{u_i} \chi_i \omega$$

que define a integral de ω é, na realidade, uma soma finita e, em particular, ω é integrável.

Consideremos agora, uma k-forma contínua, definida em uma variedade diferenciável M, de dimensão n. Seja S $\subset$ M uma subvariedade de dimensão k. A inclusão i : S $\hookrightarrow$ M induz um homomorfismo i^* das formas sobre M nas formas sobre S. Se $i^*\omega$ for integrável sobre S, diremos que ω é integrável sobre S e poremos

$$\int_{\mathrm{S}} \omega = \int_{\mathrm{S}} i^* \omega \ .$$

Sejam M e N variedades diferenciáveis e f : M $\to$ N um difeomorfismo. Então, M é orientável se, e somente se, N o é. Com efeito, basta tomar um atlas coerente na variedade M e construir, por meio de f, um na variedade N. Este atlas é facilmente visto ser coerente.

Definição 5.5 *Sejam* M *e* N *variedades diferenciáveis orientadas, e* f : M $\to$ N *um difeomorfismo. Dizemos que* f preserva a orientação *se* df_x *aplica bases positivamente orientadas de* T_xM *em bases positivamente orientadas de* $\mathrm{T}_{f(x)}$N*, para todo ponto* $x \in$ M.

Esta definição acarreta um interessante resultado, com respeito à integração e difeomorfismos.

Proposição 5.5.1 *Sejam* M, N *variedades orientadas e* f : M $\to$ N *um difeomorfismo que preserva a orientação. Dada uma n-forma contínua e com suporte compacto* ω*, sobre* N*, temos*

$$\int_{\mathrm{M}} f^* \omega = \int_{\mathrm{N}} \omega.$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, basta notar que como K, o suporte de ω, é compacto, podemos tomar uma partição da unidade $\{\chi_i\}$ de modo que somente um número finito de χ_i's não se anule em K. Portanto, como um atlas coerente de M determina um de N e uma partição da unidade em M também determina uma em N, o resultado segue facilmente, usando-se a definição de integral. ■

Seja (M,g) uma variedade semi-Riemanniana orientada (ver página 42), de dimensão n. Uma n-forma importante sobre M, é o chamado *elemento de volume* μ, determinado por g e pela orientação de M, que é definido em cada ponto $x \in$ M como,

$$\mu_x(v_1, \ldots, v_n) = \pm\sqrt{|\det(g(v_i, v_j))|},$$

onde $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ e o sinal escolhido é o da base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Na seção 1.4, comentamos que este número é o volume orientado, do paralelepípedo gerado por $v_1, \ldots, v_n$.

μ não é, em geral, uma forma positiva. No entanto, se (U, ξ) é uma carta positiva de M, com $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, então

$$\mu_x = \sqrt{|\det g_{ij}(x)|}\, dx^1|_x \wedge \cdots \wedge dx^n|_x \,,$$

onde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. Isto é claro, visto que

$$\mu_x\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \sqrt{|\det g_{ij}(x)|}$$

e, como $|\det g_{ij}(x)| > 0$ para qualquer $x \in$ M, $\sqrt{|\det g_{ij}(x)|}$ é diferenciável de mesma classe da métrica semi-Riemanniana g.

Se $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ é uma função real, definida em M, a forma diferencial $f\mu$, sobre M, pode ser integrável ou não. No caso de $f\mu$ ser integrável, pode-se definir a *integral de f sobre* M como $\int_{\mathrm{M}} f\mu$.

5.6 O Teorema de Stokes

O conceito de variedade diferenciável visto no Capítulo 3 não abrange, por exemplo, a esfera sólida $\{(x^1, \ldots, x^n)/(x^1)^2 + \cdots (x^n)^2 \leq 1\}$. Nossa intenção é demonstrar um teorema que generalize os teoremas integrais clássicos do cálculo vetorial. Tal teorema conterá como casos particulares os teoremas de Gauss e as formas do teorema de Stokes para o plano e para o espaço.

Definição 5.6 *Dizemos que o par $\{(U, \xi)\}$ é uma* carta *em um espaço topológico* M, *se $\xi : U \to \mathbb{R}^n_0$ é um homeomorfismo do aberto U no aberto $\xi(U)$ do semi-espaço inferior*

$$\mathbb{R}^n_0 = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}/x^0 \leq 0\}.$$

Esta definição contém a antiga definição de carta como um caso particular.

Daqui por diante, as definições de atlas, atlas maximal, orientação, campos de tensores, integral, etc., são análogas às que já foram vistas.

A modificação que deve-se fazer, diz respeito ao conceito de derivadação parcial. Até aqui, apenas consideramos derivadas parciais de funções definidas em um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Agora, admitiremos também derivadas parciais de funções

$f : A \to \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto aberto do semi-espaço $\mathbb{R}^n_0$. As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}(x)$ são as mesmas que antes para $k > 0$. A derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x^0}(x)$, quando $x = (0, b_1, \ldots, b_n)$ é definida da maneira óbvia, como a derivada à esquerda, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x^0}(x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{f(t, b_1, \ldots, b_n) - f(0, b_1, \ldots, b_n)}{t}.$$

Era de se esperar que se definisse esta derivada assim, uma vez que f é definida para pontos $(t, b_1, \ldots, b_n)$ com $t \leq 0$.

Definição 5.7 *Dada uma variedade diferenciável* M, *um ponto* $x \in$ M *é chamado* ponto de bordo *se,e somente se, existe uma carta* (U, ξ), $\xi = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$, *com* $x \in U$ *e* $\xi(x) = (0, x^1(x), \ldots, x^n(x))$. *O* bordo *da variedade* M *é o conjunto dos pontos de bordo, e denotado por* ∂M. *Quando* ∂M $\neq \emptyset$, *dizemos que* M *é uma* variedade com bordo.

> OBS: *Note que quando* ∂M $= \emptyset$, M *é uma variedade diferenciável de dimensão* $n + 1$, *no sentido* do Capítulo 3.

Observe que, se existe uma carta (U, ξ), $\xi = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$, com $x \in U$ e $x^0(x) = 0$, então dada outra carta qualquer (V, φ), $\varphi = (y^0, y^1, \ldots, y^n)$, com $x \in V$, temos necessariamente que $y^0(x) = 0$. Com efeito, o fato de serem (U, ξ) e (V, φ) cartas, implica que a aplicação

$$\varphi \circ \xi^{-1} : \xi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

é um difeomorfismo. Portanto, fazendo uso do teorema da função inversa, não é muito difícil ver que $y^0(x) = 0$.

Lembremos que as derivadas parciais relativas à primeira coordenada, em um ponto de bordo, devem ser calculadas somente à esquerda.

Proposição 5.6.1 *Seja* M *uma variedade de dimensão* $n + 1$. *Então o bordo* ∂M *é uma variedade sem bordo, de dimensão* n.

Demonstração: Toda vizinhança U, de um ponto de bordo x, deve conter um aberto do bordo, a que x pertença. Isto porque sua imagem, sendo aberta em $\mathbb{R}^n_0$, é a intersecção de um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ com o semi-espaço $\mathbb{R}^n_0$.

A partir de um atlas de M, construiremos um atlas para ∂M. Seja (U, ξ) uma carta de M, com $U \cap \partial$M $\neq \emptyset$, então $\widehat{\xi} : U \cap \partial$M $\to \mathbb{R}^n$, que consiste em tomar a restrição de ξ a $U \cap \partial$M e desprezar a primeira coordenada, que é sempre zero, será uma carta para ∂M. Explicitamente, se $x \in U \cap \partial$M, e $\xi(x) = (0, x^1(x), \ldots, x^n(x))$, então

$$\widehat{\xi}(x) = (x^1(x), \ldots, x^n(x)). \blacksquare$$

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão $n+1$ e $x \in \partial\mathrm{M}$ um ponto de bordo de M. As curvas que passam pelo ponto x, podem ser de diferentes tipos: há aquelas que começam (ou terminam) em x; aquelas que, em x, tangenciam o bordo; aquelas que passam por x sem tangenciar (estas devem possuir vetor tangente em x nulo, caso sejam diferenciáveis). Isto ilustra o fato de que o espaço vetorial tangente $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ mesmo em um ponto $x \in \partial\mathrm{M}$, é um espaço vetorial de dimensão $n+1$ (e não um semi-espaço, ou um espaço de dimensão n). Na verdade, a definição do espaço tangente $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ é análoga à que foi enunciada no Capítulo 3 para o caso sem bordo.

É claro que para todo ponto $x \in \partial\mathrm{M}$, existem dois espaços vetoriais no ponto x, a saber, o espaço $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ e o espaço $\mathrm{T}_x(\partial\mathrm{M})$. O primeiro tem dimensão $n+1$ e o segundo tem dimensão n.

Proposição 5.6.2 *Sejam* M *uma variedade diferenciável de dimensão* $n+1$ *e* $\partial\mathrm{M}$ *seu bordo. Se* M *é orientável,* $\partial\mathrm{M}$ *também o é.*

Demonstração: Dado um atlas coerente $\mathcal{A}$ de M, construímos um atlas $\mathcal{A}'$ para $\partial\mathrm{M}$, como da maneira descrita na Proposição 5.6.1, acima. Vamos mostrar que $\mathcal{A}'$ é um atlas coerente para $\partial\mathrm{M}$. Sejam (U,ξ), com $\xi = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$, e (V,φ), com $\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$, duas cartas de M, com $U \cap V \neq \emptyset$, e $(U \cap \partial\mathrm{M}, \widehat{\xi})$, $(V \cap \partial\mathrm{M}, \widehat{\varphi})$ as cartas induzidas em $\partial\mathrm{M}$. Para verificar que $\mathcal{A}'$ é um atlas coerente , é necessário mostrar que o jacobiano $J(\widehat{\varphi} \circ \widehat{\xi}^{-1})$ da mudança de coordenadas $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\xi}^{-1}$ é sempre positivo.

Dado que $\mathcal{A}$ é um atlas coerente, temos $J(\xi \circ \varphi^{-1}) > 0$. Por outro lado, dado um ponto $x \in \partial\mathrm{M}$ e $x \in U \cap V$, temos $x^0(x) = y^0(x) = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial y^0}{\partial x^1}(x) = \cdots = \frac{\partial y^0}{\partial x^n}(x) = 0.$$

Isto implica que

$$J(\xi \circ \varphi^{-1})(x) = \frac{\partial y^0}{\partial x^0} \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} = \frac{\partial y^0}{\partial x^0} J(\widehat{\xi} \circ \widehat{\varphi}^{-1})(x) > 0.$$

Ora, uma vez que $x^0 \leq 0$ e $y^0 \leq 0$, temos $\frac{\partial y^0}{\partial x^0} \geq 0$, mas a igualdade não pode verificar-se, visto que $J(\xi \circ \varphi^{-1})(x) > 0$. Disso, finalmente concluímos que $J(\widehat{\xi} \circ \widehat{\varphi}^{-1})(x) > 0$. ■

Definição 5.8 *A orientação em* $\partial\mathrm{M}$ *definida por* $\mathcal{A}'$*, acima, chama-se* orientação induzida *pela orientação de* M*, determinada por* $\mathcal{A}$.

Teorema 33 (Fórmula de Stokes) *Seja* M *uma variedade orientada de dimensão* $n+1$*, cujo bordo* $\partial\mathrm{M}$ *está dotado da orientação induzida. Se* ω *é uma* n*-forma* *em* M, *de classe* C^2 *e com suporte compacto, então*

$$\int_{\mathrm{M}} d\omega = \int_{\partial \mathrm{M}} \omega \,.$$

Antes de demonstrarmos a Fórmula de Stokes, algumas observações são necessárias.

OBSERVAÇÕES GERAIS:

(1)*A hipótese de* ω *ser de classe* C^2, *é necessária, a fim de que* $d\omega$ *tenha um significado intrínseco. Esta hipótese foi usada quando demonstramos que a diferencial exterior estava definida independentemente da carta escolhida.*

(2)*O teorema acima, inclui como casos particulares as fórmulas de Análise Vetorial clássica, conhecidas como Teoremas de Gauss, Green, Stokes e Ostrogadsky. Por exemplo, se* M *é uma superfície bidimensional do espaço* $\mathbb{R}^3$, *cuju bordo é a curva* $\Sigma = \partial \mathrm{M}$, *e* $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ *é uma* 1*-forma sobre* M, *o Teorema de Stokes, enunciado acima, nos fornece*

$$\int_{\mathrm{M}} \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\Sigma} A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

que é o conhecido teorema clássico de Stokes.

(3)*Quando* ω *não tem suporte compacto e* M *não é compacta, o teorema de Stokes não vale nem quando* ω *é de classe* C^2, *mesmo que* ω *seja integrável em* ∂M *e* $d\omega$ *seja integrável em* M. *O exemplo clássico, é ver que*

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

é uma 1*-forma de classe* C^∞ *sobre*

$$\mathrm{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(0,0)\}.$$

Temos claramente que $d\omega = 0$ *é integrável em* M, *com* $\int_{\mathrm{M}} d\omega = 0$. *Além disso,* ω *é integrável sobre* $\partial \mathrm{M} = S^1$, *pois* S^1 *é compacto. Parametrizando-se* S^1 *por* $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *obtemos*

$$\int_{\partial \mathrm{M}} \omega = 2\pi \neq \int_{\mathrm{M}} d\omega.$$

Assim, algumas hipóteses adicionais sobre o comportamento de ω *são necessárias para manter a validez da fórmula de Stokes. A hipótese de* ω *ter suporte compacto não é, com certeza, a mais geral possível, mas é suficiente para grande parte das aplicações.*

Demonstração: Note primeiro, que se ω pssui suporte compacto, então $d\omega$ também possui. Suponhamos inicialmente, que o suporte de ω esteja contido dentro do domínio U, de uma carta (U, ξ), $\xi = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$, de M. Nesta carta, podemos escrever

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \, dx^0 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n,$$

onde o sinal $\hat{}$ sobre o objeto, significa que este deve ser omitido. Então, para a diferencial exterior $d\omega$ temos

$$d\omega = \sum_{i=0}^{n} d\omega_i \wedge dx^0 \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n.$$

Mas $d\omega_i = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \, dx^k$, de onde concluímos que

$$d\omega = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \, dx^k \wedge dx^0 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^i \wedge dx^0 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n,$$

visto que

$$dx^k \wedge dx^0 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n = 0,$$

para $k \neq i$.

Vamos distinguir dois casos, conforme U contenha ou não pontos de bordo.

Primeiro Caso: $U \cap \partial \mathrm{M} = \emptyset$. Seja $i : \partial \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ a aplicação de inclusão. Neste caso é óbvio que

$$\int_{\partial \mathrm{M}} \omega = \int_{\partial \mathrm{M}} i^* \omega = 0,$$

uma vez que $\omega = 0$ fora de U.

Demonstremos que o primeiro membro é também nulo, isto é, que $\int_{\mathrm{M}} d\omega = 0$. Sendo $\xi(U)$ um conjunto limitado, pode-se considera-lo contido em um cubo fechado K, de arestas paralelas aos eixos coordenados, ao qual se estendam as funções $\omega_i \circ \xi^{-1}$, fazendo-as iguais a zero em $K - \xi(U)$. Isto não altera a continuidade de $\omega_i \circ \xi^{-1}$.

Obtemos então

$$\int_{\mathrm{M}} d\omega = \sum_{i=0}^{n} \int_{K} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \circ \xi^{-1} \, dx^i dx^0 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n.$$

Esta última integral é uma integral em $\mathbb{R}^n$, como na definição de integral que demos anteriormente.

Procedendo-se a integração, relativamente a x^i, aparecem, as diferenças entre os valores de $\omega_i \circ \xi^{-1}$ nas faces do cubo K e estes são nulos, implicando que

$$\int_{\mathrm{M}} d\omega = 0.$$

Segundo Caso : $U \cap \partial \mathrm{M} \neq \emptyset$. Considerando-se, mais uma vez a aplicação inclusão $i : \partial \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, obtemos $i^* \omega = \omega_0 \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, visto que restringir-se ao bordo significa fazer $x^0 = 0$ e, consequentemente, $dx^0 = 0$.

Então,

$$\int_{\partial \mathrm{M}} \omega = \int_{\partial \mathrm{M}} (\omega_0 \circ \xi^{-1}) \, dx^1 \cdots dx^n.$$

Note que estamos levando em conta que a orientação de $\partial \mathrm{M}$ é a induzida pela de M.[2]

[2] Se tivessemos definido uma variedade com bordo com as cartas homeomorfas ao semi-plano superior, ao invés de inferior, teríamos que colocar em $\partial \mathrm{M}$ a orientação oposta à induzida de M.

A Fórmula de Stokes possui uma interessante interpretação, em termos da dualidade existente entre as formas diferenciais de classe C^2 e com suporte compacto, sobre uma variedade M, e as subvariedades de M.

Sejam $\mathcal{F}$ o conjunto das formas diferenciais de classe C^2 e com suporte compacto sobre M e $\mathcal{S}$ o conjunto das subvariedades de M. Temos $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \cup \cdots \cup \mathcal{F}^n$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}^0 \cup \cdots \cup \mathcal{S}^n$, onde $\mathcal{F}^k$ é o conjunto das k-formas e $\mathcal{S}^k$ é o conjunto das subvariedades de dimensão k. A dualidade acima referida, consiste no seguinte: para cada k, $1 \leq k \leq n$, existe uma aplicação

$$\mathcal{S}^k \times \mathcal{F}^k \to \mathbb{R},$$

que associa a cada subvariedade orientada $\mathrm{N} \in \mathcal{S}^k$, e cada k-forma $\omega \in \mathcal{F}^k$, o número real

$$< \mathrm{N}, \omega >= \int_{\mathrm{N}} \omega$$

Esta aplicação é bilinear, no sentido de que

$$< \mathrm{N}, \omega + \theta >=< \mathrm{N}, \omega > + < \mathrm{N}, \theta >$$

e

$$< \mathrm{N} \cup \mathrm{P}, \omega >=< \mathrm{N}, \omega > + < \mathrm{P}, \omega >$$

se N e P são disjuntas. A Fórmila de Stokes exprime que o operador de bordo $\partial : \mathcal{S}^k \to \mathcal{S}^{k-1}$ e o operador diferencial exterior $d : \mathcal{F}^k \to \mathcal{F}^{k+1}$ são *adjuntos* um do outro, relativamente a esta dualidade.[3] Com efeito, na notação acima, a Fórmula de Stokes se escreve como

$$< \partial\mathrm{N}, \omega >=< \mathrm{N}, d\omega >,$$

onde $\mathrm{N} \in \mathcal{S}^{k+1}$ e $\omega \in \mathcal{F}^k$.

Para completar esta seção, vamos introduzir o conceito de *Cohomologia de de Rham.*

Definição 5.9 *Sejam M uma variedade n-dimensional e* $\omega \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$. *Dizemos que* ω *é* fechada *se* $d\omega = 0$ *e que* ω *é exata se existe* $\tau \in \bigwedge^{p-1}(\mathrm{M})$ *tal que* $\omega = d\tau$.

É claro, da definição , que toda forma exata é fechada. Denotemos por $Z^k(\mathrm{M}) = \{\omega \in \bigwedge^k(\mathrm{M})/\omega$ é fechada $\}$ e $B^k(\mathrm{M}) = \{\omega \in \bigwedge^k(\mathrm{M})/\omega$ é exata $\}$. Estes dois conjuntos são $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-módulos, ou seja, espaços vetoriais sobre o anel $\mathcal{F}(\mathrm{M})$. Portanto, podemos tomar o quociente $H^k(\mathrm{M}) = Z^k(\mathrm{M})/B^k(\mathrm{M})$.

Definição 5.10 *O conjunto* $H^k(\mathrm{M}) = Z^k(\mathrm{M})/B^k(\mathrm{M})$ *é chamado* k-ésima Cohomologia de de Rham *de* M.

[3]Estamos considerando em cada $\mathcal{S}^k$, a subvariedade vazia $\emptyset \in \mathcal{S}^k$, a fim de podermos falar em $\partial\mathrm{N}$, quando $\partial\mathrm{N}$ é uma variedade k-dimensional sem bordo.

Definição 5.12 *Dizemos que $\mu \in \bigwedge^n(\mathrm{M})$ é um* elemento de volume *para* (M,g) *se para todo ponto $x \in \mathrm{M}$ temos*

(1) μ_x é um elemento de volume sobre $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ com respeito à métrica g_x;

(2) μ_x é um múltiplo positivo de ν_x.

Desta forma, temos unidos o conceito de orientação e a estrutura semi-Riemanniana de M.

Pode-se facilmente estender o conceito de sinal. Para isso, definimos a função $\operatorname{sinal}(g) : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ por $\operatorname{sinal}(g)(x) = \operatorname{sinal}(g_x)$, onde $\operatorname{sinal}(g_x)$ é definido como na Seção 1.5 do Capítulo 1, tomando-se V como $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$.

Por meio da métrica g_x e do elemento de volume μ_x também podemos construir um operador estrela $*_x : \bigwedge^k(\mathrm{T}_x\mathrm{M}) \to \bigwedge^{n-k}(\mathrm{T}_x\mathrm{M})$.

Definição 5.13 *Seja $\beta \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$ definimos $*\beta \in \bigwedge^{n-k}(\mathrm{M})$ por $(*\beta)_x = *_x\beta_x$.*

Desta definição fica claro que $\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(\alpha,\beta)\mu$, onde entendemos $\tilde{g}(\alpha,\beta)_x = \tilde{g}_x(\alpha_x,\beta_x)$. Isto mostra que a métrica g também se estende a uma métrica $\tilde{g}$ sobre $\bigwedge^k(\mathrm{M})$, $1 \leq k \leq n$, como no caso para espaços vetoriais.

Sejam agora $\beta \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$ e $\alpha \in \bigwedge^{p-1}(\mathrm{M})$. Das propriedades da diferencial exterior temos $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1}\alpha \wedge d * \beta$.

Dada então uma k-forma $\omega \in \bigwedge(\mathrm{M})$, o Corolário 5.a da página 16 nos fornece $* * \omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$, e daí,

$$* * d * \beta = \operatorname{sinal}(g)(-1)^{(n-p+1)(p-1)},$$

visto que $d * \beta$ é uma $n-p+1$-forma. Um pouco de manipulação nos expoentes do fator (-1) nos dá,

$$(-1)^{(p-1)}\alpha \wedge d * \beta = -\alpha \wedge * \Big(\operatorname{sinal}(g)(-1)^{n(p+1)+1} * d * \beta\Big).$$

Ora, se para $\omega \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$, definimos

$$\delta\,\omega = \operatorname{sinal}(g)(-1)^{n(k+1)+1} * d * \omega,$$

obtemos $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge * \delta\,\beta$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 5.14 *O operador $\delta : \bigwedge^k(\mathrm{M}) \to \bigwedge^{k-1}(\mathrm{M})$, definido por*

$$\delta\,\omega = \operatorname{sinal}(g)(-1)^{n(k+1)+1} * d * \omega,$$

é chamado Codiferencial.

Note que $\delta\delta = \pm * d * *d* = \pm * dd* = 0$. Além disso, o codiferencial, goza de uma importante propriedade, na verdade ele é a adjunta de d, com respeito à um produto interno definido sobre as formas com suporte compacto.

Teorema 35 *Sejam* (M,g)*, uma variedade semi-Riemaniana orientada sem bordo,* μ *seu elemento de volume,* $\beta \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$ *e* $\alpha \in \bigwedge^{k-1}(\mathrm{M})$*, sendo que* α *tem suporte compacto. Então, vale*

$$\int_{\mathrm{M}} \tilde{g}(\alpha, \delta\,\beta)\mu = \int_{\mathrm{M}} \tilde{g}(d\alpha, \beta)\mu.$$

Demonstração: Temos $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\,\delta\,\beta$. Notando que $d\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(d\alpha, \beta)\mu$ e $\alpha \wedge *\,\delta\,\beta = \tilde{g}(\alpha, \delta\beta)\mu$, encontramos

$$\int_{\mathrm{M}} \tilde{g}(d\alpha, \beta)\mu - \int_{\mathrm{M}} \tilde{g}(\alpha, \delta\beta)\mu = \int_{\mathrm{M}} d(\alpha \wedge *\beta).$$

Mas como $\partial\mathrm{M} = \emptyset$, a fórmula de Stokes nos dá

$$\int_{\mathrm{M}} d(\alpha \wedge *\beta) = \int_{\partial\mathrm{M}} \alpha \wedge *\beta = 0.$$

Este fato demonstra o teorema. ■

O tal produto interno sobre as formas com suporte compacto, mencionado acima, é definido por

$$< \omega, \tau >= \int_{\mathrm{M}} \tilde{g}(\omega, \tau)\mu,$$

onde $\omega, \tau \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$. O teorema acima afirma que d e δ s˜ao duais, com respeito ao produto $<,>$, ou seja,

$$< d\alpha, \beta >=< \alpha, \delta\beta >,$$

onde $\beta \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$ e $\alpha \in \bigwedge^{k-1}(\mathrm{M})$.

Para terminar esta seç˜ao, vamos dar um exemplo muito importante de aplicaç˜ao do operador estrela e do codiferencial.

Exemplo: As Equações de Maxwell na Forma Diferencial.

Seja $\mathrm{M} = \mathbb{R}^4$, com coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ e métrica g tal que

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k = 0; \\ -1 & \text{se } i = k = 1, 2, 3; \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Na verdade, (M,g) assim definida é chamada *Espaço de Minkowski.*

Considere a 2-forma $\omega = E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$, onde $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ é o *campo elétrico* e $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ é o *campo magnético.* Colocando $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dt)$ e $d\boldsymbol{\eta} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$, obtemos que $\omega = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \wedge dt + \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\eta}$. Um cálculo rápido nos dá

$$d\omega = \left(\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{\eta} \wedge dt + (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) d\tau,$$

onde $d\tau = dx \wedge dy \wedge dz$. Desta forma, temos $d\omega = 0$ se, e somente se,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \text{ e } \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

que é o primeiro par de equações de Maxwell.

Veja que $*\omega = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} \wedge dt$, e portanto,

$$d * \omega = (\nabla \cdot \boldsymbol{E})d\tau - \left(\nabla \cdot \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{\eta} \wedge dt.$$

Note que como $\mathrm{M} = \mathbb{R}^4$, temos $\delta = \text{sinal}\,(g)(-1)^{4(k+1)+1} * d* = *d*$, em $\bigwedge^k(\mathrm{M})$. Desta forma,

$$\delta\omega = *d * \omega = (\nabla \cdot \boldsymbol{E})dt - \left(\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Sendo $\rho : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ a *densidade de carga*, e $\boldsymbol{J} : M \to \mathbb{R}^3$ a ***densidade de corrente***, definimos a *1-forma de fonte* $j \in \bigwedge^1(\mathrm{M})$, por $j = \rho dt - \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{r}$. Então, $\delta\omega = j$ é equivalente às duas últimas equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \text{ e } \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J}.$$

Estas duas últimas equações são conhecidas como ***equações de Maxwell não homogêneas.***

Finalmente, obtemos que as equações de Maxwell podem ser rezumidas, por meio da linguagem de formas diferenciais, a

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 \\ \delta\omega &= j. \end{aligned}$$

Além disso, aplicando δ à equação $\delta\omega = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta(\delta\omega) &= \delta j = *d * j = *d(\rho\tau - \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{\eta} \wedge dt) = *\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}dt \wedge d\tau - \nabla \cdot \boldsymbol{J} d\tau \wedge dt\right) = \\ &= -\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J}\right), \end{aligned}$$

que como $\delta(\delta\omega) = \delta^2\omega = 0$, nos dá a chamada *Equação de Continuidade*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0,$$

que diz que a carga é conservada.

Capítulo 6

Teoria Geral de Fibrados

A estrutura de fibrado é a generalização natural de produto cartesiano, que como veremos carrega também uma estrutura geométrica (ou topológica). No que segue daremos alguns exemplos de fibrados, que são muito importantes em física. Como veremos, esta é uma construção hierárquica.

Comecemos pelo *Espaço-tempo de Aristóteles*, onde tempo e espaço são absolutos. Este espaço-tempo nada mais é que o produto cartesiano $M^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (mais geralmente $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$); todo evento é definido por uma localização no espaço e um instante de tempo.

Na física Newtoniana, o tempo permanece absoluto, mas o espaço é relativo. Isto pode ser descrito dizendo-se que existe uma projeção $\pi : M^4 \to \mathbb{R}$, isto é, uma aplicação sopbrejetiva que associa a cada evento $p \in M^4$, o correspondente instante de tempo $\pi(p) \in \mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}$ é, neste caso, chamado *espaço de base*, e o conjunto de todos os eventos $\pi^{-1}(t)$ que são simultâneos com p, é chamado *fibra sobre* t. Cada fibra é isomorfa a $\mathbb{R}^3$, que é chamado *fibra típica.* O espaço total M^4 deste fibrado pode ser trivializado, isto é, representado como o produto cartesiano $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Qualquer tal trivialização $h : M^4 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ é da forma $h(p) = (\pi(p), r(p))$, onde $r(p) = (x(p), y(p), z(p))$ são as coordenadas espaciais do evento p relativas a um observador inercial. Pode-se dizer que *espaço-tempo Newtoniano* M^4 é o espaço total de um fibrado que é trivial, isto é, isomorfo ao fibrado produto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, sem que este isomorfismo seja natural.

O *Espaço-tempo da Teoria da Relatividade Especial* é conhecido como *Espaço de Minkowski*, que tem um grupo transitivo, de movimentos, de dez parâmetros, o chamado *grupo de Lorentz não-homogêneo.* O fibrado correspondente é um *fibrado principal* de referenciais lineares.

Finalmente, o *Espaço-tempo de Einstein*, da Teoria da Relatividade Geral, é um fibrado de referenciais sobre um espaço-tempo curvo, isto é, sobre uma variedade diferenciável Lorentziana quadri-dimensional.

6.1 Estruturas Fibradas Topológicas

Definição 6.1 *Sejam* E *e* B *espaços topológicos e* π : E $\to$ B *uma aplicação contínua e sobrejetiva. Chamamos à tripla* (E,π,B) estrutura fibrada (topológica).

O espaço E é chamado *espaço total* (ou *fibrado*); π é chamada *projeçõ* e B é o *espaço de base.* Nos referiremos a (E,π,B) como uma *estrutura fibrada sobre* B, e para cada $b \in$ B, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ é chamado *fibra sobre b.*

Sejam (E,π,B) uma estrutura fibrada, X um espaço topológico e $s : X \to$ B uma aplicação contínua. Uma aplicação contínua $\tilde{s}$: X $\to$ E tal que πo $\tilde{s}= s$ é chamada um *levantamento* se s para E (ou, mais simplesmente, uma *cobertura* de s). Em particular, um levantamento σ da aplicação identidade 1_{B} : B $\to$ B para E é chamado uma *secção* da estrutura fibrada. Como $\pi \circ \sigma = 1_{\mathrm{B}}$, toda secção é claramente injetora.

> OBS: *Existem estruturas fibradas que não possuem secções. Por exemplo, tome* $(\mathbb{R}, \pi, S^1)$, *onde* $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ *é definida por* $\pi(x) = e^{ix}$, *e seja* X $= S^1$. *A aplicação identidade* 1_{S^1} *não pode ser levantada para* $\mathbb{R}$, *pois toda aplicação contínua* $f : S^1 \to \mathbb{R}$ *aplica, pelo menos, um par de pontos antípodas em um mesmo ponto. Logo* f *não pode ser injetora.*

Sejam (E,π,B) uma esrutura fibrada, X um espaço topológico qualquer e f : X $\to$ B uma aplicação contínua no espaço de base B. Seja E(f) $\subset$ E $\times$ X o subspaço topológico definido por $\mathrm{E}(f) = \{(e, x)/\pi(e) = f(x)\}$, com a topologia herdada do produto cartesiano. Seja p : E(f) $\to$ X dada por $p(e, x) = x$. É claro que (E(f),p,X) é uma estrutura fibrada, que é chamada *estrutura fibrada sobre* X *induzida pela aplicação* f : X $\to$ B. Intuitivamente, E(f) é formada colocando-se sobre x a fibra encontrada sobre $f(x)$. Sendo q : E(f) $\to$ E a projeção $q(e, x) = e$, é imediato das nossas definições que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}(f) & \xrightarrow{q} & \mathrm{E} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{X} & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{B} \end{array}$$

As estruturas fibradas (E,π,B) que ocorrem mais frequentemente em muitos contextos são aquelas nas quais cada ponto de B tem uma vizinhança sobre a qual a projeção comporta-se, grosseiramente, como a projeção de um produto sobre um de seus fatores. Chamamos tais estruturas de *estruturas fibradas localmente triviais,* muito embora esta não seja uma terminação muito usada.

Definição 6.2 *Uma estrutura fibrada* (E,π,B) *é chamada* localmente trivial *se para cada $b \in$ B existe uma vizinhança U contendo b e uma aplicação contínua $f_U : U \times \pi^{-1}(U) \to$ E tal que :*

i. $\pi \circ f_U(b,e) = b$ *para todo* $(b,e) \in U \times \pi^{-1}(U)$;

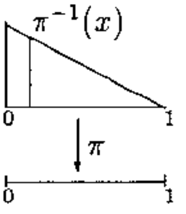
ii. $f_U(\pi(e),e) = e$ *para cada* $e \in \pi^{-1}(U)$.

As aplicações f_U são chamadas *trivializações*, e a vizinhança U é chamada *vizinhança da trivialização* f_U. Para $e \in \pi^{-1}(U)$, a aplicação $b \mapsto f_U(b,e)$ fornece uma "fatia" em $\pi^{-1}(U)$ através de e. Note que não exigimos a coincidência das aplicações $b \mapsto f_U(b,e)$, $e \mapsto f_V(b,e)$ sobre $U \cap V$.

Exemplos:

1. Sejam E o triângulo $\{(x,y)/0 \le y \le x \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ e π : E $\to [0,1]$ dada por $\pi(x,y) = x$. Então (E,π,[0,1]) é uma estrutura fibrada localmente trivial. Uma trivialização pode ser definida sobre todo o intervalo $[0,1]$ por

$$f(x',(x,y)) = \begin{cases} (x',x') & \text{se } x' \le y; \\ (x',y) & \text{se } x' \ge y. \end{cases}$$



2. **Estruturas Fibradas de Stiefel**: Seja $V_{m,n}$ a família de todos os conjuntos ordenados $(u_1,\ldots,u_m)$, $m < n$, de vetores unitários mutuamente ortogonais, na origem de $\mathbb{R}^n$. Usando um sistema de coordenadas ortogonal fixo, cada $u \in V_{n,m}$ é representado por uma matriz $[u]$ de m linhas e n colunas, tal que $[u][u]^t = I_m$ (onde $[u]^t$ é a matriz transposta de $[u]$ e I_m é a matriz identidade de $m \times m$). O conjunto $V_{n,m}$ herda a topologia de $\mathbb{R}^{nm}$, como subspaço. Este conjunto é chamado uma *Variedade de Stiefel*, que, em particular, é um espaço métrico compacto (e também uma variedade diferenciável).

   Para $0 < k < m < n$, defina $\pi : V_{n,m} \to V_{n,k}$ por $\pi(u_1,\ldots,u_k,\ldots,u_m) = (u_1,\ldots u_k)$. Com isto, a aplicação π é claramente contínua, e cada fibra é homeomorfa a $V_{n-k,m-k}$.

   Vamos mostrar agora que $(V_{n,m},\pi,V_{n,k})$ é localmente trivial. Como a função $h(u,v) = \det([u]\,[v]^t)$ é contínua, sobre o compacto $V_{n,k} \times V_{n,k}$, e $h(u,u) = 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h(u,v) \ne 0$ sempre que $d(u,v) < \varepsilon$. Segue que se $d(u,\pi(w)) < \varepsilon$, então os vetores $u_1,\ldots u_k, w_{k+1},\ldots,w_m$ são linearmente independentes: pois se $a_1u_1 + \cdots + a_ku_k + b_{k+1}w_{k+1} + \cdots + b_mw_m = 0$ então

$a_1u_1 \cdot w_s + \cdots a_ku_k \cdot w_s = 0$ para cada $s = 1, \ldots, k$ e uma vez que $h(u, \pi(w)) \neq 0$ vem que $a_i = 0$, então, $b_j = 0$. Estabelecido este fato, sejam $u \in V_{n,k}$ e $U = \mathrm{B}_\varepsilon(u)$. Defina $f_U : U \times \pi^{-1}(U) \to V_{n,m}$ por

$$f_U\left((u_1, \ldots, u_k), (w_1, \ldots, w_m)\right) = (u_1, \ldots, u_k, \widehat{w}_{k+1}, \ldots, \widehat{w}_m),$$

onde $u_1, \ldots, u_k, \widehat{w}_{k+1}, \ldots, \widehat{w}_m$ são os vetores ortogonalizados pelo processo de Gram-Schimidt na ordem em que eles são escritos. É fácil verificar que f_U é uma trivialização local. Como u é arbitrário, $(V_{n,m}, \pi, V_{n,k})$ é uma estrutura fibrada localmente trivial.

Estas estruturas fibradas são de suma importância na teoria de homotopia, principalmente para se estudar esferas e espaços projetivos.

6.2 Fibrados Diferenciáveis

Como pudemos notar brevemente na introdução deste capítulo, fibrados generalizam naturalmente a noção de produto cartesiano.

Sejam E uma variedade diferenciável e $\sim$ uma relação de equivalência em E tal que:

a) O espaço quociente $\mathrm{M} = \mathrm{E}/\sim$, também chamado *espaço de base*, é uma variedade diferenciável de dimensão n.

b) A projeção canônica $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ é diferenciável e de posto[1] n em todos os pontos de E.

Sejam agora F uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie agindo em F de maneira diferenciável e efetiva. Costuma-se identificar G com um subgrupo do grupo de difeomorfismos de F, $\mathrm{G} \subset \mathrm{Dif(F)}$.

Definição 6.3 *Uma estrutura de* fibrado diferenciável *sobre* E, *é uma sextupla* $(\mathrm{E}, \pi, \mathrm{M}, \mathrm{F}, \mathrm{T}, \mathrm{G})$, *onde* $\mathrm{T} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *é uma família de difeomorfismos satisfazendo os seguintes axiomas:*

F1 *Existe uma cobertura aberta* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, *de* E, *tal que* $T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathrm{F}$ *é um difeomorfismo, onde* T_α *tem a forma* $T_\alpha(p) = (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$ *e o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[drr, "\pi"'] & & U_\alpha \times \mathrm{F} \arrow[ll, "T_\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\text{Projeção no primeiro fator}"] \\ & & U_\alpha \end{tikzcd}$$

[1] Sejam M, N variedades diferenciáveis e $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. O *posto de f em um ponto $x \in \mathrm{M}$* é definido como o posto da transformação linear $df|_x$.

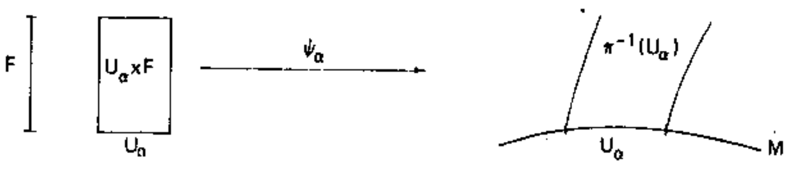
O conjunto $\{(U_\alpha, \mathrm{T}_\alpha)\}$ *é chamado* sistema de trivializações locais *para* E. *Note que* $E_x = \pi^{-1}(x)$ *é uma subvariedade fechada de* E, *e que as aplicações* $\varphi_{\alpha,x} = \varphi_\alpha|_{\mathrm{E}_x} : \mathrm{E}_x \to \mathrm{F}$ *são difeomorfismos, para cada* $x \in U_\alpha$. E_x *é chamada fibra em* x.

F2 *Para cada par de índices* $\alpha, \beta \in \Lambda$, *o difeomorfismo* $\varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ *coincide com a ação de um elemento de* G. *(Note que isto só tem sentido se* $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.*)*

Se G tem um único elemento, dizemos que E é *trivializável.* De **F2**, se $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, temos o difeomorfismo $g_{\alpha\beta} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$, onde $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1}$. Ora, então $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{G}$. O conjunto $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ assim definido satisfaz a *condição de cociclo*, ou seja, $g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$, $\forall\, x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

E, assim definido, é muitas vezes chamado simplesmente *fibrado* (ou espaço fibrado). F é chamada *fibra típica*, G o *grupo de estrutura* e T a família de difeomorfismos que define a estrutura.

Notamos que E é a união disjunta das fibras, e que o axioma **F1** pode ser entendido como segue:



Obs: *Um fibrado topológico é simplesmente uma estrutura fibrada topológica localmente trivial, como na Definição 6.2 da página 93.*

Na seção anterior definimos secções para estruturas fibradas topológicas. A noção de secção para um fibrado diferenciável é muito similar.

Definição 6.4 *Uma* secção *de um fibrado diferenciável* E, *é uma aplicação diferenciável* $\sigma : U \to \mathrm{E}$, *onde* U *é um aberto de* M, *que satisfaz* $(\pi \circ \sigma)(x) = x$, *para todo* $x \in U$. *Se* $U = \mathrm{M}$ *dizemos que* σ *é uma* secção global.

Exemplos:

1. Sejam X e Y variedades diferenciáveis e E = X×Y. Então E, munido da estrutura diferenciável do produto cartesiano, é um fibrado :

   (a) $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$, $\pi(x, y) = x$, é a projeção;

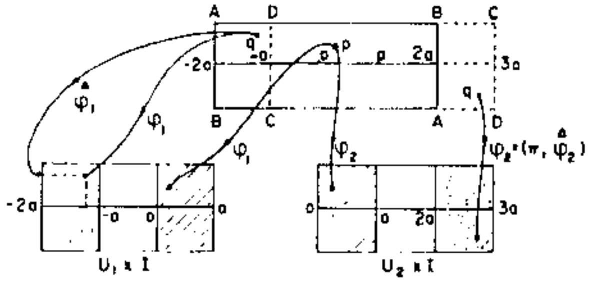
   (b) X é o espaço de base e Y a fibra típica;

(c) Seja $U_\alpha = X$ e $T_\alpha = 1_E$. Temos com isso que $G = \{\mathbf{e}\}$;

(d) As fibras $E_x = \pi^{-1}(x)$ são todas difeomorfas. Com efeito, existe um difeomorfismo natural $E_x \simeq Y$, dado por $(x, y) \mapsto x$;

(e) As secções de E são o gráfico de aplicações diferenciáveis de X em Y.

2. **Faixa de Möebius**



Como base temos S^1 de comprimento $4a$ e coberto por dois conjuntos abertos U_1 e U_2, $U_1 = \{x \in S^1 / -2a < x < a\}$ e $U_2 = \{x \in S^1 / 0 < x < 3a\}$. (Estes intervalos sobre S^1 são obtidos parametrizando-se S^1 pelo comprimento de arco.

Considere $\pi(p)$; identificando cada ponto de S^1 com seu comprimento de arco podemos escrever $\pi(p) = x_p$ = comprimento de arco da origem ao ponto que dista desta $x_p \in S^1$.

Quanto à fibra típica, esta é $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, e $T_\alpha : \pi^{-1} \to U_\alpha \times I$ é definida por $T_\alpha(p) = (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$, onde $\alpha \in \{1, 2\}$.

Denotamos $\varphi_\alpha(p) \in I$ por i_p. Assim, o grupo de estrutura é obtido como segue.

A intersecção de U_1 e U_2 consiste de dois abertos disjuntos V e W, com

$$V = \{x/0 < x < a\} \text{ e } W = \{x/ -2a < x < -a\}.$$

Seja p tal que $\pi(p) \in V$, então $\varphi_{1,x_p}(p) = i_p$ e $\varphi_{2,x_p} = i_p$. Portanto, $\varphi_{1,x_p} \circ \varphi_{2,x_p} = 1_V$.
Seja agora q tal que $\pi(q) \in W$. Então, $\varphi_{1,x_q}(q) = i_q$ e $\varphi_{2,x_q}(q) = -i_q$. Portanto, $\varphi_{1,x_q} \circ \varphi_{2,x_q} = g$, onde $g = g^{-1}$. Segue dessas considerações que $G = \{\mathbf{e}, g\} = \mathbb{Z}_2$.

Costuma-se denotar um fibrado (E,π,M,F,T,G) apenas por E(M,F,G), sendo que as estruturas T e π ficam subentendidas.

Para terminar esta seção, vamos enunciar dois teoremas referentes à construção de fibrados. Estes dois teoremas são muito importantes, principalmente na construção de fibrados vetoriais por operações sobre outros fibrados vetoriais. Estes teoremas iluminam um pouco, alguns detalhes com respeito à estrutura intrínseca dos fibrados. Nós os usaremos mais adiante.

Teorema 36 (Colagem Indireta) *Sejam* M, F *variedades diferenciáveis,* $\{U_\alpha\}$ *uma cobertura de* M *e* G *o grupo dos difeomorfismos de* F. *Dado um cociclo* $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow$ G, *existe um fibrado* E(M,F,G) *tendo* $\{g_{\alpha\beta}\}$ *como cociclo.* ■

No caso deste teorema, o problema é determinar um fibrado E com as propriedades do teorema. O que se faz, é construir tal fibrado por meio de uma relação de equivalência em M×F. Veremos, ligeiramente, como se faz isto por meio do Teorema 38 da página 101, da próxima seção.

Teorema 37 (Colagem Direta) *Sejam* M, F *variedades diferenciáveis, e* E *um conjunto. Supomos que existe uma aplicação sobrejetiva* $\pi : E \rightarrow M$ *com as seguintes propriedades:*

(1) Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de* M *e uma família* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, *de bijeções,* $T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$, *onde* $T_\alpha(p) = (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$;

(2) O diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[drr, "\pi"'] & & U_\alpha \times F \arrow[ll, "T_\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\text{Projeção no primeiro fator}"] \\ & & U_\alpha \end{tikzcd}$$

(3) As aplicações $T_{\alpha\beta} : (U_\alpha \times U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \times U_\beta) \times F$, *definidas por* $T_{\alpha\beta}(x, f) = (T_\alpha \circ T_\beta^{-1})(x, f)$ *são difeomorfismos.*

Então existe exatamente uma estrutura de variedade diferenciável sobre E, *para a qual* E(M,F,G) *é um fibrado diferenciável, onde* G = Dif(F) *é o grupo dos difeomorfismos de* F. ■

O caso aqui é diferente do teorema anterior, visto que temos o conjunto E. O que precisamos fazer, é demonstrar que, nas condições acima, E é um fibrado. A demonstração não é muito difícil, na verdade é um cálculo simples exigindo apenas um pouco de 'bom senso'. Com efeito, basta definir uma estrutura diferenciável para E, a partir das bijeções $\{T_\alpha\}$, exigindo que estas sejam difeomorfismos, ou seja, exigindo que $\pi^{-1}(U_\alpha)$ seja uma subvariedade aberta de E, para todo $\alpha \in \Lambda$.

6.3 Fibrados Principais

Fibrados principais são um tipo especial de fibrados diferenciáveis, cuja fibra típica é o próprio grupo de estrutura. Estes fibrados carregam uma grande quantidade de informação, visto que uma estrutura multiplicativa na fibra típica, joga um papel fundamental na definição de certos objetos geométricos. Estes objetos geométricos não tem existência garantida no caso de um fibrado diferenciável, onde a fibra típica é, meramente, uma variedade diferenciável sem estruturas adicionais.

Definição 6.5 *Sejam* M *uma variedade diferenciável e* G *um grupo de Lie. Uma estrutura de* Fibrado Principal *sobre* M *consiste de uma variedade diferenciável* P *e uma ação de* G *sobre* P *satisfazendo às seguintes condições:*

FP1 G *age (diferenciavelmente) livremente pela direita:*

$$(p,g) \in \mathrm{P} \times \mathrm{G} \mapsto pg = R_g(p) \in \mathrm{P} \;\; (pg = p \Rightarrow g = \mathbf{e}).$$

FP2 M *é o espaço quociente de* P *pela relação de equivalência* $\sim$ *induzida pela ação de* G*:* $p_1 \sim p_2$ *se, e somente se, existe* $g \in \mathrm{G}$ *tal que* $p_1 g = p_2$*, escrevendo* $\mathrm{M} = \mathrm{P}/\mathrm{G}$*. Desta maneira,* M *torna-se o espaço de órbitas desta ação.*
Além disso, exigimos que a projeção canônica $\pi : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ *seja diferenciável.*

FP3 P *é* localmente trivial *sobre* M*, isto é, dado* $x \in \mathrm{M}$*, existem uma vizinhança aberta* U *de* x *e um difeomorfismo* T_U *tais que:*

$$T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{G}, \;\; com\; T_U(p) = (\pi(p), \varphi_U(p)),$$

onde φ_U *é uma aplicação de* $\pi^{-1}(U)$ *em* G *que para todo* $p \in \pi^{-1}(U)$ *e* $g \in \mathrm{G}$ *satisfaz* $\varphi_U(pg) = \varphi_U(p)g$*.*

Um fibrado principal, como definido acima, será denotado por P(M,G), ou simplesmente por P. Como para fibrados em geral, chamamos P *espaço total* ou *espaço fibrado*, M *espaço de base*, G *grupo de estrutura* e π a projeção.

$\pi^{-1}(x) = \{pg/g \in \mathrm{G},\ \pi(p) = x\}$ denota a *fibra* através de $x \in \mathrm{M}$, que coincide com uma classe de equivalência da relação $\sim$.

Proposição 6.3.1 *Para cada* $x \in \mathrm{M}$*,* $\pi^{-1}(x)$ *é uma subvariedade fechada de* P*, que é difeomorfa a* G*.*

Demonstração: Suponhamos primeiro que $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade de P. Vamos então mostrar que esta é difeomorfa a G.

Dado $p \in \pi^{-1}(x)$, temos $\pi^{-1}(x) = p\mathrm{G} = \{pg/g \in \mathrm{G}\}$. Com isso, fica fácil ver que a ação de G sobre $\pi^{-1}(x)$ é transitiva.

Pela Proposição 4.8.1 da página 60, temos que G/G_p é uma variedade diferenciável, onde G_p denota o grupo de isotropia de $p \in \pi^{-1}(x)$, que por definição é $\mathrm{G}_p = \{g \in \mathrm{G}/pg = g\}$. Mas então $\mathrm{G}_p = \{\mathbf{e}\}$, visto que a ação é livre também.

Disso segue que $\mathrm{G}/\mathrm{G}_p = \mathrm{G}$, e portanto $\pi^{-1}(x)$ é difeomorfa a G. Note que este difeomorfismo nada mais é que a aplicação $g \in \mathrm{G} \mapsto gp \in \pi^{-1}(x)$.

Para ver que $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade fechada de P, veja [27, pag. 20] ou [15]. ■

> OBS: *Como o difeomorfismo construido acima depende do ponto p da fibra, não existe uma identificação canônica entre uma fibra e o grupo G. Desta maneira não há uma estrutura natural de grupo sobre as fibras.*

Sejam $\widehat{G}$ a álgebra de Lie de G e $A \in \widehat{G}$. A ação de G sobre P pela direita, induz um grupo a 1-parâmetro em P. A saber, $\theta(p,t) = p\exp tA = R_{\exp tA}(p)$. Consequentemente temos definido um campo de vetores $A^* \in \mathcal{X}(P)$, que como de costume é definido por

$$A^*_p = d\theta_p|_{t=0},$$

ou equivalentemente por,

$$A^*_p[f] = \frac{d}{dt}(f \circ \theta_p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}[f(p\exp tA)]|_{t=0},\ \forall\, f \in \mathcal{F}(P),$$

onde $\theta_p(t) = \theta(p,t)$, $p \in P$ e $t \in \mathbb{R}$,

Seja $x \in M$ tal que $\pi(p) = x$, então $\pi^{-1}(x) = \{pg/g \in G\}$. Agora note que $\theta_p(t) \in \pi^{-1}(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se encararmos a fibra $\pi^{-1}(x)$ como uma variedade, então dado $q \in \pi^{-1}(x)$, vem que $A^*_q \in T_q(\pi^{-1}(x))$.

Proposição 6.3.2 *Se a ação de* G *sobre* P *é livre e* $A \in \widehat{G}$, $A \neq 0$, *temos* $A^*_p \neq 0$, *para todo* $p \in P$.

Demonstração: Seja φ o grupo a 1-parâmetro gerado por A, isto é, $\varphi(t) = \exp tA$, em G. Dado $p \in P$, a última proposição nos fornece que $\psi_p : G \to pG$, com $g \mapsto pg$, é um difeomorfismo.

Seja agora θ o grupo a 1-parâmetro em P, definido por $\theta(p,t) = p\exp tA$. Com isso, obtemos $\theta_p(t) = (\psi_p \circ \varphi)(t)$.

Por definição temos que,

$$A^*_p = d\theta_p|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = d(\psi_p \circ \varphi)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = d\psi_p|_e \circ d\varphi|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = d\psi_p|_e(A),$$

pois, por definição, $d\varphi|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = A$. Ora, se ψ_p é um difeomorfismo, $d\psi_p|_e$ é um isomorfismo, logo, se $A^*_p = 0$ obtemos $d\psi_p|_e(A) = 0$. Como $d\psi_p$ é injetora, vem que $A = 0$. ■

> OBS: *Na verdade, mostramos acima que a aplicação $A \mapsto A^*_p$ é um isomorfismo entre a álgebra de Lie $\widehat{G}$, de G e o espaço tangente às fibras $\pi^{-1}(x)$, onde $p \in \pi^{-1}(x)$. Note que o mesmo raciocínio é usado sem se considerar o vetor A^*_p tangente à fibra, mas tangente a P, uma vez que $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade de P; apenas ao invés de ψ_p, consideramos $j \circ \psi_p$, sendo $j : \pi^{-1}(x) \hookrightarrow P$ a inclusão.*

Da proposição acima, concluimos um interessante fato. Dado $p \in P$, definindo-se $f(t) = \pi(p\exp tA)$, vem que $f(t) = \pi(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e portanto f é constante. Isso mostra que

$$d\pi|_p(A^*_p) = d\pi|_p\left(d\theta_p|_{t=0}(\frac{d}{dt})\right) = d(\pi \circ \theta_p)|_{t=0} = df|_{t=0}(\frac{d}{dt}) = 0,$$

visto que f é constante, e $\theta_p(t) = p\exp tA$. Portanto, a aplicação π anula todos os vetores dos espaços tangentes às fibras. Ora, supondo que a variedade P seja munida de uma métrica de Riemann, vem que $d\pi|_p$ restrita ao complemento ortogonal $(\mathrm{T}_p\pi^{-1}(x))^{\perp}$, $\pi(p) = x$, é um isomorfismo entre este e o espaço vetorial $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$. Segue que para cada ponto $p \in \mathrm{P}$, temos $\mathrm{T}_p\mathrm{P} = V_p \oplus H_p$, onde $V_p \simeq \widehat{\mathrm{G}}$ e $H_p \simeq \mathrm{T}_x\mathrm{M}$. O espaço V_p é chamado *espaço vertical* e o espaço H_p é chamado *espaço horizontal.*

Pode-se concluir algumas propriedades interessantes dos espaços H_p e V_p, entre elas que $dR_g|_p(H_p) = H_{pg}$, para todos os $p \in \mathrm{P}$ e $g \in \mathrm{G}$, e que a aplicação $p \mapsto H_p$ é uma distribuição diferenciável no sentido em que para cada ponto $p \in \mathrm{P}$, existe uma vizinhança U de p tal que todo campo de vetores $X \in \mathcal{X}(U)$ pode ser escrito como $X = X^V + X^H$, onde os campos X^V e X^H são diferenciáveis em U e gozam da propriedade: $X_p^V = X_p|_{V_p}$ e $X_p^H = X_p|_{H_p}$. Na verdade, queremos dizer que a restrição do campo X aos espaços verticais e horizontais, em U, são ainda campos diferenciáveis de vetores. Uma tal 'quebra' do espaço $\mathrm{T}_p\mathrm{P} = V_p \oplus H_p$, onde V_p e H_p tem as propriedades aqui apresentadas, chama-se uma *conexão* no fibrado P. Veremos mais adiante que existem maneiras diferentes, porém equivalentes, de se definir conexões, sendo uma delas nosso ponto de partida para o estudo das Teorias de Calibre. Para terminar este breve comentário, desejamos dizer que:

a) Sendo uma variedade diferenciável um espaço topológico paracompacto, esta admite uma métrica de Riemann;

b) Se supomos que todas as nossas variedades são, ao menos, paracompactas (e este é o caso que realmente interessa), estas sempre possuirão uma métrica de Riemann, e consequentemente, todo fibrado principal P(M,G) posuirá uma conexão, pelo que acabamos de ver acima.

Definição 6.6 *O campo de vetores* $A^* \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$ *definido acima é chamado* campo de vetores fundamental *correspondente a* $A \in \widehat{\mathrm{G}}$.

Proposição 6.3.3 *Seja* A^* *o campo de vetores fundamental correspondente a* $A \in \widehat{\mathrm{G}}$. *Então para cada* $g \in \mathrm{G}$, $dR_g(A^*)$*é o campo de vetores fundamental correspondente à* $ad(g^{-1})A \in \widehat{\mathrm{G}}$.

Demonstração: $dR_g|_p(A_p^*) = d(R_g(p\exp tA))|_{t=0}(\frac{d}{dt}) = d(p\exp tA\,g)|_{t=0}(\frac{d}{dt}) = d(pgg^{-1}\exp tA\,g)(\frac{d}{dt})|_{t=0}(\frac{d}{dt}) = d(pg\exp t(ad(g^{-1})A))|_{t=0}(\frac{d}{dt}) = [ad(g^{-1})A]_{pg}^*$. ∎

Como vimos acima, campos de vetores fundamentais são muito importantes para se entender a estrutura de P. Estes campos também se mostrarão muito importantes na teoria das formas de conexão. Em particular, a proposição acima só afirma um fato da definição das formas de conexão.

Definição 6.7 *Sejam* P(M,G) *um fibrado principal e* $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{G}$, $T_V : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathrm{G}$ *duas trivializações locais. Temos, por definição, que* $T_U(p) =$

$(\pi(p), \varphi_U(p))$ *e* $T_V(p) = (\pi(p), \varphi_V(p))$, *para* $p \in U \cap V$. *Definimos então a* função de transição *de* T_U *para* T_V *por* $g_{UV}(x) = \varphi_U(p)\varphi_V(p)^{-1}$, *onde* $\pi(p) = x$ *e* $g_{UV} : U \cap V \to$ G. *Note que* g_{UV} *está bem definida pois,* $\varphi_U(pg)\varphi_V(pg)^{-1} = \varphi_U(p)g(\varphi_V(p)g)^{-1} = \varphi_U(p)gg^{-1}\varphi_V(p)^{-1} = \varphi_U(p)\varphi_V(p)^{-1}$. *Além disso, os* g_{UV} *satisfazem a condição de cociclo.*

> OBS: *Note que esta definição é semelhante a aquela dada para fibrados em geral, somente neste caso, ela é adaptada a estrutura especial de fibrado principal.*

Dado um fibrado principal P(M,G), temos naturalmente associado a este um cociclo $\{g_{UV}\}$, definido como na Definição 6.7, acima. Reciprocamente, temos.

Teorema 38 *Sejam* M *uma variedade diferenciável,* $\{U_\alpha\}$ *uma cobertura aberta de* M *e* G *um grupo de Lie. Dado um cociclo* $\{g_{\alpha\beta}\}$, *com* $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \times U_\beta \to$ G, *existe um único fibrado principal* P(M,G) *tendo* $\{g_{\alpha\beta}\}$ *como funções de transição.*

Demonstração: Este teorema é uma conseqüência do Teorema 36 da página 97. Na verdade, este teorema pode ser demonstrado independentemente do outro, somente que a demonstração dos dois é quase que idêntica, sendo neste caso a diferença por G ser um grupo de Lie e não somente uma variedade, originando assim a estrutura de fibrado principal.
Demonstra-se o teorema tomando a união disjunta $\coprod_\alpha U_\alpha \times \mathrm{G} = \bigcup_\alpha \{\alpha\} \times U_\alpha \times \mathrm{G}$, e considerando-se nesta a seguinte relação de equivalência: $(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h)$ se, e somente se, $x = y$ e $h = g_{\alpha\beta}(x)g$, onde $(\alpha, x, g) \in \{\alpha\} \times U_\alpha \times \mathrm{G}$ e $(\beta, y, h) \in \{\beta\} \times U_\beta \times \mathrm{G}$. Feito isto, definindo $\mathrm{P} = \coprod_\alpha U_\alpha \times \mathrm{G}/\sim$, segue que P é uma variedade diferenciável e P(M,G) é um fibrado, nas condições do teorema. Para maiores detalhes veja [18, pag. 62] ou [37, pag. 14]. ■

Definição 6.8 *Um* homomorfismo *de um fibrado principal* Q(N,H) *em um outro fibrado principal* P(M,G) *é uma aplicação diferenciável* $f : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ *e um homomorfismo de grupos de Lie* $\hat{f} : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *tal que* $f(qh) = f(q)\hat{f}(h)$, *para todo* $q \in \mathrm{Q}$ *e* $h \in \mathrm{H}$.

Todo homomorfismo $f : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ aplica cada fibra de Q em uma fibra de P, e portanto, induz uma aplicação de M em N, denotada por $\overline{f}$. Note que esta aplicação é bem definida, sendo construida como segue. Sejam $y \in \mathrm{N}$ e $q \in \pi^{-1}(y) \subset \mathrm{Q}$. Definimos $\overline{f} : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ por $\overline{f}(y) = \pi(f(q))$. Para ver que $\overline{f}$ é, de fato, bem definida, veja que $\pi(f(qh)) = \pi(f(q)\hat{f}(h)) = \pi(f(q))$. Portanto, $\overline{f}$ não depende do ponto escolhido na fibra em y. Se f é bijetiva, f é chamada um isomorfismo. Quando H é um subgrupo de G, um isomorfismo f de Q em P que corresponde à inclusão de H em G, será chamado *injeção* de Q em P se M = N e a aplicação $\overline{f}$, induzida em M, é a aplicação identidade 1_M.

Dado um fibrado principal P(M,G), dizemos que o grupo de estrutura G, é *redutível* a um subgrupo de Lie H $\subset$ G se existe um fibrado principal Q(M,H) que admite uma injeção $f : Q \to P$.

Proposição 6.3.4 *Um fibrado principal* P(M,G) *admite uma redução de* G *a um subgrupo seu* H *se, e somente se,* M *admite uma cobertura* $\{U_\alpha\}$*, para a qual* $T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ *é trivialização local, tal que o cociclo associado a este sistema de trivializações locais, toma valores em* H.

Demonstração: Suponhamos primeiro que $\{U_\alpha\}$ seja uma cobertura de M com $T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$, e tal que o cociclo associado a este sistema de trivializações tome valores em H. Definindo-se $Q = \bigcup_\alpha T^{-1}(U_\alpha \times H)$, observamos que $T_\beta \circ T_\alpha[(U_\alpha \cap U_\beta) \times H] = (U_\alpha \cap U_\beta) \times H$, pela condição imposta sobre o cociclo. Definindo-se também $\hat{T}_\alpha = T_\alpha|_Q$, obtemos $\hat{T}_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H$, onde $\pi' : Q \to M$. Então Q(M,H) é um fibrado principal, com Q sendo uma subvariedade de P. Portanto Q(M,H) é a redução procurada.

Reciprocamente, suponha que o grupo de estrutura de G é redutível a H, sendo P$'$(M,H) o fibrado reduzido. Considere P$'$ como subvariedade de P (é claro que isto é possível). Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M tal que $T'_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H$ seja uma trivialização local de P$'$. É claro que as correspondentes funções de transição tomam valores em H. Agora, para mesma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M, definiremos $T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$, trivialização local de P, estendendo φ'_α, onde $T''_\alpha(p) = (\pi'(p), \varphi'(p))$. Todo $q \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ pode ser representado na forma $q = pg$ para algum $p \in \pi'^{-1}(U_\alpha)$ e $g \in G$. Portanto, definimos $\varphi_\alpha(q) = \varphi'_\alpha(p)g$ É claro que φ_α está bem definida. Definindo agora $T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ por $T_\alpha(q) = (\pi(q), \varphi_\alpha(q))$, obtemos que T_α é, de fato, uma trivialização local de P, sendo as correspondentes funções de transição $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(q)\varphi_\beta(q)^{-1} = \varphi'_\alpha(p)g(\varphi'_\beta(p)g)^{-1} = \varphi'_\alpha(p)gg^{-1}\varphi'_\beta(p) = \varphi'_\alpha(p)\varphi'_\beta(p) \in H$, por definição. ■

> OBS: *Na demonstração do 'se', não precisaríamos supor que* P$'$ *é uma subvarioedade de* P, *de fato basta apenas notar que qualquer* $q \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ *pode ser representado por* $q = f(p)g$, *com* $p \in \pi'^{-1}(U_\alpha)$, *de maneira única.*

A redução do grupo de estrutura é usada, por exemplo, para restringir o grupo de estrutura do fibrado, quando temos em M estruturas adicionais, tal como uma métrica. Isto visa dar ao fibrado uma estrutura que seja compativel com o objeto geométrico adicional presente em M.

Definição 6.9 *Uma* secção local *de um fibrado principal* P(M,G) *em um aberto* $U \subset M$ *é uma aplicação diferenciável* $\sigma : U \to P$ *tal que* $\pi \circ \sigma = 1_U$.

Teorema 39 *Existe uma correspondência natural entre secções e trivializações locais.*

Demonstração: Seja $T_U : \pi^{-1}(x) \to U \times \mathrm{G}$ uma trivialização local. Definimos uma aplicação $\sigma_g : U \to \mathrm{P}$ por $\sigma_g(x) = T_U^{-1}(x,g)$. É claro que σ_g é diferenciável. Para ver que $\pi \circ \sigma_g = 1_U$, note que $T_U(\sigma_g(x)) = (\pi(\sigma_g(x)), \varphi_U(\sigma_g(x)))$. Por outro lado, como $\sigma_g(x) = T_U^{-1}(x,g)$, temos $T_U(T_U^{-1}(x,g)) = (x,g)$, uma vez que T_U é um difeomorfismo. Portanto $\pi(\sigma_g(x)) = x$, para todo $x \in U$, acarretando que $\pi \circ \sigma_g = 1_U$.[2] Além disso, note também que $(\varphi_U \circ \sigma_g)(x) = g$ para todo $x \in U$, ou seja, φ_U é uma função constante.

Reciprocamente, dada uma secção local $\sigma : U \to \mathrm{P}$, do fato de cada fibra ser difeomorfa a G, podemos pensar em σ como uma aplicação de U em G. Mais explicitamente, dado $x \in U$, temos que $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x)$. Em vista da Proposição 6.3.1 da página 98 obtemos que a aplicação $\sigma(x)g \mapsto g$ é um difeomorfismo entre $\pi^{-1}(x)$ e G, para todo $x \in U$. Deste modo, como $\pi^{-1}(x) = \sigma(x)\mathrm{G}$, o difeomorfismo acima identifica $\sigma(x)$ com $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$, pois $\sigma(x) = \sigma(x)\mathrm{e}$. Portanto, tendo em vista esta identificação, temos $\sigma(x) = \mathrm{e} \in \mathrm{G}$, para todo $x \in U$. Dado agora $p \in \pi^{-1}(U)$, existe um único $g \in \mathrm{G}$ tal que $p = \sigma(x)g$, com $\pi(p) = x$. Isto nos dá margem para definir $\varphi : \pi^{-1}(U) \to \mathrm{G}$ por $\varphi(p) = \sigma(x)g = \mathrm{e}g = g$, pensando em σ como aplicação de U em G. Desta definição segue que φ é diferenciável, visto que σ o é. Finalmente, definimos uma trivialização local $T : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{G}$ por $T(p) = (\pi(p), \varphi(p)) = (\pi(\sigma(x)g), \sigma(x)g)) = (x,g)$, que claramente é um difeomorfismo. ■

> OBS: *Na demonstração acima, note que* $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x\in U} \sigma(x)\mathrm{G}$, *que pela identificação das fibras com* G *e de sua disjunção, temos* $\pi^{-1}(U) \simeq \coprod_{x\in U} \mathrm{G}$. *Portanto, um ponto* $p \in \pi^{-1}(U)$ *é da forma* $\sigma(x)g$, *pela identificação* $p\text{'='}g$. *Desta maneira,* φ *é a aplicação identidade. (Mediante esta identificação.)*

Se T_U é uma rivialização local com $U = \mathrm{M}$, isto é, $T_\mathrm{M} : \mathrm{P} \to \mathrm{M} \times \mathrm{G}$, dizemos que T_M é uma *trivialização global.* Também chamamos o fibrado P(M,G) de fibrado trivial,[3] se T_M existe.

Uma secção local $\sigma : U \to \mathrm{P}$ com $U = \mathrm{M}$ é chamada uma *secção global.* Pelo último teorema, secções globais correspondem a trivializções globais.

Exemplos:

1. **Fibrado Principal Modelo.** Dados M e G, com M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie, considere a projeção natural $\pi : \mathrm{M} \times \mathrm{G} \to \mathrm{M}$ e

[2] Caso $g = \mathrm{e}$, chamamos a secção σ_e de *secção natural* induzida pela trivialização T_U.

[3] Este fibrado não é um produto, mas sim algo difeomorfo a um produto.

a ação de G em M×G dada por $(x,h)g = (x,hg)$. Obtemos então um fibrado principal P(M,G), onde P = M×G, que é chamado fibrado modelo.

2. Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ o círculo unitário. Vamos definir uma estrutura da fibrado principal $S^1(S^1, \mathbb{Z}_2)$, definindo $\pi : S^1 \to S^1$ por $\pi(z) = z^2$, e a ação $S^1 \times \mathbb{Z}_2 \to S^1$ por $(z,g) \mapsto z \cdot g$, isto é, $z \cdot 1 = z$ e $z \cdot (-1) = -z$.

   Trivializações locais são obtidas considerando-se os abertos $U = S^1 - \{1\}$ e $V = S^1 - \{-1\}$. Sejam $\sigma : U \to S^1$ a secção local definida pela raiz quadrada com parte imaginária positiva, isto é, $\Im(\sigma(x)) > 0$, e $\tau : V \to S^1$ a secção local definida pela raiz quadrada com parte real positiva, isto é, $\Re(\tau(x)) > 0$. (Note que poderíamos ter escolhido como secções quaisquer dois ramos da função $z \mapsto \sqrt{z}$, respectivamente nos abertos U e V.)

   É fácil ver que $\pi^{-1}(U) = S^1 - \{\pm 1\}$ e $\pi^{-1}(V) = S^1 - \{\pm i\}$. Definimos, finalmente, trivializações locais T_U e T_V por:
   $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{G}$, $T_U(z) = (\pi(z), \varphi_U(z))$, onde

$$\varphi_U(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Im(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \Im(z) < 0 \end{cases}.$$

   Identicamente, definimos $T_V : \pi^{-1}(V) \to U \times \mathrm{G}$, $T_V(z) = (\pi(z), \varphi_V(z))$, onde

$$\varphi_V(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Re(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \Re(z) < 0 \end{cases}.$$

   A função de transição entre T_U e T_V é dada por $g_{UV} : U \cap V = S^1 - \{\pm 1, \pm i\} \to$ G, com $g_{UV}(x) = \varphi_U(z)\varphi_V(z)^{-1}$, onde $\pi(z) = x$. Calculando, para $x = z^2$, obtemos que

$$g_{UV}(x) = \varphi_U(z)\varphi_V(z)^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Im(x) > 0 \\ -1 & \text{se } \Im(x) < 0 \end{cases},$$

   pois no primeiro caso um dos $z \in \pi^{-1}(x)$ pertence ao primeiro quadrante, e temos $\varphi_U(z) = \varphi_V(z) = 1$, e portanto $g_{UV}(x) = 1$. No segundo caso, $z \in \pi^{-1}(x)$ pertence ao segundo quadrante, fornecendo $\varphi_U(z) = 1$ e $\varphi_V(z) = -1$, e portanto $g_{UV}(x) = -1$.

   Como o espaço total deste fibrado é S^1, que é conexo, e G é desconexo, trata-se de um fibrado não-trivial, pois S^1 não pode ser homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{Z}_2$. Esta é também a construção do espaço projetivo $\mathbb{P}^1$ e do grupo quociente $S^1/\mathbb{Z}_2$. (Lembre-se que $S^1 \simeq U(1)$, que é um grupo de Lie, sendo portanto, $S^1/\mathbb{Z}_2$ um espaço homogêneo.) Veja que a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre S^1 é a restrição da operação de multiplicação $m : S^1 \times S^1 \to S^1$, do grupo S^1, a $S^1 \times \mathbb{Z}_2$. Concluindo, não é difícil ver que $\mathbb{P}^1$ e $S^1/\mathbb{Z}_2$ são ambos difeomorfos a S^1.

3. **Fibrado dos Referenciais.** Sejam M uma variedade diferenciável n-dimensional. Um referencial p_x em $x \in$ M é uma base ordenada $\{v_1, \ldots, v_n\}$ do espaço tangente T_xM. Seja P $=$ {todos os referenciais $p = (x, v_1, \ldots, v_n)$ a todos os pontos $x \in$ M}. Vamos mostrar que P é um fibrado principal com grupo de estrutura $GL(n, \mathbb{R})$ e espaço de base M. Primeiramente, definimos $\pi :$ P $\to$ M por $\pi(p) = x$, onde $p = (x, v_1, \ldots, v_n) \in$ P. Além disso, $GL(n, \mathbb{R})$ age pela direita sobre P, como segue. Sejam $p = (x, v_1, \ldots, v_n) \in$ P e $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$, definimos

$$pA = \left(x, \sum_{k=1}^{n} a_{k1} v_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{kn} v_k\right).$$

pA é, claramente, um outro referencial no ponto $x \in$ M e portanto p e pA pertencem à mesma fibra sobre x. É claro que a ação de $GL(n.\mathbb{R})$ sobre P é livre, e $\pi(p) = \pi(q)$ se, e somente se, existe $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $p = gA$.

Dado um atlas $\{(U_\alpha, \xi_\alpha)\}$ para M, este determina um em P. Com efeito, dada uma carta (U, ξ) deste atlas, $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, a aplicação $\widehat{\xi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$, definida por $\widehat{\xi}(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), X_{11}, \ldots, X_{1n}, \ldots, X_{nn})$ é um sistema de coordenadas para $\pi^{-1}(U)$, uma vez que todo referencial pode ser expresso unicamente como $p = (x, X_1, \ldots, X_n)$, com $X_i = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_x$, sendo (X_{ik}) uma matriz não singular. Este sistema de coordenadas por sua vez, define difeomorfismos $T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL(n, \mathbb{R})$, com $p \mapsto (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$, onde $\varphi_\alpha(p) = (X_{ik}) \in GL(n, \mathbb{R})$, que são facilmente vistos satisfazerem $\varphi_\alpha(pA) = \varphi_\alpha(p)A$. As cartas determinadas por $(\pi^{-1}(U_\alpha), \widehat{\xi_\alpha})$ formam um atlas didferenciável para P, de maneira que P é uma variedade diferenciável de dimensão $n + n^2$.

Sejam P(M,G) um fibrado principal e $\sigma : U \to$ P, $\tau : V \to$ P duas secções locais. Sabemos que a estas secções estão associadas trivializações locais $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times$ G e $T_V : \pi^{-1}(V) \to V \times$ G, tais que $T_U(\sigma(x)g) = (x, g)$ e $T_V(\tau(x)h) = (x, h)$. Consequentemente, $\sigma(x)g = T_U^{-1}(x, g)$ e $\tau(x)h = T_V^{-1}(x, h)$. Portanto, dado $p \in \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(U \cap V)$, temos $T_U(p) = (\pi(p), \varphi_U(p))$ e $T_V(p) = (\pi(p), \varphi_V(p))$, levando a $p = T_U^{-1}(\pi(p), \varphi_U(p)) = \sigma(\pi(p))\varphi_U(p)$ e analogamente, $p = \tau(\pi(p))\varphi_V(p)$. Disto resulta que $\sigma(\pi(p))\varphi_U(p) = \tau(\pi(p))\varphi_V(p)$, daí, $\sigma(\pi(p)) = \tau(\pi(p))\varphi_V(p)\varphi_U(p)^{-1}$, concluindo $\sigma(x) = \tau(x)g_{VU}(x)$, onde $x = \pi(p)$ e g_{VU} é a função de transição de T_V para T_U, dada pela Definição 6.7. Este resultado vale para todo $x \in U \cap V$, uma vez que π é sobrejetiva.

6.4 Fibrados Associados

Sejam P(M,G) um fibrado principal e F uma variedade diferenciável sobre a qual G age diferenciavelmente pela esquerda. Construiremos agora um fibrado E(M,F,G,P), *associado* a P(M,G), com fibra típica F.

> OBS: *Este fibrado é um fibrado diferenciável no sentido da Definição 6.3, ou seja, com espaço total* E, *grupo de estrutura* G, *fibra típica* F *e espaço de base* M.

Considere a ação à direita de G sobre a variedade produto P×F definida por $(p, f) \cdot g = (pg, g^{-1}f)$, onde $p \in$ P, $f \in$ F e $g \in$ G. É claro que esta ação é diferenciável e livre. Desta forma, denotemos por E = P × F/G o espaço quociente pela ação de G.

Seja π : P $\to$ M a projeção de P(M,G). Dada uma órbita $[p, f] \in$ E, definimos a aplicação π_{E} : E $\to$ M por $\pi_{\mathrm{E}}([p, f]) = \pi(p) \in$ M. Não é difícil ver que esta aplicação está bem definida e é sobrejetiva. Note que dado $x \in$ M, temos $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(x) = \{[pg, g^{-1}f]/g \in \mathrm{G}, f \in \mathrm{F}\}$, onde p é um ponto arbitrário de $\pi^{-1}(x)$. Além disso, como G age diferenciavelmente sobre F, cada um de seus elementos é um difeomorfismo de F em F, implicando que $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(x) = \{[p, f]/f \in \mathrm{F}\}$.

Como P(M,G) é um fibrado principal, todo ponto $x \in$ M possui uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U)$ é difeomorfo a $U \times$ G. Segue disso que existe um homeomorfismo entre $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(U)$ e $U \times$ F. Este homeomorfismo é obtido considerando-se a secção σ associada à trivialização $T : \pi^{-1}(U) \to U \times$ G.

Definimos $h : U \times \mathrm{F} \to \pi_{\mathrm{E}}^{-1}(U)$ por $h(x, f) = \widehat{\pi}(\sigma(x), f)$, onde $\widehat{\pi}$: P × F $\to$ E é a projeção canônica. É fácil ver que esta aplicação é um homeomorfismo, uma vez que a topologia em E é a topologia quociente. Podemos dotar E de uma estrutura de variedade diferenciável; de modo que E(M,F,G,P) se torne um fibrado diferenciável com fibra típica F. Para isso tomemos uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M tal que os abertos $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(U_\alpha)$ sejam homeomorfos ao produto $U_\alpha \times$ F, isto é, exigindo que $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(U_\alpha)$ seja uma subvariedade aberta de E. Com isso, temos que a projeção π_{E} : E $\to$ M é diferenciável e, de fato, E(M,F,G,P) é um fibrado diferenciável com fibra típica F.

Note que cada ponto $p \in$ P pode ser considerado como uma aplicação bijetiva de F na fibra $F_x = \pi_{\mathrm{E}}^{-1}(x)$ de E, onde $x = \pi(p) \in$ M. Portanto, p aplica $f \in$ F na classe $[p, f]$ de E. É claro que esta aplicação é também diferenciável, visto que $p(f) = \widehat{\pi}(p, f)$ é diferenciável por construção. Além disso, $p(gf) = (pg)(f)$.

> OBS: *Note que estamos representando a aplicação* $f \mapsto [p, f]$ *por* p. *É também de costume denotar* P×F/G *por* P$\times_{\mathrm{G}}$F.

Um dos exemplos mais importantes de fibrado associado, é o do ***fibrado vetorial associado*** a um fibrado principal P(M,G). Apesar de ainda não termos definido fibrados vetoriais, vamos fazer a construção. Para a definição de fibrado vetorial, veja a Definição 6.10 da página 109.

Sejam P(M,G) um fibrado principal e $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut(V)}$ uma representação de G em um espaço vetorial V. Consideremos o produto P×V e a ação à direita, de G sobre este, dada por

$$(x,v) \cdot g = (xg, \rho(g)^{-1}v),$$

onde $(x,v) \in \mathrm{P} \times \mathrm{V}$ e $g \in \mathrm{G}$.

Exatamente como fizemos acima, construimos o fibrado $\mathrm{P}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{V}$, que é um fibrado com fibra típica V. A fim de que $\mathrm{P}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{V}$ seja um fibrado vetorial, basta mostrarmos que para todo $x \in \mathrm{M}$, $\pi_{\mathrm{V}}^{-1}(x)$ é um espaço vetorial, e que as trivializações locais de $\mathrm{P}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{V}$ restritas a $\pi_{\mathrm{V}}^{-1}(x)$ são isomorfismos entre este e o espaço vetorial V (Definição 6.10). Seja então $[p,v]$ a órbita de $(p,v) \in \mathrm{P} \times \mathrm{V}$. Note que $\pi_{\mathrm{V}}^{-1}(x) = \{[p,v]/v \in \mathrm{V}\}$, onde $p \in \pi^{-1}(x)$ está fixado e $x \in \mathrm{M}$, como vimos acima para fibrados associados, no caso geral. Uma vez que p esteja fixado, podemos dar a $\pi_{\mathrm{V}}^{-1}(x)$ uma estrutura de espaço vetorial definindo $[p,v] + [p,u] = [p, u+v]$ e $\alpha \cdot [p,v] = [p, \alpha v]$, onde $v, u \in \mathrm{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). É simples ver que estas operações estão bem definidas. Para ver que $\pi_{\mathrm{V}}^{-1}(x)$ é isomorfo a V, considere uma trivialização local $T : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{G}$ de P(M,G) e a secção local σ a esta associada. Vimos na construção do fibrado associado, no caso geral, dada acima, que a esta trivialização local está associada a trivilização local $\widehat{T} : \pi_{\mathrm{V}}^{-1} \to U \times \mathrm{V}$ de $\mathrm{P}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{V}$. Temos portanto que $\widehat{T}^{-1}(x,v) = \widehat{\pi}(\sigma(x),v) = [\sigma(x),v] \in \mathrm{P} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{V}$, onde $\widehat{\pi} : \mathrm{P} \times \mathrm{V} \to \mathrm{P} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{V}$ é a projeção canônica. Disso segue que $\psi_x : \mathrm{V} \to \pi_{\mathrm{V}}^{-1}(x)$, onde $\psi_x(v) = [\sigma(x),v]$, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Com efeito, uma vez que $\sigma(x)$ está fixado, a estrutura de espaço vetorial de $\pi_{\mathrm{V}}^{-1}(x)$, é aquela com adição e multiplicação por escalar como acima, sendo $p = \sigma(x)$. Portanto, $\mathrm{P}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{V}$ é um fibrado vetorial com fibra V.

Um comentário com respeito à teoria de Categorias e Funtores deve ter lugar aqui. A passagem de um fibrado principal a um fibrado vetorial a ele associado, é na verdade um funtor da categoria dos fibrados principais na dos fibrados vetoriais. Este funtor possui propriedades adicionais, uma vez que cada uma destas categorias é uma catgoria de objetos geométricos. Na verdade, pode-se mostrar que este funtor ainda preserva outros objetos geométricos, como por exemplo as conexões no fibrado principal, que são levadas em conexões no fibrado vetorial associado. A linguagem de funtores fornece uma maneira natural de se associar categorias diferentes de objetos matemáticos. O difícil é demonstrar teoremas existenciais e a preservação das propriedades funtoriais das estruturas em questão. No caso em menção, as propriedades funtoriais e a existência são facilmente provados, desde que estejamos familiarizados com as teorias de categorias, funtores e fibrados.

A pasagem de um fibrado principal a um fibrado vetorial, a ele associado, é muito importante, pois podemos formular as Teorias de Calibre totalmente em termos de fibrados vetoriais associados. Uma vez tendo, em certa medida, um suporte de espaço vetorial, temos uma situação propícia para estudar propriedades de Análise. Este é um dos motivos pelos quais analistas preferem trabalhar com fibrados vetoriais associados ao invés de fibrados principais.

A seguir daremos alguns exemplos de fibrados associados a um fibrado principal P(M,G).

Exemplos:

1. Suponha que a ação de G sobre uma variedade F, é a trivial. Então $P\times_G F$ é trivial. Além disso, se o fibrado principal P(M,G) é trivial $P\times_G F$ tabém é.

2. **Extensão.** Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então G age pela esquerda sobre H, por $g \cdot h = \varphi(g)h$, para todo $g \in G$ e $h \in H$. Com isso, obtemos o fibrado associado $P\times_G H$, com fibra H e grupo de estrutura G.

   Por outro lado, H determina uma ação à direita, $(P\times H)\times H \to P\times H$. Ora, sendo $\hat{\pi} : P \times H \to P \times_G H$ a projeção canônica, temos naturalmente induzida, uma ação livre $(P\times_G H)\times H \to P\times_G H$.

   Note que as órbitas desta ação são exatamente as fibras de $P\times_G H$. Portanto, não é difícil ver que que $P\times_G H$ é um fibrado principal com grupo H. Este fibrado é chamado *extensão* de P(M,G) por φ.

   Definindo-se então $f_\varphi : P \to P \times_G H$ por $f_\varphi(p) = \hat{\pi}(p, \mathbf{e})$, onde **e** é a identidade de H, temos o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{tikzcd}
P \times G \arrow[r, "1_P \times \varphi"] \arrow[d] & P \times H \arrow[d, "\hat{\pi}"] \\
P \arrow[r, "f_\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & P \times_G H \arrow[d] \\
& M
\end{tikzcd}$$

3. Seja L(M) o fibrado dos referenciais construído na seção anterior, e suponhamos $\dim(M) = n$. Então, como o grupo de estrutura de L(M) é $G = GL(n, \mathbb{R})$, podemos construir o fibrado $L(M)\times_G \mathbb{R}^n$. Ora, recordando a construção dos fibrados vetoriais, notamos que $L(M)\times_G \mathbb{R}^n$ é o próprio fibrado tangente TM (claro, fazendo a identificação entre as fibras $\pi_{\mathbb{R}^n}^{-1}(x)$ e T_xM). Portanto, podemos dizer que o fibrado tangente é vetorial associado ao fibrado L(M), com a representação natural $\rho : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$.

6.5 Fibrados Vetoriais

Na seção anterior, construimos um fibrado vetorial associado a um fibrado principal P(M,G), por meio de uma representação do grupo G. Definiremos agora, um fibrado

E(M,V,G), com fibra típica um espaço vetorial V, grupo de estrutura G e espaço de base M.

Definição 6.10 *Um fibrado* E(M,V,G) *é chamado* fibrado vetorial real (complexo), *se* V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) *e se,*

FV1 *Para todo* $x \in$ M, $\pi^{-1}(x)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*);*

FV2 *Dada uma trivialização local de* E, $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times$ V, *com* $T_U(p) = (\pi(p), \varphi_U(p))$, φ_U *aplica* $\pi^{-1}(x)$ *isomorficamente sobre* V $\simeq \{x\} \times$ V, *para cada* $x \in U$, *ou seja,* $\varphi_U|_{\pi^{-1}(x)}$ *é um isomorfismo entre os espaços vetoriais* $\pi^{-1}(x)$ *e* V, *para cada* $x \in U$.

Os fibrados vetoriais tem proriedades muito particulares, que nos permitem definir novos fibrados vetoriais a partir destes. Definiremos, por exemplo, a soma direta e o quociente de dois fibrados vetoriais. Em suma, toda operação definida para espaços vetoriais pode ser, com as devidas proporções mantidas, estendida à fibrados vetoriais.

Se supusermos que o espaço vetorial V, da Definição 6.10 é de dimensão finita, então este é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, $0 \leq n < \infty$. Segue disto, que cada trivialização $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times$ V pode ser escrita como $\widehat{T_U} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, bastando-se definir $\widehat{T_U}(p) = (\pi(p), \widehat{\varphi_U}(p))$, onde $\widehat{\varphi_U} = f \circ \varphi_U$, sendo f o isomorfismo entre V e $\mathbb{R}^n$. Então, sem perda de generalidade, podemos considerar que V $= \mathbb{R}^n$. Além disso como G age nas fibras $\pi^{-1}(x)$, que são espaços vetoriais isomorfos a $\mathbb{R}^n$, podemos supor também G $\subset GL(n, \mathbb{R})$. Feitas estas identificações, o caso mais geral de um fibrado vetorial é quando V $= \mathbb{R}^n$ e G $= GL(n, \mathbb{R})$. Portando, daqui por diante, consideraremos fibrados vetoriais com V $= \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) e G $= GL(n, \mathbb{R})$ (ou $G = GL(n, \mathbb{C})$). Além disso, não faremos mais menção de G ou V, apenas diremos que E é um fibrado vetorial n-dimensional real (ou complexo).

A condição de trivialização local, implica a existência de um cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$, com $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$.

Definição 6.11 *Seja* U *um aberto de* M. *Uma* secção *do fibrado vetorial* E *sobre* U *é uma aplicação diferenciável* $s : U \to$ E, *tal que* $\pi \circ s = 1_U$.

O espaço de todas as secções de E sobre U é denotado por $\Gamma(U, \mathrm{E})$. Note que todo fibrado vetorial possui uma secção nula globalmente definida.

Uma coleção de secções $s_1, \ldots, s_n$ sobre um aberto $U \subset$ M é chamado *referencial* em U, se para todo $x \in U$, $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ forma uma base para $\mathrm{E}_x = \pi^{-1}(x)$.

Como no caso geral, temos os homomorfismos de fibrados vetoriais, que são definidos para fibrados sobre a mesma variedade de base, a fim de que tenhamos uma categoria.

Definição 6.12 *Sejam* E *e* E′ *fibrados vetoriais sobre* M. *Dizemos que uma aplicação* f : E $\to$ E′ *é um* homomorfismo de fibrados vetoriais *se* f *é diferenciável e* *aplica linearmente* E_x *em* E'_x *para cada* $x \in \mathrm{M}$, *ou seja,* $f|_{\mathrm{E}_x}$ *é uma transformação linear entre* E_x *e* E'_x.

Dizemos que f é um *isomorfismo* entre E e E', se f^{-1} existe e ambas f e f^{-1} são homomorfismos.

Definição 6.13 *Dizemos que um fibrado vetorial n-dimensional real* E, *sobre* M, *é* trivial *se* E *é isomorfo a* $\mathrm{M} \times \mathbb{R}^n$.

Proposição 6.5.1 *Um fibrado vetorial n-dimensional real* E, *sobre* M, *é trivial se, e somente se, existem* n *secções globalmente definidas, linearmente independentes em todo ponto* $x \in \mathrm{M}$.

Demonstração: Suponhamos primeiro que E seja trivial. Então, existe um isomorfismo $f : \mathrm{E} \to \mathrm{M} \times \mathbb{R}^n$. Definamos para $i = 1, \ldots, n$ as aplicações $\widehat{s}_i : \mathrm{M} \to \mathrm{M} \times \mathbb{R}^n$, por $\widehat{s}_i(x) = (x, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0))$, sendo 1, somente a i-ésima coordenada de $\mathbb{R}^n$. É claro que $\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_n$ são secções de $\mathrm{M} \times \mathbb{R}^n$. Definindo-se então $s_i = f^{-1} \circ \widehat{s}_i$, $1 \leq i \leq n$, obtemos as secções procuradas.

Reciprocamente, suponha que $s_1, \ldots, s_n$ são n secções globalmente definidas linearmente independentes em cada ponto $x \in \mathrm{M}$. Definamos $f : \mathrm{M} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{E}$ por $f(x, a_1, \ldots, a_n) = a_1 s_1(x) + \cdots + a_n s_n(x)$. É claro que f assim definida é um isomorfismo de fibrados vetoriais. ■

> OBS: *Note que diferentemente de fibrados principais, aqui precisamos de* n *secções globais linearmente independentes em cada ponto, a fim de que este fibrado vetorial seja trivial. Note também que* n *não tem nada em comum com a dimensão de* M, *a princípio.*

Um fibrado vetorial E, sobre M, pode possuir dois sistemas de trivializações, e portanto dois cociclos $\{g_{ij}\}$ e $\{g'_{ij}\}$, definidos sobre a mesma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M.

Proposição 6.5.2 *Se o cociclo* $\{g'_{ij}\}$ *provém de outro sistema de trivializações então, existem aplicações* $\lambda_i : U_i \to GL(n, \mathbb{R})$ *tais que* $g_{ij}(x) = \lambda_i(x) g'_{ij}(x) \lambda_j^{-1}(x)$, *para todo* $x \in U_i \cap U_j$.

Demonstração: Ora, é claro que as aplicações $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi'_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$, diferem por um elemento de de $GL(n, \mathbb{R})$, em cada ponto $x \in U_i$. Portanto, temos $\varphi_{i,x} = \lambda_i(x) \varphi'_{i,x}$ para todo $x \in U_i$. Segue que $g_{ik}(x) = \varphi_{i,x} \circ (\varphi'_{k,x})^{-1} = \lambda_i(x) \varphi'_{i,x} \circ (\varphi'_{k,x})^{-1} \lambda_k(x)^{-1} = \lambda_i(x) g'_{ik}(x) \lambda_k(x)^{-1}$. ■

Dado um fibrado vetorial com cociclo $\{g_{ij}\}$, caso seja possível encontrarmos um cociclo equivalente, com valores em um subgrupo H de $GL(n, \mathbb{R})$, dizemos que o grupo de estrutura deste fibrado é *redutível* a H.

Dizemos que um fibrado vetorial é *orientável*, se seu grupo de estrutura pode ser reduzido a $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det(A) > 0\}$.

Um sistema de trivializações $\{(U_i, T_i)\}$, sobre E, é dito *orientado*, se para cada i, j temos $\det(g_{ij}) > 0$. Dois sistemas de trivializações orientadas $\{(U_i, T_i)\}$ e $\{(V_k, \widehat{T}_k)\}$ são ditos *equivalentes*, se para cada $x \in U_i \cap V_k$, temos $\det[\varphi_{i,x} \circ (\widehat{\varphi}_{k,x})^{-1}] > 0$, onde $T_i(p) = (\pi(p), \varphi_i(p))$ e $\widehat{T}_k(p) = (\pi(p), \widehat{\varphi}_k(p))$.

Note que isto origina uma relação de equivalência e particiona o conjunto de todos os sistemas de trivializações orientadas de E em duas classes de equivalência. Cada uma dessas classes é chamada uma *orientação* para E.

OBS: *O fibrado tangente a uma variedade* M *é orientável se, e somente se,* M *o for. Note também a analogia com a orientação de espaços vetoriais feita no Capítulo 1.*

Podemos reduzir o grupo de estrutura de todo fibrado vetorial para $O(n)$, desde que o espaço de base seja uma variedade paracompacta. Para fazer isso precisamos munir E de uma *Estrutura Riemanniana*, isto é, uma aplicação diferenciável que em cada ponto $x \in$ M associa um produto interno $<,>|_x$ em $E_x = \pi^{-1}(x)$.

Para tal fim, sejam $\{(U_i, T_i)\}_{i\in I}$ um sistema de trivializações locais para E e $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ uma partição da unidade subordinada à $\{U_i\}_{i\in I}$ (lembremos $\{U_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura de M). Então para cada $i \in I$ temos $T_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$, que pela Proposição 6.5.1 da página 110, dão surgimento a n secções locais $s_1, \ldots, s_n : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$. Definamos assim, uma estrutura riemaniana sobre $\pi^{-1}(U_i)$ por $< s_p(x), s_q(x) >_i|_x = \delta_{pq}$, visto que $s_1, \ldots, s_n$ são linearmente independentes em todo ponto $x \in U_i$. Definimos então uma estrutura riemaniana para E, por $<,>= \sum_i \lambda_i <,>_i$.

Como sistema de trivializações locais, tome somente aquelas que aplicam referenciais ortonormais de E (relativamente à estrutura riemaniana $<,>$) em referenciais ortonormais de $\mathbb{R}^n$. Estas trivializações locais sempre existem, pelo processo de ortonormalização de Gram-Schimidt. Isso provê um cociclo $\{g_{ij}\}$ que toma valores em $O(n)$.

OBS: *O grupo de estrutura de um fibrado vetorial pode ser reduzido para $SO(n)$ se, e somente se, este fibrado é orientável.*

6.5.1 Operações com Fibrados Vetoriais

Para começar, Sejam $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ e $\widehat{\pi} : \widehat{\mathrm{E}} \to \widehat{\mathrm{M}}$ dois fibrados vetoriais. Vamos definir um fibrado vetorial $\pi \times \widehat{\pi} : \mathrm{E} \times \widehat{\mathrm{E}} \to \mathrm{M} \times \widehat{\mathrm{M}}$, com $(\pi \times \widehat{\pi})(p, \widehat{p}) = (\pi(p), \widehat{\pi}(\widehat{p})) \in \mathrm{M} \times \widehat{\mathrm{M}}$, e cuja fibra no ponto $(x, \widehat{x})$ é o espaço vetorial $\mathrm{E}_x \times \widehat{\mathrm{E}}_{\widehat{x}}$. Assim fica claro que $\pi \times \widehat{\pi}$ é diferenciável. Dadas trivializações locais $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ e $\widehat{\pi}^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$, de E e $\widehat{\mathrm{E}}$, respectivamente, definimos uma aplicação $T_{UV} : (\pi \times \widehat{\pi})^{-1}(U \times V) \to U \times V \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, onde $T_{UV}(p, \widehat{p}) = (\pi(p), \widehat{\pi}(\widehat{p}), \varphi(p), \widehat{\varphi}(\widehat{p}))$, sendo $T(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ e $\widehat{T}(\widehat{p}) = (\widehat{\pi}(\widehat{p}), \widehat{\varphi}(\widehat{p}))$. É claro que T_{UV} é um difeomorfismo, visto que T e $\widehat{T}$ o são.

Também, $(\varphi\times\widehat{\varphi})|_{(\pi\times\widehat{\pi})^{-1}(x,\widehat{x})}$ é um isomorfismo linear entre $\mathrm{E}_x\times\widehat{\mathrm{E}}_{\widehat{x}}$ e $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$. Portanto, T_{UV} é uma trivialização local de $\mathrm{E}\times\widehat{\mathrm{E}}$, implicando que este é um fibrado.

Antes de prosseguir, vamos ver dois teoremas, que seguem do Teorema 36 e do Teorema 37, da página 97.

Teorema 40 *Seja M uma variedade diferenciável, supomos que a todo ponto $x\in\mathrm{M}$ está associado um espaço vetorial F_x. Considere a união disjunta $\mathrm{E}=\coprod_{x\in\mathrm{M}}F_x$ e a projeção canônica $\pi:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$. Suponha ainda que exista uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M, e isomorfismos lineares $\varphi_{\alpha,x}:F_x\to\mathbb{R}^n$, $x\in U_\alpha$, tais que a aplicação $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\times U_\beta\to GL(n,\mathbb{R})$, com $g_{\alpha\beta}(x)=\varphi_{\alpha,x}\circ\varphi_{\beta,x}^{-1}$, é diferenciável. Então existe uma única estrutura de variedade diferenciável sobre E, que faz deste um fibrado vetorial real n-dimensional.*

Demonstração: Definamos $T_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^n$ por $T_\alpha(p)=(\pi(p),\varphi_{\alpha,\pi(p)}(p))$. É claro que T_α, assim definida, é uma bijeção. Além disso, temos $T_\alpha\circ T_\beta^{-1}(x,v)=(x,g_{\alpha\beta}(x)v)$, visto que $T_\beta^{-1}(x,f)=\varphi_{\beta,x}(f)$. Portanto, como $g_{\alpha\beta}$ é diferenciável, $T_\alpha\circ T_\beta^{-1}:(U_\alpha\times U_\beta)\times\mathbb{R}^n\to(U_\alpha\times U_\beta)\times\mathbb{R}^n$ é diferenciável para cada par de índices. Segue do Teorema 37 da página 97, que E é um fibrado vetorial real n-dimensional. ■

Teorema 41 *Sejam M uma variedade diferenciável e $\{g_{\alpha\beta}\}$ um cociclo definido sobre M, que toma valores em $GL(n,\mathbb{R})$. Então existe um fibrado vetorial real n-dimensional sobre M tendo $\{g_{\alpha\beta}\}$ como cociclo.*

Demonstração: Este teorema é uma conseqüência direta do Teorema 36 da página 97, apenas devendo-se fazer as devidas adaptações. ■

Com estes dois resultados, podemos fazer várias construções com fibrados vetoriais.

Exemplos:

1. **Soma de Whitney.** Sejam E e F dois fibrados vetoriais reais sobre M. Definamos $\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}=\bigcup_{x\in\mathrm{M}}(\mathrm{E}_x\oplus\mathrm{F}_x)$ e $\pi:\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}\to\mathrm{M}$, a projeção $\pi(p)=x$, onde $p\in\mathrm{E}_x\oplus\mathrm{F}_x$. Sejam agora $\{(T_\alpha,U_\alpha)\}$ e $\{(S_\alpha,U_\alpha)\}$ sistemas de trivializações para E e F, respectivamentem, (note que é sempre possível tomar a mesma cobertura $\{U_\alpha\}$ para os dois sistemas) onde $T_\alpha(p)=(\pi(p),\varphi_\alpha(p))$ e $S_\alpha(q)=(\pi_{\mathrm{F}}(p),\psi_\alpha(p))$. Definindo então $\xi_{\alpha,x}=\varphi_{\alpha,x}\oplus\psi_{\alpha,x}$, obtemos que $\xi_{\alpha,x}:\mathrm{E}_x\oplus\mathrm{F}_x\to\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^k$ é um isomorfismo de espaços vetoriais para cada $x\in U_\alpha$. Portanto, podemos definir $h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,x}\circ\xi_{\beta,x}=(\varphi_{\alpha,x}\circ\varphi_{\beta,x}^{-1})\oplus(\psi_{\alpha,x}\circ\psi_{\beta,x}^{-1})=g_{\alpha\beta}(x)\oplus\widehat{g}_{\alpha\beta}(x)\in GL(n,\mathbb{R})\oplus GL(k,\mathbb{R})$, sendo $\{g_{\alpha\beta}\}$ o cociclo associado a E, e $\{\widehat{g}_{\alpha\beta}\}$ o associado a F. Uma vez que as aplicações $g_{\alpha\beta}$ e $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ são diferenciáveis, $h_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(n,\mathbb{R})\oplus GL(k,\mathbb{R})$ é diferenciável. Segue do Teorema 40

que E$\oplus$F é um fibrado vetorial real $n+k$-dimensional sobre M, cujo grupo de estrutura é $GL(n,\mathbb{R}) \oplus GL(k,\mathbb{R}) \subset GL(n+k,\mathbb{R})$.

2. **Produto Tensorial.** Mantendo a notação acima, o fibrado E$\otimes$F, sobre M, é definido fazendo-se $(\mathrm{E}\otimes\mathrm{F})_x = \mathrm{E}_x \otimes \mathrm{F}_x$ e as trivializações locais (T_α, U_α) e (S_α, ψ_α) nos dão que $\xi_{\alpha,x} = \varphi_{\alpha,x} \otimes \psi_{\alpha,x}$. As funções de transição tem a forma $h_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes \hat{g}_{\alpha\beta}(x)$, portanto, temos a diferenciabilidade de $h_{\alpha\beta}$. Novamente, o Teorema 40 implica que E$\otimes$F é um fibrado vetorial real nk-dimensional sobre M, com guupo de estrutura $GL(n,\mathbb{R}) \otimes GL(k,\mathbb{R}) \subset GL(nk,\mathbb{R})$.

3. **Fibrado Dual.** Seja E um fibrado vetorial real n-dimensional sobre M. Definimos $\mathrm{E}^* = \bigcup_{x\in \mathrm{M}} (E_x)^*$. Note agora, que dados espaços vetoriais V e W, e uma aplicação linear $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, a aplicação induzida $f^* : \mathrm{W}^* \to \mathrm{V}^*$, tem como matriz a transposta da matriz de f. Portanto, dada uma trivialização local (T_α, U_α) de E, para cada $x \in U$, $\varphi_{\alpha,x} : E_x \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Assim, definindo o isomorfismo $\xi_{\alpha,x} = (\varphi_{\alpha,x}^{-1})^* : \mathrm{E}_x^* \to (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$, obtemos que $g_{\alpha\beta}^*(x) = \xi_{\alpha,x} \circ \xi_{\alpha,x}^{-1} = ((\varphi_{\alpha,x})^{-1})^* \circ (\varphi_{\beta,x})^* = (\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1})^* = (g_{\beta\alpha}(x))^* = (g_{\beta\alpha}(x))^t = (g_{\alpha\beta}(x)^{-1})^t$, sendo $(g_{\alpha\beta}(x))^t$ a matriz transposta de $g_{\alpha\beta}(x)$. Segue portanto, que $g_{\alpha\beta}^* : U_\alpha \times U_\beta \to GL(n,\mathbb{R})$ é diferenciável, seguindo do Teorema 40 que E* é um fibrado vetorial real n-dimensional sobre M.

4. Os dois últimos ítens, nos permitem uma construção mais geral, envolvendo produto tensorial e dualidade. Se $\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_p,\mathrm{F}_1,\ldots,\mathrm{F}_q$ são fibrados vetoriais reais sobre uma variedade M, $\mathrm{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}_p \otimes \mathrm{F}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathrm{F}_q^*$ é também um fibrado vetorial real sobre M.

5. Seja E um fibrado vetorial n-dimensional real sobre M. Em vista dos itens anteriores, podemos ainda definir o fibrado tensorial $\mathrm{T}^{p,q}\mathrm{E} = \mathrm{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{E}\otimes \mathrm{E}^*\otimes\cdots\otimes\mathrm{E}^*$, e o fibrado exterior $\bigwedge(\mathrm{E}) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(\mathrm{E})$. Também podemos definir o fibrado $\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathrm{T}^{k,0}(\mathrm{E})$. Neste último caso, alguns cuidados adicionais devem ser tomados.

Existe um resultado que generaliza todas as operações apresentadas nos exemplos acima.

Teorema 42 *Sejam $\mathcal{V}$ a categoria que consiste de todos os espaços vetoriais reais de dimensão finita e todos os isomorfismos entre tais espaços, $T : \mathcal{V}\times\cdots\times\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um funtor contínuo de k variáveis e* $\mathrm{E}^1,\ldots,\mathrm{E}^k$ *fibrados vetoriais sobre M. Para cada $x \in$ M, definimos $\mathrm{E}_x = T(\mathrm{E}_x^1,\ldots,\mathrm{E}_x^n)$. Então $\mathrm{E} = \bigcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{E}_x$ é um fibrado vetorial real sobre* M. ∎

A demonstração deste teorema requer algum conhecimento de categorias e funtores. Para maiores detalhes veja [21].

Sejam M, N variedades diferenciáveis e E um fibrado vetorial sobre M. Toda função diferenciável $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ induz um fibrado vetorial sobre N, da maneira descrita na Seção 6.1. Apenas, neste caso, as devidas adaptações devem ser feitas, usando-se o Teorema 40. Este fibrado é geralmente denotado por $f^{-1}(\mathrm{E})$, $f^{*}(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{N} \times_{\mathrm{M}} \mathrm{E}$ e é chamado *fibrado vetorial induzido por* f ou *pull-back* de E por f.

Esta construção pode facilmente ser generalizada a fibrados diferenciáveis em geral. A demonstração envolve o uso do Teorema 37 da página 97.

Note que se E é um fibrado vetorial sobre M, $f : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ e $g : \mathrm{M}'' \to \mathrm{M}'$, onde M′, M″ são variedades diferenciáveis e f, g são funções diferenciáveis, temos $(f \circ g)^{*}(\mathrm{E}) = g^{*} \circ f^{*}(\mathrm{E})$.

Para terminar esta seção, vamos introduzir a noção de subfibrado vetorial e fibrado vetorial quociente.

Definição 6.14 *Sejam* E *e* F *fibrados vetoriais sobre uma variedade* M. *Dizemos que* F *é um* subfibrado *de* E *quando as seguintes condições são verificadas*

SF1 $\pi_{\mathrm{F}} = \pi|_{\mathrm{F}}$, *ou seja, a projeção de* F *é a projeção de* E *restrita a* F;

SF2 *a inclusão* $i : \mathrm{F} \hookrightarrow \mathrm{E}$ *é um homomorfismo de fibrados vetoriais.*

Sejam agora E um fibrado vetorial real n-dimensional sobre M e F um subfibrado de E, que tem dimensão k. Considere E/F, definido por $(\mathrm{E}/\mathrm{F})_x = \mathrm{E}_x/\mathrm{F}_x$, sendo o último quociente, o usual de espaços vetoriais. Note que é sempre possível escolher um sistema de trivializações $\{(T_\alpha, U_\alpha)\}$ de E, tal que $\{(T_\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}, U_\alpha)\}$ seja um sistema de trivializações locais de F. Com efeito, dadas trivializações (T_α, U_α) de E e (S_α, U_α) de F, temos $T_\alpha(p) = (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$ e $S_\alpha(q) = (\widehat{\pi}(q), \psi_\alpha(p))$, com $\widehat{\pi} = \pi|_{\mathrm{F}}$, pela definição de subfibrado. Fazendo as identificações $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ e $GL(k,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$, obtemos que $\psi_\alpha : \widehat{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi_\alpha|_{\widehat{\pi}^{-1}(U_\alpha)} : \widehat{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^n$ diferem por um elemento de $GL(n,\mathbb{R})$. Portanto, em cada ponto $x \in \mathrm{M}$ temos $\psi_{\alpha,x} = \lambda_\alpha(x)\varphi_{\alpha,x}$, onde $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(n,\mathbb{R})$. Assim, tomando $\overline{T}_\alpha(p) = (\pi(p), \lambda_\alpha(\pi(p))\varphi_\alpha(p))$, temos que $\overline{T}_\alpha|_{\widehat{\pi}^{-1}(U_\alpha)} = S_\alpha$. (Note que λ_α é diferenciável, por definição.)

Considere agora E munido de uma estrtura Riemanniana $<,>$. Então, para cada ponto $x \in \mathrm{M}$, podemos identificar $\mathrm{E}_x/\mathrm{F}_x$ com $\mathrm{F}_x^{\perp}$, sendo este último o complemento ortogonal de F_x em relação ao produto interno $<,>|_x$. Além disso, se tomarmos um sistema de trivializações locais $\{(T_\alpha, U_\alpha)\}$ de E, tal que $\{T_\alpha|_{\widehat{\pi}^{-1}(U_\alpha)}, U_\alpha)\}$ seja um sistema de trivializações para F, como $\varphi_\alpha|_{\widehat{\pi}^{-1}(U_\alpha)}$ é um isomorfismo entre F_x e $\mathbb{R}^k$, para todo $x \in U_\alpha$, vem que $\mathbb{R}^n$ possui um produto interno univocamente determinado, tal que $\varphi_\alpha|_{\mathrm{F}_x^{\perp}}$ é um isomorfismo entre $\mathrm{F}_x^{\perp}$ e $\mathbb{R}^{n-k}$, para cada $x \in U_\alpha$. Este raciocínio facilmente se generaliza para M. Visto que $g_{\alpha\beta}$, φ_α e $<,>$ são diferenciáveis, segue que $g_{\alpha\beta}^{\perp} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n-k,\mathbb{R})$, definidas por $g_{\alpha\beta}^{\perp}(x) = \varphi_\alpha|_{\mathrm{F}_x^{\perp}} \circ \varphi_\beta|_{\mathrm{F}_x^{\perp}}^{-1}$ são diferenciáveis e formam um cociclo. Além disso, $g_{\alpha\beta} = \widehat{g}_{\alpha\beta} \oplus g_{\alpha\beta}^{\perp}$.

O resultado acima demonstra o seguinte teorema.

Teorema 43 *Sejam* E *fibrado vetorial* n*-dimensional real sobre* M *e* F *um subfibrado* k*-dimensional deste. Então existe um subfibrado* Q*, de* E*, tal que* E *é isomorfo à soma de Whitney* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{Q}$*. Consequentemente o grupo de estrutura de* E *pode ser reduzido a* $GL(k, \mathbb{R}) \oplus GL(n-k, \mathbb{R})$. ■

Capítulo 7

Conexões

Neste capítulo desenvolvemos o conceito e as propriedades de conexão em fibrados principais e em fibrados vetoriais, finalizando com a construção das classes de Chern.

Se temos um fibrado principal P sobre o espaço-tempo, os chamados *potenciais de Yang-Mills* nada mais são que conexões neste fibrado, sendo os *campos de forças* as *curvaturas destas conexões.* Mais precisamente, os potenciais e os campos usados na literatura física são representações destes objetos geométricos por meio de uma trivialização local de P, induzida através de uma secção local; na verdade podemos defini-los como o pull-back por uma secção local.

No caso de um fibrado vetorial, a idéia de conexão permite obter diretamente objetos ω_U e Ω_U definidos em certos abertos U do espaço de base, que representam a conexão e a curvatura, respectivamente. Isto se deve ao fato de termos uma estrutura de espaço vetorial na fibra em cada ponto. De fato, introduziremos conexão em um fibrado vetorial como uma maneira de se calcular derivadas de secções. Mais tarde veremos que estas secções serão os campos de partículas das teorias de calibre formuladas por meio de fibrados vetoriais.

Como introdução, colocamos à disposição do leitor uma lista das principais definições de conexão, seguindo a Referência [22].

Definições de Conexão.

Sejam P(M,G) um fibrado principal, V um espaço vetorial e $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$ uma representação do grupo de Lie G.

1.**(Cartan-Weil)** Uma conexão é uma regra de diferenciação covariante de secções. Seja s uma secção local de um fibrado vetorial associado a P, e $A \in GL(\mathrm{V})$. Então a diferencial exterior covariante de s em relação à matriz A é definida por $D_A s = ds + As$.

2.**(Ehresmann)** Para cada $p \in \mathrm{P}$ existe uma quebra $\mathrm{T}_p\mathrm{P} = V_p \times H_p$, do espaço tangente $\mathrm{T}_p\mathrm{P}$, em uma parte vertical V_p e uma horizontal H_p, onde a última é equivariante sob a ação de G, isto é, $H_{pg} = dR_g|_p(H_p)$, e varia diferenciavelmente com p. Na verdade esta definição diz que $p \mapsto H_p$ é uma distribuição diferenciável sobre P.

3.(Chern) Uma conexão é uma 1-forma ω sobre P, a valores na álgebra de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$ de G, tal que $dR_g^*\omega = ad(g^{-1})\omega$ e para todo campo de vetores horizontal X temos $\omega(X) = 0$. Localmente, em uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, com funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{G}$, uma secção local $\sigma : U_\alpha \to \mathrm{P}$ transforma ω, via pull-back, em uma 1-forma $\omega_\alpha = \sigma^*\omega$, sobre U_α, produzindo as seguintes transformações de "Yang-Mills" na região de intersecção $U_\alpha \cap U_\beta$:

$$\omega_\beta = ad(g_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta},$$

onde entendemos a matriz $g_{\alpha\beta}$ como realizando a "transformação de calibre" entre U_α e U_β.

4. Sejam E um fibrado vetorial sobre M e $U \subset \mathrm{M}$ um aberto trivializnte. Considere um referencial $\{s_1, \ldots s_k\}$ de secções definidas em U. Uma conexão sobre P induz uma diferencial covariante de secções, através da matriz de 1-formas $\omega_U = (\omega_{ij})$, definida por

$$Ds_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \otimes s_j.$$

Dado outro referencial $\{s'_1, \ldots, s'_k\}$ em $V \subset \mathrm{M}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, a matriz ω_U se transforma como

$$\omega_V = g\,\omega_U g^{-1} + dg\, g^{-1},$$

onde $g = (g_{ij}) : U \cap V \to GL(n, \mathbb{R})$ é definida por $s'_i(x) = g_{ij}(x) s_j(x)$. Isto é novamente uma transformação de calibre com g^{-1} trocada por $g_{\alpha\beta}$.

5.(Atiyah) Uma conexão é uma fatoração da seqüência exata de fibrados

$$0 \to ad(\mathrm{P}) \xrightarrow{i} \mathrm{TP/G} \xrightarrow{\pi} \mathrm{TM} \to 0,$$

onde TP e TM são os respectivos fibrados tangentes de P e M, TP/G é o fibrado com fibra TG/G e grupo de estrutura TG, e $ad(\mathrm{P})$ é o fibrado adjunto, isto é, a restrição de TP/G a M; i é a aplicação de inclusão e π a projeção dos fibrados tangentes. Olhando com um pouco mais de cuidado, notamos que uma conexão pode ser definida ou como uma aplicação injetiva $\chi : \mathrm{TM} \to \mathrm{TP/G}$ tal que $\pi \circ \chi = 1_{\mathrm{TM}}$ ou como uma aplicação sobrejetiva $\vartheta : \mathrm{TP/G} \to ad(\mathrm{P})$ tal que $i \circ \vartheta = 1_{ad(\mathrm{P})}$.

Não é muito difícil de se provar a equivalência entre as definicões **1,2,3** e **4**, podendo ser encontradas em qualquer livro-texto de geometria diferencial, como por exemplo em [6,18,26]. Entratanto, estabelecer a equivalência entre a definição **5** e as demais é realmente trabalhoso. Para tal veja [2,25].

Nas seções seguintes, provaremos a equivalência entre **2.** e **3.**, adotando-as como nossa definição de conexão em fibrados principais. Para fibrados vetoriais usaremos a definição **4.**, que nos possibilitará encontrar interessantes resultados, como por exemplo as classes de Chern.

7.1 Conexões em Fibrados Principais

Existem várias maneiras de se definir conexões em fibrados principais, e de fato, nós já introduzimos, sem muitas pretensões, este conceito na página 99, fazendo uso de uma métrica de Riemann.

No que segue, provaremos a equivalência entre as definições **2.** e **3.** da seção anterior, reescrevendo cada uma e discutindo em mais detalhes.

Definição 7.1 *Uma* conexão *em um fibrado principal* P(M,G) *é uma* 1*-forma* ω *sobre* P, *que assume valores na álgebra de Lie* $\hat{\mathrm{G}}$ *de* G, *satisfazendo às seguintes condições:*

C1 *Se* $A^* \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$ *é o campo fundamental de vetores associado a* $A \in \hat{\mathrm{G}}$, *então*

$$\omega_p(A_p^*) = A$$

para todo ponto $p \in \mathrm{P}$, *ou seja,* $\omega(A^*) = A$;

C2 *Seja* $ad : \mathrm{G} \to GL(\hat{\mathrm{G}})$ *a representação adjunta de* G. *Então*

$$\omega_{pg}(dR_g|_p(v)) = [ad(g^{-1})](\omega_p(v)),$$

para todo $g \in \mathrm{G}$, $p \in \mathrm{P}$ *e* $v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$. *Podemos ainda escrever* $R_g^*\omega = ad(g^{-1})\omega$.

Chamamos ω 1-forma de conexão.

Definição 7.2 *Uma* conexão *em um fibrado principal* P(M,G) *é uma regra que associa a cada ponto* $p \in \mathrm{P}$ *um subspaço* $H_p \subset \mathrm{T}_p\mathrm{P}$ *satisfazendo às seguintes condições:*

C1' *Sendo* $V_p = \{v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}/d\pi_p(v) = 0\}$, *vale* $\mathrm{T}_p\mathrm{P} = H_p \oplus V_p$ *para todo ponto* $p \in \mathrm{P}$;

C2' *Para cada* $g \in \mathrm{G}$ *e* $p \in \mathrm{P}$ $dR_g|_p(H_p) = H_{pg}$;

C3' H_p *depende diferenciavelmene do ponto* p.

Esta última condição pode ser explicada como segue. Dado um campo de vetores arbitrário X (não necessariamente diferenciável) sobre P (ou um subconjunto aberto de P), temos em cada ponto $p \in \mathrm{P}$ a seguinte decomposição

$$X_p = Y_p + Z_p,$$

onde $Y_p \in H_p$ e $Z_p \in V_p$, pela condição **C1'**. Associando a cada ponto $p \in \mathrm{P}$ o vetor Y_p (resp. Z_p) obtemos um campo de vetores Y (resp. Z), chamado *componente horizontal* (resp. *vertical*) do campo X. Assim, a condição **C3** significa que se o dado campo de vetores X é diferenciável, então sua componente horizontal Y também o é. Neste caso, a componente vertical Z, é certamente diferenciável.

Dada uma conexão no sentido da Definição 7.2, chamamos ao espaço H_p *subespaço horizontal* em $p \in \mathrm{P}$, e V_p *subespaço vertical* em p. A componente horizontal (resp. vertical) de um campo de vetores X é denotada por X^H (resp. X^V). Dizemos que X é *horizontal* (resp.*vertical*) se $X = X^H$ (resp. $X = X^V$).

> OBS: *Em vista da argumentação feita na página 99, sempre existe uma conexão no sentido da Definição 7.2.*

Para ver a equivalência entre as definições, considere primeiro a Definição 7.2. Vamos mostrar que existe uma 1-forma sobre P, com valores na álgebra de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$ de G, que satisfaz a Definição 7.1.

Como vimos na página 99, o subespaço tangente V_p, para cada $p \in \mathrm{P}$, é o conjunto de todos os vetores tangentes da forma A^*_p, onde $A^* \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$ é o campo de vetores fundamental associado a $A \in \widehat{\mathrm{G}}$. Para todo $p \in \mathrm{P}$, definamos então, ω_p como sendo a transformação linear de $\mathrm{T}_p(\mathrm{P})$ em $\widehat{\mathrm{G}}$, que aplica $A^*_p \in V_p$ no seu correspondente elemento $A \in \widehat{\mathrm{G}}$ e todo elemento $v \in H_p$ em $0 \in \widehat{\mathrm{G}}$. Desta definição, segue que se X é um campo diferenciável de vetores sobre P, então $\omega(X) = \omega(X^V)$. Tendo em vista **C3'**, é fácil ver que ω é diferenciável e satisfaz **C1** da Definição 7.1. Para ver que ω satisfaz **C2**, note que se X é um campo de vetores horizontal então, $dR_g(X)$ também é, pela condição **C2'**. Portanto $\omega(X)$ e $(R^*_g\omega)(X)$ são ambos zero. Se X é um campo de vetores fundamental A^*, então a Proposição 6.3.3 da página 100 nos dá que $dR_g(X)$ é o campo de vetores fundamental correspondente à $ad(g^{-1})A$. Disso segue que $(R^*_g\omega)(X) = \omega(dR_g(X)) = ad(g^{-1})A = ad(g^{-1})\omega(X)$. O caso geral é uma conseqüência direta destes.

Reciprocamente, Suponha que ω é a 1-forma de conexão dada pela Definição 7.1. Seja $H_p = \{v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P} / \omega_p(v) = 0\}$. Para ver que $p \mapsto H_p$ é uma conexão no sentido da Definição 7.2, note que de **C1** segue que $H_p \oplus V_p = \mathrm{T}_p\mathrm{P}$. Também, temos $dR_g|_p(H_p) = H_{pg}$, pois como de **C2** $\omega_{pg}(dR_g|_p(v)) = ad(g^{-1})\omega_p(v)$ e $\omega_p(v) = 0$ para $v \in H_p$ obtemos $\omega_{pg}(dR_g|_p(v)) = 0$. Visto que ω depende diferencialvelmente de p, H_p depende diferenciavelmente de p também.

Tendo em vista a equivalência das Definicões 7.1 e 7.2, com base na discussão da página 99, sempre existe uma conexão em P(M,G), segundo qualquer uma das definições.

Como a aplicação $\pi : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ é diferenciável, dado um campo de vetores diferenciável V, sobre P, o campo definido por $X_{\pi(p)} = d\pi|_p(V_p)$ é um campo diferenciável sobre M. A pergunta que se faz então, é se a recíproca vale. A proposição abaixo esclarece um pouco tal questão.

Proposição 7.1.1 *Dado um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$, existe um único campo $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$ tal que $\omega(\widetilde{X}) = 0$, $dR_g|_p(\widetilde{X}_p) = \widetilde{X}_{pg}$ e $d\pi|_p(\widetilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ para todo ponto $p \in \mathrm{P}$.*

Demonstração: Como para cada $p \in \mathrm{P}$ a aplicação $d\pi|_p : H_p \to \mathrm{T}_{\pi(p)}\mathrm{M}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais, definimos $\widetilde{X}_p = d\pi|_p^{-1}(X_{\pi(p)}) \in H_p \subset \mathrm{T}_p\mathrm{P}$. Desta maneira, $\widetilde{X}$ fica bem definido.

Para provar que $\widetilde{X}$ é diferenciável em P, seja $p \in \mathrm{P}$ e (T_U, U) uma trivialização local com $\pi(p) \in U$. Como $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ é um difeomorfismo, vem que os campos de vetores de $U \times G$ induzem, por meio de T_U^{-1}, campos de vetores em $\pi^{-1}(U)$. Portanto, notando que os campos de vetores de $U \times G$ são da forma $Y \times Z$, onde Y é um campo de vetores sobre U e Z um sobre G, tomemos qualquer campo de vetores $Z \in \mathcal{X}(\mathrm{G})$ e consideremos o campo W sobre $\pi^{-1}(U)$, induzido de $X \times Z$ por T_U^{-1}. Feito isso, vemos que $dT_U(W) = X \times Z$. Lembrando que $T_U(p) = (\pi(p), \varphi_U(p))$, temos finalmente que $d\pi(W) = X$. Como $d\pi(W) = d\pi(W^H)$, as definições de W e $\widetilde{X}$ nos dão $\widetilde{X} = W^H$. Portando, $\widetilde{X}$ é diferenciável em $\pi^{-1}(U)$, e consequentemente em P.

As outras propriedades também seguem facilmente da definição de $\widetilde{X}$. ∎

Definição 7.3 *O campo de vetores $\widetilde{X}$ definido acima é chamado* levantamento horizontal *de X.*

Proposição 7.1.2 *Sejam $A \in \hat{\mathrm{G}}$ e $X \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$. Então $[A^*, \widetilde{X}] = 0$.*

Demonstração: Seja $\theta_t(p) = p \exp tA = R_{\exp tA}(p)$. Então

$$[A^*, \widetilde{X}]_p = \pounds_{A^*}\widetilde{X}\Big|_p = \lim_{t \to 0} \frac{X_p - \theta_{t*}\widetilde{X}\Big|_p}{t}.$$

Como $\theta_{t*}\widetilde{X}\Big|_p = dR_{\exp tA}|_{p\exp(-tA)}(\widetilde{X}_{p\exp(-tA)}) = \widetilde{X}_p$ vem que $[A^*, \widetilde{X}]_p = 0$ para todo ponto $p \in \mathrm{P}$, demonstrando assim a nossa afirmção. ∎

Quando o fibrado P(M,G) é a estrutura geométrica de uma teoria de calibre, a conexão está associada ao potencial. Para cada escolha de calibre (trivialização local), associamos à conexão ω o potencial de calibre $\omega_U = \sigma_U^*\omega$, onde σ_U é a secção local associada à trivialização local (escolha de calibre) dada.

Se temos duas trivializações locais T_U e T_V, os potenciais de calibre ω_U e ω_V podem ser relacionados por

$$\omega_V|_x(v) = dL^{-1}_{g_{UV}(x)}\Big|_{g_{UV}(x)}(dg_{UV}|_x)(v) + ad(g_{UV}(x)^{-1})(\omega_U|_x(v)),$$

onde $x \in U \cap V$, $v \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$, $L_h : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ é a trnslação à esquerda em G, determinada por $h \in \mathrm{G}$, e g_{UV} é a função de transição de T_U para T_V. Para ver a demonstração disso veja [8].

A relação acima é usualmente chamada *transformação de calibre* entre os potenciais ω_U e ω_V.

Se G for um grupo de matrizes, a relação cima pode ser reescrita como segue. Na notação matricial e com uma curva γ, em M, com $d\gamma|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = v$, no ponto $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} dL^{-1}_{g_{UV}(x)}\Big|_{g_{UV}(x)}(dg_{UV}|_x(v)) &= dL_{g_{UV}(x)}\Big|_{g_{UV}(x)}\left(d(g_{UV}\circ\gamma)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right)\right) \\ &= d[g_{UV}(x)^{-1}g_{UV}(\gamma(t))]|_{t=0} = g_{UV}(x)^{-1}dg_{UV}|_{t=0}(v), \end{aligned}$$

onde dg_{UV} é a função a valores matriciais, diferencial de g_{UV}. Ainda para um grupo de matrizes temos $A(\exp tB)A^{-1} = \exp t(ABA^{-1})$. Mas pela Proposição 4.7.5 da página 58 também vale $A(\exp tB)A^{-1} = \exp t(ad(A)B)$. Calculando a diferencial destes dois subgrupos a 1-parâmetro em $t = 0$ e avaliando no vetor $\frac{d}{dt} \in T_0\mathbb{R}$ obtemos que $ad(A)B = ABA^{-1}$. Daí, $ad(g_{UV}(x)^{-1})\omega_U|_x(v) = g_{UV}(x)\omega_U|_x(v)g_{UV}(x)^{-1}$. Conseqüêntemente, a lei de transformação de ω_U para ω_V pode ser escrita como

$$\omega_V = g_{UV}\omega_U g_{UV}^{-1} + g_{UV}^{-1}dg_{UV}$$

Como um exemplo de utilização deste raciocínio, vamos falar um pouco do eletromagnetismo usando esta linguagem.

Exemplo: Potencial Eletromagnético.

Considere um fibrado principal com grupo de estrutura $U(1)$, ou seja, o conjunto dos números complexos com norma 1 (que é de fato S^1). Os elementos desse grupo grupo podem ser todos escritos como $z = e^{ix}$, onde $x \in \mathbb{R}$. Segue disso que a função de transição $g_{UV} : U \cap V \to U(1)$ é dada por $e^{i\psi(x)}$, onde $\psi : U \cap V \to \mathbb{R}$ é uma função real. Então, $g_{UV}(x) = e^{i\psi(x)}$.

Considere agora uma escolha de calibre (trivialização local) T_U e o potencial ω_U a este associado, como descrito anteriormente. Note que, sendo $\widehat{U(1)}$ a álgebra de Lie de $U(1)$, temos $\omega_U : U \to \widehat{U(1)} = \{ia/a \in \mathbb{R}\}$, que nos permite escrever $\omega_U = -ieA_U$, onde[1] $A_U \in \bigwedge^1(U)$, é o chamado *potencial eletromagnético.*

Dada uma outra escolha de calibre T_V e seu potencial de calibre associado ω_V, temos

$$\omega_V = g_{UV}\omega_U g_{UV}^{-1} + g_{UV}^{-1}dg_{UV}$$

Como $U(1)$ é abeliano vem

$$\omega_V = \omega_U + g_{UV}^{-1}dg_{UV}.$$

Logo.

$$\omega_V = \omega_U + id\psi, \text{ ou ainda } A_V = A_U - \frac{1}{e}d\psi.$$

[1] Aqui $e \in \mathbb{R} - \{0\}$ é uma constante, que representa a carga elétrica.

OBS: *O fato de se definir* $g_{UV}(x) = e^{-i\psi(x)}$ *(algo comum nas teorias de calibre formuladas à maneira clássica) é ao meu ver uma questão de "gosto". Nesta definição, temos* $\omega_V = \omega_U - id\psi$ *e* $A_V = A_U + \frac{1}{e}d\psi$, *que parece não afetar muito os resultados anteriores.*

Para terminar, tendo ainda em vista a discussão do exemplo acima, o campo de forças do campo eletromagnético, em relação ao potencial de calibre ω_U, é dado por $F_U = -dA_U$. Como $U(1)$ é abeliano, temos $d\omega_U = d(\omega_V + id\psi) = d\omega_U + idd\psi = d\omega_V$, ou ainda, $dA_U = dA_V$, que nos dá $F_U = F_V$. Portanto, definindo $F|_U = F_U$, temos uma 2-forma definida em toda a variedade M. Desta maneira, podemos interpretar F como sendo o campo de forças eletromagnético.

Veremos mais tarde que, para forças nucleares, onde o grupo de estrutura do fibrado é não-abeliano (tipicamente $SU(n)$, para $n \geq 2$), o campo de forças sobre $U \subset$ M é uma função não-linear de ω_U, que por sua vez depende da escolha de calibre.

7.1.1 Formas a Valores Vetoriais, Derivada Covariante e Curvatura

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Considere o conjunto $\bigwedge^k(\mathrm{V};\mathrm{W})$ das aplicações k-lineares alternadas, de $\mathrm{V}^k = \mathrm{V} \times \cdots \times \mathrm{V}$ em W. Os elementos de $\bigwedge^k(\mathrm{V};\mathrm{W})$ são chamados *k-formas exteriores a valores em* W.

Dado um vetor $w \in \mathrm{W}$ e uma forma $\widehat{\varphi} \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$, definindo $\widehat{\varphi} \otimes w \in \bigwedge^k(\mathrm{V};\mathrm{W})$ por $(\widehat{\varphi} \otimes w)(v_1, \ldots v_k) = \widehat{\varphi}(v_1, \ldots, v_k)w$, obtemos que $\bigwedge^k(\mathrm{V}) \otimes \mathrm{W} \subset \bigwedge^k(\mathrm{V};\mathrm{W})$. Por outro lado, dados uma base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de W e $\varphi \in \bigwedge^k(\mathrm{V};\mathrm{W})$, temos $\varphi = \varphi_1 \otimes e_1 + \cdots + \varphi_m \otimes e_m$, onde $\varphi_i \in \bigwedge^k(\mathrm{V})$, $1 \leq i \leq n$. Para ver isto, basta ver que como φ é alternada, cada um dos φ_i também o é. Assim, $\bigwedge^k(\mathrm{V};\mathrm{W}) = \bigwedge^k(\mathrm{V}) \otimes \mathrm{W}$ (na verdade estes são isomorfos, não iguais).

Sendo M uma variedade diferenciável de dimensão n podemos naturalmente definir $\bigwedge^k(\mathrm{M};\mathrm{V})$. Além disso, dados $\varphi \in \bigwedge^k(\mathrm{M};\mathrm{V})$ e uma base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de V, temos $\varphi = \varphi_1 \otimes v_1 + \cdots + \varphi_r \otimes v_r$, com $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$. Isso permite definir sem nenhum problema, a diferencial exterior $d\varphi \in \bigwedge^{k+1}(\mathrm{M};\mathrm{V})$ como

$$d\varphi = d\varphi_1 \otimes v_1 + \cdots + d\varphi_r \otimes v_r.$$

Se M é orientada, de modo que possamos definir o operador estrela de Hodge sobre ela, podemos definir a forma a valores vetoriais $*\varphi$, como

$$*\varphi = *\varphi_1 \otimes v_1 + \cdots + *\varphi_r \otimes v_r.$$

O problema agora reside, em ver se $\bigwedge(\mathrm{M};\mathrm{V}) = \bigwedge^1(\mathrm{M};\mathrm{V}) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n(\mathrm{M};\mathrm{V})$, tem uma estrutura de álgebra graduada. Na verdade, devemos introduzir um produto entre os elementos de $\bigwedge^k(M;V)$ e os $\bigwedge^i(M;V)$, de modo a obter um elemento de $\bigwedge^{k+i}(M;V)$. Uma maneira pela qual isto pode ser feito, é quando V é uma álgebra de Lie, e então temos uma operação de produto em V, dada pelo colchete, que se estende à uma operação em $\bigwedge(M;V)$ fazendo deste último uma álgebra graduada.

Definição 7.4 *Sejam M uma variedade diferenciável,* $\widehat{G}$ *uma álgebra de Lie,* $\varphi \in \bigwedge^k(M;\widehat{G})$ *e* $\psi \in \bigwedge^i(M;\widehat{G})$. *Definimos o* colchete de φ *e* ψ *como*
$[\varphi,\psi](X_1,\ldots,X_{k+i}) =$

$$= \frac{1}{k!\,i!}\sum_{\sigma\in S_{k+i}} \text{sinal}(\sigma)[\varphi(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(k)}),\psi(X_{\sigma(k+1)},\ldots,X_{\sigma(k+i)})]$$

onde $X_1,\ldots,X_{k+i} \in \mathcal{X}(M)$.

Tendo ainda em vista a definição acima, se $\{e_1,\ldots e_m\}$ é um base de $\widehat{G}$, então $[e_i,e_j] = \sum_{l=1}^{m} c_{ij}^l e_l$, onde c_{ij}^l são as constantes de estrutura definidas por esta base. Assim, $\varphi = \varphi_i \otimes e_1 + \cdots + \varphi_m \otimes e_m$ e $\psi = \psi_1 \otimes e_1 + \cdots + \psi_m \otimes e_m$, e portanto

$$[\varphi,\psi] = \sum_{p,q=1}^{m} (\varphi_p \wedge \psi_q)\otimes[e_p,e_q] = \sum_{p,q,l=1}^{m} c_{pq}^l(\varphi_p\wedge\psi_q)\otimes e_l,$$

lembrando que $\varphi_p \wedge \psi_q = \dfrac{(p+q)!}{p!\,q!} alt\,(\varphi_p \otimes \psi_q)$.

Proposição 7.1.3 *Para* $\varphi \in \bigwedge^i(M;\widehat{G})$, $\psi \in \bigwedge^j(M;\widehat{G})$ *e* $\tau \in \bigwedge^k(M;\widehat{G})$, *valem as seguintes propriedades:*

(1) $[\varphi,\psi] = (-1)^{ij}[\psi,\varphi]$;

(2) $(-1)^{ik}[[\varphi,\psi],\tau] + (-1)^{ji}[[\psi,\tau],\varphi] + (-1)^{kj}[[\tau,\varphi],\psi] = 0$;

(3) $d[\varphi,\psi] = [d\varphi,\psi] + (-1)^i[\varphi,d\psi]$.

Demonstração: A parte *(1)* decorre imediatamente de que $\varphi_p \wedge \psi_q = (-1)^{pq}\psi_q \wedge \varphi_p$, pois estas são formas diferenciais no sentido ordinário.

Vamos desenvolver o lado esquerdo da afirmação *(2)*. Temos

$$[[\varphi,\psi],\tau] = \sum_{p,q,r=1}^{m} (\varphi_p \wedge \psi_q \wedge \tau_r)[[e_p,e_q],e_r],$$

sendo que os dois termos restantes se desenvolvem analogamente. Desta forma, o lado esquerdo de *(2)* se escreve

$$\begin{aligned}(-1)^{ik}\sum_{p,q,r=1}^{m}(\varphi_p\wedge\psi_q\wedge\tau_r)[[e_p,e_q],e_r] \;&+\; (-1)^{ji}\sum_{p,q,r=1}^{m}(\psi_q\wedge\tau_r\wedge\varphi_p)[[e_q,e_r],e_p] +\\ &+\; (-1)^{kj}\sum_{p,q,r=1}^{m}(\tau_r\wedge\varphi_p\wedge\psi_q)[[e_r,e_p],e_q] =\end{aligned}$$

$$= \sum_{p,q,r=1}^{m}(-1)^{ik}(\varphi_p\wedge\psi_q\wedge\tau_r)\left([[e_p,e_q],e_r] + [[e_q,e_r],e_p] + [[e_r,e_p],e_q]\right) = 0,$$

devido à identidade de Jacobi na álgebra, sendo que a penúltima igualdade é obtida rearranjando-se os produtos exteriores entre $\varphi_p, \psi_q, \tau_r$.

Quanto à afirmação *(3)*, esta segue da identidade $d(\varphi_p \wedge \psi_q) = d\varphi_p \wedge \psi_q + (-1)^i \varphi_p \wedge d\psi_q$ para formas diferenciais no sentido ordinário. ■

Vimos na seção anterior, que dada uma 1-forma de conexão ω, em um fibrado principal P(M,G), podemos escrever todo vetor $v \in T_pP$ como $v = v^H + v^V$, com $d\pi|_p(v^V) = 0$ e $\omega_p(v^H) = 0$, ou ainda, $v^V \in V_p$ e $v^H \in H_p$. Este fato nos possibilita a seguinte definição.

Definição 7.5 *Seja* $\varphi \in \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *uma k-forma sobre* P *a valores em um espaço vetorial* V. *Definimos a* parte horizontal de φ *associada à conexão* ω*, denotada por* φ^H*, como sendo*

$$\varphi^H(X_1,\ldots,X_k) = \varphi(X_1^H,\ldots,X_K^H),$$

onde $X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$.

Desta definição segue, sem dificuldades, que $\varphi^H \in \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ e que φ^H é diferenciável, uma vez que φ e $X_1^H,\ldots,X_k^H$ o são, sendo estes últimos diferenciáveis se $X_1,\ldots,X_k$ o forem, em vista da condição **C3'** da Definição 7.2.

Se $\varphi \in \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$, então pelo que vimos acima, $d\varphi \in \bigwedge^{k+1}(\mathrm{P};\mathrm{V})$. Portanto faz sentido tomar a parte horizontal $(d\varphi)^H$ de $d\varphi$. Este processo fornece um operador dado pela composição

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) & \xrightarrow{d} & \bigwedge^{k+1}(\mathrm{P};\mathrm{V}) & \xrightarrow{H} & \bigwedge^{k+1}(\mathrm{P};\mathrm{V}) \\ \varphi & \longmapsto & d\varphi & \longmapsto & (d\varphi)^H. \end{array}$$

Este operador é costumeiramente denotado por D, ou D^ω, para explicitar sua dependência da conexão ω e P(M,G).

Definição 7.6 *O operador* $D : \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \bigwedge^{k+1}(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *construído acima é chamado* derivada covariante exterior, *em relação à conexão* ω.

Dado um fibrado principal P(M,G), a definição da derivada covariante nos permite construir um objeto geométrico intrínseco.

Definição 7.7 *Definimos a* curvatura *da 1-forma de conexão* $\omega \in \bigwedge^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ *como* $\Omega = D\omega \in \bigwedge^2(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$. *(Quando queremos explicitar a conexão* ω *escrevemos* $\Omega^\omega = D^\omega\omega$.*)*

Quando ω é pensado como o potencial, Ω é chamado *campo de forças* de ω.

Teorema 44 (Equação de Estrutura de E.Cartan) *Sejam* ω *uma 1-forma de conexão sobre um fibrado principal* P(M,G) *e* Ω *sua 2-forma de curvatura. Então*

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + [\omega(X),\omega(Y)],$$

para quaisquer dois campos de vetores $X,Y \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$, *sendo* $[\omega(X),\omega(Y)]$ *a operação de colchete na álgebra de Lie* $\widehat{\mathrm{G}}$ *de* G.

Antes de demonstrarmos este teorema, precisamos demonstrar alguns lemas, que serão usados na demonstração.

Lema 7.1.1 *Se $A, B \in \widehat{G}$, então $[A,B]^* = [A^*, B^*]$, sendo que o primeiro colchete é o da álgebra de Lie $\widehat{G}$ e o segundo é o usual definido para campos de vetores.*

Demonstração: Primeiro relembremos que a álgebra de Lie de G, é o conjunto dos campos de vetores invariantes de G. Desta forma, dado um campo de vetores fundamental A^*, sobre P, seu grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos é dado por $\{R_{\exp tA}/t \in \mathbb{R}\}$, sendo que $\theta_g(t) = g \exp tA$ é o sub-gupo a 1-parâmetro induzido em G por A.

Dado $p \in P$, podemos construir uma aplicação diferenciável $\ell_p : G \to P$, dada por $\ell_p(g) = pg$.

Então, se $p \in P$ e $g \in G$, temos

$$A^*_{pg} = d(pg \exp tA)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = d(\ell_p \circ \theta_g)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right).$$

Portanto, como $d\theta_g|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = A_g$, por definição, temos

$$A^*_{pg} = d\ell_p|_g(A_g).$$

Isto mostra que A e A^* são ℓ_p-relacionados, e segue que

$$d\ell_p|_g([A,B]_g) = d\ell_p|_g\left(\mathcal{L}_A B|_g\right) = d\ell_p|_g\left(\lim_{t\to 0}\frac{B_g - \theta_{t*}(B)|_g}{t}\right),$$

onde $\theta_t(g) = g\exp tA$. Então, $\theta_{t*}(B)|_g = d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}\left(B_{\theta_{-t}(g)}\right)$, daí,

$$\begin{aligned} d\ell_p|_g([A,B]_g) &= \lim_{t\to 0}\frac{d\ell_p|_g(B_g) - d\ell_p|_g \circ d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}(B_{\theta_{-t}(g)})}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{B^*_g - d\ell_p|_g \circ d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}(B_{\theta_{-t}(g)})}{t}, \end{aligned}$$

visto que B e B^* são ℓ_p relacionados. Note que

$$\begin{aligned} d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}(B_{\theta_{-t}(g)}) &= d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}\left(d(\theta_{-t}(g)\exp sB)|_{s=0}\left(\frac{d}{ds}\right)\right) = \\ &= d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}\left(d(g\exp(-tA)\exp sB)|_{s=0}\left(\frac{d}{ds}\right)\right) = \\ &= d\left(\theta_t(g\exp(-tA)\exp sB\right)|_{s=0}\left(\frac{d}{ds}\right) = \\ &= d\left(g\exp(-tA)\exp sB\exp tA\right)|_{s=0}\left(\frac{d}{ds}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d\ell_p|_g \circ d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}(B_{\theta_{-t}(g)}) = d\left(pg\exp(-tA)\exp sB\exp tA\right)|_{s=0}\left(\frac{d}{ds}\right).$$

Por outro lado, sendo $\widehat{\theta}_t(p) = p\exp tA$ o grupo a 1-parâmetro de A^* em P, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{t*}B^*\Big|_{pg} &= d\widehat{\theta}_t\Big|_{\widehat{\theta}_{-t}(pg)}(B^*_{\widehat{\theta}_{-t}(pg)}) = d\left(\widehat{\theta}_t(\widehat{\theta}_{-t}(pg)\exp sB)\right)\Big|_{s=0}\left(\frac{d}{ds}\right) = \\ &= d\left(pg\exp(-tA)\exp sB\exp tA\right)|_{s=0}\left(\frac{d}{ds}\right) = d\ell_p|_g \circ d\theta_t|_{\theta_{-t}(g)}(B_{\theta_{-t}(g)}). \end{aligned}$$

Substituindo estes valores obtemos

$$d\ell_p\big|_g([A,B]_g) = \lim_{t\to 0}\frac{B^*_{pg} - \widehat{\theta}_{t*}B^*\big|_{pg}}{t} = \mathcal{L}_{A^*}B^*\big|_{pg} = [A^*,B^*]_{pg}.$$

Como $d\ell_p\big|_g([A,B]_g) = [A,B]^*_{pg}$, encontramos finalmente que

$$[A,B]^* = [A^*,B^*]. \ \blacksquare$$

Observe que o lema acima afirma que o conjunto dos campos de vetores fundamentais em P é uma álgebra de Lie. Ainda mais, que a aplicação ℓ_p é um isomorfismo de álgebras de Lie, para cada $p \in$ P.

Lema 7.1.2 *Sejam $A \in \widehat{\mathrm{G}}$ e $Y \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$ um campo de vetores horizontal. Então $[A^*,Y]$ é horizontal.*

Demonstração: $[A^*,Y]_p = \mathcal{L}_{A^*}Y\big|_p = \lim_{t\to 0}\frac{Y_p - \widehat{\theta}_{t*}Y\big|_p}{t}$, onde $\widehat{\theta}_t(p) = p\exp tA = R_{\exp tA}(p) = R_{\theta_t}(p)$, e onde $\theta_t = \exp tA \in$ G. Então,

$$[A^*,Y]_p = \lim_{t\to 0}\frac{Y_p - R_{\theta_t *}Y\big|_p}{t}.$$

Note ainda que $R_{\theta_t *}Y\big|_p = dR_{\theta_t}(Y)\big|_p$.

Como Y é horizontal, então $dR_{\theta_t}(Y)\big|_p$ também o é, por causa da Definção 7.2 de espaço horizontal. Disso segue que $[A^*,Y]_p = \lim_{t\to 0}\frac{Y_p - R_{\theta_t *}Y\big|_p}{t} \in H_p$. $\blacksquare$

Demonstração do Teorema. Todo campo de vetores sobre P, é uma soma de um campo vertical e um campo horizontal. Além disso, todo campo vertical é, em cada ponto, uma combinação linear de campos fundamentais. Portanto, visto que ambos os lados da equação são lineares em X e Y, é suficiente demonstrar-la para os casos listados abaixo.

(1) X e Y são horizontais. Neste caso $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ e a equação é a definição de Ω.

(2) X e Y são fundamentais, $X = A^*$ e $Y = B^*$, onde $A, B \in \widehat{\mathrm{G}}$. Neste caso usamos a fórmula

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]),$$

dada pelo Teorema 31 da página 69.

Como $\omega(A^*) = A$ é uma função constante, temos $B^*\omega(A^*) = 0$. De igual maneira $A^*\omega(B^*) = 0$. Isto leva a que $d\omega(A^*,B^*) = -\omega([A^*,B^*])$. Como pelo Lema 7.1.1 temos $[A^*,B^*] = [A,B]^*$, obtemos finalmente que

$$d\omega(A^*,B^*) = -\omega([A^*,B^*]) = -\omega([A,B]^*) = -[A,B] = -[\omega(A^*),\omega(B^*)].$$

Note que como A^* e B^* são verticais $\Omega(A^*, B^*) = 0$. Assim, fica estabelecida a equação neste caso.

(3) X é horizontal e $Y = A^*$ é fundamental. Usando novamente a fórmula dada pelo Teorema 31 da página 69, temos

$$d\omega(X, A^*) = X\omega(A^*) - A^*\omega(X) - \omega([X, A^*]).$$

Como $\omega(A^*) = A$ é uma função constante temos $X\omega(A^*) = 0$. Além disso, $\omega(X) = 0$, uma vez que X é horizontal. Pelo Lema 7.1.2, temos que $[X, A^*]$ é horizontal, acarretando $\omega([X, A^*]) = 0$. Portanto, $d\omega(X, A^*) = 0$. Por outro lado, $\Omega(X, A^*) = 0$, concluindo a demonstração do teorema neste caso. ■

> OBS: *Observe que* $[\omega(X), \omega(Y)] = \frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y)$*, e portanto a equação de estrutura de Cartan, nesse contexto, se escreve como*
>
> $$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Teorema 45 (Identidade de Bianchi ou Equação Homogênea de Campo)

Seja ω *uma 1-forma de conexão, sobre um fibrado principal* P(M,G)*, com 2-forma de curvatura* Ω*. Então* $D\Omega = 0$*, e mais ainda,* $d\Omega = [\Omega, \omega]$.

Demonstração: Da equação de estrutura de Cartan e da observação acima temos

$$d\Omega = d^2\omega + \tfrac{1}{2}[d\omega, \omega] + \tfrac{1}{2}[\omega, d\omega] = [d\omega, \omega],$$

visto que $d^2\omega = 0$ e $-[\omega, d\omega] = [d\omega, \omega]$.

Substituindo a equação de estrutura $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ em $d\Omega = [d\omega, \omega]$ obtemos

$$d\Omega = [\Omega, \omega] - \tfrac{1}{2}[[\omega, \omega], \omega].$$

Note agora que $[[\omega, \omega], \omega] = 0$, em vista de *(2)* da Proposição 7.1.3, e portanto

$$d\Omega = [\Omega, \omega],$$

conseqüentemente

$$D\Omega = 0,$$

uma vez que ω se anula sobre vetores verticais. ■

Proposição 7.1.4 *Para todo* $g \in$ G, $R_g^*\Omega = ad(g^{-1})\Omega$.

Demonstração: Pela maneira que definimos o colchete para formas a valores vetoriais, este é preservado sob a operação de pull-back. Portanto

$$R_g^*\Omega = R_g^*\left(d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega]\right) = R_g^*d\omega + \tfrac{1}{2}[R_g^*\omega, R_g^*\omega] = dR_g^*\omega + \tfrac{1}{2}[R_g^*\omega, R_g^*\omega] =$$
$$= ad(g^{-1})\omega + \tfrac{1}{2}[ad(g^{-1})\omega, ad(g^{-1})\omega] = ad(d^{-1})\left(d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega]\right) = ad(g^{-1})\Omega. \ ■$$

Dada uma secção local $\sigma_U : U \to$ P, temos $\omega_U = \sigma_U^*\omega \in \bigwedge^1(U; \widehat{\mathrm{G}})$, sendo que $U \subset$ M. Definimos então o *campo de forças* associado a ω_U por $\Omega_U = \sigma_U\Omega$.

Até aqui, desenvolvemos a teoria sobre P, e não sobre M. É de se esperar portanto, que existam relações entre objetos de P e de M, uma vez que o cálculo desenvolvido em P é apenas um artifício para se calcular mais explicitamente os objetos que "moram" em M.

Proposição 7.1.5 $\Omega_U = d\omega_U + \frac{1}{2}[\omega_U, \omega_U]$.

Demonstração: Sendo $\sigma : U \to P$ uma secção local temos
$\Omega_U = \sigma^*\Omega = \sigma^*\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]\right) = d(\sigma^*\omega) + \frac{1}{2}[\sigma^*\omega, \sigma^*\omega] = d\omega_U + \frac{1}{2}[\omega_U, \omega_U]$. ■

Proposição 7.1.6 $\Omega_V = ad(g_{UV}^{-1})\Omega_U$.

Demonstração: Dados $u, v \in T_xM$, temos

$$\Omega_V|_x(u,v) = \Omega|_{\sigma_V(x)}(d\sigma_V|_x(v), d\sigma_V|_x(v)).$$

Lembrando que $\sigma_V(x) = \sigma_U(x)g_{UV}(x) = R_{g_{UV}(x)}(\sigma_U(x))$, temos

$$d\sigma_V|_x = d\left(R_{g_{UV}(x)} \circ \sigma_U\right)\Big|_x = dR_{g_{UV}}|_{\sigma_U(x)} \circ d\sigma_U|_x,$$

e por fim

$$\begin{aligned}\Omega_V|_x(u,v) &= \Omega|_{\sigma_U(x)g_{UV}}\left(dR_{g_{UV}}|_{\sigma_U(x)} \circ d\sigma_U|_x(u), dR_{g_{UV}}|_{\sigma_U(x)} \circ d\sigma_U|_x(v)\right) = \\ &= \left(R^*_{g_{UV}(x)}\Omega\right)\Big|_{\sigma_U(x)}((d\sigma_U|_x(v), d\sigma_U|_x(v)) = ad(g_{UV}(x)^{-1})\Omega_U|_x(u,v).\end{aligned}$$ ■

Em geral, quando o grupo de estrutura de uma teoria de calibre é não-abeliano, perdemos a linearidade na equação $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$. Isto motiva, de certa forma, alguns físicos a considerarem o campo de forças em P ao invés de M. Isto se deve ao fato da não-linearidade da equação acima, implicar que não temos, em geral, $\Omega_U = \Omega_V$ em $U \cap V$.

7.2 Conexões em Fibrados Vetoriais

Nesta seção desenvolveremos sucintamente a teoria das conexões em fibrados vetoriais. visto que nosso objetivo é estudar teorias de calibre em fibrados principais, fazendo uso de conexões em tais fibrados.

Como já dissemos, existem duas formulações equivalentes para as teorias de calibre: uma em fibrados principais e outra em fibrados vetoriais.

A relação entre estas formulações é que os objetos geométricos em um fibrado principal podem ser transportados para um fibrado vetorial a este associado.

Independentemente dos fibrados principais, pode-se construir as teorias de calibre em fibrados vetoriais, utilizando a segunda forma variacional para a dedução da equação de Lagrange para campos de partículas.

A fim de se definir o conceito de conexão em fibrados vetoriais, usaremos as operações algébricas sobre fibrados vetoriais, desenvolvidas na Seção 6.5.1 do Capítulo 6.

Seja E um fibrado vetorial real n-dimensional, sobre uma variedade diferenciável M. Sendo TM o fibrado vetorial tangente a M, podemos formar o fibrado vetorial $(TM)^* \otimes E$, onde $(TM)^*$ é o fibrado vetorial dual de TM (ou ainda, $(TM) = \bigwedge^1(TM)$).

Considere $\mathcal{A}^0(E) = \Gamma(E)$ e $\mathcal{A}^1(E) = \Gamma((TM)^* \otimes E)$, os conjuntos das secções C^∞ dos fibrados vetoriais E e $(TM)^* \otimes E$ respectivamente.

Definição 7.8 *Uma* conexão linear *sobre* E *é uma aplicação* $\mathbb{R}$*-linear*

$$D : \mathcal{A}^0(\mathrm{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathrm{E})$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$D(fs) = df \otimes s + f\, D(s)$$

para toda secção $s \in \mathcal{A}^0(\mathrm{E})$ *e toda função* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$.

Em vista desta definição, podemos colocar $D : \Gamma(\mathrm{E}) \times \mathcal{X}(\mathrm{M}) \to \Gamma(\mathrm{E})$, com $(s, X) \mapsto D_X s$, onde $D_X(fs) = df(X)\, s + f\, D_X s$.

Seja (U, ξ), com $\xi = (x^1, \ldots, x^k)$, uma carta da variedade M, tal que $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^k$. Se $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset \Gamma(U, \mathrm{E})$ é um referencial para U. Então o conjunto $\{dx^j \otimes s_i / 1 \leq j \leq k \text{ e } 1 \leq i \leq n\} \subset \Gamma(U, (\mathrm{TM})^* \otimes \mathrm{E})$ é, para cada $x \in U$, uma base para $(\mathrm{T}_x\mathrm{M})^* \otimes \mathrm{E}_x$. Isto implica que toda secção $\gamma : U \to (\mathrm{TM})^* \otimes \mathrm{E}$ se escreve como

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\, dx^j \otimes s_i\ ,$$

onde $\gamma_{ij} : U \to \mathbb{R}$ são de classe C^∞. Portanto, se $s \in \Gamma(U, \mathrm{E})$, temos

$$Ds = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (Ds)_{ij}\, dx^j \otimes s_i$$

e também se $X = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + a_k \dfrac{\partial}{\partial x^k} \in \mathcal{X}(U)$ temos

$$D_X s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (Ds)_{ij} a_l\, dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) s_i = \sum_{l=1}^{k} a_l D_{\frac{\partial}{\partial x^l}} s,$$

mostrando que a aplicação $X \in \mathcal{X}(\mathrm{M}) \mapsto D_X s \in \Gamma(\mathrm{E})$ é $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-linear.

Prosseguindo, como $s \in \Gamma(U, \mathrm{E})$, então $s = f_1 s_i + \cdots + f_n s_n$, onde as funções $f_1, \ldots f_n : U \to \mathbb{R}$ são de classe C^∞. Assim,

$$Ds = \sum_{i=1}^{n} (df_i \otimes s_i + f_i\, Ds_i)$$

e conseqüentemente

$$D_X s = \sum_{i=1}^{n} (df_i(X) s_i + f_i\, D_X s_i) = \sum_{i=1}^{n} (X(f_i) s_i + f_i\, D_X s_i)\,,$$

levando em conta que $df_i(X) = X(f_i)$. Portanto, das consisderações acima obtemos

$$D_X s = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} s_i + a_j f_i D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} s_i \right),$$

então escrevendo

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} s_i = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l \, s_l$$

temos finalmente

$$D_X s = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} s_i + a_j f_i \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l \, s_l \right) .$$

As nk^2 funções Γ_{ij}^l são chamadas *coeficientes da conexão* em relação à carta e ao referencial escolhidos. Estas funções determinam completamente a conexão D em U. Reciprocamente, esta mesma fórmula determina uma conexão no fibrado $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(U) \subset \mathrm{E}$, uma vez dadas as nk^2 funções Γ_{ij}^l.

Se $\Gamma_{ij}^l = 0$ para todos os índices i, j e l temos

$$D_X s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} s_i \; ,$$

ou seja, $D_X s$ é a derivada direcional da secção s na direção do campo X. Para visualizar melhor esta situação, basta imaginar o conjunto $\{s_1, \ldots s_n\}$ como uma base para E_x, em cada ponto $x \in U$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{C} = \{D / D$ é uma conexão sobre $\mathrm{E}\}$. Supomos por hora que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Lema 7.2.1 *Se* D_1 , $D_2 \in \mathcal{C}$ *e* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, *então* $fD_1 + (1-f)D_2 \in \mathcal{C}$.

Demonstração: Basta tomar $h \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, $s \in \Gamma(\mathrm{E})$, e usar o fato de D_1 e D_2 serem conexões sobre E, e concluir que

$$(fD_1 + (1-f)D_2)(hs) = dh \otimes s + h(fD_1 s + (1-f)D_2 s). \; \blacksquare$$

Teorema 46 (Existência de Conexões) $\mathcal{C} \neq \emptyset$, *isto é, todo fibrado vetorial admite uma conexão linear.*

Demonstração: Para começar, estamos supondo M paracompacta. Sejam $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura de M, que trivialize E e $(\mathrm{TM})^*$, e $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição da unidade a ela subordinada.

Das considerações feitas acima obtemos que $\pi_{\mathrm{E}}^{-1}(U_\alpha)$ admite uma conexão D_α, para cada $\alpha \in A$. Portanto, o Lema precedente diz que $D = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha D_\alpha$ é uma conexão bem definida, para o fibrado E, visto que $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1$. $\blacksquare$

Seja (U, T_U) uma trivialização local de E. Não é difícil ver que

$$s_i(x) = T_U^{-1}(x, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0))$$

é uma secção de E em U, e que $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset \Gamma(U, \mathrm{E})$ é um referencial. Então podemos escrever

$$Ds_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \otimes s_j \ ,$$

onde $\omega_U = \omega_{ij}$ é uma matriz $n \times n$, cujos elementos são 1-formas sobre U, chamada *matriz de conexão para D.*

Se (V, T_V) é uma outra trivialização local, com $U \cap V \neq \emptyset$, analogamente podemos construir um referencial $\{s'_1, \ldots s'_n\} \subset \Gamma(V, \mathrm{E})$, com

$$s'_i(x) = T_V^{-1}(x, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)).$$

Isto origina

$$Ds'_i = \sum_{j=1}^{n} \omega'_{ij} \otimes s'_j,$$

onde $\omega_V = \omega'_{ij}$ é como o caso para (U, T_U).

Então, para cada $x \in U \cap V$ temos

$$s'_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) s_i(x),$$

onde $g_{ij} : U \cap V \to \mathbb{R}$ são funções C^∞, visto que s_i e s'_i o são. Desta forma,

$$Ds'_i = D\left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} s_j\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(dg_{il} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\omega_{jl}\right) \otimes s_l.$$

Por outro lado,

$$Ds'_i = \sum_{j=1}^{n} \omega'_{ij} \otimes s'_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} \omega'_{ij} g_{jl}\right) \otimes s_l.$$

Portanto

$$dg_{il} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\omega_{jl} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} g_{jl} \ ,$$

que em notação matricial se escreve

$$dg + g\omega_U = \omega_V g,$$

onde $g = (g_{ij})$ e $dg = (dg_{ij})$ é uma matriz de 1-formas. Como para todo $x \in U \cap V$ $g_{ij}(x)$ é uma matriz inversível, obtemos

$$\omega_V = g\,\omega_U g^{-1} + dg\, g^{-1}.$$

Esta expressão mostra que a dependência de ω do referencial, não é linear, isto é, ω não é um campo de tensores.

Como TM é um fibrado vetorial, podemos formar os fibrados $\bigwedge^p(\mathrm{TM}) \otimes \mathrm{E}$. Além disso, definindo $\mathcal{A}^p(\mathrm{E}) = \Gamma(\bigwedge^p(\mathrm{TM}) \otimes \mathrm{E})$, notamos que $\mathcal{A}^0(\mathrm{E}) = \Gamma(\mathrm{E})$ e $\mathcal{A}^1(\mathrm{E}) = \Gamma((\mathrm{TM})^* \otimes \mathrm{E})$, como na definição anterior.

Podemos então redefinir uma conexão em E, da maneira descrita abaixo.

Definição 7.9 *Uma* conexão linear *em* E *é uma aplicação* $\mathbb{R}$*-linear*

$$D : \mathcal{A}^p(\mathrm{E}) \to \mathcal{A}^{p+1}(\mathrm{E})$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$D(\tau \otimes s) = d\tau \otimes s + (-1)^p \tau \wedge Ds$$

para toda forma $\tau \in \bigwedge^p(\mathrm{M})$ *e toda secção* $s \in \mathcal{A}^p(\mathrm{E})$.

Esta definição concorda com a definição de conexão dada no início desta seção. Além disso, como fizemos antes, basta tomar um aberto trivializante $U \subset \mathrm{M}$, domínio de um sistema de coordenadas de M, e ver a expressão de $D : \mathcal{A}^p(E) \to \mathcal{A}^{p+1}(\mathrm{E})$, tomando secções de $\Gamma(U, \bigwedge^p(\mathrm{M}))$ e $\Gamma(U, \mathrm{E})$. Desta forma fica evidente que D está bem definida.

Vamos agora considerar a aplicação $R^D : \mathcal{A}^0(\mathrm{E}) \to \mathcal{A}^2(\mathrm{E})$ dada por $R^D(s) = D^2 s = D(Ds)$.

O primeiro fato, é que R^D é $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-linear. Na verdade, se $s \in \mathcal{A}^0(\mathrm{E})$ temos

$$R^D(fs) = D(D(fs)) = D(df \otimes s + f\,Ds) = -df \wedge Ds + df \wedge Ds + fD(Ds) = fR^D(s).$$

Logo, R^D é induzida por uma aplicação entre os fibrados E e $\bigwedge^2 \mathrm{M} \otimes \mathrm{E}$, ou em outras palavras, D^2 corresponde a uma secção global Θ do fibrado

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \textstyle\bigwedge^2 \mathrm{M} \otimes \mathrm{E}) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{M} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{M} \otimes (\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{E}),$$

sendo Hom(F,H) o fibrado vetorial definido por

$$(\mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathrm{H}))_x = \mathrm{Hom}(\mathrm{F}_x, \mathrm{H}_x) = \{\varphi : \mathrm{F}_x \to \mathrm{H}_x / \varphi \text{ é linear }\},$$

onde F e H são fibrados vetoriais reais quaisquer.

Para melhor entender isto, vamos considerar uma trivialização local (U, T_U) de E. Como de costume, sendo $s_i(x) = T_U^{-1}(x, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0))$ com $Ds_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \otimes s_j$ temos

$$R^D(s_i) = D\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \otimes s_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \Omega_{ij} \otimes s_j\ ,$$

onde colocamos

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{l=1}^{n} \omega_{il} \wedge \omega_{lj}.$$

Desta maneira, R^D pode ser descrito localmente por uma matriz $n \times n$ $\Omega_U = (\Omega_{ij})$, cujos elementos são 2-formas, de uma maneira mais ou menos semelhante em que

D pode ser descrita localmente pela matriz de 1-formas ω_{ij}. Em notação matricial temos

$$\Omega_U = d\omega_U - \omega_U \wedge \omega_U.$$

Esta equação, como no caso de fibrados principais, é chamada *equação de estrutura de Cartan*. Diferenciando a equação acima e substituindo, obtem-se facilmente

$$d\Omega_U = \omega_U \wedge \Omega_U - \Omega_U \wedge \omega_U,$$

chamada *identidade de Bianchi*.

Se (V, T_V) é outra trivialização local de E, com $U \cap V \neq \emptyset$ e

$$s_i'(x) = T_V^{-1}(x, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0))$$

temos, como anteriormente, $s_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) s_j(x)$. De maneira semelhante à que fizemos para D, obtemos

$$\Omega_V = g\,\Omega_U g^{-1},$$

sendo $g = (g_{ij})$, $\Omega_V = (\Omega_{ij}')$ e $\Omega_U = (\Omega_{ij})$.

Definição 7.10 *Uma* estrutura semi-Riemanniana *em um fibrado vetorial real* E *é uma aplicação diferenciável h, que a cada ponto $x \in$ M associa uma forma bilinear simétrica e não-degenerada $h_x : \mathrm{E}_x \times \mathrm{E}_x \to \mathbb{R}$.*

Dizer que h é diferenciável significa que para todas as secções $s, s' \in \mathcal{A}^0(\mathrm{E})$ a aplicação $h(s, s') : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ é diferenciável.

Definição 7.11 *Seja* E *um fibrado vetorial real munido de uma estrutura semi-Riemanniana h. Uma conexão D, sobre E, é dita ser* compatível com a estrutura semi-riemanniana h *se*

$$d(h(s, s')) = h(Ds, s') + h(s, Ds')$$

para todas as secções $s, s' \in \mathcal{A}^0(\mathrm{E})$.

Vamos especializar para o caso em que $\mathrm{E} = (\mathrm{TM})^*$.

Definição 7.12 *Uma conexão sobre* $(\mathrm{TM})^*$ *é dita* simétrica *(ou sem torsão), se a composta*

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma((\mathrm{TM})^*) & \to & \Gamma((\mathrm{TM})^* \otimes (\mathrm{TM})^*) & \to & \Gamma(\Lambda^2 \mathrm{M}) \\ s & \mapsto & Ds & \mapsto & 2!\, alt(Ds) \end{array}$$

é igual à diferencial exterior d.

Se (U,ξ), com $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ é uma carta de M, tal que U trivializa E, então

$$D(dx^k) = \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\, dx^i \otimes dx^j,$$

e portanto

$$2!\, alt(D(dx^k)) = \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\, dx^i \wedge dx^j.$$

Ora, mas pela definição acima devemos ter então

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = d(dx^k) = 0.$$

Mas isto ocorre somente quando os símbolos Γ^k_{ij} são simétricos nos índices i e j.

Teorema 47 (Lema Fundamental da Geometria Semi-Riemanniana)
Seja (M,g) *uma variedade semi-Riemanniana. Então* (TM)* *possui uma única conexão simétrica que é compatível com a métrica semi-Riemanniana g.* ■

Para a demonstração deste resultado veja [23].

7.2.1 Classes de Chern de um Fibrado Vetorial

Seja E um fibrado vetorial n-dimensional complexo, sobre uma variedade M. Usando o material desnvolvido na seção anterior, podemos facilmente construir as chamadas *classes de Chern* do fibrado E. Estas serão elementos das cohomologias de de Rham H^{2k}(M,$\mathbb{C}$), $0 \leq k \leq n$, onde H^p(M,$\mathbb{C}$) denota a cohomologia feita com p-formas a valores complexos. Esta cohomologia é construída de maneira análoga à real.

Definição 7.13 *Uma função polinomial $p : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$, homogênea de grau k, é dita* invariante *se $p(BAB^{-1}) = p(A)$ para toda $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e toda $B \in GL(n,\mathbb{C})$.*

Os exemplos mais comuns de tais polinômios são os ***polinômios elementares simétricos*** dos autovalores de A, isto é, os polinômios $p^i(A)$ definidos pela relação

$$\det(A - tI) = \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}(A) t^k.$$

Em particular, $p^n(A) = \det(A)$ e $p^1(A) = \mathrm{tr}(A)$.

Retornemos ao caso do fibrado vetorial complexo E. Seja D uma conexão sobre E. Sendo $\{(U_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ um sistema de trivializações para E, sobre cada U_α consideremos ω_α e Ω_α as matrizes de conexão e curvatura da conexão D. Como o produto exterior é comutativo sobre formas de grau par, para qualquer polinômio invariante p de grau

k sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$, a expressão $p(\Omega_\alpha)$ é uma forma bem definida, de grau $2k$ sobre U_α. Logo, como $\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}\,\Omega_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1}$, vemos que $p(\Omega_\alpha) = p(\Omega_\beta)$ em $U_\alpha \cap U_\beta$, visto que $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(n,\mathbb{C})$ para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Assim, $p(\Omega)|_\alpha = p(\Omega_\alpha)$ é uma $2k$-forma globalmente definida sobre M, independentemente das trivializações escolhidas.

Teorema 48 *Para todo polinômio p, invariante de grau k, temos:*

(1) $dp(\Omega) = 0$*;*

(2) A classe de cohomologia $[p(\Omega)] \in H^{2k}(\mathrm{M},\mathbb{C})$ *é independente da conexão escolhida para* E. ■

O teorema acima pode ser reescrito na seguinte forma "Seja Φ a álgebra graduada de polinômios invariantes. Então para todo fibrado vetorial E, n-dimensional complexo, sobre M, existe um homomorfismo de álgebras, bem definido, dado por

$$\begin{array}{rccc} W: & \Phi & \rightarrow & H^*(\mathrm{M},\mathbb{C}) \\ : & p & \mapsto & [p(\Omega)], \end{array}$$

onde Ω_α é a matriz de curvatura de qualquer conexão sobre E". W, assim definido, é chamado *homomorfismo de Weil.*

Sejam agora $\{p^i\}_{i=0}^n$ os polinômios invariantes elementares simétricos, dos autovalores, definidos como acima.

Definição 7.14 *Sejam* E *um fibrado vetorial n-dimensional complexo sobre M, e* Ω *sua curvatura.*

(1) A 2k-forma $p^k\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)$ *é chamada k-*ésima forma de Chern *da curvatura* Ω*;*

(2) A classe de cohomologia $c_k(\mathrm{E}) = \left[p^k\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right] \in H^{2k}(\mathrm{M},\mathbb{C})$ *é chamada* k-ésima classe de Chern *do fibrado vetorial* E.

(3) A classe total de Chern c(E) *é a soma das classes de Chern*

$$c(\mathrm{E}) = \sum_{i\geq 0} c_i(\mathrm{E}) \in H^*(\mathrm{M},\mathbb{C}),$$

onde fazemos $c_0(\mathrm{E}) = 1 \in H^0(\mathrm{M},\mathbb{C})$. ■

Suponha que M seja uma variedade compacta e sem bordo. Nesse caso, podemos definir os seguintes números

$$n_k(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{M}} \alpha_k\ ,$$

onde $k \geq 0$ e α_k é qualquer representante da classe de cohomologia $c_k(\mathrm{E})$. Não é difícil ver que os números $n_k(\mathrm{E})$ estão bem definidos. Com efeito, se α_k' é outro representante da classe de chern $c_k(\mathrm{E})$, temos então $\alpha_k - \alpha'_k = d\beta$, para uma $(2k-1)$-forma β sobre M. Agora, por meio da fórmula de Stokes

$$\int_{\mathrm{M}} \alpha_k - \int_{\mathrm{M}} \alpha'_k = \int_{\mathrm{M}} d\beta = \int_{\partial \mathrm{M}} \beta = 0,$$

mostrando que o número $n_k(\mathrm{E})$ independe do particular representante α_k de $c_k(\mathrm{E})$. Desta maneira, podemos definir o número $n_k(\mathrm{E})$ como a integral da classe de Chern $c_k(\mathrm{E})$, isto é, colocamos

$$n_k(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{M}} c_k(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{M}} \alpha_k \,,$$

com α_k sendo qualquer representante de $c_k(\mathrm{E})$. Os números $n_k(\mathrm{E})$, $k \geq 0$, são chamados *números de Chern* do fibrado vetorial E. Pode-se mostrar ainda um resultado surpreendente, com respeito a natureza desses números.

Teorema 49 *Os números $n_k(\mathrm{E})$, para $k \geq 0$, são inteiros.* ■

As classes e os números de Chern são invariantes topológico-geométricos, da variedade M. Na verdade, essas classes são usadas para se construir os chamados *monopólos magnéticos topológicos*. A idéia é criar uma obstrução na variedade M e, por meio das classes de Chern, "medir" o quanto a esta se "deforma" do modelo original. Além disso, também se procura saber como os novos campos, anteriormente puros, se comportam mediante essa obstrução.

O estudo dos monopolos topológicos é na verdade, uma interpretação da teoria eletromagnética de Maxwell (veja o exemplo da página 89) em um espaço-tempo obstruído topologicamente, sendo o ingrediente principal nesse estudo, algo que seja um invariante topológico e geomético. No caso em questão, as classes de Chern provém tal ingrediente. Estudando-se os monopólos desta maneira, pode-se obter uma quantização, não-canônica, desta teoria. Este tipo de quantização é usualmente chamado *quantização geométrica*.

Para terminar, queremos salientar que as classes de Chern são um tipo de classes de cohomologias, chamadas usualmente de *classes características*. Outros exemplos dessas classes características são as chamadas: *classes de Pontriagyn* e as *classes de Stiefel-Whitney*. Classes características foram primeiramente desenvolvidas para se impor certos tipos de obstruções em variedades, por exemplo, se uma variedade diferenciável admite um campo de vetores globalmente definido que nunca se anule. Este estudo de obstruções deu origem à chamada *Teoria da Obstrução*. Classes características fornecem um meio de se tratar problemas geométricos e topológicos sob um ponto de vista puramente algébrico.

Capítulo 8

A Formulação Matemática das Teorias de Calibre

As teorias de Calibre vem a cada dia ganhando mais força e credibilidade, por parte da comunidade científica. Nos últimos anos, tem sido de grande importância para a física de partículas, estudar tais teorias. Como um exemplo disto, basta citar a unificação das interações fraca e eletromagnética, obtida por Weinberg e Salam, unificação esta que rendeu aos seus descobridores o prêmio Nobel.

De fato, o estudo de teorias de calibre em física de partículas, fornece um meio de se introduzir, de uma maneira bem definida, acoplamentos entre campos de partículas e o potencial de calibre, representando possíveis interações fundamentais entre as partículas elementares.

Nosso objetivo é desenvolver as teorias de calibre usando os conceitos de matemática moderna, tais como fibrados principais, fibrados vetoriais, conexões, etc..., visando uma melhor e mais correta apresentação de tal teoria, tanto do ponto de vista físico quanto matemático.

Uma vez feito isso, temos não somente uma maior possibilidade de evitar alguns "equívocos" matemáticos (comuns em apresentações em textos de física teórica), como também ter uma interpretação da teoria, de um ponto de vista global, sabendo o que é e onde "mora" cada objeto matemático usado pelos físicos.

Teorias de calibre são teorias de campos, e neste sentido, definiremos os conceitos de *lagrangeanas* e formularemos um princípio variacional, que nos permitirá encontrar as equações de campo. Para tanto, como já foi dito, usaremos a formulação e as facilidades que a matemática moderna nos proporciona. De fato, podemos, de uma maneira inteiramente geral, formular as teorias de campo usando esta metodologia.

Desenvolveremos uma maneira uniforme para se calcular os campos de força (ou curvatura) de um potencial de calibre (conexão). A idéia será "imitar" um modelo feito para o eletromagnetismo, na linguagem da teoria de campos.

Os campos de força de calibre obedecem, basicamente, a duas equações. A primeira equação, conhecida como *equação homogênea* de campo (ou identidade de Bianchi) é uma conseqüência da maneira pela qual o campo de forças é definido. A segunda equação de campo é geralmente não-homogênea, devido ao termo chamado *densidade de corrente* do campo de partículas. A equação de campo não homogênea, resulta da imposição que o potencial de calibre obedeça ao princípio de mínima ação para a soma da ação com respeito ao campo de partículas e a chamada ***auto-ação***, dada pelo potencial de calibre.

Dentro dessa concepção, existem basicamente duas maneiras, matematicamente e fisicamente equivalentes, para se formular teorias de calibre.

A primeira, considera os campos de partículas como sendo aplicações de um fibrado principal, sobre o espaço-tempo, em um espaço vetorial que define uma representação para o grupo de estrutura deste fibrado. Estes campos de partículas também levam sobre si a imposição de outras condições para sua definição (serem equivariantes).

A segunda formulação, considera um espaço vetorial que define uma representação para o grupo de estrutura do fibrado principal. Dessa forma, os campos de partículas são definidos como secções do fibrado vetorial, associado ao fibrado principal, pela dada reprasentação do grupo de estrutura.

As duas formulações são equivalentes, porém, a primeira é mais geral, geométrica e fácil de se lidar, visto que um fibrado principal carrega mais estruturas geométricas que seus fibrados vetoriais associados. Portanto, daremos preferência a esta. Quanto à segunda formulação, alguns conceitos são mais facilmente definidos e manuseados que na primeira. No decorrer de nossa exposição discutiremos alguns objetos definidos em fibrados vetoriais associados, e os compararemos com seus equivalentes em fibrados principais.

8.1 Cálculos com Formas Horizontais Equivariantes

Sejam P(M,G) um fibrado principal, V um espaço vetorial e $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$ uma representação do grupo de Lie G.

Definição 8.1 *Uma k-forma a valores vetoriais* $\varphi \in \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *é dita ser* horizontal e equivariante *se esta satisfaz às seguintes condições.*

H1 $\varphi_{pg}\left(dR_g|_p(v_1),\ldots,dR_g|_p(v_k)\right) = \rho(g^{-1})\,\varphi_p(v_1,\ldots,v_k)$, *ou em outras palavras,* $R_g^*\varphi = \rho(g^{-1})\varphi$;

H2 $\varphi_p(v_1,\ldots,v_k) = 0$ *se para algum índice* $i \in \{1,\ldots,k\}$ *se tem* $v_i \in V_p$, *para todo* $p \in \mathrm{P}$ *e para quaisquer* $v_1,\ldots v_k \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$.

Tais formas são ditas horizontais porque anulam vetores verticais (propriedade **H2**) e equivariantes devido ao comportamento tensorial apresentado em **H1**. Abreviadamente chamaremos as formas horizontais equivariantes simplesmente por *formas horizontais*, e denotaremos o conjunto de todas as k-formas horizontais sobre P, a valores em um espaço vetorial V, por $\overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$, notando que $\overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \subset \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$.

O conjunto $\overline{\bigwedge}^0(\mathrm{P};\mathrm{V})$ é muitas vezes denotado por $C(\mathrm{P};\mathrm{V})$, visto que seus elementos são funções diferenciáveis de P em V que satisfazem a propriedade $\varphi(pg) = \rho(g^{-1})\varphi(p)$.

> OBS: *No caso em que* $\mathrm{V} = \widehat{\mathrm{G}}$ *e* $\rho = ad : \mathrm{G} \to GL(\widehat{\mathrm{G}})$, *onde* $g \mapsto ad(g)$ *é a representação adjunta, a curvatura* $\Omega^\omega \in \overline{\bigwedge}^2(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$, *para uma dada conexão* ω *sobre* P(M,G).

Definição 8.2 *Para uma conexão* ω *sobre* P(M,G) *definimos a derivada covariante* $D^\omega : \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \overline{\bigwedge}^{k+1}(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *por* $D^\omega\varphi = (d\varphi)^H$.

Para ver que esta definição realmente faz sentido, note que $D^\omega\varphi$ sempre se anula em vetores verticais. Além disso, se $R_g^*\varphi = \rho(g^{-1})\varphi$, então

$$R_g^*(D^\omega\varphi) = R_g^*\left((d\varphi)^H\right) = (dR_g^*\varphi)^H = [d(\rho(g^{-1})\varphi)]^H = \rho(g^{-1})(d\varphi)^H = \rho(g^{-1})D^\omega\varphi.$$

Embora uma conexão ω tenha a propriedade **H1** com respeito à aplicação adjunta, esta não se anula em vetores verticais, e portanto não pertence a $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$.

A diferença entre duas conexões no entanto, pertence a $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ devido à propriedade **C1** da Definição 7.1 da página 118. Além disso, se $\tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ e ω é uma conexão, é fácil de se ver que $\omega + \tau$ é uma conexão. Isto mostra que se fixamos uma conexão ω temos uma correspondência um a um entre os elementos de $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ e as conexões em P(M,G).

Dada então uma conexão ω e $\tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$, $t \mapsto \omega + t\tau$ é uma curva no espaço das conexões, que passa em ω no ponto $t = 0$ e tem derivada τ. Portanto podemos caracterizar $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ como o "espaço tangente" ao espaço das conexões do fibrado P(M,G) no ponto ω.

Definição 8.3 *Seja* $d\rho : \widehat{\mathrm{G}} \to \widehat{GL(\mathrm{V})} \subset \mathrm{End}(\mathrm{V})$ *o homomorfismo de álgebras de Lie induzido pela representação* $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$. *Dados* $\psi \in \bigwedge^j(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ *e* $\varphi \in \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *definimos um elemento* $\psi \sqcap \varphi \in \bigwedge^{j+k}(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *colocando*

$$\begin{aligned}(\psi \sqcap \varphi)_p(v_1,\ldots,v_{j+k}) &= (\psi_p \sqcap \varphi_p)(v_1,\ldots,v_{j+k}) = \\ &= \frac{1}{j!\,k!}\sum_{\sigma\in S_{j+k}} \mathrm{sinal}\,(\sigma)\left[d\rho(\psi_p(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(j)}))\right]\left(\varphi_p(v_{\sigma(j+1)},\ldots,v_{\sigma(j+k)})\right),\end{aligned}$$

onde $v_1,\ldots,v_{j+k} \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$.

> OBS: *O operador* $\sqcap : \bigwedge^j(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}}) \times \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \bigwedge^{j+k}(\mathrm{P};\mathrm{V})$, *dado pela definição acima, é construído por meio da ação da álgebra de Lie* $\widehat{\mathrm{G}}$ *no*

espaço de representação V. Vamos explicitar um pouco mais a maneira pela qual esta ação é obtida. Dado $A \in \widehat{\mathrm{G}}$, temos pela definição de exponencial $d(\exp t\, d\rho(A))|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = d\rho(A)$. Por outro lado, como $\rho(\exp tA) = \exp t\, d\rho(A)$ encontramos

$$d\rho(A) = d[\rho(\exp tA)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right),$$

que pode ser escrito como $d\rho(A) = \frac{d}{dt}[\rho(\exp tA)]$, interpretando $GL(V)$ como um grupo de matrizes.

Teorema 50 *Seja $\varphi \in \overline{\Lambda}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$. Então temos $D^\omega\varphi = d\varphi + \omega \sqcap \varphi$.*

Demonstração: Para essa demonstração usaremos o conceito de levantamento horizontal da página 120.

Sejam $v_1, \ldots v_{k+1} \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$. Devemos verificar que

$$d\varphi|_p(v_1^H, \ldots, v_{k+1}^H) = d\varphi|_p d(v_1, \ldots, v_{k+1}) + (\omega \sqcap \varphi)_p(v_1, \ldots, v_{k+1}).$$

Se $v_1, \ldots v_{k+1} \in H_p$ então $v_i = v_i^H$ e $\omega_p(v_i) = 0$. Desta forma ambos os lados da equação acima são iguais.

Se dois ou mais dos v_i são verticais então $v_i^H = 0$ para estes tais; além disso, como φ se anula sobre vetores verticais, a equação acima se torna $d\varphi|_p(v_1, \ldots, v_{k+1}) = 0$. Estendendo os dois vetores verticais a campos fundamentais, e o restante a campos quaisquer (isto sempre pode ser feito em uma vizinhança de p adequada) obtemos

$$d\varphi(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} X_i\left(\varphi(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1})\right) + \\ + \sum_{1\le i<j\le k+1} (-1)^{i+j}\varphi\left([X_i, X_j], \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1}\right),$$

em vista do Teorema 31 da página 69.[1]

A primeira soma é zero, uma vez que ao menos um dos X_i é vertical. Como também $[X_i, X_j]$ é fundamental se X_i e X_j o forem, o mesmo raciocínio mostra que a segunda soma também se anula.

O caso restante é quando todos os v_i, exceto um, são horizontais. Nesse caso, sem perda de generalidade, suponhamos que o tal vetor vertical seja v_1. Estendamos $d\pi|_p(v_2), \ldots, d\pi|_p(v_{k+1})$ a campos de vetores sobre M e tomemos seus respectivos levantamentos horizontais $X_2, \ldots, X_{k+1}$ em P, dados pela Proposição 7.1.1 da página 120. Também estendamos v_1 a um campo fundamental X_1 sobre P. Desta

[1] Na verdade este resultado é um corolário de tal teorema. Note no entanto, que mesmo sendo φ uma forma a valores vetoriais, o teorema ainda se aplica. Para melhor visualizar isso, tome uma base em V, expresse φ nela e veja a a ação dos campos X_i em cada termo.

forma, a Proposição 7.1.2 da página 120, nos diz que $[X_1, X_2] = \cdots = [X_1, X_{k+1}] = 0$. Novamente usando a fórmula dada pelo Teorema 31 da página 69, obtemos

$$d\varphi(X_1, \dots, X_{k+1}) = X_1 (\varphi(X_2, \dots, X_{k+1})).$$

Desta forma, o teorema se reduz a provar que

$$X_1 (\varphi(X_2, \dots, X_{k+1})) + d\rho (\omega(X_1)) (\varphi(X_2, \dots, X_{k+1})) = 0.$$

Note que como X_1 é fundamental, $X_1 = A^*$, para algum $A \in \widehat{\mathrm{G}}$. Desta forma, definido $\theta_p(t) = p \exp tA = R_{\exp tA}(p)$ temos $X_1|_p = d\theta_p|_{t=0} \left(\frac{d}{dt}\right)$. Portanto

$$\begin{aligned} X_1 (\varphi(X_2, \dots, X_{k+1}))|_p &= \frac{d}{dt} \left(\varphi_{\theta_p(t)} \left(X_2|_{\theta_p(t)}, \dots, X_{k+1}|_{\theta_p(t)}\right)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\varphi_{p \exp tA} \left(X_2|_{p \exp tA}, \dots, X_{k+1}|_{p \exp tA}\right)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\varphi_{p \exp tA} \left(dR_{\exp tA}|_p \left(X_2|_p\right), \dots, dR_{\exp tA}|_p \left(X_{k+1}|_p\right)\right)\right]\Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

uma vez que $X_2, \dots, X_{k+2}$ são levantamentos horizontais. Então

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[\varphi_{p \exp tA} \left(dR_{\exp tA}|_p \left(X_2|_p\right), \dots, dR_{\exp tA}|_p \left(X_{k+1}|_p\right)\right)\right]\Big|_{t=0} = \\ &\qquad = \frac{d}{dt} \left[\rho(\exp(-tA))\varphi_p \left(X_2|_p, \dots X_{k+1}|_p\right)\right]\Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

visto que φ é equivariante e $(\exp B)^{-1} = \exp(-B)$, para todo $B \in \widehat{\mathrm{G}}$.

Relembrando que $d\rho(A) = \frac{d}{dt}\rho(\exp tA)\Big|_{t=0}$, quando $\rho(\mathrm{G})$ está contido em um grupo de matrizes, finalmente obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\rho(\exp(-tA))\varphi_p \left(X_2|_p, \dots, X_{k+1}|_p\right)\right]\Big|_{t=0} = -d\rho(A) \left(\varphi_p \left(X_2|_p, \dots, X_{k+1}|_p\right)\right).$$

Portanto,

$$X_1 (\varphi(X_2, \dots, X_{k+1}))|_p = -d\rho(A) \left(\varphi_p \left(X_2|_p, \dots, X_{k+1}|_p\right)\right)$$

e o teorema fica estabelecido neste caso também. ■

Corolário 50.a *Se $\rho = ad : \mathrm{G} \to GL(\widehat{\mathrm{G}})$, então $D^\omega\varphi = d\varphi + [\omega, \varphi]$.*

Demonstração: Basta notar que o homomorfismo de álgebras de Lie induzido pela representação adjunta ad, é $Ad : \widehat{\mathrm{G}} \to \widehat{GL(\widehat{\mathrm{G}})}$, onde $Ad(A)(B) = [A, B]$ para todos os elementos $A, B \in \widehat{\mathrm{G}}$. Portanto, $\omega \sqcap \varphi = [\omega, \varphi]$. ■

Suponhamos daqui por diante que (M,h) seja uma variedade semi-Riemanniana munida de um elemento de volume μ, associado a h.

Definição 8.4 *O* suporte projetado *de* $\psi \in C(\mathrm{P},\mathrm{V})$ *é definido como sendo o conjunto*

$$\overline{\{\pi(p) \in \mathrm{M}/\psi(p) \neq 0\}}.$$

Dado $p \in \mathrm{P}$ com $\pi(p) = x$, observemos que a métrica h_x em $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ pode ser transportada para H_p graças ao isomorfismo $d\pi|_p : H_p \to \mathrm{T}_x\mathrm{M}$. Isso dota H_p de uma métrica $\overline{h}_p$, onde

$$\overline{h}_p = h_x \circ d\pi|_p \text{ ou } \overline{h}_p = (d\pi|_p)^* h_x.$$

Da mesma maneira, um elemento de volume $\overline{\mu}$ é induzido em H_p, via $(d\pi|_p)^*$, do elemento de volume μ_x de $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$. Desta forma podemos definir um operador estrela de Hodge $\overline{*} : \bigwedge^k(H_p) \to \bigwedge^{n-k}(H_p)$ ($n = \dim(\mathrm{M})$), onde colocamos

$$\overline{*}[(d\pi|_p)^*\varphi] = (d\pi|_p)^*[*_x\varphi]$$

para toda forma $\varphi \in \bigwedge^k(H_p)$, sendo $*_x : \bigwedge^k(\mathrm{T}_x\mathrm{M}) \to \bigwedge^{n-k}(\mathrm{T}_x\mathrm{M})$ o operador de Hodge no ponto $x \in \mathrm{M}$ definido na Seção 5.7, página 88.

Desejamos na verdade definir um operador estrela de Hodge $\overline{*} : \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \overline{\bigwedge}^{n-k}(\mathrm{P};\mathrm{V})$. Para tal precisamos fazer algumas considerações com respeito aos fibrados associados ao fibrado P(M,G) e da geometria envolvida no ato de se ter uma representação do grupo G.

A especificação do tipo de partículas que serão acopladas com o campo de calibre é feita escolhendo-se uma representação $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$ (sendo G o grupo de estrutura e V um espaço vetorial) por meio da qual obtemos o fibrado associado $\mathrm{P}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{V}$.

Sejam $\varphi \in \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ e $X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$ campos de vetores sobre M com respectivos levantamentos horizontais $\widetilde{X_1},\ldots,\widetilde{X_k}$. Então temos

$$\begin{aligned}\varphi_{pg}(\widetilde{X_1}\big|_{pg},\ldots\widetilde{X_k}\big|_{pg}) &= \varphi_{pg}(dR_g|_p(\widetilde{X_1}\big|_p),\ldots,dR_g|_p(\widetilde{X_k}\big|_p)) = \\ &= \rho(g^{-1})\varphi_p(\widetilde{X_1}\big|_p,\ldots,\widetilde{X_k}\big|_p).\end{aligned}$$

Considere agora a k-forma com coeficientes em $\mathrm{P}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{V}$, dada por

$$\widehat{\varphi}_{\pi(p)}(X_1|_{\pi(p)},\ldots,X_k|_{\pi(p)}) = [p,\varphi_p(\widetilde{X_1}\big|_p,\ldots,\widetilde{X_k}\big|_p)].$$

Note que $\widehat{\varphi}$ está bem definida, visto que

$$\varphi_{pg}(\widetilde{X_1}\big|_{pg},\ldots\widetilde{X_k}\big|_{pg}) = \rho(g^{-1})\varphi_p(\widetilde{X_1}\big|_p,\ldots,\widetilde{X_k}\big|_p).$$

Além disso φ é diferenciável, dado que a aplicação $p \mapsto \varphi_p(\widetilde{X_1}\big|_p,\ldots,\widetilde{X_k}\big|_p)$ é diferenciável.

Desta maneira, dada uma k-forma sobre P, diferenciável, horizontal e equivariante, a valores em V, existe uma k-forma diferenciável sobre M, a valores no fibrado associado $P\times_G V$.

Reciprocamente, dada uma k-forma $\widehat{\varphi}$ a valores em $P\times_G V$, que seja diferenciável, podemos definir uma k-forma $\varphi \in \bigwedge^k(P;V)$ por meio da fórmula abaixo

$$\varphi_p(\widetilde{X_1}\Big|_p,\ldots,\widetilde{X_k}\Big|_p) = p^{-1}\left(\widehat{\varphi}_{\pi(p)}(d\pi|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p),\ldots,d\pi|_p(\widetilde{X_k}\Big|_p))\right),$$

sendo que como na página 106, o ponto p é considerado como a aplicação $v \mapsto [p,v]$. Também da página 106 podemos ver que tal aplicação é um isomorfismo linear entre V e a fibra em $\pi'(p)$, sendo $\pi' : P\times_G V \to M$ a projeção do fibrado vetorial associado.

Da definição de φ notamos que esta é horizontal. Além disso,

$$\begin{aligned}
&\varphi_{pg}(dR_g|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p),\ldots,dR_g|_p(\widetilde{X_k}\Big|_p)) = \\
&\quad = (pg)^{-1}\left(\widehat{\varphi}_{\pi(pg)}(d\pi|_{pg}\circ dR_g|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p),\ldots,d\pi|_{pg}\circ dR_g|_p(\widetilde{X_k}\Big|_p))\right) = \\
&\quad = (pg)^{-1}(\widehat{\varphi}_{\pi(p)}(d\pi|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p),\ldots,d\pi|_p(\widetilde{x_k}|_p))),
\end{aligned}$$

pois $d\pi|_{pg}\circ dR_g|_p = d(\pi\circ R_g)|_p = d\pi_p$.

Note que $(pg)(v) = [pg,v] = [pg,\rho(g^{-1})\rho(g)v] = [p,\rho(g)v] = p(\rho(g)v)$. Portanto temos $p(\rho(g)v) = (pg)(v)$ que implica

$$v = \rho(g^{-1})\,p^{-1}(\widehat{\varphi}_{\pi(p)}(d\pi|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p),\ldots,d\pi|_p(\widetilde{X_k}\Big|_p))).$$

Desta forma obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
&\varphi_{pg}(dR_g|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p),\ldots,dR_g|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p)) = \\
&\quad = \rho(g^{-1})\,p^{-1}\left(\widehat{\varphi}_{\pi(p)}(d\pi_p|_p(\widetilde{X_1}\Big|_p),\ldots,d\pi|_p(\widetilde{X_k}\Big|_p))\right) = \\
&\quad = \rho(g^{-1})\varphi_g(\widetilde{X_1}\Big|_p,\ldots,\widetilde{X_k}\Big|_p)),
\end{aligned}$$

mostrando que $R_g^*\varphi = \rho(g^{-1})\varphi$, sendo portanto φ equivariante. Não é difícil ver que φ é diferenciável, uma vez que $\widehat{\varphi}$ o é.

Um caso especial das considerações feitas acima, é quando $\varphi \in C(P,V)$. Neste caso, φ pode ser identificado com uma secção do fibrado vetorial associado $P\times_G V$. Estas são as duas possíveis definições para campos de partículas, que acarretam os dois desenvolvimentos distintos da formulação das teorias de calibre mencionados anteriormente.

> Obs: *Para todo* k, $0 \le k \le n = \dim(M)$ *existem formas* $\varphi \in \overline{\bigwedge}^k(P;V)$ *bem definidas, pois se* $T : \pi'^{-1}(U) \to U\times V$ *é uma trivialização local para* $P\times_G V$ *e* $\{s_1,\ldots,s_m\}$ *são* m *secções locais linearmente independentes*

em cada ponto de U, vem que uma k-forma $\hat{\varphi}$ sobre U, a valores em $\pi'^{-1}(U)$ se escreve em U como

$$\hat{\varphi}|_U = \hat{\varphi}_1 \otimes s_1 + \cdots + \hat{\varphi}_m \otimes s_m,$$

onde $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_m \in \bigwedge^k(U)$ e $m = \dim(\mathrm{V})$. Então existe uma k-forma $\varphi \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ definida como nas considerações acima.

Podemos finalmente definir um operador $\bar{*}$.

Definição 8.5 *Seja $\varphi \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P}; \mathrm{V})$. Definimos $(\bar{*}\varphi)|_p$ como sendo a única forma em $\overline{\bigwedge}^{n-k}(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ tal que $\bar{*}\varphi|_{H_p} = \bar{*}_p(\varphi|_{H_p})$.*

Obs: *A forma $(\bar{*}\varphi)|_p$ é a única extensão de $\bar{*}_p(\varphi|_p)$ a uma $(n-k)$-forma sobre $\mathrm{T}_p\mathrm{P}$ a valores em V que se anula sobre vetores verticais e é equivariante. A existência de tal forma é garantida pelas considerações anteriores à definição, feitas acima.*

Encontrar, no entanto, a expressão local de $\bar{*}\varphi$ não é muito fácil. Portanto talvez se justifique o uso de fibrados vetoriais associados nesta questão.

Proposição 8.1.1 *Se $\varphi \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ e $\sigma : U \to \mathrm{P}$ é uma secção local , então $\sigma^*(\bar{*}\varphi) = *[\sigma^*(\varphi)]$, onde $* : \bigwedge^k(\mathrm{M}; \mathrm{V}) \to \bigwedge^{n-k}(\mathrm{M}; \mathrm{V})$ é o operador estrela de Hodge definido em M pela sua métrica e seu elemento de volume.*

Demonstração: Se $v \in H_{\sigma(x)}$ temos $[(d\sigma|_x \circ d\pi|_{\sigma(x)})(v)]^H = v$, (onde $d\pi|_{\sigma(x)} : H_{\sigma(x)} \to \mathrm{T}_x\mathrm{M}$), pois

$$d\pi|_{\sigma(x)}[(d\sigma|_x \circ d\pi|_{\sigma(x)})(v)] = (d(\pi \circ \sigma)|_x \circ d\pi|_{\sigma(x)})(v) = d\pi|_{\sigma(x)}(v).$$

Com isso, se $\varphi \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ temos $(\pi^*\sigma^*\varphi)|_{H_p} = \varphi|_{H_p}$. É suficiente mostrar então que $(\pi^*\sigma^*(\bar{*}\varphi))_{H_p} = \pi^*(*\sigma^*\varphi)|_{H_p}$. Mas
$(\pi^*\sigma^*(\bar{*}\varphi))|_{H_p} = (\bar{*}\varphi)|_{H_p} = \bar{*}_p(\varphi|_{H_p}) = \bar{*}_p((\pi^*\sigma^*\varphi)|_{H_p}) = \pi^*(*\sigma^*\varphi)|_{H_p}$,
pelo que acabamos de ver. ∎

Para definirmos uma métrica em $\overline{\bigwedge}^k(\mathrm{T}_p\mathrm{P}; \mathrm{V})$ precisamos ainda supor a existência de um produto interno $\hat{h}$ (não necessariamente positivo definido, mas pelo menos não degenerado) sobre V, para o qual a representação $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$ seja ortogonal, isto é,

$$\rho(\mathrm{G}) \subset O(\mathrm{V}) = \{A \in GL(\mathrm{V}) / \hat{h}(Av, Au) = \hat{h}(v, u)\ \forall u, v \in \mathrm{V}\}.$$

Usando-se a medida de Haar pode-se mostrar que tal $\hat{h}$ sempre existe se G é compacto. Para maiores informações a respeito de medidas de Haar e da construção acima veja [24,26].

Dadas $\varphi, \psi \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ e uma base $\{e_1, \ldots e_m\}$ de V, temos $\varphi = \varphi_1 \otimes e_1 + \cdots + \varphi_m \otimes e_m$ e $\psi = \psi_1 \otimes e_1 + \cdots + \psi_m \otimes e_m$, onde $\varphi_i, \psi_j \in \bigwedge^k(\mathrm{M})$. Isto nos permite a definição abaixo.

Definição 8.6 *A métrica* $(\overline{h}_p\widehat{h}) : \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V}) \times \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$(\overline{h}_p\widehat{h})(\varphi_p, \psi_p) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{h}_p(\varphi_p|_{H_p}, \psi_p|_{H_p})\, \widehat{h}(e_i, e_j).$$

Note que tal métrica está definida somente para $\bigwedge^k(H_p)$, e por isso precisamos tomar as restrições de φ_p e ψ_p e H_p.

Proposição 8.1.2 *Existe uma função bem definida* $(\overline{h}\,\widehat{h}) : \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \times \bigwedge^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$, *dada por* $(\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi,\psi)(x) = (\overline{h}_p\widehat{h})(\varphi_p,\psi_p)$, *onde* $\pi(p) = x \in \mathrm{M}$.

Demonstração: Precisamos mostrar que $(\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi,\psi)(x)$ não depende do particular ponto $p \in \pi^{-1}(x)$ escolhido. Para isso, veja que se $\tau \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ então $\tau_{pg} \circ dR_g|_p = \rho(g^{-1})\tau_p$. Desta forma obtemos $\tau_{pg} = \rho(g^{-1})\tau_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}$, levando a que

$$(\overline{h}_{pg}\widehat{h})(\rho(g^{-1})\varphi_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}, \rho(g^{-1})\psi_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}) = (\overline{h}_p\widehat{h})(\rho(g^{-1})\varphi_p, \rho(g^{-1})\psi_p),$$

uma vez $dR_{g^{-1}}|_{pg} : H_{pg} \to H_p$ é uma isometria, pela própria definição de $\overline{h}_p$. Por outro lado, como supusemos ρ ortogonal em relação a $\widehat{h}$ obtemos finalmente que $(\overline{h}_{pg}\widehat{h})(\varphi_{pg}, \psi_{pg}) = (\overline{h}_p\widehat{h})(\varphi_p,\psi_p)$. Segue que $(\overline{h}\,\widehat{h})$ está bem definida. ■

> OBS: *Em vista dessa proposição, se* $\alpha, \beta \in \bigwedge^k(\mathrm{M};\mathrm{V})$ *existe uma função* $(h\,\widehat{h}) : \bigwedge^k(\mathrm{M};\mathrm{V}) \times \bigwedge^k(\mathrm{M};\mathrm{V}) \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *dada por*
>
> $$(h\,\widehat{h})(\alpha,\beta) = (\overline{h}\,\widehat{h})\left((\pi^*\alpha)|_{\overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})}, (\pi^*\beta)|_{\overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})}\right).$$

Proposição 8.1.3 *Sejam* $\varphi, \psi \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *e* $\sigma : U \to \mathrm{P}$ *uma secção local. Então*

$$(h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, \sigma^*\psi) = (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi,\psi).$$

Demonstração: Da Proposição 8.1.1 da página 144 temos $(\pi^*\sigma^*\varphi)|_{H_p} = \varphi|_{H_p}$. Então

$$(h\,\widehat{h})\Big|_x(\sigma^*\varphi|_x, \sigma^*\psi|_x) = (\overline{h}_p\widehat{h})(\pi^*\sigma^*\varphi|_p, \pi^*\sigma^*\psi|_p) = (\overline{h}_p\widehat{h})(\varphi_p,\psi_p) = (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi,\psi)(x).$$

Portanto $(h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, \sigma^*\psi) = (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi,\psi)$. ■

Definição 8.7 *O* codiferencial covariante $\delta^\omega : \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \overline{\bigwedge}^{k-1}(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *é definido por*

$$\delta^\omega(\varphi) = \text{sinal}\,(h)(-1)^{n(k+1)+1}\overline{*}D^\omega\overline{*}\varphi,$$

onde $\varphi \in \overline{\bigwedge}^k(\mathrm{P} : \mathrm{V})$ *e* $n = \dim(\mathrm{M})$.

Se (M,h) é um espaço-tempo, então $\dim(\mathrm{M}) = 4$ e $\mathrm{sinal}(h) = -1$, ou seja, exigimos que em cada espaço tangente $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ os autovalores de h_x sejam $1, -1, -1, -1$ (ou $-1, 1, 1, 1$ em alguns contextos). Nesse caso obtemos $\delta^\omega\varphi = -(-1)^{4(k+1)+1}\overline{*}D^\omega\overline{*}\varphi = \overline{*}D^\omega\overline{*}\varphi$, onde $\varphi \in \overline{\Lambda}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$.

> OBS: *Se* M *é uma variedade não conexa então* $\mathrm{sinal}(h)$ *pode ser positivo em uma componente conexa e negativo em outra sem que isso altere sua diferenciabilidade. Para evitar essa situação podemos supor duas coisas:*
>
> *(1)* M *é conexa;*
>
> *(2) a função* $\mathrm{sinal}(h)$ *tem o mesmo sinal em cada componente conexa de* M.
>
> *Como a condição (2) é claramente mais fraca, vamos supor daqui por diante que* M *satisfaz esta condição.*

Vamos terminar esta seção provando um resultado de dualidade entre D^ω e δ^ω, tal qual aquele provado no final da Seção 5.7, que nos será muito útil na dedução das equações de Euler-Lagrange para campos de partículas.

Teorema 51 *Sejam* $\varphi \in \overline{\Lambda}^k(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *e* $\psi \in \overline{\Lambda}^{k+1}(\mathrm{P};\mathrm{V})$. *Suponha ainda que* φ *ou* ψ *tem suporte projetado compacto. Então vale*

$$\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega\varphi, \psi)\mu = \int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi, \delta^\omega\psi)\mu,$$

onde μ *é o elemento de volume de* M.

> OBS: *Quando supomos que* φ *ou* ψ *tem suporte projetado compacto, cada integrando possuirá o suporte pelo menos contido nesse compacto. Portanto, realmte faz sentido considerarmos as integrais em toda a variedade* M, *visto que os integrandos se anulam fora de tal compacto.*

Demonstração do Teorema: Sem perda de generalidade vamos supor que φ possui suporte compacto.

Caso 1: Existe uma secção local $\sigma : U \to \mathrm{P}$, tal que o suporte projetado de φ está contido em U. Segue então da Proposição 8.1.3, acima, que

$$\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega\varphi, \psi)\mu = \int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*(D^\omega\varphi), \sigma^*\psi)\mu.$$

O Teorema 50 de página 140 e a preservação do operador $\sqcap$ por meio do pull-back, fornecem $\sigma^*(D^\omega\varphi) = \sigma^*d\varphi + \sigma^*\omega \sqcap \sigma^*\varphi = d\sigma^*\varphi + \sigma^*\omega \sqcap \sigma^*\varphi$. Portanto,

$$\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega\varphi, \psi)\mu = \int_U (h\,\widehat{h})(d\sigma^*\varphi, \psi)\mu + \int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*\omega \sqcap \sigma^*\varphi, \sigma^*\psi)\mu.$$

Como $\sigma^*\varphi \in \bigwedge^k(U;\mathrm{V})$ e $\sigma^*\psi \in \bigwedge^{k+1}(U;\mathrm{V})$, a definição do codiferencial para formas sobre M nos traz $\delta(\sigma^*\psi) = \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk+1} * d * \sigma^*\psi$. Esse fato juntamente com o Teorema 35 da página 89 acarretam

$$\int_U (h\,\widehat{h})(d\sigma^*\varphi, \sigma^*\psi)\mu = \int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, \delta\sigma^*\psi)\mu.$$

Sejam agora $\{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V e $\{e_1, \ldots, e_r\}$ uma base de $\widehat{\mathrm{G}}$. Então coloquemos

$$\begin{aligned} \sigma^*\omega &= \omega^1 \otimes e_1 + \cdots + \omega^m \otimes e_r, \\ \sigma^*\varphi &= \varphi^1 \otimes v_1 + \cdots + \varphi^m \otimes v_m, \\ \sigma^*\psi &= \psi^1 \otimes v_1 + \cdots + \psi^m \otimes v_m, \end{aligned}$$

onde $\omega^i \in \bigwedge^1(U)$, $\varphi^j \in \bigwedge^k(U)$ e $\psi^s \in \bigwedge^{k+1}(U)$, e onde $1 \le i \le r$ e $1 \le j, s \le m$.

Observe que pela definição do operador $\sqcap$ temos

$$\begin{aligned} &(\omega^i \otimes e_i) \sqcap (\varphi^j \otimes v_j)\big|_x(a_1, \ldots, a_{k+1}) = \\ &\quad = \frac{1}{1!\,k!} \sum_{\tau \in S_{k+1}} \mathrm{sinal}(\tau)[d\rho(\omega^i|_x(a_{\tau(1)})e_i)](\varphi^j|_x(a_{\tau(2)}, \ldots, a_{\tau(k+1)})v_j) = \\ &\quad = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_{k+1}} \mathrm{sinal}(\tau)\omega^i|_x(a_{\tau(1)})\varphi^j|_x(a_{\tau(2)}, \ldots a_{\tau(k+1)})[d\rho(e_1)](v_j) = \\ &\quad = (\omega^i \wedge \varphi^j)_x(a_1, \ldots, a_{k+1})[d\rho(e_i)](v_j), \end{aligned}$$

sendo que $x \in U$ e $a_1, \ldots, a_{k+1} \in \mathrm{T}_xU$. Desta forma obtemos

$$(\sigma^*\omega) \sqcap (\sigma^*\varphi) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}(\omega^i \wedge \varphi^j)[d\rho(e_i)](v_j),$$

e portanto

$$(h\,\widehat{h})(\sigma^*\omega \sqcap \sigma^*\varphi.\, \sigma^*\psi) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}(h\,\widehat{h})(\omega^i \wedge \varphi^j[d\rho(e_i)](v_j), \psi^s v_s).$$

Pela definição de $(h\,\widehat{h})$ por meio de $(\overline{h}\,\widehat{h})$, obtemos

$$(h\,\widehat{h})(\omega^i \wedge \varphi^j[d\rho(e_i)](v_j), \psi^s v_s) = \widetilde{h}(\omega^i \wedge \varphi^j, \psi^s)\,\widehat{h}([d\rho(e_i)](v_j), v_s),$$

onde $\widetilde{h}$ é a métrica em $\bigwedge^{k+1}(U)$ dada por $\alpha \wedge *\beta = \widetilde{h}(\alpha, \beta)\mu$, como na página 88 da Seção 5.7.

Como ρ é ortogonal em relação a $\widehat{h}$ por hipótese, temos

$$\widehat{h}(\rho(\exp te_i)v_j, \rho(\exp te_i)v_s) = \widehat{h}(v_j, v_s),$$

e obtemos

$$d\,\widehat{h}(\rho(\exp te_i)v_j, \rho(\exp te_i)v_s)\Big|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = d\,\widehat{h}(v_j, v_s)\Big|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = 0.$$

Ora, mas então

$$
\begin{aligned}
0 = d\,\widehat{h}(\rho(\exp te_i)v_j, \rho(\exp te_i)v_s)\Big|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = & \\
= \; & \widehat{h}(\,d[\rho(\exp te_i)(v_j)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right), v_s) + \widehat{h}(v_j, d[\rho(\exp te_i)(v_s)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right)) = \\
= \; & \widehat{h}([d\rho(e_i)]v_j, v_s) + \widehat{h}(v_j, [d\rho(e_i)](v_s)),
\end{aligned}
$$

e portanto

$$\widehat{h}([d\rho(e_i)]v_j, v_s) = -\widehat{h}(v_j, [d\rho(e_i)](v_s)).$$

Agora, $\widetilde{h}(\omega^i \wedge \varphi^j, \psi^s)\mu = \omega^i \wedge \varphi^j \wedge *\psi^s$. Então

$$
\begin{aligned}
\widetilde{h}(\omega^i \wedge \varphi^j, \psi^s)\mu &= \omega^i \wedge \varphi^j \wedge *\psi^s = (-1)^k \varphi^j \wedge \omega^i \wedge *\psi^s = \\
&= (-1)^k \mathrm{sinal}(h)(-1)^{k(n-k)} \varphi^j \wedge *(*\omega^i \wedge *\psi^s)) = \\
&= \mathrm{sinal}(h)(-1)^{k(n-k)+k} \varphi^j \wedge *(*\omega^i \wedge *\psi^s)).
\end{aligned}
$$

Observe que $(-1)^{k(n-k)+k} = (-1)^{nk}$, implicando que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{h}(\omega^i \wedge \varphi^j, \psi^s)\mu &= \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk} \varphi^j \wedge *(*\omega^i \wedge *\psi^s)) = \\
&= \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk} \widetilde{h}(\varphi^j, *(\omega^i \wedge *\varphi^s))\mu.
\end{aligned}
$$

Unindo isso com o obtido em nosso raciocínio anterior temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{h}(\omega^i \wedge \varphi^j, \psi^s)\,\widehat{h}([d\rho(e_i)]v_j, v_s) = & \\
= \; & \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk} \widetilde{h}(\varphi^j, *(\omega^i \wedge *\varphi^s))\widehat{h}([d\rho(e_i)]v_j, v_s) = \\
= - \; & \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk} \widetilde{h}(\varphi^j, *(\omega^i \wedge *\varphi^s))\widehat{h}(v_j, [d\rho(e_i)]v_s) = \\
= \; & \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk+1}(h\,\widehat{h})(\varphi^j v_j, *(\omega^i \wedge *\psi^s)[d\rho(e_i)]v_s) = \\
= \; & \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk+1}(h\,\widehat{h})(\varphi^j v_j, *((\omega^i e_i) \sqcap *(\psi^s v_s)),
\end{aligned}
$$

e finalmente

$$
\begin{aligned}
(h\,\widehat{h})(\sigma^*\omega \sqcap \sigma^*\varphi, \sigma^*\psi) = & \\
= \; & \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk+1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} (h\,\widehat{h})(\varphi^j v_j, *((\omega^i e_i) \sqcap *(\psi^s v_s)) = \\
= \; & \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk+1}(h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, *(\sigma^*\omega \sqcap *\sigma^*\psi)).
\end{aligned}
$$

Retornando ao início das nossas considerações encontramos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega \varphi, \psi)\mu = \int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*, \delta\sigma^*\psi)\mu + & \\
+\mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk+1} \int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, *(\sigma^*\omega \sqcap *\sigma^*\psi))\mu. &
\end{aligned}
$$

Notemos que $\delta(\sigma^*\varphi) = \mathrm{sinal}\,(h)(-1)^{nk+1} * d * (\sigma^*\psi)$, pois $\sigma^*\psi \in \Lambda^{k+1}(U; \mathrm{V})$. Desta forma obtemos

$$\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega \varphi, \tilde{\psi})\mu = \mathrm{sinal}(h)(-1)^{nk+1} \int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, *d * (\sigma^*\psi) + *(\sigma^*\omega \sqcap *\sigma^*\psi))\mu.$$

Mas $*d*(\sigma^*\psi) + *(\sigma^*\omega \sqcap *\sigma^*\psi) = *(d*(\sigma^*\psi) + \sigma^*\omega \sqcap *\sigma^*\psi)$, e pela pela Proposição 8.1.1 da página 144 temos $\sigma^*(\overline{*}\beta) = *(\sigma^*\beta)$ para toda forma $\beta \in \overline{\bigwedge}^l(\mathrm{P};\mathrm{V})$. Disso vem

$$\begin{aligned} *(d*(\sigma^*\psi) + \sigma^*\omega \sqcap *\sigma^*\psi) &= *(d\sigma^*(\overline{*}\psi) + \sigma^*\omega \sqcap \sigma^*(\overline{*}\psi)) = \\ &= *(\sigma^* d\overline{*}\psi + \sigma^*\omega \sqcap \sigma^*(\overline{*}\psi)) = \\ &= *\sigma^*(d\overline{*}\psi + \omega \sqcap \overline{*}\psi) = \\ &= *\sigma^*(D^\omega \overline{*}\psi) = \\ &= \sigma^*(\overline{*}D^\omega\overline{*}\psi). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega\varphi, \psi)\mu = \\ &= \operatorname{sinal}(h)(-1)^{nk+1}\int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, *d*(\sigma^*\psi) + *(\sigma^*\omega \sqcap *\sigma^*\psi))\mu = \\ &= \operatorname{sinal}(h)(-1)^{nk+1}\int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, \sigma^*(\overline{*}D^\omega\overline{*}\psi))\mu = \\ &= \int_U (h\,\widehat{h})(\sigma^*\varphi, \operatorname{sinal}(h)(-1)^{nk+1}\sigma^*(\overline{*}D^\omega\overline{*}\psi))\mu = \\ &= \int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi, \delta^\omega\psi)\mu, \end{aligned}$$

uma vez que $\psi \in \bigwedge^{k+1}(\mathrm{P};\mathrm{V})$ e $\delta^\omega\psi = \operatorname{sinal}(h)(-1)^{nk+1}\overline{*}D^\omega\overline{*}\psi$. Isto estabelece o Caso 1.

Caso 2: Não existe secção local $\sigma : U \to \mathrm{P}$ tal que o suporte projetado de φ esteja contido em U. Neste caso, denotemos por C o suporte projetado de φ, isto é

$$C = \overline{\{\pi(p) \in \mathrm{M}/\varphi_p \neq 0\}}.$$

Dado $x \in C$, existe um aberto U_x contendo x, tal que $T_{U_x} : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathrm{G}$ é uma trivialização local. Claramente temos $C \subset \bigcup_{x\in C} U_x$. Logo, $\{U_x\}_{x\in C}$ é uma cobertura aberta do compacto C, e portanto possui uma subcobertura finita, digamos $U_1, \ldots, U_l$. Como para cada U_i, $1 \leq i \leq l$, temos a trivialização $T_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathrm{G}$, coloquemos $\sigma_i : U_i \to \mathrm{P}$ como sendo uma secção local associada a T_{U_i}. Como estamos supondo M ao menos paracompacta, seja $\{\chi_i\}_{1\leq i\leq l}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}_{1\leq i\leq l}$, isto é, suporte$(\chi_i) \subset U_i$. Definindo $\widetilde{\chi_i} = \chi_i \circ \pi$, temos $\sum_{i=1}^{l}\widetilde{\chi_i} = 1$, visto que $\sum_{i=1}^{l}\chi_i = 1$. Portanto $\sum_{i=1}^{l}\varphi\widetilde{\chi_i} = \varphi$, e chamando $\varphi_i = \varphi\widetilde{\chi_i}$ vemos que

$$\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega\varphi, \psi)\mu = \sum_{i=1}^{l}\int_{U_i} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^\omega\varphi_i, \psi)\mu.$$

Agora como φ_i tem suporte projetado contido em U_i e temos a secção local σ_i : $U_i \to \mathrm{P}$ usamos o Caso 1 para cada i e obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^{\omega}\varphi, \psi)\mu &= \sum_{i=1}^{l} \int_{U_i} (\overline{h}\,\widehat{h})(D^{\omega}\varphi_i, \psi)\mu = \sum_{i=1}^{l} \int_{U_i} (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi_i, \delta^{\omega}\psi)\mu = \\ &= \int_{U_i} (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi, \delta^{\omega}\psi)\mu,\end{aligned}$$

ficando assim o Caso 2 também estabelecido. ■

Seja $\mathcal{F}^k(\mathrm{P})$ o conjunto das k-formas horizontais equivariantes de P, que tem suoporte projetado compacto. Vamos definir uma forma bilinear $<,>$: $\mathcal{F}^k \times \mathcal{F}^k \to \mathbb{R}$ por

$$< \varphi, \psi >= \int_{\mathrm{M}} (\overline{h}\,\widehat{h})(\varphi, \psi)\mu.$$

Desta forma, o teorema acima estabelece uma dualidade entre D^{ω} e δ^{ω} expressa em termos de $<,>$ por

$$< D^{\omega}\varphi, \psi >=< \varphi, \delta^{\omega}\psi >,$$

para todas as formas $\varphi \in \mathcal{F}^k(\mathrm{P})$ e $\psi \in \mathcal{F}^{k+1}(\mathrm{P})$.

8.2 Campos de Partículas, Transformações de Calibre e Lagrangeanas

Sejam P(M,G) um fibrado principal, V um espaço vetorial e $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$ uma representação do grupo de Lie G.

Definição 8.8 *Chamamos aos elementos de* $C(\mathrm{P};\mathrm{V}) = \overline{\Lambda}^0(\mathrm{P};\mathrm{V})$ campos de partículas.

> OBS: *Sendo* $\varphi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$, *note que* $\varphi(pg) = \rho(g^{-1})\varphi(p)$, *para todo ponto* $p \in \mathrm{P}$ *e* $g \in \mathrm{G}$.

Tendo em mente a Definição 6.8, da página 101, de homomorfismo de fibrados principais, podemos definir um automorfismo de P(M,G).

Definição 8.9 *Um* automorfismo *do fibrado principal* P(M,G) *é um difeomorfismo* $f : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ *tal que* $f(pg) = f(p)g$ *para todos os* $p \in \mathrm{P}$ *e* $g \in \mathrm{G}$.

Como na página 101, este difeomorfismo induz um bem definido difeomorfismo $\overline{f}$: $\mathrm{M} \to \mathrm{M}$, dado por $\overline{f}(\pi(p)) = \pi(f(p))$.

Definição 8.10 *Uma* Transformação de Calibre *do fibrado principal* P(M,G) *é um automorfismo* $f : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ *tal que a aplicação induzida* $\overline{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *é a identidade* 1_{M}, *isto é,* $\pi(f(p)) = \pi(p)$ *para todo* $p \in \mathrm{P}$. *Denotamos por* $GA(\mathrm{P})$ *o conjunto de todas as transformações de calibre em* P.

Não é difícil de se ver que $GA(\mathrm{P})$ é um grupo sob a operação de composição de funções. Na verdade, pode-se introduzir sobre $GA(\mathrm{P})$ uma estrutura semalhante a de grupo de Lie, possibilitando fazer uma identificação de certos objetos de P com alguns de $GA(\mathrm{P})$.

Proposição 8.2.1 *Sejam $f \in GA(\mathrm{P})$ e ω uma 1-forma de conexão sobre* P. *Então $f^*\omega$ é uma 1-forma de conexão.*

Demonstração: Sejam $A \in \widehat{\mathrm{G}}$ e A^* o campo fundamental a este associado. Então

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)(A_p^*) &= \omega_{f(p)}(df|_p(A_p^*)) = \omega_{f(p)}\left(df|_p\left(d(\exp tA)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right)\right)\right) = \\
&= \omega_{f(p)}\left(d(f(p\exp tA))|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right)\right) = \\
&= \omega_{f(p)}\left(d(f(p)\exp tA)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right)\right) = \\
&= \omega_{f(p)}(A_{f(p)}^*) = \\
&= A.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $f \circ R_g = R_g \circ f$ temos $f^* \circ R_g^* = R_g^* \circ f^*$, segue que

$$R_g^*(f^*\omega) = f^*(R_g^*\omega) = f^*(ad(g^{-1})\omega) = ad(g^{-1})f^*\omega.$$

Portanto $f^*\omega$ é uma 1-forma de conexão sobre P, visto que esta satisfaz **C1** e **C2** da Definição 7.1 da página 118. ∎

A definição de transformação de calibre dada acima é equivalente a aquela das teorias de calibre clássicas, podendo-se inclusive definir um conceito de exponencial semelhante à de tal teoria. Para maiores informações veja [8].

Definição 8.11 *O conjunto*

$$\mathrm{J(P,V)} = \{(p,v,\gamma)/p \in \mathrm{P}, v \in \mathrm{V} \;\; e\ \gamma : \mathrm{T}_p\mathrm{P} \to \mathrm{V}\ \textit{é linear}\}$$

é chamado espaço de 1-jatos *de aplicações de* P *em* V.

Não é muito difícil de ver que o espaço J(P,V) é de fato um fibrado vetorial. Primeiramente, note que podemos construir uma bijeção entre J(P,V) e $\bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$ colocando $(p,v,\gamma) \mapsto ((p,\gamma),v)$, tendo em mente que $\bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$ é um fibrado vetorial com fibra $(\mathbb{R}^k)^* \otimes \mathrm{V}$, sendo $k = \dim(\mathrm{P})$. Isto se dá graças ao isomorfismo canônico de espaços vetoriais $\mathrm{End(W,Z)} \simeq \mathrm{W}^* \otimes \mathrm{Z}$. Assim, dotamos J(P,V) de uma estrutura de variedade diferenciável. Agora como $\mathrm{T}_p\mathrm{P}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^k$ por meio da diferencial das cartas de P no ponto p, vem que o conjunto das aplicações lineares de $\mathrm{T}_p\mathrm{P}$ em V é, a menos de um isomorfismo canônico, o conjunto $\mathbb{R}^k \otimes \mathrm{V}$. Além disso, podemos ainda ver o fibrado $\bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$ como $(\mathrm{TP})^* \otimes \mathrm{V}$, uma vez que estes são isomorfos. Desta forma, J(P,V) é isomorfo ao fibrado vetorial $\bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V}) \times \mathrm{V}$.

Definição 8.12 *Uma* Lagrangeana *é uma aplicação diferenciável* $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$L(pg, \rho(g^{-1})v, \rho(g^{-1})\gamma \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}) = L(p, v, \gamma)$$

para todos os $(p, v, \gamma) \in \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V})$ *e* $g \in \mathrm{G}$.

Proposição 8.2.2 *Seja* $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ *uma lagrangeana. Então existe uma função bem definida* $\mathcal{L}_0 : C(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *dada por*

$$[\mathcal{L}_0(\psi)](x) = L(p, \psi(p), d\psi|_p),$$

onde $x \in \mathrm{M}$, $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *e* $p \in \pi^{-1}(x)$.

Demonstração: A fim de que $\mathcal{L}_0$ seja uma função, devemos mostrar que ela está bem definida, isto é, que $L(p, \psi(p), d\psi|_p) = L(pg, \psi(pg), d\psi|_{pg})$.

Como $\psi \circ R_g = \rho(g^{-1})\psi$ vem que

$$d\psi|_{pg} \circ dR_g|_p = \rho(g^{-1})d\psi|_p,$$

ou seja.

$$d\psi|_{pg} = \rho(g^{-1})d\psi|_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}.$$

Então obtemos finalmente

$$L(pg, \psi(pg), d\psi|_{pg}) = L(pg, \rho(g^{-1})\psi(p), \rho(g^{-1})d\psi|_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}) = L(p, \psi(p), d\psi|_p)$$

por L ser uma lagrangeana. ■

Definição 8.13 *Uma lagrangeana* $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ *é dita ser* G-invariante *se para todos os* $g \in \mathrm{G}$ *e* $(p, v, \gamma) \in \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V})$ *tem-se* $L(p, \rho(g)v, \rho(g)\gamma) = L(p, v, \gamma)$.

Na prática, quase todas as nossas lagrangeanas serão G-invariantes. Alguns resultados interessantes que não ocorreriam no caso geral podem ser obtidos fazendo-se tal suposição, no entanto impor que todas as nossas lagrangeanas são G-invariantes é uma condição muito forte, e de certa forma prejudicaria a generalidade de nossos estudos.

> OBS: *O grupo de transformações de calibre* $GA(\mathrm{P})$ age em $C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *via pull-back, isto é,* $(f^*\omega)(p) = \psi(f(p))$, *para* $f \in GA(\mathrm{P})$ e $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$. *No entanto, não é verdade que* $\mathcal{L}_0((f^{-1})^*\psi) = \mathcal{L}_0(\psi)$, *ou seja, que* $\mathcal{L}_0$ *seja invariante por transformações de calibre.*
>
> *Na verdade dada uma lagrangeana* G-invariante $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$, *podemos definir uma função* $\mathcal{L} : C(\mathrm{P};\mathrm{V}) \times \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *por*
>
> $$[\mathcal{L}(\psi, \omega)](x) = L(p, \psi(p), D^\omega\psi|_p),$$
>
> *onde* $\mathcal{C}$ *é o espaço de todas as conexões sobre P,* $p \in \mathrm{P}$, $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *e* $\omega \in \mathcal{C}$. *Podemos então mostrar que* $\mathcal{L}$ *assim definida é de fato uma função calibre-invariante no sentido que* $\mathcal{L}(f^*\psi, f^*\omega) = \mathcal{L}(\psi, \omega)$.

Em vista da observação acima, fica claro que para obtermos invariância por $GA(\mathrm{P})$ precisamos introduzir a derivada covariante no lugar da derivada comum na definição de $\mathcal{L}_0$.

Definição 8.14 *Sejam* $L : \mathrm{J}(\mathrm{P}, \mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ *uma lagrangeana,* $\psi \in C(\mathrm{P}; \mathrm{V})$*,* $\omega \in \mathcal{C}$ *e* $\mathcal{L} : C(\mathrm{P}; \mathrm{V}) \times \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *definida por*

$$[\mathcal{L}(\psi, \omega)](x) = L(p, \psi(p), D^{\omega}\psi|_p),$$

onde $x \in \mathrm{M}$ *e* $\pi(p) = x$*. Chamamos* $\mathcal{L}(\psi, \omega)$ *de* densidade de ação *do par* (ψ, ω).

> OBS: *Na definição acima não estamos supondo que* L *seja* G*-invariante. Daqui para frente, quando uma lagrangeana for* G*-invariante faremos menção explícita.*

Fisicamente espera-se que a densidade de ação seja invariante por transformações de calibre do campo de partículas estudado. Este princípio é chamado de *acoplamento mínimo.*

8.3 O Princípio de Mínima Ação e a Equação de Euler-Lagrange para Campos de Partículas

Nos textos clássicos para se estabelecer as equações de Euler-Lagrange, considera-se primeiro campos de partículas livres (sem potenciais de calibre) e derivam-se as equações de campo. Feito isso, troca-se as as derivadas comuns pela derivada covariante, a fim de se obter as equações para os campos sujeitos à potenciais de calibre. Na verdade primeiramente se supõe que os geradores infinitesimais do grupo de invariância da lagrangeana não são funções do espaço de base e se obtém certas equações. Em seguida se supõe que os geradores infinitesimais dependem do ponto do espaço de base, e para se obter invariância de calibre como na situação anterior, deve-se introduzir grandezas que "cancelem" os termos patológicos. Desta maneira, as grandezas introduzidas dão uma origem obscura ao que lá se chama derivada covariante. De fato se está encontrando uma maneira da lagrangeana ser calibre-invariante sem imaginar se tais estruturas existem em realidade, e se existem o que são, matematicamente falando.

Aqui nós deduzimos diretamente as equações de Euler-Lagrange para campos de partículas sujeitos a um potencial de calibre. Além disso, a variedade de base não é assumida ser o espaço de Minkowski, mas uma variedade orientada qualquer (curva ou não).

Para começar nosso estudo, consideremos uma variedade semi-Riemaniana orientada (M, h), munida de um elemento de volume μ associado a h. Suponhamos que

P(M,G) é um fibrado principal sobre M, V um espaço vetorial e $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$ é uma representação do grupo de Lie G.

Sendo $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ uma lagrangeana e ω uma conexão fixa sobre P, temos definida uma função $\mathcal{L}^\omega : C(\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$, dada por

$$\mathcal{L}^\omega(\psi)(x) = \mathcal{L}(\psi,\omega) = L(p,\psi_p, D^\omega\psi|_p),$$

onde $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$, $x \in \mathrm{M}$, e $p \in \pi^{-1}(x)$ ($\mathcal{L}$ é a densidade de ação da Definição 8.14 da página 153).

Gostaríamos de definir a ação para ψ como sendo

$$\int_{\mathrm{M}} \mathcal{L}^\omega(\psi)\mu,$$

no entanto não há garantias de que esta integral exista se M for não-compacta.[2] Para solucionar esta situação usamos a definição abaixo.

Definição 8.15 *Seja $U \subset \mathrm{M}$ um aberto com fecho compacto. Definimos a* ação *de $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ sobre U como sendo*

$$\boldsymbol{A}_U^\omega(\psi) = \int_U \mathcal{L}^\omega(\psi)\mu \in \mathbb{R}.$$

Tendo em mente a noção de suporte projetado, podemos finalmente formular um princípio variacional para nossa teoria. Para isso temos a definição abaixo.

Definição 8.16 *Dizemos que $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ é* estacionário, *relativamente a $\mathcal{L}^\omega$, se para todo aberto $U \subset \mathrm{M}$ com fecho compacto, e todo $\varphi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ com suporte projetado contido em U temos*

$$d\left[\boldsymbol{A}_U^\omega(\psi + t\varphi)\right]\big|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = 0.$$

OBS: *Note que a aplicação definida por $t \mapsto f(t) = \boldsymbol{A}_U^\omega(\psi + t\varphi)$ é simplesmente uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e portanto podemos substituir a condição da definição acima por*

$$\frac{df}{dt}(0) = 0 \text{ ou } \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{A}_U^\omega(\psi + t\varphi)\right]\Big|_{t=0} = 0,$$

muito embora esta definição possua alguns problemas de ordem lógica dentro do contexto das nossas definições anteriores.

[2] Uma das situações que mais interessa é quando M é o espaço-tempo. Neste caso M deve ser não-compacta, visto que se exclui a existência de linhas tipo-tempo fechadas.

Equivalentemente à definição acima, dizemos que o campo de partículas ψ obedece ao *princípio da mínima ação.*

A exigência de que ψ satisfaça ao princípio da mínima ação nos leva a uma certa equação diferencial para ψ, a equação de Euler-Lagrange. Veremos agora como encontrar tal equação usando métodos inteiramente gerais.

Primeiramente, podemos generalizar a exposição iniciada na página 28 para variedades diferenciáveis de dimensão finita[3].

Seja $L : \mathrm{J(P,V)} \to \mathbb{R}$ uma lagrangeana. Dado $(p, v, \gamma) \in \mathrm{J(P,V)}$, a definição de derivada nos fornece que

$$dL|_{(p,v,\gamma)} : \mathrm{T}_{(p,v,\gamma)}\mathrm{J(P,V)} \to \mathbb{R}.$$

Mas $\mathrm{T}_{(p,v,\gamma)}\mathrm{J(P,V)} \simeq \mathrm{T}_p\mathrm{P}\times\mathrm{V}\times\bigwedge^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V})$, onde fazemos as identificações $\mathrm{T}_v\mathrm{V} \simeq \mathrm{V}$ e $T_\gamma \bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V}) \simeq \bigwedge^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V})$. Assim, vem que $dL|_{(p,v,\gamma)} : \mathrm{T}_p\mathrm{P}\times\mathrm{V}\times\bigwedge^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$. Dado então $u \in \mathrm{V}$, a função composta $t \mapsto (p, v + tu, \gamma) \mapsto L(p, v + tu, \gamma)$ é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Desta forma, podemos definir $D_2L : \mathrm{J(P,V)} \to \mathrm{V}^*$, onde $(p, v, \gamma) \overset{D_2L}{\mapsto} D_2L(p, v, \gamma)$ com $D_2L(p, v, \gamma) : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$, sendo esta última definida por

$$D_2L(p, v, \gamma) \cdot u = dL|_{(p,v,\gamma)}(0, u, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{L(p, v + tu, \gamma) - L(p, v, \gamma)}{t}.$$

De igual modo, podemos definir uma aplicação $D_3L : \mathrm{J(P,V)} \to (\bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V}))^*$, onde $(p, v, \gamma) \overset{D_3L}{\mapsto} D_3L(p, v, \gamma)$ com $D_3L(p, v, \gamma) : \bigwedge^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$, sendo que nesta última colocamos para $\tau \in \bigwedge^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V})$

$$D_3L(p, v, \gamma) \cdot \tau = dL|_{(p,v\gamma)}(0, 0, \tau) = \lim_{t\to 0} \frac{L(p, v, \gamma + t\tau) - L(p, v, \gamma)}{t}.$$

Não podemos no entanto encontrar uma fórmula tão explícita para calcular $D_1L : \mathrm{J(P,V)} \to (\mathrm{TP})^*$, onde $D_1L(p, v, \gamma) : \mathrm{T}_p\mathrm{P} \to \mathbb{R}$. O que podemos fazer é definir para $\xi \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$

$$D_1L(p, v, \gamma) \cdot \xi = dL|_{(p,v,\gamma)}(\xi, 0, 0).$$

Desta forma, claramente temos

$$dL|_{(p,v,\gamma)}(\xi, u, \tau) = D_1L(p, v, \gamma) \cdot \xi + D_2L(p, v, \gamma) \cdot u + D_3L(p, v, \gamma) \cdot \tau.$$

Definição 8.17 *Seja $L : \mathrm{J(P,V)}$ uma lagrangeana. Suponhamos também que a variedade* P *é dotada de uma métrica de Riemann $<,>$. Dado $(p, v, \gamma) \in \mathrm{J(P,V)}$ definimos $\nabla_1 L$, $\nabla_2 L$, $\nabla_3 L$ por*

$$\begin{array}{llll} (1) & <\nabla_1 L(p, v, \gamma), \xi> & = & D_1L(p, v, \gamma) \cdot \xi \textit{ para todo } \xi \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}; \\ (2) & \widehat{h}(\nabla_2 L(p, v, \gamma)\cdot, u) & = & D_2L(p, v, \gamma) \cdot u \textit{ para todo } u \in \mathrm{V}; \\ (3) & (\overline{h}_p\widehat{h})(\nabla_3 L(p, v, \gamma), \tau) & = & D_3L(p, v, \gamma) \cdot \tau, \textit{ para toda } \tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\mathrm{V}). \end{array}$$

[3] Na verdade, pode-se generalizar tal discussão a variedades modeladas sobre um espaço de Hilbert.

OBS: *Note que* $\nabla_1 L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathrm{TP}$, *onde* $(p,v,\gamma) \mapsto \nabla_1 L(p,v,\gamma)$; $\nabla_2 L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$, *onde* $(p,v,\gamma) \mapsto \nabla_2 L(p,v,\gamma)$; $\nabla_3 L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$, *onde* $(p,v,\gamma) \mapsto \nabla_3 L(p,v,\gamma)$.

Em vista da discussão feita na página 28 e do Teorema da Representação de Riez, a definição acima realmente faz sentido, mostrando que os objetos $\nabla_1 L$ e $\nabla_2 L$ estão bem definidos.

No nosso caso, temos uma métrica $(\overline{h}_p \widehat{h})$ somente em H_p, sendo que esta é identicamente nula quando restrita a V_p. Assim, podemos aplicar o teorema da representação de Riez somente para os elementos $\tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V})$, garantindo ainda que $(\overline{h}_p \widehat{h})(\nabla_3 L(p,v,\gamma),\tau) \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V})$. Portanto, aqui vai a ressalva de que $\nabla_3 L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$.

Se a lagrangeana L é diferenciável então é claro que as aplicações $D_1 L$, $D_2 L$ e $D_3 L$ o são. Conseqüentemente, as aplicações $\nabla_1 L$, $\nabla_2 L$ e $\nabla_3 L$ também são diferenciáveis, sendo $\nabla_3 L$ é diferenciável pelo fato de $p \mapsto H_p$ ser uma distribuição diferenciável, ou seja, a aplicação $(D_3 L)^H$ definida por

$$(D_3 L)^H(p,v,\gamma) = D_3 L(p,v,\gamma)|_{\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathrm{V})}$$

é diferenciável.

Relembremos que $\mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \simeq \bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V}) \times \mathrm{V}$, como fibrados vetoriais. Pensando em $\bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$ como um fibrado vetorial, uma 1-forma τ, a valores em V, dá origem a uma secção $f_\tau : \mathrm{P} \to \bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$, definida por $f_\tau(p) = (p,\tau_p)$. Esta secção é claramente diferenciável se τ o é. Dada agora uma aplicação $\gamma : \mathrm{P} \to \mathrm{V}$, definimos a aplicação $f_\tau \times \gamma : \mathrm{P} \to \bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V}) \times \mathrm{V}$ por

$$(f_\tau \times \gamma)(p) = (f_\tau(p),\gamma(p)) = ((p,\tau_p),\gamma(p)).$$

É claro que $f_\tau \times \gamma$ é diferenciável se, e somente se, τ e γ o forem.

Sejam ω uma conexão sobre P e $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$. Então, como ψ é diferenciável $D^\omega\psi \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\mathrm{V}) \subset \bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$ é diferenciável. Logo, a aplicação $f_{D^\omega\psi} \times \psi$, definida por $(f_{D^\omega\psi} \times \psi)(p) = ((p, D^\omega\psi|_p),\psi(p))$ é diferenciável, sendo também diferenciável a aplicação

$$p \in \mathrm{P} \mapsto (p,\psi(p), D^\omega\psi|_p) \in \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}),$$

dado ao fato de $((p,\tau_p),\gamma(p)) \in \bigwedge^1(\mathrm{P};\mathrm{V}) \mapsto (p,\gamma(p),\tau_p)$ ser um isomorfismo de fibrados vetoriais, como já foi dito antes.

Definição 8.18 *Sejam* $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ *uma lagrangeana e* $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$. *Definimos*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \frac{\partial L}{\partial \psi}(p) &&= \nabla_2 L(p,\psi(p), D^\omega\psi|_p); \\ &(2) \quad \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p) &&= \nabla_3 L(p,\psi(p), D^\omega\psi|_p). \end{aligned}$$

OBS: *Os termos* $\dfrac{\partial L}{\partial \psi}$ *e* $\dfrac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}$ *são apenas notações para lembrar as derivadas da lagrangeana clássica, visto que estas não tem o sentido usual de derivadas parciais.*

Pela discussão feita acima, esta definição realmente faz sentido, uma vez que a aplicação $p \mapsto L(p, \psi(p), D^\omega \psi|_p)$ é diferenciável.

Proposição 8.3.1 $\dfrac{\partial L}{\partial \psi} \in C(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ *e* $\dfrac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)} \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P}; \mathrm{V})$.

Demonstração: Na verdade este resultado fica claro das definições e considerações feitas acima. No entanto, vamos demonstrar algebricamente.

Comecemos por $\dfrac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}$. Por definição $\dfrac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}$ se anula sobre vetores verticais. Devemos portanto mostrar somente que

$$\frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(pg) \circ dR_g|_p = \rho(g^{-1}) \frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(p).$$

Para tal, seja $\tau \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P}; \mathrm{V})$. Então

$$\begin{aligned}
(\overline{h}_{pg}\hat{h}) \left(\frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(pg), \tau_{pg} \right) &= \frac{d}{dt} L(pg, \psi(pg), D^\omega \psi|_{pg} + t\tau_{pg})\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt} L(pg, \rho(g^{-1})\psi(p), \rho(g^{-1})(D^\omega \psi|_p + t\tau_p) \circ dR_{g^{-1}}|_{pg})\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt} L(p, \psi(p), D^\omega \psi|_p + t\tau_p)\Big|_{t=0} = \\
&= (\overline{h}_p \hat{h}) \left(\frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(p), \tau_p \right).
\end{aligned}$$

Mas por outro lado temos

$$\begin{aligned}
&(\overline{h}_{pg}\hat{h}) \left(\frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(pg), \tau_{pg} \right) = \\
&= (\overline{h}_{pg}\hat{h}) \left(\rho(g^{-1})\rho(g) \frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(pg) \circ dR_g|_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}, \rho(g^{-1})\tau_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg} \right) = \\
&= (\overline{h}_p \hat{h}) \left(\rho(g) \frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(pg) \circ dR_g|_p, \tau_p \right),
\end{aligned}$$

pela Proposição 8.1.2 da página 145. Portanto

$$(\overline{h}_p \hat{h}) \left(\rho(g) \frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(pg) \circ dR_g|_p, \tau_p \right) = (\overline{h}_p \hat{h}) \left(\frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(p), \tau_p \right).$$

Uma vez que a igualdade acima vale para todo $\tau \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P}; \mathrm{V})$, a não degenerescência de $(\overline{h}_p \hat{h})$ sobre $\overline{\Lambda}^1(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ fornece o resultado procurado, demonstrando nossa afirmação.

Para $\frac{\partial L}{\partial \psi}$, devemos mostrar apenas que

$$\frac{\partial L}{\partial \psi}(pg) = \rho(g^{-1})\frac{\partial L}{\partial \psi}(p).$$

Como supomos ρ ser ortogonal a $\widehat{h}$, vem que

$$\widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}(pg), \rho(g^{-1})u\right) = \widehat{h}\left(\rho(g^{-1})\rho(g)\frac{\partial L}{\partial \psi}(pg), \rho(g^{-1})u\right) = \widehat{h}\left(\rho(p)\frac{\partial L}{\partial \psi}(pg), u\right).$$

Prosseguindo temos

$$\begin{aligned}
\widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}(pg), \rho(g^{-1})u\right) &= \frac{d}{dt} L(pg, \psi(pg) + t\rho(g^{-1})u, D^{\omega}\psi|_{pg})\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt} L(pg, \rho(g^{-1})(\psi(p) + tu), \rho(g^{-1}) D^{\omega}\psi|_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg})\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt} L(p, \psi(p) + tu, D^{\omega}\psi|_p)\Big|_{t=0} = \\
&= \widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}(p), u\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\widehat{h}\left(\rho(g)\frac{\partial L}{\partial \psi}(pg), u\right) = \widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}(p), u\right).$$

Uma vez que a igualdade acima vale para todo $u \in$ V, a não degenerescência de $\widehat{h}$ demonstra totalmente nossa afirmação. ■

Lema 8.3.1 *Sejam* L : J(P, V) $\to \mathbb{R}$ *uma lagrangeana,* ω *uma conexão sobre* P, $\psi, \tau \in C$(P; V) *e* $U \subset$ M *um aberto com fecho compacto. Supomos que* φ *tem suporte projetado contido em* U*. Então vale*

$$\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{L}^{\omega}(\psi + t\tau)\mu\Big|_{t=0} = \int_U \widehat{h}\left(\delta^{\omega}\frac{\partial L}{\partial(D^{\omega}\psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \tau\right)\mu.$$

> Obs: *Primeiramente note que não podemos colocar a integral do lado esquerdo da igualdade sobre toda a variedade* M*, uma vez que seu integrando pode bem ter fecho não compacto. Portanto, usamos o Teorema 51 da página 146, com o aberto de fecho compacto* U *fazendo o papel de* M*. De fato, se colocamos as integrais sobre toda a variedade* M*, a regra de Leibniz pode não valer, uma vez que a integral da esquerda pode não existir. Além disso, como* $\int_U \mathcal{L}^{\omega}(\psi + t\tau)\mu$ *é uma função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$*, estamos fazendo a identificação* $\mathbb{R} \simeq T_0\mathbb{R}$*. Ainda mais, como* $[\mathcal{L}^{\omega}(\gamma)](\pi(p)) = L(p, \gamma(p), D^{\omega}\gamma|_p)$*, onde* $\gamma \in C$(P; V)*, é diferenciável, vale a regra de Leibniz de comutação de* $\frac{d}{dt}$ *com* $\int_U$*. Na verdade,*
>
> $$\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{L}^{\omega}(\psi + t\tau)\mu\Big|_{t=0} = \int_U \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{\omega}(\psi + t\tau)|_{t=0}\mu,$$
>
> *visto que* $t \mapsto \mathcal{L}^{\omega}(\psi + t\tau)$ *é uma função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathcal{F}$(M).

Demonstração do Lema. Temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}^\omega(\psi+t\tau)\right](\pi(p))\big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}L(p,\psi(p)+t\tau(p),\, D^\omega\psi|_p + t\,D^\omega\tau|_p)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}L(p,\psi(p)+t\tau(p),\, D^\omega\psi|_p)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}L(p,\psi(p),\, D^\omega\psi|_p + t\,D^\omega\tau|_p)\Big|_{t=0} = \\ &= \widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi}(p),\tau_p\right) + (\overline{h}_p\widehat{h})\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p),\, D^\omega\tau|_p\right).\end{aligned}$$

Então

$$\int_U \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}^\omega(\psi+t\tau)\right](\pi(p))\big|_{t=0} = \int_U \widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi},\tau\right)\mu + \int_U (\overline{h}\,\widehat{h})\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}, D^\omega\tau\right)\mu.$$

Mas Pelo Teorema 51 da página 146 vale

$$\int_U (\overline{h}\,\widehat{h})\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}, D^\omega\tau\right)\mu = \int_U \widehat{h}\left(\delta^\omega\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)},\tau\right)\mu,$$

visto que τ e $\dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}$ são elementos de $C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ e $(\overline{h}\,\widehat{h}) = \widehat{h}$ sobre tais elementos. Assim temos

$$\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{L}^\omega(\psi+t\tau)\mu\Big|_{t=0} = \int_U \widehat{h}\left(\delta^\omega\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \frac{\partial L}{\partial\psi},\tau\right)\mu,$$

provando nossa afirmação. ■

Para finalizar esta seção, como não poderia deixar de ser, demonstramos finalmente a validade e a formulação da equação de Euler-Lagrange em desse contexto.

Teorema 52 (Equação de Euler-Lagrange) *Sejam $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ uma lagrangeana e ω uma conexão fixa sobre $\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G})$. Então, um campo de partículas $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ é estacionário relativamente a L e ω se, e somente se, vale a equação de Euler-Lagrange*

$$\delta^\omega\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0.$$

Demonstração: Sejam $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ uma função com suporte compacto, K seu suporte, μ o elemento de volume de M e $\{(U_i,\xi_i)\}$ um atlas orientado de M, relativamente ao elemento de volume μ. Como $\{U_i\}$ é uma cobertura para K, este possui uma subcobertura finita, digamos $U_1,\ldots,U_m$. Seja então $\{\chi_i\}_{i=1}^m$ uma partição da unidade subordinada a tal cobertura.

A definição de integral nos dá que

$$\int_{\mathrm{M}} f\,\mu = \sum_{i=1}^m \int_{\xi_i(U_i)} (\xi_i^{-1})^*(\chi_i\, f\,\mu),$$

pois a integral independe do particular atlas orientado e da partição da unidade escolhidos. Aqui $\xi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, $n = \dim(\mathrm{M})$.

Assim sejam K um compacto qualquer de M e $f : \mathrm{P} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com suporte projetado contido em K. Além disso, exigimos que f seja constante ao longo de fibras, isto é, $f(pg) = f(p)$ para todo $p \in \mathrm{P}$ e $g \in \mathrm{G}$, e que $f(q) > 0$ para um determinado $q \in \mathrm{P}$ com $\pi(q) \in K$.

Se $f(q) > 0$, por continuidade f é positiva em uma aberto U, $q \in U$, tal que $\pi(U) \subset K$ (pelo fato de f possuir suporte projetado contido em K). Se ψ é estacionário, a proposição anterior nos fornece

$$\int_{\mathrm{M}} \widehat{h}\left(\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \frac{\partial L}{\partial\psi}, f\tau\right)\mu = 0,$$

para todo $\tau \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$. Mas se isso acontece o fato de ψ ser estacionário juntamente com a discussão acima, a respeito da definição de integral, nos fornecem que

$$\widehat{h}\left(\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \frac{\partial L}{\partial\psi}, f\tau\right) = 0,$$

para todo $\tau \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ e $p \in \mathrm{P}$, com $\pi(p) \in K$. Em particular, para o ponto q temos

$$\widehat{h}\left(\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}\bigg|_q + \frac{\partial L}{\partial\psi}(q), f(q)\tau_q\right) = 0,$$

para todo $\tau \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$. Como $\widehat{h}$ é não degenerada, ρ é ortogonal com respeito a $\widehat{h}$ e $f(q) > 0$ obtemos

$$\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}\bigg|_q + \frac{\partial L}{\partial\psi}(q) = 0.$$

Ora, mas para todo $q \in \mathrm{P}$ existem $K \subset \mathrm{M}$ compacto e $f : \mathrm{P} \to \mathbb{R}$ diferenciável, constante ao longo de fibras e com suporte projetado contido em K, tais que $\pi(q) \in K$ e $f(q) > 0$. Portanto temos

$$\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0$$

se ψ for estacionário. A recíproca segue trivialmente da última proposição. ∎

> Obs: *Dado $x \in \mathrm{M}$ seja (ξ, U) uma carta em x. Como $\xi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola $B_\varepsilon(\xi(x)) \subset \xi(U)$. Tomando então $\widetilde{K} = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi(x))}$ é fácil construir $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que o suporte de g esteja contido em $\widetilde{K}$ e $g(\xi(x)) > 0$. Definindo-se então $K = \xi^{-1}(\widetilde{K})$ (que é compacto em M por ξ^{-1} ser contínua) e $\widetilde{f} = g \circ \xi$, temos $\widetilde{f}(x) > 0$ e o suporte se $\widetilde{f}$ contido em K. Para levantar $\widetilde{f}$ a uma função em P, definimos $f = \widetilde{f} \circ \pi$. É claro que f é constante ao longo de fibras e possui suporte projetado contido em K.*
>
> *Dado então $q \in \mathrm{P}$, fazemos a construção acima com $x = \pi(q)$ e obtemos $f(q) > 0$ e todas as propriedades necessárias para a demonstração do último teorema.*

8.4 O Campo de Klein-Gordon e a Eletrodinâmica de Spin zero

Dedicamos esta seção à análise de dois exemplos importantes: O campo de Klein-Gordon livre e o acoplado ao campo eletromagnético. Para a discussão destes dois exemplos usaremos os métodos matemáticos desenvolvidos até aqui. Esta será uma boa oportunidade para se visualizar sua força.

1. O Campo de Klein-Gordon

Seja (M,h) um espaço-tempo. Considere um fibrado principal P(M,G), onde $\mathrm{G} = \mathbb{R} - \{0\}$ (grupo multiplicativo dos reais) e $\mathrm{P} = \mathrm{M} \times \mathrm{G}$, sendo $\pi : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ dada por $\pi(x,a) = x$, e a ação de G em P por $(x,a) \cdot b = (x,ab)$, $x \in \mathrm{M}$ e $a,b \in \mathrm{G}$. Notando que G é abeliano, e que sua álgebra de Lie é $\mathbb{R}$, vem que $ad(a) = 1_{\mathbb{R}}$ para todo $a \in \mathrm{G}$, visto que $i_a(b) = a\,b\,a^{-1} = b$, e $ad(a) = di_a$.

Neste fibrado tomamos a conexão canônica, definida como segue. Sendo $p = (x,a)$ e $v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$, temos $v = (u,w)$, onde $u \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ e $w \in \mathrm{T}_g\mathrm{G}$, visto que $\mathrm{T}_p\mathrm{P} = \mathrm{T}_x\mathrm{M} \times \mathrm{T}_g\mathrm{G}$. Assim, colocamos

$$\omega_p(v) = d\widehat{R}_{a^{-1}}\Big|_a(w),$$

sendo que $d\widehat{R}_{a^{-1}}\Big|_a(w) \in \widehat{\mathrm{G}}$. Aqui estamos denotando a translação à direita em G pelo elemento $b \in \mathrm{G}$ por $\widehat{R}_b$, para não confundir com a translação à direita em P, denotada por R_a (note que $R_a(x,b) = (x, \widehat{R_a}(b))$).

É claro que ω é diferenciável. Para ver que ω é de fato uma conexão observe que

$$\begin{aligned}
\omega_{pb}(dR_b|_p(v)) &= d\widehat{R}_{a^{-1}b^{-1}}\Big|_{ab}(d\widehat{R}_b\Big|_a(w)) = d(\widehat{R}_{a^{-1}b^{-1}} \circ \widehat{R}_b)\Big|_a(w) = \\
&= d\widehat{R}_{a^{-1}}\Big|_a(w) = \omega_p(v) \\
&= ad(b^{-1})\omega_p(v),
\end{aligned}$$

visto que $ad(b^{-1}) = 1_{\mathbb{R}}$. Agora se $A \in \widehat{\mathrm{G}}$ e $\widehat{A}$ é o campo invariante à esquerda em G, tal que $\widehat{A}_e = A$, temos $\exp tA$ sendo o grupo a 1-parâmetro gerado por $\widehat{A}$. Então se $p \in \mathrm{P}$, $p = (x,a)$, o campo fundamental em P gerado por A é dado por $A^*_p = d(p\exp tA)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right)$. Assim temos

$$A^*_p = d(x, a\exp tA)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = (0, \widehat{A}_a),$$

uma vez que a coordenada x em $(x, a\exp tA)$ é uma constante em relação à variável t, sendo portanto seu diferencial zero. Então

$$\begin{aligned}
\omega_p(A_p^*) &= d\widehat{R}_{a^{-1}}\Big|_a(\widehat{A}_a) = d\widehat{R}_{a^{-1}}\Big|_a \circ d(a\exp tA)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= d(a(\exp tA))a^{-1}|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= d(\exp tA)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= A,
\end{aligned}$$

visto que G é abeliano, produzindo assim $a(\exp tA)a^{-1} = \exp tA$. Deste modo, estabelecemos que ω é de fato uma 1-forma de conexão em P.

Consideremos agora campos de partículas $\psi \in C(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$, onde tomamos a representação adjunta $ad : \mathrm{G} \to GL(\widehat{\mathrm{G}})$ para definir a operação $\psi(pa) = ad(a^{-1})\psi(p)$, de tais campos. Ora, mas se $p = (x, a)$ temos $\psi((x, a)) = \psi((x, 1)\cdot a) = \psi((x, 1))$, visto que $ad(a^{-1}) = 1_{\mathbb{R}}$. Desta forma notamos que ψ não depende de G.

Definimos uma lagrangeana $L : \mathrm{J}(\mathrm{P},\widehat{\mathrm{G}}) \to \mathbb{R}$ por

$$L(p, a, \gamma) = \frac{1}{2}\overline{h}_p(\gamma^H, \gamma^H) - \frac{1}{2}m^2a^2,$$

onde $\overline{h}_p$ é, como de costume, a métrica induzida em $\overline{\Lambda}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P})$ por h.

Em verdade, devemos mostrar que L é uma lagrangeana, ou seja, que

$$L(pg, ad(g^{-1})a, ad(g^{-1})\tau \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}) = L(p, a, \tau)$$

para todo ponto $(p, a, \tau) \in \mathrm{J}(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$. Dado $p \in \mathrm{P}$, $p = (x, a)$, notamos que $H_p = \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ e $V_p = \mathrm{T}_a\mathrm{G}$. Assim, se $v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$, $v = (u, w)$ temos

$$\tau^H(v) = \tau(v^H) = \tau(u, 0).$$

Note ainda que pela construção de $\overline{h}_p$, $dR_g|_p$ é uma isometria dessa métrica, implicando que

$$\overline{h}_{pb}(\alpha \circ dR_{b^{-1}}|_{pb}, \beta \circ dR_{b^{-1}}|_{pb}) = \overline{h}_p(\alpha, \beta),$$

para todos os $\alpha, \beta \in \overline{\Lambda}^k(\mathrm{T}_p\mathrm{P})$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&L(pg, ad(g^{-1})a, ad(g^{-1})\tau \circ dR_{b^{-1}}|_{pb}) = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\overline{h}_{pg}\left((\tau \circ dR_{b^{-1}}|_{pb})^H, (\tau \circ dR_{b^{-1}}|_{pb})^H)\right) - \frac{1}{2}m^2a^2 = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\overline{h}_p(\tau^H, \tau^H) - m^2a^2 = L(p, a, \tau).
\end{aligned}$$

Como L é claramente diferenciável, vem que esta é de fato uma lagrangeana.

Dado $\alpha \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P})$ temos

$$\begin{aligned}
\overline{h}_p(\nabla_3 L(p,a,\tau),\alpha) &= \frac{d}{dt}L(p,a,\tau+t\alpha)|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{h}_p(\tau^H+t\alpha^H)-\frac{1}{2}m^2a^2\right)\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\overline{h}_p(\tau^H,\tau^H)+2\overline{h}_p(\tau^H,\alpha^H)+t^2\overline{h}_p(\alpha^H,\alpha^H)\right)\Big|_{t=0} = \\
&= \overline{h}_p(\tau^H,\alpha^H).
\end{aligned}$$

Portanto, como $\overline{h}_p$ é não-degenerada em $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P})$ encontramos

$$\nabla_3 L(p,a,\tau) = \tau^H.$$

Visto que em $\widehat{\mathrm{G}} = \mathbb{R}$ estamos usando o produto interno $\widehat{h}(a,b) = ab$ (claramente ad é ortogonal em relação a $\widehat{h}$) vem que

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\nabla_2 L(p,a,\tau),b) &= \frac{d}{dt}L(p,a+tb,\tau)|_{t=0} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\overline{h}_p(\tau^H,\tau^H)-m^2(a+tb)^2)\Big|_{t=0} = \\
&= \widehat{h}(-m^2a,b).
\end{aligned}$$

Portanto, como $\widehat{h}$ é não-degenerada obtemos

$$\nabla_2 L(p,a,\tau) = -m^2a.$$

Dado então $\psi \in C(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$, as definições de $\dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p)$ e $\dfrac{\partial L}{\partial\psi}(p)$ fornecem

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} = -m^2\psi \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p) = D^\omega\psi.$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange $\delta^\omega\dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \dfrac{\partial L}{\partial\psi} = 0$ para esse caso é

$$\delta^\omega D^\omega\psi - m^2\psi = 0.$$

Do ponto de vista matemático esta equação é perfeita, porém os físicos estão acostumados a trabalhar com os campos sendo aplicações com domínio em M. Para solucionar este problema tomamos o pull-back de ψ por uma secção local $\sigma : U \to \mathrm{P}$, $U \subset \mathrm{M}$, (neste caso σ pode ser global, bastando tomar $\sigma(x) = (x,1)$, por exemplo). Antes de prosseguir, note que como M é um espaço-tempo $\dim(\mathrm{M}) = 4$, e portanto $\delta^\omega = \overline{*}D^\omega\overline{*}$ (pois $\mathrm{sinal}(h) = -1$ por (M,h) ser lorentziana). Dados $A \in \widehat{\mathrm{G}}$ e $a \in \mathbb{R}$ temos

$$[d\,ad(A)](a) = d\left([ad(\exp tA)](a)\right)|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = 0,$$

visto que $ad(\exp tA) = 1_{\mathbb{R}}$. Desta forma obtemos que

$$(\omega \sqcap \psi)_p(v) = [d\,ad(\omega_p(v))](\psi(p)) = 0,$$

para todo $p \in \mathrm{P}$. Segue então que $\omega \sqcap \psi = 0$. Como pelo Teorema 50 da página 140 temos $D^\omega \psi = d\psi + \omega \sqcap \psi$, concluímos que $D^\omega \psi = d\psi$. Desta forma, a equação $\delta^\omega D^\omega \psi - m^2 \psi = 0$ se torna

$$\overline{*}d\overline{*}d\psi - m^2\psi = 0.$$

Tomando-se então o pull-back desta equação pela secção local σ e fazendo uso da Proposição 8.1.1 da página 144 encontramos

$$*d * d(\sigma^* \psi) - m^2(\sigma^* \psi) = 0,$$

onde tanto o operador estrela de Hodge quanto d são agora em relação às formas em M. Portanto, chamando $\varphi = \sigma^* \psi$ temos $*d * d\varphi - m^2\varphi = 0$. Lembrando que como M é um espaço-tempo, vale $\delta = *d*$ e $\Box^2\varphi = -(d\delta\varphi + \delta d\varphi) = -\delta d\varphi$, uma vez que $\varphi \in \bigwedge^0(\mathrm{M})$ acarretando $\delta\varphi = 0$. Assim, a equação $*d * d\varphi - m^2\varphi = 0$ se escreve como

$$\Box^2\varphi + m^2\varphi = 0,$$

que é a *equação de Klein-Gordon.*

Tomando a mesma lagrangeana, somente que agora colocamos $\mathrm{P}(\mathrm{M}, \mathbb{R} - \{0\})$ sendo um fibrado não-trivial, com ω uma conexão em P não mais tão trivial quanto a última, obtemos a generalização natural da equação acima.

Usando a representação adjunta $ad : \mathrm{G} \to GL(\widehat{\mathrm{G}})$ e mantendo $\widehat{h}$ como antes, obtemos que

$$L(p, a, \tau) = \frac{1}{2}\overline{h}_p(\tau^H, \tau^H) - \frac{1}{2}m^2 a^2$$

é novamente uma lagrangeana. Também mantendo $\widehat{h}$ como antes concluímos que

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -m^2\psi \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial L}{\partial(D^\omega \psi)}(p) = D^\omega \psi.$$

Então a equação de Euler-Lagrange fornece

$$\delta^\omega D^\omega \psi - m^2\psi = 0,$$

somente que agora ω não é necessariamente trivial, nem tampouco P. Por isso o pull-back desta equação por uma secção $\sigma : U \to \mathrm{P}$, $U \subset \mathrm{M}$, vale apenas em U, e não em toda a variedade M. No entanto, como existem secções locais $\sigma_i : U_i \to \mathrm{P}$, tais que $\bigcup_i U_i = \mathrm{M}$, podemos tomar o pull-back para cada i, e teremos por fim que tal equação é válida para toda a variedade M, tendo a mesma forma em cada aberto U_i. Assim, se $\sigma : U \to \mathrm{P}$ é uma secção local qualquer, vamos ver a forma de $\delta^\omega D^\omega \psi - m^2\psi = 0$ no aberto U. Como ainda temos $ad(a) = 1_{\mathbb{R}}$ para todo $a \in \mathrm{G}$, temos também $d\,ad(A) = 0$ para todo $A \in \widehat{\mathrm{G}}$. Assim, novamente $d\,ad(\omega_p(v)) = 0$ para todos os $p \in \mathrm{P}$ e $v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$. Segue disso que $D^\omega \psi = d\psi$, reduzindo como antes a equação de Klein-Gordon em P a

$$\Box^2\varphi + m^2\varphi = 0,$$

em $U \subset$ M, sendo $\varphi = \sigma^*\psi$. Isto mostra que de certa forma, o campo ψ não interage com o potencial de calibre ω, seja ele qual for. Este caso mais geral é então idêntico ao anterior, e a equação de Klein-Gordon em interação com um campo de calibre é a mesma.

> OBS: *Note que a não interação do campo de Klein-Gordon com o potencial de calibre se deve, neste caso, ao fato de* G *ser abeliano, e da representação adjunta ser trivial. Aqui, a geometria da situação impõe a forma da equação de campo.*

2. O Campo de Klein-Gordon Acoplado ao Campo Eletromagnético

Seja P(M,G) um fibrado principal sobre um espaço-tempo M, com grupo de estrutura G $= U(1) = \{e^{i\theta}/\theta \in \mathbb{R}\}$. Sejam também V $= \mathbb{C}$ (pensado como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) e $\rho : U(1) \to GL(\mathbb{C})$ dada por $\rho(e^{i\theta})\,z = e^{i\theta}\,z$ (multiplicação complexa). Como $\widehat{U(1)} = \{i\,\theta/\theta \in \mathbb{R}\}$, temos $[d\rho(i\,\theta)](z) = i\theta\,z$.

Seja $\widehat{h}$ a métrica em $\mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{h}(z,w) = \frac{1}{2}(z\overline{w} + w\overline{z})$$

(este é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$). Veja que $\widehat{h} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Seja ω uma conexão em P, que supomos fixa. Da métrica h em M, induzimos uma métrica $\overline{h}_p$ nos espaços horizontais H_p, como discutido na página 142. Portanto, definimos a lagrangeana $L :$ J(P,$\mathbb{C}$) $\to \mathbb{R}$ por

$$L(p,z,\tau) = \frac{1}{2}(\overline{h}_p\widehat{h})(\tau^H,\tau^H) - \frac{1}{2}m^2\widehat{h}(z,z).$$

Como no exemplo anterior, é bastante fácil de se ver que L é uma lagrangeana.

Para qualquer $\alpha \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathbb{C})$, vale

$$\begin{aligned}(\overline{h}_p\widehat{h})(\nabla_3 L(p,z,\tau),\alpha) &= \frac{d}{dt}L(p,z,\tau+t\alpha)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((\overline{h}_p\widehat{h})(\tau^H + t\alpha^H, \tau^H + t\alpha^H) - m^2\widehat{h}(z,z)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= (\overline{h}_p\widehat{h})(\tau^H,\alpha).\end{aligned}$$

Também para todo $w \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\nabla_2 L(p,z,\tau),w) &= \frac{d}{dt}L(p,z+tw,\tau)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((\overline{h}_p\widehat{h})(\tau^H,\tau^H) - m^2\widehat{h}(z+tw,z+tw)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \widehat{h}(-m^2 z, w).\end{aligned}$$

Portanto, das não degenerescências de $(\overline{h}_p \hat{h})$ e $\hat{h}$ sobre $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P};\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}$ respectivamente, obtemos que

$$\nabla_2 L(p,v,\tau) = -m^2 z \qquad \text{e} \qquad \nabla_3(p,v,\tau) = \tau^H,$$

que para um campo de partículas $\psi \in C(\mathrm{P};\mathbb{C})$ provê

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -m^2\psi \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} = D^\omega\psi.$$

Desta forma, a equação de Euler-Lagrange $\delta^\omega \dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \dfrac{\partial L}{\partial\psi} = 0$ é como antes

$$\delta^\omega D^\omega \psi - m^2\psi = 0.$$

Para escrever esta equação com os campos de parículas pensados como funções de M em $\mathbb{C}$, basta procedermos como antes, tomando o pull-back por uma secção local $\sigma : U \to \mathrm{P}$, $U \subset \mathrm{M}$ (isto é interpretado como uma escolha de calibre). Escrevendo então $\varphi = \sigma^*\psi$, e notando que como ω assume valores em $\widehat{U(1)}$, temos $\sigma^*\omega = i\,e\,A$, onde e é uma constante real não nula e A é uma 1-forma definida em U a valores reais. (eA pode ser identificado com o quadrivetor potencial, onde e é uma constante dependendo da carga.)

Prosseguindo, como $D^\omega\psi = d\psi + \omega \sqcap \psi = d\psi + \omega\psi$, visto que $[d\rho(e^{i\theta})](z)$ é a multipicação complexa $i\theta\, z$, encontramos

$$\begin{aligned}
\sigma^*(\delta^\omega D^\omega\psi - m^2\psi) &= \sigma^*\,[\overline{*}D^\omega\overline{*}D^\omega\psi - m^2\psi] = \\
&= \sigma^*\,[\overline{*}\,(d(\overline{*}d\psi + \overline{*}(\omega\psi)) + \omega \sqcap \overline{*}(d\psi + \omega\psi)) - m^2\psi] = \\
&= *d*(d\varphi + ieA\psi) + *[ieA \wedge *(d\varphi + ieA)] - m^2\varphi = \\
&= \delta d\psi + ie\delta(A\varphi) + ie*(A \wedge *d\varphi) - e^2 * [A \wedge (*A\varphi)] - m^2\varphi = \\
&= -\Box^2\varphi + ie\delta(A\varphi) + ie*(\widetilde{h}(A,d\varphi)\mu) - e^2(\varphi\widetilde{h}(A,A)\mu) - m^2\varphi = \\
&= -\Box^2\varphi + ie\delta(A\varphi) + ie\widetilde{h}(A,d\varphi)*\mu - e^2\widetilde{h}(A,A)\varphi*\mu - m^2\varphi = \\
&= -\Box^2\varphi - ie\,\mathrm{div}(A\varphi) - ie\widetilde{h}(A,d\varphi) + e^2\widetilde{h}(A,A)\varphi - m^2\varphi,
\end{aligned}$$

pois como $\dim(\mathrm{M}) = 4$, por ser M um espaço-tempo, temos $\Box^2 = -(d\delta + \delta d)$, $*\mu = -1$ e $\delta(\alpha) = \mathrm{div}(\alpha)$, sendo que neste último o divergente de A é tomado com respeito às suas coordendas. Multiplicando então a equação acima por -1 encontamos finalmente

$$\Box^2\varphi + ie\,\mathrm{div}(A\varphi) + ie\widetilde{h}(A,d\varphi) - e^2\widetilde{h}(A,A)\varphi + m^2\varphi = 0.$$

Note que se $A = 0$, caso este em que a representação $\rho : \widehat{U(1)} \to GL(\mathbb{C})$ é trivial, temos novamente a equação de Klein-Gordon. Aqui no entanto, existe um acoplamento entre o campo de partículas φ e o potencial de calibre A, que neste caso especial representa o campo eletromagnético. Na próxima seção veremos que além da equação $d^2A = 0$ existe uma equação não-homogênea para A, que nos possibilita obter de A o campo eletromagnético. Portanto, se consideramos $e = -1$ a equação acima se torna

$$\Box^2\varphi - i\,\mathrm{div}(A\varphi) - i\widetilde{h}(A,d\varphi) - \widetilde{h}(A,A)\varphi + m^2\varphi = 0,$$

que é a equação para a primeira quantização de uma partícula carregada, com spin zero e massa m, sujeita a um potencial eletromagnético A.

A única diferença entre este exemplo e o anterior é que aqui P(M,G) é um fibrado principal com grupo $U(1)$ ao invés de $\mathbb{R} - \{0\}$.

Do exemplo da página 121, vimos que uma conexão em um fibrado P, sobre o espaço-tempo e com grupo de estrutura $U(1)$, fornece o potencial eletromagnético A (em verdade vimos que isto fornece somente as duas primeiras equções de Maxwell, mas na próxima seção veremos como a conservação da corrente fornece as outras duas). Assim, a conexão é vista como potencial eletromagnético, o campo de partículas como a função de onda da partícula e o fibrado P como o meio que provê o acoplamento da função de onda com o potencial eletromagnético. Em outras palavras, estamos descrevendo uma partícula carregada, de massa m e função de onda φ, sujeita ao potencial eletromagnético A.

8.5 A Corrente e a Equação de Campo não-Homogênea

Dado um campo de partículas e um potencial de calibre (conexão a que este campo responde) vamos construir uma 1-forma horizontal e equivariante, a valores na álgebra de Lie do grupo de estrutura do fibrado em questão. Esta 1-forma será chamada *corrente*. Daremos também algumas definições equivalentes de corrente.

O fato central é que a corrente está associada à variação da ação com respeito à conexão, tendo em vista que a densidade de ação, associada a uma lagrangeana (não necessariamente G-invariante), é calibre-invariante no sentido da observação da página 152. A corrente também pode ser levada do fibrado principal para a variedade de base, localmente, via uma secção local do fibrado. No entanto, se o grupo de estrutura for não abeliano, esta expressão não é em geral bem definida.

Do ponto de vista da teoria moderna de campos, o potencial de calibre induz um campo de forças (a curvatura da conexão) que como tal, tem uma ***auto-ação*** não envolvendo os campos de partículas. De fato esta auto-ação depende exclusivamente do potencial de calibre considerado. Como potenciais de calibre não são campos de partículas, construiremos de tais potenciais, funções calibre-invariantes na variedade de base.

A densidade de ação total é definida como a soma da densidade de ação e da densidade de auto-ação. Com isso, a exigência da densidade de ação total ser estacionária com respeito ao campo de partículas e o potencial de calibre, nos leva a um sistema de equações: a *Equação de Euler-Lagrange*, desenvolvida na seção aterior, e a *Equação de campo não-Homogênea*, envolvendo a corrente. No caso em que a corrente é zero (por exemplo para um potencial de calibre livre de campos de partículas) a equação de campo não-homogênea é na verdade homogênea, e usualmente chamada *Equação de Yang-Mills.* Se o grupo de estrutura é não-abeliano, a equação de Yang-Mills é não-linear no potencial de calibre, em geral. Além disso, ao contrário da identidade de Bianchi que vale para qualquer potencial de calibre, a equação de Yang-Mills vale somente se o potencial de calibre é estacionário com respeito à densidade de auto-ação.

Deduziremos da equação de campo não-homogênea, uma generalização da conservação da corrente.

Sejam P(M,G) um fibrado principal, V um espaço vetorial, $\rho : \mathrm{G} \to GL(\mathrm{V})$ uma representação do grupo de Lie G e $\mathcal{C}$ o espaço de todas as conexões sobre P(M,G). Como antes, supomos que (M,h) é uma variedade semi-Riemanniana provida de um elemento de volume μ associado a h. Além disso, supomos também a existência de uma métrica $\widehat{h} : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ com respeito à qual ρ é ortogonal.

> OBS: *Seja $L : \mathrm{J}(\mathrm{P}, \mathrm{V}) \to \mathbb{R}$ uma lagrangeana. Queremos fazer variações com respeito a segunda variável de $\mathcal{L}$, ou seja, queremos estudar o comportamento de $\mathcal{L}(\psi, \omega + t\tau)$, onde $\tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$, sendo $ad : \mathrm{G} \to \widehat{\mathrm{G}}$ a representação considerada para se definir a equivariância dos elementos de $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$. Portanto, deve-se ter em mente que ω não está fixada. Tal fato nos força a estudar a estrutura do espaço $\mathcal{C}$. Este estudo leva a interessantes implicações topológicas, além de abrir novos campos dentro da matemática, especialmente em geometria.*

Para levar adiante nosso estudo, precisaremos supor a existência de uma métrica $\kappa : \widehat{\mathrm{G}} \times \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbb{R}$ em relação à qual a representação adjunta $ad : \mathrm{G} \to \widehat{\mathrm{G}}$ é ortogonal.

Como um caso especial da Proposição 8.1.2 da página 145, com $\mathrm{V} = \widehat{\mathrm{G}}$, temos a função

$$(\overline{h}\kappa) : \overline{\bigwedge}^i(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}}) \times \overline{\bigwedge}^i(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}}) \to \mathcal{F}(\mathrm{M}),$$

dada por

$$(\overline{h}\kappa)_p(\alpha_p, \beta_p) = (\overline{h}_p\kappa)(\alpha_p|_{H_p}, \beta_p|_{H_p}) = \sum_{l,m=1}^{r} \overline{h}_p(\alpha^l\big|_{H_p}, \beta^m|_{H_p})\kappa(e_l, e_m),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_r\}$ é uma base da álgebra de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$, implicando portanto que $\alpha = \sum_{l=1}^{r}\alpha^l e_l$ e $\beta = \sum_{m=1}^{r}\beta^m e_m$, sendo que $\alpha^l, \beta^m \in \bigwedge^i(\mathrm{P})$.

Dados $\tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ e $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$, podemos definir uma 1-forma $\tau \star \psi \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$ como segue. Seja $p \in \mathrm{P}$ e $v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$, colocamos

$$(\tau \star \psi)_p(v) = [d\rho(\tau_p(v))](\psi(p)).$$

> OBS: *Estamos usando o símbolo $\star$, que opera os elementos de $\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ com os de $C(\mathrm{P};\mathrm{V})$, para distinguir de $\sqcap$, que opera os elementos de $\bigwedge^k(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ com os de $\bigwedge^j(\mathrm{P};\mathrm{V})$.*

É fácil ver que $\tau \star \psi$ é diferenciável. Para tanto, seja $\{v_1, \ldots, v_s\}$ uma base de V e $\{e_1, \ldots, e_r\}$ uma base de $\widehat{\mathrm{G}}$. Então $\tau = \sum_{i=1}^{r} \tau^i e_i$ e $\psi = \sum_{l=1}^{s} \psi^l e_l$, onde $\tau^1 \in \Lambda^1(\mathrm{M})$ e $\psi^l \in \mathcal{F}(\mathrm{P})$. Isso mostra que

$$(\tau * \psi)_p(v) = [d\rho(\tau_p)(v))](\psi(p)) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} = \psi^l(p)\tau_p(v)[d\rho(e_i)](v_l).$$

Desta forma, a diferenciabilidade de $\tau * \psi$ segue da dos τ^i e ψ^l. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
(\tau \star \psi)_{pg}(dR_g|_p(v)) &= [d\rho(\tau_{pg}(dR_g|_p(v)))](\psi(pg)) = \\
&= [d\rho(ad(g^{-1})\tau_p(v))](\rho(g^{-1})\psi(p)) = \\
&= d[\rho(\exp t(ad(g^{-1})\tau_p(v)))\, \rho(g^{-1})\psi(p)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= d[\rho(g^{-1}g\ \exp t(ad(g^{-1})\tau_p(v))\, g^{-1})\psi(p)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= d[\rho(g^{-1} \exp t(ad(g)ad(g^{-1})\tau_p(v)))\psi(p)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= d[\rho(g^{-1})\rho(\exp t\tau_p(v))\psi(p)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= \rho(g^{-1})\, d[\rho(\exp t\tau_p(v))\psi(p)]|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= \rho(g^{-1})[d\rho(\tau_p(v))](\psi(p)) = \\
&= \rho(g^{-1})(\tau \star \psi)_p(v).
\end{aligned}$$

Disso conclumos que $\tau \star \psi \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$ (é claro que $\tau \star \psi$ é horizontal, uma vez que τ o é).

Definição 8.19 *Sejam* $\omega \in \mathcal{C}$, $\psi \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ *e* $p \in \mathrm{P}$. *A* corrente $J^\omega(\psi) \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ associada ao par (ψ, ω) *é definida por*

$$(\overline{h}\,\widehat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p), (\tau \star \psi)_p\right) = (\overline{h}\kappa)_p(J(\psi)|_p, \tau),$$

que exigimos ser válida para todo $\tau \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$.

> Obs: *Como* $(\overline{h}\kappa)$ *é não degenerada, segue que* $J^\omega(\psi)|_p$ *está bem definida e é horizontal.*

Proposição 8.5.1 *Sejam* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *uma base de* $\widehat{\mathrm{G}}$ *e* (κ^{ij}) *a inversa da matriz* (κ_{ij}), *onde* $\kappa_{ij} = \kappa(e_i, e_j)$. *Nessas condições temos*

$$J^\omega(\psi)|_p(v) = \sum_{i,j=1}^{r} \kappa^{ij}\widehat{h}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}\right|_p(v), (e_i \star \psi)_p\right) e_j,$$

onde $v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$.

Demonstração: Usando a convenção de soma para os índices, temos

$$\begin{aligned}
(\overline{h}\kappa)_p\left(\kappa^{ij}\widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p),(e_i\star\psi)_p\right)e_j,\tau^m e_m\right) = & \\
&= \kappa^{ij}\kappa_{jm}\overline{h}_p\left(\widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p),(e_i\star\psi)_p\right),\tau^m\right) = \\
&= \delta^i_m\overline{h}_p\left(\widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p),(e_i\star\psi)_p\right)\tau^m\right) = \\
&= \overline{h}_p\left(\widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p),(e_i\star\psi)_p\right),\tau^i\right) = \\
&= (\overline{h}\widehat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p),(\tau\star\psi)_p\right) = \\
&= (\overline{h}\kappa)_p(J^\omega(\psi)|_p,\tau),
\end{aligned}$$

pela definição de corrente. ■

Note que

$$e_i\star\psi = [d\rho(e_i)](\psi) = [d\rho(e_i)]\left(\sum_{j=1}^{s}\psi^j v_j\right) = \sum_{j=1}^{s}\psi^j[d\rho(e_i)](v_j),$$

onde $\{v_1,\dots v_s\}$ é uma base de V. Também esta proposição juntamente com a não-degenerescência de $(\overline{h}\kappa)$ mostram que $J^\omega(\psi)$ é horizontal.

Teorema 53 *Sejam* $\omega\in\mathcal{C}$ *e* $\psi\in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$. *Então* $J^\omega(\psi)\in\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$.

Demonstração: Primeiramente, vemos que a Proposição 8.5.1, acima, diz que $J^\omega(\psi)$ é horizontal.

Dado $\tau\in\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ as considerações feitas acima mostram que $\tau\star\psi\in\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$, e portanto

$$(\tau\star\psi)_{pg} = \rho(g^{-1})(\tau\star\psi)_p\circ dR_{g^{-1}}|_{pg}.$$

Então, como $\dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)},\tau\star\psi\in\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\mathrm{V})$, a definição de corrente e a Proposição 8.1.2 da página 145 fornecem

$$\begin{aligned}
(\overline{h}\kappa)_{pg}(J^\omega(\psi)|_{pg},\tau_{pg}) &= (\overline{h}\,\widehat{h})_{pg}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(pg),(\tau\star\psi)_{pg}\right) = \\
&= (\overline{h}\,\widehat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p),(\tau\star\psi)\right) = \\
&= (\overline{h}\kappa)_p(J^\omega(\psi)|_p,\tau_p).
\end{aligned}$$

Mas então,

$$\begin{aligned}
&(\overline{h}\kappa)_{pg}(J^\omega(\psi)|_{pg},\tau_{pg}) = (\overline{h}\kappa)_p(J^\omega(\psi)|_p,\tau_p) = \\
&\quad = (\overline{h}\kappa)_p\left(ad(g)\,ad(g^{-1})\,J^\omega(\psi)|_p\circ dR_{g^{-1}}|_{pg}\circ dR_g|_p, ad(g)\tau_{pg}\circ dR_g|_p\right),
\end{aligned}$$

visto que $\tau\in\overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$. Agora, como $dR_g|_p : H_p\to H_{pg}$ é uma isometria de $\overline{h}_p$ e ad é ortogonal a κ, obtemos

$$\begin{aligned}
(\overline{h}\kappa)_{pg}(\,J^\omega(\psi)|_{pg}, \tau_{pg}) &= \\
&= (\overline{h}\kappa)_p \left(ad(g)\,ad(g^{-1})\,J^\omega(\psi)|_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg} \circ dR_g|_p, ad(g)\tau_{pg} \circ dR_g|_p\right) = \\
&= (\overline{h}\kappa)_{pg} \left(ad(g^{-1})\,J^\omega(\psi)|_p \circ dR_{g^{-1}}|_{pg}, \tau_{pg}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, como isto vale para todo $\tau \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ e todo ponto $p \in \mathrm{P}$, segue da não-degenerescência de $(\overline{h}\kappa)$ que temos

$$J^\omega(\psi)|_{pg} \circ dR_g|_p = ad(g^{-1})\,J^\omega(\psi)|_p,$$

mostrando que $J^\omega(\psi)$ é equivariante.

Vamos ver que $J^\omega(\psi)$ é diferenciável. Se $X \in \mathcal{X}(\mathrm{P})$ é um campo de vetores, a Proposição 8.5.1 diz que

$$(J^\omega(\psi))(X) = \sum_{i,j=1}^{r} \kappa^{ij}\widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(X), e_i \star \psi\right) e_j.$$

Portanto, como $\dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}$ e ψ são diferenciáveis segue que $J^\omega(\psi)$ é diferenciável. Isso demonstra o teorema. ■

Proposição 8.5.2 *Sejam* $\mathcal{L} : C(\mathrm{P};\mathrm{V}) \times \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *definida por*

$$[\mathcal{L}(\psi,\omega)](x) = L(p, \psi(p), D^\omega\psi|_p),$$

onde $\pi(p) = x$, *e* $J^\omega(\psi) \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ *a corrente associada ao par* (ψ,ω). *Então*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\psi, \omega + t\tau)|_{t=0} = (\overline{h}\kappa)(J^\omega(\psi), \tau)$$

para todo $\tau \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$.

> OBS: *Dado* $x \in \mathrm{M}$, *a função* $t \mapsto [\mathcal{L}(\psi, \omega + t\tau)](x)$ *está bem definida e é uma função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$. *Portanto faz sentido tomar* $\frac{d}{dt}[\mathcal{L}(\psi,\omega)](x)|_{t=0}$. *Além disso, a Proposição 8.1.2 da página 145 garante que* $(\overline{h}\kappa)$ *é bem definida.*

Demostração da Proposição. Temos

$$D^{\omega+t\tau}\psi = d\psi + \omega \sqcap \psi + t\tau \sqcap \psi = D^\omega\psi + t\tau \star \psi,$$

uma vez que $(\tau \sqcap \psi)_p(v) = [d\rho(\tau_p(v))](\psi(p)) = (\tau \star \psi)_p(v)$, para $v \in \mathrm{T}_p\mathrm{P}$. Desta forma encontarmos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mathcal{L}(\psi, \omega + t\tau)](x)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} L(p, \psi(p), D^\omega|_p + t(\tau \star \psi)_p)\Big|_{t=0} = \\
&= (\overline{h}\,\widehat{h})_p \left(\nabla_3 L(p, \psi(p), D^\omega\psi|_p), (\tau \star \psi)_p\right) = (\overline{h}\,\widehat{h})_p \left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(p), (\tau \star \psi)_p\right) = \\
&= (\overline{h}\kappa)_p(\,J^\omega(\psi)|_p, \tau_p) = [(\overline{h}\kappa)(J^\omega\psi, \tau)](x). \quad ■
\end{aligned}$$

Esta proposição caracteriza a corrente de uma maneira mais razoável, pois mostra que ela está ligada à variação no espaço das conexões. Portanto, podemos à partir disso, definir a ação para uma conexão e dizer se tal conexão é ou não estacionária.

> OBS: *Se supomos que a lagrangeana L, em questão, é* G*-invariante, isto é,*
>
> $$L(p, \rho(g)v, \rho(g)\gamma) = L(p, v, \gamma)$$
>
> *para todos os $v \in \mathrm{V}$, $g \in \mathrm{G}$ e $\gamma \in \bigwedge^1(\mathrm{T}_p\mathrm{P}; \mathrm{V})$, podemos mostrar que a corrente $J^\omega(\psi)$ obedece a* equação de continuidade generalizada
>
> $$\delta^\omega J^\omega(\psi) = 0,$$
>
> *desde que ψ seja estacionário relativamente a L, e $\omega \in \mathcal{C}$ seja uma conexão fixa. Na verdade, pode-se mostrar que se ψ não é estacionário vale*
>
> $$\delta^\omega J^\omega(\psi) = \sum_{i,j=1}^{r} \kappa^{ij}\widehat{k}\left(\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \frac{\partial L}{\partial\psi}, e_i \star \psi\right) e_j\,,$$
>
> *onde $\{e_1, \ldots, e_r\}$ é uma base para $\widehat{\mathrm{G}}$. Para maiores detalhes veja* [8, pag. 67].

Definição 8.20 *A função $\mathcal{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ definida por*

$$\mathcal{S}(\omega) = -\frac{1}{2}(\overline{h}\kappa)(\Omega^\omega, \Omega^\omega)$$

é chamada densidade de auto-ação *da conexão ω.*

Tendo uma densidade de ação para conexão, podemos finalmente definir a densidade de ação total para um par (ψ, ω).

Definição 8.21 *A função $\mathcal{T} : C(\mathrm{P}; \mathrm{V}) \times \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ definida por*

$$\mathcal{T}(\psi, \omega) = \mathcal{L}(\psi, \omega) + \mathcal{S}(\omega)$$

é chamada densidade de ação combinada *(ou* densidade de ação total*) do par (ψ, ω).*

Tendo em vista as definições acima, podemos formular um princípio variacional.

Definição 8.22 (Princípio da Mínima Ação)
Dizemos que o par (ψ, ω) é estacionário *em relação à $\mathcal{T}$ se, para todo aberto com fecho compacto $U \subset \mathrm{M}$ temos*

$$\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{T}(\psi + t\gamma, \omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0} = 0,$$

onde $\tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P}; \widehat{\mathrm{G}})$ e $\gamma \in C(\mathrm{P}; \mathrm{V})$ possuem suportes projetados contidos em U.

Teorema 54 *O par (ψ,ω) é estacionário, relativamente à $\mathcal{T}$, se, e somente se, valem ambas as condições abaixo.*

$$\begin{array}{lrcll} (1) & \delta^\omega \dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \dfrac{\partial L}{\partial\psi} & = & 0 & \textit{(Equação de Euler-Lagrange)}; \\ (2) & \delta^\omega\Omega^\omega & = & J^\omega(\psi) & \textit{(Equação de campo não-Homogênea)}. \end{array}$$

Demonstração: Seja $U \subset$ M um aberto com fecho compacto. Dados $\tau \in \overline{\Lambda}^1(\mathrm{P};\hat{\mathrm{G}})$ e $\gamma \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$, ambos com suporte projetado contido em U, temos

$$\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{T}(\psi + t\gamma, \omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_U \mathcal{L}(\psi + t\gamma, \omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\int_U \mathcal{S}(\omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0}.$$

Como

$$\begin{aligned} \Omega^{\omega+t\tau} &= D^{\omega+t\tau}(\omega + t\tau) = d(\omega + t\tau) + \tfrac{1}{2}[\omega + t\tau, \omega + t\tau] = \\ &= d\omega + td\tau + \tfrac{1}{2}\left([\omega,\omega] + 2t[\omega,\tau] + t^2[\tau,\tau]\right) = \\ &= D^\omega\omega + tD^\omega\tau + \tfrac{t^2}{2}[\tau,\tau] = \\ &= \Omega^\omega + tD^\omega\tau + \tfrac{t^2}{2}[\tau,\tau]. \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\overline{h}\kappa)_p\left(\Omega^{\omega+t\tau}|_p, \Omega^{\omega+t\tau}|_p\right)\Big|_{t=0} = \\ &\quad= \frac{d}{dt}(\overline{h}\kappa)_p\left(\Omega^\omega|_p + t\,D^\omega\tau|_p + \tfrac{t^2}{2}[\tau,\tau]_p, \Omega^\omega|_p + t\,D^\omega\tau|_p + \tfrac{t^2}{2}[\tau,\tau]_p\right)\Big|_{t=0} = \\ &\quad= \frac{d}{dt}\left((\overline{h}\kappa)_p(\Omega^\omega|_p, \Omega^\omega|_p) + 2t(\overline{h}\kappa)_p(\Omega^\omega|_p, D^\omega\tau|_p) + O(t^2)\right)\Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

onde $O(t^2)$ são os termos envolvendo potências de t maiores que 2. Logo, como $\frac{d}{dt}O(t^2)|_{t=0} = 0$ temos

$$\frac{d}{dt}(\overline{h}\kappa)_p\left(\Omega^{\omega+t\tau}\Big|_p, \Omega^{\omega+t\tau}\Big|_p\right)\Big|_{t=0} = 2hk_p\left(\Omega^\omega|_p, D^\omega\tau|_p\right).$$

Isto leva a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_U \mathcal{S}(\omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0} &= -\frac{1}{2}\int_U (\overline{h}\kappa)(\Omega^{\omega+t\tau}, \Omega^{\omega+t\tau})\mu\Big|_{t=0} = -\int_U (\overline{h}\kappa)(\Omega^\omega, D^\omega\tau)\mu = \\ &= -\int_U (\overline{h}\kappa)(\delta^\omega\Omega^\omega, \tau)\mu. \end{aligned}$$

Notemos agora que

$$[\mathcal{L}(\psi + t\gamma, \omega + t\tau)](x) = L(p, \psi(p) + t\gamma(p), D^{\omega+t\tau}(\psi + t\gamma)\Big|_p),$$

com $\pi(p) = x$. Desta forma temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} L(p, \psi(p) + t\gamma(p), D^{\omega+t\tau}(\psi + t\gamma)|_p)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} L(p, \psi(p) + t\gamma(p), D^{\omega}\psi|_p)\Big|_{t=0} + \\
&\quad + \frac{d}{dt} L(p, \psi(p), t(D^{\omega}\gamma|_p + (\tau \star \psi)_p + t(\tau \star \gamma)_p))\Big|_{t=0} = \\
&= \widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}(p), \gamma(p)\right) + (\overline{h}\,\widehat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}(p), D^{\omega}\gamma|_p + (\tau \star \gamma)_p\right) = \\
&= \widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}(p), \gamma(p)\right) + (\overline{h}\,\widehat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}(p), D^{\omega}\gamma|_p\right) + \\
&\quad + (\overline{h}\,\widehat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}(p), (\tau \star \gamma)_p\right).
\end{aligned}
$$

Lembrando que

$$
(\overline{h}\,\widehat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}(p), (\tau \star \psi)_p\right) = (\overline{h}\kappa)_p\left(J^{\omega}(\psi)|_p, \tau_p\right)
$$

e também que

$$
\int_U (\overline{h}\,\widehat{h})\left(\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}, D^{\omega}\gamma\right)\mu = \int_U \widehat{h}\left(\delta^{\omega}\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}, \gamma\right)\mu,
$$

visto que $(\overline{h}\,\widehat{h}) = \widehat{h}$ sobre $C(\mathrm{P};\mathrm{V})$, encontramos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{L}(\psi + t\gamma, \omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0} &= \\
&= \int_U \widehat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}, \gamma\right)\mu + \int_U \widehat{h}\left(\delta^{\omega}\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}, \gamma\right)\mu + \int_U (\overline{h}\kappa)\left(J^{\omega}(\psi), \tau\right)\mu = \\
&= \int_U \widehat{h}\left(\delta^{\omega}\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \gamma\right)\mu + \int_U (\overline{h}\kappa)\left(J^{\omega}(\psi), \tau\right)\mu.
\end{aligned}
$$

Desta forma chegamos finalmente a

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{T}(\psi + t\gamma, \omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0} &= \\
&= \int_U \widehat{h}\left(\delta^{\omega}\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \gamma\right)\mu + \int_U (\overline{h}\kappa)\left(J^{\omega}(\psi), \tau\right)\mu - \int_U (\overline{h}\kappa)\left(\delta^{\omega}\Omega^{\omega}, \tau\right)\mu = \\
&= \int_U \widehat{h}\left(\delta^{\omega}\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \gamma\right)\mu + \int_U (\overline{h}\kappa)\left(J^{\omega}(\psi) - \delta^{\omega}\Omega^{\omega}, \tau\right)\mu.
\end{aligned}
$$

Portanto, se o par (ψ, ω) é estacionário em relação a $\mathcal{T}$, esta equação deve valer quaisquer que sejam $\gamma \in C(\mathrm{P};\mathrm{V})$ e $\tau \in \overline{\bigwedge}^1(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$. Com isso, colocando $\gamma = 0$, segue a equação *(2)*. Reciprocamente, colocando-se $\tau = 0$, segue a equação *(1)*. A recíproca também é evidente, uma vez estabelecida a equação

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_U \mathcal{T}(\psi + t\gamma, \omega + t\tau)\mu\Big|_{t=0} &= \\
&= \int_U \widehat{h}\left(\delta^{\omega}\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \gamma\right)\mu + \int_U (\overline{h}\kappa)\left(J^{\omega}(\psi) - \delta^{\omega}\Omega^{\omega}, \tau\right)\mu. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Como uma conseqüência deste teorema, podemos mostrar que $\delta^{\omega}\left(J^{\omega}(\psi)\right) = 0$. Observemos que em contraste com a observação da página 172, não estamos supondo que a lagrangeana L seja G-invariante, apenas neste caso, a conservação da corrente é uma conseqüência das equações de campo, isto é, do par (ψ, ω) ser estacionário.

Corolário 54.a *Se* $\delta^\omega \Omega^\omega = J^\omega(\psi)$, *vale* $\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = 0$.

Demonstração: Devemos mostrar que $\delta^\omega(\delta^\omega\Omega^\omega) = 0$. Mas

$$\delta^\omega(\delta^\omega\Omega^\omega) = \pm\overline{*}D^\omega\overline{**}D^\omega\overline{*}\Omega^\omega.$$

Se $\alpha \in \overline{\bigwedge}^i(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$, como

$$d(\omega \sqcap \alpha) = d\omega \sqcap \alpha - \omega \sqcap d\alpha,$$

obtemos

$$\begin{aligned} D^\omega D^\omega \alpha &= d(d\alpha + \omega \sqcap \alpha) + \omega \sqcap (d\alpha + \omega \sqcap \alpha) = \\ &= d^2\alpha + d(\omega \sqcap \alpha) + \omega \sqcap d\alpha + \omega \sqcap \omega \sqcap \alpha = \\ &= d\omega \sqcap \alpha - \omega \sqcap d\alpha + \omega \sqcap d\alpha + \omega \sqcap \omega \sqcap \alpha = \\ &= d\omega \sqcap \alpha + \omega \sqcap \omega \sqcap \alpha. \end{aligned}$$

Logo, como também $d\omega = \Omega^\omega - \omega \sqcap \omega$, encontramos

$$D^\omega D^\omega \alpha = \Omega^\omega \sqcap \alpha - \omega \sqcap \omega \sqcap \alpha + \omega \sqcap \omega \sqcap \alpha = \Omega^\omega \sqcap \alpha.$$

Portanto

$$\delta^\omega(\delta^\omega\Omega^\omega) = \pm\overline{*}(\Omega^\omega \sqcap \overline{*}\Omega^\omega) = \pm\overline{*}[\Omega^\omega, \overline{*}\Omega^\omega].$$

Pelo Corolário 50.a da página 141, se $\{e_1, \ldots, e_r\}$ é uma base de $\widehat{\mathrm{G}}$ temos $\alpha = \sum_{j=1}^{r} \alpha^j e_j$, com $\alpha^j \in \bigwedge^i(\mathrm{P})$, para toda forma $\alpha \in \overline{\bigwedge}^i(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$. Então,

$$\begin{aligned} [\alpha, \overline{*}\alpha] &= \sum_{j,m=1}^{r} \alpha^j \sqcap \overline{*}\alpha^m [e_j, e_m] = \sum_{j,m=1}^{r} \overline{h}(\alpha^j, \alpha^m)\widetilde{\mu}[e_j, e_m] = \\ &= -\sum_{j,m=1}^{r} \overline{h}(\alpha^m, \alpha^j)\widetilde{\mu}[e_m, e_j] = -\sum_{j,m=1}^{r} \alpha^m \sqcap \overline{*}\alpha^j [e_m, e_j] = \\ &= -[\alpha, \overline{*}\alpha], \end{aligned}$$

onde $\widetilde{\mu}$ é o pull-back por π do elemento de volume μ de M. Coseqüentemente $[\alpha, \overline{*}\alpha] = 0$, implicando que

$$\delta^\omega(\delta^\omega\Omega^\omega) = \pm\overline{*}[\Omega^\omega, \overline{*}\Omega^\omega] = 0. \blacksquare$$

Vamos agora retomar a discussão do campo de Klein-Gordon acoplado ao campo eletromagnético, iniciada na página 165. Das considerações sobre o potencial eletromagnético feitas no exemplo da página 121, dadas duas secções locais $\sigma_U : U \to \mathrm{P}$ e $\sigma_V : V \to \mathrm{P}$ temos que

$$\omega_U = \sigma_U^*\omega = ieA_U \qquad \text{e} \qquad \omega_V = \sigma_V^*\omega = ieA_V,$$

sendo ω uma conexão sobre P(M,G). Ainda neste exemplo obtivemos que $\omega_V = \omega_U + id\chi$, com $\chi : U \to \mathbb{R}$, implicando

$$A_V = A_U + \frac{1}{e}d\chi.$$

Isto nos possibilitou encontrar uma 2-forma bem definida F, sobre M, colocando $F|_U = dA_U$.

Agora, a Proposição 7.1.5 da página 128 e o fato de $U(1)$ ser abeliano nos dão

$$D^\omega \Omega^\omega_U = d\Omega^\omega_U + [\Omega^\omega_U, \omega_U] = d\Omega^\omega_U.$$

Mas $D^\omega \Omega^\omega_U = 0$ pela identidade de Bianchi. Conseqüentemente temos $d\Omega^\omega_U = 0$. Isto mostra que

$$dF|_U = -\frac{1}{ie}d\Omega^\omega_U = 0,$$

para todo o aberto trivializante $U \subset$ M. Portanto vale

$$dF = 0.$$

Por outro lado, a conservação da corrente nos dá $\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = 0$. Assim, tomando o número complexo i como base de $\widehat{U(1)}$ e definindo a métrica κ como $\kappa(z,w) = z\overline{w}$, a Proposição 8.5.1 da página 169 nos dá que a corrente é

$$J^\omega(\psi) = \hat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}, i\psi\right)i.$$

Lembrando então que para a lagrangeana do campo de Klein-Gordon acoplado ao potencial de calibre, dada na página 165, temos $\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} = D^\omega\psi$, encontramos que a expressão da corrente é

$$J^\omega(\psi) = \hat{h}(D^\omega\psi, i\psi)i = \hat{h}(d\psi + \omega \sqcap \psi, i\psi)i.$$

Tomando o pull-back pela secção local σ_U vem

$$\begin{aligned} \sigma^*(J^\omega(\psi)) &= \hat{h}(d\varphi + ieA_U, i\varphi)i = \hat{h}(d\varphi, i\varphi)i + \hat{h}(ieA_U, i\varphi)i = \\ &= \hat{h}(d\varphi, i\varphi)i + eA_U\varphi\overline{\varphi}i, \end{aligned}$$

onde $\varphi : U \to \mathbb{C}$ é definido por $\varphi = \sigma^*\psi$. Isto já nos adverte quanto a encontar uma equação válida somente no aberto U. Notemos agora que como $\widehat{U(1)}$ é abeliano e M é o espaço-tempo temos

$$\delta^\omega\Omega^\omega = \overline{*}D^\omega\overline{*}\Omega^\omega = \overline{*}(d\overline{*}\Omega^\omega + [\omega, \overline{*}\Omega^\omega]) = \overline{*}D^\omega\overline{*}\Omega^\omega.$$

Desta forma, se tomamos o pull-back por σ_U encontramos

$$\sigma^*_U(\delta^\omega\Omega^\omega) = \sigma^*_U(\overline{*}d\overline{*}\Omega^*) = *d*(-ieF|_U) = -ie\delta(F|_U).$$

Portanto, como $\delta^\omega \Omega^\omega = J^\omega(\psi)$ segue que

$$\delta(F|_U) = -\frac{1}{e}\hat{h}(d\varphi, i\varphi) - A_U\varphi\overline{\varphi}.$$

Definindo assim

$$j_U = -\frac{1}{e}\hat{h}(d\varphi, i\varphi) - A_U\varphi\overline{\varphi},$$

obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} d(F|_U) &= 0; \\ \delta(F|_U) &= j_U \text{ ou ainda } d*(F|_U) = *j_U. \end{cases}$$

Este sistema é reconhecido imediatamente como as equações de Maxwell na forma diferencial, sendo a densidade de carga e a densidade de corrente dadas em função de φ.

A equação $\delta(F|_U) = j_U$ não pode ser estendida para toda a variedade M, a menos que que haja uma secção global, e neste caso j pode ser definida globalmente, visto que o campo φ assim o será. caso não haja tal secção temos as equações de Maxwell no aberto U. No entanto, como existe um sistema de trivializações locais $\{(T_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ com $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \mathrm{M}$, as equações de Maxwell valem para todo ponto $x \in \mathrm{M}$, preservado o fato de que se $x \in U_\alpha$, $F|_{U_\alpha}$ e j_{U_α} serão expressos em função da secção local σ_α associada à T_α.

> OBS: *Se* M *é o espaço de Minkowski, o fato de* M *ser contrátil implica que o fibrado* P(M,$U(1)$) *é trivial. Isto possibilita obter as equações de Maxwell globalmente, como na maneira cássica.*

8.6 O Campo de Yang-Mills e Instantons

Seja (M,h) uma variedade Riemanniana compacta[4] de dimensão 4, provida de um elemento de volume μ associado a h.

Considere sobre M um fibrado principal P, com grupo de estrutura G, que supomos compacto. Também, como de costume, $\mathcal{C}$ é o espaço de todas as conexões sobre P(M,G).

Diferentemente do que fizemos antes, não consideraremos campos de partículas. Aqui estamos interessados somente nos potenciais de calibre livres. Uma teoria deste gênero é usualmente chamada *Teoria de Calibre Pura.*

Seja κ uma métrica em $\widehat{\mathrm{G}}$, tal que a representação adjunta $ad : \mathrm{G} \to \widehat{\mathrm{G}}$ é ortogonal[5]. Desta forma temos a densidade de ação total $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathrm{M})$ dada por

$$\mathcal{T}(\omega) = -\frac{1}{2}(\overline{h}\kappa)(\Omega^\omega, \Omega^\omega).$$

---

[4]Isto é exigido com a finalidade de podermos definir um funcional usando integração sobre toda a variedade M.

[5]Tal κ sempre existe se G é compacto.

Definimos o *funcional de Yang-Mills* por

$$YM(\omega) = -\frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}(\overline{h}\kappa)(\Omega^\omega, \Omega^\omega)\mu.$$

Note que esta integral existe, dado que M é compacta.

Dizemos que uma conexão $\omega \in \mathcal{C}$ é uma *conexão* (ou *potencial*) *de Yang-Mills* se ω é um ponto crítico do funcional de Yang-Mills. A curvatura associada a tal conexão é chamada *campo de Yang-Mills.*

Notando que na demonstração do Teorema 54 de página 173, se ω é um potencial de Yang-Mills temos que $\delta^\omega\Omega^\omega = 0$. Como então M é uma variedade Riemanniana de dimensão 4, vem que $\delta^\omega\Omega^\omega = -\overline{*}D^\omega\overline{*}\Omega^\omega$. Daí como $\delta^\omega\Omega^\omega = 0$ obtemos

$$D^\omega\overline{*}\Omega^\omega = 0.$$

Desta forma, uma conexão é de Yang-Mills se, e somente se, $D^\omega\overline{*}\Omega^\omega = 0$.

Dada uma 2-forma $\alpha \in \overline{\bigwedge}^2(\mathrm{P};\widehat{\mathrm{G}})$ dizemos que α é *auto-dual* se $\overline{*}\alpha = \alpha$, e que α é *anti-autodual* se $\overline{*}\alpha = -\alpha$. Portando, se Ω^ω é auto-dual ou anti-autodual vem que

$$D^\omega\overline{*}\Omega^\omega = \pm D^\omega\Omega^\omega = 0,$$

pela identidade de Bianchi.

Dizemos que uma conexão ω é um *instanton* (*anti-instanton*) se Ω^ω é auto-dual (anti-autodual). Pelo que acabamos de ver, um instanton é um ponto crítico do funcional de Yang-Mills YM. A pergunta natural que surge é a seguinte. *Serão todos os pontos críticos de YM instantons?* Esta questão foi respondida em parte por Karen Uhlenbeck e alguns colaboradores [35].

Alguns autores definem instantons para dimensões maiores que 4. Isto se faz substituindo na equação

$$D^\omega\overline{*}\Omega^\omega = 0$$

a curvatura Ω^ω por uma k-forma exigindo que esta seja auto-dual (anti-autodual). Isto impõe primeiramente a restrição de que a dimensão da variedade de base seja par. Por exemplo, se a dimensão é $n = 4$, somente 2-formas podem ser auto duais (anti-autoduais), se $n = 6$ somente 3-formas podem ser auto-duais (anti-autoduais), se $n = 2$ somente 1-formas podem ser auto-duais (anti-autoduais), etc. No entanto, devemos notar que o funcional de Yang-Mills é um funcional sobre o espaço das conexões, que são 1-formas. Isto mostra que os termos auto-dual e anti-autodual podem ser usados somente para as curvaturas, que são 2-formas satisfazendo a identidade de Bianchi. Ora, mas então não é difícil de se ver que a auto-dualidade e anti-autodualidade para curvatura ocorrem somente em dimensão 4. Desta forma, falar em instantons para dimensões diferentes de 4 é algo totalmente sem significado matemático, dado que uma forma qualquer não necessita satisfazer a identidade de Bianchi.

Um caso importante do uso de instantons é quando M é a esfera em $\mathbb{R}^5$ e G é $SU(n)$. O estudo desse caso leva a um bom número de resultados matemáticos interessantes. Para maiores detalhes veja [4,9,20].

Para terminar, queremos dizer que tanto o campo de Yang-Mills desta seção quanto os instântons são objetos de estudo de *matemática* e não de física. Isto se dá pelo simples fato de que as variedades que modelam o espaço-tempo não podem ser Riemannianas nem tampouco compactas. A hipótese de que o espaço-tempo é uma variedade lorentziana é um dos fatos mais básicos da Teoria da Relatividade Geral que dispensa qualquer comentário. A hipótese de não-compacidade se deve pelo seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [5,29].

Teorema 55 *Se* (M,h) *é uma variedade lorentzina compacta existe uma curva tipo-tempo fechada.* ■

Este teorema pode ser compreendido dizendo-se que estamos excluindo a possibilidade de partículas materiais "retornarem ao seu próprio passado", isto é, admitimos a lei de causa e efeito, sendo o tempo uma grandeza estritamente crescente em nosso universo. Esta é uma hipótese pelo menos sensata, para que possamos começar a estudar as leis que regem nosso universo de um ponto de vista que seja o mais próximo possível do real.

Em vista das considerações acima, os tão falados instantons constituem uma teoria unicamente matemática, quando assim formulada. Deve então ficar claro em nossas mentes que sendo física o estudo dos fenômenos "reais" da natureza, não se pode estuda-la com instantons.

Bibliografia

[1] Abers,E., Lee,B.W. *Gauge Theories.* Phys. Rep. **9C**, 1–141 (1973)

[2] Atiyah,M.F. *Complex Analytic Connections in Fibre Bundles.* Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 181–207 (1957).

[3] Atiyah,M.F., Macdonald,I.D. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Mass., 1969.

[4] Atiyah,M.F., Hitchin,N., Siger,I. *Self-Duality in Four Dimensional Riemannian Geometry.* Proc. Roy. Soc. London **A362**, 425–461 (1978).

[5] Beem,J.R., Ehlich,P.E. *Global Lorentzian Geometry.* Marcel Decker Inc., New York, 1981.

[6] Bishop,R.L., Crittenden,R.J. *Geometry of Manifolds.* Academic Press, New York, 1964.

[7] Bishop,R.L., Goldberg,S.I. *Tensor Analysis on manifolds.* Dover, New York, 1980.

[8] Bleecker,D. *Gauge Theories and Variational Principles.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1981.

[9] Boss,B., Bleecker,D.D. *Topology and Analysis: The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[10] Bott,R., Tu,L.W. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[11] Chevalley,C. *Theory of Lie Groups.* Princeton University Press, Princeton, 1946.

[12] Dugundji,J. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 1969.

[13] Faria-Rosa,M.A., Rodrigues,W.A. *A Geometrical Theory of Non-Topological Magnetic Monopoles.* Mod. Phys. lett. **4A**, 175–185 (1989).

[14] Freed,D., Uhlenbeck,K. *Instantons and Four-Manifolds* Springer-Verlag, 1984.

[15] Guillemin,V. Pollak,A. *Differential Topology.* Prentice-Hall Inc., NJ, 1974.

[16] Hoffman,K. Kunze,R. *Álgebra Linear.* Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1979.

[17] Hönig,C.S. *Aplicações da Topologia a Análise.* IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1976.

[18] Kobayashi,S., Nomizu,K. *Foundations of Differential Geometry.* (Vols. I e II) John Wiley & Sons, New York, 1963 e 1969.

[19] Lang,S. *Differentiable Manifolds.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[20] Lawson,H.B. *The Theory of Gauge Fields in Four Dimension.* Regional Conferences Series in Mathematics No 58, 1985.

[21] Mac Lane,S. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[22] Mayer,E.M. *Geometric Aspects of Gauge Theory.* Annals of the Israel Physical Society **3**, 80–99 (1980).

[23] Milnor,J., Stasheff,J. *Characteristic Classes.* Princeton University Press, Princeton, 1974.

[24] Nachbin,L. *The Haar Integral.* D. van Nostrand, Princeton, 1965.

[25] Nickerson,H.K. *On Differential Operators and Connections.* Trans. Amer. Math. Soc **99**, 509-539 (1961).

[26] Nomizu,K. *Lie Groups and Differential Geometry.* Mathematical Society of Japan, Tokio, 1956.

[27] O'Neill,B. *Semi-Riemannian Geometry (with Applications to Relativity).* Academic-Press Inc., London, 1983.

[28] Parker,T.H., *Gauge Theories on Four Dimensional Riemannian Manifolds.* Commun. Math. Phys. **85**, 563–602 (1982).

[29] Penrose,R. *Techiniques of Differential Topology in Relativity.* Regional Conference Series in Applied Marh. No 7, SIAM, 1968.

[30] Pontryagin,L. *Grupos Continuos.* Editora Mir, Moscú, 1978.

[31] Rodrigues,W.A., Scanavini,M.E., de Alcantara,L.P. *Formal Structures, the Concepts of Covariance, Invariance, Equivalent Reference Frames, and the Principle of Relativity.* Found. Phys. Lett. **2**, 59-79 (1990).

[32] Rodrigues,W.A., Rosa,M.A *The Meaning of Time in the Theory of Relativity and "Einstein's Later View of the Twin Paradox".* Found. Phys. **6**, 705-724 (1989).

[33] Rodrigues,W.A., Rosa,M.A., Maia,A., Recami,E., *Physico-Mathematical Approach to Generalized Monopoles without String.* Hadr. J. **12** 187–212 (1989).

[34] Rosa,M.A. *Algumas Aplicações de Fibrados Principais em Teorias de Espaço-Tempo.* Tese de Doutoramento, IFGW-UNICAMP, 1987.

[35] Sibner,L.M., Sibner,R.J., Uhlenbeck,K. *Solutions to Yang-Mills Equations that are not Self-Dual.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **86**, 8610–8613 (1989).

[36] Singer,I.M., Thorpe,J.A. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[37] Spivak,M.,F. *Calculus on Manifolds.* Benjamin, New York, 1965.

[38] Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, Princeton, 1951.

[39] Uhlenbeck,K. *Removable Singularities in Yang-Mills Fields.* Commun. Math. Phys. **83**, 11–29 (1982).

[40] Uhlenbeck,K. *Connections with L^p Bounds on Curvature.* Commun. Math. Phys. **83** 31–42 (1982).

[41] Warner,F. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[42] von Westenholz,C.M. *Differential Forms in Mathematical Physics.* North-Holland, Amsterdan, 1978.

[43] Yang,C.N., Mills,R.L. *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance.* Phys. Rev. **96**, 191–195 (1954).