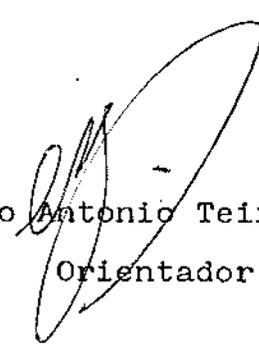


SINGULARIDADES DE CODIMENSÃO 2 EM \mathbb{R}^3

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Roberto Beltrán Barrios e aprovada pela Comissão Julgadora .

Campinas , 22 de fevereiro de 1988

Prof.Dr. Marco Antonio Teixeira
Orientador



Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática , Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro das seguintes entidades :

- Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico Tecnológico-
CNPq .
- * - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-
CAPES .
- Universidad de Tarapacá , Arica , Chile - UTA .

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador , Prof.Dr. MARCO ANTONIO TEIXEIRA , pela proposta do trabalho , a orientação e a sempre boa disposição comigo .

Ao meu amigo , Prof.Dr. RAFAEL LABARCA , por ter me introduzido nos Sistemas Dinâmicos e estar sempre do meu lado .

Aos amigos VICTOR AYALA e RICARDO SANTANDER pela forma como influenciaram em mim , mas não sabem como .

Aos colegas do DEPARTAMENTO DE MATEMATICA da Universidad de Tarapacá de Arica-Chile , muitos deles importantes pelo incentivo que me deram durante meus estudos no IMECC .

A meus primos ROLY e LERSIA de São Paulo, por fazer grata a minha (nossa) estada no Brasil .

A todos aqueles que colaboraram com meus estudos e que involuntariamente , foram esquecidos .

A

BILINKA

*com todo meu amor , pelo que
ela significa para mim .*

A

Meus PAIS e IRMÃS

pelo incentivo e confiança .

INDICE

Pág.

INTRODUÇÃO	I
Capítulo 1 : CONSIDERAÇÕES E CONCEITOS GERAIS NA TEORIA DE SINGULARIDADES E BIFURCA- ÇÕES DE CAMPOS DE VETORES . PRINCI- PAIS RESULTADOS	1
§ 1.0. Preliminares	2
§ 1.1. Germes e Jatos de Campos de Vetores ...	10
§ 1.2. Equivalencia e Estabilidade de Ger- mes de Campos de Vetores	15
§ 1.3. Forma Normal para Singularidades	18
§ 1.4. Singularidades de Codimensão Finita ...	24
§ 1.5. Bifurcações de Famílias a parâmetros de Campos	30
§ 1.6. Os Principais Resultados	39
Capítulo 2 : BLOWING-UPS DE CAMPOS DE VETORES	43
§ 2.0. Um Blowing-up esférico	44
§ 2.1. Um Blowing-up direcional	60
§ 2.2. Relação entre Blowing-ups direcionais e esféricos	62
§ 2.3. O ∞ -jato de \bar{X}^1 em 0	63
§ 2.4. Blowing-ups direcionais sucessivos	64
§ 2.5. Redução a uma singularidade com 1-jato não nulo	70
Capítulo 3 : A SINGULARIDADE $\lambda(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y})$ EM \mathbb{R}^3	76
§ 3.0. Variedades Invariantes	76
§ 3.1. Comportamento num cone de contato	80
§ 3.2. Estratificação	85
§ 3.3. Bifurcações	93
APÊNDICE	103
BIBLIOGRAFIA	114

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é o estudo do comportamento qualitativo das trajetórias de um campo de vetores em \mathbb{R}^3 , em torno de uma singularidade. Mais especificamente, pretendemos:

1. Dar uma classificação topológica de alguns tipos de singularidades que genericamente estão em famílias de campos de vetores, de classe C^∞ , a 2-parâmetros no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Basicamente, a bibliografia usada está concentrada em [Du.4] [Gu.3], [Gu.Ho.] e [Ta.5].
2. Introduzir as técnicas de Blowing-ups de campos de vetores, especialmente as noções de Blowing-ups direcionais sucessivos e de sequência maximal de Blowing-ups, com o propósito de obter propriedades relativas a cones de contato em torno a uma direção. Basicamente a bibliografia usada para esta parte, está concentrada em [Bo.] e [Bo.Du.] .

Seja $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que numa base conveniente de \mathbb{R}^3 (dada pelo Teorema de Jordan), ela pode ser determinada por uma matriz do tipo ;

$$E_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; \quad E_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; \quad E_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ -\lambda & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; \quad E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & \lambda \\ 0 & -\lambda & b \end{pmatrix} ; \quad E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; \quad E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde a, b, c e λ são reais não nulos.

Denotaremos por G^3 ao espaço dos germes em $0 \in \mathbb{R}^3$, de campos de vetores infinitamente diferenciáveis tal que $X(0) = 0$ para todo $X \in G^3$. Sejam $j_k X(0)$ o k -jato de X em 0 e J_k^3 o espaço vetorial destes k -jatos munido da topologia euclidiana.

Seja $M(3, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 3×3 com coeficientes reais.

Podemos identificar $M(3, \mathbb{R})$ com J_1^3 através de ;

$$i : M(3, \mathbb{R}) \longrightarrow J_1^3, \text{ tal que } A = (a_{ij}) \xrightarrow{i} j_1 l(A)(0)$$

onde, $l(A) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$. Desta forma, podemos estratificar J_1^3 (e portanto G^3) em 14 subconjuntos semi-algéblicos ; isto é, em subconjuntos definidos por igualdades e desigualdades polinomiais tal que sua codimensão é dada pela parte algébrica [Du.4].

Mais especificamente, $G^3 = \bigcup_{i=1}^{14} W(E_i)$, onde

$$W(E_i) = \left\{ X \in G^3 / \text{Existe } \varphi : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{1-jato de difeomorfismo tal que } j_1(\varphi_* X)(0) = \\ j_1 l(E_i)(0) \end{array} \right\}$$

sendo E_i as matrizes anteriores e $\varphi_* X = D(\varphi \circ X)$.

É amplamente conhecido que :

1. $W(E_1), W(E_2), W(E_3)$ e $W(E_4)$ são abertos em G^3 e além disto, $W(E_1) \cup W(E_2) \cup W(E_3) \cup W(E_4)$ é denso em G^3 . Esta união é chamada o Espaço dos germes em 0 de singularidades hiperbólicas em \mathbb{R}^3 . Isto significa que a parte real de seus autovalores é não nula.
2. Todo elemento desta união se diz hiperbólica e é estruturalmente estável e seu tipo topológico depende exclusivamente da matriz E_i .

No caso $W(E_5)$, a matriz E_5 tem um par de autovalores imaginários puros e nos casos $W(E_6), W(E_7), W(E_8)$, as ma

trizes E_1 tem um autovalor zero simples . Estas singularidades são chamadas de parcialmente hiperbólicas de codimensão 1 e sob certas condições adicionais , seu estudo se reduz a uma variedade central de dimensão 1 , [Ta.5] , [Gu.3] .

Análogamente , nos casos $W(E_9)$ e $W(E_{10})$, as matrizes E_1 tem zeros duplos como autovalores (são ditas de codimensão 2) e sob certas condições adicionais , seu estudo se reduz a uma variedade central de dimensão 2 , ver [Ta.5] , [Gu.3] .

O caso $W(E_{11})$ é o objetivo básico deste trabalho. E sob certas condições adicionais , trata-se também de uma singularidade de codimensão 2 em \mathbb{R}^3 . Tais campos são completamente não-hiperbólico e assim , os Teoremas "clássicos " das variedades invariantes não são aplicáveis .

Os restantes casos são de codimensão igual ou maior que 3 e não serão atacados nesta dissertação.

Um resumo dos resultados a serem demonstrados relativo a campos em $W(E_{11})$ é dado em § 1.6 .

As principais ferramentas usadas serão o Teorema da Forma Normal de Takens , o Método de Blowing-up , noções básicas de conjuntos estratificados e desdobramentos de singularidades de campos de vetores .

Este trabalho está ordenado da seguinte forma :

CAPITULO 1 : Apresentaremos uma visão de conjunto dos conceitos e resultados na Teoria de Singularidades de Campos de Vetores . Isto é feito de um modo informal , visando apresentar idéias globais conjuntamente com a problemática , deixando para a última parte deste capítulo os enunciados dos resultados a serem provados.

CAPITULO 2 : Estudaremos os Blowing-ups de campos de vetores, introduzindo as noções de Blowing-ups direcionais sucessivos e sequencia maximal de Blowing-ups de campos de vetores X segundo uma direção . Mostra-se que se a sequencia de Blowing-ups é finita então existe um cone de contato finito K em torno de uma direção D ,

tal que as órbitas entram em K e deixam K depois de um tempo finito e que se esta sequência é infinita, então a direção D é formalmente invariante sob X (invariante por Série de Taylor). Por último, mostra-se que se o campo X tem "flatness" k (finito) e que se D é formalmente invariante depois de um número finito de Blowing-ups na direção D , obtém-se um campo com 1-jato não nulo.

CAPITULO 3 : Contém o estudo dos campos em $W(E_{11})$. A existência de uma variedade 1-dimensional invariante e seu comportamento num cone de contato finito em torno a esta variedade. Dá-se uma estratificação do espaço G^3 induzida por $X \in W(E_{11})$, comprova-se que, localmente o comportamento topológico é estável fracamente e finalmente descrevem-se as bifurcações destas singularidades.

A Forma Normal dos campos de $W(E_{11})$ é determinada no capítulo 1, em § 1.3, como uma aplicação do Teorema da Forma Normal de Takens. Da mesma forma, o comportamento destes campos é dado como uma aplicação, no capítulo 2, em § 2.0 e § 2.1, do método de Blowing-up.

No começo de cada capítulo se faz uma pequena introdução do mesmo.

Os resultados do capítulo 2, estão essencialmente contidos em [Bo.], enquanto que os resultados do capítulo 3, estão contidos em [Bo.Du.], [Gu.2], [Gu.3] e [Gu.Ho.].

Finalmente é apresentada a Bibliografia principal usada neste trabalho.

CAPITULO 1 :

CONSIDERAÇÕES E CONCEITOS GERAIS NA TEORIA DE SINGULARIDADES E BIFURCA- ÇÕES DE CAMPOS DE VETORES . PRINCI- PAIS RESULTADOS

Este capítulo destina-se a apresentar alguns conceitos e resultados básicos da Teoria das Singularidades e Bifurcações de Campos de Vetores . Isto é feito de modo informal , visando a apresentar idéias globais e gerais .

Em § 1.0 , aparecem as definições gerais e da-se uma visão das propriedades genéricas .

Em § 1.1 , estuda-se o Espaço dos Germes de classe C^∞ com a sua respectiva topologia . Espaço que denotaremos por G^n .

Algumas noções de equivalencia entre campos são apresentadas em § 1.2 .

Um instrumento importante no estudo das singularidades é o Teorema da Forma Normal , o qual é apresentado em § 1.3 , conjuntamente com o conceito de Determinação Finita .

Na parte de Singularidades de Codimensão Finita , no § 1.4 , apresentamos um estudo sobre as famílias de campos de vetores dependentes de parâmetros , descrevemos a topologia do conjunto destas famílias e examinamos as estratificações de um conjunto semi-algébrico de G^n .

Em § 1.5 , estudamos o comportamento do Germe de uma família genérica de campos de vetores de codimensão finita . Desdobramentos de germes de campos são também apresentados neste ponto .

Ressaltamos que em § 1.6 estão enunciados os principais resultados a serem demonstrados no trabalho , referentes a singularidades de campos de vetores em \mathbb{R}^3 , de codimensão 2 .

§ 1.0. PRELIMINARES

Neste ponto, apresentam-se alguns fatos básicos conhecidos, concernentes a Campos de Vetores em \mathbb{R}^n e equações diferenciais autônomas e fixaremos as notações a serem usadas.

Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável, denotaremos por $T_p M$ ao espaço tangente a M pelo ponto p e por TM ao Fibrado tangente de M .

(1.0.1) Definição: Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável. Um *Campo de Vetores* de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ em M , é uma aplicação $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k , tal que $X(p) \in T_p M$, para cada $p \in M$.

Equivalentemente, se $\pi: TM \rightarrow M$ é a projeção canônica então, um Campo de vetores de classe C^k é uma aplicação, $X: M \rightarrow TM$, de classe C^k , tal que $\pi \circ X = \text{id}_M$.

Denotaremos por $\mathcal{X}^k(M)$, $1 \leq k \leq \infty$, ao conjunto dos campos de vetores de classe C^k em M .

Quando M é compacta, $\mathcal{X}^k(M)$ possui uma estrutura de Espaço de Banach.

Se $X \in \mathcal{X}^k(M)$, então para cada ponto $p \in U \subseteq M$, U aberto, o campo X pode ser representado pela aplicação,

$$\begin{aligned} X: U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\rightarrow (X_1(p), \dots, X_n(p)) \end{aligned}$$

em um sistema de coordenadas locais, onde cada $X_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k em U . Logo, se

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ é a base associada a X neste sistema, escrevemos

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

que usualmente será descrito como,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ao $X \in \mathcal{X}^k(M)$ está associado uma *Equação Diferencial Autônoma*,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = X(x)$$

e vice-versa.

O Teorema básico de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias [Hi.Sm.], estabelece que para cada $p \in M$, existe única solução com condição inicial p_0 e que as soluções variam diferencialmente com respeito de p .

Em forma mais precisa, tem-se,

- (1.0.2) Teorema : Seja $X \in \mathcal{X}^k(M)$. Dado $p_0 \in M$, existem :
- $c > 0$, vizinhança $U \subset M$ de p_0 e única função $\Phi_X:]-c, c[\times U \rightarrow M$, de classe C^k , tal que:
1. $\Phi_X(0, p) = p$, $\forall p \in U$
 2. $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_X(t, p) = X(\Phi_X(t, p))$, $\forall t \in]-c, c[$,
 $\forall p \in U$.

Geométricamente, este Teorema estabelece que todas as curvas integrais que passam por $t = 0$ numa vizinhança U de p_0 podem ser reunidas numa única aplicação diferenciável. É neste sentido que as soluções variam diferencialmente com respeito de p .

A função Φ_X é o *Fluxo* (local) de X em p . Assim o Teorema (1.0.2) estabelece que um campo de vetores de classe C^k possui um fluxo local em torno de cada ponto. Este Teorema de existência local é global quando M é compacta.

(1.0.3) Definição : Seja $X \in \mathcal{X}^k(M)$.

A *Orbita* de $p \in M$, pelo campo X , é o conjunto $O_X(p) = \{ \Phi_X(t, p) / t \in]-c, c[\}$

(1.0.4) Definição : Seja $X \in \mathcal{X}^k(M)$

$p \in M$ será dita uma *Singularidade* de X se $X(p) = 0$.

Notemos que se $X(p) = 0$, então $\Phi_X(t, p) = p$, $\forall t$, como se prova a partir do Teorema (1.0.2). Logo se X tem uma

singularidade em $p \in M$, então $O_X(p) = \{p\}$.

Quando $X(p) \neq 0$, p é chamado de *Ponto Regular* do campo X e neste caso, $O_X(p)$ é uma curva diferenciável em M (subvariedade de dimensão 1 em M), que dotaremos da orientação canônica.

Se $\Phi_X(T,p) = p$, $T \neq 0$ e $\Phi_X(t,p) \neq p \forall t \in [0,T]$: então $O_X(p)$ é chamada de *Orbita Periódica* ou *Fechada*.

A distribuição global das órbitas sobre o domínio M do campo X é o *Retrato de Fase* de X . Ou seja, o Retrato de Fase de X é a partição de M pelas órbitas de X .

Se $X \in \mathcal{X}^k(M)$ então o "movimento final" ou comportamento assintótico de $p \in M$, quando o tempo t vá para $+\infty$, é descrito precisamente em termos do conjunto ω -Limite $\omega_{X,M}(p)$, dos pontos de acumulação do fluxo $\Phi_X(t,p)$ quando $t \rightarrow \infty$. Se o tempo t vá para $-\infty$, o comportamento assintótico de $p \in M$ é descrito pelo conjunto α -Limite $\alpha_{X,M}(p)$, dos pontos de acumulação de $\Phi_X(t,p)$, $t \rightarrow -\infty$.

É imediato que se p é uma singularidade de X , então $\omega_{X,M}(p) = \alpha_{X,M}(p) = \{p\}$ e que se p pertence a uma órbita fechada $O_X(p)$, então $\omega_{X,M}(p) = \alpha_{X,M}(p) = O_X(p)$.

Notemos que ao mudar X por $-X$, mudamos os conjuntos $\alpha_{X,M}$ por $\omega_{X,M}$ e vice-versa. Por isto, ao estudar as propriedades gerais destes conjuntos, será suficiente se referir ao conjunto ω -limite.

Num começo, pode-se dizer que o problema fundamental na Teoria dos Sistemas Dinâmicos é a descrição do espaço das órbitas para um campo qualquer, isto é, procura-se conhecer o Retrato de Fase do mesmo. É, então, natural se perguntar quando é que dois espaços de órbitas tem a mesma descrição. Isto motiva as seguintes definições,

(1.0.5) Definição : Sejam $M, N \subset \mathbb{R}^n$ variedades diferenciáveis e sejam $X \in \mathcal{X}^{k_1}(M)$ e $Y \in \mathcal{X}^{k_2}(N)$. Uma bijeção $h : M \rightarrow N$ é uma *Conjugação* entre X e Y se h leva fluxos de X em fluxos de Y , preservando a parametrização.

Explicitamente ; a bijeção $h : M \rightarrow N$ é uma conjugação se $h(\Phi_X(t,p)) = \Phi_Y(t,h(p))$.

Se deseja-se preservar a similitude topológica, então pediremos que h seja homeomorfismo. Em este caso, diremos que X e Y são *Topologicamente Conjugados* ou *C^0 -Conjugados*. Se deseja-se uma similitude mais fina que a topológica, pediremos que h seja um difeomorfismo de classe C^r ($r \leq \min\{k_1, k_2\}$) e em tal caso, diremos que X e Y são *C^r -Conjugados*.

O seguinte Lema será de grande utilidade ;

(1.0.6) Lema : Sejam $X \in \mathcal{X}^{k_1}(M)$, $Y \in \mathcal{X}^{k_2}(N)$ e $r \leq \min\{k_1, k_2\}$. X e Y são C^r -conjugados se e somente se, existe $h : M \rightarrow N$ difeomorfismo de classe C^r tal que, $Dh(X(p)) = Y(h(p)) \quad \forall p \in M$ (ou $h_*X = Y$ em M).

Demonstração : Ver em [Du.4].

Além disto, se os campos X e Y são C^r -conjugados pelo difeomorfismo h , de classe C^r , verifica-se diretamente que ;

- C1. $h(O_X(p)) = O_Y(h(p))$, isto é, h leva órbitas de X em órbitas de Y .
- C2. Se $p \in M$ é uma singularidade de X então $h(p)$ é singularidade de Y .
- C3. Se $O_X(p)$ é órbita fechada ou periódica de X , então $O_Y(h(p))$ é órbita fechada ou periódica de Y .
- C4. A C^r -conjugação é uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{X}^{k_1}(M)$.

(1.0.7) Definição : Sejam $X \in \mathcal{X}^{k_1}(M)$ e $Y \in \mathcal{X}^{k_2}(N)$.

Uma bijeção $h : M \rightarrow N$ é uma *Equivalência* entre X e Y se h leva fluxos de X em fluxos de Y preservando orientação mas não necessariamente a parametrização .

Explícitamente , que a bijeção preserve a orientação dos fluxos , quer dizer que $\forall p \in M$ e $\forall t \in \mathbb{R}^+$, se $\phi_X(t,p) \in M$ então existe $t' \in \mathbb{R}^+$ tal que , $h(\phi_X(t,p)) = \phi_Y(t',h(p))$.

Novamente , se desejamos preservar a similitude topológica , pediremos que h seja um homeomorfismo e em tal caso, diremos que X e Y são *Topologicamente Equivalentes* ou *C⁰-Equivalentes* . Se desejamos uma similitude mais fina que a topológica , pediremos que h seja um difeomorfismo de classe C^r ($r \leq \min\{k_1, k_2\}$) , caso no qual diremos que X e Y são *C^r-Equivalentes* .

No caso da C^r -equivalência , ainda são válidas as considerações C1., C2., C3. e C4. dadas para a C^r -conjugação .

Note-se que se dois campos X e Y são C^r -conjugados , então eles são C^r -equivalentes .

Com estas noções podemos comparar os Retratos de Fase de dois campos de vetores .

Um primeiro problema a abordar é a conduta local dos campos de vetores em torno de ; pontos regulares , singularidades e órbitas periódicas .

As propriedades locais de um campo de vetores X , de classe C^k na vizinhança de um ponto p , somente tem interesse se $X(p) = 0$ pois se p é um ponto regular de X , o *Teorema do Fluxo Tubular* estabelece que X é C^r -conjugado ao campo $Y(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

O fluxo de Y é dado por

$$\Phi_Y(t, x) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$$

Logo , o Retrato de Fase é formado pelas retas parale-

las ao eixo x_1 , isto é, todo campo na vizinhança de um ponto regular p é da forma da Fig.1.0.1.

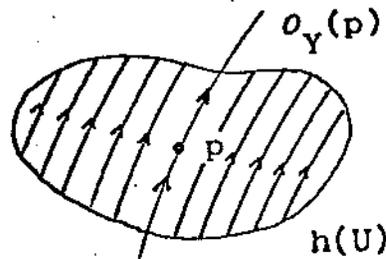


Fig. 1.0.1 : O fluxo tubular no ponto regular $p \in V \subset \mathbb{R}^2$.

Assim, o Teorema do Fluxo Tubular descreve totalmente a estrutura de órbita de um campo X na vizinhança de um ponto regular.

No que segue, daremos alguns resultados sobre propriedades do espaço das órbitas que são verificadas por campos num subconjunto aberto e denso de $\mathcal{X}^k(M)$.

(1.0.8) Definição : Seja $X \in \mathcal{X}^k(M)$ e $p \in M$ uma singularidade de X . Diremos que p é uma *Singularidade Hiperbólica* de X se os autovalores da matriz Jacobiana $DX(p)$, do campo X no ponto p , tem parte real não nula.

Hiperbolicidade implica que \mathbb{R}^n (espaço tangente a M em p), pode-se descompor, de maneira única, como, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ tal que $DX(p)$ deixa cada fator invariante, E^s é o subespaço gerado pelos autovetores cujos autovalores tem parte real negativa e E^u , respectivamente, tem parte real positiva. O *Teorema da Variedade Estável*, implica que E^s e E^u são tangentes a subvariedades de \mathbb{R}^n , chamadas variedades estáveis e inestáveis, caracterizadas como a união dos fluxos que tendem para p quando o tempo $t \rightarrow \pm \infty$. O *Teorema de Hartman-Grobman* estabelece que se $p \in M$ é uma singularidade hiperbólica do campo $X \in \mathcal{X}^k(M)$ então existem vizinhanças $U \subset M$ de p e $V \subset \mathbb{R}^n$ de 0 , tal que $X|_U$ é C^0 -conjugado com

$DX(p)|_V$. Assim, este Teorema descreve o Retrato de Fase de um campo na vizinhança de uma singularidade hiperbólica.

No que segue, M designará sempre uma variedade compacta.

(1.0.9) Definição : Seja $X \in \mathcal{X}^k(M)$ e $p \in M$ uma singularidade de X . Diremos que p é uma *Singularidade Simples* de X se $DX(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear.

(1.0.10) Proposição : Seja $p \in M$ uma singularidade simples de $X \in \mathcal{X}^k(M)$. Então existem vizinhanças W de X , U de p e uma função contínua $f : W \rightarrow U$ que a cada $Y \in W$ associa a única singularidade de Y em U . Em particular, uma singularidade simples é isolada.

Demonstração : Ver [Ba.]

Notemos que toda singularidade hiperbólica é uma singularidade simples.

(1.0.11) Definição : Seja $X \in \mathcal{X}^k(M)$, $p \in M$.

Diremos que X é *C⁰-Estável* em p se existem vizinhanças $W \subset \mathcal{X}^k(M)$ de X e $U \subset M$ de p tal que para todo $Y \in W$, existe $q \in U$ tal que X em p é *C⁰-equivalente* com Y em q .

Consideremos os conjuntos,

$$G_0 = \{X \in \mathcal{X}^k(M) / \text{as singularidades de } X \text{ são simples}\}$$

$$G_1 = \{X \in \mathcal{X}^k(M) / \text{as singularidades de } X \text{ são hiperbólicas}\}$$

e o conjunto

$$A_P = \{X \in \mathcal{X}^k(M) / X \text{ satisfaz a propriedade } P\}$$

Assim, se P é a propriedade de um campo ser C^∞ -estável em M , então A_P é o conjunto dos campos com a propriedade P .

Consideremos $TM = \{(p, v) / p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$ o Fibrado Tangente de M .

Seja $M_0 = \{(p, 0) / p \in M\}$, a seção nula. M_0 é uma subvariedade de TM , difeomorfa a M .

Associado ao campo $X \in \mathcal{X}^k(M)$ existe uma aplicação, $G_X : M \rightarrow TM$ definida por $G_X(p) = (p, X(p))$. É dizer $\pi \circ G_X = \text{Id}_M$ onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica. Um ponto $p \in M$ é uma singularidade de X se e somente se, $G_X(p) \in M_0$.

(1.0.12) Proposição : Seja $X \in \mathcal{X}^k(M)$ e $p_0 \in M$.

Então p_0 é uma singularidade simples de X se e somente se, G_X é transversal a M_0 em p_0 .

Demonstração : Ver [Ba.] .

Utilizando estes elementos e o Teorema da Transversalidade de Thom [Ab.Ro.] : " Se M é compacta e $S \subset TM$ uma subvariedade fechada, então o conjunto das aplicações $Y \in \mathcal{X}^k(M)$ transversais a S é um aberto e denso " , prova-se que G_0 é aberto e denso em $\mathcal{X}^k(M)$ e através deste resultado prova-se também que G_1 é aberto e denso em G_0 donde se tem que G_1 também é aberto e denso em $\mathcal{X}^k(M)$.

§ 1.1. GERMES E JATOS DE CAMPOS DE VETORES

Como somente estaremos interessados em propriedades locais de uma singularidade num ponto p então, para simplificar o estudo, suporemos, sem maior restrição, que $p = 0$, origem de \mathbb{R}^n .

Por outro lado, como estamos interessados em conhecer somente o que está acontecendo perto da origem, a variedade M na qual o campo X está definido, não é importante para o nosso estudo.

(1.1.1) Definição : Sejam $X, Y \in \mathcal{X}^k(\mathbb{R}^n)$ com $X(0) = Y(0) = 0$. Diremos que X e Y são *Germe-Equivalentes* em 0 se existir vizinhança U de 0 tal que $X|_U = Y|_U$.

A relação germe-equivalente é uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{X}^k(\mathbb{R}^n)$. Logo, para um campo X dado, a sua classe de equivalência chamaremos de *Germe* de X em 0 . Assim o germe de X em 0 é o conjunto dos campos de vetores de classe C^k em \mathbb{R}^n que são germe-equivalentes a X em 0 .

Analogamente, define-se o germe em 0 de funções, difeomorfismos, etc.

O germe em 0 de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é o germe em 0 da sua função característica χ_A .

Por simplicidade, usaremos a mesma notação tanto para o germe de uma aplicação (ou de um conjunto) quanto para qualquer um de seu representante.

Ao conjunto dos germes em 0 , dos campos de vetores de classe C^∞ em \mathbb{R}^n o denotaremos por G^n e será chamado *Conjunto das Singularidades*.

Antes de iniciar qualquer estudo é necessário dotar a G^n de uma topologia apropriada.

Sob inspiração do estudo clássico das funções diferenciáveis, podemos fazer "aproximações" da singularidade, isto é: se $X \in G^n$, então podemos considerar a sua Série de Taylor em torno de 0 ,

$$TX(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{|r| \geq 0} \frac{1}{|r|!} \frac{\partial^{|r|} X_i(0)}{\partial x^r} x^r \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n$; $|r| = \sum_{i=1}^n r_i$,

$$\frac{\partial^{|r|} X_i(0)}{\partial x^r} = \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n} X_i(0)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \quad x^r = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$$

Seja $T^k X(0)$ o desenvolvimento de Taylor de X em 0 truncado ao ordem k , é dizer

$$T^k X(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{|r|=0}^k \frac{1}{|r|!} \frac{\partial^{|r|} X_i(0)}{\partial x^r} x^r \frac{\partial}{\partial x_i}$$

O que se quer é introduzir uma classe de equivalência em G^n , de tal forma que duas singularidades pertencem à mesma classe se elas tem o mesmo desenvolvimento de Taylor até a ordem k .

(1.1.2) Definição: Sejam $X, Y \in G^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Diremos que X e Y são *k-jato equivalentes* se suas derivadas parciais em 0 , incluídas até as de ordem k , são iguais.

Ou seja, para que dois campos sejam *k-jato equivalentes*, exigimos a coincidência dos campos e das derivadas parciais até as de ordem k , no ponto 0 . Assim, o desenvolvimento em Série de Taylor, incluídos os termos de ordem k , são idênticos.

A relação *k-jato equivalentes* é uma relação de equivalência no conjunto G^n . Logo para $X \in G^n$, chamaremos de *k-jato* de X à classe de equivalência de X pela relação *k-jato* equivalente e por $J_k X(0)$ denotaremos o *k-jato* do germe do campo X em 0 .

Tomando os valores das derivadas de X em 0 como as coordenadas do k -jato $j_k X(0)$, temos que $j_k X(0)$ é um espaço euclidiano. Assim, um k -jato pode ser visto como um conjunto de polinômios de grau $\leq k$ ou por uma N -tupla $P = (P_1, \dots, P_N)$, onde os P_i são polinômios de grau $\leq k$ para algum N , função de n e k . Isto mostra que existe correspondência biunívoca entre k -jatos e campos de vetores X de \mathbb{R}^n com $X(0) = 0$, cujas componentes são polinômios de grau $\leq k$.

Esta correspondência induz no conjunto J_k^n dos k -jatos $j_k X(0)$ de $X \in G^n$ uma estrutura natural de espaço vetorial real. Isto dota a J_k^n de uma topologia natural.

Um sistema de coordenadas de J_k^n é constituído pelos valores das derivadas parciais até as de ordem k , calculadas no ponto 0 .

Deste modo, temos para cada k , uma projeção canónica,

$$j_k : G^n \longrightarrow J_k^n \\ X \longmapsto j_k X(0)$$

É claro que todo $\sigma \in J_k^n$ é da forma $\sigma = j_k X(0)$ para algum $X \in G^n$.

Estes espaços " k -jato" J_k^n , permitem pôr uma topologia em G^n ; a topologia menos fina que torna as projeções j_k contínuas (topologia inicial).

Notemos que se $k \leq r$ então é claro que dois germes que tiverem o mesmo r -jato em 0 , terão o mesmo k -jato em 0 .

Assim, existe uma projeção natural,

$$\pi_{rk} : J_r^n \longrightarrow J_k^n \\ j_r X(0) \longmapsto j_k X(0)$$

Isto é, π_{rk} fica determinado pelo "truncamento" dos termos de maior ordem. Estas funções π_{rk} são, evidentemente, sobrejetoras, mas π_{rk} não é injetora, exceto quando $r = k$ e

são um sistema projetor, é dizer,

$$\begin{aligned}\pi_{rk} \circ \pi_{mr} &= \pi_{mk} & \forall m \geq r \geq k \\ \pi_{rr} &= \text{id} & \forall r\end{aligned}$$

Logo, podemos definir o limite inverso dos conjuntos J_r^n pelos projetores π_{rk} .

Então J_∞^n é o limite inverso (Projetor)

$$J_\infty^n = \varprojlim J_r^n$$

Também a função,

$$\begin{aligned}j_\infty : G^n &\longrightarrow J_\infty^n \\ X &\longmapsto j_\infty X(0)\end{aligned}$$

é o limite inverso $j_\infty = \varprojlim j_k$.

Estes elementos $j_\infty X(0)$ são chamados de ∞ -jatos e J_∞^n é o espaço destes ∞ -jatos.

Em coordenadas locais, $j_\infty X(0)$ representa a Série de Taylor de X em 0 . Assim, os elementos de J_∞^n podem ser vistos como n -tuplas de séries de potências em n variáveis.

O Teorema de Borel: " $\forall T \in J_\infty^n, \exists X \in G^n$ tal que, $T = j_\infty X(0)$ "; garante que j_∞ é sobrejetora, o qual estabelece que todo elemento de J_∞^n pode ser obtido como o ∞ -jato de algum campo de vetores. J_∞^n são as Séries de Taylor de campos de vetores X em \mathbb{R}^n , $X(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{As funções, } \pi_k : J_\infty^n &\longrightarrow J_k^n & \text{induzem em } J_\infty^n \\ j_\infty X(0) &\longmapsto j_k X(0)\end{aligned}$$

a topologia menos fina que torna contínuas as projeções π_k . Esta eleição implica que $j_\infty : G^n \longrightarrow J_\infty^n$ é contínua.

Analogamente, define-se jatos de funções, difeomorfismos, etc.

Na linguagem básica a ser usada para provar alguns dos resultados deste trabalho, são necessárias algumas definições -

que essencialmente se encontram em [Bo.] e [Bo.Du.] .

(1.1.3) Definição : Sejam $X \in G^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Diremos que X tem *Flatness* k se

$$j_k X(0) = 0 \text{ e } j_{k+1} X(0) \neq 0 .$$

Denotemos por $(x, z) = (x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ um elemento de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e por $(X_x, X_z) = (X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)$ a um campo de vetores X em $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Com estas notações , entenderemos como eixo z ao conjunto $\{0\}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

(1.1.4) Definição : Seja $X \in G^n$.

Diremos que X é *não-flat* ao longo do eixo z se para o germe da aplicação ,

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \text{ tal que ,}$$

$$\gamma(z) = (0, 0, \dots, 0, z) \text{ tem-se que ,}$$

$$j_\infty (X \circ \gamma)(0) \neq 0 .$$

Caso contrário , diremos que X é *Flat* ao longo do eixo z .

(1.1.5) Definição : Seja $X \in G^n$.

Diremos que X satisfaz a *desigualdade de Lojasiewicz* , se existem $k \in \mathbb{N}$ e $c, \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que ,

$$|X(x)| \geq c |x|^k , \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ com } |x| < \delta$$

É imediato que se X satisfaz a desigualdade de Lojasiewicz então X é *não-flat* ao longo do eixo z .

(1.1.6) Definição : Seja $X \in G^n$.

Diremos que X deixa o eixo z *Formalmente invariante* se para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} X_i(0) = 0 , \forall i = 1, 2, \dots, n-1 .$$

Isto é o mesmo que dizer que $j_\infty X_x(0)$ não contém puros

termos em z .

(1.1.7) Definição : Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$.

Um germe em 0 de K é um *Cone de Contato* k de classe C^r , $r > k$, em torno de $\{0\}^{n-1} \times [0, \infty[$ se existir germe de uma aplicação $h : ([0, \infty[, 0) \rightarrow ([0, \infty[, 0)$ de classe C^r com $j_k h(0) = 0$ e $j_{k+1} h(0) \neq 0$ tal que $K = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[\mid |x| \leq h(z)\}$

§ 1.2. EQUIVALENCIA E ESTABILIDADE DE GERMES DE CAMPOS DE VETORES .

As noções de C^k -equivalencia (conjugação), $k \in \mathbb{N}$, para campos de vetores dadas em § 1.0, são extensivas em forma natural para germes de campos. Assim se estabelece que dois germes de campos de vetores são C^k -equivalentes (conjugados) quando dois qualquer (portanto todos) representantes são C^k -equivalentes (conjugados).

Para considerações posteriores nesta seção introduziremos as noções de equivalencia e estabilidade *Fraca* conjuntamente com algumas conclusões importantes.

(1.2.1) Definição : Sejam $X, Y \in G^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Diremos que X e Y são C^k -*Equivalentes-Fracamente* se existem vizinhanças $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ do 0 e homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$, de classe C^k tal que para toda vizinhança $V \subset U_1$ de 0 y para todo $p \in V$, tem-se que

$$w_{X, h(V)}(h(p)) = h(w_{X, V}(p)) \quad \text{e}$$

$$\alpha_{Y, h(V)}(h(p)) = h(\alpha_{Y, V}(p)) .$$

Como é fácil apreciar, ser C^k -equivalente-fracamente não depende da escolha dos representantes.

Um critério para o h , da definição, realizar uma C^k -equivalência-fracá é dado pelo seguinte,

(1.2.2) Lema [Ta.5]

Sejam $X, Y \in G^n$, $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ vizinhanças limitadas de 0 e $h: U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfismo de classe C^k . Sendo $K_1 = \{p \in U_1 / \omega_{X,U_1}(p) \neq \emptyset\}$ e $K_2 = \{p \in U_2 / \alpha_{Y,U_2}(p) \neq \emptyset\}$ então h realiza uma C^k -equivalência-fracá entre X e Y se, e somente se;

1. $h(K_1) = K_2$
2. $h|_{K_1}$ leva fluxos de X , preservando sentido, em fluxos de Y .

Demonstração: Ver em [Ta.5].

Das definições acima, vemos que se $X, Y \in G^n$ são C^k -equivalentes então eles são C^k -equivalentes-fracamente. O recíproco não é verdadeiro (ver [Ta.5]).

(1.2.3) Definição: Sejam $X \in G^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Diremos que X é C^k -estável (fracamente) se existe vizinhança V de X em G^n tal que $\forall Y \in V$, Y é C^k -equivalente (fracamente) com X .

Analogamente, poderíamos definir C^k -estabilidade para C^k -conjugação, mas isto não tem sentido se $k \geq 1$. Pois se $X \in G^n$ é C^k -estável por C^k -conjugação para $k \geq 1$ então existe V , vizinhança de X em G^n tal que $\forall Y \in V$, Y é C^k -conjugado com X . Logo existe h , difeomorfismo de classe C^k tal que $Y = dh \circ X \circ h^{-1}$. Tomando a primeira derivada desta equação em 0, tem-se que $j_1 Y(0) = dh \circ j_1 X(0) \circ dh^{-1}$ é dizer, os autovalores de $j_1 Y(0)$ e $j_1 X(0)$ devem ser os mesmos; mas se $a \pm ib$ é um autovalor de $j_1 X(0)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ as singularidades $X_n = X - X_1 + A_n \in V$, onde X_1 é campo linear

com $j_1 X_1(0) = j_1 X(0)$ e A_n campo linear com os mesmos autovalores de Y , exceto $a \pm ib$, e aí tem $(a + \frac{1}{n}) \pm ib$ como autovalor. Logo, os autovalores de $j_1 X(0)$ não são iguais aos de $j_1 Y(0)$.

(1.2.4) Definição : Seja $X \in G^n$.

Diremos que X é *Estruturalmente Estável* se X é C^0 -estável por C^0 -conjugação.

Uma primeira questão é saber quais são os germes de campos de vetores C^0 -estável. Para singularidades, a resposta é dada pelo *Teorema de Hartman-Grobman*, na versão que estabelece: " $X \in G^n$ é C^0 -estável se, e somente se, $j_1 X(0)$ é hiperbólico".

Observemos que o conjunto dos germes hiperbólicos (portanto estáveis) é aberto e denso em G^n .

Uma outra questão a ser considerada é a estabilidade estrutural em G^n : Quando os campos são definidos numa variedade compacta de dimensão 2, M. Peixoto (1962) dá uma resposta positiva, enquanto que para dimensões ≥ 3 existem somente respostas parciais.

Com respeito à genericidade desta propriedade para dimensão 2 em variedades orientáveis, a resposta também é dada por Peixoto em forma positiva, entanto que para dimensões ≥ 3 , a resposta é negativa (Smale).

Relativamente a um subconjunto $K \subset G^n$, temos a seguinte definição de estabilidade,

(1.2.5) Definição : Sejam $K \subset G^n$ e $X \in K$.

Diremos que X é K - C^k -estável (fracamente) se existe $W \subset G^n$ vizinhança de X tal que todo $Y \in K \cap W$ é C^k -equivalente (fracamente) com X .

Em geral estudam-se as relações de C^0 -equivalência ou C^0 -conjugação quando se considera K como o conjunto G^n inteiro ou como subconjuntos do tipo A_p (ver pág.8) .

§ 1.3. FORMA NORMAL PARA SINGULARIDADES

Neste ponto vamos descrever um instrumento importante no estudo das singularidades : O Teorema da Forma Normal .

Podemos classificar este como uma classe de Teorema de Preparação formal , no sentido que nos permite expressar o ∞ -jato numa forma mais simples , por " mudanças de coordenadas " .

Inicialmente , podemos usar uma mudança linear de coordenadas para pôr o 1-jato da singularidade na "Forma Normal de Jordan" .

Podemos adaptar o ∞ -jato no seguinte sentido :

Seja $X \in G^n$ e seja L um campo linear em \mathbb{R}^n tal que $j_1 L(0) = j_1 X(0)$. Consideremos o espaço vetorial de dimensão finita , $H^l = \{ X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n) / X = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i} , \text{ tal que os } P_i \text{ são polinômios homogêneos de grau } l \}$

Seja $[L, -] : H^l \longrightarrow H^l$
 $Y \longmapsto [L, Y]$

onde $[L, Y]$ é o colchete de Lie para campos , cuja expressão em coordenadas é ,

$$\left[\sum_{i=1}^n L_i \frac{\partial}{\partial x_i} , \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = \sum_{i,j=1}^n (L_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial L_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Para cada $l \leq k$, inteiro positivo temos que ,

$H^l = \text{Im } [L, -] \oplus K^l$, onde K^l é qualquer espaço complementar de $B^l = \text{Im } [L, -]$.

(1.3.1) Teorema (Forma Normal [Ta.5])

Sejam X , L , B^l e K^l como na página anterior.

Então existe um germe de um difeomorfismo,

$\varphi: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $\varphi_* X = X_N$ é da forma ,

$$X_N = L + g_2 + g_3 + \dots + R_\infty$$

onde $g_l \in K^l$, $l = 2, 3, \dots$

Demonstração : Ver [Ta.5] .

(1.3.2) Uma Aplicação :

Seja $X \in G^3$ e $L = \lambda (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$j_1 X(0) = L .$$

Então existe germe em 0 de um difeomorfismo ,

$\varphi: (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, de classe C^∞ tal que ,

$$\varphi_* X = (\lambda + f(x^2 + y^2, z)) (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) + g(x^2 + y^2, z) (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + h(x^2 + y^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + R_\infty(x, y, z) ,$$

onde $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = \frac{\partial h}{\partial z}(0,0) = 0$ e

$$j_\infty R_\infty(0) = 0 .$$

Demonstração :

Seja $H^l = \{ Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^3) / Y = Y_1 \frac{\partial}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial}{\partial y} + Y_3 \frac{\partial}{\partial z} ,$

onde os Y_i são polinômios homogêneos de grau l nas variáveis $(x, y, z) \}$.

O colchete de Lie da álgebra dos polinômios induz

$$[L, -] : H^l \longrightarrow H^l$$

$$Y \longmapsto [L, Y]$$

Sendo $B^l = \text{Im } [L, -]$ e K^l um complementar de B^l em H^l , para determinar a Forma Normal de Takens de X , devemos encontrar uma base de autovetores de K^l ; para isto , complexi

fiqemos H^l . Então consideremos $H^l \otimes \mathbb{C} = \{ Y^1 + iY^2 / Y^1, Y^2 \in H \}$

A ação de Lie $[L, -]$ é definida por ,

$$[L, Y^1 + iY^2] = [L, Y^1] + i[L, Y^2]$$

Para construir uma base de autovetores em $H^l \otimes \mathbb{C}$, consideremos os campos ;

$$Z_+ = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_- = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad Z = \frac{\partial}{\partial z},$$

de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{C}$ e as funções ,

$$V^{r,s,t} = \begin{cases} (x^2 + y^2)^r (x + iy)^s z^t & \text{para } r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0 \\ (x^2 + y^2)^r (x - iy)^{-s} z^t & \text{para } r \geq 0, s \leq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo os cálculos , tem-se que ;

$$[L, Z_+] = -\lambda i Z_+ \quad ; \quad [L, Z_-] = \lambda i Z_- \quad ; \quad [L, Z] = 0$$

$$\text{e } LV^{r,s,t} = -\lambda s i V^{r,s,t}.$$

Por propriedade do colchete de Lie , tem-se que ,

$$\begin{aligned} [L, V^{r,s,t}_{Z_\pm}] &= V^{r,s,t} [L, Z_\pm] + LV^{r,s,t}_{Z_\pm} \\ &= \mp \lambda i Z_\pm V^{r,s,t} - \lambda s i Z_\pm V^{r,s,t} \\ &= -\lambda (s \pm 1) i Z_\pm V^{r,s,t} \quad \text{e ,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [L, V^{r,s,t}_Z] &= V^{r,s,t} [L, Z] + LV^{r,s,t}_Z \\ &= -\lambda s i V^{r,s,t}_Z \end{aligned}$$

Logo , $V^{r,s,t}_{Z_\pm}$ e $V^{r,s,t}_Z$ são autovetores de $[L, -]$ com autovalores $-\lambda (s \pm 1) i$ e $-\lambda s i$.

Portanto , $\{ V^{r,s,t}_{Z_+}, V^{r,s,t}_{Z_-}, V^{r,s,t}_Z \}$, com $r > 0$, $t \geq 0$ e $2r + |s| + t = l$, é uma base de $H^l \otimes \mathbb{C}$.

Para calcular $\text{Ker } [L, -]$ se , $[LV^{r,s,t}_{Z_\pm}] = 0$, como $\lambda \neq 0$ então $s = \mp 1$, logo $l = 2r + 1 + t$, donde $t = l - (2r + 1)$ e como $t \geq 0$, tem-se que $r \leq \frac{l-1}{2}$.

Por outro lado, de $[L, V^{r,s,t}Z] = 0$, tem-se que $s = 0$ e portanto, $l = 2r+t$ donde $t = l - 2r$, mas como $t \geq 0$ então, $r \leq \frac{l}{2}$.

Assim $\text{Ker } [L, -]$ é gerado pelos conjuntos,

$$\left\{ V^{r,-1,l-(2r+1)}_{Z_+}, V^{r,-1,l-(2r+1)}_{Z_-} \right\}, \quad 0 \leq r \leq \frac{l-1}{2} \quad e$$

$$\left\{ V^{r,0,l-2r}_Z \right\}, \quad 0 \leq r \leq \frac{l}{2}.$$

Consideremos :

$$W_+^{l,r} = \frac{1}{2} \left(V^{r,1,l-(2r+1)}_{Z_-} + V^{r,-1,l-(2r+1)}_{Z_+} \right) =$$

$$= (x^2 + y^2)^r z^{l-(2r+1)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$W_-^{l,r} = \frac{i}{2} \left(V^{r,1,l-(2r+1)}_{Z_-} - V^{r,-1,l-(2r+1)}_{Z_+} \right) =$$

$$= (x^2 + y^2)^r z^{l-(2r+1)} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$W^{l,r} = V^{r,0,l-2r}_Z = (x^2 + y^2)^r z^{l-2r} \frac{\partial}{\partial z}$$

Assim $W_{\pm}^{l,r}$ e $W^{l,r}$ geram o $\text{Ker } [L, -]$ em $H^l \otimes \mathbb{C}$.

Como $W_{\pm}^{l,r}$ e $W^{l,r}$ são reais, então eles geram ao $\text{Ker } [L, -] = K^l$ em H^l .

Agora pelo Teorema da Forma Normal de Takens, existe um difeomorfismo $\varphi: (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ de classe C^∞ tal que

$$\varphi_* X = L + g_2 + g_3 + \dots + R_\infty$$

onde $g_j \in H^j$ e $j_\infty R_\infty(0) = 0$.

Em nosso caso, especificamente temos :

$$g_1(x,y,z) = \sum_{r=0}^{r'} a_{l,r+1} (x^2 + y^2)^r z^{l-(2r+1)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{r'} b_{l,r+1} (x^2 + y^2)^r z^{l-(2r+1)} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{r''} c_{l,r+1} (x^2 + y^2)^r z^{l-2r} \frac{\partial}{\partial z}$$

onde $r' \leq \frac{l-1}{2}$ e $r'' \leq \frac{l}{2}$.

Assim , com ,

$$f(x^2 + y^2, z) = \sum_{l \geq 2} \sum_{r=0}^{r'} b_{l,r+1} (x^2 + y^2)^r z^{l-(2r+1)}$$

$$g(x^2 + y^2, z) = \sum_{l \geq 2} \sum_{r=0}^{r'} a_{l,r+1} (x^2 + y^2)^r z^{l-(2r+1)}$$

$$h(x^2 + y^2, z) = \sum_{l \geq 2} \sum_{r=0}^{r''} c_{l,r+1} (x^2 + y^2)^r z^{l-2r}$$

verifica-se os resultados de (1.3.2)

Em particular , pode-se ver diretamente da Definição (1.1.6) que o $\varphi_* X$ nesta aplicação deixa o eixo-z formalmente invariante . Isto é as componentes de $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ da Série de Taylor de $\varphi_* X$ não contém termos puros em z .

Uma questão que seria interessante de saber agora é quantos termos na expansão da Serie de Taylor são necessários para determinar o Retrato de Fase do campo e o seu tipo de estabilidade .

Nesta direção é importante o Teorema da Forma Normal . Com ele diminui o número de coeficientes no ∞ -jato e em consequência , simplifica consideravelmente a busca de um critério de determinação de tipo finito

Consideremos as seguintes definições ,

(1.3.3) Definição : Um k-jato T_k é chamado C^0 -determinado (fracamente) se para todo $X, Y \in G^n$ com ,
 $j_k X(0) = j_k Y(0) = T_k$, X e Y são C^0 -equivalentes (fracamente) .

(1.3.4) Definição : Seja $X \in G^n$.

Diremos que X é *Finitamente Determinado (Fracamente)* se existe $k \in \mathbb{N}$ finito , tal que $j_k X(0)$ é C^0 -determinado (fracamente) .

Quando estamos interessados no comportamento assintótico ou comportamento qualitativo de uma singularidade numa vizinhança de uma certa posição de equilíbrio, se ela for finitamente determinada, então será suficiente, para a análise requerida, calcular uma aproximação polinomial de um certo grau.

No contexto da determinação finita, um primeiro resultado é dado pela versão do *Teorema de Hartman-Grobman* que estabelece que o 1-jato de $X \in G^n$ é C^0 -determinado se, e somente se, ele é hiperbólico.

Por outro lado, se $X \in G^n$ é tal que o $j_1 X(0)$ representado por $DX(0)$ induz uma descomposição de \mathbb{R}^n (usando o Teorema de Jordan) como $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ onde E^s , E^u e E^c é o subespaço invariante por X , gerado pelos autovetores cujos autovalores tem parte real negativa (respectivamente, parte real positiva e parte real nula). Então X é *Parcialmente Hiperbólico* se $\dim(E^s \oplus E^u) \neq 0$ (i.é. X tem parte hiperbólica) e $\dim E^c \neq 0$ (i.é. X tem parte não hiperbólica). Neste caso, para cada $r \in \mathbb{N}$, existe $W_X^c \subset \mathbb{R}^n$ variedade diferenciável de classe C^r , chamada *Variedade Central* (que não é única), invariante por X tal que W_X^c é tangente a E^c em 0 e $j_1(X|_{W_X^c})(0) = DX(0)|_{E^c}$.

Outros exemplos de determinação finita são fornecidos por estas singularidades parcialmente hiperbólicas, as quais são finitamente determinadas na variedade central [Du.3].

Finalmente, se T_k é um k -jato não determinado, o fato de existir um l -jato determinado T_l com $\pi_{lk}(T_l) = T_k$ ($l \geq k$), é uma questão que segue aberta em \mathbb{R}^3 entanto que em \mathbb{R}^2 tem-se resposta positiva.

§ 1.4. SINGULARIDADES DE CODIMENSÃO FINITA

O objeto básico de interesse são as famílias de campos de vetores de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, em \mathbb{R}^n dependentes de m -parâmetros $\mu \in \mathbb{R}^m$.

Uma família de campos de vetores de classe C^k dependentes de m -parâmetros $\mu \in \mathbb{R}^m$, sobre \mathbb{R}^n é definida pelo campo de vetores ,

$$X_\mu(x) = \sum_{i=1}^n X_i(\mu, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e as funções X_i serão supostas de classe C^k em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Denotaremos por $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ ao espaço destes campos de classe C^∞ .

Dotemos a $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ da seguinte topologia ;

Consideremos inicialmente o conjunto ,

$$E_k = (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \prod_{i=1}^k L^i(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad , \quad \text{onde}$$

$$L^i(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{ A : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^i \longrightarrow \mathbb{R}^n / A \text{ é } i\text{-linear} \}$$

e a aplicação $J^k : \mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow E_k$

$$X_\mu \longmapsto ((\mu, x), X_\mu(x), DX_\mu(x), \dots, D^k X_\mu(x))$$

Para cada $U \subset E_k$ aberto , definamos ,

$$M_k(U) = \{ X_\mu / J^k X_\mu(x) \subset U, \forall (x, \mu) \} .$$

A família $\{ M_k(U) \}_{U \subset E_k \text{ aberto}}$, forma uma base para uma topologia de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, chamada a C^k -topologia de Whitney .

Seja $W_k = \{ \text{abertos de } \mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \text{ para a } C^k\text{-topologia de Whitney} \}$, A coleção $\bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$ forma uma base para uma topologia chamada a C^∞ -topologia de Whitney .

A grande propriedade que tem esta topologia é que faz

de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ um Espaço de Baire . Então todo conjunto residual é denso .

Como em § 1.0 , a cada família X_μ , está associada uma família de equações diferenciais ,

$$\dot{x} = X_\mu(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}^m .$$

As soluções desta equação são descritas pelo fluxo ,

$$\Phi_{X_\mu} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n .$$

No § 1.0 , são introduzidas algumas noções de C^0 -equivalência (conjugação) entre campos de vetores . Estas noções são extensivas às famílias de campos em $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$: Duas famílias X_μ , Y_μ , a m -parâmetros , sobre \mathbb{R}^n , são C^0 -equivalentes se existir aplicação ,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mu, x) &\longmapsto h_\mu(x) \end{aligned}$$

tal que para todo $\mu \in \mathbb{R}^m$, $h_\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma C^0 -equivalência entre X_μ e Y_μ .

Análogamente , define-se C^0 -conjugação .

Um problema principal consiste em descrever algumas partes de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ cujos elementos são interessantes ou bem seja por causa de sua estabilidade ou então devido a uma certa genericidade em $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$.

No que segue vamos-nos a referir aos tipos de singularidade que se encontram em famílias genéricas de campos de vetores a m -parâmetros , as quais chamaremos de *codimensão finita* .

Algumas questões concernentes ao tipo topológico das singularidades de codimensão finita são por exemplo :

1. São as singularidades de codimensão finita , finitamente determinadas (para C^0 -equivalência fraca) ? . Mais precisamente , é , para todo m , possível encontrar um conjunto genérico de famílias a m -parâmetros não contendo mais que sin-

gularidades finitamente determinadas (para C^0 -equivalencia)?

Quando $n \geq 5$ e para $m \geq 3$: a resposta é negativa até para C^0 -equivalencia-fraca [Ta.5] . Para $n = 4$: existe k tal que a resposta é negativa para $m \geq k$ [Ta.5] . Para $n = 3$, conjectura Takens [Ta.5] que a resposta é negativa e para $n=2$: Todas as singularidades de codimensão finita são finitamente determinadas [Du.1] .

2. Uma outra questão é de caracterizar ou mesmo , classificar as singularidades de codimensão m para m tão grande como for possível .

As singularidades de codimensão 2 , descritas por Arnold , tem sido classificadas por Takens , Bogdanov e Dumortier para a noção de C^0 -equivalencia fraca . Algumas singularidades de codimensão 3 no \mathbb{R}^2 tem sido estudadas por Dumortier-Roussarie-Sotomayor [Du.Ro.So.] .

Para apresentar estes resultados , examinaremos , no que segue , como obter partições de G^n chamadas *Estratificações* de um conjunto *Semi-algébrico* .

Consideremos E um espaço vetorial real , de dimensão finita .

(1.4.1) Definição : $V \subset E$ se diz um *Subconjunto Semi-algébrico Básico* se existem polinômios $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$ tal que ,

$$V = F^{-1}(0) \cap G^{-1}(I)$$

onde $F = (f_1, \dots, f_r)$, $G = (g_1, \dots, g_s)$,
 $0 \in \mathbb{R}^r$ e $I = (\mathbb{R}^+)^s$ ou $(\mathbb{R}^-)^s$ ou
 $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^s$.

$W \subset E$ se diz um *Subconjunto Semi-algébrico* se é união finita de subconjuntos semi-algébricos básicos .

Seja A o ideal dos polinômios que anulam-se em $F^{-1}(0)$. O espaço das derivadas em $p \in V$, dos polinômios, $f \in A$ é o espaço vetorial real,

$$\text{Der}_p(A) = \{ df(p) / f \in A \}$$

então, $\text{cod } V = \inf_{p \in V} (\dim_{\mathbb{R}} \text{Der}_p(A))$

é a *Codimensão* de um subconjunto semi-algêbrico básico.

(1.4.2) Definição: A *Codimensão* de um subconjunto semi-algêbrico $W \subset E$ é a menor das codimensões dos subconjuntos semi-algêbricos básicos. Isto é, se $W = \bigcup_{i=1}^k V_i$, V_i semi-algêbricos básicos, então,

$$\text{cod } W = \inf_i (\text{cod } V_i)$$

(1.4.3) Definição: Seja $W \subset E$ semi-algêbrico.

Se $\text{cod } W = k$, $p \in W$ se diz *Regular*, se existe vizinhança $U \subset E$ de p e k polinômios, f_1, \dots, f_k , tal que $\{df_1(p), \dots, df_k(p)\}$ são linearmente independentes e $W \cap U = f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_k^{-1}(0) \cap U$, é dizer, é uma variedade diferenciável de codimensão k .

Se $W \subset E$ é semi-algêbrico e $V_1 = \{p \in W / p \text{ é não regular}\}$, um resultado importante é dado pelo Teorema em [Ab.Ro.] que estabelece: V_1 é semi-algêbrico, fechado em W e

$$\text{cod } V_1 > \text{cod } W.$$

Deste Teorema é claro como subdividir um conjunto semi-algêbrico em variedades de codimensão crescente.

Iterando esta construção, obtem-se uma cadeia de sub-

conjuntos $W \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset \emptyset$, onde V_{i+1} é um conjunto singular de V_i .

As propriedades que interessa-nos é que cada V_i seja um conjunto fechado e que $V_i \setminus V_{i+1}$ seja uma variedade aberta e densa em V_i .

Então consideremos a seguinte,

(1.4.4) Definição : Seja $W \subseteq E$ um conjunto semi-algébrico.

Uma *Estratificação* de W é uma sequência de subconjuntos $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ de codimensão crescente com a propriedade que cada *Estrato* $V_i \setminus V_{i+1}$ seja uma variedade aberta e densa em V_i , $V_1 = W$.

Outro resultado importante, concernente a subconjuntos semi-algébricos é o seguinte Teorema, consequência do *Teorema de Seidenberg-Tarski* [Se.],

(1.4.5) Teorema : A imagem de um subconjunto semi-algébrico sob uma aplicação polinomial, é um conjunto semi-algébrico.

Demonstração : Ver [Du.4]

Usando o resultado desta Teorema, pode-se provar também que o fecho de um semi-algébrico é semi-algébrico.

A estrutura algébrica natural de J_k^n permite a

(1.4.6) Definição : $W \subseteq G^n$ vai-se dizer uma *Subvariedade diferenciável* ou *Subvariedade Algébrica* ou *Subconjunto Semi-algébrico* se para algum k ,

$W = J_k^{-1}(W_k)$ onde W_k é alguma subvariedade diferenciável ou subvariedade algébrica ou subconjunto semi-algébrico, respectivamente, em J_k^n .

Importante ao trabalhar com Formas Normais é a seguinte,

(1.4.7) Proposição : [Ta.5]

Seja $K \subset J_k^n$ semi-algébrico.

Então $K' = \{ \alpha \in J_k^n / \text{existe } k\text{-jato de um difeomorfismo } \varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \text{ tal que } \varphi_* \alpha \in K \}$

é também semi-algébrico.

Demonstração : Ver [Du.4].

F. Takens, no seu trabalho sobre Singularidades de Campos de Vetores [Ta.5] prova os seguintes resultados;

Se G^n é o espaço dos germes de uma singularidade em 0, dos campos de vetores em \mathbb{R}^n , de classe C^∞ , então :

- a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe estratificação por subconjuntos semi-algébricos fechados $V_1 \supset V_2 \supset V_3$ em G^n , de codimensão 1, 2 e 3 respectivamente tal que com $V_0 = G^n$, $i = 1, 2, 3$ cada $X \in V_{i-1} \setminus V_i$, é V_{i-1} - C^0 -estável-fracamente.
- b) Se $n \geq 5$, então não existe sequência $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset V_4$ de subconjuntos semi-algébricos fechados de G^n com as propriedades de a).
- c) Para $n = 4$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que não existe sequência, $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_k$ de subconjuntos semi-algébricos fechados de G^4 com as propriedades a).

Os problemas abertos são :

- 1) Qual é o mínimo valor de k em c) ?
- 2) É razoável conjecturar que em G^2 existe uma sequência infinita $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$, como em a)
- 3) Existe sequência infinita em G^3 ?
- 4) É possível mudar C^0 -estabilidade-fraca por C^0 -estabilidade ?

Uma resposta ao problema 3), feita através da análise de singularidades em \mathbb{R}^3 e suas bifurcações é dada em [Bi.Ur.] e em [Bi.Ca.Sa.Ur.] .

Em [Bi.Ur.] estuda-se campos de vetores $X \in G^3$ tal que o espectro de $j_1 X(0)$ tem um par de elementos no eixo imaginário, e em [Bi.Ca.Sa.Ur.] os campos de vetores $X \in G^3$ tal que o espectro de $j_1 X(0)$ tem somente um elemento nulo. O estudo destes campos, reduzem-se, respectivamente aos casos $W(E_5)$ e $W(E_6)$, $W(E_7)$, $W(E_8)$.

Nestes artigos se estabelece o comportamento topológico destas singularidades e da-se uma resposta parcial ao problema de Takens de distribuição dos campos com singularidades parcialmente hiperbólicas e seu tipo de estabilidade. Descreve-se também os *Desdobramentos* envolvidos e mostra-se que o conjunto dos germes destes campos é um conjunto estratificado, cujos estratos são conjuntos localmente fechados e de codimensão crescente em G^3 .

§ 1.5. BIFURCAÇÕES DE FAMÍLIAS A PARÂMETROS

Consideremos uma família X_μ de campos de vetores a m -parâmetros .

Como o nosso estudo é local, somente consideraremos as soluções da equação $X_\mu(x) = 0$ e os respectivos autovalores da matriz Jacobiana $D_x X_\mu$.

Seja $S = \{(\mu, p) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n / X_\mu(p) = 0\}$, o conjunto das soluções da equação $X_\mu(x) = 0$. Então, para μ fixo, $S_\mu = \{p \in \mathbb{R}^n / (\mu, p) \in S\}$ é o conjunto das singularidades do campo X_μ .

As singularidades de X_μ podem ser descritas por funções contínuas de μ onde a matriz Jacobiana $D_{x, \mu} X_\mu$ é não-singular. Explícitamente, se $(\mu_0, p) \in S$ e se $D_{x, \mu_0} X_{\mu_0}(p)$ é não-singular, então pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função contínua $x = x(\mu)$ definida numa vizinhança $U \subset \mathbb{R}^m$ de μ_0 tal que $x(\mu_0) = p$ e $X_\mu(x(\mu)) = 0$. Mais ainda, qualquer solução de $X_\mu(x) = 0$ perto de (μ_0, p) é da forma $(\mu, x(\mu))$.

Ao gráfico destas funções chamaremos de *Ramo de Equilíbrio* de X_μ . Num *equilíbrio* $(\mu_0, p) \in S$ onde a matriz Jacobiana $D_{x, \mu_0} X_{\mu_0}$ é singular, vários ramos de equilíbrio podem emergir. Neste caso, diremos que (μ_0, p) é um *Ponto Singular* de X_μ .

Bifurcações de equilíbrios usualmente produzem mudanças de tipo topológico no fluxo.

(1.5.1) Definição : Seja $X_\mu \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$.

$\mu_0 \in \mathbb{R}^m$ é um *Valor de Bifurcação* de X_μ se em toda vizinhança $U \subset \mathbb{R}^m$ de μ_0 existe $\mu_1 \in U$ tal que X_{μ_1} não é topologicamente equivalente a X_{μ_0} .

Isto que dizer que os fluxos $\Phi_{X_{\mu_1}}$ e $\Phi_{X_{\mu_0}}$ são qualitativamente diferentes.

Em linguagem menos formal, pode-se dizer que uma mudança qualitativa profunda ou Bifurcação acontece no Retrato de Fase de X_μ por uma pequena perturbação do parâmetro μ em torno de um valor de bifurcação μ_0 de X_μ .

Nosso interesse primário são os equilíbrios de X_μ e sua estabilidade. Este interesse está associado com famílias de campos que possuem equilíbrios *degenerados*, isto é equilíbrios nos quais a matriz Jacobiana $D_{x,\mu} X_\mu$ possui autovalores no eixo i maginário.

Para ilustrar estas idéias consideremos o seguinte exemplo.

(1.5.2) BIFURCAÇÃO DE HOPF.

Seja a família,

$$X_\mu(x,y) = (\mu x + \lambda y + ax(x^2 + y^2)) \frac{\partial}{\partial x} + (\mu y - \lambda x + ay(x^2 + y^2)) \frac{\partial}{\partial y}$$

Supondo $\lambda > 0$ e $a > 0$, de $X_\mu(x,y) = 0$ temos que numa vizinhança da origem, os pontos $(\mu, 0, 0)$ são soluções.

No ponto $(x,y) = (0,0)$, a matriz Jacobiana,

$$D_{(x,y)} X_\mu(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ -\lambda & \mu \end{pmatrix}$$

possue autovalores $\pm i\lambda$ quando $\mu = 0$.

Assim, o equilíbrio $(0,0,0)$ é um equilíbrio degenerado de X_μ .

Da sua representação polar,

$$X_\mu(r,\theta) = (\mu + ar^2) r \frac{\partial}{\partial r} - \lambda \frac{\partial}{\partial \theta}$$

temos que:

1. Se $\mu = 0$, então $ar^2 > 0$ para $r > 0$ e, a origem é a única singularidade do campo X_0 .

Além disto , $X_0(r, \theta) = ar^3 \frac{\partial}{\partial r} = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta}$ é um foco não-hiperbólico .

2. Se $\mu > 0$, então $\mu + ar^2 > 0$, logo X_μ tem um foco hiperbólico atrator .
3. Se $\mu < 0$, então a equação $\mu + ar^2 = 0$ tem a solução em r , $r = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$, logo o campo X_μ é invariante no círculo de raio $r = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$ o que implica a presença de uma órbita periódica .

Se $r < \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$, temos que $\mu + ar^2 < 0$, portanto , a componente radial de X_μ cresce com o tempo , isto é , a órbita periódica é atratora no seu interior .

Se $r > \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$, temos que $\mu + ar^2 > 0$, portanto , a componente radial de X_μ decresce com o tempo , isto é , a órbita periódica é atratora no exterior .

Assim , na origem tem-se um equilíbrio instável para $\mu < 0$. Portanto uma bifurcação tem lugar quando $\mu = 0$. Ou seja , $\mu = 0$ é um valor de bifurcação de X_μ .

Quando $a < 0$, a parte radial é oposta à obtida para $-\mu$.

A figura , mostra as órbitas de X_μ em cada caso .

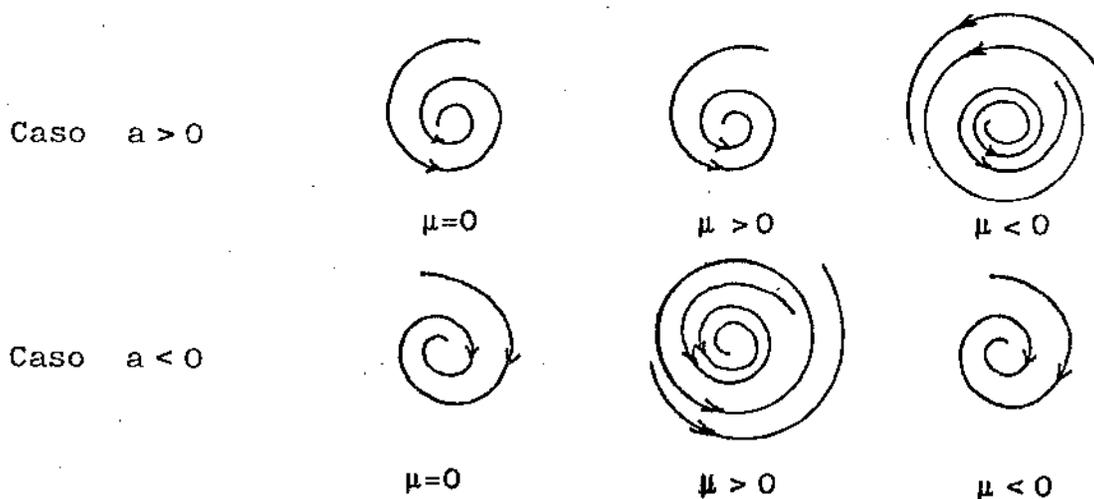


Fig.1.5.1 : Retrato da Bifurcação de Hopf .

No espaço \mathbb{R}^3 , o diagrama de bifurcação forma uma taça parabólica a qual separa as órbitas que são espirais à origem.

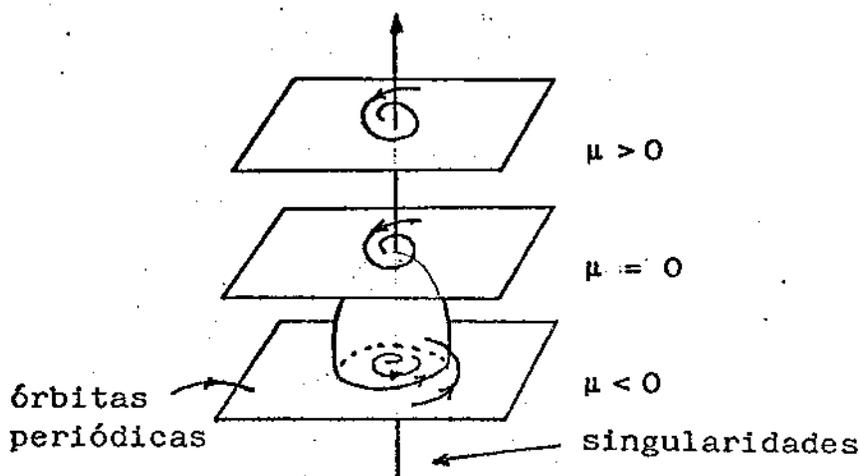


Fig.1.5.2 : Bifurcação de Hopf , $a > 0$.

(1.5.3) Definição : Seja M uma variedade diferenciável (de Banach ou não) , $N \subset M$ um subconjunto .

Diremos que N é uma *subvariedade de codimensão* m se para cada $p \in N$, existe uma vizinhança U de p em M e uma submersão $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f^{-1}(0) = N \cap U$. Além disto m é o menor inteiro ≥ 1 que satisfaz a propriedade .

Por exemplo , seja N_m o conjunto formado por aqueles campos X , cujo desenvolvimento em Série de Taylor possui exatamente m coeficientes independentes nulos . Se $X \in N_m$, podemos definir uma função f_X de uma vizinhança U de X em \mathbb{R}^m que é uma submersão , a saber se $Y \in U$, então $f_X(Y) = m$ -tuplas daqueles coeficientes nulos para X .

Neste sentido diremos que X possui em 0 uma *Singularidade de codimensão* m .

Assim , um campo de vetores definido perto de um equilíbrio sem autovalores no eixo imaginário (hiperbólico) , tem codimensão zero .

Neste ponto nada falamos respeito a quais tipos de sin

gularidades de codimensão m apresentam-se persistentemente .

Uma parte da solução de um problema de bifurcação é de terminar como o conjunto S_μ depende do parâmetro μ . A estrutura de este conjunto dependerá fundamentalmente das expressões que definem um campo de vetores X_μ . Visto que a estrutura qualitativa é preservada por transformações de coordenadas , podemos mudar a forma do campo X_μ , via mudança de coordenadas , para tornar mais simples a obtenção do conjunto de S_μ . Isto é o que é chamada de uma Forma Normal (ver por exemplo a Forma Normal de Takens § 1.3) .

Tendo a Forma Normal de uma singularidade de codimensão m de um campo X , é importante achar uma família a m -parâmetros que é transversal a N_m . Qualquer uma destas famílias é conhecida como *desdobramento universal* de X . Em geral , temos ,

(1.5.4) Definição : Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Chamaremos *Desdobramento* de X a toda família $X_\mu \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ tal que $X_0 = X$.

(1.5.5) Definição : Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Se X possui em O uma singularidade de codimensão m , Um desdobramento $X_\mu \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ de X é um *Desdobramento Universal* de X se X_μ é transversal ao conjunto N_m .

No que segue consideraremos somente os desdobramentos

de germes de campos de vetores X , definidos como germes de desdobramentos de um representante de X em $(0,0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Denotaremos por $G^{m,n}$ ao espaço dos germes dos desdobramentos a m -parâmetros X_μ de classe C^∞ e por $J_k^{m,n}$ ao espaço dos seus k -jatos, $1 \leq k \leq \infty$. As topologias de $J_k^{m,n}$, $J_\infty^{m,n}$ e $G^{m,n}$ são definidas como em § 1.2.

O interesse do desdobramento universal de um campo X é que, quando ele existe, ele informa sobre todos os germes próximos de X_0 , assim também como as transições possíveis entre estes germes (bifurcações). Igualmente com a ajuda de desdobramentos bem escolhidos, é possível por em evidência as diferenças qualitativas entre dois germes topologicamente equivalentes.

Consideremos uma família X_μ de campos de vetores a m -parâmetros sobre \mathbb{R}^n . Seja Σ_0 o maior aberto de \mathbb{R}^m tal que X_μ é estável para $\mu \in \Sigma_0$.

(1.5.6) Definição : Sejam X_μ e $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^m$ como acima.

Chamaremos de *Conjunto de Bifurcação* da família X_μ ao conjunto $\mathbb{R}^m \setminus \Sigma_0$.

Seja agora o maior aberto Σ_1 de $\mathbb{R}^m \setminus \Sigma_0$ tal que $X_\mu|_{\Sigma_1}$ seja estável.

Assim por diante , pode-se definir , eventualmente , u ma decomposição de \mathbb{R}^m de forma que $\mathbb{R}^m = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$

Tal decomposição , pelo menos válida para germes na o rigem , existe para famílias genéricas se for possível definir u ma estratificação de G^n por conjuntos semi-algéblicos ;

$G^n = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_k \supset V_{k+1}$ com $\text{cod } V_k = k$, tal que todo germe $\alpha \in V_i \setminus V_{i+1}$ seja V_i -estável .

Então , para toda família sobre \mathbb{R}^m cujo jato é trans versal aos V_i , obtem-se a decomposição pondo ,

$$\Sigma_i = j^{-1} \alpha (V_i \setminus V_{i+1})$$

e cada Σ_i é semi-algéblico de codimensão i . De § 1.4 pode-se apreciar que não existe sempre uma estratificação para todos n e m .

Para construir o desdobramento universal , é razoável considerar uma família a parâmetros em \mathbb{R}^m , cujo r -jato seja transversal a V_k (portanto a todos os V_i) e mostrar que a adjunção de um campo de ordem $r+1$ ao representante polinomial do r -jato preserva o tipo topológico deste desdobramento.

Logo um terceiro passo na análise de um problema de bi furcação é determinar a dinâmica nestas famílias transversais .

Para germes X de campos regulares em $0 \in \mathbb{R}^n$ e $X \in G^n$ hiperbólicos , sabemos que eles são estáveis . Tendo em conta a dependencia , respeito a X , da conjugação entre X e $\frac{\partial}{\partial x_1}$ no caso regular e de X e $j_1 X(0)$ no caso hiperbólico , é

imediatamente que o germe X admite um desdobramento universal : a família constante . Recíprocamente , os germes regulares ou hiperbólicos são os únicos germes de campos de vetores tendo um desdobramento universal constante .

Para $X \in G^n$ tal que $j_1 X(0)$ é parcialmente hiperbólico , o estudo do germe é limitado a uma variedade central .

Então , seja X_μ uma família em \mathbb{R}^n a parâmetros , tal que $X_0(0) = 0$ e seja $E^u \oplus E^s \oplus E^c$ a decomposição de \mathbb{R}^n em subespaços próprios associados ao $j_1 X(0)$. Se consideramos X_μ como um campo sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, de componente nula sobre o fator \mathbb{R}^m , os subespaços E^u , E^s e $\mathbb{R}^m \oplus E^c$ são os subespaços , respectivamente , instável , estável e central deste campo . O Teorema de existencia da variedade central (§ 1.0) implica então que para todo $r \geq 1$, existe uma variedade W^c de classe C^r em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de dimensão $c+m$, tangente em 0 a $\mathbb{R}^m \oplus E^c$, variedade central de X_μ considerado como campo de vetores sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. $X_{\mu|W^c}$ é uma família sobre \mathbb{R}^c a parâmetros $\mu \in \mathbb{R}^m$.

Utilizando esta variedade W^c tem-se o seguinte resultado ,

(1.5.7) Teorema : [Pa.Ta.]

Seja $X_\mu \in G^{m,n}$ tal que o espaço central de X_0 em 0 seja de dimensão c , $0 \leq c \leq n$. Então :

1. Existe l , $0 \leq l \leq n-c$ tal que o germe da família X_μ é C^0 -equivalente ao germe ,

$$X'_\mu = X_{\mu|W^c} + \sum_{i=c+1}^{c+l} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \sum_{i=c+l+1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

onde $(\mu_1, \dots, \mu_m, y_1, \dots, y_n)$ é um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ extendendo as coordenadas $(\mu_1, \dots, \mu_m, y_1, \dots, y_c)$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^c$ sobre a variedade central W^c .

$$2. \text{ Se } Y_\mu = \sum_{i=1}^c \tilde{Y}_i(\mu, y_1, \dots, y_c) \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=c+1}^{c+l} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} -$$

$$\sum_{i=c+l+1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{e se ,}$$

$$Y_\mu|_{W^c} = \sum_{i=1}^c \tilde{Y}_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{é } C^0\text{-equivalente a}$$

$$X_\mu|_{W^c} \text{ , então } Y_\mu \text{ é } C^0\text{-equivalente a } X_\mu.$$

O resultado deste Teorema é que se $X_\mu|_{W^c}$ é um desdobramento universal de $X_0|_{W^c}$, então X_μ é um desdobramento universal de X_0 .

O Teorema enunciado permite limitar o estudo de germes cujo 1-jato (matriz Jacobiana) possui autovalores imaginários puros às partes centrais.

§ 1.6. PRINCIPAIS RESULTADOS

O objeto deste trabalho é estudar campos de vetores em \mathbb{R}^3 cuja parte linear tem degenerescência dupla.

Da introdução, temos que basicamente existem tres casos ; $W(E_9)$, $W(E_{10})$ e $W(E_{11})$.

Os casos $W(E_9)$ e $W(E_{10})$ onde as matrizes E_9 e E_{10} tem zeros duplos como autovalores, são do tipo parcialmente hiperbólico e portanto seu estudo se reduz a uma variedade central de dimensão 2.

Os campos cuja parte linear é dada pela matriz $E = E_{11}$ são completamente não-hiperbólicos e portanto os Teoremas das variedades invariantes não são aplicáveis.

Portanto nosso estudo será dirigido totalmente a estes campos .

No que segue vamos estabelecer , de modo formal , os principais resultados deste trabalho para os campos ;

$X \in G^3$ tal que $j_1 X(0) = \lambda \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\lambda \neq 0$,
cujas provas vão-se dar no capítulo 3 .

Estes resultados são dados principalmente por Bonckaert, Dumortier , Guckenheimer e Takens .

(1.6.1) Resultado 1 : Se X deixa o eixo z formalmente invariante e se X é não-flat ao longo do eixo z então ,

- a) Existe germe da aplicação $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ cujo gráfico $\{ (h(z), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} / z \in \mathbb{R} \}$ é invariante sob X e com $j_\infty h(0) = 0$.
- b) Existe cone K , de contato finito em torno a $\{(0,0)\} \times [0, +\infty[$ tal que uma das seguintes situações acontecem (mudando X por $-X$ se for necessário) :
- A : A única órbita de X em K tendendo para 0 está contida em $\{ (h(z), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} / z \in [0, +\infty[\}$ e as outras órbitas partindo de K , deixam K .
- B : Todas as órbitas de X em K tendendo para 0 tem contato ∞ com o eixo z .

Estas situações são apresentadas na figura



Fig.1.6.1 : Situações acontecendo no Resultado 1 .

Para provar este Resultado , usaremos o *Método de Blow-up* que trataremos no Capítulo 2 .

Usando a Forma Normal de Takens (§ 1.2) e o Resultado 1., vamos obter como consequência imediata o seguinte ,

(1.6.2) Resultado 2 : (Corolário do Resultado 1.)

Se X satisfaz a desigualdade de Lojasiewicz , então X tem uma variedade uni-dimensional invariante , tangente ao eixo de rotação z .

Usando esta Forma Normal para X , convenientemente escrita em coordenadas cilíndricas , truncada em $O(|r,z|^2)$, no Capítulo 2 , vamos obter um campo planar Y , 2-determinado . Pela análise dos coeficientes desta Forma Normal truncada , obtêm-se 5 tipos topológicos , não degenerados . Através de Y estudamos o comportamento topológico da singularidade X .

Novamente , com a Forma Normal de X obtemos uma estratificação de G^3 por conjuntos semi-algéblicos . Especificamente , temos ,

(1.6.3) Resultado 3 : Existem V , $W \subset G^3$ com $W \supset V$ tal que :

- a) $W = W(E)$ é subvariedade diferenciável de codimensão 2 , localmente fechada em G^3 .
- b) V é subconjunto semi-algéblico de codimensão 3, localmente fechado em G^3 .
- c) $W \setminus V$ é subvariedade diferenciável de codimensão 2 em G^3 .
- d) Todo $X \in W \setminus V$ é W - C^0 -estável-fracamente .

Com este Resultado , comprova-se que , localmente , em cada estrato, o comportamento topológico é fracamente estável .

Previo ao estudo das bifurcações do campo X , obtaremos seu desdobramento universal .

(1.6.4) Resultado 4 : Suponhamos X é dado na Forma Normal ,

$$X_N = (\lambda + f(x^2 + y^2, z))(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) + g(x^2 + y^2, z)(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + h(x^2 + y^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + R_\infty(x, y, z) \quad , \quad \lambda \neq 0$$

onde $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = \frac{\partial h}{\partial z}(0,0) = 0$ e $j_\infty R_\infty(0) = 0$

Então um desdobramento universal é dado por ,

$$X_{\mu, \varepsilon} = (\lambda + f(x^2 + y^2, z))(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) + (\varepsilon + g(x^2 + y^2, z))(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + (\mu + h(x^2 + y^2, z)) \frac{\partial}{\partial z} + R_\infty(x, y, z) .$$

Aquí , μ e ε são dois parâmetros livres que usaremos para perturbar a singularidade degenerada em $\varepsilon = \mu = 0$.

Nossa meta é a descrição do Retrato de Fase e Bifurcações de $X_{\mu, \varepsilon}$ para a escolha dos coeficientes da sua Forma Normal . Desta escolha dos coeficientes , temos que se o campo $X_{0,0}$ oferece 5 tipos topológicos não degenerados , veremos que existem somente 4 desdobramentos para estes 5 tipos .

Então , no capítulo 3 , examinaremos a estabilidade destas famílias no espaço das famílias de campos de vetores a 2-parâmetros que são *equivariantes* com respeito às rotações em torno ao eixo z de \mathbb{R}^3 .

BLOWING-UPS DE CAMPOS DE VETORES

O método de Blowing-up para campos de vetores é uma conhecida técnica que permite descompor uma singularidade em outras mais simples . Este método foi introduzido por Gomory em 1955 (Trajectories tending to a critical point in 3-space , ANN. OF MATH.,61) e por Nemytskii e Stepanov em 1960 (Qualitative Theory of Differential Equations , PRINCETON UNIV.PRESS) e tem sido usado , entre outros por Takens [Ta.5] , Dumortier [Du.2], [Du.3] e Bonckaert [Bo.] .

Neste capítulo apresentaremos uma descrição do método para campos de vetores de classe C^∞ , o caso de classe C^k é praticamente o mesmo .

Em § 2.0 , apresentaremos o Blowing-up esférico; uma caracterização dos campos obtidos por Blowing-up esféricos e uma aplicação ao caso homogêneo com uma simetria em \mathbb{R}^2 , o que vamos permeter determinar o comportamento dos campos $W(E_{11})$.

Em § 2.1 , tratamos o Blowing-up direcional , em particular , Blowing-ups na direção do eixo z para em § 2.2 estudar a relação entre Blowing-ups direcionais e esféricos para concluir que o Blowing-up direcional é o mesmo Blowing-up esférico restrito a um domínio e transformado por mudança local de coordenadas .

Em § 2.3 descreve-se o ω -jato de um Blowing-up direcional de um campo de vetores em 0 .

Em § 2.4 se introduzem as noções de Blowing-ups direcionais sucessivos e de sequencia maximal de Blowing-ups na dire-

ção do eixo z para provar finalmente que se esta sequência é finita, então existe cone de contacto (finito) em torno ao eixo z tal que as órbitas no interior deste cone, entram nele e deixam ele depois de um tempo finito.

Finalmente em § 2.5 dão-se as condições para a redução de uma singularidade a uma singularidade com 1-jato não nulo por Blowing-ups direcionais sucessivos.

§ 2.0. UM BLOWING - UP ESFERICO

A idéia é :

- Mediante uma explosão (Blowing-up), associar a uma singularidade na origem de um campo de vetores X um conjunto de singularidades de um campo \tilde{X} no cilindro $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, dispostas em $S^{n-1} \times \{0\}$
- Analisar a conduta de \tilde{X} em torno de cada uma destas singularidades e,
- Por um processo dual voltar ao campo primitivo.

Para $n \in \mathbb{N}$, denotemos :

$$S^{n-1} = \{ u \in \mathbb{R}^n / |u| = 1 \}, \text{ onde } |\cdot| \text{ é a norma euclidiana de } \mathbb{R}^n$$

e consideremos a aplicação,

$$\begin{aligned} \varphi : S^{n-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u, \sigma) &\longmapsto \sigma u \end{aligned}$$

Observemos que :

- $\varphi|_{S^{n-1} \times \mathbb{R}^+}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- $S^{n-1} \times \{0\} = \varphi^{-1}(0)$, é a explosão da singularida-

à esfera S^{n-1} .

(2.0.1) Proposição : Seja $X \in \mathbb{C}^n$.

Então existe campo de vetores \tilde{X} , de classe C^∞ definido sobre $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ tal que para todo $q \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$, $d\varphi(\tilde{X}(q)) = X(\varphi(q))$ (ou $\varphi_*\tilde{X} = X$).

Demonstração :

Para $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, definamos os campos de vetores :

$$R = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{campo radial e}$$

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad \text{campos rotacionais.}$$

Notemos que $V_{ij} = -V_{ji}$ e $V_{ii} = 0$.

De um cálculo direto, tem-se que,

$$|x|^2 X = \langle R, X \rangle \cdot R + \sum_{i,j=1}^n \langle V_{ij}, X \rangle \cdot V_{ij}.$$

Definamos, sobre $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, os campos de vetores \tilde{R} e \tilde{V}_{ij} por $\varphi_*\tilde{R} = R$ e $\varphi_*\tilde{V}_{ij} = V_{ij}$. Isto é, $\tilde{R} = \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma}$ e \tilde{V}_{ij} são os campos de vetores cujo fluxo é uma rotação em $S^{n-1} \times \{0\}$ no "plano $u_i u_j$ ".

Sejam as funções :

$$a_\sigma = \langle R, X \rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a_{ij} = \langle V_{ij}, X \rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Então, } |x|^2 X = a_\sigma \cdot R + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot V_{ij}.$$

$$\text{Definamos } \tilde{X} = \frac{1}{\sigma^2} \left((a_\sigma \circ \varphi) \cdot \tilde{R} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \circ \varphi) \cdot \tilde{V}_{ij} \right)$$

Notemos que :

$$\begin{aligned}\varphi_* \tilde{X} &= \varphi_* \left(\frac{1}{\sigma^2} \left((\alpha_\sigma \circ \varphi) \cdot \tilde{R} + \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} \circ \varphi) \cdot \tilde{V}_{ij} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left((\alpha_\sigma \circ \varphi) \cdot \varphi_* \tilde{R} + \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} \circ \varphi) \cdot \varphi_* \tilde{V}_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left((\alpha_\sigma \circ \varphi) \cdot R + \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} \circ \varphi) \cdot V_{ij} \right)\end{aligned}$$

Ou seja verifica-se que $\varphi_* \tilde{X} = X$.

$$\text{A equação } X = \varphi_* \left(\frac{1}{\sigma^2} \left((\alpha_\sigma \circ \varphi) \cdot \tilde{R} + \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} \circ \varphi) \cdot \tilde{V}_{ij} \right) \right)$$

não tem , necessariamente , sentido quando $\sigma = 0$. Mas como para $0 \in \mathbb{R}^n$, X , R e V_{ij} são zero , $\langle R, X \rangle$ e $\langle V_{ij}, X \rangle$ tem seu 1-jato zero . Isto implica que para $\sigma = 0$; $\alpha_\sigma \circ \varphi$, $\frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha_\sigma \circ \varphi)$, $\alpha_{ij} \circ \varphi$ e $\frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha_{ij} \circ \varphi)$ são zero .

Logo do desenvolvimento em Série de Taylor de X em 0 temos que $\frac{1}{\sigma^2} (\alpha_\sigma \circ \varphi)$ e $\frac{1}{\sigma^2} (\alpha_{ij} \circ \varphi)$ são de classe C^∞ , tomando para $\sigma = 0$, o limite .

Também , $\tilde{X} = \frac{1}{\sigma^2} \left((\alpha_\sigma \circ \varphi) \cdot \tilde{R} + \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} \circ \varphi) \cdot \tilde{V}_{ij} \right)$ é de classe C^∞ .

Para $\sigma \neq 0$, temos que $\varphi_* \tilde{X} = X$. Por continuidade , temos isto sempre .

□

Do desenvolvimento em Série de Taylor de X em 0 , observa-se que se $j_1 X(0) = 0$, então \tilde{X} é idênticamente nulo em $S^{n-1} \times \{0\}$.

Agora , se X tem flatness k , então por construção $\tilde{X}|_{S^{n-1} \times \{0\}} = 0$, logo tem sentido definir o campo de vetores

$$\bar{X} = \frac{1}{\sigma^k} \tilde{X} \quad \text{e tomar o limite quando } \sigma \rightarrow 0 \text{ , obtendo assim um}$$

campo de vetores de classe C^∞ em $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Além disto, $\bar{X}|_{S^{n-1} \times \{0\}}$ não é identicamente nulo e a estrutura de órbita de \tilde{X} e \bar{X} é a mesma fora de $S^{n-1} \times \{0\}$, $\sigma > 0$. Notemos que este campo \bar{X} restrito a $S^{n-1} \times \{0\}$ é um campo de vetores tangente a $S^{n-1} \times \{0\}$.

O estudo deste campo as vezes, dá informação do comportamento assintótico das órbitas quando elas tendem para 0 [Go.].

(2.0.2) Definição: \bar{X} é chamado o campo de vetores obtido por um *Blowing-up* e dividido por σ^k .

Para caracterizar os campos obtidos por um *Blowing-up*, observemos que na demonstração da Proposição (2.0.1), \tilde{X} admite a expressão,

$$\tilde{X} = \left(\sum_l \sigma^l g_l(u) + G(u, \sigma) \right) \tilde{R} + \left(\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{l'} \sigma^{l'} f_{ijl'}(u) + F_{ij}(u, \sigma) \right) \right) \tilde{V}_{ij}$$

onde g_l e $f_{ijl'}$ são polinômios homogêneos de graus $l+2$ e $l'+2$ respectivamente, nas variáveis $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e

$$j_\infty^G|_{S^{n-1} \times \{0\}} = j_\infty^F|_{S^{n-1} \times \{0\}} = 0, \text{ é dizer os polinômios}$$

g_l e $f_{ijl'}$, com $l, l' \leq k$ determinam $j_k X(0)$ e reciprocamente.

Além disto, se consideramos a involução,

$$T : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (u, \sigma) \longrightarrow (-u, -\sigma)$$

tem-se que $T_* \tilde{X} = \tilde{X}$ e se $X = \frac{1}{\sigma^s} \tilde{X}$ para algum $s \geq 0$, então $T_* \bar{X} = (-1)^s \bar{X}$.

(2.0.3) Proposição: (Caracterização)

Seja \tilde{X} campo de vetores de classe C^∞ em $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ da forma,

$$X = \sum_{l \leq N} \sigma^l g_l(u) \tilde{R} + \sum_{i,j=1}^n \sum_{l' \leq N} \sigma^{l'} f_{ijl'}(u) \tilde{V}_{ij}$$

onde g_l e f_{ijl} , são polinômios nas variáveis $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Se $T_*\tilde{X} = \pm \tilde{X}$, então existe $Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $Y(0) = 0$ e inteiro $m \geq 0$ tal que $\tilde{Y} = \sigma^m \tilde{X}$ e $\varphi_* \tilde{Y} = Y$.

Demonstração :

Suponhamos $T_*\tilde{X} = \tilde{X}$ (o caso $T_*\tilde{X} = -\tilde{X}$ é análogo)

Como $T_*\tilde{R} = \tilde{R}$ e $T_*\tilde{V}_{ij} = \tilde{V}_{ij}$, as funções g_l e f_{ijl} , satisfazem,

$$\begin{aligned} g_l(u) &= (-1)^l g_l(-u) \\ f_{ijl}(u) &= (-1)^{l'} f_{ijl}(-u) \end{aligned}$$

Isto estabelece que g_l , para l par, pode-se escrever na forma,

$$g_l(u) = \sum_{s \leq s_0} g_{ls}(u), \text{ para algum } s_0, \text{ com } g_{ls}$$

polinômio homogêneo de grau $2s$.

Como $|u| = 1$, podemos substituir g_l pelo polinômio homogêneo \bar{g}_l de grau $2s_0$;

$$\bar{g}_l(u) = \sum_{s \leq s_0} |u|^{s_0-s} g_{ls}(u),$$

sem mudar o campo de vetores \tilde{X} . Análogamente para f_{ijl} , com l' par. Para l e l' ímpar, g_l e f_{ijl} , podem ser substituídas pelos polinômios homogêneos \bar{g}_l e \bar{f}_{ijl} , de grau ímpar.

Escolhamos m tal que $\nu_l = m+1 - \text{grau}(g_l)$ e seja $\nu_{l'} = m+1 - \text{grau}(f_{ijl'})$ positivos pares para todo i, j, l e l'

O campo de vetores,

$$Y = \sum_{l \leq N} |x|^{\nu_l} \bar{g}_l(x) R + \sum_{i, j=1}^n \sum_{l' \leq N} |x|^{\nu_{l'}} \bar{f}_{ijl'}(x) V_{ij}$$

terá as propriedades requeridas.

□

(2.0.4) O caso homogêneo em \mathbb{R}^2 :

Seja $X \in \mathfrak{G}^2$.

Se $S^1 = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 / u_1^2 + u_2^2 = 1\}$, para $S^1 \times \mathbb{R}$

tomemos as coordenadas; $\theta \pmod{2\pi}$ tal que $u_1 = \cos \theta$,
 $u_2 = \sin \theta$ e $r \in \mathbb{R}$.

Seja $\varphi: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$ coordenadas po-

lares usuais.

Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, coordenadas de X , sejam,

$$R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \text{ campo radial e } V = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

campo rotacional. Então do fato que $\varphi_* \tilde{R} = R$ e $\varphi_* \tilde{V} = V$, tem-

se que $\tilde{R} = r \frac{\partial}{\partial r}$ e $\tilde{V} = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Suponhamos $j_{k-1} X(0) = 0$ e seja X_k um representante do germe do campo de vetores cujas funções componentes são polinômios de grau k , tal que $j_k X_k(0) = j_k X(0)$.

Consideremos as funções $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por, $F = \langle X_k, R \rangle$ e $G = \langle X_k, V \rangle$ tal que 0 não é o único zero de G .

(2.0.5) Definição: Diremos que F e G , como acima estão em *posição geral* se $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ com $G(p) = 0$ temos que $dG(p) \neq 0$ e $F(p) \neq 0$.

Fazendo um Blowing-up nosso campo X , da expressão (2.0.2) temos que \tilde{X} é da forma;

$$\tilde{X} = \frac{1}{r^2} \left((G(r \cos \theta, r \sin \theta) + r^{k+1} \tilde{G}(r, \theta)) \frac{\partial}{\partial \theta} + (F(r \cos \theta, r \sin \theta) + r^{k+1} \tilde{F}(r, \theta)) r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

onde F e G são polinômios de grau $k+1$ em r e θ ,
 $\tilde{F}(0, \theta) = \tilde{G}(0, \theta) = 0$.

Logo \bar{X} , fica definido como,

$$\bar{X} = \frac{1}{r^{k+1}} \tilde{X} = \left(G(\cos \theta, \sin \theta) + \tilde{G}(r, \theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(F(r \cos \theta, r \sin \theta) + \tilde{F}(r, \theta) \right) r \frac{\partial}{\partial r}$$

(2.0.6) Proposição : [Ta.5]

Sejam X, X_k, F e G como acima, F e G em posição geral. Então todo $Y \in \mathcal{K}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $j_k Y(0) = j_k X(0)$ é C^∞ -equivalente a X (i.é., os germes de X e Y são C^∞ -equivalentes).

Demonstração :

Do fato de ser ,

$$\bar{X} = \left(G(\cos\theta, \sin\theta) + \tilde{G}(r, \theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(F(r \cos\theta, r \sin\theta) + \tilde{F}(r, \theta) \right) r \frac{\partial}{\partial r} \text{ e } F, G$$

estarem em posição geral então, $\bar{X}|_{S^1 \times \{0\}}$ tem um número finito de zeros e, em cada ponto $(\theta, 0) \in S^1 \times \{0\}$ onde \bar{X} é zero, \bar{X} tem uma singularidade hiperbólica.

Se $j_k Y(0) = j_k X(0)$ e se Y e \bar{Y} são definidos de modo análogo a X e \bar{X} , então todas as observações concernentes a \bar{X} são válidas para \bar{Y} .

Logo existe homeomorfismo $h : U_1 \longrightarrow U_2$ onde U_1 e U_2 são vizinhanças de $S^1 \times \{0\}$ em $S^1 \times \mathbb{R}_0^+$ tal que se $p \in U_1$ e $h(\Phi_{\bar{X}}(p, [0, t_1])) \subset U_2$ com $t_1 > 0$, então existe $t_2 > 0$ tal que

$$h(\Phi_{\bar{X}}(p, [0, t_1])) = \Phi_{\bar{Y}}(h(p), [0, t_2]) .$$

Com h , podemos construir uma C^∞ -equivalência entre os germes, usando $H : \mathcal{V}(U_1) \longrightarrow \mathcal{V}(U_2)$, definida por $H(0) = 0$ e $H(p) = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}(p)$ para $p \neq 0$, onde $\varphi^{-1}(p)$ pode ser escolhido com $r > 0$.

O fato de ser H homeomorfismo é imediato. \square

Para dar uma idéia da classe de singularidades que podem acontecer sob os supostos desta última Proposição, consideremos uma vizinhança em $S^1 \times \mathbb{R}_0^+$ de um arco A em $S^1 \times \{0\}$

unindo dois pontos $p_1, p_2 \in S^1 \times \{0\}$ onde \bar{X} é zero tal que em cada um destes pontos a direção de \bar{X} muda.

Quatro situações diferentes podem acontecer na vizinhança de A , segundo \bar{X} é repulsor ou atrator em p_1 e p_2 . Na figura estão representadas estas situações.

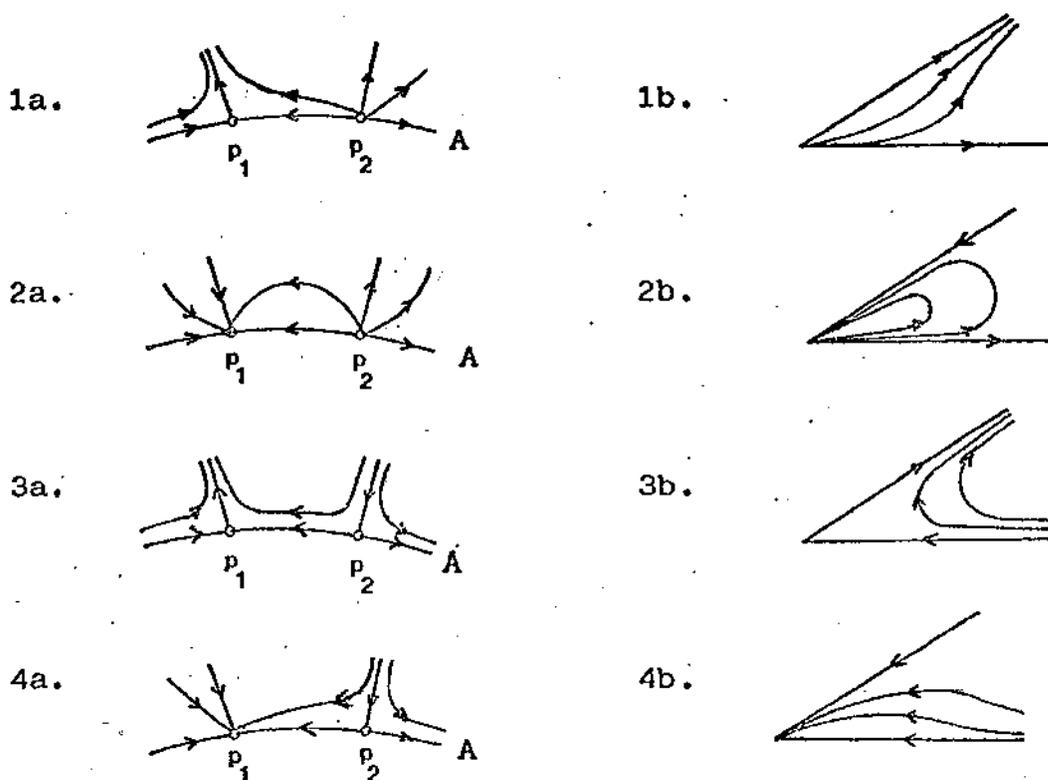


Fig.2.0.1 : 1a , 2a , 3a , 4a : Situações em A
 1b , 2b , 3b , 4b : Curvas integrais de X nos correspondentes " setores " de \mathbb{R}^2 .

Esta última Proposição pode ser melhorada no sentido que é suficiente exigir que o $j_k Y(0)$ esteja perto do $j_k X(0)$. A mesma prova pode-se aplicar neste caso.

(2.0.7) 0 Caso homogêneo com uma simetria em \mathbb{R}^2

Consideremos $X \in G^3$ tal que $j_1 X(0) = \lambda (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})$
 $\lambda \neq 0$.

Na Forma Normal (§ 1.3) , X é da forma ,

$$\begin{aligned} X_N(x,y,z) = & (\lambda + f(x^2 + y^2, z)) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \\ & + g(x^2 + y^2, z) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + h(x^2 + y^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + \\ & + R_\infty(x,y,z) \end{aligned}$$

Seja $R_\theta : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ a rotação ,

$$R_\theta(x,y,z) = (u,v,z) \quad \text{onde} \quad u = x \cos \theta - y \sin \theta ,$$

$v = x \sin \theta + y \cos \theta$. Então ,

$$\begin{aligned} R_{\theta*} X_N = & (\lambda + f(u^2 + v^2, z)) \left(v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} \right) + \\ & + g(u^2 + v^2, z) \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right) + h(u^2 + v^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + \\ & + R_\infty(u,v,z) . \end{aligned}$$

Istó é , X_N é invariante pela rotação R_θ em torno ao eixo z ..

$$\begin{aligned} \text{Nas coordenadas cilíndricas ;} \quad x &= r \cos \theta , \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_N(r,\theta,z) = & (\lambda + f(r^2, z)) \frac{\partial}{\partial \theta} + r g(r^2, z) \frac{\partial}{\partial r} + h(r^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + \\ & + R_\infty(r,\theta,z) \end{aligned}$$

tem seu 2-jato na forma ,

$$X_2(r,\theta,z) = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} + arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z} ,$$

o qual é invariante respecto a rotações em torno ao eixo z de \mathbb{R}^3 , isto implica que se $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), z(t))$ é uma curva integral de X_2 , então $\gamma_\alpha(t) = (r(t), \theta(t) + \alpha, z(t))$ também é uma curva integral . Mais ainda , a projeção de γ no semi-plano (r,z) , $r \geq 0$ é uma curva integral do 2-jato *reduzido* ,

$$Y_2(r,z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

supondo que $b \geq 0$, caso contrário reemplazamos z por $-z$.

Assim do Retrato de Fase de Y_2 , podemos reconstruir o Retrato de Fase de X_2 , isto é, Y_2 contém toda a informação de X_2 exceto *velocidade de rotação*.

Consideremos o campo,

$$Y = r g(r^2, z) \frac{\partial}{\partial r} + h(r^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + R_\infty(r, z)$$

germe reduzido do campo X_N , no plano (r, z) .

Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a simetria definida como,

$$T(r, z) = (-r, z), \text{ então } T_* Y = Y.$$

Notemos que $j_1 Y(0) = 0$ e que $j_2 Y(0) = Y_2$.

(2.0.8) Proposição: Sejam Y , Y_2 , a , b e c como acima (i.é. também $b \geq 0$). Suponhamos que,

1. $b \neq 0$
2. $c - a \neq 0$
3. $c \neq 0$
4. Se $c - a < 0$, então $a \neq 0$

Então todo campo em \mathbb{R}^2 com o 1-jato nulo e o 2-jato perto de Y_2 é C^0 -equivalente com Y .

Demonstração:

Da Proposição (2.0.6), o primeiro é determinar as curvas invariantes de Y_2 (invariantes pelo fluxo).

$$\text{De } \langle Y_2, r \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial r} \rangle = r(br^2 + (c-a)z^2) = 0, \text{ se}$$

$r = 0$, então o eixo z é sempre uma reta invariante.

$$\text{De } br^2 + (c-a)z^2 = 0 \text{ tem-se que } z^2 = -\frac{b}{c-a} r^2.$$

Como por hipótese, $b \geq 0$, da condição 1., $b > 0$, logo se $c - a > 0$ então o eixo z é a única reta invariante.

Se $c - a < 0$ então temos o par de retas invariantes,

$$z = \pm \sqrt{\frac{b}{a-c}} r$$

A direção do fluxo em (perto de) tais retas invariantes é determinada pelo sinal de ,

$$F(r,z) = \left\langle Y_2, r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = ar^2z + br^2z + cz^3$$

Quando $r = 0$, $F(0,z) = cz^3$, logo ao longo do eixo z , para $z > 0$, o fluxo é repulsor se $c > 0$ e atrator se $c < 0$. Para $z < 0$, o fluxo é atrator se $c > 0$ e repulsor se $c < 0$.

Os casos quando $c = 0$ é excluído pela condição 3.

Quando $c-a < 0$, para a reta $z = \sqrt{\frac{b}{a-c}} r$, temos que

$$F(r, \sqrt{\frac{b}{a-c}} r) = \frac{a}{a-c} \sqrt{\frac{b}{a-c}} r^3 (a-c+b) .$$

Como $r > 0$, $b > 0$ e $a-c > 0$, então F tem o mesmo sinal que a . Assim , o fluxo é repulsor se $a > 0$ é atrator se $a < 0$.

Como Y e portanto Y_2 é invariante sob T_* , perto da reta invariante $z = -\sqrt{\frac{b}{c-a}} r$ o fluxo é atrator se $a > 0$ e repulsor se $a < 0$.

Destas considerações , devido às condições 1., 2., 3. e 4. , os supostos da Proposição (2.0.6) são satisfeitos . Logo , desta Proposição e da observação feita depois da Fig.:2.0.1 , obtemos nosso resultado .

□

Assim , temos que o 2-jato Y_2 de Y determina o comportamento topológico de Y , donde se tem que o germe $X \in G^3$ tal que $j_1 X(0) = \lambda \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$ é 2-determinado .

Notemos também que as condições 1., 2., 3. e 4. são satisfeitas num subconjunto aberto e denso de $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / b \geq 0\}$

Desta Proposição tem-se que existem 5 tipos topológi-

cos (i.é.; classes C^0 -equivalentes) possíveis para Y , segundo acontecem as seguintes situações :

$$S(1) : b > 0 , \quad c - a > 0 , \quad c > 0$$

$$S(2) : b > 0 , \quad c - a > 0 , \quad c < 0$$

$$S(3) : b > 0 , \quad c - a < 0 , \quad c > 0 , \quad a > 0$$

$$S(4) : b > 0 , \quad c - a < 0 , \quad c < 0 , \quad a > 0$$

$$S(5) : b > 0 , \quad c - a < 0 , \quad c < 0 , \quad a < 0$$

Notemos que a situação $b > 0$, $c - a < 0$, $c > 0$, $a < 0$ não pode acontecer .

O 2-jato $Y_2(r,z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$ tem uma única singularidade não hiperbólica no ponto $(r,z) = (0,0)$.

Para construir o Retrato de Fase de Y_2 , como Y_2 é invariante em $r = 0$, o comportamento é determinado por ,

$$Y_2|_{r=0} = cz^2 \frac{\partial}{\partial z} .$$

Veamos que acontece fora de $r = 0$.

Consideremos um Blowing-up esférico ,

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, \sigma) &\longmapsto (\sigma \cos \theta, \sigma \sin \theta) , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Como $G(\sigma \cos \theta, \sigma \sin \theta) = \sigma^3 \cos \theta (b \cos^2 \theta + (c-a) \sin^2 \theta)$ e

$F(\sigma \cos \theta, \sigma \sin \theta) = \sigma^3 \sin \theta ((a+b) \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta)$, da

Proposição (2.0.6) ,

$$\tilde{Y}_2 = \sigma \cos \theta (b \cos^2 \theta + (c-a) \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^2 \sin \theta ((a+b) \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

Como $j_1 Y_2(0) = 0$ e $j_2 Y_2(0) \neq 0$, analisemos $\bar{Y}_2 = \frac{1}{\sigma} \tilde{Y}_2$

Como $\bar{Y}_2 = \cos \theta (b \cos^2 \theta + (c-a) \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta ((a+b) \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \sigma}$

$\bar{Y}_2|_{S^1 \times \{0\}} = \cos \theta (b \cos^2 \theta + (c-a) \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$ tem as singularidades hi-

perbólicas (Proposição (2.0.6)) em θ onde ,

$$\cos\theta(b\cos^2\theta+(c-a)\sin^2\theta) = \theta .$$

Então se $\cos\theta = 0$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ em todas as situações S(1) .

Se $b\cos^2\theta + (c-a)\sin^2\theta = 0$, temos as singularidades θ_{\pm} para os valores de θ tais que $\sin\theta = \pm \sqrt{\frac{b}{b-(c-a)}}$ e $\cos\theta = \pm \sqrt{\frac{c-a}{(c-a)-b}}$, nos casos S(3) , S(4) e S(5) .

Da matriz Jacobiana $\bar{D}Y_2(0,0)$, para os pontos $p_{\pm} = (\pm \frac{\pi}{2}, 0)$, temos que ,

$$\bar{D}Y_2(p_{\pm}) = \begin{pmatrix} \pm(a-c) & 0 \\ 0 & \pm c \end{pmatrix}$$

donde $\det \bar{D}Y_2(p_{\pm}) = -c(c-a)$ e $\text{tr } \bar{D}Y_2(p_{\pm}) = \pm a$

Para os pontos $q_{\pm} = (\theta_{\pm}, 0)$, temos que ,

$$\det \bar{D}Y_2(q_{\pm}) = \frac{2ab(c-a)}{b-(c-a)} \quad \text{e} \quad \text{tr } \bar{D}Y_2(q_{\pm}) = \pm(2c-a) \sqrt{\frac{b}{b-(c-a)}}$$

Notemos que nas situações S(3) , S(4) e S(5) onde acontece θ_{\pm} , $b > 0$ e $c-a < 0$. Então $c-a < b$, donde $b-(c-a) > 0$ e portanto $\frac{b}{b-(c-a)} > 0$, logo os sinais de $\det \bar{D}Y_2(q_{\pm})$ e $\text{tr } \bar{D}Y_2(q_{\pm})$ dependem somente dos sinais de a e de c .

Consideremos cada uma das situações S(i) ,

Situação S(1) : $b > 0$, $c - a > 0$, $c > 0$

As únicas singularidades de \bar{Y}_2 são p_{\pm} .

Como $\det \bar{D}Y_2(p_{\pm}) < 0$, os pontos p_{\pm} são pontos de sela .

Como p_+ está acontecendo no eixo θ , $\theta > 0$, fora de $\sigma = 0$, p_+ é repulsor, entanto que fora de $\sigma = 0$, p_- é atrator. Logo, temos os seguintes Retratos de Fase,

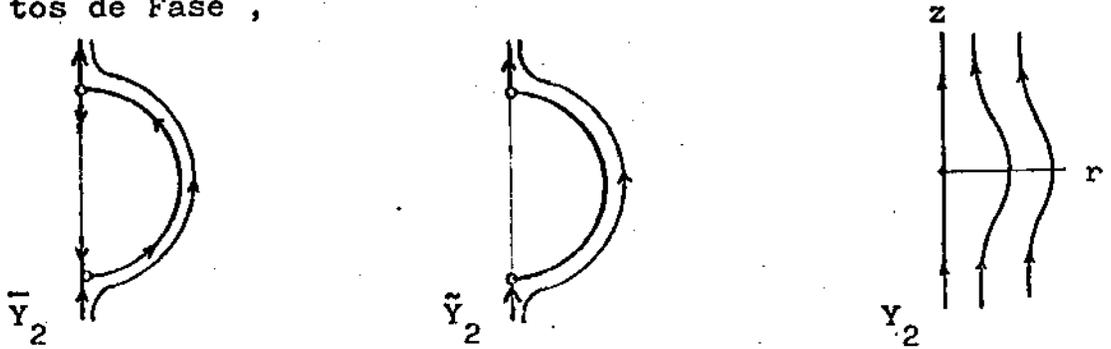


Fig.2.0.2 : Retratos de Fase da Forma Normal

$$Y_2(r, z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

quando $b > 0$, $c - a > 0$ e $c > 0$.

Situação S(2) : $b > 0$, $c - a > 0$, $c < 0$

Novamente as únicas singularidades de \bar{Y}_2 são os pontos p_{\pm} .

Como $\det D\bar{Y}_2(p_{\pm}) > 0$ e $\text{tr } D\bar{Y}_2(p_{\pm}) = ta$, do fato de ser $c - a > 0$ e $c < 0$ tem-se que $c < c - a$, donde $a < 0$. Logo $\text{tr } D\bar{Y}_2(p_+) = a < 0$ e o ponto p_+ é atrator e, como $\text{tr } D\bar{Y}_2(p_-) = -a > 0$, o ponto p_- é repulsor e sendo neste caso o eixo θ atrator quando $\theta > 0$ e repulsor quando $\theta < 0$, fora de $\sigma = 0$, temos os seguintes Retratos de Fase,

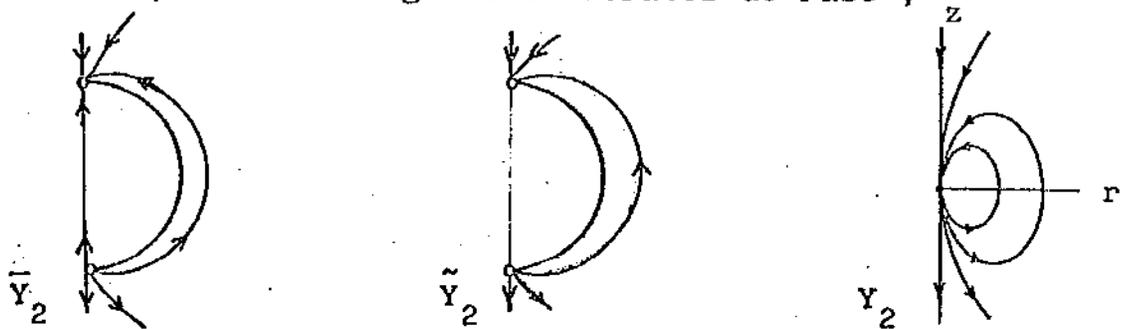


Fig.2.0.3 : Retratos de Fase da Forma Normal

$$Y_2(r, z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

quando $b > 0$, $c - a > 0$ e $c < 0$.

Situação S(3) : $b > 0$, $c - a < 0$, $c > 0$, $a > 0$

Neste caso as singularidades de \bar{Y}_2 são p_{\pm} e q_{\pm} . Como $\det D\bar{Y}_2(p_{\pm}) > 0$, de $\text{tr } D\bar{Y}_2(p_{\pm}) = a > 0$, o ponto p_{+} é repulsor e como $\text{tr } D\bar{Y}_2(p_{-}) = -a < 0$, o ponto p_{-} é atrator .

Para os pontos q_{\pm} , como $a(c-a) < 0$, então $\det D\bar{Y}_2(q_{\pm}) < 0$, portanto os pontos q_{\pm} são pontos de sela . Assim , entre os pontos p_{+} e q_{+} ; q_{+} e q_{-} e q_{-} e p_{-} temos , respectivamente , as situações 1a., 3a. e 4a. , da Fig.2.0.1 .

Logo temos os seguintes Retratos de Fase .

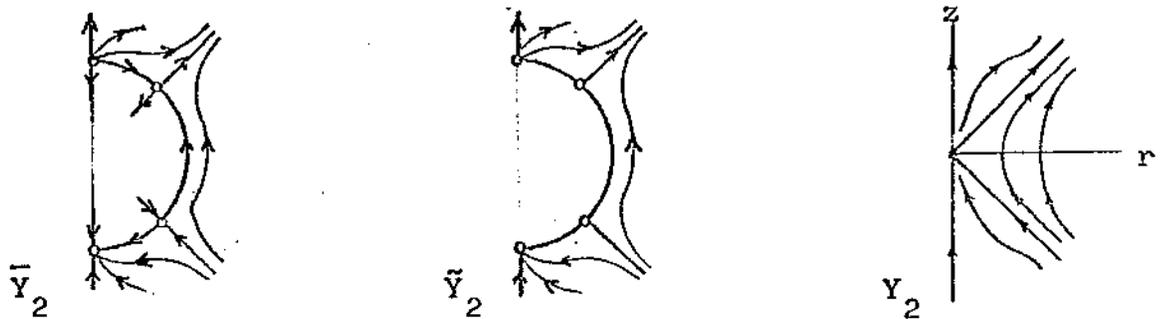


Fig.2.0.4 : Retratos de Fase da Forma Normal

$$Y_2(r,z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

quando $b > 0$, $c - a < 0$, $c > 0$ e $a > 0$

Situação S(4) : $b > 0$, $c - a < 0$, $c < 0$, $a > 0$

Neste caso , também temos que as singularidades de \bar{Y}_2 são p_{\pm} e q_{\pm} . Como $\det D\bar{Y}_2(p_{\pm}) < 0$, os pontos p_{\pm} são pontos de sela .

Para os pontos q_{\pm} , como $a(c-a) < 0$, os pontos q_{\pm} também são pontos de sela . Logo entre os pontos p_{+} e q_{+} ; q_{+} e q_{-} e q_{-} e p_{-} temos a situação 3a. da Fig.2.0.1 .

Logo nas direções das retas invariantes , temos os seguintes Retratos de Fase ,

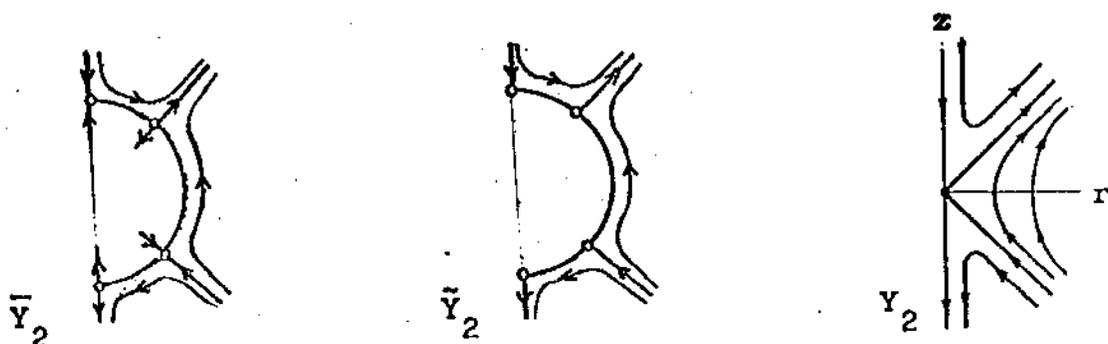


Fig.2.0.5 : Retratos de Fase da Forma Normal

$$Y_2 = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

quando $b > 0$, $c - a < 0$, $c < 0$, $a > 0$

Situação S(5) : $b > 0$, $c - a < 0$, $c < 0$, $a < 0$

Nesta situação , novamente temos que as singularidades de \bar{Y}_2 são os pontos p_{\pm} e q_{\pm} .

Como $\det D\bar{Y}_2(p_{\pm}) < 0$, os pontos p_{\pm} são pontos de sela .

Para os pontos q_{\pm} , como $a(c-a) > 0$ e $2c-a < 0$ então $\det D\bar{Y}_2(q_{\pm}) > 0$ e como $\text{tr} D\bar{Y}_2(q_{\pm}) < 0$ então o ponto q_{+} é atrator . Como $\text{tr} D\bar{Y}_2(q_{-}) > 0$, então o ponto q_{-} é repulsor . Logo como o eixo θ é, neste caso , atrator quando $\theta > 0$ e repulsor quando $\theta < 0$ então , fora de $\sigma = 0$, entre os pontos p_{+} e q_{+} e q_{-} e q_{-} e p_{-} temos , respectivamente , as situações 4a., 2a. e 1a. da Fig.2.0.1 .

Logo temos os seguintes Retratos de Fase ,

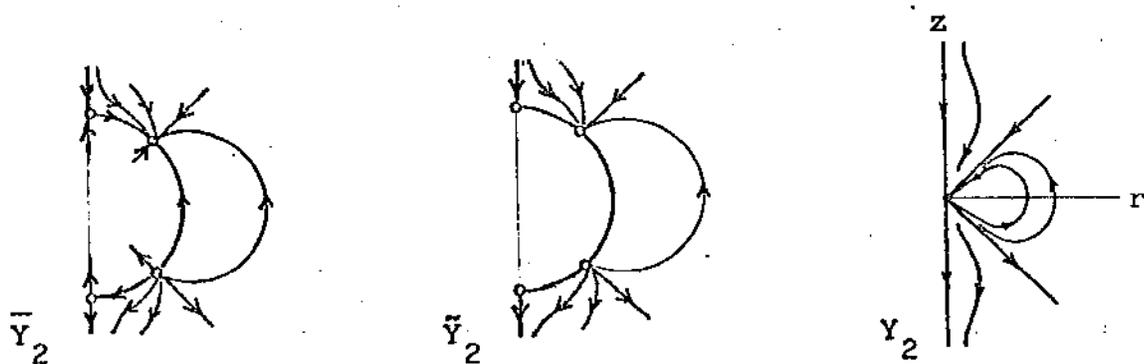


Fig.2.0.6 : Retrato de Fase da Forma Normal

$$Y_2(r,z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

quando $b > 0$, $c-a < 0$, $c < 0$, $a < 0$

§ 2.1. UM BLOWING-UP DIRECIONAL

Em dimensões superiores, o cálculo explícito de Blowing-ups esféricos é mais complicado então as vezes, é conveniente "abrir" uma singularidade ao longo de uma reta em lugar de uma esfera.

Restringindo a nossa atenção à *semi-esfera* S_+^{n-1} e tomando o $(0,0,\dots,0,1)$ como ponto base, um Blowing-up direcional é nada mais que escolher uma carta de S^{n-1} usando projeção central com centro em 0 , no hiperplano tangente por $(0,0,\dots,0,1)$ a S^{n-1} .

Denotemos por (x,z) um ponto de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Entenderemos por *eixo z* ao conjunto $\{0\}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Para $m \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicação;

$$\begin{aligned} \psi^m : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (x,z) &\longmapsto (xz^m, z) \end{aligned}$$

Analogamente à Proposição (2.0.1), temos,

(2.1.1) Proposição : Seja $X \in G^n$.

Então existe $\tilde{X}^1 \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $q \in \mathbb{R}^n$, $d\psi^1(\tilde{X}^1(q)) = X(\psi^1(q))$.
(ou $\psi^1_* \tilde{X}^1 = X$).

Demonstração :

Se $(x,z) = (x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ e $X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_z \frac{\partial}{\partial z}$ então, analogamente à Proposição (2.0.1), tem-se que,

$$\tilde{X}^1 = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{n-1} \left((X_i \circ \psi^1) - x_i (X_z \circ \psi^1) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + (X_z \circ \psi^1) \frac{\partial}{\partial z} \quad \square$$

Novamente, se X tem flatness k , definimos,

$$\bar{X}^1 = \frac{1}{z^k} \tilde{X}^1$$

e tomando o limite quando $z \rightarrow 0$, obtemos um campo de vetores de classe C^∞ em \mathbb{R}^n . \bar{X}^1 e \tilde{X}^1 tem a mesma estrutura de órbita fora de $z = 0$, invertendo a orientação para $z < 0$ quando k é ímpar.

(2.1.2) Definição : \bar{X}^1 é chamado o Campo de Vetores obtido por um *Blowing-up* na direção do eixo z e dividido por z^k .

(2.1.3) Exemplo :

Consideremos o campo Y_2 em \mathbb{R}^2 definido por ,

$$Y_2 = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

Nosso campo de (2.0.8), na situação $S(4)$; $b > 0$, $c - a < 0$, $c < 0$, $a > 0$.

Sabemos que Y_2 é invariante no eixo z ($r = 0$) e que seu comportamento é determinado por $Y_2|_{r=0} = cz^2 \frac{\partial}{\partial z}$ e como $c < 0$, este comportamento é atrator-repulsor (sela-nó).

Para ver que acontece fora de $r = 0$, consideremos o *Blowing-up* direcional ,

$$\psi^1(r, z) = (r, rz) .$$

$$\text{Então , } \tilde{Y}_2^1 = ar^2 z \frac{\partial}{\partial r} + r(b + (c-a)z^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

Como $j_1 Y(0) = 0$ e $j_2 Y(0) \neq 0$, consideremos ,

$$\bar{Y}_2^1 = \frac{1}{r} \tilde{Y}_2^1 = arz \frac{\partial}{\partial r} + (b + (c-a)z^2) \frac{\partial}{\partial z} , \quad \text{donde}$$

$$\bar{Y}_2^1|_{r=0} = (b + (c-a)z^2) \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{tem as singularidades ,}$$

$$p_+ = (0, \sqrt{\frac{b}{a-c}}) \quad \text{e} \quad p_- = (0, -\sqrt{\frac{b}{a-c}}) .$$

$$\text{Como } D\bar{Y}_2^1(0, z) = \begin{pmatrix} az & 0 \\ 0 & 2(c-a)z \end{pmatrix} \quad \text{então ,}$$

$\det D\bar{Y}_2^{-1}(p_{\pm}) = -2ab$ e como pelas condições $\hat{S}(4)$, $ab > 0$, temos que $\det D\bar{Y}_2^{-1}(p_{\pm}) < 0$, logo p_{\pm} são selas hiperbólicas de sinais contrários.

Logo temos os seguintes Retratos de Fase,

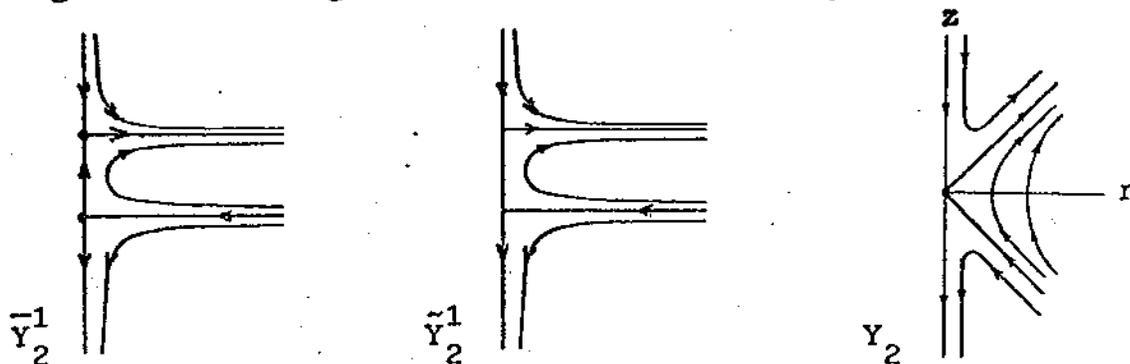


Fig.2.1.1 : Retratos de Fase da Forma Normal

$$Y_2 = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

quando $b > 0$, $c-a < 0$, $c < 0$, $a > 0$

§ 2.2. RELAÇÃO ENTRE BLOWING-UPS DIRECIONAIS E ESFERICOS

Denotemos por S_+^{n-1} a *Semi-esfera superior*. Isto é

$$S_+^{n-1} = \{(u, z) \in S^{n-1} / (u, z) = (u_1, \dots, u_{n-1}, z) \text{ e } z > 0\}$$

Consideremos a bijeção,

$$F : S_+^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(u, z, r) \longmapsto \left(\frac{u}{z}, zr\right)$$

Então, o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} S_+^{n-1} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \\ \searrow \varphi & & \swarrow \psi^{-1} \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Logo, $\tilde{X}|_{S_+^{n-1} \times \mathbb{R}}$ e \tilde{X}^1 são difeomorfos e $F_* \tilde{X} = \tilde{X}^1$

Se denotamos $F(u, z, r) = \left(\frac{u}{z}, zr\right) = (\bar{u}, \bar{z})$ então, do

fato que $|u|^2 + z^2 = 1$, tem-se que,

$$z = \frac{1}{\sqrt{1+|\bar{u}|^2}} \quad \text{e} \quad r = \frac{\bar{z}}{z}$$

Logo, $F_*\bar{X} = F\left(\frac{1}{r^k} \tilde{X}\right) = \frac{z^k}{\bar{z}^k} F_*\tilde{X} = \frac{z^k}{\bar{z}^k} \tilde{X}^1 = z^k \bar{X}^1$ donde

$$F_*\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{(1+|\bar{u}|^2)^k}} \bar{X}^1$$

Como $(1+|\bar{u}|^2)^{-k/2}$ é sempre positivo, as órbitas de \bar{X}^1 e $F_*\bar{X}$ são as mesmas e com a mesma orientação.

Assim, o Blowing-up direcional é o mesmo Blowing-up esférico, mas restrito a um pequeno domínio e transformado por uma mudança local de coordenadas.

§ 2.3. O ∞ -JATO DE \bar{X}^1 EM O

Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ e $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, sejam $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$ e

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_i!).$$

Então o ∞ -jato de X em O podemos escrever-lho como,

$$j_\infty X(O) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^m a_{i,\alpha}^m x^\alpha z^{m-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha^m x^\alpha z^{m-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

se X tem flatness k em O .

Para o ∞ -jato de \bar{X}^1 em O , escrevemos,

$$j_{\alpha} \bar{X}^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^m \bar{a}_{i,\alpha}^{-m} x^{\alpha} z^{m-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^m \bar{c}_{\alpha}^{-m} x^{\alpha} z^{m-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

Utilizando (2.1.1) e fazendo os cálculos, encontra-se que :

$$1. \quad \bar{a}_{i,\alpha}^{-m} = \bar{a}_{i,\alpha}^{m+k+1-|\alpha|} \cdot c^{(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i-1, a_{i+1}, \dots, a_{n-1})}$$

para $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq a_i$, $1 \leq |\alpha| \leq m$

$$2. \quad \bar{a}_{i,(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_{n-1})}^{-m} = \bar{a}_{i,\alpha}^{m+k+1-|\alpha|}$$

para $1 \leq i \leq n-1$, $0 \leq |\alpha| \leq m$.

$$3. \quad \bar{c}_{\alpha}^{-m} = \bar{c}_{\alpha}^{m+k-|\alpha|} \quad \text{para } 0 \leq |\alpha| \leq m$$

Neste caso, podemos ver que para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada α com $|\alpha| = m$; $\bar{c}_{\alpha}^{-m} = 0$. Isto expressa o fato que o hiperplano $z = 0$ é invariante sob \bar{X}^{-1} ou, equivalentemente, que a componente $\frac{\partial}{\partial z}$ de \bar{X}^{-1} não contém termos em x exclusivamente.

Em 1., 2. e 3. acima, podemos tomar o lado direito igual a zero quando são indefinidos.

§ 2.4. BLOWING-UPS DIRECIONAIS SUCESSIVOS

Analisando uma singularidade, pode acontecer que depois de um Blowing-up apareça em princípio um número finito de singularidades, algumas hiperbólicas, outras parcialmente hiperbólicas e outras totalmente não hiperbólicas. Naquelas onde não temos ferramentas para classificá-las é conveniente, as vezes, usar novamente um Blowing-up.

Para explicitar este fato, seja \bar{X}^{-1} obtido por um Blowing-up a X na direção do eixo z e dividido por z^k .

Supondo que \bar{X}^1 tem de novo uma singularidade, digamos $(a,0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e que $j_s \bar{X}^1(a,0) = 0$ e $j_{s+1} \bar{X}^1(a,0) \neq 0$. Então podemos calcular o Blowing-up a \bar{X}^1 em $(a,0)$, na direção do eixo z , da seguinte maneira natural:

$$\begin{aligned} \text{Seja } \zeta : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (x,z) &\longmapsto (x-a,z) \end{aligned}$$

Como $\zeta_* \bar{X}^1$ tem uma singularidade de flatness s em 0 , podemos considerar o campo de vetores

$$\overline{\zeta_* \bar{X}^1}^1$$

obtido de $\zeta_* \bar{X}^1$ por Blowing-up, na direção do eixo z e dividido por z^s .

(2.4.1) Definição: $\overline{\zeta_* \bar{X}^1}^1$ é o campo de vetores obtido por dois Blowing-ups na direção do eixo z primeiro em $(0,0)$ e segundo em $(a,0)$ e dividido primeiro por z^k e logo por z^s .

Denotaremos $\overline{\zeta_* \bar{X}^1}^1$ por \bar{X}^2 .

Evidentemente, \bar{X}^2 depende da escolha da singularidade.

Deste modo, podemos construir \bar{X}^m por Blowing-up sobre \bar{X}^{m-1} em alguma singularidade. Obviamente, \bar{X}^m depende da escolha das singularidades nas quais fazemos o Blowing-up.

(2.4.2) Definição: Seja $X \in G^n$.

Chamaremos *Sequencia dirigida* de Blowing ups direcionais sucessivos de X a uma sequencia de ternas $(\bar{X}^m, (a_m, 0), k_m)_{0 \leq m \leq N}$, $N \in \mathbb{IN}$ tais que,

1. $\bar{X}^0 = X$ e $(a_0, 0) = (0, 0)$
2. $\forall m, 0 \leq m \leq N$, \bar{X}^m tem uma singularidade com flatness k_m em $(a_m, 0)$ e

\bar{X}^{m+1} é obtido por Blowing-up a \bar{X}^m em $(a_m, 0)$ e dividido por z^{k_m} .

É de fazer notar que não existe restrição alguma em supor que os Blowing-ups direcionais sucessivos são na direção do eixo z . Disto se deduz que existe correspondência biunívoca entre sequências dirigidas e $(N-1)$ -jatos de direções ($N = \infty$ incluído).

Também, para os nossos propósitos, não há restrição em considerar somente sequências dirigidas de Blowing-ups de X em 0 .

(2.4.3) Definição : Uma sequência dirigida de Blowing-ups direcionais sucessivos de X onde $\forall m, 0 \leq m < N$ $(a_m, 0) = (0, 0)$ será chamada de *Sequência de Blowing-ups* de X em 0 , na direção do eixo z .

Denotaremos estas sequências por $(\bar{X}^m, 0, s_m)_{0 \leq m < N}$.

Neste caso, \bar{X}^m é definido no seguinte Lema,

(2.4.4) Lema : Seja \bar{X}^m obtido por uma sequência de Blowing-ups de X em 0 , na direção do eixo z . Então,

$$\bar{X}^m = \frac{1}{z^{k_0 + \dots + k_{m-1}}} \tilde{X}^m \quad \text{onde } \tilde{X}^m \text{ é tal que}$$

para todo $q \in \mathbb{R}^n$, $d\psi^m(\tilde{X}^m(q)) = \tilde{X}(\psi^m(q))$
(ou, $\psi^m_* \tilde{X}^m = X$).

Demonstração :

Com (x, z) e X como na Proposição (2.1.1), basta considerar,

$$\tilde{X}^m = \frac{1}{z^m} \sum_{i=1}^{n-1} \left((X_i \circ \psi^m) - \frac{mx_i}{z} (X_z \circ \psi^m) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + (X_z \circ \psi^m) \frac{\partial}{\partial z}$$

Assim,

$$\bar{X}^m = \frac{1}{z^{k_0 + \dots + k_{m-1}}} \left(\frac{1}{z^m} \sum_{i=1}^{n-1} \left((X_i \circ \psi^m) - \frac{mx_i}{z} (X_z \circ \psi^m) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + (X_z \circ \psi^m) \frac{\partial}{\partial z} \right) \square$$

Para mais adiante, precisaremos do seguinte resultado,

(2.4.5) Lema : Seja $X \in G^n$.

Se X é não flat ao longo de $\{0\}^{n-1} \times [0, \infty[$ e se $\{0\}^{n-1} \times \mathbb{R}$ é formalmente invariante, então existem $q \in \mathbb{N}$ e uma aplicação $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , com $\gamma(0,0) \neq 0$ tal que a \mathbb{R} -componente de \bar{X}^{q+1} é da forma $z^q \gamma(x,z)$.

Demonstração :

$$\text{Pondo } X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_z \frac{\partial}{\partial z}, \text{ por nossos supostos,}$$

a aplicação $z \rightarrow X_z(0,z)$ tem seu ∞ -jato não nulo, então existe $q \in \mathbb{N}$ e aplicações $A_0, A_1, \dots, A_q : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , com $A_0(0) = A_1(0) = \dots = A_q(0) \neq 0$ tal que podemos escrever,

$$X_z(x,z) = A_0(x) + zA_1(x) + \dots + z^{q-1}A_{q-1}(x) + z^qA_q(x) + O(z^{q+1})$$

A \mathbb{R} -componente de \bar{X}^{q+1} é $X_z \circ \psi^{q+1}$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} (X_z \circ \psi^{q+1})(x,z) &= A_0(z^{q+1}x) + zA_1(z^{q+1}x) + \dots + z^{q-1}A_{q-1}(z^{q+1}x) + \\ &\quad + z^qA_q(z^{q+1}x) + O(z^{q+1}) \\ &= z^q(A_q(z^{q+1}x) + O(z)). \end{aligned}$$

Pondo $\gamma(x,z) = A_q(z^{q+1}x) + O(z)$, temos o resultado. \square

Agora, se temos uma sequencia de Blowing-ups de X ao longo do eixo z , é possível, depois de um tempo finito, não ter

mais singularidades em $(0,0)$. Isto é formalizado como segue,

(2.4.6) Definição : A sequencia $(\bar{X}^m, 0, s_m)_{0 \leq m < N}$, de Blowing-ups de X em 0 , ao longo do eixo z , será chamada de *Sequencia Maximal* de Blowing-ups ao longo do eixo z se $N = \infty$ ou, $N \in \mathbb{IN}$ e $\bar{X}^{N-1}(0) \neq 0$.

Estas sequencias maximais de Blowing-ups, sempre existem.

Da expressão de \tilde{X}^m no Lema (2.4.4), pode-se apreciar que propriedades de \tilde{X}^m numa vizinhança em forma de cilindro em torno de $\{0\}^{n-1} \times \mathbb{IR}$ são transformadas por ψ^m , em propriedades similares de X numa vizinhança em forma de cone em torno a $\{0\}^{n-1} \times \mathbb{IR}$.

Para sequencias maximais, temos a seguinte propriedade,

(2.4.7) Proposição : Sejam $N \in \mathbb{IN}$ e $(\bar{X}^n, 0, s_n)_{0 \leq n \leq N}$ uma sequencia maximal de Blowing-ups de X em 0 , ao longo do eixo z . Então existe cone K , de contato $N-2$ em torno ao eixo z tal que as órbitas no interior de K , entram em K e deixam K depois de um tempo finito.

Demonstração :

Como $\bar{X}^{N-1}(0) \neq 0$, podemos construir uma vizinhança C em forma de cilindro, de $0 \in \mathbb{IR}^{n-1} \times [0, \infty[$,

$$C = \{(x, z) \in \mathbb{IR}^{n-1} \times \mathbb{IR} / |x| \leq R, z \in [0, \infty[\}$$

tal que todas as órbitas de \bar{X}^{N-1} no interior de C , entram em C e deixam C depois de um tempo finito. Então,

$$\begin{aligned} \psi^{N-1}(C) &= \{(z^{N-1}x, z) / |x| \leq R, z \in [0, \infty[\} \\ &= \{(x', z) / |x'| \leq z^{N-1}R, z \in [0, \infty[\} \end{aligned}$$

Tomando K como o germe de $\psi^{N-1}(C)$ em 0 , tem-se o resultado.

□

Consideremos agora , sequencias infinitas de Blowing-ups . Isto que dizer que a sequencia de Blowing-ups do campo X em 0 , ao longo do eixo z , é infinita .

(2.4.8) Proposição : Seja $(\bar{X}^m, 0, s_m)_{0 \leq m \leq N}$ uma sequencia maximal de Blowing-ups de X em 0 ao longo do eixo z . Então , $N = \infty$ se , e somente se , o eixo z é formalmente invariante sob X .

Demonstração :

1) \Rightarrow Seja ,

$$j_{\infty} X(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^s a_{i,\alpha}^s x^\alpha z^{s-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^s c_{i,\alpha}^s x^\alpha z^{s-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$j_{\infty} \bar{X}^m(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=s_m+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^s a_{i,\alpha}^{m-s} x^\alpha z^{s-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{s=s_m+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^s c_{i,\alpha}^{m-s} x^\alpha z^{s-|\alpha|} \frac{\partial}{\partial z}$$

Temos que provar que $a_{i,0}^s = 0 \quad \forall s \geq s_0+1$ e $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Com a fórmula 2 de § 2.3 , encontra-se que para todo $s \geq s_0+1$ e $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_{i,0}^{1-s-s_0-1} = a_{i,0}^s$ e por indução sobre m , usando a mesma fórmula , temos que $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$a_{i,0}^{m-s-s_0-\dots-s_{m-1}-m} = a_{i,0}^s$$

Suponhamos por contradição , que $a_{i,0}^s \neq 0$. Então , $a_{i,0}^{1-s-s_0-1} \neq 0$, assim $s_1+1 \leq s-s_0-1$ (ver eleição de s_1 na definição (2.4.2)) ou $0 \leq s-s_0-s_1-2$; além disto , por indução , temos que ,

$$a_{i,0}^{m-s-s_0-s_1-\dots-s_{m-1}-m} \neq 0 .$$

Como sempre , deveria ser $0 \leq s-s_0-s_1-\dots-s_{m-1}-m$.

Certamente, cedo ou tarde $0 = s - s_0 - s_1 - \dots - s_{m-1} - m$
para algum m .

$$\text{Mas } \bar{X}^m(0) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,0}^{m-0} \frac{\partial}{\partial x_i} \neq 0, \text{ contradicendo o}$$

fato que $N = \infty$.

ii) \Leftarrow Usando a mesma notação, temos que $a_{i,0}^s = 0, \forall s \geq s_0 + 1$
e $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Da fórmula 2 de § 2.3, temos imediatamente que,

$$a_{i,0}^{m-0} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } i \in \{1, \dots, n-1\}, \text{ donde,}$$

$$\bar{X}^m(0) = 0 \quad \forall m.$$

Logo de i) e ii) temos a Proposição.

□

§ 2.5. REDUÇÃO A UMA SINGULARIDADE COM 1-JATO NÃO NULO

O propósito desta seção é provar o seguinte,

TEOREMA : Se $(\bar{X}^m, 0, s_m)_{0 \leq m < \infty}$ é uma sequência maximal de Blowing-ups de $X \in G^n$, ao longo do eixo z e se X é não flat ao longo do eixo z , então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que \bar{X}^{N+m} tem flatness zero, $\forall m \in \mathbb{N}$.

O campo \bar{X}^{N+m} ter flatness zero, quer dizer que, $j_1 \bar{X}^{N+m}(0) \neq 0$, assim o Teorema dá as condições para reduzir uma singularidade com 1-jato não nulo por Blowing-ups direcionais sucessivos.

A "demonstração" deste Teorema, será consequência das Proposições (2.5.1), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ que veremos a seguir.

(2.5.1) Proposição : Seja $X \in G^n$ tendo flatness s .

Se \bar{X}^1 tem flatness $\geq s+1$, então

$$j_{s+1}X(0) = \sum_{|\alpha|=s+1} c_a^{s+1} x^\alpha \frac{\partial}{\partial z}$$

Demonstração :

Como $j_s X(0) = 0$, somente interessam,

$$a_{i,\alpha}^{s+1} \text{ e } c_a^{s+1}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq s+1, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Da fórmula 3. de § 2.3, temos que para cada m tal que $1 \leq m \leq s$, com $|\alpha| = m-1$; $0 = c_a^{-m} = c_a^{m+s-m+1} = c_a^{s+1}$.

Assim, $c_a^{s+1} = 0$ para cada a tal que $1 \leq |\alpha| \leq s$ (*)

Da fórmula 1. de § 2.3, temos que para cada m tal que $1 \leq m \leq s+1$, com $|\alpha| = m$ e $a_i \geq 1$,

$$0 = a_{i,\alpha}^{-m} = a_{i,\alpha}^{m+s+1-m} c_{(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)}^{m+s+1-m}$$

Mas por (*) os c são zero.

Em consequência, $a_{i,\alpha}^{s+1} = 0$ para cada a tal que, $0 \leq |\alpha| \leq s+1$ e $a_i \geq 1$.

Da mesma forma, usando 2. de § 2.3, obtem-se que todos os coeficientes de $j_{s+1}X(0)$ anulam-se, exceto, possivelmente, os c_a^{s+1} com $|\alpha| = s+1$.

Logo, a Proposição .

□

(2.5.2) Proposição : Seja $X \in G^n$. Se \bar{X}^1 tem flatness s , então \bar{X}^2 tem flatness $\leq s$.

Demonstração :

Suponhamos $j_{s+1}\bar{X}^2(0) = 0$.

Pela Proposição (2.5.1) anterior, isto implica que

$$j_{s+1}\bar{X}^1(0) = \sum_{|\alpha|=s+1} c_a^{-s+1} x^\alpha \frac{\partial}{\partial z}$$

Por nosso suposto, um dos c_a^{-s+1} é diferente do zero. Mais isto é impossível pela observação feita depois de 3. em

§ 2.3 (invariança do hiperplano $z = 0$).

Logo, \bar{X}^2 deve ter flatness $\leq s$. \square

(2.5.3) Proposição : Seja $X \in G^n$ tendo flatness s .

Se $j_{s+1} \bar{X}^1(0) = 0$, então \bar{X}^1 tem flatness $s+1$.

Demonstração :

Temos que provar que $j_{s+2} \bar{X}^1(0) \neq 0$.

Da Proposição (2.5.1) e do fato que $j_{s+1} \bar{X}^1(0) = 0$, temos que,

$$j_{s+1} X(0) = \sum_{|a|=s+1} c_a^{s+1} X^a \frac{\partial}{\partial z}$$

Como X tem flatness s , então existe a tal que, $|a| = s+1$ e $c_a^{s+1} \neq 0$.

Usando a fórmula 3. de § 2.3, observa-se que,

$$c_a^{-s+2} = c_a^{s+2+s-s-1} = c_a^{s+1}.$$

Assim, $j_{s+2} \bar{X}^1(0) \neq 0$, logo \bar{X}^1 tem flatness $s+1$. \square

(2.5.4) Proposição : Seja $X \in G^n$.

Suponhamos existe inteiro $s \geq 1$ e uma sequência infinita $(\bar{X}^m, 0, s)_{m \in \mathbb{N}}$, de Blowing ups de X em 0 , na direção do eixo z , tal que $\forall m \in \mathbb{N}$, \bar{X}^m tem flatness s e que em cada passo, dividimos por z^s .

Consideremos a aplicação $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $i(z) = (0, 0, \dots, 0, z)$.

Então, $j_{\infty}((j_{s-1} X) \circ i)(0) = 0$.

Demonstração :

$j_{s-1} X(0, 0, \dots, 0, z)$ é formalmente determinado por,

$$\left(\frac{\partial^M X}{\partial x^\beta \partial z^{M-|\beta|}}(0, 0, \dots, 0, z) \right)_{\substack{0 \leq M \leq s-1 \\ 0 \leq |\beta| \leq M}}$$

Usando as notações de § 2.3 , obtemos que ,

$$\frac{\partial^M X}{\partial x^\beta \partial z^{M-|\beta|}}(x_1, \dots, x_{n-1}, z) = \sum_{m=S+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^m \left(\sum_{\iota=1}^{n-1} a_{\iota, \alpha}^m \frac{\partial}{\partial x_\iota} + c_\alpha^m \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\alpha! x^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!} \frac{(m-|\alpha|)! z^{m-|\alpha|-M+|\beta|}}{(n-|\alpha|-M+|\beta|)!}$$

Assim ,

$$\frac{\partial^M X}{\partial x^\beta \partial z^{M-|\beta|}}(0, \dots, 0, z) = \sum_{m=S+1}^{\infty} \left(\sum_{\iota=1}^{n-1} a_{\iota, \beta}^m \frac{\partial}{\partial x_\iota} + c_\beta^m \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\beta! (m-|\beta|)!}{(m-M)!} z^{n-M}$$

Como ,

$$j_\infty^m X(0) = \sum_{N=S+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{s-1} \left(\sum_{\iota=1}^{n-1} a_{\iota, \beta}^N \frac{\partial}{\partial x_\iota} + c_\beta^N \frac{\partial}{\partial z} \right) x^\beta z^{N-|\beta|}$$

Usando $\psi^m : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \mapsto (x_1 z^m, \dots, x_{n-1} z^m, z)$$

do Lema (2.4.4) , temos que ,

$$\bar{X}^m = \frac{1}{z^{Sm}} \left(\sum_{\iota=1}^{n-1} \left(\frac{1}{z^m} (X \circ \psi^m) - \frac{mx}{z} (X_z \circ \psi^m) \right) \frac{\partial}{\partial x_\iota} + (X_z \circ \psi^m) \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Para a componente $\frac{\partial}{\partial x_\iota}$, obtemos que ,

$$\frac{1}{z^{Sm}} \frac{1}{z^m} \sum_{N=S+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{s-1} a_{\iota, \beta}^N x^\beta z^{m|\beta|} z^{N-|\beta|} - \frac{1}{z^{Sm}} \frac{mx}{z} \sum_{N=S+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{s-1} c_\beta^N x^\beta z^{n|\beta|} z^{N-|\beta|}$$

$$= \sum_{N=S+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{s-1} a_{\iota, \beta}^N x^\beta z^{N-|\beta|-1-m(s+1-|\beta|)} z^{-m} \sum_{N=S+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{s-1} c_\beta^N x^\beta z^{N-|\beta|-1-m(s-|\beta|)}$$

e para a componente $\frac{\partial}{\partial z}$, temos ,

$$\sum_{N=S+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{s-1} c_\beta^N x^\beta z^{N-|\beta|-m(s-|\beta|)}$$

Desta última expressão , se a construção é possível pa

ra cada $m \in \mathbb{N}$, então $c_{\beta}^N = 0$, para todo $N \geq s+1$ e $0 \leq |\beta| \leq s-1$.

Assim, da expressão para a componente $\frac{\partial}{\partial x_t}$,

$$\sum_{N=s+1}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{s-1} c_{\beta}^N x^{\beta} z^{N-|\beta|-m(s-|\beta|)} = 0.$$

Pelas mesmas razões, temos que $a_{t,\beta}^N = 0$ para todo $N \geq s+1$, $0 \leq t \leq n-1$, $0 \leq |\beta| \leq s-1$.

Isto estabelece que $j_{\infty}((j_{s-1} X) \circ i)(0) = 0$. \square

(2.5.5) Proposição: Seja $X \in G^n$ não flat ao longo do eixo z . Seja \bar{X}^m obtido de X por m Blowing-ups sucessivos em 0 , na direção do eixo z . Então, \bar{X}^m é não flat ao longo do eixo z .

Demonstração:

Seja $\psi^m: \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, a aplicação que determina \bar{X}^m .

Denotando $i: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$
 $z \mapsto (0, \dots, 0, z)$

e supondo que $j_{\infty}(\bar{X}^m \circ i)(0) = 0$, então $j_{\infty}(\tilde{X}^m \circ i)(0) = 0$ e portanto, $j_{\infty}(X \circ \psi^m \circ i)(0) = 0$.

Mas $\psi^m \circ i = i$, o qual implicaria que $j_{\infty}(X \circ i)(0) = 0$, contradizendo o nosso suposto.

Logo $j_{\infty}(\bar{X}^m \circ i)(0) \neq 0$, assim, \bar{X}^m é não flat ao longo do eixo z . \square

(2.5.6) Proposição: Seja $X \in G^n$.

Se X é não flat ao longo do eixo z , então é impossível que exista sequência infinita $(\bar{X}_m^m, 0, s_m)_{m \in \mathbb{N}}$, de Blowing-ups de X em 0 , na direção do eixo z com $m \geq 1$, $s_m \geq 1$.

Demonstração :

Suponhamos existe tal sequencia .

Então existem inteiros $s \geq 1$ e $N \geq 1$ tal que $\forall m \geq 0$, \bar{X}^{N+m} tem flatness s .

Em consequencia , da Proposição (2.5.4) , temos que $j_{\infty}((j_{s-1} \bar{X}^N) \circ i)(0) = 0$, o qual contradiz a Proposição (2.5.5). \square

Esta última Proposição completa a "Demonstração" do TEOREMA enunciado ao começo desta seção .

CAPITULO 3 :

A SINGULARIDADE $\lambda (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})$ EM \mathbb{R}^3 .

Neste capítulo fazemos um estudo dos germes de campos em \mathbb{R}^3 cujo 1-jato é da forma ,

$$\lambda (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) , \quad \lambda \neq 0 .$$

Em § 3.0 apresenta-se um resumo dos resultados de [Ta.5] relativo às variedades invariantes , que usaremos em § 3.2 .

Em § 3.1 , estudamos o comportamento destes campos num cone de contato finito em torno de uma variedade uni-dimensional invariante .

Em § 3.2 , dá-se uma estratificação do espaço G^3 induzida por estes campos e comprova-se que , localmente , em cada estrato , o comportamento topológico é fracamente estável .

Finalmente , em § 3.3 , descrevem-se as bifurcações destas singularidades para o caso de autovalores reais .

Em § 3.1 , prova-se o Resultado 1 e o Resultado 2 , enunciados em § 1.6 . Em § 3.2 prova-se o Resultado 3 e em § 3.3 , o Resultado 4 .

Os conteúdos deste capítulo estão , essencialmente , contidos em [Bo.Du.] , [Gu.2] , [Gu.Ho.] e [Ta.5] .

§ 3.0. VARIEDADES INVARIANTES

Em (2.0.7) estudamos o germe de um campo de vetores com simetria e determinamos , certas curvas invariantes (no

caso do Blowing-up , variedades estáveis e instáveis de singularidades hiperbólicas) .

As curvas invariantes encontradas na Proposição (2.0.8) correspondem a certas variedades invariantes no caso não reduzido.

Takens em [Ta.5] mostra a existencia de tais variedades invariantes .

Neste ponto , daremos os elementos principais para provar a existencia de tais variedades invariantes e estabeleceremos os Teoremas que usaremos posteriormente em § 3.2 .

Consideremos um toro n -dimensional imerso em alguma variedade M e as coordenadas $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n'}, z$, numa vizinhança do toro , onde $y_1 = \dots = y_{n'} = z = 0$ é o toro e todos os x_i são definidas módulo uma constante c . Consideremos somente o conjunto onde estas coordenadas são definidas . Denotemos por (x, y, z) os pontos da variedade , onde

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad y = (y_1, \dots, y_{n'})$$

Seja $|y| = \sum_{j=1}^{n'} |y_j|$. Denotemos por $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ os vetores tais que ,

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad \vec{Y} = \sum_{j=1}^{n'} y_j \frac{\partial}{\partial y_j} , \quad \vec{Z} = z \frac{\partial}{\partial z} ,$$

onde $\|\vec{X}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|\vec{Y}\| = \sum_{j=1}^{n'} |y_j|$ e $\|\vec{Z}\| = |z|$

Seja φ um difeomorfismo de uma vizinhança do toro numa outra vizinhança do toro , de classe C^{m+1} , tal que os conjuntos onde $y = 0$ e $z = 0$ são invariantes e tal que se $(0, \vec{Y}, 0)$ é um vetor em algum ponto $(x, 0, z)$ então $(\vec{X}', \vec{Y}', \vec{Z}') = \varphi_* (0, \vec{Y}, 0)$ satisfazem :

1. $\|\vec{Y}'\| \leq (1 - c_1 |z|^k) \|\vec{Y}\|$
2. $\|\vec{X}'\| + \|\vec{Z}'\| \leq c_2 |z|^l \|\vec{Y}\|$

Também se $(\vec{X}, 0, \vec{Z})$ é um vetor no ponto $(x, 0, z)$ então $(\vec{X}', 0, \vec{Z}') = \varphi_*(\vec{X}, 0, \vec{Z})$ e $(x', 0, z') = \varphi_*(x, 0, z)$ satisfazem ,

$$3. |z'| \|\vec{X}'\| + \|\vec{Z}'\| \geq (1 + c_3 |z|^k) (|z| \|\vec{X}\| + \|\vec{Z}\|)$$

$$4. (1 + 2c_4 |z|^k) |z| \geq |z'| \geq (1 + c_4 |z|^k) |z| ,$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes positivas e k, l e m são inteiros positivos .

Finalmente , suponhamos que também existem inteiros positivos k' e h tal que :

$$5. h > k - l$$

$$6. k' > k + h + 1$$

$$7. k' \geq l$$

$$8. m \geq k + k'$$

Então , tem-se o seguinte ,

(3.0.1) Teorema : [Ta.5]

Suponhamos a situação acima . Seja $\bar{\varphi}$ um difeomorfismo de classe C^{m+1} (de uma vizinhança do toro numa outra vizinhança do toro) tal que em cada ponto de $z = 0$ o m -jato de φ e de $\bar{\varphi}$ coincidem . Então para cada constante positiva A , existem $\varepsilon > 0$ e uma variedade , $W \subset C_\varepsilon = \{ (x, y, z) / |y| \leq A |z|^k , |z| \leq \varepsilon \}$, de dimensão $n+1$, tais que :

(a) W é *semi-invariante* sob $\bar{\varphi}$, isto é , $\bar{\varphi}(W) \supset W$,

(b) W contém o toro , a qual é , ao longo do toro , tangente a $y = 0$.

A variedade W tem a forma ,

$\{(x,y,z) / y = f(x,z) \text{ e } |z| \leq \varepsilon\}$, onde f é uma função de Lipschitz .

Se acrescentamos a seguinte hipótese ; Para algum $\varepsilon > 0$ as condições 1., 2. e 4. , dadas anteriormente , são satisfeitas para os vetores $(0, \vec{Y}, 0)$ em (x,y,z) com $|y| , |z| \leq \varepsilon$, $(\vec{X}', \vec{Y}', \vec{Z}') = \varphi_*(0, \vec{Y}, 0)$ e $(x', y', z') = \varphi(x, y, z)$, então existe ε' , $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que ,

$$W \cap U_{\varepsilon'} = \{ q \in U_{\varepsilon'} \setminus \{|z|=0\} / \varphi^{-n}(q) \in U_{\varepsilon'} , \forall n \geq 0 \} ,$$

onde ,

$$U_{\varepsilon'} = \{ (x,y,z) / \|y-f(x,z)\| < \varepsilon' \text{ e } |z| < \varepsilon' \}$$

A prova deste Teorema é bastante técnica e é dada com todos os detalhes em [Ta.5] . Ela está essencialmente baseada na construção de uma contração em um espaço métrico de funções de Lipschitz .

Como uma aplicação direta deste Teorema , temos a seguinte ,

(3.0.2) Proposição : [Ta.5]

Seja $X \in G^3$, tal que ,

$$j_1 X(0) = \lambda \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) , \lambda \neq 0 , \text{ cujo}$$

2-jato está na Forma Normal .

Seja Y_2 o 2-jato reduzido de X , invariante sob T . Seja \bar{Y}_2 o campo de vetores em $S^1 \times \mathbb{R}$ obtido por Blowing-up a Y_2 e dividido por σ .

Se $(0,1,0) \in S^1 \times \mathbb{R}$ é uma singularidade hiperbólica de \bar{Y}_2 , tal que \bar{Y}_2 é uma sela hiperbólica , então X tem uma linha invariante perto de $y = z = 0$.

Se $(\alpha, \beta, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ é uma singularidade hiperbólica de \bar{Y}_2 , tal

que \bar{Y}_2 é uma sela hiperbólica, então X tem uma variedade invariante perto de ,
 $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \beta^2(x^2 + y^2) = \alpha^2 z^2 \}$.

Denotemos por \tilde{X} o Blowing-up a X . \tilde{X} é um campo de vetores em $S^2 \times \mathbb{R}$.

Na Proposição anterior, está associado a cada singularidade de \bar{Y}_2 em $S^1 \times \{0\}$ algum toro definido na seguinte forma :

Para $(0,1,0) \in S^1 \times \mathbb{R}$, associamos o ponto (0-toro), $(0,0,1,0)$ o qual é uma singularidade de \tilde{X} .

Para $(\alpha,\beta,0) \in S^1 \times \mathbb{R}$, associamos o 1-toro $\{\beta\} \cap (S^2 \times \{0\})$ o qual é invariante sob \tilde{X} .

Para concluir, é suficiente provar que em alguma vizinhança de tais toros, podemos encontrar coordenadas nas quais \tilde{X} satisfaz as propriedades do Teorema (3.0.1) com $k=1$, $l=1$, $h=1$ e $k'=4$, as quais garantem a existência das variedades invariante para \tilde{X} .

§ 3.1. COMPORTAMENTO NUM CONE DE CONTATO

Seja $X \in G^n$, tal que :

1. deixa o hiperplano $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ invariante ,
2. deixa o eixo z , formalmente invariante ;
3. tem seu 1-jato não nulo .

O 1-jato de tal campo de vetores tem associada uma matriz da forma ,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

onde $A \in M(n-1, \mathbb{R})$ (matrizes $(n-1) \times (n-1)$ com coeficientes em \mathbb{R}) e c_0^1 como em § 2.3 .

Tal campo de vetores aparece como resultado da redução por Blowing-ups sucessivos no § 2.5 .

Se $c_0^1 = 0$, para $n = 3$, uma possibilidade é que A tenha autovalores $i\lambda$, $-i\lambda$, $\lambda \neq 0$ (caso da rotação que estamos estudando) .

Se $c_0^1 \neq 0$, caso no qual os autovalores na direção do eixo z são não nulos , temos a seguinte ,

(3.1.1) Proposição : Seja $X \in G^n$, tal que :

1. O eixo z , $\{0\}^{n-1} \times \mathbb{R}$ é formalmente invariante sob X .
2. $c_0^1 \neq 0$.

Então ,

- a) Existe germe $h : ([0, \infty[, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$ de classe C^∞ , cujo gráfico (germe) , $\{(h(z), z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} / z \in [0, \infty[\}$ é invariante sob X com $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = 0$.
- b) Supondo $c_0^1 < 0$ (mudando sinal de X se for necessário) , existe cone K , de contato finito em torno de $\{0\}^{n-1} \times [0, \infty[$ (direção do eixo z) tal que a única órbita de X em K tendendo para 0 está contida em $\{(h(z), z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} / z \in [0, \infty[\}$ e as outras órbitas partindo de K , deixam K depois de um tempo finito .

Demonstração :

Ver Apêndice. (A1) .

(3.1.2) Proposição : Seja $X \in G^n$. Suponhamos que ;

1. O eixo z é formalmente invariante sob X ,
2. $X|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}$ é uma contração ou expansão hiperbólica (i.é., o espectro do seu operador linear (descrito pela matriz Jacobiana, $D(X|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}})(0)$) está contido num subconjunto de \mathbb{C} da forma $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z < -\lambda\}$ ou $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > \lambda\}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$).
3. X é não flat ao longo do eixo z ,
4. X é limitado numa vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de 0 , junto com todas suas derivadas.
Então existe cone K , de contato finito, em torno ao eixo z e germe,
 $h : ([0, \infty[, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$ tal que :
 - a) O gráfico de h , $\{(h(z), z) / z \in [0, \infty[\}$ é invariante sob X .
 - b) Em K , temos as situações A e B , enunciadas no Resultado 1., (1.0.1).

Demonstração :

Ver Apêndice (A2) .

(3.1.3) Proposição : Seja $X \in G^n$.

Suponhamos que X tem a seguinte forma numa vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de 0 ;

$$X(x, z) = (X_R(x, z), 0) + (A(x, z) x, 0) + (0, B(x, z)) + (R_\infty(x, z), 0) \quad \text{onde ,}$$

$$1. \langle X_R(x, z), x \rangle = 0$$

2. $X_R : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $A : U \longrightarrow \mathbb{R}$,
 $B : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $R_\infty : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$
 são de classe C^∞ e limitadas em sub-
 conjuntos limitados de U , juntamen-
 te com todas suas derivadas .

3. R_∞ é ∞ -flat ao longo de ,
 $\{(x,z) \in U / z = 0\}$. Isto é , para to-
 do $i,k \in \mathbb{N}$, existem $\delta, L_{i,k} > 0$ tal
 que para todo $(x,z) \in U$ com $|z| < \delta$;

$$\left\| \frac{\partial^i R_\infty}{\partial z^i} (x,z) \right\| \leq L_{i,k} |z|^k$$

4. $j_\infty(B(0,-))(0) \neq 0$.

Então , existe $\varepsilon > 0$ e aplicação ,
 $h : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ tal que ,
 $\{(h(z), z) / z \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ é invariante sob
 X e tal que $j_\infty h(0) = 0$. Ainda mais , se
 (mudando o sinal de X se for necessário) a
 órbita de X em $\{(h(z), z) / z \in [0, \infty[\}$ ten-
 de para 0 , então existe cone (germe) K ,
 de contato finito , em torno de $\{0\}^{n-1} \times [0, \infty[$
 tal que em K , temos as situações A e B
 enunciadas no Resultado 1., (1.0.1) .

Demonstração :

Ver Apêndice (A3)

Agora , da Forma Normal (1.3.2) de $X \in \mathcal{G}^3$ tal que ,
 $L = j_1 X(0) = \lambda \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\lambda \neq 0$, temos que exis-
 te difeomorfismo $\varphi : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, de classe C^∞ tal
 que $\varphi_* X = \left(\lambda + f(x^2+y^2, z) \right) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + g(x^2+y^2, z) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \right.$
 $\left. + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + h(x^2+y^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + R_\infty(x, y, z)$,

Ao aplicar o Teorema da Forma Normal (1.3.1), φ pode ser escolhido de forma tal que preserve o eixo z . Este fato pode ser visto das Demonstrações do Teorema, dadas em [Ta.5] ou em [Du.4]. Em termos das suas notações, podemos escrever, $R_{l-1} = g_l + b_l + R_l$ com $g_l \in K^l$, $b_l \in B^l$, $j_l(R_l) = 0$, onde g_l , b_l e R_l não contém termos em z exclusivamente, nas componentes $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.

Tomando qualquer $Y' \in H^l$ com $[L, Y'] = b_l$, podemos, escrever,

$$Y' = Y + Az \frac{\partial}{\partial x} + Bz \frac{\partial}{\partial y}$$

para algum $Y \in H^l$ cujas componentes $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ não contém termos em z , exclusivamente.

Então temos que,

$$b_l = [L, Y'] = [L, Y] - \lambda Az \frac{\partial}{\partial y} + \lambda Bz \frac{\partial}{\partial x}.$$

Mas como b_l e $[L, Y]$ não contém termos em z exclusivamente, nas suas componentes $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, $A = B = 0$. Assim, $b_l = [L, Y]$.

Se X é não-flat ao longo do eixo z , então $\varphi_* X$ também o é. Por Blowing-ups mais uma vez, podemos supor que R_∞ é ∞ -flat no plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Aplicando a nossa Proposição (3.1.3), anterior, com

$$X_R = (\lambda + f(x^2 + y^2, z)) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$$A = g(x^2 + y^2, z)$$

$$B = h(x^2 + y^2, z) + \text{componente } z \text{ de } R_\infty,$$

obtemos o Resultado 1, enunciado na Página 40.

Finalmente, utilizando (1.3.2) e a Propriedade enunciada em (1.1.5), obtemos nosso Resultado 2, como consequência imediata do Resultado 1.

§ 3.2. ESTRATIFICAÇÃO

Consideremos $L = \lambda \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\lambda \neq 0$.

Seja $X \in G^3$ tal que $j_1 X(0) = L$, X na Forma Normal (1.3.2).

O 2-jato reduzido de tal campo de vetores, expressado em coordenadas cilíndricas é,

$$Y_2(r,z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Seja $Z(i)$ o conjunto destes campos $X \in G^3$ tal que os coeficientes a , b e c deste 2-jato reduzido satisfazem as situações $S(i)$ (pág.55).

O Resultado 3., enunciado em § 1.6, será provado em duas partes. Numa primeira parte, provaremos que existe estratificação de G^3 induzida por este campo X e numa segunda parte estudaremos a estabilidade fraca do mesmo.

(3.2.1) Proposição: Existe estratificação de G^3 induzida pela singularidade $X \in G^3$, como acima,

$$G^3 \supset W \supset V, \quad \text{tal que:}$$

1. $W = \{ X \in G^3 / \text{existe } \varphi: (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \text{ 1-jato de difeomorfismo tal que } j_1(\varphi_* X)(0) = j_1 L(0) \}$ é uma subvariedade diferenciável de codimensão 2, localmente fechada em G^3 .
2. V é um conjunto semi-algébrico de codimensão 3 em G^3 , localmente fechado em G^3 .
3. $W \setminus V$ é uma subvariedade diferenciável de codimensão 2 em G^3 .

Demonstração:

1. Seja $W_1 = \{ a \in J_1^3 / \text{existe } \varphi: (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \}$

1-jato de difeomorfismo tal que $\varphi_* \alpha = j_1 L(0)$

Consideremos o conjunto $M(3, \mathbb{R})$ das matrizes reais de 3×3 e para $A \in M(3, \mathbb{R})$, sejam $\det A$ o determinante de A ; $\text{tr } A$ o traço de A e $C = C_{11} + C_{22} + C_{33}$ onde C_{ii} são os cofatores associados aos elementos da diagonal principal da matriz $A = (a_{ij})$.

Usando a identificação canônica,

$$\begin{aligned} M(3, \mathbb{R}) &\longrightarrow J_1^3 \\ A = (a_{ij}) &\longmapsto j_1(\mathcal{L}(A)) \end{aligned}$$

$$\text{onde } \mathcal{L}(A) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

W_1 é caracterizado por

$$W_1 = \{ \alpha \in M(3, \mathbb{R}) / \det \alpha = 0, C > 0, \text{tr } \alpha = 0 \}$$

Então, por definição W_1 é semi-algébrico de codimensão 2 em J_1^3 .

Definamos $W = j_1^{-1}(W_1) \subset G^3$ que por definição, é semi-algébrico de codimensão 2 em G^3 .

Para provar que W é uma subvariedade diferenciável de codimensão 2 em G^3 , basta provar que W_1 é subvariedade diferenciável de codimensão 2 em $M(3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$.

Seja $f : M(3, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $f(A) = (a_0, a_1, a_2)$, onde $a_0 = -\det A$, $a_1 = C$ e $a_2 = -\text{tr } A$.

Assim f é uma submersão e $W_1 = f^{-1}(S)$, onde

$$S = \{ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 / a_0 = 0, a_1 > 0, a_2 = 0 \}$$

é evidentemente uma subvariedade de codimensão 2 em \mathbb{R}^3 .

Logo, W_1 é uma subvariedade diferenciável de codimensão 2 em \mathbb{R}^9 .

Assim, W é uma subvariedade diferenciável de codimensão 2 em G^3 .

Seja $P_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grau de } p = 3\}$ e definamos as seguintes aplicações contínuas,

$$\sigma: M(3, \mathbb{R}) \longrightarrow P_3 \quad \text{tal que} \quad \sigma(A) = \det(A - tI) \quad \text{e}$$

$$\tau: P_3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \quad \text{tal que} \quad \tau(p) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad \text{onde}$$

$$p(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Seja $H = H_a \cap H_f$, onde $H_a = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \lambda_1 \lambda_2 \neq 0\}$ é aberto em \mathbb{C}^3 e $H_f = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \text{ e } \operatorname{Re} \lambda_1 = |\lambda_3| = 0\}$ é fechado em \mathbb{C}^3 , é dizer, H é localmente fechado em \mathbb{C}^3 .

Logo $W_1 = (\tau \circ \sigma)^{-1}(H)$ é localmente fechado em $M(3, \mathbb{R})$ e portanto W_1 é localmente fechado em J_1^3 e em consequência, W é localmente fechado em G^3 .

2. Observemos que $\alpha \in W_1$ não determina topologicamente a singularidade, isto é, se $X \in G^3$ com $j_1 X(0) = \alpha$, nada podemos dizer sobre o tipo topológico de X .

Vejamos então derivadas superiores de X .

Usando a Forma Normal (1.3.2), temos

$$\pi_{2,1}^{-1}(W_1) = \left\{ \alpha \in J_2^3 \mid \text{existe } \varphi: (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \text{ 2-jato de difeomorfismo tal que } \varphi_* \alpha = \right.$$

$$= (\lambda + dz) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + az \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) +$$

$$\left. + (b(x^2 + y^2) + cz^2) \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad \text{cujo 2-jato re-$$

duzido α_R , em coordenadas cilíndricas é da forma $\alpha_R = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$

Seja $V_1 = \left\{ \alpha \in \pi_{2,1}^{-1}(W_1) \mid \alpha_R \text{ não satisfaz as hipóteses da Proposição (2.0.8)} \right\}$.

Isto é,

$$V_1 = \left\{ \alpha \in \pi_{2,1}^{-1}(W_1) \mid \text{para } \alpha_R = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}, \right.$$

$$\left. b=0 \text{ ou } c=a \text{ ou } c=0 \text{ ou } a-c < 0 \text{ e } a=0 \right\}$$

que é um subconjunto semi-algébrico de codimensão 1 em $\pi_{2,1}^{-1}(W_1)$ e como consequência, é um conjunto semi-algébrico de codimensão 3 em J_2^3 .

Então, definimos $V = j_2^{-1}(V_1)$ que é um conjunto semi-algébrico e de codimensão 3 em G^3 .

Por outro lado, $\pi_{2,1}^{-1}(W_1)$ é localmente fechado em J_2^3 e V_1 é fechado em $\pi_{2,1}^{-1}(W_1)$; logo V_1 é localmente fechado em J_2^3 . Então $V = j_2^{-1}(V_1)$ é localmente fechado em G^3 .

3. $W \setminus V$ é subvariedade diferenciável de codimensão 2 em G^3 , pois,

$$W \setminus V = j_2^{-1}(J_2^3 \cap (\pi_{2,1}^{-1}(W_1) \setminus V_1)).$$

Logo temos a Proposição \square .

Então temos a sequência $G^3 \supset W \supset V$ e o tipo topológico de $X \in W \setminus V$, isto é $j_2 X(0) \in \pi_{2,1}^{-1}(W_1)$ onde seu 2-jato reduzido, em coordenadas cilíndricas,

$$Y_2(r, z) = arz \frac{\partial}{\partial r} + (br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

$b \neq 0$, $c-a \neq 0$, $c \neq 0$ e $a-c < 0$ $a \neq 0$, está determinado por a , b e c e tem-se que,

$$W \setminus V = \bigcup_{i=1}^5 Z(i).$$

Agora para provar que todo $X \in W \setminus V$ é W - C^∞ -estável fracamente, é suficiente provar que $\alpha, \alpha' \in W$, com α, α' na forma normal com os respectivos 2-jatos reduzidos α_r e α'_r satisfazendo ambas as mesmas condições $S(i)$, então α e α' são C^∞ -equivalentes fracamente.

(3.2.2) Proposição: Todo $X \in W \setminus V$ como na Proposição (3.2.1) é C^∞ -estável fracamente.

Demonstração:

Caso 1: Sejam α_r, α'_r satisfazendo as condições da situação $S(1)$.

Sejam $X, X' \in Z(1)$, representantes de $\alpha, \alpha' \in W$.

Pelas Proposições (2.0.8) e (3.0.2), existem variedades invariantes (retas) l e l' para X e X' ao longo das quais o fluxo é atrator num lado e repulsor no outro. Do Teorema (3.0.1) segue que para uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{R}^3$, suficientemente pequena, todos os pontos $q \in U$ com $\alpha_{X,U}(q)$ ou $w_{X,U}(q)$ não nulos, são em $l \cap U$. Análogamente para X' e l' . É claro da forma da singularidade nesta situação $S(1)$, que podemos construir homeomorfismo que seja uma C^0 -equivalência fraca em vizinhança da origem.

Caso 2: Sejam α_r, α'_r satisfazendo as condições da situação, $S(2)$.

Sejam $X, X' \in Z(2)$, representantes de $\alpha, \alpha' \in W$.

Seja X_r representante de α_r tendo como coeficientes funções polinomiais de grau 2.

Em \mathbb{R}^2 , podemos construir dois subconjuntos Q_1 e Q_2 tal que:

- i) ∂Q_i é uma variedade diferenciável e $T(Q_i) = Q_i$, $(i = 1, 2)$.
- ii) $\text{Int}(Q_1) \cap \text{Int}(Q_2) = \emptyset$
- iii) $0 \in \text{Int}(Q_1 \cup Q_2)$
- iv) Existe constante c tal que para cada $q \in \partial Q_i$ a componente de $X_r(q)$, normal a ∂Q_i , tem comprimento $\geq c(d(q, 0))^2$, onde $d(q, 0)$ é a distância de q a origem.

Mais ainda, X_r leva pontos de $\partial Q_1 \setminus \{0\}$ ao interior de Q_1 e pontos de $\partial Q_2 \setminus \{0\}$ fora de Q_2 .

A Figura mostra a existência de Q_1 e Q_2 .

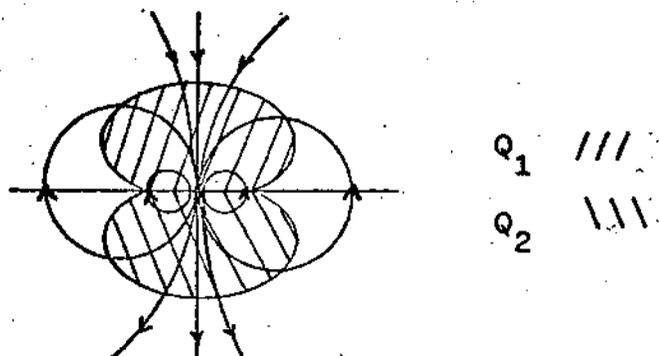


Fig.3.2.1 : Regiões $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^2$

Como X é homogêneo, então todas as propriedades de Q_i seguem sendo válidas para $t \cdot Q_i$, para algum $t > 0$.

Definamos $t \cdot \hat{Q}_i = \{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / (\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, y_3) \in t \cdot Q_i \}$

Um cálculo direto mostra que para t pequeno, digamos $t \leq t_0$ tem-se as seguintes propriedades :

- i') $\partial(t \cdot \hat{Q}_i)$ é diferenciável
- ii') $\text{Int}(t \cdot \hat{Q}_1) \cap \text{Int}(t \cdot \hat{Q}_2) = \emptyset$
- iii') $0 \in \text{Int}(t \cdot \hat{Q}_1 \cup t \cdot \hat{Q}_2)$
- iv') Em cada $q \in \partial(t \cdot \hat{Q}_i)$, a componente de $X(q)$, normal a $\partial(t \cdot \hat{Q}_i)$ tem comprimento $\geq \frac{1}{2} c(d(q, 0))^2$, onde c é a mesma constante de iv) e X leva pontos de $\partial(t \cdot \hat{Q}_1) \setminus \{0\}$ ao interior de $t \cdot \hat{Q}_1$ e pontos de $\partial(t \cdot \hat{Q}_2) \setminus \{0\}$ ao exterior de $t \cdot \hat{Q}_2$.

Consideremos agora $t \cdot \hat{Q}'_i$, $t \leq t'_0$, família de subconjuntos de \mathbb{R}^3 tendo as mesmas propriedades respeito a X' . Consideremos $t_1 \leq t'_0, t_0$ e o homeomorfismo,

$$\varphi: \partial(t_1 \cdot \hat{Q}_1) \cup \partial(t_1 \cdot \hat{Q}_2) \longrightarrow \partial(t_1 \cdot \hat{Q}'_1) \cup \partial(t_1 \cdot \hat{Q}'_2)$$

o qual claramente existe se construirmos as famílias de subconjuntos da mesma forma.

Existe uma única extensão,

$$\tilde{\varphi}: t \cdot \hat{Q}_1 \cup t \cdot \hat{Q}_2 \longrightarrow t \cdot \hat{Q}'_1 \cup t \cdot \hat{Q}'_2$$

de φ que leva curvas integrais de X , preservando parâmetros,

em curvas integrais de X' .

Assim, φ determina uma C^0 -equivalência entre α e α' .

Caso 3 : Sejam α_r, α'_r satisfazendo as condições da situação $S(3)$.

Sejam $X, X' \in Z(3)$, representantes de $\alpha, \alpha' \in W$.

Pela Proposição (3.0.2), X tem uma variedade invariante N , perto de $\{(x^2 + y^2) = az^2\}$ para algum $a > 0$.

De § 3.0 (Demonstração em [Ta.5]), segue que para r pequeno, $S_r \cap N$ é Lipschitz perto de $S_r \cap \{(x^2 + y^2) = az^2\}$ onde $S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

Então para r pequeno, $S_r \setminus N$ tem tres componentes; uma contendo $(0, 0, -r)$ e homeomorfa ao disco aberto, cujo fecho denotaremos por $R_{r,-}$. Uma outra contendo $S_r \cap \{z=0\}$, homeomorfa a $S^1 \times]0, 1[$ e a outra contendo $(0, 0, r)$ e homeomorfa ao disco aberto cujo fecho denotaremos por $R_{r,+}$.

Para r suficientemente pequeno, X transversal a S_r em todos os pontos de $R_{r,-}$ e $R_{r,+}$, leva pontos do interior de S_r em pontos de $R_{r,-}$ e pontos fora de S_r em pontos de $R_{r,+}$.

Para qualquer $q \in S_r \setminus (R_{r,+} \cup R_{r,-})$, nenhuma órbita de X através de q fica em $D_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq r\}$ todo o tempo.

Em forma análoga, para X' tomamos conjuntos $S'_r, R'_{r,-}$ e $R'_{r,+}$.

Tomando homeomorfismos φ_+ e φ_- tal que,

$$\varphi_{\pm} : R_{r,\pm} \longrightarrow R'_{r,\pm}$$

e extendendo eles a um homeomorfismo $\varphi : D_r \longrightarrow D'_r$ de tal forma que para todo $q \in R_{r,+}$, respectivamente $q \in R_{r,-}$, as curvas integrais de X através de q são levadas, preservando parametrização, às correspondentes curvas integrais de X' , então φ determina uma C^0 -equivalência entre α e α' .

Casos 4 e 5 : Para α_r, α'_r satisfazendo as condições das situações $S(4)$ e $S(5)$, com $X, X' \in Z(4)$ ($Z(5)$), representantes de $\alpha, \alpha' \in W$, a demonstração pode ser feita pelos mesmos métodos usados nos 3 últimos casos.

□

§ 3.3. BIFURCAÇÕES

(3.3.1) Proposição : Seja $X \in G^3$ tal que $j_1 X(0) = j_1 L(0)$ onde

$$L = \lambda \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \lambda \neq 0$$

Suponhamos X é dado na Forma Normal,

$$X_N = (\lambda + f(x^2 + y^2, z)) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + g(x^2 + y^2, z) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + h(x^2 + y^2, z) \frac{\partial}{\partial z} + R_\infty(x, y, z)$$

onde o 2-jato satisfaz as condições $S(i)$, para algum i e,

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0,0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 h}{\partial z^3}(0,0) \neq 0.$$

Então um desdobramento universal é dado por,

$$X_{\mu, \varepsilon} = (\lambda + f(x^2 + y^2, z)) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + (\varepsilon + g(x^2 + y^2, z)) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + (\mu + h(x^2 + y^2, z)) \frac{\partial}{\partial z} + R_\infty(x, y, z).$$

Demonstração :

Em $M(3, \mathbb{R})$ temos provado, na Proposição (3.2.1) a existência de uma variedade W de matrizes com autovalores tendo parte real zero.

L tem associada a matriz $\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para a qual

existe subvariedade de W contendo L , de codimensão 2 em $M(3, \mathbb{R})$.

Na Proposição (3.2.1), chamamos de $W \setminus V$ esta subvarie

Como a matriz associada a L é dada na forma normal ,
então , a aplicação ,

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M(3, \mathbb{R}) \quad \text{tal que}$$

$$T(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \lambda & 0 \\ -\lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

determina que a transversal à subvariedade $W \setminus V$ no espaço dos campos de vetores afins é ,

$$T(\mu, \varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon x + \lambda y \\ -\lambda x + \varepsilon y \\ \mu z \end{pmatrix}$$

Esta aplicação combinada com o cálculo da Forma Normal nos dá a família bidimensional de campos de vetores cuja dinâmica vamos estudar .

□

(3.3.2) Análise Geométrica das Bifurcações

Seja $X \in W \setminus V$, cujo desdobramento , truncado no 2-jato , em coordenadas cilíndricas , tem a forma ,

$$X_{\mu, \varepsilon} = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} + r (\varepsilon + az) \frac{\partial}{\partial r} + (\mu + br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

Como sabemos , estes campos são equivariantes por rotações em torno ao eixo z de \mathbb{R}^3 . Então se $\gamma(t)$ é uma curva integral , a projeção de $\gamma(t)$ no semi-plano (r, z) , $r > 0$, é uma curva integral do campo de vetores reduzido ,

$$Y_{\mu, \varepsilon} = r (\varepsilon + az) \frac{\partial}{\partial r} + (\mu + br^2 + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

Assim , do Retrato de Fase de $Y_{\mu, \varepsilon}$ podemos reconstruir o Retrato de Fase de $X_{\mu, \varepsilon}$.

O caso $(\mu, \varepsilon) = (0, 0)$ já foi analisado em (2.0.8) .

Suponhamos $(\mu, \varepsilon) \neq 0$.

Pontos singulares de $Y_{\mu, \varepsilon}$ são obtidos de ,

$$\left. \begin{aligned} r(\varepsilon + az) &= 0 & (E1) \\ \mu + br^2 + cz^2 &= 0 & (E2) \end{aligned} \right\} (E)$$

De $r(\varepsilon + az) = 0$, temos que $r = 0$ ou $\varepsilon + az = 0$, donde tem-se que as soluções de (E1) consistem do eixo z , junto com uma reta horizontal.

A topologia dos zeros de (E2) depende do sinal de μ e c pois $b > 0$. Assim, de $br^2 + cz^2 = -\mu$, temos que:

Para $c > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \mu > 0, \text{ não há solução} \\ \text{se } \mu = 0, \text{ a origem é a única solução} \\ \text{se } \mu < 0, \text{ tem-se uma semi-elipse} \end{array} \right.$

Para $c < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \mu > 0, \text{ semi-hipérbola de dois ramos, simétrica} \\ \text{ao eixo } r. \\ \text{se } \mu = 0, \text{ duas semi-retas pela origem} \\ \text{se } \mu < 0, \text{ semi-hipérbola (um ramo) cortando ao eixo} \\ \text{ } r > 0. \end{array} \right.$

Então, os zeros de (E2) é vazio, um ponto ou uma semi-elipse se $c > 0$ e uma semi-hiperbola de uma ou duas componentes ou dois raios com vértice na origem se $c < 0$.

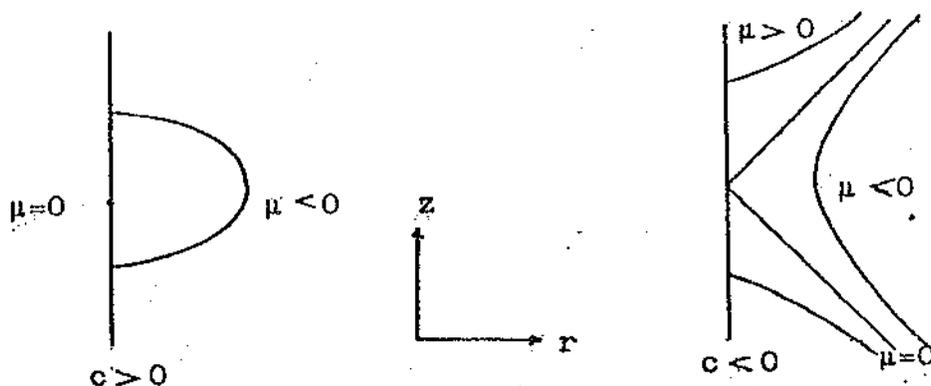


Fig.3.3.1 : Zeros da equação (E2)

Estamos interessados na estabilidade das soluções de (E) e a sua localização.

Então de (E1), se $r = 0$, temos que por (E2),

$z = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$, que tem sentido se $\mu \cdot c < 0$. Por outro lado, se

em (E1) $z = -\frac{\varepsilon}{a}$ então de (E2) temos que $r = \sqrt{-\frac{1}{b}(\mu + \frac{c}{a^2}\varepsilon^2)}$ que tem sentido quando $\mu + \frac{c}{a^2}\varepsilon^2 < 0$ pois $b > 0$.

Assim, temos para $Y_{\mu, \varepsilon}$ os pontos singulares,

$$p_{\pm} = (0, \pm \sqrt{-\frac{\mu}{c}}) \quad \text{se } \mu \cdot c > 0 \quad \text{e,}$$

$$q_{\varepsilon} = \left(\sqrt{-\frac{1}{b} \left(\mu + \frac{c}{a^2} \varepsilon^2 \right)}, -\frac{\varepsilon}{a} \right) \quad \text{se } \mu + \frac{c}{a^2} \varepsilon^2 < 0$$

Equilíbrios não degenerados são determinados do Jacobiano,

$$DY_{\mu, \varepsilon}(r, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon + az & ar \\ 2br & 2cz \end{pmatrix}$$

A condição para que um equilíbrio $(\mu_0, \varepsilon_0, p)$ com autovalores reais seja não degenerado é que $\det DY_{\mu_0, \varepsilon_0}(p) \neq 0$. Equilíbrios degenerados também acontecem se $DY_{\mu, \varepsilon}$ tem autovalores imaginários puros. Este é o caso da Bifurcação de Hopf.

Como $\det DY_{\mu, \varepsilon}(r, z) = 2cz(\varepsilon + az) - 2abr^2$, um equilíbrio com $r = 0$ é degenerado se $z(\varepsilon + az) = 0$.

Se $z = 0$, de (E2), temos que $\mu = 0$. Logo o eixo ε é uma curva no plano dos parâmetros na qual existem equilíbrios degenerados.

Se $z = -\frac{\varepsilon}{a}$, da equação (E2), temos que $\mu + \frac{c}{a^2}\varepsilon^2 = 0$ define uma segunda curva no plano dos parâmetros na qual existem equilíbrios não degenerados nos casos quando $\mu \cdot c < 0$.

Assim, em todos os casos, temos determinado que equilíbrios degenerados com autovalores reais, tem lugar numa das duas curvas no plano (μ, ε) , definidas por;

$$(B1) \quad \mu = 0$$

$$(B2) \quad \mu = -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2, \quad \mu \cdot c < 0$$

Todos os pontos de (B1) e (B2) são pontos de bifurcação de $Y_{\mu,\varepsilon}$ perto da origem e se $\mu \neq 0$ e $\mu \neq -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$, p_{\pm} e q_{ε} são pontos (singularidades) hiperbólicos.

Segundo $X \in Z(i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, existem essencialmente 4 casos a tratar.

Em todos os casos, temos que,

$$\det DY_{\mu,\varepsilon}(r,z) = 2cz(\varepsilon + az) - 2abr^2 \quad e$$

$$\text{tr } DY_{\mu,\varepsilon}(r,z) = (\varepsilon + az) + 2cz$$

Logo, nas singularidades,

$$\sigma(p_{\pm}) \stackrel{\text{not}}{=} \det DY_{\mu,\varepsilon}(p_{\pm}) = \pm 2c \sqrt{-\frac{\mu}{c}} \left(\varepsilon \pm a \sqrt{-\frac{\mu}{c}} \right)$$

$$\tau(p_{\pm}) \stackrel{\text{not}}{=} \text{tr } DY_{\mu,\varepsilon}(p_{\pm}) = \left(\varepsilon \pm a \sqrt{-\frac{\mu}{c}} \right) \pm 2c \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$$

$$\sigma(q_{\varepsilon}) \stackrel{\text{not}}{=} \det DY_{\mu,\varepsilon}(q_{\varepsilon}) = 2a \left(\mu + \frac{c}{a^2} \varepsilon^2 \right)$$

$$\tau(q_{\varepsilon}) \stackrel{\text{not}}{=} \text{tr } DY_{\mu,\varepsilon}(q_{\varepsilon}) = -\frac{2c}{a} \varepsilon$$

Caso 1: $b > 0$, $c - a > 0$, $c > 0$ ($a < 0$)

Gráficamente, temos para este caso, o plano dos parâmetros,

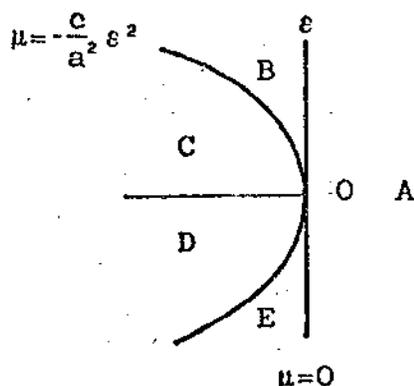


Fig.3.3.2 : Plano dos parâmetros com as regiões distinguidas A, B, C, D e E.

- Na região A : Para $\mu > 0$, o fluxo é trivial com $\dot{z} > 0$ ao longo das soluções .
- Na região B : $\mu > -\frac{c}{a^2} \varepsilon^2$, onde $\varepsilon > -a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e $\varepsilon > a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e temos as singularidades p_{\pm} .
Como $\sigma(p_+) > 0$ e $\tau(p_+) > 0$, p_+ é repulsor e como $\sigma(p_-) < 0$, p_- é sela .
- Na região C : $\mu < -\frac{c}{a^2} \varepsilon^2$, onde $0 < \varepsilon < -a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e temos as singularidades p_{\pm} e $q_{\varepsilon} > 0$.
Como $\sigma(p_{\pm}) < 0$, p_+ e p_- são selas e como $\sigma(q_{\varepsilon}) > 0$ e $\tau(q_{\varepsilon}) > 0$, q_{ε} é repulsor .
- Na região D : $\mu < -\frac{c}{a^2} \varepsilon^2$, onde $a \sqrt{-\frac{\mu}{c}} < \varepsilon < 0$ e temos as singularidades p_{\pm} e $q_{\varepsilon} < 0$.
Como $\sigma(p_{\pm}) < 0$, p_+ e p_- são selas e como $\sigma(q_{\varepsilon}) > 0$ e $\tau(q_{\varepsilon}) < 0$, q_{ε} é atrator .
- Na região E : $\mu > -\frac{c}{a^2} \varepsilon^2$, onde $\varepsilon < a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e $\varepsilon < -a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e temos as singularidades p_{\pm} .
Como $\sigma(p_+) < 0$, p_+ é sela e , como $\sigma(p_-) > 0$ e $\tau(p_-) < 0$, p_- é atrator .

Nossa análise deste caso é ilustrado na figura ,

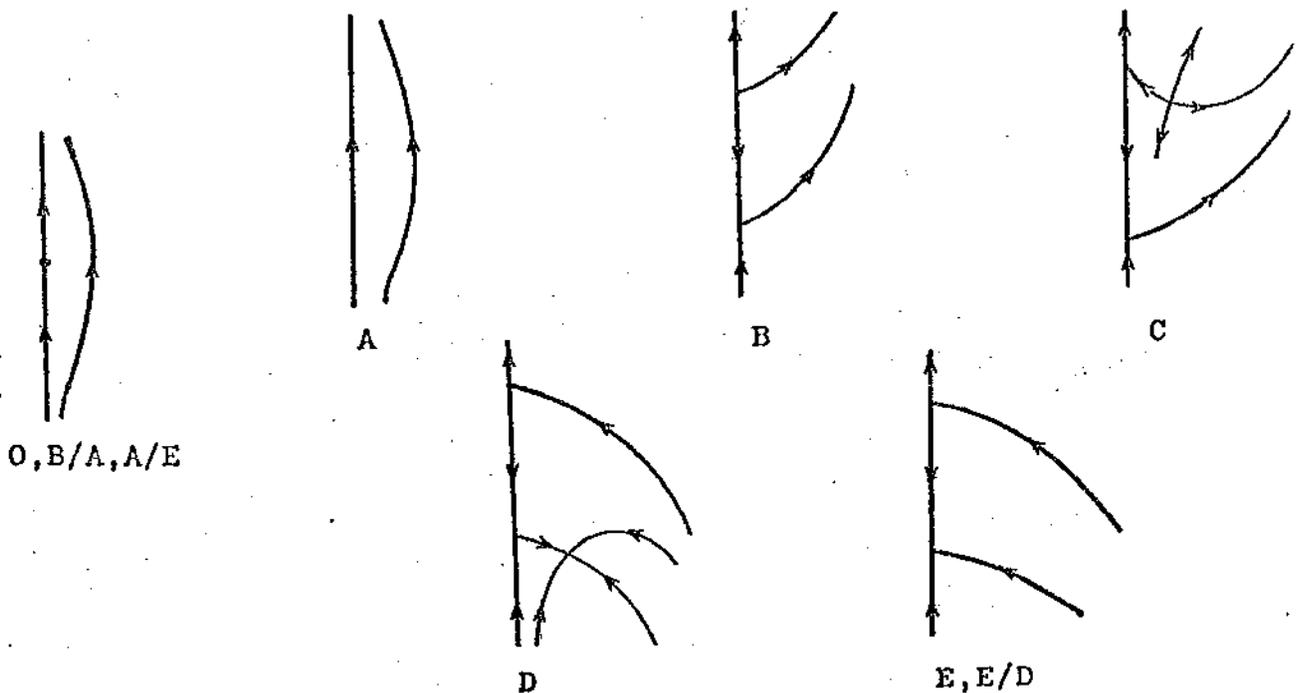


Fig.3.3.3 : Retrato de Fase do caso 1 ($a < 0$)

Casos 1 e 3 : $\left(\begin{array}{l} \text{caso 1 : } b > 0, c-a > 0, c > 0 \text{ (} a > 0 \text{)} \\ \text{caso 3 : } b > 0, c-a < 0, c > 0, a > 0 \end{array} \right)$

Gráficamente, temos para estes casos, o plano dos parâmetros,

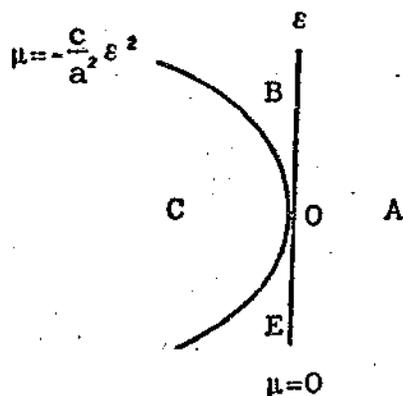


Fig.3.3.4 : Plano dos parâmetros com as regiões distinguidas A, B, C e D.

- Na região A : Para $\mu > 0$, o fluxo é trivial com $\dot{z} > 0$ ao longo das soluções.
- Na região B : $\mu > -\frac{c}{a^2} \epsilon^2$, onde $\epsilon > a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e $\epsilon > -a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e temos as singularidades p_{\pm} .
Como $\sigma(p_{+}) > 0$ e $\tau(p_{+}) > 0$, p_{+} é repulsor e como $\sigma(p_{-}) \leq 0$, p_{-} é sela.
- Na região C : $\mu < -\frac{c}{a^2} \epsilon^2$, onde $-a \sqrt{-\frac{\mu}{c}} < \epsilon < a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e temos as singularidades p_{\pm} e q_{ϵ} ($\epsilon \leq 0$).
Como $\sigma(p_{+}) > 0$ com $\tau(p_{+}) > 0$ e $\tau(p_{-}) < 0$ então p_{+} é repulsor e p_{-} é atrator e como $\sigma(q_{\epsilon}) < 0$ ($\epsilon \leq 0$), então q_{ϵ} é sela.
- Na região D : $\mu > -\frac{c}{a^2} \epsilon^2$, onde $\epsilon < a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e $\epsilon < -a \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e temos as singularidades p_{\pm} .
Como $\sigma(p_{+}) < 0$, p_{+} é sela e como $\sigma(p_{-}) > 0$ e $\tau(p_{-}) < 0$, p_{-} é atrator.

Nossa análise dos casos 1 e 3 é ilustrado na figura,

- Na região B : $\mu < -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$, onde $\varepsilon > a\sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e $\varepsilon > -a\sqrt{-\frac{\mu}{c}}$.
Então temos as singularidades p_{\pm} e q_{ε} .
Como $\sigma(p_{+}) < 0$, então p_{+} é sela e como ,
 $\sigma(p_{-}) > 0$ e $\tau(p_{-}) > 0$, p_{-} é repulsor .
De $\sigma(q_{\varepsilon}) > 0$ e $\tau(q_{\varepsilon}) < 0$, temos que q_{ε} é a-
trator .
- Na região C : $\mu < -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$ e temos a singularidade $q_{\varepsilon} > 0$.
Como $\sigma(q_{\varepsilon}) > 0$ e $\tau(q_{\varepsilon}) < 0$, q_{ε} é atra-
tor mas a matriz $DY_{\mu,\varepsilon}(q_{\varepsilon})$ tem os autovalores
 $\alpha_{1,2} = -\frac{c}{a}\varepsilon \pm \sqrt{\frac{c^2}{a^2}\varepsilon^2 - 2a(\mu + \frac{c}{a^2}\varepsilon^2)}$, os quais
são complexos conjugados para $\mu < \frac{1}{2a}(\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a})\varepsilon^2$.
Assim , existe foco atrator para $\varepsilon > 0$ pois ,
 $-\frac{c}{a}\varepsilon < 0$.
- Na região D : $\mu < -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$ e temos a singularidade $q_{\varepsilon} < 0$.
Analogamente ao caso anterior , existe neste ca-
so , foco repulsor .
Além disto , passando transversalmente através
de $\varepsilon = 0$, para $\varepsilon < 0$, tem lugar bifurcação de
Hopf nesta singularidade .
- Na região E : $\mu < -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$ e temos as singularidades p_{\pm} e $q_{\varepsilon} < 0$
Como $\sigma(p_{+}) > 0$ e $\tau(p_{+}) < 0$, p_{+} é atrator
e como $\sigma(p_{-}) < 0$, p_{-} é sela . De $\sigma(q_{\varepsilon}) > 0$
e $\tau(q_{\varepsilon}) > 0$, temos que q_{ε} é repulsor .

A análise destes casos , é ilustrado nas seguintes figu-
ras ,

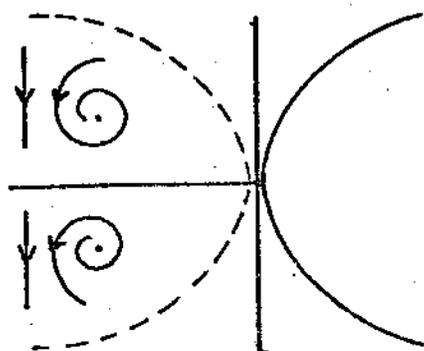


Fig.3.3.7 : Situação nas regiões C e D

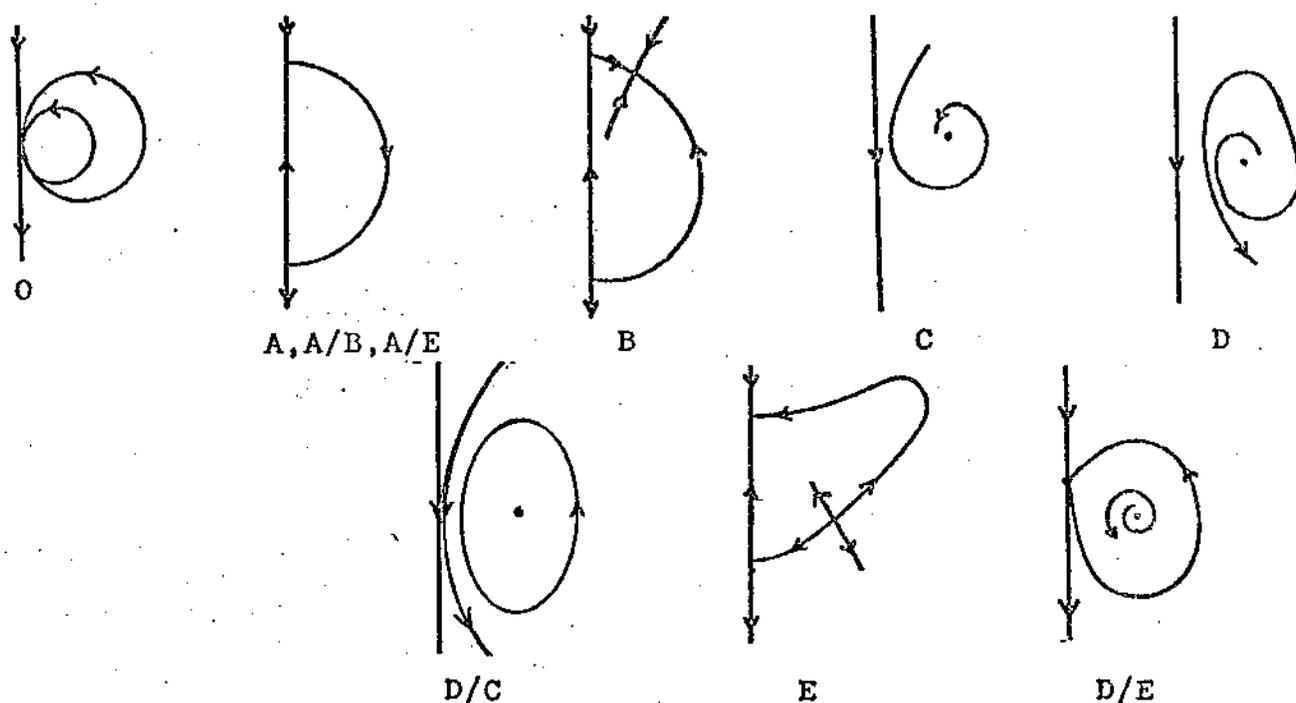


Fig.3.3.8 : Retratos de Fase dos casos 2 e 5

Caso 4 : $b > 0$, $c - a > 0$, $c < 0$, $a > 0$

Gráficamente , temos para estes casos o plano dos parâmetros ,

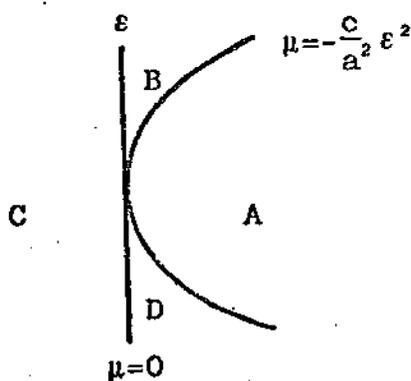


Fig.3.3.9 : Plano dos parâmetros com as regiões distinguidas A,B,C e D .

- Na região A : $\mu > -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$ com $-a\sqrt{-\frac{\mu}{c}} < \varepsilon < a\sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e temos as singularidades p_{\pm} .
Como $\sigma(p_{\pm}) < 0$, então p_+ e p_- são selas .
- Na região B : $\mu < -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$ com $\varepsilon > a\sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e $\varepsilon > -a\sqrt{-\frac{\mu}{c}}$.
Então temos as singularidades p_{\pm} e $q_{\varepsilon} < 0$.
Como $\sigma(p_+) < 0$, p_+ é sela e como $\sigma(p_-) > 0$ e $\tau(p_-) > 0$, p_- é repulsor . De $\sigma(q_{\varepsilon}) < 0$, q_{ε} é sela .
- Na região C : $\mu < -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$ e temos as singularidades q_{ε} ($\varepsilon \leq 0$)
Como $\sigma(q_{\varepsilon}) < 0$, q_{ε} ($\varepsilon \leq 0$) são selas .
- Na região D : $\mu < -\frac{c}{a^2}\varepsilon^2$ com $\varepsilon < a\sqrt{-\frac{\mu}{c}}$ e $\varepsilon < -a\sqrt{-\frac{\mu}{c}}$
e temos as singularidades p_{\pm} e $q_{\varepsilon} > 0$.
Como $\sigma(p_+) > 0$ e $\tau(p_+) < 0$, p_+ é atrator e como $\sigma(p_-) < 0$ e $\sigma(q_{\varepsilon}) < 0$, p_- e q_{ε} são selas .

A análise deste caso 4 , é ilustrado na figura ,

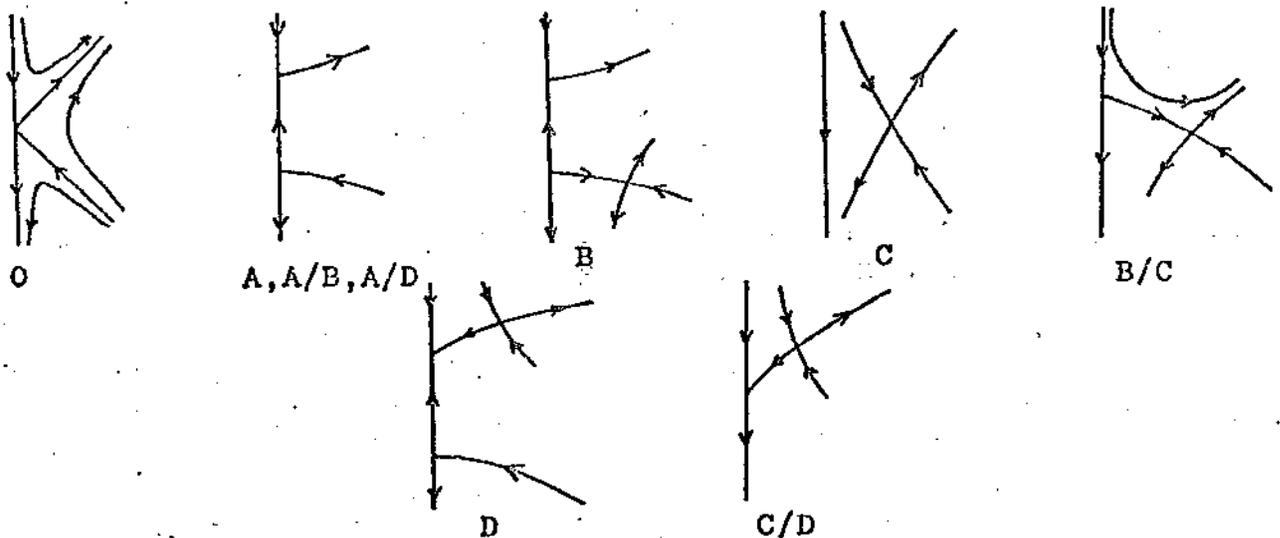


Fig.3.3.10 : Retratos de Fase do caso 4 .

APÊNDICE

(A1) Demonstração da Proposição (3.1.1) :

Usando as fórmulas do Lema (2.4.4) (com o suposto ,
 $k_1 = k_2 = \dots = k_{m-1} = 0$) , temos que para todo $m \geq 1$, o 1-jato
de \bar{X}^m tem uma matriz da forma ,

$$\begin{pmatrix} A - mc \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 0 \end{smallmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & c \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

onde $\text{Id} = \text{Id}_{(n-1) \times (n-1)}$.

Notemos que λ é autovalor de A se , e somente se ,
 $\lambda - mc \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 0 \end{smallmatrix} \text{Id}$ é autovalor de $A - mc \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 0 \end{smallmatrix} \text{Id}$.

Logo , para m suficientemente grande , \bar{X}^m é uma se-
la hiperbólica para a qual podemos aplicar o Teorema da varieda-
de estável (ou instável) [Ab.Ro.] , obtendo assim a Proposição .
□

(A2) Demonstração da Proposição (3.1.2) :

Seja $(x, z) = (x_1, \dots, x_{n-1}, z)$, denotemos

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_z \frac{\partial}{\partial z} = (X_x, X_z)$$

Pelo Lema (2.4.5) , podemos supor que X_z é da forma,

$$X_z(x, z) = z^q \gamma(x, z)$$

com $\gamma(0, 0) \neq 0$ e $q \geq 2$.

Então existem $A \in L(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$ ($L(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$ é o conjunto das aplicações lineares contínuas de \mathbb{R}^{n-1} em \mathbb{R}^{n-1}),
 $B : (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow (L(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1}), 0)$ e
 $R_\infty : (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$, tal que ,

$$X_x(x, z) = (A + B(x, z)) x + R_\infty(x, z)$$

e tal que (mudando o sinal de X se necessário) ,

1. O espectro de A está em $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z \leq \lambda < 0\}$
2. B e R_∞ são germes C^∞ ; $B(0, 0) = 0$.
3. $j_\infty R_\infty(0, 0) = 0$

Isto pelo fato que o eixo z é formalmente invariante. Também podemos supor que R_∞ é ∞ -flat ao longo de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, caso contrário, fazemos Blowing-up.

A existencia do gráfico invariante segue do Teorema da variedade central. A diferenciabilidade segue do fato que $\gamma(0, 0) \neq 0$.

Se $\gamma(0, 0) > 0$ então temos a situação A.

Se $\gamma(0, 0) < 0$ temos a situação B.

Todo isto pode ser provado pelas técnicas dadas em ,
 [Du.Ro.Rou.] .

□

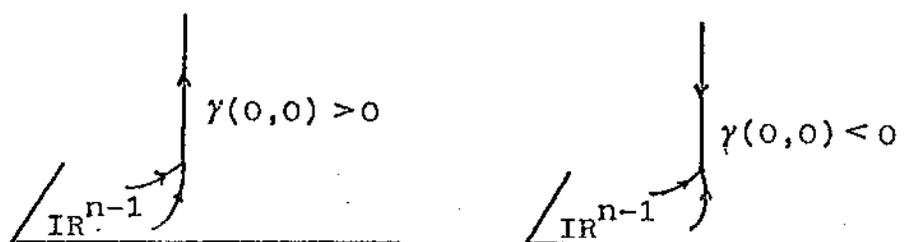


Fig.: A2.1 : Casos $\gamma(0, 0) \neq 0$ na demonstração da Proposição (3.1.2) .

(A3) Demonstração da Proposição (3.1.3) :

Como consequência do Lema (2.4.5), a \mathbb{R} -componente de X é da forma,

$$B(x,z) = z^q \gamma(x,z)$$

com $q \in \mathbb{N}$, $\gamma(0,0) \neq 0$ (lembramos que podemos realizar Blow-ups tanto quanto seja necessário em vista de nossos propósitos).

Se $q = 1$, então os autovalores ao longo do eixo z são não nulos. Então, aplicando a Proposição (3.1.1) anterior, obtemos a situação A.

Suponhamos $q \geq 2$. Observemos que $X_R(0,z) = 0$ pois para todo $x \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\langle X_R(0,z), x \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle X_R(tx,z), tx \rangle = 0, \text{ por } 1.$$

Então, usando a Fórmula de Taylor, podemos escrever

$$X_R(x,z) = D_1 X_R(0,z) x + O(|x|^2),$$

onde D_1 denota a derivada parcial na direção \mathbb{R}^{n-1} .

Se $L(z) = D_1 X_R(0,z)$ então para todo $(x,z) \in U$ tem-se $\langle L(z)x, x \rangle = 0$ pois, para t pequeno,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X_R(tx,z), tx \rangle = \langle L(z) tx, tx \rangle + \langle O(|tx|^2), tx \rangle \\ &= t^2 (\langle L(z)x, x \rangle + O(t)) \end{aligned}$$

Portanto, para todo z , $e^{L(z)t}$ determina un grupo de isometrias a 1-parâmetro e,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle e^{L(z)t} \cdot x, e^{L(z)t} \cdot x \rangle = 2 \langle L(z) \cdot e^{L(z)t} \cdot x, e^{L(z)t} \cdot x \rangle = 0$$

donde , $\langle L(z)x, x \rangle = 0$.

Se $A(0,0) \neq 0$, então $X|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}$ é uma contração ou expansão hiperbólica . Logo aplicando a Proposição (3.1.2) anterior , obtemos o resultado ; ambas situações A e B podem acontecer .

Se $A(0,0) = 0$.

Primeiro explicaremos porqué não ha restrição supor que o termo $A(x,z)x$ é da forma ,

$$A(x,z)x = z^p A_1(x,z)x \quad (*1)$$

para algum $p \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ com $A_1(0,0) \neq 0$.

Fazendo Blowing-up a X m vezes , temos a seguinte expressão ,

$$\begin{aligned} \tilde{X}^m(x,z) = & \left(\frac{1}{z^m} X_R(xz^m, z), 0 \right) + \left((A(xz^m, z) - mz^{q-1} \gamma(xz^m, z)x, 0) \right. \\ & \left. + (0, z^q \gamma(xz^m, z)) + \left(\frac{1}{z^m} R_\infty(xz^m, z), 0 \right) \right) \quad (*2) \end{aligned}$$

Escolhendo m grande , a propriedade $\gamma(0,0) \neq 0$ explica (*1) .

Chamemos a \tilde{X}^m de X novamente . Então supondo 1. , temos dois casos ;

Caso (a) : $p = q-1$

Caso (b) : $p < q-1$

Caso (a) : Se $p = q-1$

Podemos supor $\gamma(0,0) > 0$. Caso contrário , reemplazamos X por $-X$.

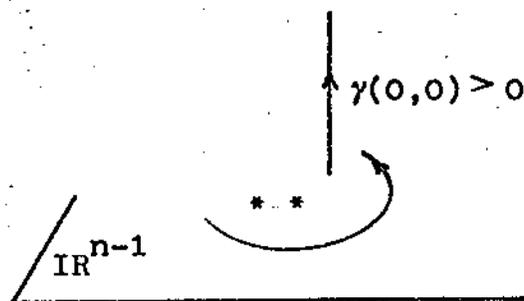


Fig.: A3.1 : As estrelinhas são colocadas devido que em $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, temos uma isometria. Somente quando $z > 0$ temos uma atração.

Fazendo Blowing-up a X um número suficiente de vezes, como em (*2), também podemos supor que $A_1(0,0) < 0$ em (*1).

Para nossos propósitos, restringiremos nossa atenção ao semi-espaço $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[$. Assim $z > 0$.

Denotemos por F e $X_{R,1}$ as aplicações obtidas integrando X e X_R , respectivamente, sobre t (tempo). Notemos que $X_{R,1}(0,z) = 0$, $\forall z$.

Afirmamos que existe aplicação $T_1 : U \rightarrow L(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$ de classe C^∞ , limitada em subconjuntos limitados de U , juntamente com todas suas derivadas, tal que,

$$X_{R,1}(x,z) = T_1(x,z)x.$$

Para ver isto, definamos, para (x,z) fixo, a aplicação $\Phi(t) = X_{R,1}(tx,z)$. Então,

$$\begin{aligned} X_{R,1}(x,z) &= \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= \int_0^1 \Phi'(t) dt \\ &= \int_0^1 D_1 X_{R,1}(tx,z)x dt \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^1 D_1 X_{R,1}(tx, z) dt \right) x$$

Pondo $T_1(x, z) = \int_0^1 D_1 X_{R,1}(tx, z) dt$, temos nossa afirmação.

Para descrever F numa forma apropriada, denotemos $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} / |x| = 1\}$ e consideremos a aplicação,

$$\begin{aligned} \psi : [0, \infty[\times S(0, 1) \times [0, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[\\ (r, u, z) &\longmapsto (ru, z) \end{aligned}$$

(r, u, z são uma classe de coordenadas cilíndricas)

F tem a forma,

$$F(x, z) = \psi(|x|(1+z^{q-1}\alpha(x, z)), T_1(x, z) \frac{x}{|x|}, z+z^q\beta(x, z)) + (S_\infty(x, z), 0)$$

onde $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_1 : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$, $\beta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$S_\infty : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ são de classe C^∞ e limitadas em subconjuntos limitados juntamente com todas suas derivadas. Ainda mais, S_∞ é ∞ -flat ao longo de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Existem constantes a_1, a_2, b_1 e b_2 para as quais em alguma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ de 0 , temos que,

$$a_1 \leq \alpha(x, z) \leq a_2 < 0$$

$$0 < b_1 \leq \beta(x, z) \leq b_2$$

Notemos que $\|T_1(x, z) \frac{x}{|x|}\| = 1$.

Daqui, podemos continuar de maneira análoga à Demonstração da Proposição (3.1.3) no caso $\gamma(0, 0) > 0$, fazendo as seguintes considerações para detectar gráficos invariantes para F ;

Seja $\bar{B}(0, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} / |x| \leq \mu\}$. Se $\mu, \varepsilon > 0$, então, $V_{\varepsilon, \mu} = \bar{B}(0, \mu) \times [0, \varepsilon] \subset V$ e $F(V_{\varepsilon, \mu}) \subset V$.

Definamos os seguintes espaços de funções:

$$F_\varepsilon^k = \{h / h : [0, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \text{ é de classe } C^k \text{ e}$$

$$\|h^{(i)}(z)\| \leq z^{q(k-i)} \quad \text{para } 0 \leq i \leq k \}$$

$$B_\varepsilon^k = \{ h / h : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \text{ é de classe } C^k \text{ e } h(0)=0 \}$$

Escrevendo $F = (F_x, F_z)$, temos que para ε pequeno e para todo $h \in F_\varepsilon^k$, a aplicação

$$\begin{aligned} Z : [0, \varepsilon] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto F_z(h(z), z) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre, ao menos $[0, \varepsilon]$.

Então podemos tomar inversa de Z , $Z^{-1} = z$ em $[0, \varepsilon]$ e definir $H = Fh$ em F_ε^k como $H(Z) = F_x(h(z(Z)), z(Z))$ (H é o gráfico transformado de h).

O que segue pode ser completamente copiado de (3.1.3). Os fatos que para $\varepsilon > 0$ pequeno, $\Gamma(F_\varepsilon^k) \subset F_\varepsilon^k$ e que o gráfico invariante é único requerem provas ligeiramente diferentes. Elas são dadas nos Lemas (2.3) e (2.4) em [Bo.Du.]

Agora, do gráfico invariante $\{(h(z), z) / z \in [0, \varepsilon]\}$ definamos a seguinte mudança de coordenadas,

$$G : \begin{cases} \bar{x} = x - h(z) \\ \bar{z} = z \end{cases}$$

Pondo $\tilde{X} = G_*X$ e escrevendo $\tilde{X} = (\tilde{X}_x, \tilde{X}_z)$, como \tilde{X} deixa o eixo \bar{z} invariante, observemos que $\tilde{X}(\bar{x}, \bar{z}) = O(|\bar{x}|)$. Pelo suposto 1. da hipótese, temos que,

$$\begin{aligned} \langle X_x(x, z), x \rangle &= A(x, z) \langle x, x \rangle + O(z^\infty) \\ &= z^{q-1} (A_1(0, 0) + \text{termos de ordem maior}) |x|^2 \\ &\quad + O(z^\infty) \end{aligned}$$

Como G não altera ∞ -jatos em $(0, 0)$, podemos escrever para \tilde{X}

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}_x(\bar{x}, \bar{z}), \bar{x} \rangle &= \bar{z}^{q-1} (A_1(0, 0) + \text{termos de ordem maior}) |\bar{x}|^2 \\ &\quad + O(\bar{z}^\infty) O(|\bar{x}|^2) \end{aligned}$$

Escrevamos de novo (x,z) em lugar de (\bar{x},\bar{z}) .

Seja V uma vizinhança limitada de $(0,0)$ e $b > 0$ uma constante tal que, em V ,

$$\langle \tilde{X}_x(x,z), x \rangle \leq -bz^{q-1}|x|^2 \quad (*3)$$

Daqui podemos ver que a função, $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,z) \mapsto |x|^2$

é uma função de Liapunov na região onde $z > 0$. Assim existe vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[$ de $(0,0)$ na qual acontece a situação A.

Caso (b) : $p < q-1$

Suponhamos $A_1(0,0) < 0$.

Podemos distinguir dois casos.

Suponhamos $\gamma(0,0) > 0$

Neste caso a situação é similar ao caso (a); tomando aqui o espaço de funções,

$$F_\varepsilon^k = \left\{ h / h : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \text{ é de classe } C^k \text{ e} \right. \\ \left. |h^{(i)}(z)| \leq z^{(p+1)(k-1)} \text{ para } 0 \leq i \leq k \right\}$$

Em Lema (2.5) de [Bo.Du.] prova-se que $\Gamma(F_\varepsilon^k) \subset F_\varepsilon^k$ se ε é pequeno. O fato que o gráfico invariante é único, segue do Lema (2.4) de [Bo.Du.]

Para provar que existe vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[$ de $(0,0)$, acontecendo a situação A, mudando (*3) por,

$$\langle \tilde{X}_x(x,z), x \rangle \leq -bz^p|x|^2,$$

obtem-se este resultado.

Suponhamos agora que $\gamma(0,0) < 0$.

As idéias são as mesmas da prova da Proposição (3.1.2) parte $\gamma(0,0) < 0$.

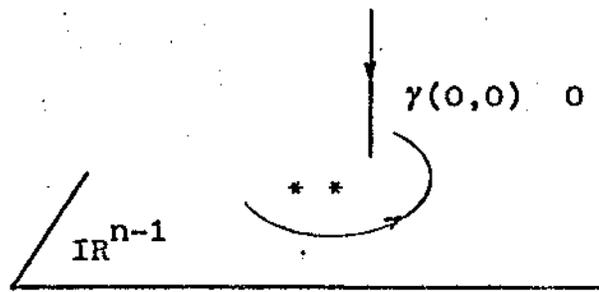


Fig.: A3.2 .

Com uma função *chapéu* $\tau: [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$, tal que

$$\tau(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{se } u \in [1, \infty[\end{cases}$$

de classe C^∞ , definamos $\forall \varepsilon > 0$, X_ε como,

$$X_\varepsilon(x, z) = X(x, z) - (R_\infty(x, z), 0) + \tau\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) R_\infty(x, z)$$

Então $\{(0, z) / z \geq \varepsilon\}$ é invariante sob X .

A condição "flatness" do termo flat $\tau\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) R_\infty(x, z)$ é independente de ε , como em (3.1.2).

Consideremos alguma vizinhança $V = \bar{B}(0, \mu) \times [0, \infty[$ na qual a aplicação F_ε , obtida de integrar X_ε , respectivamente ao tempo t ,

$$F_\varepsilon(x, z) = \left(|x|(1+z^p)a(x, z), T_1(x, z)\frac{x}{|x|}, z+z^q\beta(x, z) \right) + (S_\infty(x, z), 0)$$

temos que,

$$0 < a_1 \leq -a(x, z) \leq a_2$$

$$0 < b_1 \leq -\beta(x, z) \leq b_2$$

onde a_1, a_2, b_1, b_2 são constantes escolhidas independentemente de ε .

Escrevamos $F_\varepsilon = (F_{x, \varepsilon}, F_{z, \varepsilon})$.

Existe $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 \in]0, \delta[$ tal que se

$$h : [0, \delta] \longrightarrow \bar{B}(0, \mu)$$

satisfaz $h(0) = 0$ e $|h'(z)| \leq 1$ em $[0, \delta]$. Então

$$Z : [0, \delta] \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto F_{z, \varepsilon}(h(z), z)$$

é um difeomorfismo sobre, ao menos, $[0, \delta_1]$.

Com efeito; escolhendo $\delta < a_2^{-\frac{1}{q-1}}$, então

$$F_{z, \varepsilon}(h(\delta), \delta) = \delta + \delta^q \beta(h(\delta), \delta) \\ \geq \delta - \delta^q a_2 = \delta_1 > 0$$

Além disto, $Z'(z) \geq 1 - qz^{q-1} a_2 + O(z^q) \geq \frac{1}{2}$ para δ pequeno (independente de h).

Agora, denotemos por $z(Z)$ o inverso deste difeomorfismo. Definamos para $\varepsilon \in]0, \delta_1[$ e $k \geq 1$ os seguintes espaços de funções,

$$F_{0, \varepsilon}^k = \{ h / h : [0, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \text{ de classe } C^k, \\ h([0, \delta]) \subset \bar{B}(0, \mu), |h'(z)| \leq 1 \text{ em } [0, \delta], \\ h(0) = 0 \text{ e para todo } z \in [\varepsilon, \delta], h(z) = 0 \}$$

$$B_\varepsilon^k = \{ h / h : [0, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \text{ de classe } C^k, \\ h(0) = 0 \text{ e para todo } z \in [\varepsilon, \delta], h(z) = 0 \}$$

$$F_\varepsilon^k = \{ h / h \in F_{0, \varepsilon}^k, |h^{(i)}(z)| \leq z^{(p+1)(k-1)}, \\ \forall i \in \{0, 1, \dots, k\} \text{ e } z \in [0, \delta] \}$$

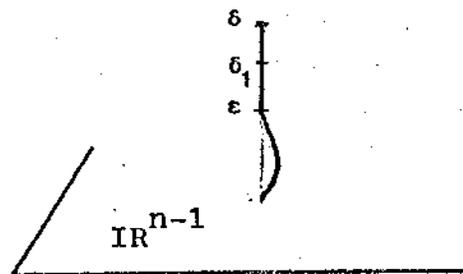


Fig.: A3.3 .

Definamos $H = \Gamma_\varepsilon h$ como ,

$$H(Z) = \begin{cases} F_{X,\varepsilon}(h(z(Z)), z(Z)) & \text{se } z \in [0, \delta_1] \\ 0 & \text{se } z \in [\delta_1, \delta] \end{cases}$$

Para $\varepsilon > 0$, pequeno $\Gamma_\varepsilon: F_{O,\varepsilon}^k \rightarrow B_\varepsilon^k$ é contínua para a topologia C^k (Lema (2.2) [Bo.Du.]) . O fato que $\Gamma_\varepsilon(F_\varepsilon^k) \subset F_\varepsilon^k$ é provado no Lema (2.7) de [Bo.Du.] .

Assim , obtemos para cada $k \in \mathbb{N}$ um $\varepsilon_k > 0$ e uma aplicação $h_k: [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, de classe C^k , com $j_k h_k(0) = 0$, cujo gráfico é invariante sob F_{ε_k} .

Ainda mais , por construção , $h_k(z) = 0$ para $z \in [\varepsilon_k, \delta]$.

Como $\lim_{N \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_k}^N(0, z) = 0$, uniformemente , então h_k é de classe C^∞ em $]0, \delta]$ (i.é., fora de 0) .

O Lema (2.8) em [Bo.Du.] : " Se $h: [0, \eta] \rightarrow \bar{B}(0, \mu)$ é de classe C^∞ em $]0, \eta]$ com $|h'(z)| < \infty \forall z \in [0, \eta]$ e se h é invariante sob F_{ε_k} , então h é de classe C^∞ em $[0, \eta]$ e $j_\infty h(0) = 0$ " , prova que h_k é de classe C^∞ e ∞ -flat em 0 .

Do mesmo modo que em (3.1.2) , tem-se que h_k é invariante sob X_{ε_k} .

Finalmente , provando que em alguma vizinhança de (0,0) todas as órbitas que tendem ao (0,0) e todas aquelas fora de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, são gráficos de aplicações h , satisfazendo as hipótese deste Lema (2.8) , obtemos a situação B desta Proposição. \square

BIBLIOGRAFIA

- [Ab.Ro.] ABRAHAM, R., ROBBIN, J., *Transversal Mapping and Flows*, Benjamin, New York, 1967 .
- [Ba.] BAMON, R., *Una Introducción a los Sistemas Dinámicos*, Primera Escuela Internacional de Sistemas Dinámicos, Universidad de Santiago de Chile; 1983.
- [Bi.] BILLEKE, J., *Teoría de Singularidades de Campos Vectoriales*, Primera Escuela Internacional de Sistemas Dinámicos, Universidad de Santiago de Chile, 1983 .
- [Bi.Ca.Sa.Ur.] BILLEKE, J., CAÑAS, M., SAEZ, E., URBINA, A., *Partially hiperbolic singularities with one-dimensional central manifold in IR^3* , Revista de la Sociedad Chilena de Matemáticas, Vol.III, 1, 1984 .
- [Bi.Ur.] BILLEKE, J., URBINA, A., *Singularidad Centro-Foco en IR^3* , Contribuciones Científicas y Tecnológicas, Area Matemática VI, Universidad de Santiago de Chile, 66, 13-17, 1984 .
- [Bo.] BONCKAERT, P., *Smooth invariant curves of singularities of vector fields on IR^3* , Ann.Inst.Poincaré, Vol.3, 2, 111-183, 1986 .
- [Bo.Du.] BONCKAERT, P., DUMORTIER, F., *Smooth invariant curves for germs of vector fields in IR^3 whose linear part generated a rotation*, J.Differential Equations 62, 95-116, 1986 .
- [Du.1] DUMORTIER, F., *Recent developments in the study of singularities of vectorfields*, Bol.Soc.Brs.Mat. 6, 79-94, 1975 .
- [Du.2] DUMORTIER, F., *Singularities of Vector Fields on the Plane*, J.Differential Equations 23, 53-106., 1977 .
- [Du.3] DUMORTIER, F., *Finite determinacy of Singularities of Vectorfields*, Atas do décimo Colóquio Brasileiro de Matemática, RJ, Vol.II, 553-562, 1978 .
- [Du.4] DUMORTIER, F., *Singularities of Vector Fields* ,

Monografia de Matemática, IMPA-RJ, 32, 1978 .

- [Du.Ro.] DUMORTIER, F., ROUSSARIE, R., *Etude local de champs de vecteurs à paramètres*, Astérisque 59-60, 7-42, 1978 .
- [Du.Ro.So] DUMORTIER, F., ROUSSARIE, R., SOTOMAYOR, J., *Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part . The cusp case of codimension 3*, Ergod.Th.& Dynam.Sys., 7, 375-413, 1987 .
- [Gu.1] GUCKENHEIMER, J., *Lectures on Bifurcation Theory*, Dynamical Systems, CIME Lectures 1978, Birkhauser, 1980 .
- [Gu.2] GUCKENHEIMER, J., *On the codimension two bifurcation*, Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980, LNM 898, 92-142, 1981 .
- [Gu.3] GUCKENHEIMER, J., *Multiple bifurcation problem of codimension two*, Siam Journal Mathematical Analyse, Vol.15, 1, 1-49, 1984 .
- [Gu.Ho.] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983 .
- [Hi.Pu.Sh.] HIRSCH, M., PUGH, C., SHUB, M., *Invariant Manifolds*, LNM 583, 1977 .
- [Hi.Sm.] HIRSCH, M., SMALE, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974 .
- [Ho.] HOLMES, P., *A strange family of three-dimensional vector fields near a degenerate singularity*, J. Differential Equations 37, 382-403, 1980 .
- [Pa.Ta.] PALIS, J., TAKENS, F., *Topological equivalence of normally hiperbolic Dynamical Systems*, Topology 16, 335-345, 1977 .
- [Se] SEIDENBERG, A., *A new decision method for elementary algebra*, Ann.of Math.60, 1954 .
- [So.1] SOTOMAYOR, J., *Generic Bifurcation of Dynamical Systems*, Dynamical Systems Proc.of the Salvador Symposium 1971, Ed.M.M.Peixoto, Academic Press, New York, 561-582, 1973 .

- [So.2] SOTOMAYOR, J., *Generic one-parameter families of vector fields on two dimensional manifolds*, Publ. Math.I.H.E.S., 43 , 5-46, 1974 .
- [So.3] SOTOMAYOR, J., *Introducción al estudio de las Bifurcaciones de los Sistemas Dinámicos*, VII Escuela Latinoamericana de Matemáticas , Universidad Simón Bolívar, Venezuela, 1984 .
- [Ta.1] TAKENS, F., *Singularities of Functions and Vector fields*, Nieuw Archief voor Wiskunde 3, 107-130 , 1972 .
- [Ta.2] TAKENS, F., *Unfolding of certain singularities of vector fields . Generalized Hopf bifurcations*, J. Differential Equations 14, 476-493, 1973 .
- [Ta.3] TAKENS, F., *A nonstabilizable jet of a singularity of a vector field*, Dynamical Systems . Proc.of the Salvador Symposium 1971, Ed.M.M.Peixoto, Academic Press, New York, 583-598, 1973 .
- [Ta.4] TAKENS, F., *Normal Forms for certain singularities of Vectorfields*, Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 23 , 2 , 163-195, 1973 .
- [Ta.5] TAKENS, F., *Singularities of vector fields*, Publ. Math.I.H.E.S.43, 47-100, 1974 .
- [Ta.6] TAKENS, F., *Singularities of vector fields and bifurcations*, Atas do décimo Colóquio Brasileiro de Matemática, RJ, Vol.II, 541-546, 1978 .