



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
IMECC-UNICAMP



Formulações Equivalentes da Lei de Faraday

Fabio Grangeiro Rodrigues

fabrod@ime.unicamp.br

Dissertação de Mestrado Profissional

Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

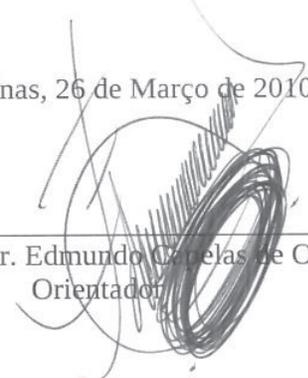
Março de 2010
Campinas - SP

Formulações Equivalentes da Lei de Faraday

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Fabio Grangeiro Rodrigues e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de Março de 2010

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Orientador



Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior
Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Universitária.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Rodrigues, Fabio Grangeiro

R618f Formulações equivalentes da lei de Faraday/Fabio Grangeiro
Rodrigues -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Maxwell, Equações de. 2.Faraday, Efeito de. 3.Princípio da
equivalência (Física). I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Equivalent formulations of Faraday's law

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Maxwell equations. 2. Faraday effect. 3. Principle
of equivalence (Physics).

Área de concentração: Física - Matemática

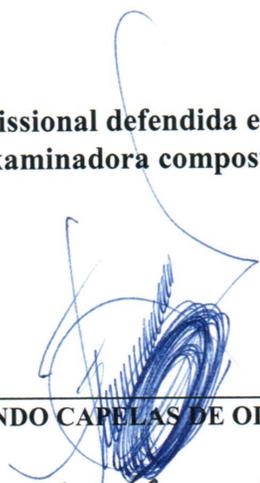
Titulação: Mestre em Matemática Universitária

Banca examinadora: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Alexandre Luis Trovan de Carvalho (UFPR)

Data da defesa: 26/03/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática Universitária

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de março de 2010 e
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA



Prof. (a). Dr (a). ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO



Prof. (a). Dr (a). JAYME VAZ JUNIOR

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, pela dedicação que tiveram na minha formação, cada um contribuindo, complementarmente, com suas boas qualidades e pontos de vista: A minha Mãe por incentivar a minha independência e o meu Pai por me mostrar os mistérios do Universo, motivando-me pela busca da sua compreensão.

Agradeço a Profa. Sueli Irene Costa Rodrigues, coordenadora do Mestrado Profissional em Matemática, pela oportunidade dada e ao Prof. Edmundo Capelas de Oliveira, por ter gentilmente aceitado ser o meu orientador.

Agradeço a Dayane pelo seu amor e apoio constantes, que me motivou a sempre continuar em frente e aos meus irmãos, amigos e amigas pela compreensão e paciência que tiveram durante meu período de estudos e consequente “retiro intelectual”.

Por fim, agradeço a Deus por ter principiado a tudo e tornado isso possível.

Resumo

Neste trabalho é dada uma prova de equivalência entre diferentes formas de se escrever a lei de Faraday, a forma integral e a diferencial. Nosso objetivo é esclarecer alguns pontos relevantes da prova dessas equivalências que são normalmente apresentadas nos livros textos de Física apenas para casos muito particulares. Aqui apresentamos a derivação das ditas equivalências para uma situação geral. Incluímos também as ferramentas matemáticas necessárias para o tratamento rigoroso do nosso problema.

Abstract

In this work we give a rigorous proof of the equivalence of some different forms of Faraday's law of induction clarifying some misconceptions on the subject and emphasizing that many derivations of this law appearing in textbooks and papers are only valid under very special circumstances and not satisfactory under a mathematical point of view. We include also the mathematical apparatus necessary for a rigorous presentation of our subject.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Espaço Vetorial	5
1.1.1 Subespaço Vetorial	6
1.1.2 Bases	6
1.1.3 Espaço Dual	8
1.1.4 Orientação de um Espaço Vetorial	10
1.1.5 Espaços Vetoriais Euclidianos	10
1.1.6 Bases Recíprocas no Espaço Vetorial Euclidiano	12
1.1.7 Espaços Vetoriais Pseudoeuclidianos	13
1.1.8 Bases Recíprocas no Espaço Vetorial Pseudoeuclidiano	14
1.1.9 Vetores Polares e Vetores Axiais	15
1.1.10 Produto Vetorial em um Espaço Vetorial Euclidiano 3-dimensional	17
1.1.11 Produtos triplos	18
1.2 Espaços Afins	19
1.2.1 Vetores Livres e Vetores Tangentes	21
1.2.2 Orientação de um Espaço Afim	21
1.2.3 Sistemas de Coordenadas para \mathcal{A}	22
1.2.4 Campos Escalares, Pseudoescalares, Polares e Axiais	23
1.2.5 Inversão e Reflexão de Campos Vetoriais	23
1.2.6 Espaços Afins Euclidianos e Pseudoeuclidianos	24
1.2.7 Modelo para o Espaço-Tempo	25
1.3 Cálculo Vetorial	26
1.3.1 O Operador Nabla ∇	26
1.3.2 Identidades Vetoriais Envolvendo ∇	28
1.3.3 Curvas Parametrizadas e Derivada Direcional	28
1.3.4 Curvas e Superfícies de Nível	30

SUMÁRIO

1.3.5	$\nabla\phi$ é Ortogonal à $\phi(x^1, x^2, x^3) = c$	32
1.3.6	Regra de Leibniz de Diferenciação sob uma Integral	34
1.3.7	Fluxo de um Campo Vetorial	34
1.3.8	Campos Conservativos, Funções Potenciais e o Teorema Fundamental das Integrais de Linha	35
1.3.9	Teorema de Helmholtz	37
1.3.10	Escoamento de um Campo Vetorial	37
1.3.11	Escoamento Associado a um Campo de Velocidades Dependente do Tempo	39
1.3.12	Derivada Material	41
1.3.13	Teoremas de Green, Stokes e Gauss	42
1.3.14	Significado Físico de $\nabla\cdot\mathbf{v}$ e $\nabla\times\mathbf{v}$	43
2	As Equações de Maxwell	49
2.1	O Campo Eletromagnético	49
2.2	Potenciais de Calibre ¹	52
3	Formulações da Lei de Faraday	57
3.1	Algumas Identidades Necessárias	59
3.2	Prova das Eq.(3.3) e Eq.(3.4)	63
	Conclusão	66
A	Prova da Identidade Eq.(3.19)	67
B	Transformações de Lorentz	69
	Referências Bibliográficas	71

Introdução

É fato conhecido e importante que muitos dos conceitos e ideias dos diversos ramos da Matemática surgiram ou foram estimuladas por problemas advindos de disciplinas, que estudam diferentes facetas do mundo físico como, por exemplo, a Física, a Química e a Biologia, e também por problemas práticos, resultantes da necessidade de se obter soluções para sofisticados problemas tecnológicos de Engenharia e mesmo de problemas que ocorrem nas ciências sociais, como por exemplo a Economia. Nesse sentido, fica claro que o desenvolvimento da Matemática pode se beneficiar muito dos diversos “laboratórios de pesquisa” fornecidos pela interdisciplinaridade². Tomando como exemplo a relação entre a Física e a Matemática, é fácil encontrar inúmeros exemplos onde novos conceitos e métodos de cálculos foram desenvolvidos dada a necessidade de se explicar as mais diversas leis naturais. Muitas vezes a simples exploração de teorias físicas já estabelecidas (dentro de um certo domínio de validade) resulta na modernização daquela teoria como, por exemplo, ocorreu com as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da Mecânica. É também bem conhecido [20] que muitas das ideias que deram início à Geometria Diferencial, à Álgebra Linear, à Topologia, ao Cálculo Vetorial, às Equações Diferenciais, etc., surgiram para enfrentar diversas questões sugeridas por problemas advindos da Física. Tal fato estabeleceu um vínculo não trivial entre estas duas disciplinas e fez surgir a moderna denominação para uma área de estudos conhecida como Física Matemática, ou ainda, Matemática Aplicada à Física.

O mote para esta dissertação veio da constatação de que, hoje em dia, o ensino da Matemática como apresentado aos alunos de primeiro e segundo anos dos cursos superiores de ciências exatas e engenharias carece (ao nosso ver) de dois “pilares fundamentais” ao ensino de qualquer disciplina. O

²O estudo da Matemática pode ser feito separadamente sob uma ótica estritamente filosófica e abstrata, mas estamos interessados na motivação fornecida pelos problemas de outras disciplinas para o incentivo do ensino dos conceitos matemáticos para os estudantes dos cursos de ciências exatas e engenharias.

primeiro é o estímulo e motivação para que os alunos entendam o por que estão sendo apresentados à teorias sofisticadas. Sem estímulo e motivação, ocorre que a maioria dos alunos dos cursos a que nos referimos, em geral, não se interessam o suficiente pelas disciplinas de Matemática³. O segundo pilar básico é o rigor com que muitas das teorias necessárias para a compreensão de ideias fundamentais da Física são apresentadas. Aqui me refiro especificamente ao fato de que as disciplinas introdutórias de Geometria Analítica e Vetores (e mesmo algumas disciplinas de Álgebra Linear) não tratam adequadamente a modelagem matemática do ambiente (espaço-tempo) onde ocorrem os fenômenos naturais, por não introduzirem o conceito fundamental de espaço afim e também por não fornecerem a distinção fundamental entre vetores tangentes e vetores livres associados a um dado espaço afim. Mais grave ainda é o fato que nas apresentações da maioria dos textos que examinamos não se faz clara a distinção entre os conceitos de vetores polares e vetores axiais, algo que se não for esclarecido rigorosamente torna impossível a inteligibilidade, por exemplo, da teoria eletromagnética de Maxwell.⁴

Estas considerações são aqui apresentadas dada a nossa experiência na resolução de um problema da eletrodinâmica clássica de circuitos móveis que ocorrem na formulação integral da lei de Faraday e a equivalência de tal formulação com a forma diferencial da dita lei (uma das equações de Maxwell) que aparece obrigatoriamente em todos os livros textos que tratam do assunto. Ao iniciar a pesquisa dei-me conta que apesar de ter seguido (com certo sucesso) as disciplinas de Geometria Analítica e Vetores, Geometria Diferencial, Álgebra Linear e, claro, de Física básica que tratam da teoria eletromagnética, não conseguia formular de maneira apropriada a modelagem da arena onde ocorrem os eventos físicos (i.e., o espaço-tempo) e não conseguia também responder adequadamente a certas questões básicas que envolviam de maneira crucial a distinção entre campos vetoriais polares e axiais. Para corrigir estes defeitos de formação⁵ buscamos para a modelagem do espaço-tempo (assunto de algumas seções do Capítulo 1) inspiração no

³E também as de Física...

⁴O campo elétrico é representado por um campo vetorial polar e o campo magnético é representado por um campo vetorial axial.

⁵A literatura onde se apresentam os conceitos matemáticos aos cursos de Física e Engenharia, em geral, deixam o rigor de lado com o intuito de “facilitar” o entendimento pelo aluno dos conceitos novos e eventualmente sofisticados que estão sendo introduzidos. Porém, o que se observa é que a tal facilitação leva, posteriormente, a maioria a encontrar sérias dificuldades quando torna-se efetivamente necessário trabalhar “profissionalmente” com aqueles conceitos na elaboração de soluções de problemas que surgem em suas profissões. Muitas vezes a aplicação das ideias simplistas adquiridas nas disciplinas introdutórias acima referidas conduzem a soluções equivocadas e as vezes contraditórias.

capítulo sobre espaços afins de [28]. Para a elaboração de uma apresentação (que acreditamos ser rigorosa) dos conceitos de vetores polares e axiais (também no Capítulo 1) utilizamo-nos de certas e oportunas ideias de Bossavit [6], mas nossa apresentação difere da daquele autor, pois introduzimos também o conceito de pseudoescalares.

Como já acenamos acima, nesta dissertação, tratamos prioritariamente de uma questão da teoria eletromagnética de Maxwell para a qual fornecemos uma brevíssima (e naturalmente incompleta) introdução no Capítulo 2, com a finalidade de apresentar os objetos e conceitos necessários para o Capítulo 3. É naquele capítulo que provaremos a equivalência das formas integral e diferencial da lei de Faraday (uma das equações de Maxwell) e consideramos que nossos resultados sejam úteis aos estudantes de Eletromagnetismo (e eventualmente até profissionais que se utilizem desta teoria) dado que verificamos que a maioria absoluta dos textos de Física (veja as referências do Capítulo 3) só provam a dita equivalência para casos muito particulares e ainda assim com pouco (ou nenhum) rigor.

Nossa conclusão é apresentada de maneira sucinta junto com algumas observações pertinentes. A dissertação possui também dois apêndices que servem para esclarecer certos pontos apresentados no texto.

Capítulo 1

Preliminares

Para a apresentação dos resultados do Capítulo 3, precisamos recordar uma série de conceitos e definições, que nos auxiliarão a saber distinguir os objetos matemáticos que estamos lidando, assim como as operações que estarão sendo feitas com cada um desses objetos. Muitos dos resultados aqui expostos, são facilmente encontrados na literatura e muitas das provas, não foram necessariamente transcritas neste trabalho, porém sempre que possível, foram citadas fontes na qual o leitor pode obter mais informações adicionais.

Iniciamos com as definições algébricas e posteriormente com a parte de cálculo vetorial.

1.1 Espaço Vetorial

Definição 1 *Seja \mathbf{V} um conjunto não vazio, cujos elementos denominaremos de vetores. Um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} , é uma estrutura algébrica $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, munida de duas operações: a soma de dois vetores de \mathbf{V} , definido por $+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, que a cada par $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ faz corresponder um novo vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, e a multiplicação por escalar, $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, que a cada escalar $t \in \mathbb{K}$ e a cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ faz corresponder um vetor $t \cdot \mathbf{v}$, ou $t\mathbf{v}$, chamado o produto de t por \mathbf{v} . Estas operações precisam satisfazer, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $s, t \in \mathbb{K}$, os axiomas abaixo:*

- (i) *comutatividade: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;*
- (ii) *associatividade: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;*
- (iii) *vetor nulo: $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V}$, chamado vetor nulo, tal que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$*

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v};$$

- (iv) *inverso aditivo*: para cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existe um único vetor $-\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;
- (v) *distributividade*: $(s + t)\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$ e $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$;
- (vi) *associatividade à esquerda por escalares*: $(st)\mathbf{v} = (s)t\mathbf{v}$;
- (vii) *multiplicação pelo escalar 1*: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o espaço \mathbf{V} é chamado de *espaço vetorial real* e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é chamado de *espaço vetorial complexo*.¹

1.1.1 Subespaço Vetorial

Definição 2 Dado um espaço vetorial \mathbf{V} , um subconjunto $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ não vazio, forma um subespaço vetorial de \mathbf{V} , se satisfizer as seguintes condições:

- (i) Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}$;
- (ii) Para quaisquer $t \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, o vetor $t\mathbf{v} \in \mathbf{W}$.

Note que a definição acima nos garante que \mathbf{W} é fechado com relação as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar que estão bem definidas, pois são as operações herdadas do espaço \mathbf{V} . Além disso, é trivial constatar que os axiomas de espaço vetorial são automaticamente satisfeitos em $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$, logo \mathbf{W} é ele próprio um espaço vetorial.

Outra consequência da definição acima, é que qualquer subespaço $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ precisa necessariamente conter o vetor nulo (pela condição (ii) quando $t = 0$).

1.1.2 Bases

Definição 3 Um vetor \mathbf{v} é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ se \mathbf{v} pode ser escrito na forma

$$\mathbf{v} = \alpha^1 \mathbf{u}_1 + \alpha^2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha^n \mathbf{u}_n := \alpha^i \mathbf{u}_i,$$

onde $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n \in \mathbb{K}$ são escalares.

Definição 4 Seja $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ um conjunto não vazio de vetores. Se a equação vetorial

$$\alpha^1 \mathbf{u}_1 + \alpha^2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha^n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

¹Tanto para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, como $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a associatividade por escalar vale pela direita, assim como pela esquerda e a mista, i.e. $(st)\mathbf{v} = (s)t\mathbf{v} = \mathbf{v}(st) = \mathbf{v}(s)t = s\mathbf{v}t$.

tiver somente a solução trivial $\alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^n = 0$, então β é chamado linearmente independente (abreviado por **LI**). Caso contrário, se existirem outras soluções além da trivial, o conjunto β é chamado de linearmente dependente (abreviado por **LD**).

Uma vez fixados os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ em \mathbf{V} , o conjunto \mathbf{W} de todos os vetores de \mathbf{V} que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial, denominado *subespaço gerado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$* , que denotaremos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k] \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}; \mathbf{v} = \alpha^1 \mathbf{u}_1 + \alpha^2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha^k \mathbf{u}_k, \alpha^i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq k \right\}. \end{aligned}$$

Definição 5 Uma base de um espaço vetorial \mathbf{V} é um conjunto $\beta \subset \mathbf{V}$ linearmente independente que gera \mathbf{V} .

Note que da definição acima, segue que todo vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, se exprime, de modo único, como combinação linear dos elementos da base β . De fato, seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de \mathbf{V} e suponha que $\mathbf{v} = \alpha^1 \mathbf{v}_1 + \alpha^2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha^n \mathbf{v}_n = \gamma^1 \mathbf{v}_1 + \gamma^2 \mathbf{v}_2 + \dots + \gamma^n \mathbf{v}_n$, então segue que

$$(\alpha^1 - \gamma^1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha^n - \gamma^n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

o que implica que $\alpha^i = \gamma^i, i = 1, 2, \dots, n$.

Os coeficientes α^i são chamados as *componentes do vetor \mathbf{v}* na base β , representado pela n -upla $\mathbf{v} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$.

Observe que esta representação depende não só da base β mas também da ordem na qual escrevemos os vetores da base, pois uma mudança na ordem dos elementos da base resulta numa mudança correspondente da ordem das coordenadas de \mathbf{v} .

No caso em que \mathbf{V} é gerado por um número finito de vetores, valem as seguintes proposições, cujas provas podem ser encontradas nos livros de álgebra linear [2, 5, 19].

Proposição 6 Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial \mathbf{V} . Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de \mathbf{V} .

Proposição 7 Seja \mathbf{V} um espaço vetorial gerado por $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Então qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente **LD** e, portanto, qualquer conjunto **LI** tem no máximo n vetores.

Corolário 8 *Se o espaço vetorial \mathbf{V} admite uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ com n elementos, então qualquer outra base de \mathbf{V} possui também n elementos.*

Diz-se que um espaço vetorial \mathbf{V} tem dimensão finita quando admite uma base finita. O número n de elementos de uma dada base de \mathbf{V} , que é o mesmo para todas as bases de \mathbf{V} , é chamado *dimensão de \mathbf{V}* , e denotado por $n = \dim \mathbf{V}$.

No caso em que \mathbf{V} só pode ser gerado por um número infinito de vetores, diz-se que \mathbf{V} tem *dimensão infinita*.

Para os propósitos deste trabalho, faremos uso apenas de espaços de dimensão finita.

Exemplo 9 *O exemplo clássico de espaço vetorial real é o \mathbb{R}^n . A base canônica de \mathbb{R}^n é formada pelos vetores \mathbf{e}_i com entrada igual a 1 na i -ésima coluna $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Os elementos de \mathbb{R}^n são as listas ordenadas (n -uplas) $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^n)$, $\mathbf{w} = (w^1, w^2, \dots, w^n)$ de números reais. Por definição, a igualdade vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ significa as igualdades das n coordenadas $v^i = w^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ e as operações de espaço vetorial são definidas por*

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{w} &= (v^1 + w^1, v^2 + w^2, \dots, v^n + w^n), \\ t\mathbf{v} &= (tv^1, tv^2, \dots, tv^n), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Todo espaço vetorial real n -dimensional \mathbf{V} é isomorfo à \mathbb{R}^n . Porém tal isomorfismo não é canônico [17], pois depende da escolha da base para \mathbf{V} .

1.1.3 Espaço Dual

Definição 10 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} , define-se por espaço dual \mathbf{V}^* , o espaço dos funcionais lineares de \mathbf{V} em \mathbb{K} . Ou seja, os elementos de \mathbf{V}^* , são todos os funcionais lineares $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$.*

Note que \mathbf{V}^* torna-se ele mesmo um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} , definindo-se a soma e a multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned}(f + g)(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}) \\ (\alpha f)(\mathbf{v}) &= \alpha f(\mathbf{v}),\end{aligned}$$

para todo $f, g \in \mathbf{V}^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Proposição 11 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial de dimensão finita onde $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base desse espaço, então $\beta^* = \{f^1, \dots, f^n\}$, definida por $f^i(\mathbf{v}_j) = \delta_j^i$ (onde $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ é a função delta de Kronecker) é base de \mathbf{V}^* , dita base dual da base β .*

Prova. Primeiro, vejamos que β^* é **LI**. De fato, considere a combinação linear

$$\gamma_1 f^1 + \dots + \gamma_n f^n = \mathbf{0},$$

então,

$$\begin{aligned} (\gamma_1 f^1 + \dots + \gamma_n f^n)(\mathbf{v}) &= 0 \\ \gamma_1 f^1(\mathbf{v}) + \dots + \gamma_n f^n(\mathbf{v}) &= 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Tomando sucessivamente $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v} = \mathbf{v}_n$, obtemos pela definição dos f^i que $\gamma_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Vejamos agora que $[f^1, \dots, f^n] = \mathbf{V}^*$, isto é, podemos escrever qualquer $f \in \mathbf{V}^*$ como combinação linear dos $f^i : f = \gamma_1 f^1 + \dots + \gamma_n f^n$. Para isso, lembremos da álgebra linear que uma transformação linear fica completamente determinada conhecendo-se os valores da transformação aplicados aos vetores de uma base do espaço de domínio. Logo, seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de \mathbf{V} e $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{v}_1 + \dots + v^n \mathbf{v}_n$, então

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(v^1 \mathbf{v}_1 + \dots + v^n \mathbf{v}_n) \\ &= f(v^1 \mathbf{v}_1) + \dots + f(v^n \mathbf{v}_n) \\ &= v^1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + v^n f(\mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Como $f^i(\mathbf{v}) = f^i(v^1 \mathbf{v}_1 + \dots + v^n \mathbf{v}_n) = v^i$, segue que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}_1) f^1(\mathbf{v}) + \dots + f(\mathbf{v}_n) f^n(\mathbf{v}) \\ &= (\gamma_1 f^1 + \dots + \gamma_n f^n)(\mathbf{v}) \\ &= (\gamma_1 f^1 + \dots + \gamma_n f^n)(v^1 \mathbf{v}_1 + \dots + v^n \mathbf{v}_n) \\ &= \gamma_1 v^1 f^1(\mathbf{v}_1) + \dots + \gamma_n v^n f^n(\mathbf{v}_n) \\ &= \gamma_1 v^1 + \dots + \gamma_n v^n, \end{aligned}$$

onde $f(\mathbf{v}_i) = \gamma_i$ são os coeficientes de f na base β^* e, obviamente, não

dependem do vetor \mathbf{v} . Portanto, $f = \gamma_1 f^1 + \dots + \gamma_n f^n$ fica bem determinada para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ ■

Note que no caso de dimensão finita, $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}^*$ e, portanto, \mathbf{V} é isomorfo a \mathbf{V}^* .

1.1.4 Orientação de um Espaço Vetorial

De um modo geral, uma orientação de um espaço vetorial é a escolha de uma base ordenada arbitrária, que diremos por convenção, ser “positiva” ou “negativa”. Um resultado da álgebra linear [5], nos garante que dados duas bases β_1 e β_2 de um espaço vetorial \mathbf{V} de dimensão finita, existe uma única transformação linear $M : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ que leva β_1 à β_2 .

Definição 12 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial de dimensão finita e sejam β_1 e β_2 duas bases ordenadas de \mathbf{V} . As bases β_1 e β_2 possuem a mesma orientação se a matriz da transformação linear M , possui determinante positivo; caso contrário, as bases possuem orientação oposta.*

Portanto, dado um espaço vetorial \mathbf{V} temos duas classes de bases, duas bases pertencendo à mesma classe se possuírem a mesma orientação. As duas classes serão doravante denotadas por Ω e $-\Omega$, a primeira dita *positiva* e a segunda dita *negativa*. No caso em que $\dim \mathbf{V} = 3$ a primeira classe é dita de mão *direita* e a segunda de mão *esquerda*.

Definição 13 *Um espaço vetorial orientado é um par que consiste de um espaço vetorial \mathbf{V} e uma das duas classes de orientação.*

Para um dado espaço vetorial \mathbf{V} existem dois espaços vetoriais orientados, que serão denotados por (\mathbf{V}, Ω) e $(\mathbf{V}, -\Omega)$ e orientar \mathbf{V} consiste simplesmente em escolher uma das duas possibilidades.

1.1.5 Espaços Vetoriais Euclidianos

Seja \mathbf{V} um espaço real, $\dim \mathbf{V} = n$. Um espaço vetorial euclidiano, é um par (\mathbf{V}, \cdot) , onde “ \cdot ” é o *produto escalar euclidiano* que será definido a seguir.

Definição 14 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial real. Um produto escalar euclidiano, denotado por \cdot , sobre \mathbf{V} é um funcional $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, bilinear simétrico e positivo em \mathbf{V} , que associa a cada par de vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, um número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, chamado o produto escalar euclidiano de \mathbf{v} por \mathbf{w} ; de modo que sejam válidas as seguintes propriedades para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ e $t \in \mathbb{R}$:*

- (i) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$;
- (ii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$; se, e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- (iii) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ e $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$;
- (iv) $(t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ e $\mathbf{v} \cdot (t\mathbf{w}) = t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;
- (v) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$.

Definição 15 Seja \mathbf{V} um espaço vetorial real com produto escalar euclidiano. Dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ são chamados ortogonais (denotado por $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$) se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

O número $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \geq 0$, é chamado a *norma* (ou *comprimento*) do vetor \mathbf{v} .

Em² \mathbf{V}^n , tomando-se uma base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormal, onde $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, o produto escalar euclidiano dos vetores $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{w} = w^j \mathbf{e}_j$, é

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= v^i \mathbf{e}_i \cdot w^j \mathbf{e}_j = v^i w^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = v^i w^j \delta_{ij} \\ &= v^1 w^1 + \dots + v^n w^n, \end{aligned}$$

e, portanto, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(v^1)^2 + \dots + (v^n)^2}$.

Definimos o ângulo entre dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} como (ver Figura 1)

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \right).$$

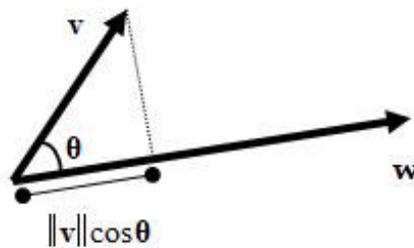


Figura 1: Projeção de \mathbf{v} sobre \mathbf{w} .

²Usaremos a notação \mathbf{V}^n para designar um espaço vetorial n -dimensional.

1.1.6 Bases Recíprocas no Espaço Vetorial Euclidiano

Antes de prosseguirmos convém definirmos bases recíprocas, para um espaço vetorial euclidiano. Isto será útil para formalizar o uso da notação deste trabalho.

Definição 16 *Seja $\beta = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ uma base arbitrária de um espaço vetorial real \mathbf{V} tal que*

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = g_{ij} = g_{ji},$$

onde $g_{ij} \in \mathbb{R}$. *Define-se a base recíproca $\beta^r = \{\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n\}$ de β por*

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i.$$

Proposição 17 *Seja $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j = g^{ij} \in \mathbb{R}$, então a matriz com entradas g^{ij} é a inversa da matriz com entradas g_{ij} .*

Prova. Da definição de base recíproca, podemos escrever

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = g_{ij} = g_{ik} \delta_j^k = g_{ik} \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_j \Rightarrow \mathbf{a}_i = g_{ik} \mathbf{a}^k,$$

e de forma análoga, $\mathbf{a}^i = g^{ik} \mathbf{a}_k$. Então,

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = g_{ik} \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^j,$$

donde,

$$\delta_i^j = g_{ik} g^{kj},$$

e, portanto, segue que a matriz com entradas g^{kj} é a inversa da matriz com entradas g_{ik} ■

Naturalmente temos:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i = v_j \mathbf{a}^j, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

e a relação entre os v^i e v_j é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_k &= v^i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k, \\ v_k &= v^i g_{ik}. \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $v^k = v_j g^{jk} = v_j g^{kj}$. Portanto, vale o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_j g^{ji} \mathbf{a}_i = v_j g^{ji} g_{ik} \mathbf{a}^k \\ &= v_j \delta_k^j \mathbf{a}^k = v_j \mathbf{a}^j. \end{aligned}$$

Os v^i são chamados de componentes *contravariantes* de \mathbf{v} e os v_j são chamados de componentes *covariantes* de \mathbf{v} .

Quando $g_{ij} = \delta_{ij}$, o produto escalar define uma base ortonormal. É claro que existe uma infinidade de bases ortonormais, que estão relacionadas entre si por transformações do grupo das rotações [25] do espaço n -dimensional $O(n, \mathbb{R})$.

1.1.7 Espaços Vetoriais Pseudoeuclidianos

Seja \mathbf{V} um espaço real, $\dim \mathbf{V} = (1 + n)$. Um espaço *vetorial pseudoeuclidiano*, é um par (\mathbf{V}, \bullet) , onde \bullet , é o *produto escalar pseudoeuclidiano* que será definido a seguir.

Definição 18 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial real, $\dim \mathbf{V} = (1 + n)$. Um produto escalar pseudoeuclidiano, denotado por \bullet , sobre \mathbf{V} é um funcional $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, bilinear simétrico em \mathbf{V} , que associa a cada par de vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, um número real $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$, chamado o produto escalar pseudoeuclidiano de \mathbf{v} por \mathbf{w} ; de modo que sejam válidas as seguintes propriedades para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ e $t \in \mathbb{R}$*

- (i) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \in \mathbb{R}$;
- (ii) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \bullet \mathbf{x} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} + \mathbf{w} \bullet \mathbf{x}$ e $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{y}$;
- (iii) $(t\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = t(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$ e $\mathbf{v} \bullet (t\mathbf{w}) = t(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$;
- (iv) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$.

A *norma* do vetor \mathbf{v} é definida por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}$.

Classificamos os vetores de um espaço pseudoeuclidiano como:

- (a) Se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} < 0$, \mathbf{v} é dito do tipo tempo;
- (b) Se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} > 0$, \mathbf{v} é dito do tipo espaço;
- (c) Se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 0$, e $\mathbf{v} \neq 0$, \mathbf{v} é dito do tipo luz.

Definição 19 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial real com produto escalar pseudoeuclidiano. Dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ são chamados ortogonais (denotado por $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$) se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.*

Base Ortonormal para um Espaço Vetorial Pseudoeuclidiano (\mathbf{V}, \bullet)

Uma base ortonormal para um espaço vetorial pseudoeuclidiano \mathbf{V} , $\dim \mathbf{V} = (1 + n)$, é um conjunto $\beta = \{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n\}$ tal que

$$\mathbf{e}_\mu \bullet \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu},$$

onde a matriz com entradas $\eta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, n$, é

$$(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1).$$

Note que quando $\mu, \nu = i, j = 1, 2, \dots, n$, temos $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

1.1.8 Bases Recíprocas no Espaço Vetorial Pseudoeuclidiano

Definição 20 Seja $\beta = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ uma base arbitrária de um espaço vetorial real \mathbf{V} tal que

$$\mathbf{a}_\mu \cdot \mathbf{a}_\nu = g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

onde $g_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$. Defina-se a base recíproca $\beta^r = \{\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n\}$ de β por

$$\mathbf{a}^\mu \cdot \mathbf{a}_\nu = \delta_\nu^\mu.$$

Proposição 21 Seja $\mathbf{a}^\mu \cdot \mathbf{a}^\nu = g^{\mu\nu} \in \mathbb{R}$, então a matriz com entradas $g^{\mu\nu}$ é a inversa da matriz com entradas $g_{\mu\nu}$.

Prova. Análoga ao caso euclidiano ■

Naturalmente temos:

$$\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{a}_\mu = v_\nu \mathbf{a}^\nu, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

cujas relação entre os v^μ e v_ν é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\kappa &= v^\mu \mathbf{a}_\mu \cdot \mathbf{a}_\kappa, \\ v_\kappa &= v^\mu g_{\mu\kappa}. \end{aligned}$$

Também verifica-se que $v^\kappa = v_\nu g^{\nu\kappa} = v_\nu g^{\kappa\nu}$. Portanto, vale o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^\mu \mathbf{a}_\mu = v_\nu g^{\nu\mu} \mathbf{a}_\mu = v_\nu g^{\nu\mu} g_{\mu\kappa} \mathbf{a}^\kappa \\ &= v_\nu \delta_\kappa^\nu \mathbf{a}^\kappa = v_\nu \mathbf{a}^\nu. \end{aligned}$$

Os v^μ são chamados de componentes *covariantes* de \mathbf{v} e os v_ν são chamados de componentes *contravariantes* de \mathbf{v} .

Quando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, a base $\{\mathbf{a}_\mu\}$ é dita uma *base ortonormal*. É claro que existe uma infinidade de bases ortonormais. Elas estão relacionadas entre si por transformações do grupo $O(n, 1, \mathbb{R})$ das pseudorotações do espaço vetorial pseudoeuclidiano $(1+n)$ -dimensional.

1.1.9 Vetores Polares e Vetores Axiais

Discutiremos a seguir dois objetos, que são comumente confundidos como sendo os mesmos objetos, mas que como veremos são, em verdade, objetos bem distintos: os *vetores polares* e os *vetores axiais*. Esta distinção nos auxiliará a definir de maneira apropriada o conceito de produto vetorial \times , e permitirá usarmos estes conceitos na representação dos campos elétricos e magnéticos e suas interações com partículas carregadas, em uma descrição adequada e consistente com o comportamento físico destes campos, como observado em laboratório. Mas antes é necessário introduzir o conceito de *pseudoescalares*.

Definição 22 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial. Dado $a \in \mathbb{R}$ e Ω uma orientação, definiremos o conjunto $\tilde{\mathbb{R}}$ como o conjunto das classes de equivalência dos pares (a, Ω) tal que*

$$(a, \Omega) \simeq (-a, -\Omega),$$

e denotaremos $\tilde{\mathbb{R}} := [(\mathbb{R}, \Omega)] = \{(a, \Omega) \mid a \in \mathbb{R} \text{ e } \Omega \text{ uma orientação}\}$ como o conjunto dos pseudoescalares.

Assim, um pseudoescalar é uma classe de equivalência $\tilde{a} = [(a, \Omega)] \in \tilde{\mathbb{R}}$ e $a \in \mathbb{R}$ é um representante desta classe na orientação Ω .

Definição 23 *Seja \mathbf{V} um espaço vetorial. Dado $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e Ω uma orientação, definiremos o conjunto $\tilde{\mathbf{V}}$ como o conjunto das classes de equivalência dos pares (\mathbf{a}, Ω) tal que*

$$(\mathbf{a}, \Omega) \simeq (-\mathbf{a}, -\Omega),$$

e denotaremos $\tilde{\mathbf{V}} := [(\mathbf{V}, \Omega)] = \{(\mathbf{a}, \Omega) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{V} \text{ e } \Omega \text{ uma orientação}\}$ o conjunto dos pseudovetores, também chamados vetores axiais (ver Figura 2).

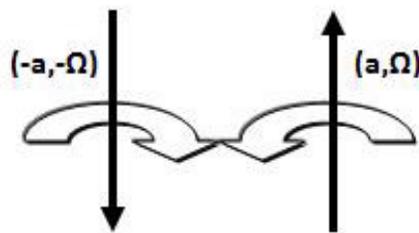


Figura 2: Representação dos vetores axiais por um par “vetor + orientação”.

Assim, um vetor axial é uma classe de equivalência $\tilde{\mathbf{a}} = [(\mathbf{a}, \Omega)] \in \tilde{\mathbf{V}}$ e $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ é um representante desta classe, uma vez fixada a orientação Ω .

Os vetores *polares*, nada mais são que os elementos de \mathbf{V} , ou seja, o termo vetor polar é apenas uma outra denominação para vetor e, portanto, usaremos ambas terminologias livremente.

Convém introduzirmos aplicações que nos auxiliem a operar com os pseudoescalares, pseudovetores e os escalares e vetores convencionais. Para isso, definimos as aplicações,

$$\odot : \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}, & \tilde{a} \odot b := \tilde{a}b, \\ \mathbb{R} \times \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{a} \odot \tilde{b} := \tilde{a}\tilde{b}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\square : \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}} \times \mathbf{V} \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}, & \tilde{a} \square \mathbf{u} := \tilde{a}\mathbf{u}, \\ \mathbb{R} \times \tilde{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{V}, & \tilde{a} \square \tilde{\mathbf{v}} := \tilde{a}\tilde{\mathbf{v}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Não é difícil verificar que ambas operações satisfazem as condições de associatividade e comutatividade.

Note que com estas definições, o conjunto dos vetores axiais pode ser descrito como $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{I}} \square \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{V}$, onde $\tilde{\mathbf{I}} = [(1, \Omega)]$ é o pseudoescalar unitário, também conhecido como pseudoescalar unitário de mão direita³.

Observação 24 *Verifica-se facilmente que $\tilde{\mathbf{V}}$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , pois todas as propriedades de espaço vetorial são herdadas de \mathbf{V} .*

Antes de prosseguirmos precisamos estender a **Definição 14** do produto escalar euclidiano $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, definido originalmente para vetores polares, para os casos que envolvem dois vetores axiais e aquele que envolve um vetor polar e um axial; e, em seguida, definir o produto vetorial.

Definição 25 *O produto escalar euclidiano entre vetores axiais e entre vetores polares e axiais é a aplicação:*

$$\cdot : \begin{cases} \tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \\ \tilde{\mathbf{V}} \times \mathbf{V} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}, \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \\ \mathbf{V} \times \tilde{\mathbf{V}} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}, \\ \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{v}, \end{cases}$$

satisfazendo os axiomas já listados na Definição 14.

³O pseudoescalar unitário de mão esquerda é a classe de equivalência $[(1, -\Omega)]$ e claramente $(1, -\Omega) = (-1, \Omega)$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [16].

O produto escalar pseudoeuclidiano, pode ser estendido de modo análogo, mas satisfazendo os axiomas listados na seção de espaço vetorial pseudoeuclidiano.

1.1.10 Produto Vetorial em um Espaço Vetorial Euclidiano 3-dimensional

Definição 26 *Seja \mathbf{V}^3 um espaço vetorial euclidiano 3-dimensional e $\tilde{\mathbf{V}}^3$ o espaço vetorial 3-dimensional dos vetores axiais. O produto vetorial, denotado por \times , é a aplicação*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3 \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}^3, \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{1}} \square \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{1}}\mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{V}}^3 \times \tilde{\mathbf{V}}^3 \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}^3, \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{V}^3 \times \tilde{\mathbf{V}}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3, \mathbf{u} \times \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{V}}^3 \times \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3, \tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{v}, \end{array} \right.$$

onde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \text{sen } \theta$ e $\theta = \arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

Se $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, onde $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$ é uma base ortonormal de \mathbf{V}^3 , então podemos escrever (ver Figura 3)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \tilde{\mathbf{1}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{1}} [(u^2 v^3 - u^3 v^2) \mathbf{e}_1 + (u^3 v^1 - u^1 v^3) \mathbf{e}_2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1) \mathbf{e}_3]. \end{aligned}$$

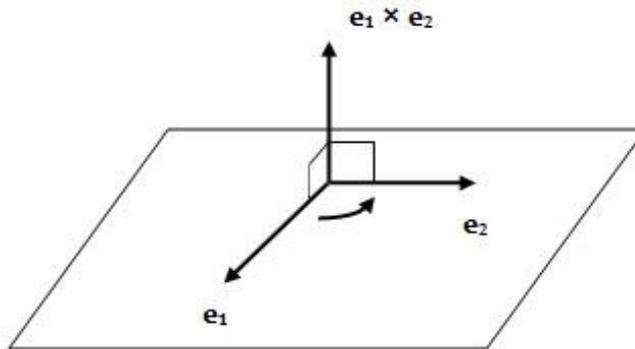


Figura 3: O pseudovetor $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ é o resultado do produto vetorial dos vetores polares \mathbf{e}_1 por \mathbf{e}_2 .

Propriedades algébricas do produto vetorial (vetores polares e axiais):

- (i) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$;
- (ii) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$;
- (iii) $\alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R} \cup \tilde{\mathbb{R}}$;
- (iv) $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, 3$ e $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \tilde{\mathbf{l}}\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \tilde{\mathbf{l}}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{l}}\mathbf{e}_2$;
- (v) Identidade de Jacobi $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$;
- (vi) Se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$, pela distributividade, segue $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Agora, se \mathbf{u} é paralelo a $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$, então mesmo se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ é possível que $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$ e, portanto, $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. Entretanto, se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, então

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$$

e

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0},$$

donde podemos concluir que $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ é, ao mesmo tempo, perpendicular e paralelo a um vetor não nulo \mathbf{u} , o que implica $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

1.1.11 Produtos triplos

Dados três vetores polares, $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{w} = w^i\mathbf{e}_i$ onde $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$ é uma base ortonormal de \mathbf{V}^3 , então podemos escrever o *produto escalar triplo* (ou *produto vetorial misto*) como

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{l}} \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}.$$

Note que dado $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{l}}\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{V}}^3$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}^3$ temos

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}.$$

Propriedades algébricas do produto vetorial misto:

- (i) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$;
- (ii)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{w}) \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{w}}) \\ \mathbf{u} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{w}}) \end{array} \right\} \in \tilde{\mathbb{R}} \text{ e } \left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{w}}) \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{w}}) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}.$$

Dados três vetores polares, $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i$ onde $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$ é uma base ortonormal de \mathbf{V}^3 , então podemos escrever o *produto vetorial triplo* como

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= [\mathbf{v} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})], \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= [\mathbf{v} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})].\end{aligned}$$

Como, em geral, para vetores não nulos $\mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \neq \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, então segue que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ (vide identidade de Jacobi).

Também, da **Definição 26** se $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{V}}^3$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}^3$ temos

$$\tilde{\mathbf{u}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = [\mathbf{v} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})],$$

e também, e.g., se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$ e $\tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{\mathbf{V}}^3$ temos

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{w}}) = \tilde{\mathbf{I}} [\mathbf{v} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})].$$

1.2 Espaços Afins

Definição 27 Um espaço afim de dimensão n , é uma tripla $\mathcal{A} := (S, \mathbf{V}, \ominus)$, onde S é um conjunto não vazio, \mathbf{V} é um espaço vetorial real, $\dim \mathbf{V} = n$, e $\ominus : S \times S \rightarrow \mathbf{V}$; $(x, y) \mapsto x \ominus y$ é uma aplicação, satisfazendo as propriedades:

- (i) Fixado qualquer $a \in S$ a aplicação⁴ $\ominus_a : S \rightarrow \mathbf{V}$, $x \mapsto x \ominus a$ é bijetora;
- (ii) Para quaisquer $a, b, x \in S$, $(x \ominus b) + (b \ominus a) = x \ominus a$.

Se no axioma (ii) tornarmos $a = b = x$, então $x \ominus x = \mathbf{0}$, $\forall x \in S$.

Se no axioma (ii) tornarmos $a = x$, então $b \ominus a = -(a \ominus b)$, $\forall a, b \in S$.

Definição 28 O vetor $\mathbf{v} := x \ominus y$ é chamado a diferença do par $(x, y) \in S \times S$, ou ainda, o segmento orientado de y para x (ver Figura 4).

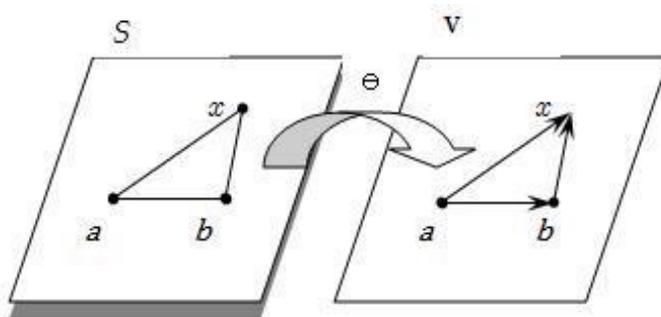


Figura 4: A aplicação \ominus , leva um par de pontos de S a um vetor em \mathbf{V} .

⁴A aplicação \ominus_a é normalmente chamada de *vetorização* de S com origem a .

A aplicação \ominus é chamada *subtração*, e chamamos a atenção aqui para o fato de \ominus ser a operação realizada nos elementos de S e não deve ser confundida com a operação diferença de vetores de \mathbf{V} . Entretanto, por abuso de linguagem e para facilitar a notação, usaremos o sinal usual de $-$ no lugar de \ominus . Assim, o leitor deve estar atento quando que o sinal de $-$ estará representando, de fato, a diferença usual em \mathbf{V} ou a operação em S , pelo contexto.

Vamos investigar um pouco mais, sobre as operações de soma e subtração entre os elementos de S e \mathbf{V} e analisar quando tais operações estão bem definidas e o que elas representam.

Para um dado $a \in S$, a aplicação inversa $\ominus_a^{-1} : \mathbf{V} \rightarrow S$ é definida por $\mathbf{v} \mapsto a \boxplus \mathbf{v}$. Assim, temos que

$$a \boxplus (b - a) = b, \forall a, b \in S,$$

donde segue que

$$(b \boxplus \mathbf{v}) \boxplus \mathbf{a} = b \boxplus (\mathbf{v} + \mathbf{a}), \forall \mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Na igualdade acima, o símbolo⁵ \boxplus usado duas vezes no lado esquerdo, provém da definição de \ominus_a^{-1} , e no lado direito, sua aparição se refere novamente à soma proveniente de \ominus_a^{-1} e o símbolo $+$ refere-se a soma de vetores de \mathbf{V} .

Assim, podemos fazer as seguintes observações:

(a) a diferença de dois elementos de S , faz sentido e está bem definida, pois faz parte da definição de espaço afim. O resultado da operação representa um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$;

(b) a soma de um elemento do espaço afim, $a \in \mathcal{A}$, com um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, está bem definida. Isto é proveniente da definição de \ominus_a^{-1} , e o resultado da operação é um elemento do espaço afim $v \in S$;

(c) a soma (e a diferença) de dois vetores de \mathbf{V} , é obviamente bem definida, proveniente da própria definição de espaço vetorial.⁶

⁵Novamente, motivados pela simplificação da notação, passaremos a identificar \boxplus pelo símbolo usual $+$. Portanto, assim como no caso da subtração \ominus , fica a cargo do leitor verificar o real significado de cada operação.

⁶Mais informações sobre espaços afins, podem ser encontrados em [28].

1.2.1 Vetores Livres e Vetores Tangentes

Definição 29 Para cada elemento $a \in S$, a aplicação $\Theta_a : S \rightarrow \mathbf{V}$, $x \mapsto x \ominus a$, induz uma estrutura linear em S com origem em a , cada um delas sendo isomorfa ao espaço vetorial \mathbf{V} . A estrutura linear, é aquela definida pela bijeção em (i) da Definição 27, donde segue que

$$\Theta_a(x - b) \equiv \Theta_a(x) - \Theta_a(b) = (x - a) - (b - a), \quad \forall x, b \in S.$$

Chamamos este espaço induzido de espaço tangente a S em a , e o denotamos por $T_a S$.

Os elementos de $T_a S$ são os vetores tangentes em $a \in S$.

Definição 30 A união $\bigcup_{a \in S} T_a S$ é chamado o fibrado tangente de S e denotado por TS .

Definição 31 Um vetor livre é uma classe de equivalência, tal que para $x, y, a, b \in S$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, vale

$$x - a \simeq y - b, \text{ se e só se, } x - a = y - b = \mathbf{v}.$$

Note que a definição de vetor livre, nos permite “visualizar” geometricamente o conceito de paralelismo.

1.2.2 Orientação de um Espaço Afim

Sejam $a, b, e_i, e'_i \in S$, $i = 1, \dots, n$. Podemos escolher no espaço $T_a S$ uma base arbitrária $\beta(a) = \{\mathbf{e}_1(a), \dots, \mathbf{e}_n(a)\}$, que consideraremos orientada positivamente, onde $\mathbf{e}_i(a) = e_i - a$, com $e_i - a \neq e_j - a$, para $i \neq j$. Para qualquer outro $b \in S$, podemos tomar como base do espaço $T_b S$, a base $\beta(b) = \{\mathbf{e}_1(b), \dots, \mathbf{e}_n(b)\}$, onde $\mathbf{e}_i(b) = e'_i - b$, com $e'_i - b \neq e'_j - b$, para $i \neq j$, tal que os vetores $\mathbf{e}_i(a)$ sejam paralelos aos vetores $\mathbf{e}_i(b)$, ou seja

$$\mathbf{e}_i(a) = e_i - a \simeq e'_i - b = \mathbf{e}_i(b).$$

Deste modo, em todos os pontos $p \in S$, os espaços $T_p S$, possuem a mesma orientação e diremos que \mathcal{A} está orientado.

1.2.3 Sistemas de Coordenadas para \mathcal{A}

Agora que definimos os conceitos de espaço afim, espaço tangente a S em a e sabemos como orientar \mathcal{A} , vamos, a seguir, definir *sistemas de coordenadas globais* para \mathcal{A} .

Escolhido um ponto arbitrário $o \in S$, que será usado como origem do sistema de coordenadas globais, tome $\{\mathbf{e}_i(o)\}$, $i = 1, \dots, n$ como uma base de T_oS . Considere $\{o, \beta(o)\} = \{o, \mathbf{e}_1(o), \dots, \mathbf{e}_n(o)\}$ que por simplicidade será denotado por $\{o, \beta_o\} = \{o, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Este conjunto, nos permite definir um sistema de coordenadas (lineares) globais para \mathcal{A} como segue. Dado um ponto arbitrário $x \in S$ temos imediatamente de $\{o, \beta_o\}$ que $x - o = \mathbf{x} \in T_oS$, pode ser escrito como

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n. \quad (1.3)$$

Os números reais x^i , $i = 1, \dots, n$ são chamados de coordenadas do ponto $x \in S$ com respeito à origem o , na base β_o e o vetor $\mathbf{x} \in T_oS$, é dito o *vetor posição* do ponto x com relação à origem o .

Note que da Eq.(1.3), segue que

$$\mathbf{e}_i(x) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \quad (1.4)$$

e naturalmente $\beta_x = \{\mathbf{e}_1(x), \dots, \mathbf{e}_n(x)\}$ é uma base para T_xS . Ademais recordamos mais uma vez que $\mathbf{e}_i(x) = \mathbf{e}_i(o) = \mathbf{e}_i$.

Se nos restringirmos a um subconjunto conexo $U \subset S$, tal que $o \in U \subset S$, podemos definir coordenadas *arbitrárias locais*, para $x \in U$, introduzindo um difeomorfismo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$, com inversa $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$.

Defina os campos vetoriais $\mathbf{u}_i : U \rightarrow \mathbf{V}$, $i = 1, \dots, n$, tal que cada $\mathbf{u}_i(x) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \Big|_x$ é tangente em x à linha coordenada $x^i = \text{const.}$ que passa por x . Assim, para $x \in U$, $\beta'_x = \{\mathbf{u}_1(x), \dots, \mathbf{u}_n(x)\}$ forma uma base de T_xS .

Observe que, pela regra da cadeia,

$$\mathbf{u}_i(x) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \Big|_x = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \Big|_x = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{e}_j \Big|_x.$$

Portanto, cada vetor da base β'_x , pode ser escrito como combinação linear dos vetores de β_x , anteriormente introduzida, isto é,

$$\mathbf{u}_i = J_i^1 \mathbf{e}_1 + \dots + J_i^n \mathbf{e}_n, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde a matriz formada pelos coeficientes J_i^j , é a matriz Jacobiana $J = \left(J_i^j \right)$. Se J tiver determinante positivo, então β'_x terá a mesma orientação de β .

Definição 32 O sistema de coordenadas $\{x^i\}$, $i = 1, \dots, n$ é dito ter a mesma orientação do sistema de coordenadas $\{\tilde{x}^i\}$, $i = 1, \dots, n$, se o determinante da matriz J for positivo.

Observação 33 No que se segue escreveremos Ω_U para denotar a orientação de U induzida pela orientação do sistema de coordenadas $\{x^i\}$.

1.2.4 Campos Escalares, Pseudoescalares, Polares e Axiais

Definição 34 Um campo de escalares em $U \subset S$ é uma aplicação $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(x)$.

Definição 35 Um campo de vetores polares em $U \subset S$, é uma aplicação $\mathbf{v} : U \rightarrow \mathbf{V}$, $x \mapsto \mathbf{v}(x)$.

Dado um sistema de coordenadas arbitrário $\{x^i\}$ em U , temos $\mathbf{v}(x) = v^i(x)\mathbf{u}_i(x) = v_j(x)\mathbf{u}^j(x)$ onde $\{\mathbf{u}_i(x)\}$ é uma base para T_xU , para todo $x \in U$ como acima construída.

Definição 36 Um campo de pseudoescalares em $U \subset S$ é uma aplicação $\tilde{p} : U \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \tilde{p}(x) = [(p(x), \Omega_U)]$.

Definição 37 Um campo de vetores axiais em $U \subset S$, é uma aplicação $\tilde{\mathbf{a}} : U \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}$, $x \mapsto \tilde{\mathbf{a}}(x) = [(\mathbf{a}(x), \Omega_U)]$.

1.2.5 Inversão e Reflexão de Campos Vetoriais

Para vetores polares (tangentes) definimos uma *inversão espacial ativa* como a aplicação $\mathcal{I} : T_xS \rightarrow T_xS$, $\mathbf{v} \mapsto \mathcal{I}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.

Também definimos para vetores polares (tangentes) uma *reflexão ativa* relativa a um plano π como uma aplicação $R_\pi : T_xS \rightarrow T_xS$, $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) \mapsto R_\pi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\parallel - \mathbf{v}_\perp$, onde \mathbf{v}_\parallel e \mathbf{v}_\perp são, respectivamente, as componentes de \mathbf{v} paralela e ortogonal ao plano π .

Ademais, fixada uma orientação no espaço afim \mathcal{A}^3 , definimos o operador de inversão ativa para vetores axiais (tangentes) por $\mathcal{I} : T_xS \rightarrow T_xS$, $\tilde{\mathbf{a}} \mapsto \mathcal{I}(\tilde{\mathbf{a}}) = \tilde{\mathbf{a}}$ e finalmente, definimos o operador de *reflexão ativa* relativo a um plano π para vetores axiais (tangentes) como uma aplicação $R_\pi : T_xS \rightarrow T_xS$, $\tilde{\mathbf{a}} := (\tilde{\mathbf{a}}_\parallel + \tilde{\mathbf{a}}_\perp) \mapsto R_\pi(\tilde{\mathbf{a}}) = -\tilde{\mathbf{a}}_\parallel + \tilde{\mathbf{a}}_\perp$, onde $\tilde{\mathbf{a}}_\parallel$ e $\tilde{\mathbf{a}}_\perp$ são, respectivamente, as componentes de $\tilde{\mathbf{a}}$ paralela e ortogonal ao plano π (ver Figura 5).

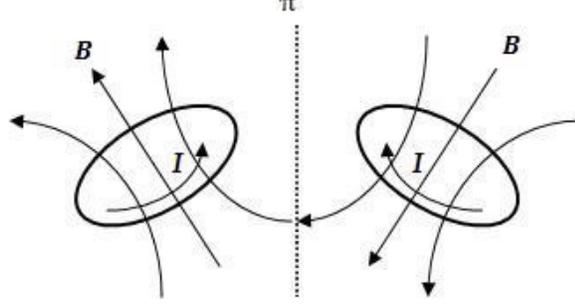


Figura 5: Reflexão ativa relativa ao plano π . Observe como se comportam o vetor axial $\tilde{\mathbf{B}}$ e os vetores polares de posição do fio e de corrente I .

1.2.6 Espaços Afins Euclidianos e Pseudoeuclidianos

Definição 38 *Seja \mathcal{A}^n um espaço afim n -dimensional e (\mathbf{V}, \cdot) um espaço vetorial euclidiano. O espaço afim euclidiano é a quádrupla $E^n = (S, \mathbf{V}, \cdot, \ominus)$.*

Dado $x \in S$, o produto escalar em $T_x S \simeq \mathbf{V}$ é definido pela aplicação \cdot em \mathbf{V} .

Assim, podemos definir a distância euclidiana entre $x, y \in S$, como

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (1.5)$$

Escolhemos um sistema de *coordenadas cartesianas* para E^n , simplesmente escolhendo uma base ortonormal global $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, para $TS = \bigcup_x T_x S$, donde segue que

$$d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}. \quad (1.6)$$

Doravante, a menos que explicitamente dito o contrário, usaremos coordenadas cartesianas para as considerações deste trabalho.

Definição 39 *Seja \mathcal{A}^{1+n} um espaço afim $(1+n)$ -dimensional e (\mathbf{V}, \bullet) um espaço vetorial pseudoeuclidiano. O espaço afim pseudoeuclidiano é a quádrupla $\mathcal{M}^{1+n} = (\mathfrak{E}, \mathbf{V}, \bullet, \ominus)$.*

Dado $x \in S$, o produto escalar em $T_x S \simeq \mathbf{V}$ é definido pela aplicação \bullet em \mathbf{V} .

Assim, podemos definir a distância pseudoeuclidiana entre $x, y \in S$, como

$$s(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{M}}. \quad (1.7)$$

Escolhemos um sistema de *coordenadas inerciais* para \mathcal{M}^{1+n} , simplesmente escolhendo uma base ortonormal global $\{\mathbf{e}_\mu\}$, $\mu = 0, 1, \dots, n$, para $TS = \bigcup_x T_x S$, tal que $\mathbf{e}_\mu \bullet \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$, donde segue que

$$s(x, y) = \sqrt{-(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}. \quad (1.8)$$

1.2.7 Modelo para o Espaço-Tempo

Neste trabalho, usaremos como modelo do *espaço-tempo* (a arena onde ocorrem os fenômenos físicos) o espaço afim pseudoeuclidiano \mathcal{M}^{1+3} , que denotaremos apenas por \mathcal{M} e que é chamado de *espaço-tempo de Minkowski*. O conjunto \mathfrak{E} , usado na **Definição 39** é chamado o conjunto dos eventos (possíveis, ou potencialmente possíveis).

Definida uma origem $o \in \mathfrak{E}$, seja $\mathbf{e}_0 \in T_o \mathfrak{E}$ um vetor tipo tempo arbitrário, tal que $\mathbf{e}_0 \bullet \mathbf{e}_0 = -1$. Considere o campo vetorial $\mathbf{e}_0(x) = \mathbf{e}_0, \forall x \in \mathfrak{E}$. Tal campo, será dito um *sistema de referência inercial* para o espaço-tempo de Minkowski. [34, 35]

Seja $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ vetores tipo espaço arbitrários, tais que $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, e tais que $\mathbf{e}_0 \bullet \mathbf{e}_i = 0$. Considere os campos vetoriais $\mathbf{e}_i(x) = \mathbf{e}_i, \forall x \in \mathfrak{E}$. A base $\{\mathbf{e}_\mu\}$ é uma base ortonormal para $T\mathfrak{E}$.

As coordenadas de $x \in \mathfrak{E}$, com relação a $\{o, \{\mathbf{e}_\mu\}\}$, serão ditas coordenadas cartesianas inerciais; x^0 , sendo a coordenada tipo tempo e $x^i, i = 1, 2, 3$, as coordenadas tipo espaço.

Observação 40 *Note que uma dada coordenada do tipo espaço x^i , representa a distância de um ponto no eixo \mathbf{e}_i até a origem $o \in \mathfrak{E}$. Por essa razão, a coordenada do tipo tempo x^0 precisa ter um fator de conversão, e escrevemos*

$$x^0 = ct,$$

onde c é uma constante universal, chamada *velocidade da luz* e t é o tempo em que ocorreu o evento $x \in \mathfrak{E}$. Eventualmente usaremos um sistema de unidades onde o valor numérico de c é 1.

Dado um sistema de referência inercial \mathbf{e}_0 ele induz uma folheação [11] de \mathcal{M} com $\mathcal{M} = \mathcal{T} \times E^3$, onde \mathcal{T} é um espaço afim unidimensional e E^3 é chamado de *espaço de repouso* do sistema de referência inercial \mathbf{e}_0 .

Sistemas de referência inerciais distintos fornecem folheações distintas de \mathcal{M} , conforme mostra a Figura 6.

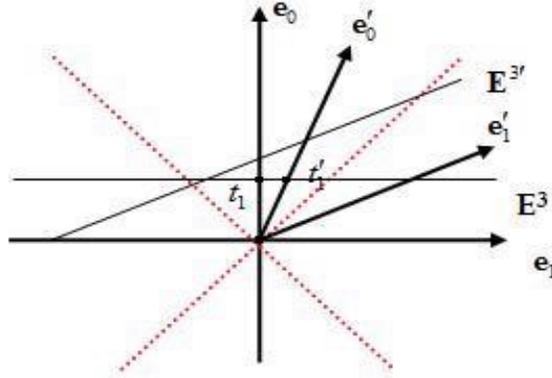


Figura 6: Duas folheações distintas do espaço-tempo de Minkowski.

Observação 41 Para a formulação das equações de Maxwell que será apresentada no próximo Capítulo, estaremos interessados em campos vetoriais polares e axiais cujo domínio é $U \subset \mathfrak{E}$ e contradomínios, respectivamente \mathbf{V}^3 e $\tilde{\mathbf{V}}^3$.

1.3 Cálculo Vetorial

Nesta seção recordaremos os teoremas fundamentais do cálculo vetorial e algumas identidades que serão necessárias para provarmos os resultados do Capítulo 3. Supõe-se o conhecimento prévio dos conceitos de limite, continuidade, derivadas e integrais de funções escalares e vetoriais. Como mencionado na seção anterior, estamos considerando uma orientação positiva fixa, o pseudoescalar $\tilde{1}$ será representado pelo escalar 1 e, portanto, as fórmulas algébricas envolvendo campos axiais e polares são idênticas.

1.3.1 O Operador Nabla ∇

Fixada uma origem $o \in S$ e dado um sistema de coordenadas *cartesianas* $\{\mathbf{x}^i\}$, $i = 1, 2, 3$ em E^3 (vide Seção 1.2.3), identificaremos no que segue o conjunto S da definição de E^3 (Definição 38) com \mathbb{R}^3 . Assim, representaremos $x \in S$, por $x - o = \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e os campos escalares e vetoriais (polares ou axiais) por

$$\begin{aligned}\phi : \mathbf{x} &\mapsto \phi(\mathbf{x}) = \phi(x^1, x^2, x^3), \\ \mathbf{v} : \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x^1, x^2, x^3), \\ \tilde{\mathbf{a}} : \mathbf{x} &\mapsto \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{a}}(x^1, x^2, x^3).\end{aligned}$$

Definição 42 Dado um sistema de coordenadas cartesianas $\{\mathbf{x}^i\}$, $i = 1, 2, 3$ em E^3 e dado $\{\mathbf{o}, \boldsymbol{\beta}\}$ (Definição 1.2.3) onde $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{e}_i\}$ é uma base ortonormal global para TS , o operador nabla ∇ é definido por

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}. \quad (1.9)$$

Observação 43 O operador diferencial vetorial ∇ é aqui considerado um operador polar, i.e., sob a operação de inversão definida na Seção 1.2.5 temos

$$\mathcal{I}\nabla = -\nabla.$$

Ainda mais, se $\phi(\mathbf{x})$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ possuírem derivadas de primeira ordem contínuas numa região $U \subset \mathbb{R}^3$, então podemos definir:

Definição 44 O gradiente de um campo escalar $\phi(\mathbf{x})$ é definido num ponto $\mathbf{x}_0 \in U$ por

$$\begin{aligned}\text{grad } \phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} &:= \nabla \phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \quad (1.10) \\ &= \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x^2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x^3} \mathbf{e}_3 \right) \Big|_{\mathbf{x}_0}.\end{aligned}$$

Definição 45 O divergente de um campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v^1(\mathbf{x}), v^2(\mathbf{x}), v^3(\mathbf{x}))$ num ponto $\mathbf{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^3$ é definido por

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} &:= \nabla \cdot \mathbf{v}|_{\mathbf{x}_0} = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \cdot (v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3)_{\mathbf{x}_0} \\ &= \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0}.\end{aligned} \quad (1.11)$$

Definição 46 Seja $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v^1(\mathbf{x}), v^2(\mathbf{x}), v^3(\mathbf{x}))$ um campo vetorial, o seu rotacional num ponto $\mathbf{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^3$ é definido por

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} &:= (\nabla \times \mathbf{v})|_{\mathbf{x}_0} & (1.12) \\ &= \left[\left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \times (v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3) \right]_{\mathbf{x}_0} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}_{\mathbf{x}_0} \\ &= \left[\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_3 \right]_{\mathbf{x}_0}. \end{aligned}$$

Mais adiante neste capítulo, ilustraremos com exemplos, os conceitos de gradiente, divergente e rotacional.

1.3.2 Identidades Vetoriais Envolvendo ∇

Supondo que as derivadas parciais de $\phi(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, existam, valem as seguintes identidades (vide, por exemplo, [15]):

1. $\nabla(\phi + \varphi) = \nabla(\phi) + \nabla(\varphi)$;
2. $\nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{w}$;
3. $\nabla \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w}$;
4. $\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{v} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{v})$;
5. $\nabla \times (\phi \mathbf{v}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{v} + \phi (\nabla \times \mathbf{v})$;
6. $\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{w})$;
7. $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{w} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{w})$;
8. $\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{v})$;
9. $\nabla \cdot (\nabla \phi) \equiv \nabla^2 \phi$, onde $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2}$ é chamado de

operador Laplaciano e $\nabla^2 \phi$ é dito Laplaciano de ϕ ;

10. $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$, o rotacional do gradiente de ϕ é zero;
11. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$, o divergente do rotacional de \mathbf{v} é zero;
12. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$.

1.3.3 Curvas Parametrizadas e Derivada Direcional

Definição 47 Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 .

Se $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, dizemos que \mathbf{r} é diferenciável com respeito a t , se as funções, $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ forem diferenciáveis, isto é

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)).$$

Definição 48 Uma curva diferenciável parametrizada $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita regular (ou suave) se $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Uma curva que é composta por um número finito de curvas suaves, colocadas de modo contínuo é chamada de regular (ou suave) por partes.

Definição 49 O comprimento de arco de uma curva parametrizada regular $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, a partir de um ponto $t_0 \in I$ arbitrário é definido por

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{f'(\tau)^2 + g'(\tau)^2 + h'(\tau)^2} d\tau. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{r}'(\tau) \neq 0$, então $s(t)$ é uma função diferenciável de t e $\frac{ds(t)}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$.

Se acontecer de o parâmetro t já ser o próprio comprimento de arco medido a partir de um certo ponto, então $\frac{ds(t)}{dt} = 1$.

Dada uma parametrização qualquer $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma curva regular Γ , podemos sempre fornecer uma reparametrização para o comprimento de arco s . De fato, seja $\mathcal{S} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, $t \mapsto \mathcal{S}(t) := s$ um difeomorfismo. Então a composição $\mathbf{r} \circ \mathcal{S}^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto (\mathbf{r} \circ \mathcal{S}^{-1})(s) := \mathbf{r}(s)$, parametriza a curva Γ , pelo comprimento de arco s .

Definição 50 A derivada direcional de um campo escalar $\phi(\mathbf{x})$ num ponto $\mathbf{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^3$ na direção do vetor unitário $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, é definida por

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{t}}\phi)_{\mathbf{x}_0} &= \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \Big|_{\mathbf{t}, \mathbf{x}_0} = (\nabla\phi)_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{t} \\ &= |\nabla\phi(\mathbf{x}_0)| |\mathbf{t}| \cos\theta \\ &= |\nabla\phi(\mathbf{x}_0)| \cos\theta, \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $(\nabla\phi)_{\mathbf{x}_0}$ e \mathbf{t} .

Mencionamos, a seguir, consequências imediatas da definição de gradiente e derivada direcional:

- 1) A função ϕ possui sua maior taxa de crescimento quando $\cos \theta = 1$, ou seja, quando \mathbf{t} é a direção de $(\nabla \phi)|_{\mathbf{x}_0}$.
- 2) A função ϕ possui sua maior taxa de decréscimo quando $\cos \theta = -1$, ou seja, na direção de $-(\nabla \phi)|_{\mathbf{x}_0}$.
- 3) A função ϕ possui derivada direcional nula quando $\cos \theta = 0$, ou seja, quando \mathbf{t} é ortogonal a $(\nabla \phi)|_{\mathbf{x}_0}$.

1.3.4 Curvas e Superfícies de Nível

Definição 51 *Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x^1, x^2) = x^3$. É bem conhecido que podemos visualizar uma função escalar de duas variáveis por intermédio de seu gráfico em analogia ao gráfico de uma função de uma variável. O gráfico de φ é, por definição, o conjunto de pontos⁷*

$$\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = \varphi(x^1, x^2)\}.$$

Exemplo 52 *Considere a função*

$$\varphi(x^1, x^2) = -(x^1)^2 - 2(x^2)^2,$$

definida no domínio $U = \{-2 \leq x^1 \leq 2, -2 \leq x^2 \leq 2\}$. O seu gráfico está representado na Figura 7.

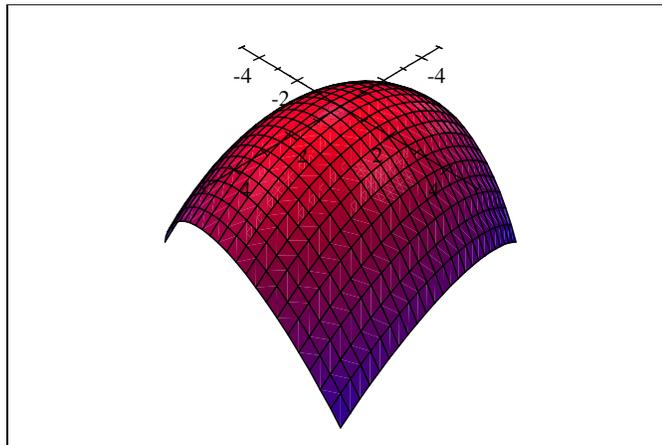


Figura 7: O gráfico $(x^1, x^2, \varphi(x^1, x^2))$.

⁷Alguns livros também utilizam da notação $(x^1, x^2, \varphi(x^1, x^2))$ para descrever o gráfico de $\varphi(x^1, x^2)$.

Curvas de Nível

Gráficos 3-dimensionais como o da Figura 7 são, em geral, difíceis de se desenhar (se não se dispõe de programas computacionais especiais). Assim, é comum “projetar” o gráfico de $\varphi(x^1, x^2)$ em um plano bidimensional. Isto é realizado por intermédio de suas *curvas de nível*.

Definição 53 Uma curva de nível de $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é, por definição, o conjunto de pontos $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x^1, x^2) = c\}$, onde c é uma constante real.

Obviamente uma dada função, possui uma infinidade de curvas de nível, uma para cada valor de c , assim, podemos desenhá-las para um número arbitrário de valores de c em um gráfico que é, em geral, chamado o *gráfico de contornos* ou, simplesmente, *curvas de nível*.

Exemplo 54 Para o caso da particular função $\varphi(x^1, x^2) = -(x^1)^2 - 2(x^2)^2$ do exemplo anterior, temos que quando $c < 0$, as curvas de nível de φ formam elipses (para cada $c \in \mathbb{R}$), uma vez que a equação para a curva de nível torna-se, por exemplo, para $c = -1$, $(x^1)^2 + 2(x^2)^2 = 1$.

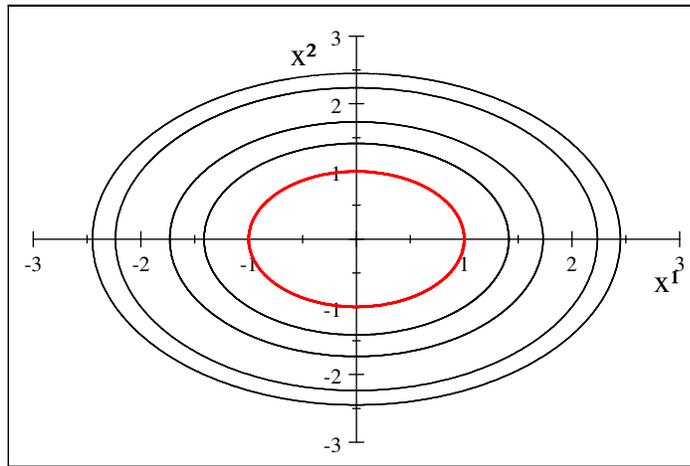


Figura 8: Curvas de nível para $\varphi(x^1, x^2) = c$, para alguns valores de c .

Note que cada uma das curvas de nível, representadas na Figura 8, é o lugar geométrico dos pontos onde o plano $x^3 = c$ intercepta o gráfico de $\varphi(x^1, x^2) = c$.

Superfícies de Nível

Para uma função $\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ faz-se necessário pelo menos um espaço afim 4-dimensional para que seja possível “desenhar” o seu gráfico, $(x^1, x^2, x^3, \phi(x^1, x^2, x^3))$. Infelizmente isto não é possível de se realizar no espaço físico onde habitamos. Entretanto, em analogia com as curvas de nível, podemos ter uma ideia de como se comporta o gráfico $(x^1, x^2, x^3, \phi(x^1, x^2, x^3))$, simplesmente olhando para suas superfícies de nível que são definidas pelo conjunto $\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x^1, x^2, x^3) = c \in \mathbb{R}\}$, para distintos valores fixos de c .

Exemplo 55 Considere a função

$$\begin{aligned} \phi & : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \phi(x^1, x^2, x^3) & = 2(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + 4(x^3)^2. \end{aligned}$$

Uma particular superfície de nível de ϕ , é dada por $\phi(x^1, x^2, x^3) = 1$, como mostra a Figura 9.

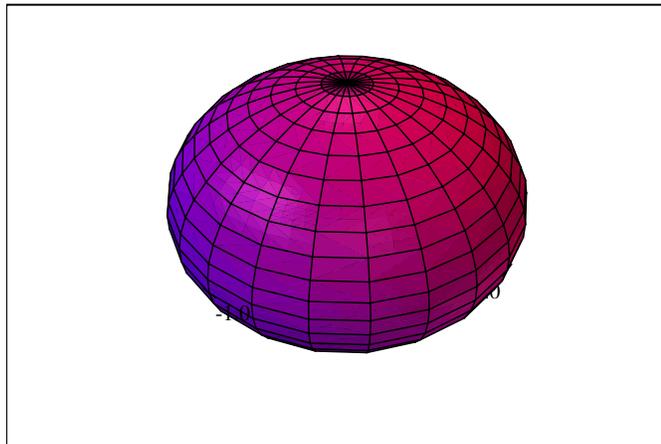


Figura 9: A superfície de nível $2(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + 4(x^3)^2 = 1$.

1.3.5 $\nabla\phi$ é Ortogonal à $\phi(x^1, x^2, x^3) = c$

Seja $\phi(\mathbf{x})$ uma função diferenciável e $\phi(x^1, x^2, x^3) = c \in \mathbb{R}$ uma de suas superfícies de nível. Seja $\mathbf{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{e}_1 + g(t)\mathbf{e}_2 + h(t)\mathbf{e}_3$ uma curva parametrizada (suave) que jaz sobre a superfície de nível, i.e., tal

que $\phi(\mathbf{r}(t)) = c$. Diferenciando ambos lados desta igualdade com respeito ao parâmetro t , temos em sequência:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\mathbf{r}(t))}{dt} &= \frac{dc}{dt}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial x^1} \frac{df}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x^2} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x^3} \frac{dh}{dt} &= 0, \\ \left(\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^3} \mathbf{e}_3 \right) \cdot \left(\frac{df}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dg}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_3 \right) &= 0, \\ (\nabla\phi) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

O resultado da Eq. (1.14) nos mostra que $\nabla\phi$ é normal ao vetor tangente $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ e, portanto, normal à curva \mathbf{r} que jaz sobre a superfície de nível $\phi(x^1, x^2, x^3) = c$, i.e., $\nabla\phi$ é normal à superfície de nível em cada um dos seus pontos.

Exemplo 56 Para o caso da particular função $\phi(x^1, x^2, x^3) = 2(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + 4(x^3)^2$, o campo vetorial de gradientes é dado por $\nabla\phi = 4x^1\mathbf{e}_1 + 6x^2\mathbf{e}_2 + 8x^3\mathbf{e}_3$, e como acabamos de mostrar é ortogonal as superfícies de nível $\phi(x, y, z) = c$, encontra-se representado na Figura 10.

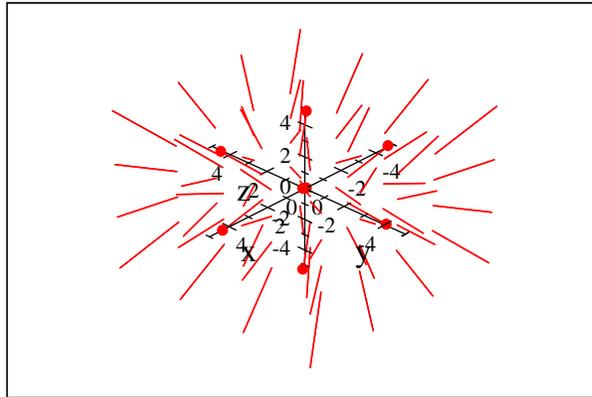


Figura 10: Campo vetorial $\nabla\phi = 4x^1\mathbf{e}_1 + 6x^2\mathbf{e}_2 + 8x^3\mathbf{e}_3$.

1.3.6 Regra de Leibniz de Diferenciação sob uma Integral

Teorema 57 *Suponha que $I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$, para $\alpha \leq t \leq \beta$ tal que $f(t, x)$ e suas derivadas parciais sejam contínuas na região $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ e $a(t)$, $b(t)$ continuamente diferenciáveis em $[\alpha, \beta]$. Então*

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt}. \quad (1.15)$$

Uma prova para este teorema pode ser encontrada em.[30].

1.3.7 Fluxo de um Campo Vetorial

Definimos agora o fluxo de um campo vetorial através de uma curva no plano, e em seguida generalizamos para o espaço.

Definição 58 *Seja Γ uma curva fechada orientável suave no domínio de um campo vetorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v^1(\mathbf{x}), v^2(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^2$. Se \mathbf{n} é o vetor unitário normal que aponta para o exterior da curva Γ , então o fluxo de \mathbf{v} através de Γ é definido pela integral*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

onde $ds = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| dt$.

Seja $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v^1(\mathbf{x}), v^2(\mathbf{x}), v^3(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^3$ e suponha que a restrição de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sobre uma superfície regular orientável \mathcal{S} seja um campo vetorial contínuo. Ademais seja \mathbf{n} o campo de vetores unitário normal escolhido na superfície. Nós chamamos a integral de $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ sobre a superfície \mathcal{S} o fluxo de \mathbf{v} através de \mathcal{S} na direção positiva. Portanto, o fluxo é a integral sobre \mathcal{S} da componente escalar de \mathbf{v} na direção de \mathbf{n} . Ou seja:

Definição 59 *O fluxo de um campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ através de uma superfície \mathcal{S} na direção de \mathbf{n} é*

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

1.3.8 Campos Conservativos, Funções Potenciais e o Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Definição 60 *Seja $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ um campo vetorial definido em uma região aberta $U \subset \mathbb{R}^3$ e suponha que para quaisquer dois pontos $a, b \in U$ a integral $\int_b^a \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}$ resulte no mesmo valor independente do caminho que se tome de a para b . Então a integral $\int_b^a \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}$ é invariante por caminho em U e o campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é dito conservativo.*

Teorema 61 (Teorema Fundamental das Integrais de Linha) *Seja \mathbf{v} um campo vetorial contínuo em uma região aberta e conexa⁸ $U \subset \mathbb{R}^3$, e suponha que a integral de linha de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ seja invariante por caminho em U . Fixe $\alpha \in U$ e defina o campo escalar ϕ em U pela equação*

$$\phi(\mathbf{x}) = - \int_{\alpha}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.16)$$

onde \mathbf{r} é qualquer curva suave por partes em U unindo α até \mathbf{x} . Então o gradiente de ϕ existe e é igual a \mathbf{v} , isto é,

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

O leitor interessado em verificar uma prova deste teorema, assim como das duas proposições que citaremos logo adiante, poderá encontrá-las em [3].

Definição 62 *Se $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é um campo vetorial definido em $U \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$ para alguma função escalar ϕ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, então ϕ é chamada de função potencial de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ em U .*

Observe que nas condições enunciadas no Teorema Fundamental das Integrais de Linha, fixados $\alpha, \beta \in U$ a integral da Eq.(1.16) torna-se

$$\int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\beta) - \phi(\alpha).$$

Em particular, se Γ for uma curva fechada suave parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ e tal que $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, então

$$\int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Vejamos a seguinte proposição:

⁸Um conjunto U é dito conexo [3] se para quaisquer dois pontos de U pode-se ligá-los por uma curva suave inteiramente contida em U .

Proposição 63 *Seja $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ um campo vetorial contínuo em um conjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^3$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) \mathbf{v} é o gradiente de alguma função potencial em U ;
- (b) a integral de linha de \mathbf{v} é invariante por caminho em U ;
- (c) a integral de \mathbf{v} é nula sobre qualquer curva suave fechada em U .

Como nem sempre é fácil calcular uma integral de linha, convém enunciarmos um modo mais prático de verificarmos quando é possível se ter $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$. Para isso, enunciamos a seguinte proposição:

Proposição 64 *Seja $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v^1(\mathbf{x}), v^2(\mathbf{x}), v^3(\mathbf{x}))$ um campo vetorial continuamente diferenciável em uma região aberta e convexa⁹ $U \subset \mathbb{R}^3$. Então $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é o gradiente de uma função escalar se, e só se*

$$\frac{\partial v^i(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j(\mathbf{x})}{\partial x^i}, \quad (1.17)$$

para todo $\mathbf{x} \in U$ e $i, j = 1, 2, 3$.

Chamamos atenção para o fato de que a convexidade da região U é fundamental para garantir que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$. Sem esta hipótese, então mesmo que a Eq.(1.17) seja satisfeita, podemos ter que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq -\nabla\phi(\mathbf{x})$, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 65 *Seja $U = \{\mathbf{x} = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, (x^1, x^2) \neq (0, 0)\}$ e seja $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v^i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$ um campo vetorial definido em U por*

$$\mathbf{v}(x^1, x^2) = \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \mathbf{e}_1 + \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \mathbf{e}_2.$$

Note que U representa todo o plano \mathbb{R}^2 , exceto a origem, portanto é um conjunto aberto, mas não convexo. Pode-se verificar facilmente que vale a igualdade $\frac{\partial v^1(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial v^2(\mathbf{x})}{\partial x^1}$. Considere a curva suave fechada Γ , parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então se calcularmos a integral de linha de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sobre Γ , obteremos

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Portanto, como a integral por esse caminho fechado é diferente de zero, \mathbf{v} não pode ser o gradiente de uma função potencial em U .

⁹Um conjunto U é dito convexo se todo par de pontos $\alpha, \beta \in U$ pode ser unido por um segmento de reta inteiramente contido em U .

1.3.9 Teorema de Helmholtz

Proposição 66 *Um campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ fica unicamente determinado, se especificarmos o seu divergente e o seu rotacional dentro de uma região convexa $U \subset \mathbb{R}^3$ e o campo normal da fronteira de U . Isto é,*

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= f, \\ \nabla \times \mathbf{v} &= \mathbf{c},\end{aligned}$$

onde f é uma função escalar (interpretada como a densidade da fonte) e \mathbf{c} uma função vetorial (interpretada como a densidade de corrente).

Teorema 67 (Teorema de Helmholtz) *Um campo vetorial \mathbf{v} satisfazendo a Proposição 66 tal que $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ e $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{c}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$ pode ser escrito como a soma de duas partes, uma chamada irrotacional e a outra solenoidal. Isto é*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{k}(\mathbf{x}),$$

onde $-\nabla\phi(\mathbf{x})$ é a parte irrotacional e $\nabla \times \mathbf{k}(\mathbf{x})$ a parte solenoidal.

As provas para a **Proposição 66** e para o **Teorema de Helmholtz**, podem ser encontradas, e.g., em [4].

1.3.10 Escoamento de um Campo Vetorial

Definição 68 *Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto convexo e seja $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe \mathcal{C}^k . Uma curva integral de \mathbf{X} é uma aplicação $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, $s \mapsto \psi(s)$ tal que o vetor tangente em $\psi(s)$ é*

$$\frac{d}{ds}\psi(s) = \mathbf{X}(\psi(s)). \quad (1.18)$$

Escrevendo-se $\psi(s) = \psi^i(s)\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, a Eq.(1.18) torna-se

$$\frac{d}{ds}\psi^i(s) = \mathbf{X}^i(\mathbf{x}). \quad (1.19)$$

Portanto, encontrar uma curva integral do campo vetorial \mathbf{X} é equivalente a resolver-se um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias (EDOs). A condição inicial

$$\psi(0) = (x_0^1, x_0^2, x_0^3), \quad x_0^i = x^i(0), \quad (1.20)$$

corresponde as coordenadas da curva integral em $s = 0$.

O teorema de existência e unicidade das EDOs, garante que existe (pelo menos localmente) uma única solução da Eq.(1.18) com condição inicial dada pela Eq.(1.20). Pode acontecer que a curva integral só seja definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e ademais tal intervalo pode depender do ponto $\psi(0)$, como descrito pela proposição seguinte.

Proposição 69 *Suponha que $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial \mathcal{C}^k definido em uma região aberta e convexa $U \subset \mathbb{R}^3$, então para cada $\mathbf{x} \in U$, existe uma curva integral de \mathbf{X} , $t \mapsto \psi(t, \mathbf{x})$ tal que:*

- (i) $\psi(t, \mathbf{x})$ é definido para¹⁰ $t \in I(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}$, contendo $t = 0$ e é de classe \mathcal{C}^{k+1} em $I(\mathbf{x})$;
- (ii) $\psi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para qualquer $\mathbf{x} \in U$;
- (iii) Esta curva é única: Dado $\mathbf{x} \in U$, não existe uma outra curva integral de \mathbf{X} de classe \mathcal{C}^1 definida num intervalo $I'(\mathbf{x}) \supset I(\mathbf{x})$ passando por \mathbf{x} (ou seja tal que $\psi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$).

Temos ainda, a seguinte proposição.

Proposição 70 *Se $t, s, t + s \in I(\mathbf{x})$, então $\psi(t, \psi(s, \mathbf{x})) = \psi(t + s, \mathbf{x})$.*

As provas das proposições citadas acima podem ser encontradas, e.g., em [7, 11].

Definição 71 *A aplicação $\psi : I(\mathbf{x}) \times U \rightarrow U$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto \psi(t, \mathbf{x})$ é chamada o escoamento de um campo vetorial \mathbf{X} .*

Note que da definição acima, segue que

$$\frac{d}{dt}\psi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\psi(t, \mathbf{x})). \quad (1.21)$$

As Aplicações $\psi_{\mathbf{x}}$ e ψ_t

Para cada $\mathbf{x} \in U$ fixo, introduzimos a aplicação $\psi_{\mathbf{x}} : I(\mathbf{x}) \rightarrow U$, $t \mapsto \psi_{\mathbf{x}}(t) := \psi(t, \mathbf{x})$ e para cada $t \in I(\mathbf{x})$ fixo, $\psi_t : U \rightarrow U$, $\mathbf{x} \mapsto \psi_t(\mathbf{x}) := \psi(t, \mathbf{x})$.

No que se segue para as aplicações de Física que trataremos neste trabalho, será suficiente restringirmos nossas considerações ao caso em que $I(\mathbf{x}) = \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in U$. Nestas condições, ψ_t é um difeomorfismo de $U \rightarrow U$, dito um grupo local a um parâmetro [22, 26]. De fato, temos como consequência da **Proposição 70** o seguinte:

¹⁰O intervalo $I(\mathbf{x})$ é, em geral, diferente para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

- (i) $\psi_t(\psi_s) = \psi_{t+s}(\mathbf{x})$, i.e., $\psi_t \circ \psi_s(\mathbf{x}) = \psi_{t+s}(\mathbf{x})$.
- (ii) a aplicação identidade ψ_0 é o elemento identidade do grupo.
- (iii) $\psi_{-t} = (\psi_t)^{-1}$.

Observação 72 *Por razões que se tornarão claras a seguir, a aplicação ψ_t é também, usualmente, chamada de escoamento do campo vetorial \mathbf{X} .*

1.3.11 Escoamento Associado a um Campo de Velocidades Dependente do Tempo

Considere uma região $\mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ com U aberto e convexo, e defina

$$\mathbf{v} : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1.22)$$

como um campo vetorial de classe \mathcal{C}^k . Para ilustrar as ideias, suponhamos que a região U esteja preenchida por um fluido cujo movimento desejamos caracterizar. Para tanto, consideremos uma “partícula do fluido” que no instante t se encontra na posição \mathbf{x} . Tal partícula percorre uma *trajetória* bem definida e $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ dada pela Eq.(1.22) é a velocidade da partícula que se encontra em \mathbf{x} no instante t .

Definição 73 *Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, a aplicação $\mathbf{v}_t : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é chamada o campo de velocidades espacial do fluido.*

Observação 74 *Uma curva integral do escoamento de um fluido com campo de velocidades $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, no instante t , é uma curva integral do campo \mathbf{v}_t .*

Assim, se $\psi_{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \rightarrow U, s \mapsto \psi_{\mathbf{x}}(s)$ é uma curva integral de \mathbf{v}_t que passa por \mathbf{x} em $s = 0$, temos

$$\frac{d}{ds} \psi_{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_t(\psi_{\mathbf{x}}(s)) = \mathbf{v}(t, \psi_{\mathbf{x}}(s)). \quad (1.23)$$

Definição 75 *Definimos uma trajetória (de uma partícula do fluido) associada ao campo de velocidades $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ que passa por \mathbf{x} em $t = 0$, como sendo a curva*

$$\sigma_{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \rightarrow U, \mathbf{x} \mapsto \sigma_{\mathbf{x}}(t) = \sigma(t, \mathbf{x}), \quad (1.24)$$

onde supomos que $\sigma : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$, seja uma função tal que para cada $\mathbf{x} \in U$ fixo, a aplicação $\sigma_t : U \rightarrow U, \sigma_t(\mathbf{x}) = \sigma(t, \mathbf{x})$ possui inversa.

Portanto, temos

$$\frac{d}{dt}\sigma_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{v}(t, \sigma(t, \mathbf{x})), \quad (1.25)$$

ou ainda, visto que t e \mathbf{x} são variáveis independentes

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \sigma(t, \mathbf{x})). \quad (1.26)$$

Vemos, portanto, que trajetórias e curvas integrais de um campo de velocidades \mathbf{v} , são conceitos *distintos*, i.e., em geral, $\psi_{\mathbf{x}}(t) \neq \sigma_{\mathbf{x}}(t)$, mas se $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = 0$, então as curvas integrais e as trajetórias coincidem e neste caso o escoamento é dito *estacionário*.

O significado de $\sigma_t : U \rightarrow U$ é o seguinte: para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, σ_t avança uma partícula do fluido da sua posição inicial $\mathbf{x} = \sigma(0, \mathbf{x}) \in U$ no instante $t = 0$ para a posição $\sigma(t, \mathbf{x}) \in U$ no instante t (ver Figuras 11a e 11b).

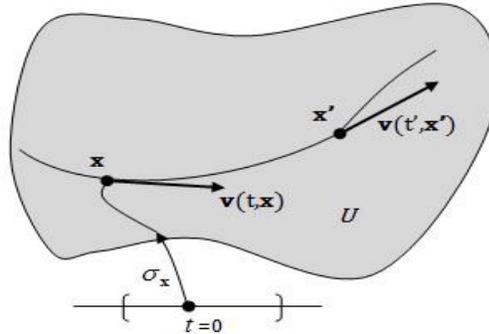


Figura 11.a: Trajetória (de uma partícula do fluido) associada a um campo de velocidade $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ que passa por \mathbf{x} em $t = 0$.

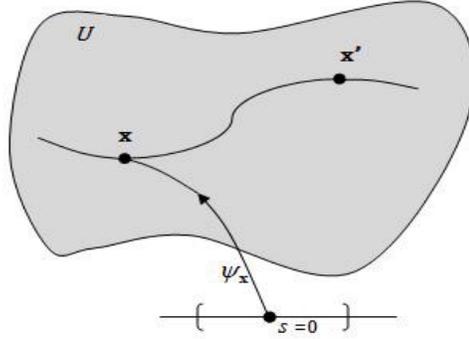


Figura 11.b: Curva integral de um campo de velocidade $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ que para um t fixo, passa por \mathbf{x} em $s = 0$.

1.3.12 Derivada Material

Definição 76 Seja $\sigma_{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \rightarrow U$, a trajetória de uma partícula do fluido. A aceleração de σ é a aplicação

$$a_{\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, a_{\sigma}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \sigma_{\mathbf{x}}(t). \quad (1.27)$$

Temos imediatamente que quando $\sigma_{\mathbf{x}}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, então

$$\begin{aligned} a_{\sigma}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, x^1(t), x^2(t), x^3(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t)) + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t))}{\partial x^i}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

e como da Eq.(1.25) segue que $\frac{dx^i}{dt} = v^i(t, x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t)) + v^i \frac{\partial \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t))}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t)) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \sigma_{\mathbf{x}}(t)). \end{aligned}$$

O operador

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla), \quad (1.29)$$

é dito a *derivada material*¹¹.

¹¹Esta denominação é proveniente da mecânica dos fluidos.

Dado qualquer campo vetorial $\mathbf{X} : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$, temos

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}(t)) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}(t)). \quad (1.30)$$

1.3.13 Teoremas de Green, Stokes e Gauss

Antes de finalizarmos este capítulo, enunciaremos três “grandes” teoremas, que são de fundamental importância para muitas teorias matemáticas e físicas, em particular, com aplicação imediata na teoria do eletromagnetismo. São eles: o *Teorema de Green* no plano, o *Teorema de Stokes* e o *Teorema de Gauss*, este último também conhecido como *Teorema da Divergência*. Em seguida, forneceremos dois exemplos que ilustrarão não somente a aplicação destes teoremas, como também o significado físico dos conceitos de divergente e rotacional de um campo vetorial.

O primeiro teorema que enunciaremos é o de Green que expressa uma integral dupla sobre uma região \mathcal{R} do plano como a integral de linha tomada sobre a curva Γ definida pela fronteira da região \mathcal{R} .

Teorema 77 (Teorema de Green) *Sejam v_1 e v_2 campos escalares continuamente diferenciável sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Considere o campo vetorial¹² $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}^1 + v_2\mathbf{e}^2$. Seja Γ uma curva fechada, simples e suave (por partes)¹³ no plano \mathbb{R}^2 e seja \mathcal{R} a região definida pela união dos pontos de Γ com o seu interior. Considere que $\mathcal{R} \subset U$. Então vale a identidade*

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^1} - \frac{\partial v_2}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = \oint_{\Gamma} (v_1 dx^1 + v_2 dx^2) = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (1.31)$$

onde a integral de linha é calculada em Γ no sentido antihorário e \mathbf{n} é o campo vetorial unitário normal à curva Γ .

O segundo teorema que mencionaremos, que é uma extensão do teorema de Green, é o teorema de Stokes.

Teorema 78 (Teorema de Stokes) *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto delimitado por uma curva de Jordan Γ e \mathbf{r} uma parametrização com derivadas*

¹²Lembre-se que $\{\mathbf{e}^i\}$ é a base recíproca da base global $\{\mathbf{e}_i\}$ como introduzida na Seção 1.1.6.

¹³Curvas que são fechadas, simples e suaves (por partes) são também comumente chamadas de *curvas de Jordan*.

de segunda ordem contínuas em $U \cup \Gamma$, tal que $\mathcal{S} = \mathbf{r}(U)$ seja uma superfície regular orientável com contorno $C = \mathbf{r}(\Gamma)$. Considere o campo vetorial $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}^1 + v_2 \mathbf{e}^2 + v_3 \mathbf{e}^3$, tal que suas componentes escalares v_1 , v_2 e v_3 sejam continuamente diferenciáveis em \mathcal{S} . Então vale a identidade

$$\oint_C v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3 = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}, \quad (1.32)$$

onde a integral de linha é calculada sobre C no sentido antihorário e \mathbf{n} é o campo vetorial unitário normal a superfície \mathcal{S} , apontando para o exterior de \mathcal{S} .

Por fim, enunciamos o teorema de Gauss.

Teorema 79 (Teorema de Gauss) *Sejam \mathcal{V} um aberto de \mathbb{R}^3 delimitado por uma superfície fechada orientada \mathcal{S} , e \mathbf{n} o campo vetorial unitário normal, apontando para o exterior de \mathcal{S} . Se \mathbf{v} é um campo vetorial continuamente diferenciável em \mathcal{V} , então vale a igualdade*

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}. \quad (1.33)$$

As demonstrações destes três teoremas podem ser encontradas em [3].

1.3.14 Significado Físico de $\nabla \cdot \mathbf{v}$ e $\nabla \times \mathbf{v}$

Exemplo 80 *Considere uma região delimitada por um tubo cilíndrico, por onde escoar água. Para cada ponto \mathbf{x} dentro do tubo onde a água escoar, podemos imaginar um vetor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ representando a velocidade de uma partícula p naquele ponto. O caminho traçado por esta partícula à medida que ela se move pelo tubo, é representado por uma curva integral do campo vetorial \mathbf{v} . Seja $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, onde ρ é a densidade da água. Então a quantidade de água que atravessa a área A perpendicularmente à direção de escoamento no tubo por um tempo t é dado por*

$$\mathcal{V} = \|\mathbf{v}\| t \rho A.$$

A mesma quantidade de água¹⁴ também atravessa a área A' , cuja normal unitária \mathbf{n} está inclinada por um ângulo θ em relação a \mathbf{v} , de modo que $A = A' \cos \theta$, e portanto,

$$\|\mathbf{v}\| t \rho A = \|\mathbf{v}\| t \rho A' \cos \theta.$$

¹⁴Estamos considerando que o fluido em questão, a água, é incompressível.

Assim, como a água escoo na direção de \mathbf{v} , a massa de água que, por unidade de tempo, atravessa uma unidade de área é (ver Figura 12)

$$\|\mathbf{v}\| \rho \cos \theta = J \cos \theta = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}.$$

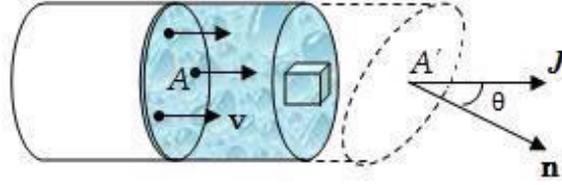


Figura 12: Escoamento de água por um tubo.

Agora considere o elemento de volume $\Delta\mathcal{V} = \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$ na região por onde escoo água, então temos água entrando e saindo em cada uma das faces desse elemento de volume. Assim, as massas de água que passam pelas áreas A^i , $i = 1, \dots, 6$ são

$$\begin{aligned} J_{x^1}^1 \Delta x^2 \Delta x^3 &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^1) \Delta x^2 \Delta x^3, \\ J_{x^1}^2 \Delta x^2 \Delta x^3 &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^1) \Delta x^2 \Delta x^3, \\ J_{x^2}^3 \Delta x^1 \Delta x^3 &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^2) \Delta x^1 \Delta x^3, \\ J_{x^2}^4 \Delta x^1 \Delta x^3 &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^2) \Delta x^1 \Delta x^3, \\ J_{x^3}^5 \Delta x^1 \Delta x^2 &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^3) \Delta x^1 \Delta x^2, \\ J_{x^3}^6 \Delta x^1 \Delta x^2 &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^3) \Delta x^1 \Delta x^2. \end{aligned}$$

A diferença entre $J_{x^1}^1$ e $J_{x^1}^2$ em dois pontos localizados nos lados opostos A^1 e A^2 , diferem por ΔJ_{x^1} ; supondo x^2 e x^3 constantes, podemos aproximar ΔJ_{x^1} por $\Delta J_{x^1} = \left(\frac{\partial J_{x^1}}{\partial x^1} \right) \Delta x^1$, assim temos

$$(J_{x^1}^2 - J_{x^1}^1) \Delta x^2 \Delta x^3 = \left(\frac{\partial J_{x^1}}{\partial x^1} \Delta x^1 \right) \Delta x^2 \Delta x^3,$$

representando o fluxo total de massa de água que deixa esses dois lados.

Similarmente, podemos obter para os outros dois pares de lados:

$$\begin{aligned} (J_{x^2}^4 - J_{x^2}^3) \Delta x^1 \Delta x^3 &= \left(\frac{\partial J_{x^2}}{\partial x^2} \Delta x^2 \right) \Delta x^1 \Delta x^3, \\ (J_{x^3}^6 - J_{x^3}^5) \Delta x^1 \Delta x^2 &= \left(\frac{\partial J_{x^3}}{\partial x^3} dx^3 \right) \Delta x^1 \Delta x^2. \end{aligned}$$

Portanto, a razão total de massa de água que deixa o elemento de volume dV é

$$\left(\frac{\partial J_{x^1}}{\partial x^1} + \frac{\partial J_{x^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial J_{x^3}}{\partial x^3} \right) \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 = (\nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3. \quad (1.34)$$

Se dividirmos a Eq.(1.34) por $\Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$, obtemos a razão total de massa de água por unidade de volume. Este é o significado físico da divergência para o problema analisado, ou seja, é a razão total na qual uma certa substância (no nosso exemplo a água) deixa um certo volume.

Observe que $\nabla \cdot \mathbf{J}$ pode ser diferente de zero se houver diferença na densidade do fluido ou nas entrada e saída do fluido pelo volume, ou seja: Se ψ = densidade da fonte do fluido – a densidade do sorvedouro¹⁵ = quantidade de fluido resultante sendo criado por unidade de tempo por unidade de volume; ρ = densidade do fluido = massa¹⁶ por unidade de volume e $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ = taxa de variação de ρ por unidade de tempo, então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 = (\psi - \nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3,$$

donde segue

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\psi - \nabla \cdot \mathbf{J}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \psi. \quad (1.35)$$

Se $\psi = 0$, então a Eq.(1.35) se reduz à chamada *equação de continuidade*:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.36)$$

que exprime a conservação da massa (ou da carga elétrica no caso do eletromagnetismo).

Se o fluido é incompressível, então ρ = constante e portanto

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \psi. \quad (1.37)$$

¹⁵Designaremos como sorvedouro o lugar onde ocorre a vazão do fluido, este conceito é o oposto da fonte.

¹⁶No caso de campos elétricos podemos ter: carga elétrica por unidade de volume.

No caso do eletromagnetismo, as *fontes* e os *sorvedouros* são respectivamente as cargas *elétricas positivas e negativas* e a equação correspondente a Eq.(1.37) é $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$, onde \mathbf{E} é o campo elétrico e ρ a densidade de carga. No caso do campo magnético $\tilde{\mathbf{B}}$, teríamos como fontes e sorvedouros os pólos magnéticos positivos e negativos, entretanto, como ainda não foram encontrados monopólos magnéticos, segue que $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$.

Exemplo 81 *Suponha que um conjunto de partículas (e.g., um disco de vinil) esteja girando com uma velocidade angular constante $\tilde{\omega}$. Lembremos que $\tilde{\omega}$ é um vetor axial que está na direção do eixo de rotação, cujo sentido fica definido uma vez escolhida uma orientação. O conjunto das velocidades de cada uma das partículas do disco (no limite do contínuo) é caracterizado por um campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ dado por $\mathbf{v} = \tilde{\omega} \times \mathbf{x}$, onde \mathbf{x} é o vetor polar de posição da partícula com respeito a um ponto do eixo de rotação.*

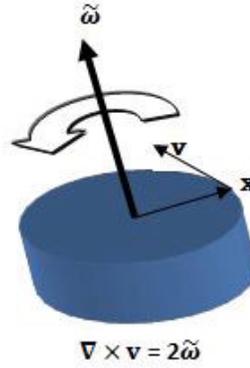


Figura 13: Significado de $\nabla \times \mathbf{v} = 2 \tilde{\omega}$.

Calculando $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\tilde{\omega} \times \mathbf{x})$, usando a Identidade 7 da Seção 1.3.2, obtemos

$$\nabla \times (\tilde{\omega} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \nabla) \tilde{\omega} - \mathbf{x} (\nabla \cdot \tilde{\omega}) - (\tilde{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{x} + \tilde{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{x}).$$

Como $\tilde{\omega}$ é constante então $\mathbf{x} (\nabla \cdot \tilde{\omega}) = (\mathbf{x} \cdot \nabla) \tilde{\omega} = 0$, logo

$$\nabla \times (\tilde{\omega} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{x}) \tilde{\omega} - (\tilde{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{x}. \quad (1.38)$$

Calculando as parcelas separadamente

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \mathbf{x}) \tilde{\omega} &= \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x^3} \right) (\omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3) = 3\tilde{\omega}, \\ (\tilde{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} &= \left(\omega^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \omega^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) (x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3) \\ &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 = \tilde{\omega},\end{aligned}$$

e substituindo-os na Eq.(1.38), obtemos

$$\nabla \times (\tilde{\omega} \times \mathbf{r}) = 3\tilde{\omega} - \tilde{\omega} = 2\tilde{\omega}. \quad (1.39)$$

A Eq.(1.39) mostra o quão explícito é o termo rotacional para o exemplo que acabamos de analisar (vide Figura 12).

Capítulo 2

As Equações de Maxwell

Para a apresentação das equações de Maxwell¹, iremos supor que os eventos físicos ocorrem no espaço-tempo de Minkowski \mathcal{M} . Lembrando das considerações feitas no modelo do espaço-tempo (Seção 1.2.7), dada uma base ortonormal global $\{\mathbf{e}_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ do fibrado tangente $T\mathfrak{E}$ (Definição 30) e uma origem $o \in \mathfrak{E}$, qualquer $x \in \mathfrak{E}$ pode ser escrito no sistema $\{o, \{\mathbf{e}_\mu\}\}$ como

$$x - o := \mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3),$$

onde os $\{x^\mu\}$ são as *coordenadas cartesianas inerciais* no sistema de referência \mathbf{e}_0 . Nessas condições, para cada referencial inercial podemos identificar o conjunto \mathfrak{E} com o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Ademais no que se segue usaremos o sistema de unidades natural onde o valor numérico da constante dita velocidade da luz é $c = 1$. Nestas condições escreveremos doravante:

$$\mathbf{x} = (t, \mathbf{x}).$$

2.1 O Campo Eletromagnético

A teoria do eletromagnetismo de Maxwell, trata da interação entre os campos elétrico e magnético e partículas carregadas eletricamente, portanto, as quantidades fundamentais desta teoria são os campos elétrico e magnético

¹A filosofia da nossa apresentação da teoria eletromagnética é baseada naquela exposta em [10], onde os campos \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$ são considerados elementos fundamentais na descrição da realidade. Desta maneira, evitamos tratar a teoria eletromagnética em meios materiais que não o vácuo, uma vez que tal tratamento envolve conceitos da mecânica quântica, e que portanto, fogem ao escopo deste trabalho.

definidos pelas aplicações vetoriais polares e axiais

$$\begin{aligned}\mathbf{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbf{V}^3, (t, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \\ \tilde{\mathbf{B}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \tilde{\mathbf{V}}^3, (t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}(t, \mathbf{x}).\end{aligned}$$

Neste trabalho, modelaremos uma partícula carregada pelo par (\mathbf{r}, q) , onde $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ descreve a trajetória desta partícula no espaço \mathbb{R}^3 (e onde o parâmetro da curva é o tempo t) e $q \in \mathbb{R}$ é a carga elétrica da partícula. As intensidades dos campos \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$, podem ser medidas usando-se a segunda lei de Newton, uma vez que a força que age na partícula é a *força de Lorentz* dada pela expressão matemática

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}} \right). \quad (2.1)$$

Observe que como dispomos de um aparato matemático que permite uma clara distinção entre vetores polares e axiais, podemos verificar que \mathbf{F} é um vetor polar o que é consistente com as transformações de inversão e reflexão observadas em laboratório.

Levando em conta considerações da relatividade especial, a segunda lei de movimento de Newton nos fornece que a equação de movimento da partícula é dada por

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}} \right), \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2}}$ é o momento relativístico da partícula.

As equações que governam os fenômenos eletromagnéticos são as *equações de Maxwell*, que no sistema de unidades naturais onde² $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ são dadas na forma diferencial por:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \text{ (não existência de monopólos magnéticos)} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ (Lei de Faraday)} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \text{ (Lei de Gauss)} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = -4\pi\mathbf{J}, \text{ (Lei de Ampère)} \quad (2.6)$$

onde ρ é a densidade de carga, e \mathbf{J} é a densidade de corrente elétrica.

²A constante ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo e μ_0 é a constante de permeabilidade magnética do vácuo e se usamos unidades diferentes das unidades naturais tem-se $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.

Este conjunto de equações, do ponto de vista de um matemático, formam um sistema de equações diferenciais essencialmente hiperbólico [9].

A primeira equação listada Eq.(2.3), nos diz que não há monopólos magnéticos isolados, ou equivalentemente, “cargas magnéticas” análogas às cargas elétricas. Ao invés disso, o campo magnético é gerado por cargas elétricas em movimento que geram, no caso mais simples, uma configuração chamada *dipolo magnético*, que muito se comporta como uma carga magnética positiva e uma negativa inseparáveis.

A lei de Faraday, descreve como que a variação de um campo magnético pode induzir um campo elétrico. Este aspecto da indução eletromagnética é o princípio de muitos geradores elétricos: uma barra magnética (ou *ímã*) é posta a girar (por exemplo sob a ação de uma corrente de água) criando uma variação do campo magnético que gera um campo elétrico, induzindo portanto uma corrente elétrica em algum fio nas proximidades dos campos³.

A lei de Gauss, descreve como um campo elétrico é gerado a partir de uma dada distribuição de cargas elétricas. A equação relaciona o fluxo elétrico de uma superfície (hipotética) gaussiana encapsulando uma certa distribuição de cargas elétricas de modo que as linhas de força do campo elétrico saem de uma carga positiva e chegam a uma carga negativa.

Por fim, a lei de Ampère descreve como um campo magnético pode ser criado por uma corrente elétrica e pela variação do campo elétrico. A implicação desta equação é que um campo magnético variante, induz um campo elétrico que por sua vez ao variar induz um campo magnético, o que nos sugere conjecturar sobre a existência de ondas eletromagnéticas auto sustentáveis. De fato, Maxwell, conseguiu mostrar que a luz satisfaz a equação de onda, partindo do princípio de conservação de energia e das Eq.(2.4) e Eq.(2.6), ou seja, a luz é uma onda eletromagnética.

A partir das equações de Maxwell, podemos chegar na equação de continuidade para a densidade de carga e corrente e nas equações de onda para \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$, desde que satisfeitas as condições da Proposição 64, ou seja, estamos supondo que os campos \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$ estejam limitados a uma região aberta e convexa $U \subset \mathbb{R}^3$ e que valiam as igualdades da Eq.(1.17). De fato, considere a Eq.(2.6) acima, se calcularmos o divergente em ambos lados, obteremos

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) = \nabla \cdot 4\pi \mathbf{J},$$

como $\nabla \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) = 0$, e usando a Eq.(2.5) na expressão acima, segue

³Mais sobre esta lei no próximo capítulo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} &= 4\pi \nabla \cdot \mathbf{J} \\ \frac{\partial 4\pi\rho}{\partial t} &= 4\pi \nabla \cdot \mathbf{J},\end{aligned}$$

e portanto, $\frac{\partial\rho}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, que é a equação de continuidade, anteriormente deduzida. (Veja a Eq.(1.36).

Supondo ainda que a densidade de carga $\rho = 0$ e a densidade de corrente $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, calculemos o rotacional das Eq.(2.4) e Eq.(2.6), então

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}) - \nabla^2 \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t^2} - \nabla^2 \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

que são as equações de onda homogêneas. Mais adiante veremos que também podemos obter equações de onda sem as hipóteses $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ mas nesse caso, obteremos equações de onda não homogêneas.

2.2 Potenciais de Calibre⁴

Ainda nas hipóteses feitas acima, ou seja que estamos lidando com regiões abertas e convexas do espaço, suponhamos que o campo pseudovetorial $\tilde{\mathbf{B}}$,

⁴Do inglês *Gauge Potentials*.

possa ser escrito como o rotacional de um campo vetorial \mathbf{A} , isto é

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.7)$$

então nessas condições a Eq.(2.3) fica automaticamente satisfeita, pois

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Agora se usarmos a Eq.(2.7) na Eq.(2.4), obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Se usarmos a mesma ideia e supormos que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) = -\nabla \phi,$$

onde ϕ é um campo escalar, então a Eq.(2.4) é resolvida, pois

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) = -\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}.$$

Observe que esta formulação, onde considerou-se que

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

é, na verdade, a aplicação do teorema de Helmholtz (Teorema 67). Os dois novos campos \mathbf{A} e ϕ , são chamados *potenciais de calibre*.

Usando o resultado da Eq.(2.8) nas outras duas equações de Maxwell, Eq.(2.5) e Eq.(2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 4\pi\rho \\ -\nabla^2 \phi - \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= 4\pi\mathbf{J} \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla^2 \mathbf{A} &= 4\pi\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reordenando os termos das Eq.(2.9) e Eq.(2.10), e introduzindo na primeira delas, o termo $-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ em ambos lados da igualdade, tem-se

$$\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right), \quad (2.11)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 4\pi\mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right). \quad (2.12)$$

Estas duas equações, são as equações de onda em termos dos potenciais de calibre ϕ e \mathbf{A} .

Veremos a seguir, que os campos \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$ são invariantes com respeito a um certo tipo de transformação, para isso, suponha que tivéssemos o conhecimento de uma solução particular das equações de Maxwell, representadas em termos dos potenciais de calibre

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_0 = -\nabla\phi_0 - \frac{\partial\mathbf{A}_0}{\partial t},$$

e considere uma aplicação escalar $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto \chi(t, \mathbf{x})$. Então

$$\phi_\chi = \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_\chi = \mathbf{A}_0 + \nabla\chi$$

são soluções das Eq.(2.11) e Eq.(2.12), pois

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{A}_\chi = \nabla \times \mathbf{A}_0 + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A}_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi_\chi - \frac{\partial\mathbf{A}_\chi}{\partial t} \\ &= -\nabla \left(\phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_0 + \nabla\chi) \\ &= -\nabla\phi_0 + \frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{A}_0}{\partial t} - \frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} \\ &= -\nabla\phi_0 - \frac{\partial\mathbf{A}_0}{\partial t} = \mathbf{E}_0. \end{aligned}$$

Isto mostra que os campos \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$ são invariantes com respeito as transformações

$$\phi_\chi \mapsto \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_\chi \mapsto \mathbf{A}_0 + \nabla\chi. \quad (2.13)$$

Tais transformações, representadas na Eq.(2.13), são chamadas *transformações de calibre*, e portanto as soluções para \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$ dadas pelo par

$$(\phi_\chi, \mathbf{A}_\chi) = \left(\phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \mathbf{A}_0 + \nabla\chi \right) \quad (2.14)$$

são equivalentes àquela dada pelo par (ϕ_0, \mathbf{A}_0) .

A consequência desse resultado, nos diz que o campo eletromagnético é descrito por uma família de potenciais de calibres, onde membros da família diferem apenas por uma transformação de calibre.

Suponha que o par (ϕ_0, \mathbf{A}_0) seja uma solução particular, podemos escolher χ , tal que (ϕ, \mathbf{A}) satisfaça a equação

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \quad (2.15)$$

De fato, substituindo $\phi = \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\chi$ na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A}_0 + \nabla\chi) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) &= 0 \\ \nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} &= - \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{\partial\phi_0}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como (ϕ_0, \mathbf{A}_0) é uma solução particular, podemos resolver a Eq.(2.16), obtendo χ .

A condição mencionada na Eq.(2.15) é chamada de *condição de calibre de Lorenz*⁶ [21]; e trabalhando nessas condições, as Eq.(2.11) e Eq.(2.12) se reduzem a

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -4\pi\rho, \quad (2.17)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -4\pi\mathbf{J}. \quad (2.18)$$

Para finalizar este capítulo, convém fazermos duas observações. A primeira é que neste trabalho, utilizamos o operador ∇ aplicado à funções vetoriais e escalares, de modo que a hipótese básica aqui envolvida era que todas essas funções fossem pelo menos de classe \mathcal{C}^2 . Entretanto este requisito não é o mais geral, e comumente é possível resolver as equações de Maxwell supondo

⁶Veja o artigo "*Lorenz gauge condition*" em http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_gauge_condition.

que a carga elétrica seja uma distribuição e que a densidade de corrente elétrica, e os campos elétrico e magnético sejam distribuições com valores escalares e vetoriais. Uma boa referência sobre a teoria de distribuições pode ser encontrada em [39]. A segunda observação é que os campos \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$ carregam energia e momento e existe uma lei de conservação da energia total e do sistema de partículas carregadas que criam estes campos e neles se movimentam. Como tal resultado [15] não será necessário para o desenvolvimento do Capítulo 3, eles não serão discutidos aqui.

Capítulo 3

Formulações da Lei de Faraday

Neste capítulo¹, é dada uma prova da equivalência entre diferentes formulações da lei de Faraday, as formas integrais e a diferencial. Nosso objetivo é esclarecer alguns pontos relevantes da prova dessa equivalência como normalmente apresentada nos livros textos de Física apenas para casos muito particulares. Aqui apresentamos a derivação da dita equivalência para uma situação geral, como será explicado a seguir.

Seja Γ_t uma curva suave fechada em \mathbb{R}^3 com parametrização $\mathbf{x}(t, \ell)$, que aqui representa o filamento de um circuito fechado, movendo-se numa região $U \subset \mathbb{R}^3$ aberta e convexa, onde num tempo t , medido num referencial inercial como introduzido na Seção 1.2.7, existem os campos elétrico e magnéticos $\mathbf{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\mathbf{B}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto \tilde{\mathbf{B}}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$. Supomos então que ao se mover o circuito pode eventualmente se deformar. Esta é a hipótese de generalidade a que nos referimos acima. Denotaremos por Γ uma curva suave fechada em \mathbb{R}^3 , cuja parametrização é $\mathbf{x}(\ell)$ e que representa o circuito no instante $t = 0$. Então, a curva Γ_t é dada por $\Gamma_t = \sigma_t(\Gamma)$, onde σ_t é o escoamento do campo vetorial de velocidades diferenciável $\mathbf{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ (vide Seção 1.3.10) que descreve o movimento (e deformação) do circuito fechado (ver Figura 14).

¹Este capítulo é baseado no artigo [33].

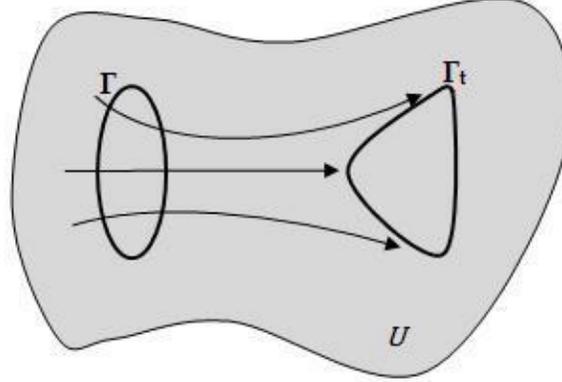


Figura 14: Deformação de um circuito filamentário Γ , por σ_t .

A formulação original da lei de Faraday (ou lei de indução de Faraday) que foi inicialmente inferida por James Clerk Maxwell [23] na forma integral a partir dos resultados das experiências conduzidas por Michael Faraday, nos diz que sobre um circuito filamentário fechado age uma força eletromotriz, \mathcal{E} tal que

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{S}_t é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 tal que Γ_t delimita a sua fronteira e \mathbf{n} é o campo vetorial unitário normal a \mathcal{S}_t . Identificaremos $\Gamma_t = \partial\mathcal{S}_t$ com $\Gamma = \partial\mathcal{S}$. Assim, em cada elemento de Γ_t a força que age sobre uma unidade de carga elétrica que se move com velocidade $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t, \ell))$ é dada pela lei de Lorentz. Por definição temos que \mathcal{E} é dado por:

$$\mathcal{E} = \int_{\Gamma_t} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.2)$$

onde $d\mathbf{l} := \frac{\partial \mathbf{x}(t, \ell)}{\partial \ell} d\ell$, é o campo vetorial tangente à Γ_t . Assim, a lei de Faraday fica:

$$\int_{\Gamma_t} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (3.3)$$

Queremos provar que a Eq.(3.3) é equivalente à

$$\int_{\Gamma_t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathcal{S}_t} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (3.4)$$

o que, se for o caso, implica trivialmente a forma diferencial da lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0. \quad (3.5)$$

3.1 Algumas Identidades Necessárias

Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ uma região aberta e convexa, $\mathbf{X} : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ um campo vetorial diferenciável arbitrário e $\mathbf{v} : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de velocidades. Recordamos da Seção 1.3.10, que uma trajetória de \mathbf{v} passando por um dado ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ é uma curva suave $\sigma_{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \sigma_{\mathbf{x}}(t) = \sigma(t, \mathbf{x})$ tal que para $t = 0$ uma ‘partícula’ do campo de velocidades esteja em \mathbf{x} (i.e., $\sigma_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$) e tal que o vetor tangente em um ponto $\sigma(t, \mathbf{x})$ seja

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \sigma(t, \mathbf{x})). \quad (3.6)$$

Identificamos $\sigma_t : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma_t(\mathbf{x}) = \sigma(t, \mathbf{x})$, onde σ_t é a aplicação do escoamento de fluido. Considere $J = [0, 1] \in \mathbb{R}$ e Γ uma curva suave fechada parametrizada por $\mathbf{\Gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \ell \mapsto \mathbf{\Gamma}(\ell) := \mathbf{x}(\ell)$, onde denotamos $\Gamma_t = \sigma_t(\Gamma)$ o transporte da curva pelo escoamento. Então

$$\sigma(t, \mathbf{x}(\ell)) := \mathbf{x}(t, \ell) \quad (3.7)$$

é claramente uma parametrização de Γ_t . Enunciamos a seguinte proposição, que será útil para a prova de resultados que necessitaremos mais adiante:

Proposição 82

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma_t} \frac{D}{Dt} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot [(d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v}], \quad (3.8a)$$

$$= \int_{\Gamma_t} \frac{D}{Dt} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_t} [\mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_t} [(\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l} \quad (3.8b)$$

$$= \int_{\Gamma_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\Gamma_t} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X})] \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.8c)$$

onde

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{X} := \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{X} \quad (3.9)$$

é chamada derivada material² [8] e $d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial \ell} \sigma(t, \mathbf{x}(\ell)) d\ell = \frac{\partial \mathbf{x}(t, \ell)}{\partial \ell} d\ell$ é o elemento diferencial de linha tangente³ a Γ_t em $\sigma(t, \mathbf{x}(\ell))$.

²Vide Seção 1.3.12.

³Observe que $d\mathbf{l}$ não é uma função explícita das coordenadas cartesianas inerciais (x^1, x^2, x^3) .

Prova. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell))) \cdot \frac{\partial}{\partial \ell} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)) d\ell \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} [\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)))] \cdot \frac{\partial}{\partial \ell} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)) d\ell \\
&\quad + \int_0^1 \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell))) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \ell} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)) d\ell. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Agora, levando em conta que para cada $\mathbf{x}(\ell)$, $\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)))$, temos

$$\frac{D}{Dt} [\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)))] = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell))) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell))), \quad (3.11)$$

de modo que o primeiro termo do lado direito da Eq.(3.10) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{d}{dt} [\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)))] \cdot \frac{\partial}{\partial \ell} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)) d\ell &= \int_{\Gamma_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{X} \right] \cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_{\Gamma_t} \frac{D}{Dt} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Escrevendo $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)) = (x^1(t, \ell), x^2(t, \ell), x^3(t, \ell))$ podemos ver que o último termo da Eq.(3.10) torna-se:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell))) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \ell} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell)) d\ell \\
&= \int_0^1 \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell))) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \ell} \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}(\ell))) d\ell \right] \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot [(d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v}]. \quad (3.14)$$

Lembremos da Identidade 8 da Seção 1.3.2,

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}). \quad (3.15)$$

Para $\mathbf{a} = d\mathbf{l}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ e observando que $(\mathbf{v} \cdot \nabla)d\mathbf{l} = \mathbf{v} \times (\nabla \times d\mathbf{l}) = \mathbf{0}$, então obtemos

$$(d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -d\mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla(d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.16)$$

Da identidade

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \quad (3.17)$$

para $\mathbf{a} = \mathbf{X}$, $\mathbf{b} = d\mathbf{l}$ e $\mathbf{c} = (\nabla \times \mathbf{v})$, segue que

$$\begin{aligned} -\mathbf{X} \cdot [d\mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{v})] &= -d\mathbf{l} \cdot [(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{X}], \\ &= d\mathbf{l} \cdot [\mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{v})]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Finalmente usando a seguinte identidade⁴

$$\mathbf{X} \cdot [\nabla(d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v})] = [(\mathbf{X} \cdot \nabla)\mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.19)$$

em conjunto com as Eq.(3.16) e Eq.(3.18), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot [(d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{v}] &= - \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot [d\mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{v})] + \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot [\nabla(d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v})] \\ &= \int_{\Gamma_t} [\mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_t} [(\mathbf{X} \cdot \nabla)\mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando os resultados da Eq.(3.12) e da Eq.(3.20), ficam provadas as identidades da Eq.(3.8a) e da Eq.(3.8b).

Por fim, partindo da Eq.(3.8b) usando o resultado da Eq.(3.15) para $\mathbf{a} = \mathbf{X}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ e notando que $\int_{\Gamma_t} [\nabla(\mathbf{X} \cdot \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\Gamma_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma} [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{X}] \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_t} [\mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma} [(\mathbf{X} \cdot \nabla)\mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\Gamma_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\Gamma_t} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X})] \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

e, portanto, o resultado da Eq.(3.8c) segue imediatamente. ■

Observação 83 Antes de prosseguirmos, lembremos que se $\mathbf{X} = \mathbf{v}$, então a igualdade

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma_t} \frac{D}{Dt} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.21)$$

é conhecida na mecânica dos fluidos como teorema de circulação de Kelvin (veja e.g., [8, 36]).

⁴A prova desta identidade se encontra no Apêndice A deste trabalho.

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} (\nabla \times \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (3.22)$$

onde, se denotarmos \mathcal{S} uma superfície regular tal que $\partial\mathcal{S} = \Gamma$, então $\mathcal{S}_t = \sigma_t(\mathcal{S})$ e \mathbf{n} é o campo de vetores unitários normais a \mathcal{S}_t . Usando a Eq.(3.8c), podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} (\nabla \times \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} \, da &= \int_{\Gamma_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\Gamma_t} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X})] \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\mathcal{S}_t} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\mathcal{S}_t} \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X})] \cdot \mathbf{n} \, da, \end{aligned} \quad (3.23)$$

e denotando $\mathbf{Y} := \nabla \times \mathbf{X}$ segue que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{S}_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Y} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Y}) \right] \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (3.24)$$

A Eq.(3.24) é um caso particular de uma identidade mais geral. Para um campo vetorial diferenciável $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{Z} \neq 0$ temos a seguinte igualdade

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{S}_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Z}) \right] \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (3.25)$$

chamada de *Identidade de Helmholtz* [13]. Note que a identidade também é mencionada em [14]. A prova desta identidade pode ser obtida usando-se argumentos similares aos usados na prova da Eq.(3.8a). Alguns livros citando a identidade de Helmholtz são [1, 15, 27, 37, 40]. Entretanto, enfatizamos que as provas para a lei de Faraday descritas nos livros textos de Física em geral são, na sua maioria, apresentadas para casos muito particulares e em geral também sem rigor e, portanto, não podem ser consideradas satisfatórias do ponto de vista matemático.

Usaremos agora os resultados apresentados acima para provar a equivalência entre Eq.(3.3) e Eq.(3.4).

3.2 Prova das Eq.(3.3) e Eq.(3.4)

Começamos lembrando (como vimos no capítulo anterior) que na teoria de Maxwell os campos \mathbf{E} e $\tilde{\mathbf{B}}$ podem ser expressos em termos dos potenciais,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \nabla \times \mathbf{A},\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é o potencial escalar e $\mathbf{A} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é o potencial vetorial (magnético). Se a Eq.(3.26) é levada em conta, então podemos obter imediatamente a Eq.(3.3). Tudo o que é necessário para tanto, são os resultados obtidos na Seção 3.1, usando-se $\mathbf{X} = \mathbf{A}$. De fato, a primeira linha da Eq.(3.23) fica

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Gamma_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\Gamma_t} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot d\mathbf{l},$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} \, da &= \int_{\Gamma_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\Gamma_t} (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + \nabla\phi - \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}} \right) \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_{\Gamma_t} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{l}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Para se obter a Eq.(3.4) aplicamos o teorema de Stokes no segundo termo do lado direito da Eq.(3.24) donde segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} \, da &= \int_{\mathcal{S}_t} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\mathcal{S}_t} \nabla \times [\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}] \cdot \mathbf{n} \, da \\ &= \int_{\mathcal{S}_t} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\Gamma_t} (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{l}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Comparando os segundos membros da Eq.(3.27) e da Eq.(3.28) obtém-se a Eq.(3.4), i.e.,

$$\int_{\Gamma_t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathcal{S}_t} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da,\tag{3.29}$$

donde segue imediatamente a forma diferencial da lei de Faraday⁵.

⁵No mundo físico, circuitos reais não são obviamente filamentos e nem sempre descritos por curvas fechadas suaves. Entretanto, se as curvas do circuito formarem um número

finito de curvas suaves, ainda podemos aplicar as fórmulas deduzidas com as integrais representado integrais de Lebesgue [39]. Alguns exemplos práticos da aplicabilidade da lei de Faraday, podem ser encontrados em [38].

Conclusão

Recentemente um artigo [31] chamado ‘Faraday’s Law via the Magnetic Vector Potential’, foi comentado em [18] e posteriormente respondido em [32]. O autor de [31], afirma ter apresentado uma “alternativa” para a derivação da lei de Faraday para um circuito filamentosário que se move com velocidade arbitrária e que se deforma, usando diretamente o potencial vetorial \mathbf{A} ao invés da derivação onde se utilizam diretamente os campos magnéticos $\tilde{\mathbf{B}}$ e elétrico \mathbf{E} (que são comumente apresentados nos textos).

Agora, em [18] foi identificado corretamente que a derivação em [31] estava errada, afirmação com que o autor de [31] concorda em [32]. Neste trabalho, queremos chamar atenção ao fato de que a apresentação da lei de Faraday em termos do potencial vetorial magnético \mathbf{A} já foi abordada no tratado de Maxwell [23], mas com fórmulas “gigantescas” uma vez que todo o cálculo é expresso em termos das componentes dos campos vetoriais envolvidos. Chamamos atenção também para o fato de que uma formulação da lei de Faraday em termos de \mathbf{A} usando cálculo vetorial moderno foi apresentado por Gamo há mais de 30 anos atrás [12]. No artigo de Gamo (não citado em [18, 31, 32]) a Eq.(3.8c) é apresentada para o caso especial para o qual $\mathbf{X} = \mathbf{A}$ (o potencial vetorial) e $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{A}$ (é o campo magnético), i.e.,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\Gamma_t} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.30)$$

A Eq.(3.30) também aparece em [31] (citado na Eq.(9)). Entretanto, na nota de rodapé 3 de [31] é dito que a Eq.(3.30) é equivalente a

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma_t} \frac{D}{Dt} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right\},$$

mas visto a equação correta (Eq.(3.30)) (equivalente a Eq.(3.8a)), constatamos que de fato ali o termo $\int_{\Gamma} [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l}$ está faltando. Esse é o erro que foi observado pelos autores em [18], que também apresentaram uma prova da Eq.(3.8b), mas que no entanto também não é muito satisfatória do ponto

de vista matemático, esta sendo, portanto, uma das razões que nos levaram a preparar este trabalho onde acreditamos ter apresentado uma derivação matematicamente satisfatória da lei de Faraday em termos de \mathbf{A} .

Uma outra razão que nos estimulou foi o fato de termos lido em um livro recente ([29]) que há pessoas que ainda não entenderam que a Eq.(3.3) e a Eq.(3.4) são equivalentes e pensam que a Eq.(3.3) acaba por implicar em uma eletrodinâmica com equações alternativas às de Maxwell, as equações alternativas sendo aquelas fornecidas por Hertz. Entretanto é fato bem conhecido que o sistema de Hertz é equivocado levando a contradições com a experiência [24].

Finalmente observamos que a prova de Jackson [15] da equivalência entre as formas diferencial e integral da lei de Faraday faz uso de ‘invariância Galileana’ e circuitos filamentosos que não se deformam. Portanto a prova é válida apenas para aqueles circuitos filamentosos que se movem com velocidade constante (e pequena em comparação com a velocidade da luz). A prova que apresentamos é geral e válida de acordo com os critérios da relatividade especial⁶, uma vez que é baseada em identidades matemáticas sólidas e na aplicação correta da força de Lorentz em um particular sistema de referência inercial onde o movimento e deformação do circuito filamento encontram-se rigorosamente representados.

⁶A dedução apresentada é válida para quaisquer referenciais inerciais, tais que suas coordenadas inerciais cartesianas estejam relacionadas pela transformações de Lorentz (veja Apêndice B).

Apêndice A

Prova da Identidade Eq.(3.19)

Sabemos da Eq.(3.16) que

$$\nabla(d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}) = (d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{v} + d\mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (\text{A.1})$$

Seja $\{e^1, e^2, e^3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Podemos escrever, usando a convenção de Einstein,

$$(\nabla \times \mathbf{v}) = e^i \partial_i \times \mathbf{v} = e^i \times \partial_i \mathbf{v}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) = e^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + e^3 \frac{\partial}{\partial x^3} = e^i \partial_i$, com $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\{x^i\}$, $i = 1, 2, 3$ são as coordenadas (inerciais) cartesianas. Segue então que

$$d\mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = d\mathbf{l} \times (e^i \times \partial_i \mathbf{v}). \quad (\text{A.3})$$

Usando a conhecida identidade $\mathbf{a} \times \tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\tilde{\mathbf{B}} - (\mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{B}})\mathbf{c}$ na Eq.(A.3), obtemos

$$d\mathbf{l} \times (e^i \times \partial_i \mathbf{v}) = (d\mathbf{l} \cdot \partial_i \mathbf{v})e^i - (d\mathbf{l} \cdot e^i)\partial_i \mathbf{v}. \quad (\text{A.4})$$

Por outro lado, considerando $d\mathbf{l} = (dl_1, dl_2, dl_3) = dl_i e^i = dl^i \mathbf{e}_i$, temos

$$(d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (dl^i \partial_i)\mathbf{v} = (d\mathbf{l} \cdot e^i)\partial_i \mathbf{v}. \quad (\text{A.5})$$

Então, substituindo-se a Eq.(A.4) e a Eq.(A.5) na Eq.(A.1), podemos reescrevê-la como

$$\nabla(d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}) = (d\mathbf{l} \cdot e^i)\partial_i \mathbf{v} + (d\mathbf{l} \cdot \partial_i \mathbf{v})e^i - (d\mathbf{l} \cdot e^i)\partial_i \mathbf{v} \quad (\text{A.6})$$

$$= (d\mathbf{l} \cdot \partial_i \mathbf{v})e^i. \quad (\text{A.7})$$

Deste último resultado é fácil ver que

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \cdot [\nabla (d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v})] &= \mathbf{X} \cdot [(d\mathbf{l} \cdot \partial_i \mathbf{v}) e^i] = X^i (d\mathbf{l} \cdot \partial_i) \mathbf{v} = d\mathbf{l} \cdot (X^i \partial_i) \mathbf{v} \\ &= d\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = [(\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l},\end{aligned}$$

onde $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3) = X^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$.

Apêndice B

Transformações de Lorentz

O princípio da relatividade de Einstein nos diz que as equações que descrevem os fenômenos físicos, possuem a mesma forma funcional quando expressas nas coordenadas cartesianas inerciais associadas a qualquer sistema de referência inercial. Assim, como apresentado na Seção 1.7, sejam \mathbf{e}_0 e \mathbf{e}'_0 dois campos vetoriais tipo tempo globais que representam dois sistemas de referência inerciais, cuja velocidade escalar relativa é v . Escolha $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_i, i = 1, 2, 3$ tais que $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (com $\mathbf{e}_\mu \bullet \mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}'_\mu \bullet \mathbf{e}'_\nu = \eta_{\mu\nu}$), sejam bases ortonormais (globais) do fibrado tangente $T\mathfrak{E}$. Fixada uma origem arbitrária $o \in \mathfrak{E}$, as coordenadas inerciais $\{x^\mu\}$ e $\{x'^\mu\}$ de um evento $x \in \mathfrak{E}$ são dadas por

$$x - o = \mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x'^\mu \mathbf{e}'_\mu. \quad (\text{B.1})$$

No caso da teoria do eletromagnetismo, o princípio da relatividade, afirma que as expressões das equações de Maxwell, em relação aos sistemas referências acima considerados são idênticas às enunciadas pelas Eq.(2.3), Eq.(2.4), Eq.(2.5) e Eq.(2.6), onde os campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{E}'(t', \mathbf{x}')$, $\tilde{\mathbf{B}}(t, \mathbf{x}) \mapsto \tilde{\mathbf{B}}'(t', \mathbf{x}')$, a força de Lorentz $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{F}'(t', \mathbf{x}')$, a densidade de carga $\rho(t, \mathbf{x}) \mapsto \rho'(t', \mathbf{x}')$ e a corrente elétrica $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{J}'(t', \mathbf{x}')$.

Para simplicidade de apresentação, suponhamos que o sistema de referência ocorre na direção de \mathbf{e}_1 , isto é,

$$\mathbf{e}'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{e}_0 + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{e}_1. \quad (\text{B.2})$$

Queremos deduzir a relação entre $\{x^\mu\}$ e $\{x'^\mu\}$. Da Eq.(B.2), verifica-se que

$$\mathbf{e}'_0 \bullet \mathbf{e}'_0 = -1,$$

como deveria ser. Além disso, precisamos ter que $\mathbf{e}'_\mu \bullet \mathbf{e}'_\nu = 0$, se $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $\mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{e}'_i = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Note que estes vínculos são satisfeitos se

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\mathbf{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\mathbf{e}_1, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3, \quad (\text{B.5})$$

pois

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 \bullet \mathbf{e}'_1 &= \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \mathbf{e}_0 \bullet \mathbf{e}_0 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1, \\ &= \frac{v^2}{1-v^2}(-1) + \frac{1}{1-v^2}(1) = 1, \\ \mathbf{e}'_0 \bullet \mathbf{e}'_1 &= \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\mathbf{e}_0 + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\mathbf{e}_1 \right] \bullet \left[\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\mathbf{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\mathbf{e}_1 \right], \\ &= \frac{v}{1-v^2}\mathbf{e}_0 \bullet \mathbf{e}_0 + \frac{v}{1-v^2}\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1, \\ &= \frac{v}{1-v^2}(-1) + \frac{v}{1-v^2}(1) = 0. \end{aligned}$$

O restante dos cálculos sendo trivial.

Usando os resultados das Eq.(B.2), Eq.(B.3), Eq.(B.4) e Eq.(B.5) e usando na Eq.(B.1), obtém-se, após alguns cálculos simples, que

$$x'^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x^0 - vx^1), \quad (\text{B.6})$$

$$x'^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(vx^0 + x^1), \quad (\text{B.7})$$

$$x'^2 = x^2, \quad (\text{B.8})$$

$$x'^3 = x^3. \quad (\text{B.9})$$

O conjunto das Eq.(B.6) \rightarrow Eq.(B.9), definem as famosas transformações de Lorentz (especiais) que relacionam as coordenadas inerciais de um dado evento $x \in \mathfrak{E}$, em dois sistemas de referência inerciais \mathbf{e}_0 e \mathbf{e}'_0 , com relação a $\{o, \mathbf{e}_\mu\}$ e $\{o, \mathbf{e}'_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Tais transformações formam [7, 34] um subgrupo do $SO(3, 1, \mathbb{R})$ e que por sua vez é um subgrupo de $O(3, 1, \mathbb{R})$ das pseudorotações do espaço vetorial de Minkowski (\mathbf{V}^4, \bullet) .

Nessas condições, podemos escrever as seguintes relações entre as componentes dos campos \mathbf{E} , $\tilde{\mathbf{B}}$, ρ e \mathbf{J} nos sistemas $\{o, \mathbf{e}_\mu\}$ e $\{o, \mathbf{e}'_\mu\}$, com

$\mu = 0, 1, 2, 3.$ [15]

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho' + vJ'_1}{\sqrt{1-v^2}}, & J_1 &= \frac{J'_1 + v\rho'}{\sqrt{1-v^2}}, & J_2 &= J'_2, & J_3 &= J'_3, \\ E_1 &= E'_1, & E_2 &= \frac{E'_2 + vB'_3}{\sqrt{1-v^2}}, & E_3 &= \frac{E'_3 - vB'_2}{\sqrt{1-v^2}}, \\ B_1 &= B'_1, & B_2 &= \frac{B'_2 - vE_3}{\sqrt{1-v^2}}, & B_3 &= \frac{B'_3 + vE'_2}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Abraham, M. and Becker, R., *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*, Blackie, London, 1932.
- [2] Anton, H. e Rorres, C., *Álgebra Linear com Aplicações* (8ª edição), Editora Bookman, Porto Alegre, 2001.
- [3] Apostol, T. M., *Calculus*, **vol. 2** (2nd edition), John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [4] Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists* (2nd edition), Academic Press Inc., New York, 1970.
- [5] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L. e Wetsler, H. G., *Álgebra Linear* (3ª edição), Editora Harbra Ltda, São Paulo, 1986.
- [6] Bossavit, A., On the Geometry of Electromagnetism, *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. & Mech.* **6**, 17-28 (1998).
- [7] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M., *Analysis, Manifolds and Physics* (revised edition), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.
- [8] Chorin, A. J. and Marsden, J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* (3rd edition), Springer-Verlag, New York, 1993.
- [9] Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, **vol. 2**, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [10] Feynman, R. P., Leighton, R. B. and Sands, M., *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, MA, 1965.
- [11] Frankel, *The Geometry of Physics* (2nd edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- [12] Gamo, S. A., General Formulation of Faraday's Law of Induction, *Proc. IEEE* **67**, 676-677 (1979).
- [13] Helmholtz, H., *Gesammelt Schriften* vol. I (3), pp. 597-603, Olms-Weidmann, Hildesheim 2003, (a reprint of *Wissenschaftliche Abhandlungen* vol. **3**, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1895).
- [14] Hertz, H. R., *Electric Waves*, MacMillan, London, pp. 243-247, 1893 (also, Dover, New York, 1962).
- [15] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (3rd edition), J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [16] Jancewicz, B., *Extended Grassmann Algebra*, em Baylis, W. E. (ed.), Clifford (Geometric) Algebras, Birkhäuser, Boston, Basel e Berlin, 1996.
- [17] Kaye, R. and Wilson, R., *Linear Algebra*, Oxford University Press, Inc., New York, 1998.
- [18] Kholmetskii, A. K., Missevitch, O., and Yarman, T., Comment on the Note: 'Faraday's Law via the Magnetic Vector Potential' by Dragan V. Redžić, *Eur. J. Phys.* **29**, L1-L4 (2008).
- [19] Lima, E. L., *Álgebra Linear* (7^a edição), IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [20] Lloyd, M. and Weaver, J. H., *The Story of Mathematics*, Plenum Press, N. York, 1993.
- [21] Lorenz, L., On the Identity of the Vibrations of Light with Electrical Currents, *Philos. Mag.* **34**, 287-301 (1867).
- [22] Loomis, L. N. and Stenberg, S., *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, MA, 1968.
- [23] Maxwell, J. C., *A Treatise of Electricity and Magnetism*, **vol. 2**, Dover, New York, 1954. (Republicação da versão original publicada pela Clarendon Press, 1891).
- [24] Miller, A. I., *Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, pp. 16, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, MA., 1981.
- [25] Miller, W., *Symmetry Groups and their Applications*, Academic Press, Inc., New York, 1972.

- [26] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Inst. Physics Publ., Bristol and Philadelphia, 1990.
- [27] Panofski, W. K. H. and Phillips, M., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, MA, 1962.
- [28] Porteous, I. R., *Topological Geometry* (2nd edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [29] Phipps, T. E. Jr., *Old Physics for New - A Worldview Alternative to Einstein's Relativity Theory*, Apeiron, Montreal, 2006.
- [30] Protter, M. H. and Morrey, C. B., Jr., *Modern Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, MA, 1964.
- [31] Redžić, D. V., Faraday's Law via the Magnetic Vector Potential, *Eur. J. Phys.*, **28**, N7-N10, (2007).
- [32] Redžić, D. V., Reply to 'Comment on 'Faraday's Law via the Magnetic Vector Potential'', *Eur. J. Phys.*, **29**, L5, (2008).
- [33] Rodrigues, F. G., *On Equivalent Expressions for the Faraday's Law of Induction*, RP01/10 IMECC-UNICAMP (2010).
[arXiv:1002.2792]
- [34] Rodrigues, W. A. Jr. and Capelas de Oliveira, E., *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. A Clifford Bundle Approach*, Lecture Notes in Physics **722**, Springer, Heidelberg, 2007.
- [35] Sachs, R. K., and Wu, H., *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [36] Saffman, P. G., *Vortex Dynamics*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [37] Sommerfeld, A., *Electrodynamics*, pp. 285-287, Academic Press, New York, 1952.
- [38] Shadowitz, A., *The Electromagnetic Field*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- [39] Vladimirov, V., S., *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

- [40] Whites, K. W., Paul, C. R., and Nasar, A. A., *Introduction to Electromagnetic Fields* (3rd edition), pp. 653-658 , McGraw-Hill, Boston, 1998.