

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

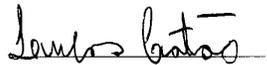
Julio Cesar Valencia Guevara

Uma abordagem via transformada de Fourier
para as equações de Navier-Stokes:
boa-colocação e comportamento assintótico

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para obtenção do Título de **MESTRE** em **Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Julio Cesar Valencia Guevara, e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira.



Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
Orientador

Campinas, 2012

Apoio financeiro: Capes e CNPq

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Valencia Guevara, Julio Cesar, 1985-
V234a Uma abordagem via transformada de Fourier para as equações
de Navier-Stokes : boa-colocação e comportamento assintótico /
Julio Cesar Valencia Guevara. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Fourier, Transformações
de. 3. Banach, Espaços de. 4. Equações diferenciais parciais
não-lineares. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: An approach via Fourier transform for the Navier-Stokes
equations : well-posedness and asymptotic behavior

Palavras-chave em inglês:

Navier-Stokes equations
Fourier transformations
Banach spaces
Partial differential equations, Nonlinear

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]
Marcelo Fernandes Furtado
Ademir Pastor Ferreira

Data de defesa: 29-02-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de fevereiro de 2012 e aprovada

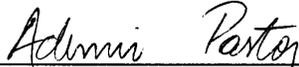
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA



Prof. (a). Dr (a). MARCELO FERNANDES FURTADO



Prof. (a). Dr (a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

Agradecimentos

Sou grato a Deus pela vida que me deu e assim permitir a conclusão da presente dissertação. Agradeço também ao meu orientador, o professor Lucas Catão, pela grande confiança depositada em mim, pelas inúmeras sugestões que muito me ajudaram, pelos bons conselhos e principalmente pela grande ajuda na redação, corrigindo, naturalmente por não ser português-falante, erros que dificultariam o bom entendimento do texto.

Agradeço a minha esposa Daphne, pelo tempo dedicado para me ajudar com a correção do texto e pelos momentos de alegria, pelo apoio moral e pelo companheirismo, ao meu filho Fabian por me alegrar cada dia da minha vida e ser a força que me faz lutar, a minha mãe Justina, os meus irmãos Rodrigo, Kathy, Marianela, Elvira, Fernando e meu pai Marcos pelo apoio moral.

Agradeço especialmente a Capes e CNPq, pelo apoio econômico que me permitiu culminar com sucesso todo o mestrado.

Finalmente, agradeço aos meus amigos do predinho pelos conselhos ao longo de todo o mestrado e pelas lembranças agradáveis.

*A minha amada esposa Daphne e meu
amado filho Fabian ...*

Resumo

Estudamos existência, unicidade, dependência contínua nos dados e comportamento assintótico de soluções globais das equações de Navier-Stokes (com $n \geq 3$), sob condições de pequenez no dado inicial e na força externa, em um espaço de distribuições (\mathcal{PM}^a) cuja construção é baseada na transformada de Fourier. Este espaço contém funções fortemente singulares e, em particular, funções homogêneas de um certo grau cuja correspondente solução (com tais dados) é auto-similar. Além disso, mostramos a existência de uma classe de soluções que são assintoticamente auto-similar. Estudamos também a existência de soluções estacionárias pequenas e analisamos a estabilidade assintótica delas. Finalmente, são dadas condições sob as quais a solução é uma função regular para $t > 0$ (mesmo com dado inicial singular) e satisfaz as equações de Navier-Stokes no sentido clássico para $t > 0$. Esta dissertação é baseada no artigo de M. Cannone and G. Karch, *Journal of Diff. Equations* 197 (2) (2004).

Palavras chave: Equações de Navier-Stokes, Transformada de Fourier, Existência e Unicidade, Auto-similaridade, Estabilidade Assintótica.

Abstract

We study existence, uniqueness, continuous dependence upon the data and asymptotic behavior of solutions for the Navier-Stokes equations (with $n \geq 3$), under smallness conditions on the initial data and external force, in a space of distributions (\mathcal{PM}^a), whose construction is based on Fourier transform. This space contains strongly singular functions and, in particular, homogeneous functions with a certain degree whose corresponding solution (with such data) is self-similar. Moreover, the existence of a class of asymptotically self-similar solutions is proved. We also study the existence of small stationary solutions and their asymptotic stability. Finally, conditions are given for the obtained solution to be regular for $t > 0$ (even with singular initial data) and to satisfy the Navier-Stokes equations in the classical sense for $t > 0$. This master dissertation is based on the paper by M. Cannone and G. Karch, *Journal of Diff. Equations* 197 (2) (2004).

Keywords: Navier-Stokes Equations, Fourier Transform, Existence and Uniqueness, Self-similarity, Asymptotic stability.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 A Transformada de Fourier	5
1.2 A Transformada de Fourier de Distribuições Temperadas	8
1.3 Os espaços \mathcal{PM}^a	14
1.4 Espaços de Sobolev	18
2 Existência, Unicidade e Auto-Similaridade das Soluções	21
2.1 Equivalência de Equações.	21
2.2 Projetor de Leray	22
2.3 Formulação Integral	23
2.4 Formulação do Problema no Espaço \mathcal{PM}^{n-1}	24
2.5 Soluções Globais no Tempo	29
2.6 Soluções Auto-similares.	40
3 Comportamento Assintótico e Soluções Estacionárias	43
3.1 Comportamento Assintótico das Soluções	43

3.2	Soluções Estacionárias	51
4	Regularidade da Solução	55
4.1	Norma Regularizante.	55
4.2	Estimativas para as Normas Regularizantes	57
4.3	Regularização da Solução	64
4.3.1	Continuidade Forte no Tempo	69
4.3.2	C^∞ -Regularidade das Soluções	74
4.4	Comportamento Assintótico na Norma Regularizante	84
Apêndice A		93
		95

Introdução

A teoria matemática da dinâmica dos fluidos começou no século XVII com o trabalho de Isaac Newton, o qual foi o primeiro a aplicar as leis da mecânica aos movimentos de fluidos. Posteriormente, Leonhard Euler (1755) escreveu pela primeira vez as equações diferenciais que regem o movimento de um fluido ideal. Logo depois, C. Navier (1822) e, independentemente, G. Stokes (1845) introduziram no modelo o termo da viscosidade e deduziram as equações que hoje em dia são chamadas de Navier-Stokes e dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p(x, t) = F(x, t), \quad t > 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u(x, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3)$$

As equações de Navier-Stokes (1)-(2) são um conjunto de igualdades em derivadas parciais não lineares que descrevem o movimento de um fluido no espaço \mathbb{R}^3 . Estas equações governam o movimento das correntes oceânicas, o fluxo de ar ao redor de algum veículo ou projétil e, em geral, qualquer fenômeno que esteja relacionado com fluidos newtonianos.

Jean Leray foi o primeiro a realizar um estudo profundo destas equações. Nos seus trabalhos de 1933 e 1934 introduziu conceitos que foram de grande importância para o desenvolvimento de trabalhos posteriores, tais como as soluções auto-similares (definidas no capítulo 2 deste trabalho) e as soluções fracas (que Leray denominou de “turbulentas”). O problema de formação de singularidades para as equações de Navier-Stokes está em aberto e corresponde a um dos sete “millennium prize problems” do Clay Mathematics Institute (veja <http://www.claymath.org/millennium/>). Nesta direção, um dos resultados mais profundos é

devido a L. Caffarelli, R. Khon e L. Nirenberg, conhecido como o teorema CKN, o qual afirma que o conjunto dos pontos onde poderia haver singularidades para as soluções das equações de Navier-Stokes, possuem necessariamente medida de Hausdorff unidimensional nula (ver [3]). Temos assim um resultado de regularidade parcial, que mesmo não resolvendo o problema em aberto acima mencionado, dá uma grande restrição na estrutura das singularidades da solução.

Uma outra abordagem, de um ponto de vista diferente, foi feita por Tosio Kato em 1984 baseado-se em técnicas de semigrupos e um esquema de ponto fixo. Esta abordagem permite obter a existência de uma única solução (branda) global e regular, sob certas condições de pequenez no dado inicial. Contudo, o método de Kato não permite considerar soluções singulares a priori, não permitindo assim obter conclusões sobre a sua existência. Por outro lado, a estratégia geral do método de Kato permite estudar possíveis soluções singulares quando aplicado em alguns espaços chamados de “críticos”, a saber o espaço de Lorentz $L^{3,\infty}$, considerado por Yamazaki [19], e o espaço de pseudo-medidas considerado em [4] e [5]. Para outros exemplos de espaços críticos e aplicações destes ao estudo do problema (1)-(2), referimos o livro [14].

A presente dissertação de mestrado é baseada principalmente no artigo de Marco Cannone e Grzegorz Karch (ver [5]), cujo título é *Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system?* Essencialmente, neste trabalho os autores mostraram existência de soluções globais no tempo em um espaço que contém funções singulares, sob certas hipóteses de pequenez nos dados. Se o dado inicial for suficientemente pequeno, eles mostraram que a solução é regular em todo $t > 0$, mesmo se o dado for singular. Contudo, para dados com um certo tamanho, é possível que a singularidade inicial persista para todo $t > 0$. Um dos nossos objetivos é fazer deste trabalho uma fonte bibliográfica auto-contida e de utilidade para futuras pesquisas neste ramo da análise. No que segue damos uma descrição do conteúdo.

No Capítulo 1 são desenvolvidas as ferramentas básicas da análise de Fourier necessárias para o conteúdo principal deste estudo. Considera-se principalmente a transformada de Fourier definida no espaço das distribuições temperadas e algumas propriedades clássicas da análise de Fourier. Também, introduzimos o espaço \mathcal{PM}^a , com $0 \leq a < n$, e mostramos algumas propriedades destes espaços que são de vital importância para a construção das soluções do sistema de Navier-Stokes. Finalizamos o capítulo lembrando uma versão particular do teorema das imersões de Sobolev.

No capítulo 2, é derivada uma formulação integral equivalente para o sistema de Navier-Stokes, e por meio disto, damos a noção de solução que usaremos para o problema no espaço \mathcal{PM}^{n-1} . Depois, definimos espaços funcionais dependentes do tempo, onde a solução será procurada. Aqui, enunciamos e provamos um resultado de existência e unicidade de soluções globais, e continuidade em relação aos dados. Além disto, damos condições para que a solução obtida seja auto-similar.

No capítulo 3, é analisado o comportamento assintótico das soluções sob certas condições nos dados. Também é demonstrado a existência de soluções estacionárias, isto é, soluções que não dependem do tempo t , quando a força é uma função vetorial independente da variável t . Concluimos o capítulo, mostrando que as soluções estacionárias são assintoticamente estáveis por pequenas perturbações.

No capítulo 4 são desenvolvidas as condições sob as quais a solução encontrada no capítulo 2 torna-se regular, impondo apenas uma certa regularidade na força, mas não no dado inicial. Para isto, introduzimos uma norma “regularizante” (norma tipo Kato) que permite concluir que a solução encontrada no capítulo 2 está no espaço $L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $t > 0$ e para q suficientemente grande. Depois, mostramos que a solução fracamente contínua (ver capítulo 2) no tempo $t > 0$ é de fato fortemente contínua nas respectivas normas. Na sequência, usando estas propriedades, mostramos que as soluções são suaves e satisfazem (1)-(2) no sentido clássico, quando $t > 0$. Finalmente, fazemos um estudo do comportamento assintótico das soluções regulares na mencionada norma regularizante e mostramos a existência de uma bacia atratora em torno de cada solução auto-similar.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentadas as ferramentas básicas para o desenvolvimento do presente trabalho. Ao longo desta monografia reservamos a letra n para indicar a dimensão do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Apresentamos a definição da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e fazemos uma breve discussão sobre distribuições temperadas e a extensão da transformada de Fourier para este espaço. Também apresentamos algumas propriedades da transformada de Fourier, assim como a desigualdade de Hausdorff-Young. Fazemos uma discussão breve sobre os espaços \mathcal{PM}^a e certas propriedades por eles satisfeitas. Finalmente, definimos os espaços de Sobolev e lembramos algumas de suas propriedades, importantes para este trabalho.

1.1 A Transformada de Fourier

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é a função denotada por \hat{f} e definida por

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad (1.1)$$

onde $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ e “ \cdot ” denota o produto interno canônico em \mathbb{R}^n .

É um fato conhecido que \hat{f} , assim definida, é uma função contínua, limitada e satisfaz a desigualdade (ver [10, capítulo 9])

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.2)$$

Para adentrarmos mais no estudo da transformada de Fourier, é preciso lembrarmos de uma operação muito usada, chamada o produto convolução. Ele é definido para duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pela fórmula

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy,$$

sempre que existir a integral acima. Nesta direção, o teorema de Fubini implica que a função $y \rightarrow f(x - y)g(y)$ pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e portanto, $f * g$ fica sempre bem definida, a menos de um conjunto de medida nula (ver [16, teorema 8.14]). Além disso, temos a desigualdade

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

De fato, o produto de convolução pode ser definido para qualquer par de funções, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, e têm-se que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, (ver [10, capítulo 9]). O seguinte resultado resume as propriedades básicas do produto convolução.

Proposição 1.1. *A convolução de funções mensuráveis, quando definida, tem as seguintes propriedades algébricas:*

- (i) $f * g = g * f$;
- (ii) $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$;
- (iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
- (iv) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

A demonstração é simples e segue das propriedades básicas de integração. Por isto a omitimos no presente texto.

A transformada de Fourier é bem comportada com respeito à convolução, no sentido que temos a igualdade

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \tag{1.3}$$

onde $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. No final da seção 1.2 será apresentado um exemplo importante de convolução, de funções homogêneas, mas para isso precisamos desenvolver mais algumas ferramentas.

Consideremos agora o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. É um fato conhecido que a transformada de Fourier não pode ser definida em $L^2(\mathbb{R}^n)$ através da fórmula (1.1). No entanto, ela pode ser estendida para $L^2(\mathbb{R}^n)$ como um operador linear contínuo definido, em princípio, no subespaço denso $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disto, tal extensão é única e é um operador unitário, i.e.

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.4)$$

Observação 1.2. *O símbolo $\hat{\cdot}$ foi utilizado para denotar a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, dada pela fórmula (1.1). Note que usamos a mesma notação para a transformada em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

A seguir, relembremos alguns resultados para a transformada de Fourier que relacionam decaimento e derivadas. Para isto, é adequado considerarmos o espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e definido como:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

onde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial^{\beta_1} x_1 \dots \partial^{\beta_n} x_n}$ e $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$. A família de seminormas $\|\phi\|_{\alpha, \beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|$ induz uma topologia natural em \mathcal{S} .

Observação 1.3. *Ao longo deste trabalho, o conjunto dos números naturais \mathbb{N} é considerado como sendo os inteiros não negativos, ou seja assumimos que $0 \in \mathbb{N}$.*

É um fato conhecido que $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso para cada $1 \leq p \leq \infty$. Agora relembremos o seguinte resultado:

Proposição 1.4. *Seja $\phi \in \mathcal{S}$. Então $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ e valem as fórmulas*

$$(-i)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \hat{\phi})(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi), \quad (1.5)$$

$$(-i)^{|\alpha|} (x^\alpha \hat{\phi})(\xi) = (\partial^\alpha \hat{\phi})(\xi), \quad (1.6)$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Além disto, $\hat{\cdot} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é um isomorfismo contínuo.

A prova da proposição 1.4 pode ser encontrada em [10, teorema 9.2.1.]

1.2 A Transformada de Fourier de Distribuições Temperadas

O espaço das distribuições temperadas é definido como sendo o dual topológico do espaço de Schwartz \mathcal{S} , e é denotado por \mathcal{S}' . Denotamos também por $\langle f, \phi \rangle$ a imagem de uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ avaliada em uma função $\phi \in \mathcal{S}$.

O espaço das distribuições temperadas possui uma topologia natural dada pela convergência pontual; isto é, dada uma sequência $\{f_k\} \subset \mathcal{S}'$, dizemos que ela converge para $f \in \mathcal{S}'$ se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \text{ em } \mathbb{C},$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$. Da mesma forma, duas distribuições $f, g \in \mathcal{S}'$ são iguais se somente se $\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$, para toda $\phi \in \mathcal{S}$. A topologia da convergência pontual em \mathcal{S}' é chamada de *topologia fraca **.

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A derivada distribucional $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de f é definida pela fórmula

$$\langle \partial^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \phi \rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Uma das propriedades interessantes das distribuições temperadas é que elas possuem derivadas distribucionais de qualquer ordem.

A transformada de Fourier é definida em \mathcal{S}' pela seguinte fórmula

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle := \langle f, \hat{\phi} \rangle.$$

Com esta definição, $\hat{\cdot} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ é um isomorfismo contínuo (ver [10, capítulo 9]).

Para estabelecer uma relação entre a transformada de Fourier e as derivadas distribucionais precisamos do seguinte espaço:

Definição 1.5. Definimos o espaço $Q(\mathbb{R}^n)$ de todas as funções $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que, para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existem constantes positivas $C(\alpha)$ e $K(\alpha)$ satisfazendo

$$|\partial^\alpha \Phi(x)| \leq C(\alpha)(1 + |x|^2)^{K(\alpha)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x|$ suficientemente grande.

O espaço $Q(\mathbb{R}^n)$ é chamado o espaço das funções de *crescimento lento*. Observe que o conjunto dos polinômios em \mathbb{R}^n está contido em $Q(\mathbb{R}^n)$ e que o produto $\Phi\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in Q(\mathbb{R}^n)$. Para $\Phi \in Q(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos o produto $\Phi f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por meio da fórmula

$$\langle \Phi f, \phi \rangle = \langle f, \Phi \phi \rangle. \quad (1.7)$$

Para uma posterior referência, enunciamos o seguinte resultado:

Proposição 1.6. Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então valem as fórmulas

$$\xi^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} (\partial^\alpha f)^\wedge \quad (1.8)$$

$$\partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} (x^\alpha f)^\wedge, \quad (1.9)$$

onde os produtos acima são entendidos no sentido de (1.7).

O espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ está contido em \mathcal{S}' para todo $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, para os casos $p = 1$ e $p = 2$ as definições da transformada de Fourier coincidem no sentido das distribuições. Precisamente, se denotarmos por $\mathcal{F}f$ a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e por \hat{f} a transformada em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então vale a identidade

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi) \cdot \phi(\xi) d\xi, \quad (1.10)$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Também temos que a transformada de Fourier restrita ao espaço $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ tem sua imagem contida no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então por linearidade

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n).$$

Note que \hat{f}_1 é dada pela fórmula (1.1) e \hat{f}_2 é a extensão para o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f , calculada acima, não depende da escolha de f_1 e f_2 . De fato, se tivermos $f = g_1 + g_2$, com $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto $\hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \hat{g}_1 + \hat{g}_2$.

Agora, lembremos o seguinte resultado:

Proposição 1.7. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < 2$, então $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Para $E := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq 1\}$, considere a decomposição

$$f = f \cdot 1_E + f \cdot 1_{E^c},$$

onde 1_E denota a função característica do conjunto E .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |1_E \cdot f| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |1_E \cdot f|^p dx \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p < \infty, \end{aligned}$$

de onde segue que $1_E \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e temos também que a medida do conjunto E é finita.

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |1_{E^c} \cdot f|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |1_{E^c} \cdot f|^p dx \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p < \infty, \end{aligned}$$

e então $1_{E^c} \cdot f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, o que conclui a prova. □

A proposição 1.7 é válida em situações mais gerais, para mais detalhes ver, por exemplo, ([9, proposição 6.9]).

Todas estas considerações, as relações (1.2), (1.4) e o teorema de interpolação de Riez-Thorin (ver [9, teorema 6.27]), permitem mostrar o seguinte resultado:

Proposição 1.8 (A desigualdade de Hausdorff-Young). *Seja $1 \leq p \leq 2$ e $2 \leq q \leq \infty$ o expoente conjugado de p , i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, e temos a seguinte desigualdade:*

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \bar{M}_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\bar{M}_p = (2\pi)^{\frac{n(p-2)}{2p}} = (2\pi)^{\frac{n(2-q)}{2q}} = M_q$.

Observação 1.9. *Note que se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq 2$, então a transformada de Fourier de f como função coincide com a transformada de Fourier de f como distribuição, no sentido de (1.10).*

Agora, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, considere a transformada

$$\check{f} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} f(\xi) d\xi. \quad (1.11)$$

Como no caso da transformada de Fourier, temos que $\check{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma função contínua.

De fato, a fórmula (1.11) define a inversa da transformada de Fourier no espaço de Schwartz. Analogamente podemos definir $\check{\cdot} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$, e mostrar que $\check{\cdot}$ é de fato a inversa da transformada de Fourier em \mathcal{S}' .

Por um raciocínio análogo, mostra-se a desigualdade de Hausdorff-Young para a transformada inversa, i.e.

$$\|\check{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \bar{M}_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.12)$$

com as mesmas hipóteses da proposição 1.8.

Aplicando (1.12) para \hat{f} , observe que se $f \in \mathcal{S}$, então

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \bar{M}_p \|\hat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.13)$$

Antes de encerrar esta seção, precisamos generalizar a ideia de composta de uma distribuição com uma homotetia. Isto pode ser feito mediante a seguinte observação: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ positivo, f uma função integrável e $\phi \in \mathcal{S}$. Se definirmos $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$, então a fórmula de mudança de variáveis implica a seguinte igualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) \cdot \phi(x) = (\lambda)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \phi_{\lambda^{-1}}(x).$$

Assim, a composição de uma distribuição temperada com uma homotetia pode ser definida mediante a fórmula

$$\langle f_\lambda, \phi \rangle := \lambda^{-n} \langle f, \phi_{\lambda^{-1}} \rangle. \quad (1.14)$$

É possível estender o conceito de composta de uma distribuição com qualquer transformação linear invertível (ver [9, capítulo 9]).

O conceito da composta com uma homotetia e a transformada de Fourier de uma distribuição estão relacionados pela seguinte igualdade:

$$(f_\lambda)^\wedge = \lambda^{-n} (\hat{f})_{\lambda^{-1}}, \quad (1.15)$$

no sentido das distribuições.

Para encerrar esta seção apresentamos um resultado importante sobre convolução de funções homogêneas. A prova é um cálculo extenso, mas ilustra como a transformada de Fourier pode simplificar cálculos maiores.

Proposição 1.10. *Sejam $0 < \alpha < n$, $0 < \beta < n$ tais que $0 < \alpha + \beta < n$. Então*

$$(|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(y) = \frac{c_{n-\alpha-\beta} c_\alpha c_\beta}{c_{\alpha+\beta} c_{n-\alpha} c_{n-\beta}} |y|^{\alpha+\beta-n},$$

onde $c_a := \pi^{a/2} \Gamma(a/2)$ e $\Gamma(b) = \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t} dt$, $a > 0$.

Demonstração. Primeiro observe que

$$\begin{aligned} c_\alpha |z|^{-\alpha} &= \int_0^\infty (t\pi^{-1}|z|^{-2})^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \pi^{-1} |z|^{-2} dt \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\pi|z|^2 u} du. \end{aligned}$$

Usando este fato, temos

$$c_{n-\alpha} |x|^{\alpha-n} c_{n-\beta} |y-x|^{\beta-n} = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{n-\alpha-2}{2}} s^{\frac{n-\beta-2}{2}} e^{-\pi(t|x|^2+s|y-x|^2)} dt ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(y) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{n-\alpha-2}{2}} s^{\frac{n-\beta-2}{2}} (e^{-\pi t|x|^2} * e^{-\pi s|x|^2})(y) dt ds. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Por outro lado, invocando a identidade (ver [10, capítulo 9])

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2 t} e^{-i\xi \cdot x} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}, \quad (1.17)$$

e a propriedade (1.3) para convolução, obtemos

$$\begin{aligned} (e^{\pi t|x|^2} * e^{\pi s|x|^2})^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{n/2} (e^{\pi t|x|^2})^\wedge(\xi) (e^{\pi s|x|^2})^\wedge(\xi) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi ts}\right)^{n/2} e^{-\frac{t+s}{4\pi st}|\xi|^2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Aplicando a transformada inversa e usando novamente (1.17), a expressão (1.18) implica que

$$(e^{\pi t|x|^2} * e^{\pi s|x|^2})(y) = \frac{1}{(s+t)^{n/2}} e^{-\pi \frac{st}{s+t} |y|^2}.$$

Substituindo esta última expressão em (1.16) e usando a mudança de coordenadas $t = u^2$ e $s = v^2$, obtemos

$$\begin{aligned} &c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(y) \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{n-\alpha-2} v^{n-\beta-2} \frac{1}{(u^2+v^2)^{n/2}} e^{-\pi \frac{u^2 v^2}{u^2+v^2} |y|^2} uv du dv. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Usando a mudança de coordenadas polares $u = r \cos \theta$ e $v = r \sin \theta$, podemos escrever (1.19) como

$$\begin{aligned}
& c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(y) \\
= & 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\alpha-1} \theta \sin^{n-\beta-1} \theta \int_0^\infty r^{n-\alpha-\beta-2} e^{-\pi r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta |y|^2} r dr d\theta \\
= & 2\pi^{\frac{n-\alpha-\beta}{2}} |y|^{\alpha+\beta-n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta \int_0^\infty k^{\frac{n-\alpha-\beta}{2}-1} e^{-k} dk d\theta \\
= & c_{n-\alpha-\beta} |y|^{\alpha+\beta-n} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Finalmente, um cálculo similar mostra que se $a > 0$ e $b > 0$, então

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1} \theta \sin^{2b-1} \theta d\theta.$$

Portanto, se aplicarmos a identidade anterior com $a = \frac{\alpha}{2}$ e $b = \frac{\beta}{2}$, obtemos

$$c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(y) = c_{n-\alpha-\beta} |y|^{\alpha+\beta-n} \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})},$$

de onde segue o resultado desejado. □

1.3 Os espaços \mathcal{PM}^a

Nesta seção, definimos os espaços \mathcal{PM}^a que serão usados para estudar o problema de valor inicial das equações de Navier-Stokes. Apresentamos também algumas propriedades básicas destes espaços.

Definição 1.11. *O espaço \mathcal{PM}^a é definido por*

$$\mathcal{PM}^a := \{v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \hat{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \|v\|_{\mathcal{PM}^a} := \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{v}(\xi)| < \infty\},$$

para $0 \leq a < n$.

Notação 1.12. *No caso $a = 0$ denotamos simplesmente $\mathcal{PM}^0 = \mathcal{PM}$.*

Proposição 1.13. *O espaço \mathcal{PM}^a é Banach, isto é, \mathcal{PM}^a é um espaço vetorial sobre os complexos, normado e completo com norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$.*

Demonstração. É simples mostrar que \mathcal{PM}^a é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ define uma norma. Aqui somente mostramos que \mathcal{PM}^a é completo. De fato, seja $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{PM}^a$, uma sequência de Cauchy, isto é

$$\|v_k - v_l\|_{\mathcal{PM}^a} \longrightarrow 0, \text{ quando } k, l \longrightarrow \infty.$$

A definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ implica que a sequência $(|\xi|^a \hat{v}_k(\cdot))_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um espaço completo, então existe uma função $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $|\xi|^a \hat{v}_k(\cdot) \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}} g$. Agora defina $h(\xi) = \frac{1}{|\xi|^a} g(\xi)$, $\xi \neq 0$. Então, dada a bola $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$, temos

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{|\xi|^a} |g(\xi)| d\xi \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,r)} \frac{1}{|\xi|^a} d\xi < \infty,$$

pois $a < n$. Isto implica que $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e além disto, dada uma $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|^a} g(\xi) \phi(\xi) d\xi \right| &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} |g(\xi)| d\xi \\ &\quad + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

e portanto $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Assim, definindo $v := \check{h}$, no sentido das distribuições, é claro que $v \in \mathcal{PM}^a$ e $v_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}} v$ quando $k \longrightarrow \infty$. □

Uma das vantagens que possui o espaço \mathcal{PM}^a é que ele dá uma grande simplicidade para mostrar os resultados principais deste estudo.

Observação 1.14. *É interessante observar que a topologia dada pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ é mais forte que a topologia herdada como subespaço de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

De fato, dada uma sequência $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{PM}^a tal que $v_k \rightarrow v$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
|\langle v_k - v, \phi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}_k(\xi) - \hat{v}(\xi)| |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{v}_k(\xi) - \hat{v}(\xi)| |\xi|^{-a} |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-a} |\check{\phi}(\xi)| d\xi \|v_k - v\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\leq \left[\int_{B(0,1)} |\xi|^{-a} d\xi \|\check{\phi}(\xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right] \|v_k - v\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned}$$

Como $\|v_k - v\|_{\mathcal{PM}^a} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, temos que $v_k \rightarrow v$ no sentido de distribuições.

A seguir damos uma generalização do produto de funções no espaço \mathcal{PM}^a .

Definição 1.15. *Sejam $0 < a, b < n$ tais que $n < a + b < 2n$ e sejam $u \in \mathcal{PM}^a$ e $v \in \mathcal{PM}^b$. Definimos $u \cdot v$, nas variáveis de Fourier, por*

$$\widehat{u \cdot v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} (\hat{u} * \hat{v})(\xi).$$

Observação 1.16. *Na definição 1.15, observe que se u e v são funções “suficientemente regulares”, então $u \cdot v$ é o produto ordinário de funções.*

Uma conta simples, usando a proposição 1.10, mostra que a convolução usada na definição 1.15 de fato existe.

Proposição 1.17. *Sejam $a, b > 0$ como na definição 1.15. Se $u \in \mathcal{PM}^a$ e $v \in \mathcal{PM}^b$, então $u \cdot v \in \mathcal{PM}^{a+b-n}$.*

Demonstração. Primeiro mostremos que a função $\hat{u} * \hat{v}$ define uma distribuição. Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando a proposição 1.10, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u} * \hat{v})(\xi) \phi(\xi) d\xi \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(z)| |\hat{v}(\xi - z)| dz |\phi(\xi)| d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{-a} |\xi - z|^{-b} dz |\phi(\xi)| d\xi \|u\|_{\mathcal{PM}^a} \|v\|_{\mathcal{PM}^b} \\
&= C(a, b) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{n-a-b} |\phi(\xi)| d\xi \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente a proposição 1.10, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |(\hat{u} * \hat{v})(\xi)| d\xi &\leq C(a,b) \int_{B(0,r)} |\xi|^{n-a-b} d\xi \|u\|_{\mathcal{PM}^a} \|v\|_{\mathcal{PM}^b} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

o que mostra que $\hat{u} * \hat{v} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Também,

$$|\xi|^{a+b-n} |(2\pi)^{-n/2} (\hat{u} * \hat{v})(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} C(a,b) \|u\|_{\mathcal{PM}^a} \|v\|_{\mathcal{PM}^b},$$

para *q.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^n$, logo $u \cdot v \in \mathcal{PM}^{a+b-n}$. □

Observação 1.18. *Em particular, se $n/2 < a < n$, a operação \cdot define uma forma bilinear contínua $\mathcal{PM}^a \times \mathcal{PM}^a \rightarrow \mathcal{PM}^{2a-n}$, isto é*

$$\|u \cdot v\|_{\mathcal{PM}^{2a-n}} \leq (2\pi)^{-n/2} C(a,a) \|u\|_{\mathcal{PM}^a} \|v\|_{\mathcal{PM}^a}.$$

Finalmente, apresentamos uma propriedade importante da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ com respeito à composta com uma homotetia, discutida em (1.14) da seção 1.2. Se $f \in \mathcal{PM}^a$, então pela identidade (1.15) temos que $(f_\lambda)^\wedge(\xi) = \lambda^{-n} \hat{f}(\lambda^{-1}\xi)$. Isto dá a seguinte propriedade: Se $\lambda > 0$ então

$$\begin{aligned} \|f_\lambda\|_{\mathcal{PM}^a} &= \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^a |(f_\lambda)^\wedge(\xi)| \\ &= \lambda^{a-n} \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\lambda^{-1}\xi|^a |\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)| \\ &= \lambda^{a-n} \|f\|_{\mathcal{PM}^a}. \end{aligned}$$

Em particular, no caso $a = n - 1$, temos

$$\|\lambda f_\lambda\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = \|f\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}, \tag{1.20}$$

ou seja, a norma de \mathcal{PM}^{n-1} é invariante pela aplicação

$$f \rightarrow \lambda f_\lambda. \tag{1.21}$$

Chamamos a aplicação definida em (1.21) o *scaling* da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P},\mathcal{M}^{n-1}}$. Como veremos no próximo capítulo, (1.21) também é o *scaling* característico para o dado inicial das equações de Navier-Stokes.

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta última seção, são introduzidos os espaços de Sobolev que são importantes na teoria das equações diferenciais parciais. Aqui, relembramos uma propriedade destes espaços que será importante para os nossos objetivos.

Definição 1.19. *Sejam m um inteiro não negativo e $p \in [1, \infty]$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}$ como o espaço de todas as funções $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que $\partial^\alpha h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para cada multi-índice α com $0 \leq |\alpha| \leq m$, onde $\partial^\alpha h$ denota a derivada de h no sentido de distribuições.*

O espaço $W^{m,p}$ possui uma norma natural dada por

$$\|h\|_{m,p} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty, \quad (1.22)$$

$$\|h\|_{m,\infty} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.23)$$

Além disso, $(W^{m,p}, \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach, separável (se $1 \leq p < \infty$) e reflexivo (se $1 < p < \infty$). Em particular $W^{m,2}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(h, g)_m := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\partial^\alpha h, \partial^\alpha g), \quad (1.24)$$

onde $(h, g) = \int_{\mathbb{R}^n} h \bar{g} dx$ é o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Agora, apresentamos um resultado, conhecido como “imersão de Sobolev”, em um caso particular. Um estudo mais detalhado deste resultado pode ser encontrado, por exemplo, em [1, capítulo 4] ou [13, capítulo 5]. Esta propriedade, permitirá concluir que certas soluções do

sistema de Navier-Stokes obtidas nos espaços \mathcal{PM}^a são funções infinitamente diferenciáveis no sentido clássico.

Proposição 1.20. *Sejam $j \geq 0$, $m \geq 1$ inteiros e $1 \leq p < \infty$. Se $mp > n$ ou $m = n$ e $p = 1$, então temos a seguinte imersão contínua*

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C_B^j, \quad (1.25)$$

onde C_B^j é o espaço das funções $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$ tais que $\partial^\alpha f$ são limitadas em \mathbb{R}^n , para todo multi-índice α tal que $0 \leq |\alpha| \leq j$.

Para a prova de uma versão mais completa da proposição anterior ver [1, capítulo 4].

Capítulo 2

Existência, Unicidade e Auto-Similaridade das Soluções

Neste capítulo estudamos as equações de Navier-Stokes em espaços funcionais invariantes pelo seu *scaling*. Provamos resultados de existência, unicidade, dependência contínua nos dados e auto-similaridade das soluções.

2.1 Equivalência de Equações.

Daqui em diante consideramos o espaço \mathbb{R}^n assumindo $n \geq 3$. Para conforto do leitor as equações de Navier-Stokes (1)-(3), dadas na introdução, são reescritas aqui:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p(x, t) = F(x, t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u(x, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.3)$$

onde $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, Δ denota o laplaciano em \mathbb{R}^n aplicado a cada coordenada do campo de velocidades do fluido $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$, ∇ denota o operador $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, p representa a pressão do fluido e F é uma função vetorial chamada de força externa.

A não-linearidade em (2.1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(u \cdot \nabla)u &= ((u \cdot \nabla)u_1, \dots, (u \cdot \nabla)u_n) \\
&= ((u \cdot \nabla)u_1 + u_1 \nabla \cdot u, \dots, (u \cdot \nabla)u_n + u_n \nabla \cdot u) \\
&= (\nabla \cdot ((u_1)^2, u_1 u_2, \dots, u_1 u_n), \dots, \nabla \cdot (u_1 u_n, u_2 u_n, \dots, (u_n)^2)) \\
&= \nabla \cdot (u \otimes u),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $u \otimes u$ é a matriz produto tensorial, dada por

$$(u \otimes u)_{k,l}(x, t) = (u_k(x, t) \cdot u_l(x, t)).$$

Portanto, podemos escrever a equação (2.1) como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + \nabla \cdot (u \otimes u)(x, t) + \nabla p(x, t) = F(x, t). \tag{2.5}$$

2.2 Projetor de Leray

No estudo de (2.1)-(2.3), uma estratégia clássica é eliminar a pressão p e obter uma equação apenas para o campo de velocidades u . Para isto, precisamos da decomposição de Hodge e o projetor de Leray. Começamos com a seguinte definição:

Definição 2.1. *Um campo suave de vetores $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dito solenoidal se $\nabla \cdot v = 0$ em \mathbb{R}^n .*

Seja $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial diferenciável. O teorema de Helmholtz-Hodge (ver [6, capítulo 1]) afirma que existe uma única decomposição do campo $w = v + \gamma$, onde v é um campo solenoidal e $\gamma = \nabla \psi$ para alguma função $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. O fato da decomposição ser única permite definir um operador, o qual é denotado por \mathbb{P} , da seguinte forma

$$\mathbb{P}w = w - \nabla \psi.$$

Usando a condição de ser solenoidal é possível obter uma fórmula para $\mathbb{P}w$. De fato,

$$\nabla \cdot (w - \nabla\psi) = 0 \Rightarrow \Delta\psi = \nabla \cdot w, \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Logo, aplicando o laplaciano inverso, dado pela solução da equação de Laplace, tem-se

$$\mathbb{P}w = w - \nabla(\Delta^{-1}(\nabla \cdot w)). \quad (2.6)$$

O operador \mathbb{P} é chamado de *Projetor de Leray*.

2.3 Formulação Integral

Aplicando o projetor de Leray na equação (2.5), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + \mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(x, t) = \mathbb{P}F(x, t), \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.8)$$

pois $u(\cdot, t)$ é solenoidal para cada $t > 0$.

Note que o termo da pressão p não aparece em (2.7), mas ele pode ser recuperado desde que exista uma solução de (2.1), e usando a fórmula (2.6).

Denotemos por $S(t)$ o semigrupo do calor que age em uma função integrável g da seguinte forma:

$$(S(t)g)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) g(y) dy,$$

ou, nas variáveis de Fourier (ver (1.3) e (1.17)), por

$$\widehat{S(t)g}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{g}(\xi).$$

Agora, é possível estudar o sistema (2.1)-(2.3) por meio da seguinte equação integral obtida via o princípio de Duhamel:

$$\begin{aligned} u(t) = & S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(\tau)d\tau \\ & + \int_0^t S(t-\tau)\mathbb{P}F(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.4 Formulação do Problema no Espaço \mathcal{PM}^{n-1}

Até agora, o sistema (2.1)-(2.3) simplesmente foi transformado formalmente na equação integral (2.9). Neste estudo, o espaço onde será procurada a solução é definido tomando-se como base o espaço \mathcal{PM}^a , que foi definido na seção 1.3 do capítulo 1. Mais precisamente, a solução será uma função que vai do intervalo $[0, \infty)$ no espaço \mathcal{PM}^a , para um certo a . Em princípio, o espaço \mathcal{PM}^a é definido como sendo um subespaço do espaço de distribuições temperadas, portanto é necessário dar um significado mais preciso à equação integral (2.9).

Se aplicarmos formalmente a transformada de Fourier em (2.6), obtemos facilmente a seguinte expressão:

$$(\mathbb{P}w)^\wedge(\xi) = \hat{w}(\xi) - \frac{1}{|\xi|^2}(\xi \cdot \hat{w}(\xi))\xi, \quad (2.10)$$

onde a transformada de Fourier foi calculada em cada componente do campo vetorial w . Isto permite definir, em variáveis de Fourier, a família de operadores pseudo-diferenciais, definidos para campos vetoriais $v = (v_1, \dots, v_n)$ com v_j integrável, por

$$(\mathbb{P}v)^\wedge_j(\xi) = \hat{v}_j(\xi) - \sum_{l=1}^n \frac{\xi_j \xi_l}{|\xi|^2} \hat{v}_l(\xi). \quad (2.11)$$

Os símbolos deste operador são denotados por

$$(\hat{\mathbb{P}}(\xi))_{j,l} = \delta_{j,l} - \frac{\xi_j \xi_l}{|\xi|^2},$$

e, é claro, estas quantidades satisfazem

$$\max_{1 \leq j, l \leq n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}} |(\widehat{\mathbb{P}}(\xi))_{j,l}| = 1. \quad (2.12)$$

O objetivo é definir o operador \mathbb{P} para n -listas cujas componentes estão no espaço \mathcal{PM}^a . Para fazer isto, dado $v \in \mathcal{PM}^a$ definimos a aplicação R_j agindo em v por

$$\widehat{R_j v}(\xi) = i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{v}(\xi), \quad (2.13)$$

para $j = 1, \dots, n$.

O seguinte resultado mostra que R_j está bem definida:

Proposição 2.2. *A aplicação $R_j : \mathcal{PM}^a \rightarrow \mathcal{PM}^a$ é um operador linear e contínuo.*

Demonstração. Primeiro mostremos que $R_j v$ é uma distribuição. Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} |\langle R_j v, \phi \rangle| &= |\langle i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{v}, \check{\phi} \rangle| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{v}(\xi) \check{\phi}(\xi)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^a |\widehat{v}(\xi)| |\xi|^{-a} |\check{\phi}(\xi)| \\ &\leq \|v\|_{\mathcal{PM}^a} \|\xi|^{-a} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Analogamente temos que $\widehat{R_j v}(\cdot)$ é localmente integrável. De fato, seja $B(0, r)$ uma bola aberta centrada na origem. Então

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |\widehat{R_j v}(\xi)| &= \int_{B(0,r)} |i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{v}(\xi)| \\ &\leq \int_{B(0,r)} |\widehat{v}(\xi)| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

pois $\widehat{v} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, resta mostrar a condição de limitação, mas isto segue de

$$\begin{aligned}
|\xi|^a |\widehat{R_j v}(\xi)| &= |\xi|^a i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{v}(\xi) \\
&\leq |\xi|^a |\hat{v}(\xi)| \quad \xi \neq 0 \\
&\leq \|v\|_{\mathcal{PM}^a} \quad \text{q.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

o que implica $\|R_j v\|_{\mathcal{PM}^a} \leq \|v\|_{\mathcal{PM}^a}$. A linearidade de R_j é imediata, portanto completamos a prova. \square

A transformada R_j é conhecida como a transformada de Riesz e ela também pode ser definida no espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \infty$ (ver [17, capítulo 3]).

Se tivermos uma n -lista $v = (v_1, \dots, v_n)$, onde cada $v_j \in \mathcal{PM}^a$, então a proposição 2.2 implica que o operador \mathbb{P} transforma v em uma outra n -lista, denotada por $\mathbb{P}v$, cujas componentes estão em \mathcal{PM}^a e são dadas por

$$(\mathbb{P}v)_j = v_j + \sum_{l=1}^n R_j R_l v_l. \quad (2.14)$$

Observação 2.3. *Note que, se $v = (v_1, \dots, v_n)$ com $v_j \in \mathcal{PM}^a$, então é válida a seguinte identidade:*

$$\nabla \cdot \mathbb{P}v = 0,$$

no sentido das distribuições, ou seja $\mathbb{P}v$ é solenoidal.

Agora, apresentamos um conceito de continuidade fraca para funções com valores no espaço \mathcal{PM}^a .

Definição 2.4. *Uma função $v : [0, T) \rightarrow \mathcal{PM}^a$, $0 < T \leq \infty$ é dita fracamente contínua no ponto $t \in [0, T)$, se*

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \langle v(\tau), \phi \rangle = \langle v(t), \phi \rangle,$$

para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se v é fracamente contínua para todo $t \in [0, T)$, dizemos simplesmente que v é fracamente contínua.

Agora, invocamos os espaços \mathcal{PM}^a , com $0 \leq a < n$, para definirmos o espaço $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)$ de todas as funções $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{PM}^a$ fracamente contínuas e tais que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{\mathcal{PM}^a} < \infty.$$

A quantidade $\|u\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)} := \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{\mathcal{PM}^a}$ é uma norma neste espaço, como pode ser facilmente verificado. Mais ainda, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.5. *O espaço $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. A prova do fato que cada sequência de Cauchy, na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)}$, converge é a mesma que para o espaço das funções reais $L^\infty(0, T)$ com a norma do sup, pois \mathcal{PM}^a é um espaço de Banach. Portanto, somente mostraremos a continuidade fraca da função limite. Seja $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)$ uma sequência tal que $u_k \rightarrow u$ quando $k \rightarrow \infty$, na norma de $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)$. Então

$$\begin{aligned} |\langle u(t) - u(\tau), \phi \rangle| &\leq |\langle u(t) - u_k(t), \phi \rangle| + |\langle u_k(t) - u_k(\tau), \phi \rangle| \\ &\quad + |\langle u_k(\tau) - u(\tau), \phi \rangle| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_k(\xi, t)| |\xi|^{-a} |\check{\phi}(\xi)| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{u}(\xi, \tau) - \hat{u}_k(\xi, \tau)| |\xi|^{-a} |\check{\phi}(\xi)| \\ &\quad + |\langle u_k(t) - u_k(\tau), \phi \rangle| \\ &\leq 2 \|u - u_k\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)} \times \\ &\quad \left[\|\check{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} \right) + \|\check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right] \\ &\quad + |\langle u_k(t) - u_k(\tau), \phi \rangle|, \end{aligned}$$

para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau \rightarrow t} |\langle u(t) - u(\tau), \phi \rangle| &\leq 2 \|u - u_k\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^a)} \\ &\times \left[\|\check{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} \right) + \|\check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como $k \in \mathbb{N}$ é arbitrário, segue que o limite superior acima é zero. Logo, o limite em (2.15) existe e vale zero, o que é equivalente a u ser fracamente contínua em t . \square

Precisamos estabelecer a noção de solução que usaremos para estudar o problema de valor inicial (2.1)-(2.3). Na literatura, existem muitas noções de solução que dependem do espaço ambiente onde elas são procuradas, ver por exemplo [19] e [11]. No nosso contexto, a noção de solução é dada a seguir e será chamada uma solução *branda*.

Definição 2.6. *Uma solução branda do sistema (2.1)-(2.3) é uma função vetorial $u = (u_1, \dots, u_n)$, onde cada u_j pertence ao espaço de funções $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^{n-1})$, $0 < T \leq \infty$, e tal que*

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi, 0) - \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.16)$$

para toda $0 \leq t < T$ e em quase todo ponto $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.7. *Existem outras maneiras de interpretar a equação integral (2.9), como por exemplo no sentido de distribuições (ver [19]). Neste trabalho, a equação (2.9) inspirou a ideia de solução dada na definição anterior.*

Observação 2.8. *Desde que as componentes de uma função vetorial $u = (u_1, \dots, u_n)$, onde $u_j \in \mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{PM}^{n-1})$, $j = 1, \dots, n$, são tais que $u_j(t)$ é um elemento do espaço \mathcal{PM}^{n-1} para cada $t > 0$, as componentes $u_j(t) \cdot u_l(t)$ na matriz $u \otimes u$ devem ser entendidas como*

$$\widehat{(u \otimes u)}(\cdot, \tau) = (2\pi)^{-n/2} (\hat{u}_j(\cdot, \tau) * \hat{u}_l(\cdot, \tau))_{n \times n}. \quad (2.17)$$

Para mais detalhes ver a seção 1.3 do capítulo 1.

Para simplificar a notação, o termo quadrático em (2.9) será denotado por:

$$B(u, v)(t) = - \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes v)(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

2.5 Soluções Globais no Tempo

Para provar a existência, unicidade e dependência contínua nos dados das soluções da equação (2.1)-(2.3), será usado um argumento padrão de ponto fixo para contrações. Mas, para isto, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.9. *Seja $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ um espaço de Banach e $B : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ uma forma bilinear contínua que satisfaz $\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}} \leq \eta \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}}$, para toda $u, v \in \mathcal{X}$ e alguma constante $\eta > 0$. Então, se $0 < \epsilon < \frac{1}{4\eta}$ e $y \in \mathcal{X}$ é tal que $\|y\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon$, a equação $u = y + B(u, u)$ possui uma única solução u em \mathcal{X} , tal que $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon$. Além disso, a solução depende continuamente de y no seguinte sentido: se $\|\bar{y}\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon$, $\bar{u} = \bar{y} + B(\bar{u}, \bar{u})$, e $\|\bar{u}\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon$, então*

$$\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{1 - 4\epsilon\eta} \|y - \bar{y}\|_{\mathcal{X}}.$$

Demonstração. Defina a aplicação $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ por $\Phi(u) = y + B(u, u)$. Mostremos primeiro que $\Phi(\bar{B}(0, 2\epsilon)) \subset \bar{B}(0, 2\epsilon)$, onde $\bar{B}(0, 2\epsilon) = \{u \in \mathcal{X} : \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon\}$. De fato, por hipótese,

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{\mathcal{X}} &\leq \|y\|_{\mathcal{X}} + \|B(u, u)\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \epsilon + 4\eta\epsilon^2 \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

Agora, vejamos que Φ é também uma contração em $\bar{B}(0, 2\epsilon)$. Se $u, v \in \bar{B}(0, 2\epsilon)$, então

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathcal{X}} &\leq \|B(u, u - v)\|_{\mathcal{X}} + \|B(u - v, v)\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \eta\|u - v\|_{\mathcal{X}}(\|u\|_{\mathcal{X}} + \|v\|_{\mathcal{X}}) \\
&\leq 4\eta\epsilon\|u - v\|_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

e obtemos que Φ é uma contração em $\bar{B}(0, 2\epsilon)$, pois $4\eta\epsilon < 1$ por hipótese. Pelo teorema do ponto fixo para contrações, aplicado no espaço métrico completo $\bar{B}(0, 2\epsilon) \subset \mathcal{X}$, a aplicação Φ possui um único ponto fixo $u \in \bar{B}(0, 2\epsilon)$. Assim, temos a existência e unicidade de solução na bola $\bar{B}(0, 2\epsilon)$.

Para mostrar a dependência contínua, basta estimar

$$\begin{aligned}
\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}} &\leq \|y - \bar{y}\|_{\mathcal{X}} + \|B(u, u) - B(\bar{u}, \bar{u})\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \|y - \bar{y}\|_{\mathcal{X}} + 4\eta\epsilon\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{(1 - 4\eta\epsilon)}\|y - \bar{y}\|_{\mathcal{X}},$$

completando a demonstração. □

Antes de prosseguirmos, façamos alguns esclarecimentos. Seja um vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$ tal que $v_j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ para cada $j = 1, \dots, n$. A transformada de Fourier de v é calculada sempre em cada componente de v , isto é, $\hat{v}(\xi) = (\hat{v}_1(\xi), \dots, \hat{v}_n(\xi))$. Também, assumindo que $|\hat{v}(\xi)| = \max_{1 \leq j \leq n} |\hat{v}_j(\xi)|$ e usando a mesma definição da norma no espaço \mathcal{PM}^{n-1} , temos a seguinte identidade

$$\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = \max_{1 \leq j \leq n} \{\|v_j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}\}, \quad (2.19)$$

onde $\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{n-1} |\hat{v}(\xi)|$. De fato,

$$\begin{aligned}
|\hat{v}_j(\xi)| &\leq |\hat{v}(\xi)|, \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ e q.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \\
|\xi|^{n-1}|\hat{v}_j(\xi)| &\leq |\xi|^{n-1}|\hat{v}(\xi)| \\
&\leq \|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}, \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ e q.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \\
\|v_j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} &\leq \|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \quad \forall j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned}
|\xi|^{n-1}|\hat{v}_k(\xi)| &\leq \|v_k\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq n} \{\|v_j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}\} \quad \text{e q.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \\
|\xi|^{n-1}|\hat{v}(\xi)| &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \{\|v_j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}\} \quad \text{e q.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \\
\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \{\|v_j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}\}.
\end{aligned}$$

O espaço onde será procurada a solução do sistema (2.1)-(2.3) é o seguinte:

Definição 2.10. Denotamos por \mathcal{X} o espaço das funções $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, tais que $u_j(\cdot) \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$ para todo $j = 1, \dots, n$.

O espaço \mathcal{X} é Banach com a norma $\|u\|_{\mathcal{X}} := \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}$, onde $\|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}$ deve ser calculado segundo (2.19). A prova de que \mathcal{X} é Banach segue diretamente do fato de $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$ ser um espaço de Banach.

Agora, a ideia é aplicar o lema 2.9 no espaço \mathcal{X} . Sejam $u, v \in \mathcal{X}$, $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$ com $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ e $F = (F_1, \dots, F_n)$ com $F_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$. Denotamos por

$$y = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)PF(\tau)d\tau,$$

a função definida, em variáveis de Fourier, por meio de

$$\hat{y}_j(\xi, t) := e^{-t|\xi|^2} u_0^j + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}_j(\xi) \cdot \hat{F}(\xi, \tau) d\tau,$$

e a forma bilinear

$$B(u, v)(t) = - \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes v)(\tau) d\tau,$$

definida por meio de

$$\widehat{B_j(u, v)}(\xi, \tau) := \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}_j(\xi) \cdot (i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau)) d\tau, \quad (2.20)$$

onde $\hat{\mathbb{P}}_j(\xi)$ denota a j -ésima fila da matriz $(\hat{\mathbb{P}}_{j,k}(\xi))$. Então, para conseguir aplicar o lema 2.9, precisamos mostrar que $y \in \mathcal{X}$, e que a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ está bem definida e satisfaz $\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}} \leq \eta \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}}$, para alguma constante $\eta > 0$.

Trataremos estas questões nos próximos três lemas.

Lema 2.11. *Seja $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$, onde $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ para cada $j = 1, \dots, n$. Então, a função vetorial $S(\cdot)u_0 = (S(\cdot)u_0^1, \dots, S(\cdot)u_0^n)$ satisfaz $S(\cdot)u_0^j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$, ou seja $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{X}$. Além disso, temos a desigualdade*

$$\|S(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}} \leq \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}.$$

Demonstração. Usando a definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}$, vemos que

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} &= \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{n-1} |e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0^j(\xi)| \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0^j(\xi)| \\ &= \|u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \leq \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\|S(t)u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \leq \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}},$$

para cada $t \geq 0$. Daqui segue claramente que $\|S(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}} \leq \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}$.

Resta mostrar a continuidade fraca, com respeito a t , de cada $S(\cdot)u_0^j$. Pela propriedade de semigrupo de $S(t)$, basta mostrar isto somente no caso $t = 0$. Assim, dada uma $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle S(t)u_0^j - u_0^j, \phi \rangle| &= |\langle (S(t)u_0^j)^\wedge - (u_0^j)^\wedge, \check{\phi} \rangle| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-t|\xi|^2} - 1| |(u_0^j)^\wedge(\xi)| |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} t \frac{|e^{-t|\xi|^2} - 1|}{t|\xi|^2} |\xi|^{n-1} |(u_0^j)^\wedge(\xi)| |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&\leq t \cdot \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|e^{-t|\xi|^2} - 1|}{t|\xi|^2} \|u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \|\xi|^{3-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $t \rightarrow 0^+$. Logo, fica claro que $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{X}$, o que completa a prova. \square

No próximo lema, para $F = (F_1, \dots, F_n)$ um vetor com componentes $F_j \in \mathcal{PM}^{n-3}$, assumimos que

$$|\hat{F}(\xi)| = \sum_{j=1}^n |\hat{F}_j(\xi)|. \quad (2.21)$$

Assim, com esta suposição, definimos a norma $\|F\|_{\mathcal{PM}^{n-3}}$ como no caso do espaço \mathcal{PM}^{n-1} . Precisamente,

$$\|F\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{n-3} |\hat{F}(\xi)|.$$

Observação 2.12. *Note que a escolha de uma particular norma de um vetor v em \mathbb{R}^n não afeta essencialmente os resultados, pois elas são todas equivalentes, embora as constantes que aparecem possam mudar.*

Lema 2.13. *Seja $F = (F_1, \dots, F_n)$ uma função vetorial com componentes $F_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$. Então*

$$w(t) := \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}F(\tau) d\tau \in \mathcal{X}.$$

Além disso, temos a desigualdade

$$\|w\|_{\mathcal{X}} \leq \sup_{t \geq 0} \|F(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}}. \quad (2.22)$$

Demonstração. Em vista de (2.14), temos que $w(t) = (w^1(t), \dots, w^n(t))$ com $w^j(t) = \int_0^t S(t-\tau)(F_j(\tau) + \sum_{l=1}^n R_j R_l F_l(\tau)) d\tau$. Logo

$$\begin{aligned} \|w^j(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^{n-1} e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |((\mathbb{P}F(\tau))_j)^\wedge(\xi)| d\tau \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^{n-1} e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi, \tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Usando (2.21) e a norma do máximo em \mathbb{R}^n para calcular $|\hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi, \tau)|$, temos que $|\hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi, \tau)| \leq |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| |\hat{F}(\xi, \tau)|$, onde claramente $|\hat{\mathbb{P}}(\xi)| = \max_{j,l} |(\hat{\mathbb{P}}(\xi))_{j,l}| \leq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|w^j(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-3} |\hat{F}(\xi, \tau)| d\tau \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} d\tau \\ &\leq \sup_{t \geq 0} (\|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}}) \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 - e^{-t|\xi|^2}) \\ &\leq \sup_{t \geq 0} (\|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Relembrando a definição da norma de \mathcal{X} , a desigualdade (2.23) implica a estimativa (2.22), concluindo a demonstração.

Resta mostrar a continuidade fraca, com respeito a $t \geq 0$, de cada componente do campo $w(t)$. De fato, sejam $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $t > 0$ fixados, e $s \geq 0$. Supondo que $s < t$, temos

$$|\langle w^j(t) - w^j(s), \phi \rangle|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} ((\mathbb{P}F)_j(\tau))^\wedge(\xi) \check{\phi}(\xi) d\tau d\xi \right| + \\ &\quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s (e^{-(t-\tau)|\xi|^2} - e^{-(s-\tau)|\xi|^2}) ((\mathbb{P}F)_j(\tau))^\wedge(\xi) \times \check{\phi}(\xi) d\tau d\xi \right|. \end{aligned}$$

Repetindo a estimativa para $|\mathbb{P}(\hat{\xi})\hat{F}(\xi, \tau)|$, obtemos que

$$\begin{aligned} |\langle w^j(t) - w^j(s), \phi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{F}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s |e^{-(t-\tau)|\xi|^2} - e^{-(s-\tau)|\xi|^2}| |\hat{F}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Podemos estimar I_1 como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-3} |\hat{F}(\xi, \tau)| |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\ &\leq \sup_{\tau \geq 0} (\|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}}) \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\ &\leq (t-s) \sup_{\tau \geq 0} (\|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}}) \|\xi|^{3-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Analogamente, para I_2 temos que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-(s-\tau)|\xi|^2} |e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1| |\hat{F}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\ &\leq (t-s) \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \right) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s |\xi|^2 e^{-(s-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-3} |\hat{F}(\xi, \tau)| |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\ &\leq (t-s) \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \right) \\ &\quad \times \sup_{\tau \geq 0} (\|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}}) \|\xi|^{3-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que

$$\int_0^s |\xi|^2 e^{-(s-\tau)|\xi|^2} = (1 - e^{-s|\xi|^2}) \leq 1.$$

Inserindo (2.25) e (2.26) em (2.24), segue que

$$\begin{aligned} |\langle w^j(t) - w^j(s), \phi \rangle| &\leq (t-s) \sup_{\tau \geq 0} (\|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}}) \| |\xi|^{3-n} \check{\phi} \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad \times (1 + \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \right)). \end{aligned}$$

O caso $t < s$ pode ser tratado analogamente. Finalmente, quando $t = 0$ temos que $w^j(s) \rightarrow 0 = w^j(0)$ fracamente quando $s \rightarrow 0^+$. De fato,

$$\begin{aligned} |\langle w_j(s), \phi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-(s-\tau)|\xi|^2} |\hat{F}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-(s-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \sup_{t \geq 0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \\ &\leq s \| |\xi|^{3-n} \check{\phi} \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \sup_{t \geq 0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $s \rightarrow 0^+$, o que conclui a prova. \square

A seguir, tratamos com a forma bilinear $B(u, v)$ definida em (2.20).

Proposição 2.14. *O operador bilinear $B(\cdot, \cdot)$ é contínuo no espaço \mathcal{X} , isto é, existe uma constante $\eta > 0$ tal que*

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}} \leq \eta \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}},$$

para todo $u, v \in \mathcal{X}$.

Demonstração. Igual à prova do lema 2.13, usamos a norma do máximo nas estimativas abaixo. Dados $u, v \in \mathcal{X}$ temos

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau)| &\leq (2\pi)^{-n/2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| \sum_{j,k} |\xi_k (\hat{u}_j(\tau) * \hat{v}_k(\tau))(\xi)| \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \sum_{j,k} |\xi_k (\hat{u}_j(\tau) * \hat{v}_k(\tau))(\xi)|. \end{aligned}$$

Por outro lado, usamos a proposição 1.10 (pg. 12 do capítulo 1), para obter

$$\begin{aligned}
|\xi_k(\hat{u}_j(\tau) * \hat{v}_k(\tau))(\xi)| &= |\xi_k| \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_j(z, \tau) \hat{v}_k(\xi - z, \tau) dz \right| \\
&\leq |\xi| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|z|^{n-1} |\xi - z|^{n-1}} |z|^{n-1} |\hat{u}_j(z, \tau)| \\
&\quad \times |\xi - z|^{n-1} |\hat{v}_k(\xi - z, \tau)| dz \\
&\leq |\xi| (|z|^{1-n} * |z|^{1-n})(\xi) \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\
&= C(n) |\xi|^{3-n} \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}},
\end{aligned}$$

onde $C(n) = \pi^{\frac{2-n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{(\Gamma(\frac{n-1}{2}))^2}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &= \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{n-1} \left| \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau) d\tau \right| \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} C(n) \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \times \\
&\quad \left(\sum_{j,k=1}^n \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \right) d\tau \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} C(n) n^2 \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Logo, como a desigualdade (2.27) é válida para cada $t > 0$, conclui-se que

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}} \leq (2\pi)^{-n/2} C(n) n^2 \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}}.$$

Então, pode-se escolher $\eta = (2\pi)^{-n/2} C(n) n^2$ e segue a continuidade da forma bilinear.

Agora, para concluir que de fato $B(u, v)(\cdot) \in \mathcal{X}$, temos que mostrar a continuidade fraca em $t \geq 0$ de cada uma das componentes. Sejam $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $t > 0$ fixos. Para cada $s < t$, temos

$$\begin{aligned}
| \langle (B(u, v)(t))^j - (B(u, v)(s))^j, \phi \rangle | &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{\mathbb{P}}i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau)| \\
&\quad \times |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s |e^{-(t-\tau)|\xi|^2} - e^{-(s-\tau)|\xi|^2}| \\
&\quad \times |\hat{\mathbb{P}}i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau)| d\tau |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&=: I_1 + I_2. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Tendo em vista as estimativas da primeira parte da demonstração, é fácil obter as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq (2\pi)^{-n/2} C(n) \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{3-n} \\
&\quad \times \sum_{j,k=1}^n \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \eta \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}} \|\xi|^{3-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}(t-s). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se a estimativa para I_2 como segue:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq (2\pi)^{-n/2} C(n) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-(s-\tau)|\xi|^2} |e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1| |\xi|^{3-n} \\
&\quad \sum_{j,k=1}^n \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} d\tau |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&\leq \eta(t-s) \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \right) \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s |\xi|^2 e^{-(s-\tau)|\xi|^2} d\tau |\xi|^{3-n} \check{\phi}(\xi) d\xi \\
&\leq \eta \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \right) \\
&\quad \times \|\xi|^{3-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}(t-s). \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Inserindo (2.29) e (2.30) em (2.28), obtemos

$$\begin{aligned} |\langle (B(u, v)(t))^j - (B(u, v)(s))^j, \phi \rangle| &\leq \eta \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}} \|\check{\xi}^{3-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} (t-s) \\ &\quad \left(1 + \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \right)\right). \end{aligned}$$

Similarmente, obtém-se expressões para o caso $t < s$ que vão para zero quando $s \rightarrow t$. Portanto, fica provada a continuidade fraca em $t > 0$. Para o caso $t = 0$ a prova é análoga, completando a demonstração. \square

Agora, estamos prontos para apresentar o primeiro resultado importante da referencia [5], o qual garante a existência e unicidade de soluções do sistema (2.1)-(2.3) em espaços \mathcal{PM}^a .

Teorema 2.15. *Sejam $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$ com $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ tal que $\nabla \cdot u_0 = 0$ e $F = (F_1, \dots, F_n)$ com $F_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$, $j = 1, \dots, n$, tais que*

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t>0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \leq \epsilon,$$

para algum $0 < \epsilon < \frac{1}{4\eta}$, onde η é como na proposição 2.14. Então, existe uma solução do sistema (2.1)-(2.3) no espaço \mathcal{X} . Esta solução é a única satisfazendo a condição $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon$ e ela depende continuamente do dado inicial u_0 e a força F no sentido do lema 2.9. Além disso, temos que $\nabla \cdot u(t) = 0$ para cada $t > 0$ no sentido de distribuições.

Demonstração. A demonstração está quase feita, resta apenas juntar as peças. Relembremos a notação

$$y = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-\tau)\mathbb{P}F(\tau)d\tau.$$

Então, os lemas 2.11 e 2.13 implicam que

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{X}} &\leq \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t \geq 0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Pela proposição 2.14, a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ satisfaz as hipóteses do lema 2.9. Logo, existe uma única solução $u \in \mathcal{X}$ da equação $u = y + B(u, u)$, tal que $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon$.

Por outro lado, sejam \bar{u}_0 e \bar{F} como no enunciado do teorema, tais que $\|\bar{u}_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t \geq 0} \|\bar{F}(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} < \epsilon$, e seja $\bar{u} \in \mathcal{X}$ a solução associada a esses dados. Então, aplicando simultaneamente os lemas 2.9, 2.11 e 2.13, temos que

$$\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{1 - 4\eta\epsilon} (\|u_0 - \bar{u}_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t \geq 0} \|F(t) - \bar{F}(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}}), \quad (2.31)$$

o que mostra a dependência contínua nos dados. A condição de ser solenoidal segue de uma conta simples calculando $\nabla \cdot$ na expressão integral de u e usando a observação 2.3. \square

Observação 2.16. *Note que na demonstração anterior, a unicidade segue também da relação (2.31).*

2.6 Soluções Auto-similares.

Suponha que as funções u e p sejam uma solução formal (suave) das equações de Navier-Stokes (2.1)-(2.2). Seja $\lambda > 0$. Então, não é difícil verificar que as funções $u_\lambda(x, t) := \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ e $p_\lambda(x, t) := \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ são de novo uma solução das equações (2.1)-(2.2). Sobre certas condições nos dados, é possível mostrar que u e u_λ são soluções das equações (2.1)-(2.3), no sentido da definição 2.6. Uma pergunta natural é saber quando uma solução é invariante pelo *scaling* $u \rightarrow u_\lambda$ do sistema (2.1)-(2.3).

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.17. *Uma solução branda do sistema (2.1)-(2.3) satisfazendo a condição $u_\lambda = u$ é chamada de solução auto-similar.*

Nesta direção, como aplicação do teorema 2.15, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.18. *Suponha que o dado inicial $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$, $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ é tal que todas as u_0^j 's são distribuições homogêneas de grau -1 . Seja $F = (F_1, \dots, F_n)$ com $F_j \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$, tal que*

$$\lambda^3 F(\lambda x, \lambda^2 t) = F(x, t), \quad (2.32)$$

no sentido das distribuições. Se u_0 e F satisfazem as hipóteses do teorema 2.15, então a única solução associada a esses dados é auto-similar.

Demonstração. Seja $\lambda > 0$. Primeiro observemos as seguintes igualdades:

$$\lambda^{1-n} e^{-\lambda^2 t |\lambda^{-1} \xi|^2} \hat{u}_0(\lambda^{-1} \xi) = e^{-t |\xi|^2} \hat{u}_0(\xi), \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^{1-n} \int_0^{\lambda^2 t} e^{-(\lambda^2 t - \tau) |\lambda^{-1} \xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\lambda^{-1} \xi) \hat{F}(\lambda^{-1} \xi, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-(t-s) |\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) \lambda^{3-n} \hat{F}(\lambda^{-1} \xi, \lambda^2 s) ds, \end{aligned} \quad (2.34)$$

e

$$\begin{aligned} & \lambda^{2-n} (2\pi)^{-n/2} (\hat{u}_j(\lambda^2 \tau) * \hat{u}_j(\lambda^2 \tau))(\lambda^{-1} \xi) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{1-n} \hat{u}_j(\lambda^{-1} z, \lambda^2 \tau) \lambda^{1-n} \hat{u}_k(\lambda^{-1}(\xi - z), \lambda^2 \tau) dz \\ &= (2\pi)^{-n/2} ((u_\lambda)_j^\wedge * (u_\lambda)_k^\wedge)(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde em (2.33) usamos o fato que u_0 é homogênea de grau -1 . Nas contas anteriores, foi usada também a identidade (1.15), pg. 12.

Finalmente, substituindo (2.32) em (2.34) e usando o fato que u é uma solução *branda*, obtemos

$$\begin{aligned} (u_\lambda)^\wedge(\xi, \tau) &= e^{-t |\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-\tau) |\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u_\lambda \otimes u_\lambda})(\xi, \tau) d\tau \\ &+ \int_0^t e^{-(t-\tau) |\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Por outro lado, calculando a norma de u_λ temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_{\mathcal{X}} &= \sup_{t \geq 0} \|u_\lambda(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \\
&= \sup_{t \geq 0} \left(\operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{n-1} |\lambda^{1-n} \hat{u}(\lambda^{-1}\xi, \lambda^2 t)| \right) \\
&= \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, u e u_λ são duas soluções *brandas*, com dado inicial u_0 e força F , na bola de centro 0 e raio 2ϵ do espaço \mathcal{X} . A unicidade do teorema 2.15 garante que $u = u_\lambda$. \square

Capítulo 3

Comportamento Assintótico e Soluções Estacionárias

Neste capítulo é discutido o comportamento (assintótico) das soluções do sistema (2.1)-(2.3) quando a variável temporal $t \rightarrow \infty$. Além disso, é estudada a existência de soluções estacionárias para o sistema (2.1)-(2.2).

3.1 Comportamento Assintótico das Soluções

É natural perguntar-se: o que acontece com as soluções de (2.1)-(2.3), quando $t > 0$ torna-se arbitrariamente grande? Uma forma de responder a essa pergunta é fazendo uma comparação entre duas soluções e ver o que acontece para $t > 0$ arbitrariamente grande.

Para responder a pergunta, no sentido descrito acima, precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.1. *Seja $F = (F_1, \dots, F_n)$, $F_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$, tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} = 0.$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}F(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} = 0.$$

Demonstração. Lembremos que, no caso do espaço $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}$, temos a seguinte suposição $|\hat{F}(\xi, t)| = \sum_{j=1}^n |\hat{F}_j(\xi, t)|$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\xi|^{n-1} \left| \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} (\mathbb{P}F)_j^\wedge(\xi, \tau) d\tau \right| &\leq \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| |\xi|^{n-3} |\hat{F}(\xi, \tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} d\tau \\ &= \int_0^{t/2} |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} d\tau \\ &\quad + \int_{t/2}^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} d\tau \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Agora, podemos estimar I_1 como segue:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{t/2} (t-\tau) |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} (t-\tau)^{-1} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} d\tau \\ &\leq \sup_{w \in \mathbb{R}^n} (|w|^2 e^{-|w|^2}) \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} \|F(st)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} ds, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde uma conta simples mostra que $\sup_{w \in \mathbb{R}^n} (|w|^2 e^{-|w|^2}) = e^{-1}$. Também temos que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq (1 - e^{-t/2|\xi|^2}) \sup_{t/2 \leq \tau \leq t} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} \\ &\leq \sup_{t/2 \leq \tau \leq t} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Inserindo (3.2) e (3.3) em (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t S(t-\tau) (\mathbb{P}F)_j d\tau \right\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} \|F(st)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} ds \\ &\quad + \sup_{t/2 \leq \tau \leq t} \|F(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, note que $\lim_{t \rightarrow \infty} (1-s)^{-1} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} = 0$ para cada $s \in (0, 1/2)$, e além disso

$$(1-s)^{-1} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \leq (1-s)^{-1} \sup_{t \geq 0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \in L^1(0, 1/2).$$

Assim, o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s) \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} ds = 0.$$

Note também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{t/2 \leq \tau \leq t} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \right) = 0.$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t S(t-\tau) (\mathbb{P}F)_j d\tau \right\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0,$$

para cada $j = 1, \dots, n$, como desejado. □

Agora, estamos prontos para responder a pergunta feita no início deste capítulo, no sentido da comparação entre soluções, por meio do seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Assuma as hipóteses do teorema 2.15. Sejam u e v duas soluções brandas do sistema (2.1)-(2.3) dadas pelo teorema 2.15 e correspondentes aos dados iniciais u_0, v_0 , com componentes no espaço \mathcal{PM}^{n-1} , e as forças externas $F = (F_1, \dots, F_n)$, $G = (G_1, \dots, G_n)$ com $F_j, G_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$, respectivamente. Suponha também que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \|F(t) - G(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} = 0. \quad (3.4)$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0. \quad (3.5)$$

Demonstração. Seja η a constante definida na proposição 2.14. Temos, pelo teorema 2.15, as seguintes desigualdades:

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \leq 2\epsilon < 1/2\eta, \quad (3.6)$$

$$\|v\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t \geq 0} \|v(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \leq 2\epsilon < 1/2\eta. \quad (3.7)$$

Subtraindo as expressões integrais de u, v e estimando a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}$ de $u(t) - v(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} + \|B(u, u)(t) - B(v, v)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &\quad + \left\| \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}(F(\tau) - G(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Procedendo similarmente à prova da proposição 2.14, estimamos a parte bilinear por

$$\begin{aligned} \|B(u, u)(t) - B(v, v)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq \|B(u - v, u)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &\quad + \|B(u, u - v)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &\leq \eta \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \\ &\quad \times \|u(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|(u - v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} d\tau \\ &\quad + \eta \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \\ &\quad \times \|v(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|(u - v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.9)$$

As desigualdades (3.6) e (3.7), junto com (3.9), implicam que

$$\begin{aligned} \|B(u, u)(t) - B(v, v)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq 4\eta\epsilon \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \\ &\quad \times \|(u - v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} d\tau. \end{aligned}$$

Agora, escolhemos um número $\delta \in (0, 1)$, que será determinado mais adiante, e definimos as quantidades I_1 e I_2 pela igualdade

$$I_1 + I_2 := \int_0^{\delta t} |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} d\tau + \int_{\delta t}^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} d\tau.$$

Então, pode-se majorar I_1 como segue:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2} \int_0^{\delta t} (t-\tau)^{-1} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} d\tau \\ &= e^{-1} \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \|(u-v)(ts)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} ds. \end{aligned}$$

Similarmente majoramos I_2 por

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sup_{\delta t \leq \tau \leq t} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \int_{\delta t}^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} d\tau \\ &\leq \sup_{\delta t \leq \tau \leq t} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}. \end{aligned}$$

Em resumo, temos obtido que

$$\begin{aligned} \|B(u, u)(t) - B(v, v)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq 4\eta\epsilon e^{-1} \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \|(u-v)(ts)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} ds \\ &\quad + 4\eta\epsilon \sup_{\delta t \leq \tau \leq t} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Agora, vamos estimar o lado direito de (3.10). Denotamos

$$A := \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \equiv \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}},$$

e observamos que $0 \leq A \leq 4\epsilon$. Vamos mostrar que $A = 0$. Para isto, note que

$$\begin{aligned} &\sup_{t \geq k} \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \|(u-v)(ts)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} ds \\ &\leq \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \sup_{t \geq k} \|(u-v)(ts)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^\delta (1-s)^{-1} \|(u-v)(ts)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} ds &\leq A \int_0^\delta (1-s)^{-1} ds \\ &= A \ln [(1-\delta)^{-1}]. \end{aligned}$$

Por outro lado, desde que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq k} \sup_{\delta t \leq \tau \leq t} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq \sup_{t \geq k} \sup_{\delta k \leq \tau < \infty} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &= \sup_{\delta k \leq \tau < \infty} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}, \end{aligned}$$

obtêm-se a desigualdade

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{\delta t \leq \tau \leq t} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \right) \leq A.$$

Agora, definindo a função

$$g(t) := \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} + \left\| \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}(F(\tau) - G(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}},$$

usando a hipótese (3.4) e aplicando o lema 3.1 para $F - G$, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

Substituindo (3.10) em (3.8), segue que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &\leq g(t) + 4\eta\epsilon e^{-1} \int_0^\delta (1-s)^{-1} \|(u-v)(ts)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} ds \\ &\quad + 4\eta\epsilon \sup_{\delta t \leq \tau \leq t} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Finalmente, calculando o \limsup em (3.12), obtemos

$$A \leq (4\eta\epsilon e^{-1} \ln [(1-\delta)^{-1}] + 4\eta\epsilon)A.$$

Mas, uma conta simples mostra que, se escolhermos δ tal que $0 < \delta < 1 - \exp(\frac{4\eta\epsilon-1}{4\eta\epsilon}e)$, então

$$4\eta\epsilon e^{-1} \ln [(1 - \delta)^{-1}] + 4\eta\epsilon < 1.$$

Portanto, segue que $A = 0$ e a prova está completa. \square

Observação 3.3. *O teorema anterior diz que se a diferença das soluções da equação do calor com dados iniciais u_0 e v_0 torna-se insignificante quando $t \rightarrow \infty$, e se as forças F e G possuem o mesmo comportamento assintótico, então as soluções do problema não linear (2.1)-(2.3) também se comportam similarmente quando $t \rightarrow \infty$.*

Observação 3.4. *Uma pergunta natural é: quando pode-se verificar a primeira igualdade da hipótese (3.4) do teorema 3.2? Nesta direção, uma condição suficiente é, por exemplo, quando*

$$|\xi|^{n-1}(\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)) \rightarrow 0, \text{ se } \xi \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Em particular, se $u_0 - v_0$ tem componentes em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então (3.13) é verificada.

De fato, para $\epsilon > 0$ arbitrário, por hipótese pode-se achar um $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} e^{-t|\xi|^2} |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| &\leq |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

sempre que $|\xi| < \delta$. Mas, se $|\xi| \geq \delta$ tem-se

$$e^{-t|\xi|^2} |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| \leq e^{-t\delta^2} \|u_0 - v_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}.$$

Assim, pode-se escolher $\bar{t} = t(\delta) > 0$ suficientemente grande tal que

$$e^{-t|\xi|^2} |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| < \epsilon \quad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

para todo $t > \bar{t}$.

Uma adaptação da prova do teorema 3.2 permite obter uma condição necessária para (3.5). Este fato é dado pelo seguinte resultado:

Corolário 3.5. *Assuma as hipóteses do teorema 2.15. Sejam $u, v \in \mathcal{X}$ duas soluções brandas do sistema (2.1)-(2.3) correspondentes aos dados iniciais $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$, $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^n)$ com $u_0^j, v_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ e as forças externas $F = (F_1, \dots, F_n)$, $G = (G_1, \dots, G_n)$ com $F_j, G_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$. Suponha que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0.$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0) + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}(F(t) - G(t)) d\tau\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0.$$

Demonstração. A demonstração é similar à prova do teorema 3.2. De fato, é mais simples. Primeiro, denotemos

$$h(t) := \|S(t)(u_0 - v_0) + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}(F(t) - G(t)) d\tau\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}.$$

Temos a desigualdade

$$h(t) \leq \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \|B(u, u)(t) + B(v, v)(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}.$$

Tomando $\delta = \frac{1}{2}$ na relação (3.10) da prova do teorema 3.2, tem-se que

$$\begin{aligned} h(t) &\leq \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + 4\eta\epsilon e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} \|(u-v)(ts)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} ds \\ &\quad + 4\eta\epsilon \sup_{t/2 \leq \tau \leq t} \|(u-v)(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

É claro que a primeira e última parcela de (3.14) vão para zero quando $t \rightarrow \infty$. A segunda parcela vai para zero, por um argumento usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, como na prova do lema 3.1. Portanto, segue a afirmação. \square

3.2 Soluções Estacionárias

Nesta seção estudamos o sistema (2.1)-(2.2), quando a força F e a solução u não dependem do tempo. Prova-se que existe uma única solução que não depende da variável $t > 0$ e que essa solução é assintoticamente estável sob certas condições.

Lembre-se que, desde que trabalhamos no espaço \mathcal{PM}^a , as igualdades abaixo devem ser entendidas nas variáveis de Fourier.

A seguir apresentamos uma equivalência de equações.

Lema 3.6. *Seja $u = (u_1, \dots, u_n)$ com $u_j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ e $F = (F_1, \dots, F_n)$ com $F_j \in \mathcal{PM}^{n-3}$, $j = 1, \dots, n$ (note que aqui u e F não dependem do tempo). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O vetor u é uma solução do sistema (2.1)-(2.2) no sentido da definição 2.6, i.e. u é solução da equação integral*

$$\begin{aligned} u &= S(t)u - \int_0^t S(t-\tau)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)d\tau \\ &\quad + \int_0^t S(t-\tau)\mathbb{P}F d\tau, \end{aligned} \tag{3.15}$$

para cada $t > 0$.

(2) *O vetor u satisfaz a equação integral*

$$\begin{aligned} u &= - \int_0^\infty S(\tau)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty S(\tau)\mathbb{P}F d\tau, \end{aligned} \tag{3.16}$$

nas variáveis de Fourier e em quase todo ponto em \mathbb{R}^n .

Demonstração. Temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\xi) &= e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi) - \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi) d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi) d\tau \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n, \\
\Leftrightarrow \\
(1 - e^{-t|\xi|^2}) \hat{u}(\xi) &= -\frac{1}{|\xi|^2} (1 - e^{-t|\xi|^2}) \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi) \\
&\quad + \frac{1}{|\xi|^2} (1 - e^{-t|\xi|^2}) \hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n, \\
\Leftrightarrow \\
\hat{u}(\xi) &= -\frac{1}{|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi) \\
&\quad + \frac{1}{|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

A identidade $\frac{1}{|\xi|^2} = \int_0^\infty e^{-\tau|\xi|^2} d\tau$ implica que a última igualdade é equivalente a

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\xi) &= -\int_0^\infty e^{-\tau|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi) d\tau \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-\tau|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) \hat{F}(\xi) d\tau, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. \square

Definição 3.7. *Uma solução estacionária do sistema (2.1)-(2.2), no sentido da definição 2.6, é um vetor $u = (u_1, \dots, u_n)$ com $u_j \in \mathcal{PM}^{n-1}$, para todo $j = 1, \dots, n$, que satisfaz (3.16).*

O seguinte teorema afirma que existe uma solução estacionária de (2.1)-(2.2).

Teorema 3.8. *Seja $F = (F_1, \dots, F_n)$, $F_j \in \mathcal{PM}^{n-3}$ para cada $j = 1, \dots, n$, tal que $\|F\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} < \epsilon < \frac{1}{4\eta}$. Então existe uma solução estacionária u_∞ para o sistema de Navier-Stokes (2.1)-(2.2) com componentes no espaço \mathcal{PM}^{n-1} e com F sendo a força externa. Esta solução é a única satisfazendo a condição $\|u_\infty\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \leq 2\epsilon$.*

Demonstração. Para $u, v \in \prod_{j=1}^n \mathcal{PM}^{n-1} = \mathcal{PM}^{n-1} \times \dots \times \mathcal{PM}^{n-1}$ (produto cartesiano), definimos

$$\widehat{B(u, v)}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\tau|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi) d\tau.$$

Afirmamos que $B : \prod_{j=1}^n \mathcal{PM}^{n-1} \times \prod_{j=1}^n \mathcal{PM}^{n-1} \rightarrow \prod_{j=1}^n \mathcal{PM}^{n-1}$ é uma forma bilinear limitada. De fato, usando estimativas similares às da demonstração da proposição 2.14, temos

$$\begin{aligned} |\xi|^{n-1} |\widehat{B_j(u, v)}(\xi)| &\leq |\xi|^{n-1} \int_0^\infty e^{-\tau|\xi|^2} |\widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi)| d\tau \\ &\leq \eta \|u\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \dots, n$, onde lembre que

$$\|u\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = \max_{1 \leq j \leq n} \{\|u_j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}\},$$

para $u \in \prod_{j=1}^n \mathcal{PM}^{n-1}$. Logo segue a afirmação.

Mostremos também que $w := \int_0^\infty e^{-\tau|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) \widehat{F}(\xi) d\tau \in \prod_{j=1}^n \mathcal{PM}^{n-1}$. De fato, temos

$$\begin{aligned} |\xi|^{n-1} |\widehat{w}_j(\xi)| &\leq |\xi|^{n-1} |\widehat{\mathbb{P}}(\xi) \widehat{F}(\xi)| \int_0^\infty e^{-\tau|\xi|^2} d\tau \\ &\leq |\xi|^{n-1} |\widehat{F}(\xi)| |\xi|^{-2} \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{PM}^{n-3}}. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos o lema 2.9 ao espaço de Banach $\prod_{j=1}^n \mathcal{PM}^{n-1}$ para achar uma solução u_∞ que satisfaz

$$u_\infty = B(u_\infty, u_\infty) + w.$$

Além disso, u_∞ é a única solução tal que $\|u_\infty\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \leq 2\epsilon$. □

Finalmente, como uma aplicação do teorema 3.2, temos um resultado de estabilidade assintótica para soluções estacionárias.

Corolário 3.9. *Suponha que u_∞ é a solução estacionária construída no teorema 3.8 correspondente à força externa F . Suponha que v_0 é um vetor com componentes no espaço \mathcal{PM}^{n-1} e $G = (G_1, \dots, G_n)$ com $G_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$ são tais que $\|v_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t \geq 0} \|G(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \leq \epsilon < 1/4\eta$. Se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(v_0 - u_\infty)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t) - F\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} = 0,$$

então, a solução $v = v(x, t)$ de (2.1)-(2.3), correspondente a v_0 e G , converge à solução estacionária u_∞ no seguinte sentido:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t) - u_\infty\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0.$$

Demonstração. A prova deste corolário é uma aplicação imediata do teorema 3.2 devido à equivalência dada no lema 3.6, pois u_∞ pode ser vista como uma função constante (no tempo) em $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$. □

Capítulo 4

Regularidade da Solução

Neste capítulo estudamos a regularidade de soluções *brandas* do sistema (2.1)-(2.3). Analisamos o efeito da regularização parabólica das equações de Navier-Stokes e mostramos que, quando a força externa é identicamente nula e o dado inicial é pequeno, a solução fornecida pelo teorema 2.15 é de classe C^∞ e satisfaz (2.1)-(2.2) no sentido clássico, para $t > 0$.

4.1 Norma Regularizante.

Precisamos do seguinte espaço para estabelecer os resultados de regularização.

Definição 4.1. *Seja $n - 1 \leq a < n$. Definimos o espaço*

$$\mathcal{Y}^a := \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1}) \cap \{v : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{PM}^a : \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} < \infty\}.$$

Também definimos a seguinte quantidade

$$\|v\|_a := \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|v(t)\|_{\mathcal{PM}^a},$$

para munirmos o espaço \mathcal{Y}^a com a norma $\|v\|_{\mathcal{Y}^a} := \|v\|_{n-1} + \|v\|_a$.

Com esta definição, note que $\mathcal{Y}^{n-1} = \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$. Agora, como era de se esperar, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.2. *O espaço \mathcal{Y}^a é Banach com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}^a}$.*

Demonstração. É fácil mostrar que a quantidade $\|\cdot\|_a$ é uma norma no espaço $V^a := \{v : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{PM}^a : \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} < \infty\}$. Mostremos então que V^a é um espaço de Banach com esta norma. De fato, seja $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em V^a . Fixado $s > 0$, porém arbitrário, temos que

$$s^{\frac{a-n+1}{2}} \|v_k(s) - v_l(s)\|_{\mathcal{PM}^a} \leq \|v_k - v_l\|_a, \quad (4.1)$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $(s^{\frac{a-n+1}{2}} v_k(s))_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy no espaço \mathcal{PM}^a , e como este é Banach, então existe $\bar{v}(s) \in \mathcal{PM}^a$ tal que $s^{\frac{a-n+1}{2}} v_k(s) \rightarrow \bar{v}(s)$ em \mathcal{PM}^a . Definamos $v(s) := s^{\frac{n-a-1}{2}} \bar{v}(s)$ e mostremos que $v_k \rightarrow v$ em V^a . Seja $\epsilon > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, l \geq k_0$ implique

$$s^{\frac{a-n+1}{2}} \|v_k(s) - v_l(s)\|_{\mathcal{PM}^a} < \epsilon/2,$$

onde k_0 não depende de $s > 0$, por causa de (4.1). Agora, fazendo $l \rightarrow \infty$ obtemos

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|s^{\frac{a-n+1}{2}} v_k(s) - \bar{v}(s)\|_{\mathcal{PM}^a} \leq \epsilon/2.$$

Como $s > 0$ é arbitrário, temos que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{s>0} s^{\frac{a-n+1}{2}} \|v_k(s) - v(s)\|_{\mathcal{PM}^a} \leq \epsilon,$$

de onde segue que $v_k \rightarrow v$ em V^a .

Finalmente, seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em \mathcal{Y}^a . Isto implica que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$ e no espaço V^a . Como estes espaços são Banach, existem funções $u \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$ tal que $u_k \rightarrow u$, e $v \in V^a$ tal que $u_k \rightarrow v$, nas respectivas normas. Mostremos que estas funções são, de fato, as mesmas. Sejam $t > 0$ fixo e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos que

$$\begin{aligned}
|\langle u(t) - v(t), \phi \rangle| &\leq |\langle u(t) - u_k(t), \phi \rangle| + |\langle u_k(t) - v(t), \phi \rangle| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(t) - \hat{u}_k(t)| |\check{\phi}| d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_k(t) - \hat{v}(t)| |\check{\phi}| d\xi \\
&\leq \|u(t) - u_k(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \|\xi|^{1-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \|u_k(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \|\xi|^{-a} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|u - u_k\|_{n-1} \cdot \|\xi|^{1-n} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + t^{\frac{n-a-1}{2}} \|u_k - v\|_a \cdot \|\xi|^{-a} \check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

portanto $u(t) = v(t)$ para cada $t > 0$. □

Observação 4.3. Usando a identidade (1.15) (pg. 12), temos que $\|\cdot\|_a$ é invariante pelo *scaling*

$$u_\lambda := \lambda[u(\lambda^2 t)]_\lambda = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t),$$

onde $\lambda > 0$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_a &= \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u_\lambda(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \lambda^{a-n+1} \|u(\lambda^2 t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&= \sup_{t>0} (t\lambda^2)^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(\lambda^2 t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&= \|u\|_a.
\end{aligned}$$

4.2 Estimativas para as Normas Regularizantes

A seguir apresentamos uma generalização da proposição 2.14.

Proposição 4.4. *Seja $n - 1 \leq a < n$. Existe uma constante $\beta_a > 0$ tal que, se $u(t) = (u_1, \dots, u_n)$, $u_j(\cdot) \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-1})$ e $v(t) = (v_1, \dots, v_n)$, $v_j(\cdot) \in \{v : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{PM}^a : \|v\|_a < \infty\}$, então*

$$\|B_j(u, v)\|_a \leq \beta_a \|u\|_{n-1} \|v\|_a,$$

para cada $j = 1, \dots, n$, onde $\|v\|_a = \max_{1 \leq j \leq n} \|v_j\|_a$.

Demonstração. Assuma que $a > n - 1$. Como feito anteriormente, pode-se estimar

$$|\hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau)| \leq (2\pi)^{-n/2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| \sum_{j,k=1}^n |\xi_k (\hat{u}_j(\tau) * \hat{v}_k(\tau))(\xi)|,$$

onde usamos a norma do máximo e a norma da soma em \mathbb{R}^n para calcular $|\hat{\mathbb{P}}(\xi)| = \max_{1 \leq j, k \leq n} |(\hat{\mathbb{P}}(\xi))_{j,k}| \leq 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} |\xi_k (\hat{u}_j(\tau) * \hat{v}_k(\tau))(\xi)| &\leq |\xi| \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_j(z, \tau)| |\hat{v}_k(\xi - z, \tau)| dz \\ &\leq |\xi| (|z|^{1-n} * |z|^{-a})(\xi) \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}. \end{aligned}$$

Agora, aplicamos a proposição 1.10 (pg.12) para obter a seguinte estimativa:

$$|\xi_k (\hat{u}_j(\tau) * \hat{v}_k(\tau))(\xi)| \leq C(n, a) |\xi|^{2-a} \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a},$$

onde temos explicitamente que $C(n, a) = \pi^{\frac{1-n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{a-1}{2})\Gamma(\frac{n-a}{2})}{\Gamma(\frac{n-a+1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{a}{2})}$.

Usando a última desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau)| &\leq (2\pi)^{-n/2} C(n, a) |\xi|^{2-a} \sum_{j,k=1}^n \|u_j(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \|v_k(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} C(n, a) n^2 |\xi|^{2-a} \tau^{\frac{n-a-1}{2}} \|u\|_{n-1} \|v\|_a. \end{aligned}$$

A seguir, procedemos a estimar as componentes da forma bilinear:

$$\begin{aligned} |\xi|^a |\widehat{B_j}(u, v)(\xi, t)| &\leq |\xi|^a \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, \tau)| d\tau \\ &\leq K(n, a) \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \tau^{\frac{n-a-1}{2}} d\tau \|u\|_{n-1} \|v\|_a, \end{aligned}$$

q.t.p. $\xi \in \mathbb{R}^n$ e todo $t > 0$, onde $K(n, a) = (2\pi)^{-n/2} C(n, a) n^2$. Daqui para frente, precisamos majorar a expressão

$$\begin{aligned} t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \tau^{\frac{n-a-1}{2}} d\tau &= t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^{t/2} e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \tau^{\frac{n-a-1}{2}} d\tau \\ &\quad + t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_{t/2}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \tau^{\frac{n-a-1}{2}} d\tau \\ &=: J_1 + J_2, \end{aligned}$$

por alguma constante positiva. De fato,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq t^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2} |\xi|^2 \int_0^{t/2} \tau^{\frac{n-a-1}{2}} d\tau \\ &= t^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2} |\xi|^2 \frac{2}{n-a+1} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n-a+1}{2}} \\ &= \frac{2^{\frac{3+a-n}{2}}}{n-a+1} \frac{t}{2} |\xi|^2 e^{\frac{t}{2}|\xi|^2} \\ &\leq \frac{2^{\frac{3+a-n}{2}}}{n-a+1} e^{-1} =: M_a, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J_2 &\leq t^{\frac{a-n+1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n-a-1}{2}} \int_{t/2}^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} d\tau \\ &= 2^{\frac{a-n+1}{2}} (1 - e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2}) \\ &\leq 2^{\frac{a-n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Usando as estimativas para J_1 , J_2 e $B_j(u, v)$, chegamos à seguinte desigualdade:

$$t^{\frac{a-n+1}{2}} \|B_j(u, v)(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \leq K(n, a)(M_a + 2^{\frac{a-n+1}{2}}) \|u\|_{n-1} \|v\|_a,$$

para cada $j = 1, \dots, n$. Logo, calculando o $\sup_{t>0}$ na última expressão e tomando $\beta_a := K(n, a)(M_a + 2^{\frac{a-n+1}{2}})$, temos o resultado desejado. O caso $a = n-1$ é simplesmente a proposição 2.14. \square

Um dos nossos objetivos é resolver o sistema (2.1)-(2.3) em um espaço que permita regularizar a solução dada pelo teorema 2.15.

Definição 4.5. *Seja $n-1 \leq a < n$. Definimos o espaço \mathcal{X}^a das funções $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, $t \geq 0$, tais que $u_j(\cdot) \in \mathcal{Y}^a$ para cada $j = 1, \dots, n$.*

É claro que \mathcal{X}^a é um espaço de Banach com a norma $\|u\|_{\mathcal{X}^a} = \max_{1 \leq j \leq n} \|u_j\|_{\mathcal{Y}^a}$, pois \mathcal{Y}^a é Banach. Note que \mathcal{X}^{n-1} é o espaço \mathcal{X} da definição 2.10.

Com a definição anterior, a proposição 4.4 implica o seguinte:

Corolário 4.6. *O operador bilinear $B : \mathcal{X}^a \times \mathcal{X}^a \longrightarrow \mathcal{X}^a$ é bi-contínuo, i.e., ele satisfaz*

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}^a} \leq \eta_a \|u\|_{\mathcal{X}^a} \|v\|_{\mathcal{X}^a},$$

para alguma constante $\eta_a > 0$ independente de $u, v \in \mathcal{X}^a$.

Demonstração. Já mostramos, na proposição 2.14, que cada componente de $B(u, v)(\cdot)$ é fracamente contínua em $t \geq 0$. Portanto, resta mostrar a continuidade em \mathcal{X}^a . Se $u, v \in \mathcal{X}^a$, então

$$\begin{aligned} \|B_j(u, v)\|_{\mathcal{Y}^a} &= \|B_j(u, v)\|_{n-1} + \|B_j(u, v)\|_a \\ &\leq \eta \|u\|_{n-1} \|v\|_{n-1} + \beta_a \|u\|_{n-1} \|v\|_a \\ &\leq \max\{\eta, \beta_a\} \|u\|_{\mathcal{X}^a} \|v\|_{\mathcal{X}^a}, \end{aligned}$$

onde $\eta > 0$ é como na proposição 2.14. Tomando $\eta_a := \max\{\eta, \beta_a\}$, segue a afirmação. \square

No que segue, mostramos que o semigrupo do calor “regulariza” distribuições no espaço \mathcal{PM}^{n-1} .

Lema 4.7. *Seja $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$ com $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ e $t > 0$. Então $S(t)u_0 = (S(t)u_0^1, \dots, S(t)u_0^n)$ satisfaz $S(t)u_0^j \in \mathcal{PM}^a$ para todo a tal que $n - 1 \leq a < n$. Mais ainda, existe uma constante C_a que depende de a e n , tal que*

$$\|S(\cdot)u_0^j\|_a \leq C_a \|u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}},$$

para cada $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Seja j fixo e suponha que $a > n - 1$. Temos que

$$\begin{aligned} |\xi|^a \widehat{S(t)u_0^j}(\xi) &= |\xi|^{a-n+1} |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0^j(\xi)| e^{-t|\xi|^2} \\ &\leq |\xi|^{a-n+1} e^{-t|\xi|^2} \|u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Multiplicando por $t^{\frac{a-n+1}{2}}$, chegamos à desigualdade

$$\begin{aligned} t^{\frac{a-n+1}{2}} |\xi|^a \widehat{S(t)u_0^j}(\xi) &\leq (t|\xi|^2)^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-t|\xi|^2} \|u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \\ &\leq \sup_{x>0} (x^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-x}) \|u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Definindo $C_a := \sup_{x>0} (x^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-x}) = \left(\frac{a-n+1}{2e}\right)^{\frac{a-n+1}{2}}$, segue claramente que

$$t^{\frac{a-n+1}{2}} \|S(t)u_0^j\|_{\mathcal{PM}^a} \leq C_a \|u_0^j\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}. \quad (4.2)$$

Tomando o sup para $t > 0$ em(4.2) segue a conclusão do lema. No caso em que $a = n - 1$, o resultado é o lema 2.11 com $C_{n-1} = 1$. \square

Observação 4.8. *Observe que $\lim_{a \rightarrow (n-1)^+} C_a = 1$. Isto implica que C_a é contínua pela direita em $a = n - 1$. Mais ainda, pode-se mostrar que $C_a \leq 1$ para cada $a \in (n - 1, n)$.*

Observação 4.9. *Seja $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$ um vetor tal que $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$, para cada $j = 1, \dots, n$. O lema 4.7 implica que $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{X}^a$ e, além disto, temos que*

$$\|S(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}^a} \leq (1 + C_a)\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}},$$

para cada $n - 1 \leq a < n$.

O próximo lema mostra como a força externa torna-se mais regular na escala dos espaços \mathcal{PM}^a .

Lema 4.10. *Seja $n - 1 \leq a < n$. Suponha que a função $F(t) = (F_1(t), \dots, F_n(t))$ é tal que $F_j(t) \in \mathcal{PM}^{a-2}$ para todo $t > 0$ e $j = 1, \dots, n$. Suponha também que*

$$\sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} < \infty. \quad (4.3)$$

Então, existe uma constante K_a (independente de F e $t > 0$), tal que a função $w(t) = \int_0^t S(t - \tau)\mathbb{P}F(\tau)d\tau$ satisfaz

$$\|w_j\|_a \leq K_a \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}}, \quad (4.4)$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Lembre que $|\hat{F}(\xi, \tau)| = |\hat{F}_1(\xi, \tau)| + \dots + |\hat{F}_n(\xi, \tau)|$. Fixado $j = 1, \dots, n$, estimamos

$$\begin{aligned} |\xi|^a |\hat{w}_j(\xi, t)| &\leq |\xi|^a \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| |\hat{F}(\xi, \tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau \\ &\leq \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \tau^{\frac{n-a-1}{2}} d\tau \sup_{\tau>0} (\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}}). \end{aligned}$$

Agora, como feito na prova da proposição 4.4, temos que

$$\begin{aligned}
t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \tau^{\frac{n-a-1}{2}} d\tau &\leq 2^{\frac{1+a-n}{2}} \left(\left(\frac{n-a+1}{2} e \right)^{-1} + 1 \right) \\
&=: K_a.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t^{\frac{a-n+1}{2}} \|w_j(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \leq K_a \sup_{\tau>0} (\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}}).$$

Finalmente, tomando o sup na última desigualdade segue o resultado. \square

Estamos prontos para provar um resultado de regularização na escala dos espaços \mathcal{PM}^a de soluções *brandas*.

Teorema 4.11. *Seja $n-1 \leq a < n$. Existe $\epsilon > 0$ tal que, dados um vetor $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$ com $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ e uma função $F(t) = (F_1(t), \dots, F_n(t))$, $F_j(\cdot) \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$ satisfazendo (4.3), com*

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t>0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} + \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} < \epsilon/C, \quad (4.5)$$

onde $C = \max\{2, K_a\}$. Então a solução dada pelo teorema 2.15 satisfaz $\|u\|_a \leq 2\epsilon$.

Demonstração. A ideia é aplicar o lema 2.9 no espaço $(\mathcal{X}^a, \|\cdot\|_{\mathcal{X}^a})$. Com a notação do lema 4.10, os lemas 2.13 e 4.10 implicam que $w(\cdot) \in \mathcal{X}^a$. Além disso, se definirmos $y(t) = S(t)u_0 + w(t)$, então $y(\cdot) \in \mathcal{X}^a$ por causa da observação 4.9. Temos também que

$$\begin{aligned}
\|y_j\|_{\mathcal{Y}^a} &= \|S(\cdot)u_0^j\|_{n-1} + \|S(\cdot)u_0^j\|_a + \|w_j\|_{n-1} + \|w_j\|_a \\
&\leq (1 + C_a) \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t>0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} \\
&\quad + K_a \sup_{t>0} (t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}}).
\end{aligned}$$

Portanto, se escolhermos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < 1/4\eta_a$, onde η_a é como no corolário 4.6, a relação (4.5) implica que

$$\|y\|_{\mathcal{X}^a} < \epsilon.$$

Lembrando que $B(u, v)(t) = -\int_0^t S(t-\tau)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes v)d\tau$, o corolário 4.6 e o lema 2.9 implicam que existe uma solução $\tilde{u} \in \mathcal{X}^a$ da equação $\tilde{u} = y + B(\tilde{u}, \tilde{u})$, a qual é a única satisfazendo

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}} \leq \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}^a} \leq 2\epsilon.$$

Como $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon$, o resultado de unicidade do teorema 2.15 implica que $u = \tilde{u}$. Finalmente, lembrando a definição das normas, segue que

$$\begin{aligned} \|u_j\|_a &\leq \|u_j\|_{\mathcal{Y}^a} \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{X}^a}, \end{aligned}$$

para cada $j = 1, \dots, n$, e portanto $\|u\|_a \leq 2\epsilon$. □

4.3 Regularização da Solução

Nesta seção apresentamos os resultados de regularização da solução branda do sistema de Navier-Stokes (2.1)-(2.3) dada pelo teorema 4.11. Começamos apresentando a seguinte desigualdade de interpolação que relaciona as normas em $L^q(\mathbb{R}^n)$ e \mathcal{PM}^a , para certos q e a .

Lema 4.12. *Seja $a \in (n-1, n)$ fixo. Para cada $q \in (n, \frac{n}{n-a})$, existe uma constante $M = M(a, q)$, tal que*

$$\|v\|_q \leq M \|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}^{1-\beta} \|v\|_{\mathcal{PM}^a}^\beta,$$

para todo $v \in \mathcal{PM}^{n-1} \cap \mathcal{PM}^a$, onde $\beta = \frac{1}{a-n+1} \left(1 - \frac{n}{q}\right)$.

Observação 4.13. *Uma das observações que podem ser tiradas do lema 4.12 é a seguinte: Quando $a \in (n-1, n)$, as distribuições do espaço $\mathcal{PM}^{n-1} \cap \mathcal{PM}^a$ são, de fato, funções que pertencem ao espaço $L^q(\mathbb{R}^n)$ com $q \in (n, \frac{n}{n-a})$.*

Demonstração do Lema 4.12. Seja $p > 1$ o expoente conjugado de q , isto é, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. É fácil mostrar que

$$1 < \frac{n}{a} < p < \frac{n}{n-1} < 2. \quad (4.6)$$

Seja $v \in \mathcal{PM}^{n-1} \cap \mathcal{PM}^a$. Primeiramente, mostremos que $\hat{v} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(\xi)|^p d\xi &= \int_{|\xi| \leq R} |\hat{v}(\xi)|^p d\xi + \int_{|\xi| > R} |\hat{v}(\xi)|^p d\xi \\ &\leq \|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}^p \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^{-p(n-1)} d\xi + \|v\|_{\mathcal{PM}^a}^p \int_{|\xi| > R} |\xi|^{-ap} d\xi, \end{aligned} \quad (4.7)$$

para todo $R > 0$, onde as integrais no lado direito de (4.7) são finitas por causa de (4.6). Assim, temos que $\hat{v} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Agora, usando integração por coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^{-p(n-1)} d\xi &= \int_0^R \int_{S^{n-1}} r^{-p(n-1)} r^{n-1} dS dr \\ &= \omega_n \int_0^R r^{(1-p)(n-1)} dr \\ &= \omega_n \frac{R^{n+p-np}}{n+p-np}, \end{aligned}$$

onde ω_n denota o valor da área da esfera unitária de dimensão $n-1$. Analogamente, pode-se calcular

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| > R} |\xi|^{-ap} d\xi &= \int_R^\infty \int_{S^{n-1}} r^{-ap} r^{n-1} dS dr \\ &= \omega_n \frac{R^{n-ap}}{ap-n}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\|\hat{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \omega_n \left[\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}^p \frac{R^{n+p-np}}{n+p-np} + \|v\|_{\mathcal{PM}^a}^p \frac{R^{n-ap}}{ap-n} \right].$$

Agora, desde que $1 < p < 2$ (por causa de (4.6)), a transformada inversa leva \hat{v} em $L^q(\mathbb{R}^n)$, e vale a desigualdade de Hausdorff-Young (1.12). Logo,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p &\leq M_q^p \|\hat{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\leq M_q^p \omega_n \left[\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}^p \frac{R^{n+p-np}}{n+p-np} + \|v\|_{\mathcal{PM}^a}^p \frac{R^{n-ap}}{ap-n} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Denote por $A = \frac{\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}^p}{n+p-np}$ e $B = \frac{\|v\|_{\mathcal{PM}^a}^p}{ap-n}$, e defina a função $h(R) = AR^{n+p-np} + BR^{n-ap}$, para $R > 0$. Uma conta simples mostra que h atinge o seu valor mínimo em

$$R_0 = \left[\frac{B(ap-n)}{A(n+p-np)} \right]^{\frac{1}{p(a-n+1)}} = \left[\frac{\|v\|_{\mathcal{PM}^a}}{\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}} \right]^{\frac{1}{a-n+1}},$$

onde o valor da função h é

$$h(R_0) = \frac{p(a-n+1)}{(n+p-np)(ap-n)} (\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}})^{\frac{ap-n}{a-n+1}} (\|v\|_{\mathcal{PM}^a})^{\frac{n+p-np}{a-n+1}}.$$

Em particular, substituindo $h(R_0)$ em (4.8) e definindo

$$M(a, q) := M_q \omega_n^{1/p} \left[\frac{p(a-n+1)}{(n+p-np)(ap-n)} \right]^{1/p},$$

obtemos

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq M(a, q) (\|v\|_{\mathcal{PM}^{n-1}})^{\frac{ap-n}{p(a-n+1)}} (\|v\|_{\mathcal{PM}^a})^{\frac{n+p-np}{p(a-n+1)}}.$$

Observe também que

$$\frac{ap-n}{p(a-n+1)} + \frac{n+p-np}{p(a-n+1)} = 1.$$

Portanto, tomando $\beta = \frac{n+p-np}{p(a-n+1)} = \frac{1}{a-n+1} \left(1 - \frac{n}{q}\right)$, completamos a prova. \square

O lema anterior permite mostrar o seguinte resultado:

Corolário 4.14. *Nas mesmas hipóteses do teorema 4.11, a solução branda do sistema (2.1)-(2.3) satisfaz*

$$\|u_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-(1-\frac{n}{q})/2}, \quad j = 1, \dots, n,$$

para cada $n < q < \frac{n}{n-a}$ e todo $t > 0$, onde C é uma constante que não depende de t .

Demonstração. Seja $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ a solução do sistema (2.1)-(2.3) construída sob as hipóteses do teorema 4.11. Pela definição do espaço \mathcal{Y}^a , temos que $u_j(t) \in \mathcal{PM}^{n-1} \cap \mathcal{PM}^a$, para cada $t > 0$ e $j = 1, \dots, n$. Além disto,

$$\begin{aligned} \|u_j(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq M \|u_j(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}^{1-\beta} \|u_j(t)\|_{\mathcal{PM}^a}^\beta \\ &\leq M \|u\|_{n-1}^{1-\beta} \|u\|_a^\beta t^{\frac{n-a-1}{2}\beta} \\ &= Ct^{\frac{np-n-p}{2p}} \\ &= Ct^{-(1-\frac{n}{q})/2} \end{aligned}$$

para cada $j = 1, \dots, n$. □

A seguir mostramos que a diferença de duas soluções correspondentes à mesma força externa é mais regular do que cada termo separadamente.

Teorema 4.15. *Sejam $u, v \in \mathcal{X}$ duas soluções brandas do sistema (2.1)-(2.3) dadas pelo teorema 2.15 e correspondentes aos dados iniciais u_0, v_0 com $u_0^j, v_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ e a mesma força externa $F = (F_1, \dots, F_n)$ com $F_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$. Para cada $n-1 \leq a < n$ existe um $\epsilon > 0$ tal que se*

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t>0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} < \epsilon, \tag{4.9}$$

$$\|v_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \sup_{t>0} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-3}} < \epsilon, \tag{4.10}$$

então

$$\sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u_j(t) - v_j(t)\|_{\mathcal{PM}^a} < \infty. \quad (4.11)$$

Mais ainda, $\sup_{t>0} t^{(1-\frac{n}{q})/2} \|u_j(t) - v_j(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty$ para cada $q \in (n, \frac{n}{n-a})$.

Observação 4.16. Note que, com as hipóteses do teorema 2.15, temos apenas que $u, v \in \mathcal{X}$ e não sabemos se u ou v estão em \mathcal{X}^a . Contudo o teorema 4.15 mostra que $u - v \in \mathcal{X}^a$.

Demonstração do teorema 4.15. Subtraindo as expressões integrais de u e v , temos que

$$u(t) - v(t) = S(t)(u_0 - v_0) + B(u, u - v) + B(u - v, v).$$

A ideia é resolver a equação

$$z(t) = S(t)z_0 + B(u, z)(t) + B(z, v)(t), \quad (4.12)$$

no espaço $\mathcal{X}^a \subset \mathcal{X}^{n-1} = \mathcal{X}$, onde $z_0 = u_0 - v_0$. Definamos a aplicação $H(z)(t) = S(t)z_0 + B(u, z)(t) + B(z, v)(t)$, $z \in \mathcal{X}^a$. O lema 4.7 implica que $S(\cdot)z_0 \in \mathcal{X}^a$ e um argumento similar à prova da proposição 4.4 implica que

$$\|B_j(z, v)\|_a \leq \beta_a \|z\|_a \|v\|_{n-1}.$$

Portanto, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|H_j(z)\|_a &\leq \|S(\cdot)z_0^j\|_a + \|B_j(u, z)\|_a + \|B_j(z, v)\|_a \\ &\leq C_a \|z_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} + \beta_a \|z\|_a (\|u\|_{\mathcal{X}} + \|v\|_{\mathcal{X}}) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

para $n - 1 \leq a < n$. Segue que $H(z) \in \mathcal{X}^a$.

Da mesma maneira, mostremos que $H : \mathcal{X}^a \rightarrow \mathcal{X}^a$ é uma contração para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Sejam $z, w \in \mathcal{X}^a$, então

$$\begin{aligned} \|H_j(z) - H_j(w)\|_a &\leq \|B_j(u, z - w)\|_a + \|B_j(z - w, v)\|_a \\ &\leq \beta_a \|z - w\|_a (\|u\|_{\mathcal{X}} + \|v\|_{\mathcal{X}}). \end{aligned}$$

Logo, podemos achar um $0 < \epsilon < 1/4\eta$ tal que se a força e os dados iniciais satisfazem (4.9) e (4.10), então o teorema 2.15 garante que $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon$ e $\|v\|_{\mathcal{X}} \leq 2\epsilon$. Assim, chegamos à seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \|H_j(z) - H_j(w)\|_{\mathcal{Y}^a} &\leq 4\epsilon\eta \|z - w\|_{n-1} + 4\epsilon\beta_a \|z - w\|_a \\ &\leq 4\epsilon\eta_a \|z - w\|_{\mathcal{X}^a}, \end{aligned}$$

para cada $j = 1, \dots, n$. Diminuindo ϵ se necessário para $\epsilon < 1/4\eta_a$, é claro que H é uma contração em \mathcal{X}^a . Assim, o teorema do ponto fixo de Banach garante que existe um único ponto fixo da aplicação H no espaço $\mathcal{X}^a \subset \mathcal{X}^{n-1} = \mathcal{X}$. Como $z = u - v$ é uma solução da equação (4.12) em \mathcal{X} , então a unicidade implica que $u - v \in \mathcal{X}^a$, portanto segue (4.11). A prova da segunda conclusão do teorema é a mesma que a do corolário 4.14, usando o lema 4.12. \square

4.3.1 Continuidade Forte no Tempo

Nesta seção, e na próxima, assumiremos por simplicidade que $F \equiv 0$. Mas, com um pouco de trabalho adicional, os resultados abaixo podem ser generalizados para o caso de uma F não nula, assumindo certas condições.

As soluções dadas pelo teorema 2.15, para o sistema de Navier-Stokes (2.1)-(2.3), foram obtidas como funções fracamente contínuas no sentido da definição 2.4. Nesta seção, mostramos que de fato estas soluções são contínuas para $t > 0$ na norma dos espaços \mathcal{PM}^a , com $n - 1 \leq a < n$.

Para mostrar com maior clareza a afirmação feita acima, definimos o seguinte espaço:

Definição 4.17. Denotamos por $SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$ o sub-espaço das funções $f \in \mathcal{Y}^a$ contínuas em $t > 0$ nas normas $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}$, onde $n - 1 < a < n$. A norma de $SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$ é a mesma do espaço \mathcal{Y}^a .

Observação 4.18. Note que o espaço $SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$ poderia ter sido definido sem fazer referencia ao espaço \mathcal{Y}^a , exigindo apenas continuidade fraca em $t = 0$, desde que toda função contínua nas normas $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ é fracamente contínua (ver a observação 1.14 do capítulo 1).

Começamos mostrando a continuidade forte da parte linear do sistema de Navier-Stokes (2.1)-(2.3).

Lema 4.19. Seja $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$ tal que $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ para todo j . Então $S(t)u_0^j \in SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$ para todo j .

Demonstração. Seja $t > 0$ fixado. Assumindo que $0 < s < t$, então

$$\begin{aligned} |\xi|^a |e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0^j(\xi) - e^{-s|\xi|^2} \hat{u}_0^j(\xi)| &= |\xi|^{a-n+1} e^{-s|\xi|^2} |e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1| |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0^j(\xi)| \\ &\leq (t-s) |\xi|^{a-n+3} e^{-s|\xi|^2} \\ &\quad \times \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \\ &\leq C(t-s) s^{-\frac{a-n+3}{2}} \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}, \end{aligned}$$

onde $C = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|e^{-(t-s)|\xi|^2} - 1|}{(t-s)|\xi|^2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (s|\xi|^2)^{\frac{a-n+3}{2}} e^{-s|\xi|^2}$. Segue que

$$\|S(t)u_0 - S(s)u_0\|_{\mathcal{PM}^a} \leq C(t-s) s^{-\frac{a-n+3}{2}} \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}, \quad (4.13)$$

para todo $n-1 \leq a < n$. A expressão do lado direito de (4.13) vai para zero quando $s \rightarrow t^-$. Da mesma maneira, quando $t < s$ pode-se obter a seguinte estimativa:

$$\|S(t)u_0 - S(s)u_0\|_{\mathcal{PM}^a} \leq C(s-t) t^{-\frac{a-n+3}{2}} \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}},$$

com a mesma constante C , para todo $n-1 \leq a < n$. Aqui, também é claro que a expressão do lado direito vai para zero quando $s \rightarrow t^+$ e portanto segue a continuidade para $t > 0$. A continuidade fraca no zero foi mostrada no lema 2.11 e a limitação na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}^a}$ segue do lema 4.7. Assim, a prova está completa. \square

A seguir, mostramos que a forma bilinear é bem comportada para funções contínuas em $t > 0$.

Proposição 4.20. *Sejam $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ e $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$ tais que $u_j, v_j \in SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$, para todo j . Então $B(u, v)(\cdot)$ é contínua em $t > 0$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ e fixado $t > 0$, escolhemos um número $0 < \delta < t$. Para cada $s \in [t - \delta/2, t + \delta/2]$, temos

$$\begin{aligned} & |\xi|^a (\widehat{B(u, v)}(\xi, t) - \widehat{B(u, v)}(\xi, s)) \\ &= \int_0^{t-\delta} |\xi|^a e^{-\tau|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u \otimes v}(\xi, t - \tau) - \widehat{u \otimes v}(\xi, s - \tau)) d\tau \\ & \quad + \int_{t-\delta}^t |\xi|^a e^{-\tau|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{u \otimes v}(\xi, t - \tau) d\tau \\ & \quad - \int_{t-\delta}^s |\xi|^a e^{-\tau|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{u \otimes v}(\xi, s - \tau) d\tau \\ &=: J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

onde acima usamos a mudança de variáveis $\tau = t - r$. Agora, estimamos J_2 por

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq C \int_{t-\delta}^t |\xi|^{a+1} e^{-\tau|\xi|^2} |\xi|^{n-2a} \|u(t - \tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \|v(t - \tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\ &\leq C \int_{t-\delta}^t |\xi|^{n-a+1} e^{-\tau|\xi|^2} (t - \tau)^{-(a-n+1)} d\tau \\ & \quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\ &\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} ((\tau|\xi|^2)^{\frac{n-a+1}{2}} e^{-\tau|\xi|^2}) \int_{t-\delta}^t \tau^{-\frac{n-a+1}{2}} (t - \tau)^{-(a-n+1)} d\tau \\ &\leq C (t - \delta)^{-\frac{n-a+1}{2}} \int_{t-\delta}^t (t - \tau)^{-(a-n+1)} d\tau \\ &= C (t - \delta)^{-\frac{n-a+1}{2}} \delta^{n-a}. \end{aligned}$$

Analogamente, estimamos J_3 por

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq C \int_{t-\delta}^s |\xi|^{a+1} e^{-\tau|\xi|^2} |\xi|^{n-2a} \|u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \|v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\leq C \int_{t-\delta}^s |\xi|^{n-a+1} e^{-\tau|\xi|^2} (s-\tau)^{-(a-n+1)} d\tau \\
&\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} ((\tau|\xi|^2)^{\frac{n-a+1}{2}} e^{-\tau|\xi|^2}) \int_{t-\delta}^s \tau^{-\frac{n-a+1}{2}} (s-\tau)^{-(a-n+1)} d\tau \\
&\leq C(t-\delta)^{-\frac{n-a+1}{2}} \int_{t-\delta}^s (s-\tau)^{-(a-n+1)} d\tau \\
&= C(t-\delta)^{-\frac{n-a+1}{2}} (s-t+\delta)^{n-a} \\
&\leq C(t-\delta)^{-\frac{n-a+1}{2}} (\delta)^{n-a},
\end{aligned}$$

pois $s \leq t + \delta/2$. A letra C representa uma constante que, ao final das estimativas, pode ser assumida a mesma para $|J_2|$, $|J_3|$ e $|J_1|$. Além disso, C depende somente de a e n . Agora, tomando $\delta < \min\{t/2, (\epsilon/3)^{\frac{1}{n-a}} (t/2)^{\frac{n-a+1}{2(n-a)}} / C^{\frac{1}{n-a}}\}$, segue que

$$|J_2|, |J_3| \leq \epsilon/3.$$

Finalmente, estimamos J_1 . Primeiro observemos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
&|i\xi \cdot ((\widehat{u \otimes v})(\xi, t-\tau) - (\widehat{u \otimes v})(\xi, s-\tau))| \\
&\leq |i\xi \cdot (\widehat{(u \otimes v)})(\xi, t-\tau) - (u(t-\tau) \otimes v(s-\tau))^\wedge(\xi)| \\
&\quad + |i\xi \cdot ((u(t-\tau) \otimes v(s-\tau))^\wedge(\xi) - \widehat{u \otimes v}(\xi, s-\tau))| \\
&\leq C|\xi|^{n-2a+1} \|u(t-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \|v(t-\tau) - v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\quad + C|\xi|^{n-2a+1} \|u(t-\tau) - u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \|v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned}$$

Observe que quando $\tau \in (0, t - \delta)$, temos que $t - \tau, s - \tau \in [\delta/2, t + \delta/2]$, pois $s \in [t - \delta/2, t + \delta/2]$. Pelo fato de u e v serem contínuas, elas são limitadas em $[\delta/2, t + \delta/2]$. Portanto, obtemos as seguintes majorações para J_1 :

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq C \int_0^{t-\delta} |\xi|^{n-a+1} e^{-\tau|\xi|^2} \|v(t-\tau) - v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\quad \times \sup_{\tau \in [\delta/2, t+\delta/2]} \|u(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} + \\
&\quad C \int_0^{t-\delta} |\xi|^{n-a+1} e^{-\tau|\xi|^2} \|u(t-\tau) - u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\quad \times \sup_{\tau \in [\delta/2, t+\delta/2]} \|v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\leq C \int_0^{t-\delta} \tau^{-\frac{n-a+1}{2}} \|v(t-\tau) - v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\quad \times \sup_{\tau \in [\delta/2, t+\delta/2]} \|u(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} + \\
&\quad C \int_0^{t-\delta} \tau^{-\frac{n-a+1}{2}} \|u(t-\tau) - u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\quad \times \sup_{\tau \in [\delta/2, t+\delta/2]} \|v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned}$$

Por continuidade, as funções u e v são uniformemente contínuas no intervalo $[\delta/2, t + \delta/2]$, e então existe um $\gamma \in (0, \delta/2)$ tal que $|t - \tau - (s - \tau)| = |t - s| < \gamma$ implica

$$\|u(t - \tau) - u(s - \tau)\|_{\mathcal{PM}^a} < \frac{\epsilon}{6C} (t - \delta)^{-\frac{a-n+1}{2}} \left(\sup_{\tau \in [\delta/2, t+\delta/2]} \|v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \right)^{-1},$$

e

$$\|v(t - \tau) - v(s - \tau)\|_{\mathcal{PM}^a} < \frac{\epsilon}{6C} (t - \delta)^{-\frac{a-n+1}{2}} \left(\sup_{\tau \in [\delta/2, t+\delta/2]} \|u(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \right)^{-1}.$$

Logo,

$$|J_1| \leq \epsilon/3,$$

sempre que $|t - s| < \gamma$. Juntando as estimativas para J_1 , J_2 e J_3 , temos que se $|s - t| < \gamma$, então

$$\|B(u, v)(t) - B(u, v)(s)\|_{\mathcal{PM}^a} < \epsilon,$$

para $n - 1 < a < n$. O caso $a = n - 1$ é similar e assim finalizamos a prova. \square

Observação 4.21. *Observe que pela proposição 4.4 a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ é contínua no espaço das funções vetoriais com componentes no espaço $SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$, com constante de continuidade η_a como no corolário 4.6.*

Uma simples aplicação do lema 2.9 mostra que a solução dada pelo teorema 2.15 está no espaço $SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$. Aqui somente é enunciado este resultado, pois a prova é similar a do teorema 4.11 ou 2.15.

Proposição 4.22. *Seja $n - 1 < a < n$ fixo, porém arbitrário. Existe $\epsilon > 0$ tal que, se $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$, $u_0^j \in \mathcal{PM}^{n-1}$ satisfaz*

$$(1 + C_a)\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} < \epsilon, \tag{4.14}$$

onde C_a é como no lema 4.7, então, a solução branda u dada pelo teorema 2.15, com $F \equiv 0$, tem componentes no espaço $SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$ e satisfaz $\|u\|_a \leq 2\epsilon$.

Observação 4.23. *Observe que de fato a solução u está no espaço $SC_w([0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1})$ para todo $n - 1 < a < n$. Isto se deve ao fato de $C_a \leq 1$ para todo $a \in (n - 1, n)$. Portanto, a constante C no enunciado do teorema 4.11 pode ser escolhida como $C = 2$.*

4.3.2 C^∞ -Regularidade das Soluções

A seguir mostramos que as soluções, dadas pelo teorema 2.15, são funções de classe C^∞ para $t > 0$. A prova deste resultado é basicamente uma indução na ordem das derivadas. Precisamos dos seguintes espaços para mostrar esta regularidade das soluções.

Definição 4.24. *Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $0 < \sigma < T < \infty$. Definimos o espaço $F_N = F_N(\sigma, T)$ das funções vetoriais $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ com $g_j : [\sigma, T] \rightarrow \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1}$, para $n - 1 < a < n$, tais que*

$$\partial^\alpha g_j \in C([\sigma, T]; \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1}), \quad |\alpha| \leq N-1, \quad (4.15)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ (veja a observação 1.3, pg. 7), e as derivadas acima são entendidas no sentido de distribuições em relação às variáveis espaciais. Definimos o espaço $E_N = E_N(\sigma, T)$ das funções $g \in F_N(\sigma, T)$, tais que

$$(t - \sigma)^{1/2} \partial^\alpha g_j \in C((\sigma, T); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1}), \quad |\alpha| = N. \quad (4.16)$$

Os espaços F_N e E_N são normados com normas definidas, respectivamente, por

$$\|g\|_{F_N} := \sum_{|\alpha| \leq N-1} \left(\sup_{\sigma < t < T} \|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^a} + \sup_{\sigma < t < T} \|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \right), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \|g\|_{E_N} := & \|g\|_{F_N} + \sum_{|\alpha|=N} \left(\sup_{\sigma < t < T} (t - \sigma)^{1/2} \|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \right. \\ & \left. + \sup_{\sigma < t < T} (t - \sigma)^{1/2} \|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Será mostrado, no apêndice A, que os espaços F_N e E_N são Banach com suas respectivas normas.

Seja $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ a solução do sistema (2.1)-(2.3), dada pelo teorema 2.15 (ou 4.11) e $\sigma > 0$. Denotemos $u_\sigma = u(\sigma)$ e consideremos a equação

$$z(t) = S(t - \sigma)u_\sigma - \int_\sigma^t S(t - \tau) \mathbb{P} \nabla \cdot (z \otimes z)(\tau) d\tau, \quad (4.19)$$

onde a forma bilinear é denotada por

$$B_\sigma(f, g)(t) = - \int_\sigma^t S(t - \tau) \mathbb{P} \nabla \cdot (f \otimes g)(\tau) d\tau. \quad (4.20)$$

Aqui, a definição da forma bilinear é interpretada nas variáveis de Fourier como no capítulo 2. No que segue, o simbolo $\partial^\alpha g$ representa o vetor cujas componentes são as derivadas das componentes de $g \in E_N$ ou F_N com respeito às variáveis espaciais.

Observação 4.25. Se $u(t)$ é uma solução do sistema (2.1)-(2.3), com t restrito ao intervalo $[\sigma, T)$, então u satisfaz a equação (4.19).

De fato, usando a expressão integral de u temos

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\xi, t) - e^{-(t-\sigma)|\xi|^2} \hat{u}(\xi, \sigma) &= e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi, \tau) d\tau \\
&\quad - e^{-(t-\sigma)|\xi|^2} e^{-\sigma|\xi|^2} \hat{u}_0 \\
&\quad - e^{-(t-\sigma)|\xi|^2} \int_0^\sigma e^{-(\sigma-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi, \tau) d\tau \\
&= \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi, \tau) d\tau \\
&\quad - \int_0^\sigma e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi, \tau) d\tau \\
&= \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

A seguinte proposição mostra a continuidade da forma bilinear nos espaços F_N e E_N .

Proposição 4.26. Seja $\sigma < T$. A forma bilinear definida em (4.20) é contínua nos espaços $F_N(\sigma, T)$ e $E_N(\sigma, T)$. Mais precisamente, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|B_\sigma(f, g)\|_{F_N} &\leq C(T - \sigma)^{\frac{\alpha-n+1}{2}} \|f\|_{F_N} \|g\|_{F_N}, \\
\|B_\sigma(f, g)\|_{E_N} &\leq C(T - \sigma)^{\frac{\alpha-n+1}{2}} \|f\|_{E_N} \|g\|_{E_N},
\end{aligned}$$

para todo $f, g \in F_N$ (ou E_N), respectivamente.

Demonstração. Sejam $f, g \in F_N$ (ou E_N) e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq N$. Primeiro mostremos que vale a regra de Leibniz

$$\partial^\alpha B_\sigma(f, g)(t) = \sum_{|\gamma|+|\theta|=|\alpha|} B_\sigma(\partial^\gamma f, \partial^\theta g)(t). \tag{4.21}$$

De fato, se $|\alpha| = 1$ temos

$$\begin{aligned}
(\partial_{x_j} B_\sigma(f, g))^\wedge(\xi, t) &= (-i)\xi_j \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{f \otimes g})(\xi, \tau) d\tau \\
&= \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot ((-i)\xi_j \widehat{f \otimes g})(\xi, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
(-i)\xi_j \widehat{f_k \cdot g_l}(\xi, \tau) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-i)\xi_j \hat{f}_k(z) \hat{g}_l(\xi - z) dz \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-i) \left[z_j \hat{f}_k(z) \hat{g}_l(\xi - z) \right. \\
&\quad \left. + \hat{f}_k(z) (\xi_j - z_j) \hat{g}_l(\xi - z) \right] dz \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widehat{\partial_{x_j} f_k}(z) \hat{g}_l(\xi - z) \right. \\
&\quad \left. + \hat{f}_k(z) \widehat{\partial_{x_j} g_l}(\xi - z) \right] dz \\
&= ((\partial_{x_j} f_k) \cdot g_l)^\wedge(\xi, \tau) + (f_k \cdot (\partial_{x_j} g_l))^\wedge(\xi, \tau).
\end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
(\partial_{x_j} B_\sigma(f, g))^\wedge(\xi, t) &= \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\partial_{x_j} f \otimes g)^\wedge(\xi, \tau) d\tau \\
&\quad + \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \hat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (f \otimes \partial_{x_j} g)^\wedge(\xi, \tau) d\tau \\
&= B_\sigma(\partial_{x_j} f, g)^\wedge(\xi, t) + B_\sigma(f, \partial_{x_j} g)^\wedge(\xi, t),
\end{aligned}$$

o que mostra (4.21) no caso $|\alpha| = 1$. O caso geral segue por um argumento de indução.

No que segue, a letra C representa constantes que podem mudar de linha para linha. Para $n - 1 < a < n$, estimamos

$$\begin{aligned}
|\xi|^a |B_{\sigma,j}(f,g))^\wedge(\xi,t)| &\leq C \int_{\sigma}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| |\xi|^{a+1} \\
&\quad \times \sum_{k,l} |\xi|^{n-2a} \|f_k(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|g_l(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} d\tau \\
&\leq C \int_{\sigma}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-a+1} \|f(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|g(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} d\tau \\
&\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left[((t-\tau)|\xi|^2)^{\frac{n-a+1}{2}} e^{(t-\tau)|\xi|^2} \right] \int_{\sigma}^t (t-\tau)^{-\frac{n-a+1}{2}} d\tau \\
&\quad \times \sup_{\sigma \leq t < T} \|f(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \sup_{\sigma \leq t < T} \|g(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \\
&\leq C(T-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{\sigma \leq t < T} \|f(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \sup_{\sigma \leq t < T} \|g(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a},
\end{aligned}$$

onde $B_{\sigma,j}$ denota a j -ésima componente do vetor B_{σ} . Logo, temos que

$$\|B_{\sigma}(f,g)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \leq C(T-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{\sigma < t < T} \|f(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \sup_{\sigma < t < T} \|g(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}.$$

Analogamente, pode-se estimar

$$\begin{aligned}
|\xi|^{n-1} |B_{\sigma,j}(f,g))^\wedge(\xi,t)| &\leq C \int_{\sigma}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| |\xi|^n \\
&\quad \times \sum_{k,l} |\xi|^{1-a} \|f_k(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|g_l(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} d\tau \\
&\leq C \int_{\sigma}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-a+1} \|f(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|g(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} d\tau \\
&\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left[((t-\tau)|\xi|^2)^{\frac{n-a+1}{2}} e^{(t-\tau)|\xi|^2} \right] \int_{\sigma}^t (t-\tau)^{-\frac{n-a+1}{2}} d\tau \\
&\quad \times \sup_{\sigma < t < T} \|f(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \sup_{\sigma < t < T} \|g(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \\
&\leq C(T-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{\sigma < t < T} \|f(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \sup_{\sigma < t < T} \|g(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\|B_{\sigma}(f,g)(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \leq C(T-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{\sigma < t < T} \|f(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \sup_{\sigma < t < T} \|g(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}.$$

Logo, se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq N - 1$ então, pela regra de Leibniz 4.21, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha B_\sigma(f, g)(t)\|_{\mathcal{PM}^a} &\leq \sum_{|\gamma|+|\theta|=|\alpha|} \|B_\sigma(\partial^\gamma f, \partial^\theta g)(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\leq \sum_{|\gamma|+|\theta|=|\alpha|} C(T - \sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{\sigma < t < T} \|\partial^\gamma f(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\quad \times \sup_{\sigma < t < T} \|\partial^\theta g(t)\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Similarmente, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha B_\sigma(f, g)(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} &\leq \sum_{|\gamma|+|\theta|=|\alpha|} C(T - \sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{\sigma < t < T} \|\partial^\gamma f(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} \\
&\quad \times \sup_{\sigma < t < T} \|\partial^\theta g(t)\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = N$, então podemos estimar

$$\begin{aligned}
|\xi|^a |(B_{\sigma,j}(\partial^\alpha f, g))^\wedge(\xi, t)| &\leq C \int_\sigma^t |\xi|^{a+1} e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{\mathbb{P}}(\xi)| \\
&\quad \times \sum_{k,l} |\xi|^{n-2a} \|\partial^\alpha f_k(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \|g_l(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\leq C \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-a+1} \|\partial^\alpha f(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \|g(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\leq C \int_\sigma^t (t - \tau)^{-\frac{n-a+1}{2}} \|\partial^\alpha f(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \|g(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\leq C \int_\sigma^t (t - \tau)^{-\frac{n-a+1}{2}} (\tau - \sigma)^{-1/2} d\tau \\
&\quad \times \sup_{\sigma < \tau < T} ((\tau - \sigma)^{1/2} \|\partial^\alpha f(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}) \\
&\quad \times \sup_{\sigma < \tau < T} \|g(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

A integral em (4.24) pode ser manuseada da seguinte forma:

$$\int_\sigma^{\sigma + \frac{1}{2}(t-\sigma)} (t - \tau)^{-\frac{n-a+1}{2}} (\tau - \sigma)^{-1/2} d\tau \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2}(t-\sigma)\right)^{-\frac{n-a+1}{2}} \\
&\quad \times \int_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{2}(t-\sigma)} (\tau-\sigma)^{-1/2} d\tau \\
&\leq 2^{\frac{n-a+2}{2}} (t-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} (t-\sigma)^{-1/2}, \tag{4.25}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma+\frac{1}{2}(t-\sigma)}^t (t-\tau)^{-\frac{n-a+1}{2}} (\tau-\sigma)^{-1/2} \leq \\
&\leq (1/2(t-\sigma))^{-1/2} \\
&\quad \times \int_{\sigma+\frac{1}{2}(t-\sigma)}^t (t-\tau)^{-\frac{n-a+1}{2}} d\tau \\
&\leq \frac{2^{3/2}}{a-n+1} (t-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} (t-\sigma)^{-1/2}. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Inserindo (4.25) e (4.26) em (4.24), obtemos

$$\begin{aligned}
(t-\sigma)^{1/2} \|B_{\sigma}(\partial^{\alpha} f, g)(t)\|_{\mathcal{PM}^a} &\leq C(T-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \\
&\quad \times \sup_{\sigma < \tau < T} ((\tau-\sigma)^{1/2} \|\partial^{\alpha} f(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}) \\
&\quad \times \sup_{\sigma < \tau < T} \|g(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Similarmente, pode-se estimar

$$\begin{aligned}
(t-\sigma)^{1/2} \|B_{\sigma}(\partial^{\alpha} f, g)(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} &\leq C(T-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \\
&\quad \times \sup_{\sigma < \tau < T} ((\tau-\sigma)^{1/2} \|\partial^{\alpha} f(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}) \\
&\quad \times \sup_{\sigma < \tau < T} \|g(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Finalmente, segue de (4.22) e (4.23) que a forma bilinear satisfaz

$$\|B_{\sigma}(f, g)\|_{F_N} \leq C(T-\sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \|f\|_{F_N} \|g\|_{F_N}, \tag{4.29}$$

ou seja, B_{σ} é contínua em F_N . Da mesma maneira, usando (4.22), (4.23), (4.27) e (4.28) tem-se

$$\|B_\sigma(f, g)\|_{E_N} \leq C(T - \sigma)^{\frac{a-n+1}{2}} \|f\|_{E_N} \|g\|_{E_N}, \quad (4.30)$$

onde C é uma constante que depende de a , n e N , mas não de T nem de σ . A prova da continuidade, em relação a t , é similar à proposição 4.20, o que completa a demonstração. \square

O próximo resultado estabelece a relação das derivadas distribucionais e temporais, das soluções do sistema (2.1)-(2.3) construídas no teorema 4.11, com os espaços \mathcal{PM}^a .

Teorema 4.27. *Assuma as hipóteses do teorema 4.11 com $F \equiv 0$ e seja $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ a solução do sistema (2.1)-(2.3). Então*

$$\partial_t^k \partial^\alpha u_j(t) \in C((0, \infty); \mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1}), \quad (4.31)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $j = 1, \dots, n$ e $n - 1 < a < n$.

Demonstração. Primeiro mostramos (4.31) para o caso $k = 0$. Procedemos por indução na ordem das derivadas em relação às variáveis espaciais. Para $|\alpha| = 0$ temos que (4.31) é válido, pela proposição 4.22. Portanto, assuma que (4.31) é válido para $|\alpha| \leq N - 1$. A ideia é resolver a equação (4.19) no espaço E_N .

Afirmamos que $S(t - \sigma)u_\sigma \in E_N$. De fato, se $|\alpha| \leq N - 1$, pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} |\xi|^\alpha |(\partial^\alpha S(t - \sigma)u_\sigma)^\wedge(\xi)| &\leq e^{-(t-\sigma)|\xi|^2} |\xi|^\alpha |(\partial^\alpha u_\sigma)^\wedge(\xi)| \\ &\leq \|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a}, \end{aligned}$$

para $n - 1 \leq a < n$. Logo,

$$\|\partial^\alpha S(t - \sigma)u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a} \leq \|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a}.$$

Se $|\alpha| = N$ com $\alpha = \beta + e_j$, onde $|\beta| = N - 1$ e e_j é o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n , então

$$\begin{aligned}
|\xi|^a |(\partial^\alpha S(t-\sigma)u_\sigma)^\wedge(\xi)| &\leq |\xi_j| e^{-(t-\sigma)|\xi|^2} |\xi|^a |(\partial^\beta u_\sigma)^\wedge(\xi)| \\
&\leq |\xi| e^{-(t-\sigma)|\xi|^2} \|\partial^\beta u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\leq (t-\sigma)^{-1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} ((t-\sigma)|\xi|^2)^{1/2} e^{-(t-\sigma)|\xi|^2} \\
&\quad \times \|\partial^\beta u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{\sigma < t < T} (t-\sigma)^{1/2} \|\partial^\alpha S(t-\sigma)u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a} \leq C \|\partial^\beta u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a},$$

para cada $n-1 \leq a < n$, e segue a afirmação. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|S(t-\sigma)u_\sigma\|_{E_N} &\leq C \sum_{|\alpha| \leq N-1} (\|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a} + \|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}), \\
\|S(t-\sigma)u_\sigma\|_{F_N} &\leq C \sum_{|\alpha| \leq N-1} (\|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a} + \|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}).
\end{aligned}$$

Dado $M > 0$ tal que $M \geq C \sum_{|\alpha| \leq N-1} (\|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^a} + \|\partial^\alpha u_\sigma\|_{\mathcal{PM}^{n-1}})$, podemos escolher $T > \sigma$ satisfazendo

$$M < \frac{1}{4C(T-\sigma)^{\frac{\alpha-n+1}{2}}}.$$

Assim, a proposição 4.26 e o lema 2.9 garantem que existe uma solução da equação (4.19) nos espaços E_N e F_N e elas são únicas nas bolas fechadas $B_{E_N}(0, 2M)$ e $B_{F_N}(0, 2M)$. Por outro lado, fixemos $T_0 > T$. A hipótese de indução implica que a solução dada pelo teorema 4.11 satisfaz

$$\|u\|_{F_N(\sigma, T)} \leq \|u\|_{F_N(\sigma, T_0)} < \infty.$$

Diminuindo o valor de T , se necessário, podemos escolher M tal que $\|u\|_{F_N(\sigma, T_0)} \leq 2M$, obtendo assim que u restrito ao intervalo (σ, T) está na bola $B_{F_N}(0, 2M)$. Logo, a observação 4.25 implica

que a solução obtida em $B_{F_N}(0, 2M)$ coincide com a solução branda u do sistema (2.1)-(2.3) no intervalo (σ, T) . Também observamos que $B_{E_N}(0, 2M) \subset B_{F_N}(0, 2M)$ e, portanto, a unicidade implica que a solução u restrita ao intervalo (σ, T) está em $B_{E_N}(0, 2M)$. Como o $\sigma > 0$ é arbitrário, segue que (4.31) é válido.

Mostremos agora (4.31) para todo $k \in \mathbb{N}$. Analogamente, fazemos uma indução em k . Assuma que o resultado é válido para todo $k \leq N - 1$ e aplicando o operador $\partial_t^N \partial^\alpha$ à expressão integral da solução u , obtemos a seguinte expressão nas variáveis de Fourier

$$\begin{aligned} \partial_t^N (\partial^\alpha u)^\wedge(\xi, t) &= \partial_t^{N-1} (\Delta \partial^\alpha u)^\wedge(\xi, t) \\ &\quad - \sum_{\gamma+\theta=\alpha} \sum_{k+l=N-1} \hat{\mathbb{P}}(\xi) (-i)\xi \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\theta u)^\wedge(\xi, t). \end{aligned}$$

A primeira parcela tem componentes em $\mathcal{PM}^a \cap \mathcal{PM}^{n-1}$ pela hipótese de indução. Por outro lado, o termo $(-i)\xi \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\theta u)^\wedge(\xi, t)$ pode ser expressado como a transformada de um somatório de produtos de derivadas de u , onde a ordem das derivadas espaciais é incrementada em no máximo 1 e as derivadas temporais permanecem iguais. Portanto, usando a proposição 1.17, o fato que o operador \mathbb{P} leva vetores de \mathcal{PM}^a em vetores de \mathcal{PM}^a e a hipótese de indução, concluímos que $\mathbb{P} \nabla \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\theta u)(t)$ tem componentes em \mathcal{PM}^{2b-n} , para todo $t > 0$ e $b \in (n-1, n)$. Em particular, escolhendo $b = \frac{n-1}{2}$ temos que $\mathbb{P} \nabla \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\theta u)(t)$ tem componentes em \mathcal{PM}^a , e escolhendo $b = n - \frac{1}{2}$ temos que $\mathbb{P} \nabla \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\theta u)(t)$ tem componentes em \mathcal{PM}^{n-1} , o que prova o resultado. \square

Para finalizar esta seção temos o seguinte resultado:

Teorema 4.28. *A solução branda u do sistema de Navier-Stokes (2.1)-(2.3) dada pelo teorema 4.11, com $F \equiv 0$ é uma função vetorial de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$. Em particular, a solução é clássica em $t > 0$.*

Demonstração. De fato, pelo lema 4.12 o teorema 4.27, com $a > n-1$, temos que $\partial^k u_j(t) \in W^{l,q}$, com $n < q < \frac{n}{n-a}$, para todo inteiro $l \geq 1$. Logo a imersão de Sobolev 1.25 implica que $\partial^k u_j(t)$ são funções de classe C^∞ , nas variáveis espaciais, para todo $t > 0$. Um procedimento de indução em k , para o sistema (2.7) com $F \equiv 0$, mostra que $\partial_t^k u_j(t)$ são contínuas em $t > 0$, para todo inteiro $k \geq 0$, completando a prova. \square

4.4 Comportamento Assintótico na Norma Regularizante

Nesta seção estudamos o comportamento das soluções do sistema (2.1)-(2.3), quando $t \rightarrow \infty$ na norma com peso $t^{\frac{a-n+1}{2}} \|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$, com $n-1 < a < n$. As provas nesta análise são semelhantes às encontradas no capítulo 3.

Começamos com um refinamento do lema 3.1.

Lema 4.29. *Seja $F = (F_1, \dots, F_n)$, com $F_j \in \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{PM}^{a-2} : \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|f(t)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} < \infty\}$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} = 0. \quad (4.32)$$

Então a função $w(t) = \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}F(\tau) d\tau$ satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|w(t)\|_{\mathcal{PM}^a} = 0.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} t^{\frac{a-n+1}{2}} |\xi|^a |\hat{w}_j(\xi, t)| &\leq t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^a |\hat{F}(\xi, \tau)| d\tau \\ &\leq t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau \\ &= t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^{t/2} e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau \\ &\quad + t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_{t/2}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Agora, estimamos as últimas duas integrais separadamente. Fazendo a mudança de variáveis $\tau = ts$, pode-se estimar I_1 como

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \sup_{x>0} x e^{-x} \int_0^{t/2} (t-\tau)^{-1} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau \\
&= e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau \\
&= e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau.
\end{aligned}$$

Analogamente, estimamos I_2 como

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_{t/2}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 \tau^{-\frac{a-n+1}{2}} d\tau \sup_{t/2 < \tau < t} \left(\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} \right) \\
&\leq 2^{\frac{a-n+1}{2}} \int_{t/2}^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 d\tau \sup_{t/2 < \tau < t} \left(\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} \right) \\
&\leq 2^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{t/2 < \tau < t} \left(\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} \right).
\end{aligned}$$

Logo, usando as estimativas para $|I_1|$ e $|I_2|$, obtemos

$$\begin{aligned}
t^{\frac{a-n+1}{2}} \|w(t)\|_{\mathcal{PM}^a} &\leq e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau \\
&\quad + 2^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{t/2 < \tau < t} \left(\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, para cada $s \in (0, 1/2)$ tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} = 0,$$

pela hipótese (4.32). Além disso,

$$(1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} \leq 2s^{-\frac{a-n+1}{2}} \sup_{t>0} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(t)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}},$$

para todo $s \in (0, 1/2)$. Como a função $s \rightarrow s^{-\frac{a-n+1}{2}}$ é integrável no intervalo $(0, 1/2)$, então o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(st)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} d\tau = 0.$$

Analogamente, pode-se mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{t/2 < \tau < t} \left(\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|F(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{a-2}} \right) = 0,$$

portanto segue a conclusão do lema. \square

Agora, apresentamos um resultado de comportamento assintótico, na mesma linha do capítulo 3, na norma com peso no tempo.

Teorema 4.30. *Sejam u e v soluções brandas do sistema (2.1)-(2.3) correspondentes aos dados iniciais u_0, v_0 , com componentes em \mathcal{PM}^{n-1} , e às forças externas $F = (F_1, \dots, F_n)$, $G = (G_1, \dots, G_n)$ com $F_j, G_j \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{PM}^{n-3})$, tais que satisfazem as hipóteses do teorema 4.11. Assuma também que $F - G$ satisfaz as hipóteses do lema 4.29 e que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{PM}^a} = 0. \quad (4.33)$$

Então, a diferença das soluções satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} = 0. \quad (4.34)$$

Demonstração. Subtraindo as equações integrais de u e v , obtemos

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= S(t)(u_0 - v_0) + B(u, u) - B(v, v) \\ &\quad + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}(F(\tau) - G(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Logo, calculando a norma \mathcal{PM}^a e multiplicando por $t^{\frac{a-n+1}{2}}$, temos que

$$\begin{aligned} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} &\leq t^{\frac{a-n+1}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{PM}^a} \\ &\quad + t^{\frac{a-n+1}{2}} \left\| \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}(F(\tau) - G(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{PM}^a} \\ &\quad + t^{\frac{a-n+1}{2}} \|B(u, u) - B(v, v)\|_{\mathcal{PM}^a}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Assim, se definirmos

$$g(t) := t^{\frac{a-n+1}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} + t^{\frac{a-n+1}{2}} \left\| \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}(F(\tau) - G(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a},$$

temos que a hipótese (4.33) e o lema 4.29 (aplicado à função $F - G$) implicam que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0. \quad (4.36)$$

Agora, estimemos o termo envolvendo a forma bilinear. Observe que

$$B(u, u) + B(v, v) = B(u, u - v) + B(u - v, v).$$

Procedendo como na prova da proposição, 4.4, obtemos

$$\begin{aligned} & t^{\frac{a-n+1}{2}} \|B(u, u) - B(v, v)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \\ & \leq t^{\frac{a-n+1}{2}} \|B(u, u - v)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} + t^{\frac{a-n+1}{2}} \|B(u - v, v)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \\ & \leq \lambda_a t^{\frac{a-n+1}{2}} \left[\int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|u(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|v(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} d\tau \right], \end{aligned}$$

onde $\lambda_a = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} n^2 C(n, a)$ e $C(n, a) = \pi^{\frac{1-n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{a-1}{2}) \Gamma(\frac{n-a}{2})}{\Gamma(\frac{n-a+1}{2}) \Gamma(\frac{n-1}{2}) \Gamma(\frac{a}{2})}$. Por outro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} & \leq 2\epsilon < \frac{1}{2\beta_a} \text{ e} \\ \sup_{t \geq 0} \|v(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} & \leq 2\epsilon < \frac{1}{2\beta_a}, \end{aligned}$$

onde β_a é como na proposição 4.4, isto é, $\beta_a = \lambda_a 2^{\frac{a-n+1}{2}} \left(\frac{2}{e^{(n-a+1)}} + 1 \right)$. Logo, segue que

$$t^{\frac{a-n+1}{2}} \|B(u, u) - B(v, v)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\epsilon\lambda_a t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&= 4\epsilon\lambda_a t^{\frac{a-n+1}{2}} \left[\int_0^{t/2} |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_{t/2}^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \right]. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Agora, estimamos as duas integrais em (4.37) como segue:

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_0^{t/2} |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\leq \sup_{x>0} (xe^{-x}) \int_0^{t/2} (t-\tau)^{-1} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\leq e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(st) - v(st)\|_{\mathcal{PM}^a} ds \\
&= e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(st) - v(st)\|_{\mathcal{PM}^a} ds,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_{t/2}^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} d\tau \\
&\leq t^{\frac{a-n+1}{2}} \int_{t/2}^t |\xi|^2 e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \tau^{-\frac{a-n+1}{2}} d\tau \sup_{t/2 \leq \tau \leq t} \tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&\leq 2^{\frac{a-n+1}{2}} \sup_{t/2 \leq \tau \leq t} \tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}.
\end{aligned}$$

Denotemos

$$\begin{aligned}
A &= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Claramente temos a desigualdade

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq k} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(st) - v(st)\|_{\mathcal{PM}^a} ds \leq \\ & \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} \sup_{t \geq k} ((st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(st) - v(st)\|_{\mathcal{PM}^a}) ds. \end{aligned}$$

Para cada $s \in (0, 1/2)$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} \sup_{t \geq k} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(st) - v(st)\|_{\mathcal{PM}^a} = (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} A,$$

e para cada $k \geq 0$

$$(1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} \sup_{t \geq k} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(st) - v(st)\|_{\mathcal{PM}^a} \leq 4\epsilon s^{-\frac{a-n+1}{2}}.$$

Desde que a função $s \rightarrow s^{-\frac{a-n+1}{2}}$ é integrável em $(0, 1/2)$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} (st)^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(st) - v(st)\|_{\mathcal{PM}^a} ds & \leq \\ & A \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} ds. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Por outro lado, para $t \geq k$ obtemos

$$\sup_{t/2 < \tau < t} (\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}) \leq \sup_{k/2 < \tau} (\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}),$$

o que implica

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{t/2 < \tau < t} (\tau^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^a}) \right) \leq A. \quad (4.39)$$

Finalmente, calculando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (4.35) e usando (4.36), (4.38) e (4.39), obtemos que

$$A \leq 4\epsilon\lambda_a \left(e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} ds + 2^{\frac{a-n+1}{2}} \right) A.$$

Contudo, a expressão entre parênteses satisfaz a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} e^{-1} \int_0^{1/2} (1-s)^{-1} s^{-\frac{a-n+1}{2}} ds + 2^{\frac{a-n+1}{2}} &\leq 2e^{-1} \int_0^{1/2} s^{-\frac{a-n+1}{2}} ds + 2^{\frac{a-n+1}{2}} \\ &= 2e^{-1} \frac{2}{n-a+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-a+1}{2}} + 2^{\frac{a-n+1}{2}} \\ &= 2^{\frac{a-n+1}{2}} \left(e^{-1} \frac{2}{n-a+1} + 1 \right) \\ &= \frac{\beta_a}{\lambda_a}. \end{aligned}$$

Segue que

$$A \leq 4\epsilon\beta_a A.$$

Desde que $0 < 4\epsilon\beta_a < 1$, concluímos que

$$A = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} = 0,$$

como queríamos demonstrar. \square

Para ressaltar a importância da observação 3.4 do capítulo 3 apresentamos o seguinte corolário.

Corolário 4.31. *Sejam u, v duas soluções brandas do sistema (2.1)-(2.3) com condições iniciais u_0 e v_0 , respectivamente, e com a mesma força externa F . Se além das hipóteses do teorema 4.11 tivermos que*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} |\xi|^{n-1} (\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)) = 0, \quad (4.40)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^{n-1}} = 0 \quad (4.41)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{PM}^a} = 0. \quad (4.42)$$

Demonstração. De fato, (4.41) segue da observação 3.4 (pg. 49) e o teorema 3.5 (pg. 45). Para provar (4.42) procedemos como segue. Dado $\epsilon > 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que $|\xi| \leq \delta$ implica

$$|\xi|^{n-1} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| < \frac{\epsilon}{K},$$

onde $K = \sup_{x>0} (x^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-x})$. Logo,

$$\begin{aligned} t^{\frac{a-n+1}{2}} |\xi|^a e^{-t|\xi|^2} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| &\leq K |\xi|^{n-1} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

quando $|\xi| \leq \delta$. Se $|\xi| > \delta$, então

$$t^{\frac{a-n+1}{2}} |\xi|^a e^{-t|\xi|^2} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| \leq (t|\xi|^2)^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-t|\xi|^2} \|u_0 - v_0\|_{\mathcal{PM}^{n-1}}.$$

Desde que o $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{a-n+1}{2}} e^{-x} = 0$, pode-se achar um $t_0 > 0$ tal que $t \geq t_0$ implica

$$t^{\frac{a-n+1}{2}} |\xi|^a e^{-t|\xi|^2} |\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)| \leq \epsilon,$$

pois $t|\xi|^2 \geq t\delta^2$. Portanto, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{a-n+1}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{PM}^a} = 0$, e aplicando o teorema 4.30 obtemos (4.42). \square

Uma aplicação do corolário 4.31 é o seguinte resultado:

Corolário 4.32 (Bacia atratora auto-similar). *Assuma que no corolário 4.31 a condição inicial u_0 é homogênea de grau -1 e a condição inicial v_0 é da forma $u_0 + \phi$ com $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, valem (4.41) e (4.42).*

Observação 4.33. *O corolário 4.32 nos diz que uma solução obtida por uma perturbação “suave” em um dado inicial u_0 homogêneo de grau -1 , torna-se arbitrariamente próximo da solução auto-similar correspondente a u_0 , para valores de t suficientemente grandes.*

Apêndice A.

Como foi comentado no capítulo 4, neste apêndice mostramos que os espaços $F_N(\sigma, T)$ e $E_N(\sigma, T)$, definidos na seção 4.3.2, são espaços de Banach.

Proposição 4.34. *Os espaços F_N e E_N , dados na definição 4.24 (pg.74), são espaços de Banach com as normas $\|\cdot\|_{F_N}$ e $\|\cdot\|_{E_N}$, respectivamente.*

Demonstração. Aqui somente mostramos o resultado para o espaço $E_N(\sigma, T)$, pois o resultado para F_N é uma consequência imediata. De fato, seja $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em E_N , a mesma prova que foi dada para mostrar a proposição 4.2, permite mostrar que $\partial^\alpha g_k$ converge na norma $\sup_{\sigma < t < T} \|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ para uma função que denotamos por g^α , quando $|\alpha| \leq N - 1$, e na norma $\sup_{\sigma < t < T} (t - \sigma)^{1/2} \|\cdot\|_{\mathcal{PM}^a}$ para uma função que também denotamos por g^α , quando $|\alpha| = N$. Resta mostrar que $\partial^\alpha g^0 = g^\alpha$. As duas normas usadas acima implicam que a convergência é pontual em $t > 0$, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\partial^\alpha g_k(t) - g^\alpha(t)\|_{\mathcal{PM}^a} = 0,$$

para cada $t \in [\sigma, T)$ e $|\alpha| \leq N$. Finalmente, pela observação 1.14, sabemos que a convergência em \mathcal{PM}^a implica a convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha g^0(t), \phi \rangle &= (-i)^{|\alpha|} \langle g^0(t), \partial^\alpha \phi \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (-i)^{|\alpha|} \langle g_k(t), \partial^\alpha \phi \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \partial^\alpha g_k(t), \phi \rangle \\ &= \langle g^\alpha(t), \phi \rangle, \end{aligned}$$

para cada $t \in [\sigma, T)$. Logo, segue o resultado.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A.; Fournier, J. F., *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics Academic Press, 2003.
- [2] Bergh, J.; Löfström, J., *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer-Verlag, (1976).
- [3] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*. Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), 771-831.
- [4] Cannone, M., *Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations*, Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol III, 161-244, North-Holland, Amsterdam, 2004.
- [5] Cannone, M.; Karch, G., *Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system?*, Journal of Differential Equations, 197(2)(2004), 247-274.
- [6] Chorin, A. J.; Marsden, J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Third Edition, Springer, 1993.
- [7] Carrillo, J. A.; Ferreira, L. C. F., *Self-similar solutions and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation*, Monatshefte Für Mathematik, 151(2)(2007), 111-142.
- [8] Folland, G., *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University press, 1995.
- [9] Folland, G., *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, 2 ed., PAM, Wiley, 1999.

- [10] Íorio, R.; Iorio, V., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1988.
- [11] Kato, T., Strong Solutions of the Navier-Stokes Equation in Morrey Spaces, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 22(2)(1992), 127-155.
- [12] Lages, L. E., *Curso de análise*, volume 2, Terceira edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.
- [13] Lawrence, C. E., *Partial Differential Equations*, volume 19, American Mathematical Society, 1998.
- [14] Lemarié-Rieusset, P. G., *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, A CRC Press Company, 2002.
- [15] Lieb, E. H.; Loss, M., *Analysis*, 2 ed., American Mathematical Society, 2001.
- [16] Rudin, W., *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hill Book Company, 1986.
- [17] Stein, E. M., *Singular integrals and differentiability propoerties of functions*, Princeton Univeristi Press, 1971.
- [18] Teman, R., *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Society for Industrial & Applied, 1983.
- [19] Yamazaki, M., *The Navier-Stokes equation in the weak- L^n space with time-dependent external force*, *Mathematische Annalen*, Springer-verlag, 317(4)(2000), 635-675.