



Universidade Estadual de
Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática



Tese de Doutorado

Sistemas de Filippov em Variedades Tridimensionais

por

Durval José Tonon

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

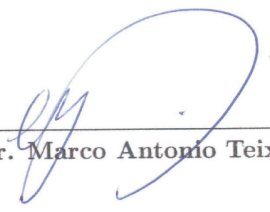
Campinas-Março de 2010.

Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP, processo n°: 07/56163-4.

Sistemas de Filippov em Variedades Tridimensionais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Durval José Tonon** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 22 de Março de 2010.



Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.

Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende.

Prof. Dr. Mario Jorge Carneiro.

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva.

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **DOCTOR em MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8 / 5089

Tonon, Durval José

T61s Sistemas de Filippov em variedades tridimensionais/Durval José
Tonon-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Marco Antonio Teixeira

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Campos vetoriais. 3. Sistemas de
Filippov. 4. Estabilidade estrutural. 5. Estabilidade. I. Teixeira, Marco
Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Filippov systems in tridimensional manifolds

Palavras-chave em inglês (Keywords): Dynamical systems. 2. Vector fields. 3. Filippov
systems. 4. Structural stability. 5. Stability.

Área de concentração: Sistemas dinâmicos

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC-UNICAMP)
Profª. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ronaldo Garcia (IME-UFG)
Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva (IBILCE-UNESP)
Prof. Dr. Mario Jorge Carneiro (UFMG)

Data da defesa: 17/03/2010

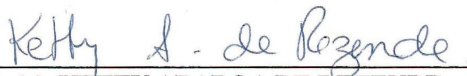
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 17 de março de 2010 e aprovada

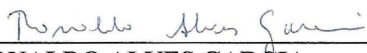
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE



Prof(a). Dr(a). RONALDO ALVES GARCIA



Prof(a). Dr(a). PAULO RICARDO DA SILVA



Prof(a). Dr(a). MARIO JORGE DIAS CARNEIRO

*À minha família, minha
fortaleza, dedico.*

Se

Se és capaz de manter tua calma, quando,
todo mundo ao redor já a perdeu e te culpa.
De crer em ti quando estão todos duvidando,
e para esses no entanto achar uma desculpa.

Se és capaz de esperar sem te desesperares,
ou, enganado, não mentir ao mentiroso.
Ou, sendo odiado, sempre ao ódio te esquivares,
e não parecer bom demais, nem pretensioso.

Se és capaz de pensar - sem que a isso só te atires,
de sonhar - sem fazer dos sonhos teus senhores.
Se, encontrando a Desgraça e o Triunfo, conseguires,
tratar da mesma forma a esses dois impostores.

Se és capaz de sofrer a dor de ver mudadas,
em armadilhas as verdades que disseste.
E as coisas, por que deste a vida esfaçalhadas,
e refazê-las com o bem pouco que te reste.

Se és capaz de arriscar numa única parada,
tudo quanto ganhaste em toda a tua vida.
E perder e, ao perder, sem nunca dizer nada,
resignado, tornar ao ponto de partida.

De forçar coração, nervos, músculos, tudo,
a dar seja o que for que neles ainda existe.
E a persistir assim quando, exausto, contudo,
resta a vontade em ti, que ainda te ordena: Persiste!

Se és capaz de, entre a plebe, não te corromperes,
e, entre Reis, não perder a naturalidade.
E de amigos, quer bons, quer maus, te defenderes,
se a todos podes ser de alguma utilidade.

Se és capaz de dar, segundo por segundo,
ao minuto fatal todo valor e brilho.
Tua é a Terra com tudo o que existe no mundo,
e - o que ainda é muito mais - és um Homem, meu filho!

Rudyard Kipling.

AGRADECIMENTOS

Aprendi durante esse período de doutorado que em alguns momentos de nossa vida a única força que nos move é a vontade de perseverar. É por isso que aqui agradeço a Deus por me conceber todos os meios para concluir mais essa etapa de minha vida.

Muitas pessoas contribuíram para que eu estivesse apto a escrever essa tese. Infelizmente não poderei citar todas, contudo gostaria de agradecer algumas delas.

Ao Marco por acreditar em minhas capacidades, pela paciência, por me orientar nesse doutorado, pela compreensão durante esses três anos do doutorado, muito obrigado!

Aos professores e funcionários do IMECC pelos ensinamentos e por tornarem os trâmites burocráticos mais simples.

Aos professores da UNESP de São José do Rio Preto, em especial ao Claudio Buzzi e ao Paulo Ricardo pela atenção com que sempre me atendem.

Aos meus pais, Durval Tonon e Aparecida Batista Tonon, pelo apoio, amor, por se sacrificarem fazendo de tudo para me proporcionar as oportunidades que nunca tiveram. Por me ensinarem todas as lições, as vezes com lágrimas nos olhos, para que me transformasse em um homem de caráter. Com palavras somente posso dizer: muito obrigado!

À minha irmã Néia e minha tia Wandira muito obrigado pelo carinho e atenção.

Aos meus avós (in memorian) José Tonon e Zuleika Corrêa Tonon.

À Izilda, João, Laira e Thalissa por me acolherem no começo dessa jornada. Muito obrigado!

Ao meu diretor e amigo professor Amaral Crepaldi Filho pelos seus sábios conselhos e por enxergar em nós qualidades e capacidades que desconhecíamos.

À minha noiva Nadia por sempre estar ao meu lado e ser uma companheira maravilhosa.

Ao pessoal do predinho e aos amigos do IMECC por tornarem nosso ambiente de trabalho mais agradável e um pouco menos áspero, em especial ao Lino, Luis Almeida, Anderson D’uazeite, Ricardo, Chorão (Wellington), Fernando, Ferraiol, Félix Maranhão, Bisteca (Rodrigo Lambert), Gra, Ariane Bahianese, Janete, Luis Miranda, Casagrande, Bambila, Dirso, Luix, Ivan e Jota.

À FAPESP e à UNICAMP pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho sistemas dinâmicos descontínuos em variedades tridimensionais são estudados. Descrevemos uma classe de tais sistemas que são localmente estruturalmente estáveis em uma vizinhança de uma singularidade típica. Exibimos nessa etapa uma sub-família de campos do tipo dobra-dobra que é estruturalmente estável. Introduzimos os conceitos de A e L-estabilidade, que são pequenas generalizações dos conceitos clássicos de estabilidade assintótica e estabilidade no sentido de Lyapunov, respectivamente. Através de formas normais para as famílias de campos descontínuos de codimensão zero e um, exibimos os subconjuntos de sistemas descontínuos que são A e L-estáveis em uma vizinhança da origem. Destacamos um dos principais objetos de estudo desse trabalho: a singularidade dobra-dobra caso elíptico (T-singularidade). Discutimos algumas propriedades de sua dinâmica como a A-estabilidade para campos do tipo dobra-dobra de codimensão zero, um e dois. Investigamos também a presença de alguns invariantes topológicos, como separatrizes e famílias de órbitas periódicas. Finalmente, analisamos os chamados sistemas com relê. Em especial um sistema com dois relês acoplados é discutido.

ABSTRACT

In this work non-smooth dynamical systems in $\mathbb{R}^3$ are considered. We describe a class of such systems that are locally structurally stable around a typical singularity. One of our contributions is to exhibit within these class of fold-fold systems a subclass which is structural stable. We also introduce the concept of A and L-stability which generalizes the classical concept of asymptotic and Lyapunov stability, respectively. Using normal forms for families of non smooth dynamical systems of codimension zero and one we exhibited subsets of non smooth dynamical systems which are A and L-stable in a neighborhood of the origin. We emphasize that the main object of study within this work is the fold-fold singularity in the elliptical case (T-singularity). We discuss some of its dynamical properties such as A-stability for codimension zero, one and two systems. We also investigate the presence of topological invariants such as separatrices and families of periodic orbits. Finally we analyze two coupled relay systems.

CONTEÚDO

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	7
1.1 Campos Definidos em Variedades com Bordo	7
1.2 Campos Descontínuos	13
2 Estabilidade Estrutural para Sistemas Descontínuos	23
2.1 Estabilidade Estrutural	23
3 A-Estabilidade	33
3.1 Exemplos e Definições	34
3.2 A-Estabilidade de Sistemas Descontínuos em Ω_0	38
3.2.1 Caso Regular-regular $Z \in \Omega_0(a)$	38
3.2.2 Caso Dobra-regular $Z \in \Omega_0(b)$	39
3.2.3 Caso Cúspide-regular $Z \in \Omega_0(c)$	40
3.2.4 Caso Dobra-dobra $Z \in \Omega_0(d)$	41
3.3 A-Estabilidade de Sistemas Descontínuos em Ω_1	46
3.3.1 Caso Lips-regular $Z_0 \in \Omega_1(a.1)$	48

3.3.2	Caso Bec to Bec-regular $Z_0 \in \Omega_1(a.2)$	49
3.3.3	Caso Dove's tail-regular $Z_0 \in \Omega_1(a.3)$	51
3.3.4	Caso Dobra-dobra 1-degenerada $Z_0 \in \Omega_1(b)$	52
3.3.5	Caso Dobra-cúspide $Z_0 \in \Omega_1(c)$	55
3.3.6	Caso Ponto crítico-regular $Z_0 \in \Omega_1(d)$	58
3.3.7	Caso Dobra-dobra-sela-nó $Z_0 \in \Omega_1(e)$	63
3.3.8	Caso Dobra-dobra-nilpotente $Z_0 \in \Omega_1(f)$	70
4	A-Estabilidade em Sistemas Dobra-dobra Degenerados	73
4.1	A-Estabilidade em Sistemas do tipo Dobra-dobra	74
5	Propriedades da T-Singularidade	79
5.1	T-singularidade onde φ_Z é do Tipo Sela	80
5.2	Existência de Separatrizes para T-singularidade	80
5.3	Órbita Pseudo Periódica	82
5.4	Reversibilidade e k-ciclos para Campos do Tipo Dobra-dobra	85
5.4.1	Perturbações do campo Z_0 R-reversível	88
6	Sistemas com Relê	91
6.1	Análise qualitativa de dois sistemas com relê acoplados	92
	Bibliografia	99

INTRODUÇÃO

Neste trabalho abordamos alguns aspectos qualitativos e geométricos da teoria de sistemas dinâmicos descontínuos. Esta teoria tem tido nos últimos anos um grande avanço devido a diversos fatores: a estreita relação com outros ramos da ciência como a engenharia e a física, a beleza matemática e o desafio de estabelecer de forma consistente definições e convenções.

Nos últimos anos, muitos autores contribuíram para o desenvolvimento e amadurecimento do estudo de sistemas Filippov, veja por exemplo, [F, K] e para mais referências [T2].

O ponto base para o estudo de sistemas descontínuos em dimensão três foi o trabalho [S-T1] de J. Sotomayor e M. A. Teixeira que considera campos de vetores definidos em variedades com bordo, denotado por χ . Neste trabalho, seguindo o programa de Thom-Smale, estão caracterizados os conjuntos de campos estruturalmente estáveis, Σ_0, Σ_1 , relativos a χ, χ_1 , respectivamente, onde $\chi_1 = \chi - \Sigma_0$. Contudo o estudo da estabilidade para sistemas descontínuos exige que consideremos além dos ingredientes encontrados em variedades com bordo outros provenientes da dinâmica dos campos X e Y , como por exemplo aplicação de primeiro retorno associada, campo deslizando, entre outros, tornando esse estudo uma fonte profícua de fenômenos interessantes. Veja [J, Ku-R-G], por exemplo.

O início do estudo da A-estabilidade em sistemas descontínuos foi o trabalho de M.A. Teixeira [T1] e posteriormente [T6]. Neste texto generalizamos os resultados encontrados em [T1, T6] sobre a estabilidade assintótica. A primeira tentativa de atacar o problema sobre a caracterização da estabilidade assintótica foi utilizarmos o processo de regularização desenvolvido pelo Marco Teixeira e por Jorge Sotomayor em [S-T2]. Contudo esse processo não mostrou-se muito profícuo. Nossa abordagem será considerar a dinâmica

de cada um dos ingredientes envolvidos no campo descontínuo: aplicação de primeiro retorno, campo deslizante, dinâmica dos campos X e Y e o tipo de contato entre X, Y e a variedade de descontinuidade. Desta forma, generalizaremos os resultados obtidos em [T₁, T₆] sobre a estabilidade para as famílias de campos de codimensão zero e um.

Um dos objetivos dessa tese é estudar a estabilidade estrutural dos campos de Filippov. Este é um dos problemas mais relevantes na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, visto que nos fornece não só informações sobre a dinâmica de um sistema concreto como também a dinâmica de todos os sistemas próximos dele.

Explicitaremos os homeomorfismos que conjugam os elementos de cada família de campos de Filippov que são estruturalmente estáveis. Em [T₁] foi caracterizado um conjunto aberto de campos descontínuos do tipo dobra-dobra que não é estruturalmente estável. Apresentaremos aqui uma subfamília de campos do tipo dobra-dobra que é estruturalmente estável.

Importantes noções de estabilidade para sistemas de Filippov são a A-estabilidade e a L-estabilidade local. Mais geralmente, o conceito de estabilidade significa que trajetórias começando próximas de um conjunto invariante permanecerão próximas a esta por todo tempo.

Introduziremos o conceito de A e L-estabilidade para sistemas Filippov, que são pequenas variações dos conceitos de estabilidade assintótica e da estabilidade no sentido de Lyapunov, respectivamente. Realizamos uma pré-classificação dos sistemas de codimensão k , onde $k = 0, 1$ e através dessa classificação determinamos condições para que um sistema seja A ou L-estável em uma vizinhança de uma singularidade típica. Mais precisamente, nos concentramos em sistemas do tipo Filippov (veja [F]) modelados por equações diferenciais no $\mathbb{R}^3$ cujo conjunto de descontinuidade é uma superfície 2-dimensional M . É bem conhecido que muitos modelos de sistemas descontínuos (veja [J-C, J, C, T₃, M-T, C-B-F-J]) que surgem de problemas em sistemas mecânicos ou elétricos ocorrem em dimensão três genericamente a uma família de parâmetros, isto é, geram bifurcações de codimensão um.

Em [B-B-C-K] é apresentado diversos exemplos e aplicações interessantes na teoria de sistemas descontínuos.

Os conceitos de A e L-estabilidade dizem que pequenas mudanças na condição inicial não alteram a dinâmica do sistema. Para caracterizarmos a estabilidade de sistemas de Filippov $Z = (X, Y)$ temos que considerar as dinâmicas de X, Y , do campo deslizante F_Z associado e em alguns casos a dinâmica da aplicação de primeiro retorno φ_Z , dando origem a uma dinâmica rica, complexa que difere em muitos aspectos do caso regular.

Dos trabalhos [S-T₁, T₃, M-T], obtemos uma pré-classificação das singularidades típi-

cas de codimensão k , ($k = 0, 1$) de um sistema dinâmico descontínuo $Z = (X, Y)$. Desta forma, identificamos as classes de campos que surgem genericamente em famílias a 1-parâmetro de sistemas descontínuos em $\mathbb{R}^3$.

Como já dissemos, em [T1] foram dadas condições necessárias para a estabilidade estrutural de campos Filippov $Z = (X, Y)$ em $\mathbb{R}^3$. Um caso ficou sem resposta: onde X, Y são do tipo dobra invisível e a aplicação de primeiro retorno é hiperbólica. A busca pela resposta para este caso tem sido objeto de pesquisa atualmente ([J-C, J, C, C-B-F-J]). Utilizando as idéias introduzidas em [T1] encontramos dificuldades semelhantes para estabelecer a estabilidade estrutural nos casos *dobra-dobra invisível* (onde a aplicação de primeiro retorno é do tipo sela) e *dobra-dobra invisível 1-degenerada*, as quais são definidas no texto.

Como o comportamento de um sistema de Filippov do tipo dobra-dobra ainda não está completamente caracterizado e com intuito de fornecer o máximo de informação possível sobre este modelo, caracterizamos algumas propriedades de sua dinâmica como existência de separatrizes (conexão entre os conjuntos de tangência) e a A-estabilidade, as quais poderão ser úteis no estudo da estabilidade estrutural. No trabalho [J-T] o conceito de reversibilidade para sistemas descontínuos é discutido. Usando esse conceito explicitamos uma família de campos dobra-dobra reversível e investigamos a respeito da existência de k -ciclos para essa família, isto é, órbitas de Z que interceptam k vezes a variedade de descontinuidade M antes de fechar.

Muitos fenômenos em mecânica com impacto e sistemas eletromecânicos são modelados por equações que apresentam descontinuidades em um hiperplano. Uma dessas classes de campos são os chamados sistemas com relê, os quais foram estudados em [A, B, Z-B], por exemplo. Existem alguns resultados (veja [J-P-T, J-P]) tratando da análise qualitativa de sistemas com relê, um dos objetivos desses trabalhos é encontrar famílias de órbitas periódicas. Finalizando nosso trabalho, e na tentativa de contribuirmos nessa análise qualitativa, consideramos um modelo com dois sistemas com relê acoplados. A idéia é respondermos a questão sobre a existência de famílias de órbitas periódicas para esse modelo.

Apresentaremos agora de uma maneira sucinta um resumo do conteúdo de cada um dos capítulos subsequentes.

Introdução Neste capítulo damos uma motivação do problema abordado e contextualizamos nosso trabalho.

Conceitos Preliminares Introduzimos os conceitos primordiais ao desenvolvimento do texto. Definimos para campos descontínuos o conceito de estabilidade estrutural, reversibilidade, entre outros e exibimos os subconjuntos dos campos descontínuos de codi-

mensão zero e um, seguindo o programa de Thom-Smale.

Estabilidade Estrutural para Sistemas Descontínuos Exibimos uma classe de campos de Filippov que é estruturalmente estável via homeomorfismos M -invariantes e além disso explicitamos as formas normais topológicas para cada caso.

A-Estabilidade Neste capítulo, utilizando a pré-classificação dos campos descontínuos de codimensão zero e um feita no Capítulo Conceitos Preliminares, caracterizamos os subconjuntos que são A e L-estáveis (pequenas variações dos conceitos assintoticamente estável e Lyapunov estável, respectivamente, para campos suave). Além disso, quando possível exibimos para cada caso a aplicação de primeiro retorno associada ao campo descontínuo (composição dos fluxos do campo Y com o fluxo do campo X) bem como a região de retorno.

A-Estabilidade em Sistemas Dobra-dobra Degenerados Atualmente tem tido um crescente interesse em entender a dinâmica de uma classe especial de campos descontínuos: campos $Z = (X, Y)$ do tipo dobra-dobra. Na tentativa de cooperarmos de alguma forma nessa linha, consideramos os campos dobra-dobra de codimensão zero, um e dois. Dentro desse conjunto exibiremos os subconjuntos que são A ou L-estáveis bem como a dinâmica da aplicação de primeiro retorno.

Propriedade da T-Singularidade Considerando a classe de campos dobra-dobra invisíveis, a chamada dobra-dobra distinguida ou T-singularidade, exibimos algumas propriedades da sua dinâmica como: existência de separatrizes, existência de órbitas pseudo-periódicas (veja definição 3.1.2), reversibilidade e existência de k -ciclos.

Sistemas com Relê Nesse capítulo, trabalhamos com a análise de um modelo de dois sistemas com relê acoplados. O objetivo será encontrar famílias de órbitas periódicas.

Dentre os resultados obtidos nessa tese, alguns deles merecem um destaque maior, os quais chamamos de **Teoremas A, B, C** e o resultado **D**, que na verdade trata-se de uma série de proposições que fornecem informações sobre a dinâmica onde Z é um campo descontínuo do tipo dobra-dobra elíptico. Apresentemos a seguir de uma maneira informal esses resultados. A idéia é mostrar a nossa contribuição para o desenvolvimento da teoria.

Teorema A: Exibimos as formas normais topológicas dos sistemas de Filippov que ocorrem genericamente em uma variedade tridimensional e caracterizamos os subconjuntos de campos que são localmente estruturalmente estáveis em Ω . Veja página 25.

Teoremas B e C: Considerando os campos de codimensão $k(k = 0, 1)$, descrevemos uma classe de campos que são A ou L-estáveis em uma vizinhança da origem. Os Teoremas B e C tratam dos campos de codimensão $k = 0$ e 1 , respectivamente. Veja página 32 e 41, respectivamente.

Resultado D Apresentamos algumas propriedades do campo descontínuo Z do tipo dobra-dobra elíptica (T-singularidade) como: A-estabilidade de Z onde a aplicação de primeiro retorno φ_Z é do tipo sela, proposição 5.1.1, existência de separatrizes para Z (proposição 5.2.1), não existência de pseudo órbitas periódicas e existência de famílias de órbitas periódicas (proposição 5.3.1), reversibilidade (proposição 5.4.1), existência somente de 1-ciclos (órbitas periódicas de período 1) e não existência de k -ciclos para $k \neq 1$ (proposição 5.4.2) e finalmente a não robustez da família de órbitas periódicas 1-ciclos (proposição 5.4.3).

Finalizando esta tese realizamos um estudo de um modelo para sistemas com relê acoplados. A idéia desse estudo é exibir famílias de órbitas periódicas, usando propriedades de simetria do problema.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos básicos e definições os quais nos serão úteis no decorrer do texto.

Comentamos alguns conceitos relacionados a estabilidade estrutural de campos de vetores definidos em variedades com bordo, seguindo a linha dos trabalhos [P₁] e [P₃] de Peixoto em 1959.

Posteriormente introduzimos o conceito de campos descontínuos e alguns resultados preliminares.

1.1 Campos Definidos em Variedades com Bordo

Consideremos N uma variedade compacta C^∞ orientável de dimensão três com fronteira ∂N . Denotemos por $\chi^r(n)$ o espaço de todos os germes de campos de vetores de classe C^r em $(\mathbb{R}^n, 0)$ com a topologia C^r , onde r é grande o suficiente para nossos propósitos e $n = 2, 3$. Para maiores detalhes com relação a estabilidade estrutural de campos de vetores definidos em variedades com bordo remetemos o leitor aos trabalhos [T₄, T₇]. Por simplicidade vamos considerar N mergulhada em uma variedade tridimensional $\tilde{N}$ sem fronteira.

Definição 1.1.1 *Dois campos de vetores Z e $\tilde{Z}$ são ditos **germe equivalentes** se eles coincidem em uma vizinhança não vazia de N .*

As classes de equivalência para esta relação de equivalência são chamados de **germes de campos de vetores**. Podemos definir analogamente germes de funções. Um campo

de vetores X em N é por definição um representante da classe de campos de vetores tangentes a N , definidos em $\tilde{N}$. Seja ϕ_X o fluxo do representante X dos campos de vetores definidos em um conjunto $D(X) = \{(x, t) \in \tilde{N} \times \mathbb{R} : t \in I_X\}$, onde I_X é o intervalo maximal aberto com extremos $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ contendo 0 ($\phi_X(0, x) = x$) para o qual $\phi_X(t, x) \in N$, para todo $t \in I_X$. Podemos ter $\alpha(x), \beta(x)$ infinito e o fluxo ϕ_X não depende da particular escolha do representante da classe de campos.

A órbita $\gamma(x)$ de X passando por $x \in N$ é por definição a imagem de I_X pela curva integral $\phi_X(\cdot, x) : t \mapsto \phi_X(t, x)$. Órbitas são orientadas pela orientação induzida por essa aplicação via orientação positiva de I_X .

O estudo qualitativo de uma equação diferencial consiste na descrição geométrica de seu espaço de órbitas. É então natural perguntar-se quando é que dois espaços de órbitas têm a mesma descrição, ou seja, corresponde a estabelecermos uma relação de equivalência entre equações diferenciais. Uma relação de equivalência que exprime a estrutura geométrica das órbitas é a equivalência topológica.

Definição 1.1.2 *Dois campos de vetores X, Y em N são ditos **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : N \rightarrow N$ levando órbitas de X em órbitas de Y , preservando a orientação, isto é, dados $p \in N$ e $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < t < \delta$ então $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t', h(p))$ para algum $0 < t' < \varepsilon$.*

Dizemos que h é uma equivalência topológica entre X e Y . Desta forma, definimos uma relação de equivalência em χ^r .

Um relação mais forte é a conjugação entre os fluxos dos campos de vetores. Dois campos X e Y são **topologicamente conjugados** se existir uma equivalência topológica que preserva o parâmetro t , isto é, $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t, h(p))$ para todo $p \in N$ e $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.3 *Dizemos que $X \in \chi^r$ é estruturalmente estável em χ^r se existe uma vizinhança $B \subset \chi^r$ de X tal que para todo $Y \in B$ é conjugado a X .*

Faremos a seguir um resumo dos resultados sobre estabilidade estrutural para variedades de dimensão dois. Sabemos dos trabalhos [P1, P2, P3] de Peixoto, que o conjunto dos campos estruturalmente estáveis em $\mathbb{R}^2$, o qual denotaremos por $\Sigma_0(2)$ é aberto e denso em $\chi^r(2)$ e coincide com a coleção de campos de vetores X tais que:

Ω_1 : X possui todos os pontos críticos genéricos (hiperbólicos);

Ω_2 : X possui todas as trajetórias periódicas genéricas (hiperbólicas);

Ω_3 : X não possui conexão de selas;

Ω_4 : X não possui trajetórias recorrentes não triviais;

B_1 : X possui todos os pontos críticos no interior de N ;

B_2 : X possui todas as trajetórias periódicas no interior de N ;

B_3 : qualquer trajetória de X possui no máximo um ponto de tangência com ∂N ;

B_4 : qualquer separatriz de sela de X é transversal a ∂N ;

B_5 : se uma trajetória de X é tangente a ∂N em p , temos que o contato entre essas duas curvas em p é de ordem 2;

B_6 : existe no máximo um número finito de pontos de tangência de X e ∂N .

No trabalho [S] de Sotomayor prova-se que as condições $B_1, \dots, B_5$ implicam a condição B_6 .

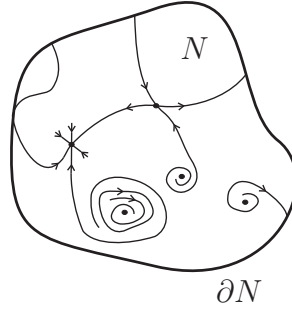


Figura 1.1: Exemplo de campo estruturalmente estável.

O conjunto limite de uma órbita $\gamma(p)$ de X é o conjunto de pontos $y \in N$ que são pontos limites da sequência da forma $\phi_X(t_n, p)$ com $t_n \rightarrow \omega(p)$. Denotamos esse conjunto por $L^+(p)$. O conjunto limite negativo $L^-(p)$ é definido de maneira similar para $t_n \rightarrow \alpha(p)$. Se $\omega(p) < +\infty$, respectivamente $\alpha(p) > -\infty$, temos $L^+(p)$, respectivamente $L^-(p)$ é um único ponto $\phi_X(\omega(p), p)$ ($\phi_X(\alpha(p), p)$) e pertence a ∂N . No trabalho [T4] de Teixeira está provado o seguinte resultado:

Teorema 1.1.1 *Para $r > 3$, existe uma C^{r-1} subvariedade $\Sigma_1(2)$ de codimensão um imersa em $\chi^r(2)$ que satisfaz*

- (a) $\Sigma_1(2)$ é densa em $\chi_1^r(2) = \chi^r(2) - \Sigma_0(2)$, ambos com a topologia relativa;
- (b) Para todo $X \in \Sigma_1$ existe uma vizinhança B com a topologia de $\Sigma_1(2)$ tal que para todo $Y \in B$ é topologicamente equivalente a X .

Notação: Vamos denotar a fronteira da variedade compacta N por M , a qual será uma subvariedade compacta de N .

A seguir, seguindo a linha do trabalho [V] de Vishik (1972) definimos os tipos de contato genérico para uma variedade de dimensão n .

Observação 1.1.1 *Suponhamos que M contém a origem e é dada implicitamente pela imagem inversa $f^{-1}(0)$, onde $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é o germe de uma aplicação C^∞ que possui 0 como valor regular.*

Neste contexto de campos definidos em variedades de dimensão $n + 1$, onde $n \geq 1$, denotemos por $\Sigma_0(n + 1)$ o conjunto dos elementos em $\chi(n + 1)$ satisfazendo as seguintes condições:

- (1) $(X.f)(0) \neq 0$ (0 é ponto regular de X). Neste caso X é transversal a M em 0;
- (2) $(X.f)(0) = 0$ e $(X^2.f)(0) = X.(\nabla X.f) \neq 0$ (0 é um ponto de dobra de X);
- (3) $(X.f)(0) = 0, (X^2.f)(0) = 0$ e $(X^3.f)(0) \neq 0$ e o conjunto $\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\}$ é linearmente independente (0 é um ponto de cúspide de X);
- $\vdots$
- (n) $(X.f)(0) = (X^2.f)(0) = \dots = (X^n.f)(0) = 0$ e $(X^{n+1}.f)(0) \neq 0$ e o conjunto $\{df(0), d(X.f)(0), \dots, d(X^n.f)(0)\}$ é linearmente independente e 0 é um ponto regular da aplicação $X.f|_M$ onde $d(\cdot)$ denota o operador diferencial.

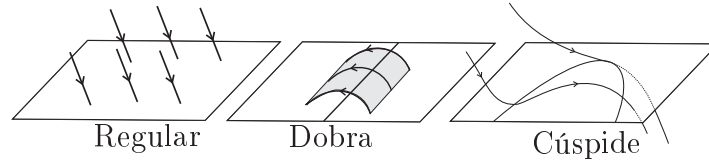


Figura 1.2: A classe $\Sigma_0(3)$ de campos em variedades com bordo.

Seja $S_X = \{x \in N; f(x) = (X.f)(x) = 0\}$ o conjunto das M -singularidades de $X \in \chi(n + 1)$. Genericamente temos que todas as dobras constituem um conjunto aberto e denso de S_X . Note que se $X(0) = 0$ então $X \notin \Sigma_0(n + 1)$. O conjunto das M -bifurcações é caracterizado por $\chi_1(n + 1) = \chi(n + 1) - \Sigma_0(n + 1)$. Vishik em seu trabalho [V] exibiu as formas normais das M -singularidades de codimensão zero:

Fluxo tubular: $X = (1, 0, \dots, 0)$ e $f(x) = x_1^{k+1} + x_2 x_1^{k-1} + x_3 x_1^{k-2} + \dots + x_{k+1}$.

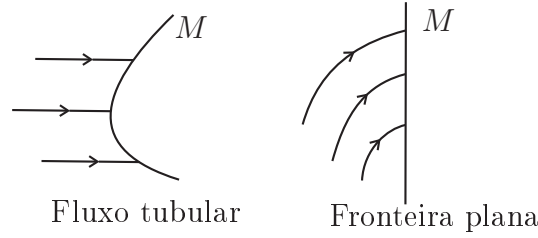


Figura 1.3: Formas normais de Vishik.

Fronteira plana: $X = (x_2, x_3, \dots, x_{k+1}, 1, 0, \dots, 0)$ e $f(x) = x_1$, onde $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Focalizemos nossa atenção agora nos casos onde a dimensão da variedade N é 2 ou 3. Para $n = 3$, no trabalho [S-T1] Sotomayor e Teixeira estudaram o conjunto de bifurcação que ocorre em M . Neste trabalho esta é caracterizada o conjunto de campos em $\chi(3)$ que é estruturalmente estável, denotado por $\Sigma_0(3)$.

Teorema 1.1.2 *Um campo $X \in \chi(3)$ é estruturalmente estável se e somente se*

- (1) $X(p) \neq 0$, para todo $p \in S$;
- (2) Para toda definição local f de S em p , uma das seguintes condições é satisfeita:
 - (b.1) *Caso regular:* $(X.f)(p) \neq 0$;
 - (b.2) *Caso dobra:* $(X.f)(p) = 0$ e $(X^2.f)(p) \neq 0$;
 - (b.3) *Caso cúspide:* $(X.f)(p) = 0 = (X^2.f)(p)$, $(X^3.f)(p) \neq 0$ e o conjunto de vetores $\{df(p), d(X.f)(p), d(X^2.f)(p)\}$ é linearmente independente;

Além disso, fixando $f(u, v, w) = w$, as formas normais dos campos de vetores em $\Sigma_0(3)$ são dadas por:

- (1) *Caso regular:* $X(u, v, w) = (0, 0, 1)$;
- (2) *Caso dobra:* $X(u, v, w) = (1, 0, u)$;
- (3) *Caso cúspide:* $X(u, v, w) = (1, 0, u^2 + v)$

e $\Sigma_0(3)$ é denso em $\chi(3)$.

Observe que 0 é uma M -singularidade de codimensão zero se $X \in \Sigma_0(3)$. Consideremos os conjuntos $\chi_1(3) = \chi(3) - \Sigma_0(3)$ e $\Sigma_1(3)$ o conjunto dos campos de vetores estruturalmente estáveis relativamente a $\chi_1(3)$. Dado $X = (f^1, f^2, g)$ em χ tal que $g(0, 0, 0) = 0$, temos as seguintes possibilidades:

- (i) $(f^1(0), f^2(0)) \neq (0, 0)$;
- (ii) $(f^1(0), f^2(0)) = (0, 0)$.

Para o caso (i), todas as formas normais estáveis de singularidades genéricas podem ser obtidas do “*Lema das formas normais de Vishik*” o qual está provado em [V]. Observemos que o caso (ii) não ocorre em codimensão 0. Considere as seguintes definições:

Definição 1.1.4 Dizemos que X está em $\Sigma_1(a) \subset \chi_1(3)$ se as seguintes condições valem:

- (1) 0 é um ponto crítico hiperbólico (ou singularidade) de X ;
- (2) os autovalores de $DX(0)$ são dois a dois distintos e os autovalores correspondentes são transversais à M em 0;
- (3) cada par de autovalores complexos não conjugados de $DX(0)$ têm parte real distinta.

Definição 1.1.5 Dizemos que X está em $\Sigma_1(b)$ se $X(0) \neq 0$, $(X.f)(0) = 0 = (X^2.f)(0)$ e vale uma das seguintes condições:

- (b.1) $(X^3.f)(0) \neq 0$, posto $\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\} = 2$ e a função $X.f|_M$ têm em 0 um ponto crítico não degenerado (Morse);
- (b.2) $(X^3.f)(0) = 0$, $(X^4.f)(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $X.f|_M$.

O resultado a seguir está provado em [S-T₁] e nos fornece as condições intrínsecas de uma campo de codimensão um definido em uma variedade de dimensão três com bordo.

Teorema 1.1.3 As seguintes afirmações valem

- (1) $\Sigma_1(3) = \Sigma_1(a) \cup \Sigma_1(b)$;
- (2) $\Sigma_1(3)$ é uma subvariedade de codimensão 1 de $\chi_1(3)$;
- (3) $\Sigma_1(3)$ é aberto e denso em $\chi_1(3)$ na topologia induzida de $\chi(3)$.
- (4) Para um conjunto residual de curvas suaves $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \chi(3)$, γ intercepta $\Sigma_1(3)$ transversalmente e $\gamma^{-1}(\chi_2(3)) = \emptyset$ onde $\chi_2(3) = \chi_1(3) - \Sigma_1(3)$.

Observação 1.1.2 Ressaltamos aqui que todos os resultados e definições não dependem da particular escolha da função f .

Denotemos por $H(f)$ a Hessiana de uma função f .

Definição 1.1.6 (1) Os elementos de $\Sigma_1(a)$ são classificados por:

- (a.1.1) **Nó:** $X(0) = 0$, os autovalores de $DX(0)$, $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ são reais distintos, $\lambda_1 \lambda_j > 0, j = 2, 3$ e os autoespaços são transversais à M em 0;
- (a.1.2) **Sela:** $X(0) = 0$, os autovalores de $DX(0)$, $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ são reais distintos, $\lambda_1 \lambda_j < 0, j = 2, 3$ e os autoespaços são transversais à M em 0;
- (a.1.3) **Foco:** $X(0) = 0$, 0 é ponto crítico hiperbólico de X , os autovalores de $DX(0)$ são $\lambda_{12} = a \pm bi, \lambda_3 = c$ com a, b, c não nulos, $a \neq c$ e os autoespaços transversais à M em 0;

(2) Os elementos de $\Sigma_1(b)$ são classificados por:

- (b.1.1) **Lips** definido em 1.1.5(b1) com $\det(H(X.f|_M(0))) > 0$, veja figura 1.4;
- (b.1.2) **Bec to Bec** definido em 1.1.5(b1) com $\det(H(X.f|_M(0))) < 0$;
- (b.1.3) **Dove's tail** definido em 1.1.5(b2).

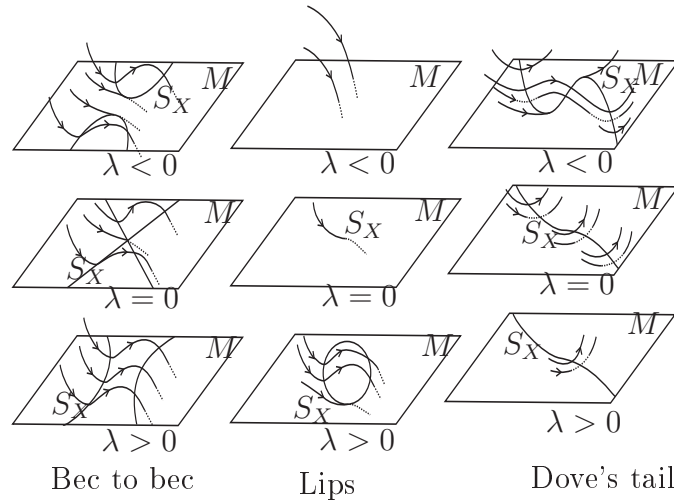


Figura 1.4: Os elementos de $\Sigma_1(b)$.

1.2 Campos Descontínuos

Nesta seção introduziremos algumas definições e resultados preliminares acerca de sistemas descontínuos, que nos serão úteis. Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe $C^r, r \geq 1$

que possui a origem como valor regular. Consideremos $\Omega(3)$ o espaço de todos os germes de campos de vetores Z em $(\mathbb{R}^3, 0)$ tais que

$$Z(q) = \begin{cases} X(q), f(q) > 0 \\ Y(q), f(q) < 0, \end{cases}$$

onde $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é a representação implícita de M , $M^+ = f^{-1}(0, \infty)$ e $M^- = f^{-1}(-\infty, 0)$. Quando escrevemos $Z = (X, Y)$ estamos assumindo que o campo X está definido e é suave em M^+ e Y está definido e é suave em M^- . Denotamos por $Z(X, Y)$ ou simplesmente Z quando não tivermos problema de ambiguidade. Consideremos $\Omega(3) = \chi(3) \times \chi(3)$, com a topologia produto. Órbitas soluções de Z sobre os pontos de M serão consideradas através da convenção de Filippov estabelecidas em [F], as quais serão discutidas a seguir. A unicidade das soluções não é requerida.

Definição 1.2.1 *Dois campos de vetores Z e $\tilde{Z}$ são C^0 M -equivalentes se existe um homeomorfismo M -invariante $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva órbitas de Z em órbitas de $\tilde{Z}$, preservando a orientação.*

Definição 1.2.2 *Dizemos que $Z \in \Omega(3)$ é M -estruturalmente estável, ou simplesmente estruturalmente estável, se existe uma vizinhança U de Z em $\Omega(3)$ tal que todo $\tilde{Z} \in U$ é C^0 equivalente a Z .*

Observação 1.2.1 *Sobre a variedade de descontinuidade podemos definir as soluções de $\dot{Z} = Z(q)$ segundo algumas convenções, visto que as soluções sobre M podem ser multivaluadas. Adotaremos aqui a convenção estabelecida por Gantmaher e Filippov.*

Definição 1.2.3 *Distinguiremos as seguintes regiões abertas em M :*

Região de Costura (SwR)- Caracterizada por $(X.f)(Y.f) > 0$, onde $(X.f)(p) = X(p) \cdot \nabla f(p)$. Quando conveniente, denotamos $SwR \uparrow = \{p \in M; (X.f)(p) > 0, (Y.f)(p) > 0\}$ e $SwR \downarrow = \{p \in M; (X.f)(p) < 0, (Y.f)(p) < 0\}$.

Região de Escape ($EscR$)- Caracterizada por $(X.f) > 0$ e $(Y.f) < 0$.

Região de Deslize (SlR)- Caracterizada por $(X.f) < 0$ e $(Y.f) > 0$.

Consideremos $\mathcal{O} = SlR \cup EscR \cup SwR$, temos que genericamente $\mathcal{O}$ é aberto e denso em M . Observemos que dado $p \in \mathcal{O}$ temos que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$.

Definição 1.2.4 Na região de deslize definiremos o **campo deslizando** $F(X, Y)$ associado a $Z = (X, Y)$ da seguinte maneira: se $p \in SlR$ então $F(X, Y)$ denota o cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ tangente a M , isto é, $F(X, Y) = m - p$, onde m é o ponto onde o segmento ligando $p + X(p)$ e $p + Y(p)$ é tangente a M .

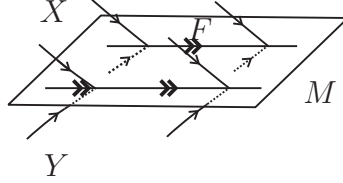


Figura 1.5: O campo deslizando F_Z .

Observação 1.2.2 Se $p \in EscR$ então $p \in SlR$ para $-Z$ e assim definimos um campo de vetores na $EscR$ por $F_E(X, Y) = -F(-Z)$. Para ambos os casos, denotemos apenas por $F(X, Y) = F(Z)$.

O campo deslizando F_Z é definido como o campo obtido da combinação linear entre X e Y , tangente a variedade de descontinuidade M , a qual é dada implicitamente pela aplicação f . Escrevermos $F_Z = (1 - \lambda)X + \lambda Y$ juntamente com a condição $F_Z \cdot \nabla f = 0$, obtemos $\lambda = \frac{X \cdot \nabla f}{(X - Y) \cdot \nabla f}$. Note que na região de deslize é definida como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in M$ tais que $X \cdot \nabla f(x, y, z) < 0$ e $Y \cdot \nabla f(x, y, z) > 0$. Assim, $\frac{1}{(Y - X) \cdot \nabla f} > 0$. Podemos escrever o campo deslizando da seguinte forma

$$F_Z = \frac{1}{(Y - X) \cdot \nabla f} (Y \cdot \nabla f \cdot X - X \cdot \nabla f \cdot Y).$$

Desta forma, o campo deslizando têm a expressão $F_Z(x, y) = \frac{1}{g(x, y)} G(x, y)$, assim a órbita futura de $p_0 \in SlR$ pelo campo descontínuo $Z = (X, Y)$ coincide com a órbita futura do campo $G = (Y \cdot \nabla f \cdot X - X \cdot \nabla f \cdot Y)$.

Observação 1.2.3 Se fixarmos um sistema de coordenadas local (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ em uma vizinhança de $p \in SlR$ tal que a aplicação $f : (\mathbb{R}^3, p) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é dada por $f(x, y, z) = z$. Neste sistema de coordenadas temos que a expressão do campo deslizando é dada por: $(Y^3 - X^3)^{-1}(X^1 Y^3 - Y^1 X^3, X^2 Y^3 - Y^2 X^3)$, onde $X = (X^1, X^2, X^3)$ e $Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$. O campo deslizando é topologicamente equivalente ao campo $(X^1 Y^3 - Y^1 X^3, X^2 Y^3 - Y^2 X^3)$, restrito a região de deslize dada por $Y^3(x, y, z) > 0$ e $X^3(x, y, z) < 0$. Assim, obtemos uma expressão mais simplificada a qual possui a mesma dinâmica do campo deslizando:

$$F_Z = F(X, Y) = (X^1 Y^3 - Y^1 X^3, X^2 Y^3 - Y^2 X^3), \quad (1.1)$$

que pode ser C^r estendida a uma vizinhança da origem em M .

Definição 1.2.5 1- Um ponto p é **M -regular** de Z se pelo menos uma das condições se verifica:

- (a) $(X.f)(p)(Y.f)(p) > 0 (p \in RC)$;
- (b) $(X.f)(p)(Y.f)(p) < 0$ mas $\det[X, Y](p) \neq 0$. Neste caso $p \in RD$ ou $p \in RE$ mas não é ponto crítico para $F(Z)$.

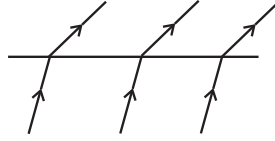


Figura 1.6: Exemplo de ponto M -regular

2- Dizemos que $p \in M$ é um ponto **M -singular elementar** de $Z = (X, Y)$ se uma das condições é satisfeita:

- (a) p é ponto de dobra de Z . Isto significa que p é ponto de dobra de X ($(X.f)(p) = 0$ e $(X^2.f)(p) \neq 0$) e regular de Y ou vice-versa, veja figura 1.7;
- (b) p é ponto de cúspide de Z . Isto significa que p é ponto de cúspide de X ($(X.f)(p) = 0 = (X^2.f)(p)$, $(X^3.f)(p) \neq 0$ e $\{df(p), d(X.f)(p), d(X^2.f)(p)\}$ é linearmente independente) e regular de Y ou vice-versa;
- (c) $(X.f)(p) \cdot (Y.f)(p) < 0$, $\det[X, Y](p) = 0$ mas $\frac{d}{dt}(\det[X, Y](p)) \neq 0$. Esta condição é equivalente a p ser um ponto crítico hiperbólico de F_Z .

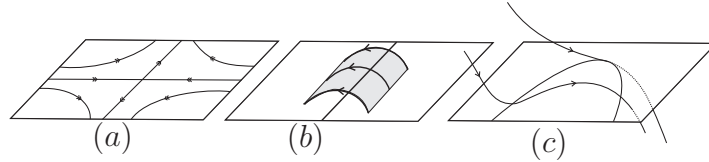


Figura 1.7: Alguns exemplos de campos descontinuos que são M -singulares elementares em uma singularidade típica.

Na figura 1.7 temos: em (a) representa a dinâmica de um campo descontinuo onde a origem é ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante F_Z , em (b) temos um campo descontinuo do tipo dobra e em (c) representa um campo descontinuo do tipo cúspide.

Se $p \in SlR \cup EscR$ e $X(p), Y(p)$ são linearmente dependentes então p é ponto crítico de F_Z . Neste caso p é chamada de **pseudo singularidade** de Z .

Convencionamos que a **órbita futura** de Z por um ponto $p \in SlR$ é dada pela órbita do campo deslizando F_Z por p . Seguiremos essa convenção afim de evitarmos fenômenos patológicos desinteressantes para nosso contexto.

Nosso objeto de trabalho será o conjunto $\Omega(3)$ de campos de Filippov definidos em uma variedade de dimensão três, o qual denotemos somente por Ω . Na definição seguinte, para simplificarmos a notação, falamos que os campos X, Y são regulares, dobras ou cúspides em $0 \in M$. Definimos os seguintes conjuntos:

Definição 1.2.6 *Consideremos os conjuntos*

$$\Omega_0(a) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são regulares} \} \text{ (caso regular-regular);}$$

$$\Omega_0(b) = \{Z = (X, Y); X \text{ é dobra e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)}\} \text{ (caso dobra-regular);}$$

$$\Omega_0(c) = \{Z = (X, Y); X \text{ é cúspide e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)}\} \text{ (caso cúspide-regular);}$$

$$\Omega_0(d) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são dobras, } S_X \text{ é transversal a } S_Y, \text{ os autovetores de } DF_Z(0) \text{ são transversais a } S_X, S_Y \text{ e } 0 \text{ é ponto crítico hiperbólico para } F_Z \} \text{ (caso dobra-dobra). Nesse caso distinguimos os subconjuntos:}$$

- **Caso elíptico:** $\Omega_0(d.1) = \{Z \in \Omega_0(d); X^2.f(p) < 0 \text{ e } Y^2.f(p) > 0\}$. Temos duas tangencias invisíveis (dobra-dobra invisível);
- **Caso parabólico:** $\Omega_0(d.2) = \{Z \in \Omega_0(d); X^2.f(p) > 0, Y^2.f(p) > 0 \text{ ou } X^2.f(p) < 0, Y^2.f(p) < 0\}$ (dobra visível-dobra invisível);
- **Caso hiperbólico:** $\Omega_0(d.3) = \{Z \in \Omega_0(d); X^2.f(p) > 0, Y^2.f(p) < 0\}$ (dobra-dobra visível).

Seja $\Omega_0 = \Omega_0(a) \cup \Omega_0(b) \cup \Omega_0(c) \cup \Omega_0(d)$. Segue do teorema 1.1.2 e das condições de transversalidade que $\Omega_0 \subset \Omega$ é subconjunto aberto e denso de Ω , relativo a topologia de Ω .

Definição 1.2.7 *Seja $Z \in \Omega_0(d.1)$, dizemos neste caso que p é **T-singularidade** de Z .¹*

¹Esta nomenclatura é em homenagem a M.A. Teixeira que no trabalho [T1] de 1990 estudou pela primeira vez, pelo que sabemos, esta singularidade exibindo algumas propriedades como a L-estabilidade (veja definição 3.1.7) e um subconjunto de $\Omega_0(d.1)$ que não é estruturalmente estável.

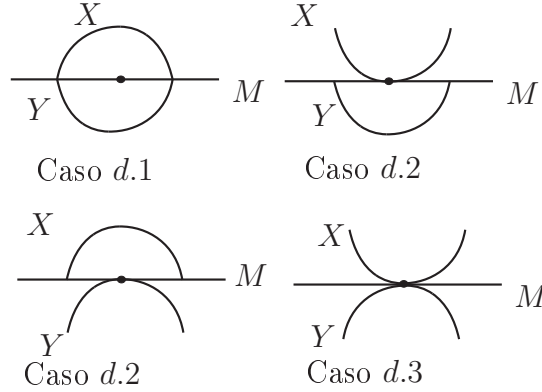


Figura 1.8: Tipos de tangencia.

Recentemente muitos trabalhos visam um entendimento total da dinâmica desta singularidade [J-C, J, C, C-B-F-J]. Futuramente dedicaremos um capítulo ao estudo da T-singularidade. A estabilidade estrutural para a T-singularidade ainda não é conhecida completamente. No capítulo estabilidade estrutural para sistemas descontínuos provaremos que $\Omega_0(i)$ para $i = a, b, c$ é estruturalmente estável e exibiremos um subconjunto de $\Omega_0(d)$ que também goza desta propriedade. Apresentemos agora alguns exemplos de sistemas descontínuos.

Exemplo 1.2.1 *Apresentemos um modelo que pode ser encontrado na teoria clássica do eletromagnetismo, veja por exemplo [A-V-K]:*

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \alpha \text{sign}(x) = 0,$$

com $\alpha > 0$. Associado a esta equação temos os campos: $X(x, y, z) = (y, z, z + \alpha)$ se $x > 0$ e $Y(x, y, z) = (y, z, z - \alpha)$ se $x < 0$.

Tomemos $f(x, y, z) = x$. As regiões na variedade de descontinuidade são dadas por: $SwR \uparrow = \{(0, y, z); y > 0\}$, $SwR \downarrow = \{(0, y, z); y < 0\}$, $SlR = \emptyset = EscR$.

Exemplo 1.2.2 *Outro exemplo de sistemas descontínuo são Sistemas com Relê, os quais são da seguinte forma: $X(x) = A.x + \text{sgn}(x)k$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $A \in M_n$ e $k = (k_1, \dots, k_n)$.*

Exemplo 1.2.3 *Consideremos o campo $Z_{\lambda, \mu} = (X_{\lambda, \mu}, Y_{\lambda, \mu})$ onde $X_{\lambda, \mu}$ fornece uma bifurcação de Hopf em $\mathbb{R}^3$ e $Y_{\lambda, \mu}$ é regular, sendo o parâmetro λ responsável pelo desdobramento da bifurcação de Hopf e μ fornece o deslocamento da singularidade: $X_{\lambda, \mu}(x + \mu, y, z) = (-y + (x + \mu)(\lambda - ((x + \mu)^2 + y^2)), x + \mu + y(\lambda - ((x + \mu)^2 + y^2)), x + y + z + \mu)$ e $Y_{\lambda, \mu}(x, y, z) = (1, 0, 0)$.*

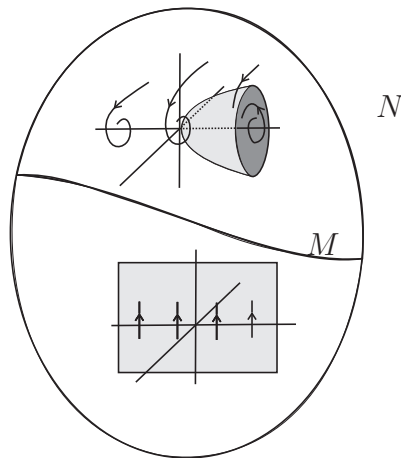


Figura 1.9: Campo descontínuo Hopf-regular.

Analisando o campo descontínuo, obtemos a curva de dobras $c = \{(\lambda, \mu); \mu y^2 + y + \mu^3 - \mu\lambda = 0\}$ do campo $X_{\lambda, \mu}$. Na figura 1.10 apresentamos o espaço de parâmetros (λ, μ) onde damos uma idéia qualitativa de como a dinâmica de $Z_{\lambda, \mu}$ varia.

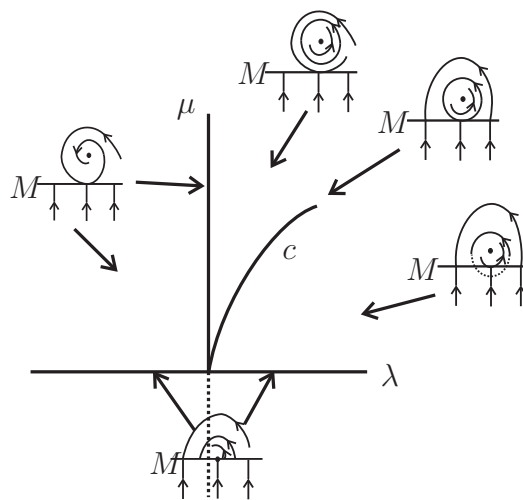


Figura 1.10: Espaço de parâmetro para Hopf-regular.

Exemplo 1.2.4 Consideremos as auto-oscilações de um gerador elétrico valvulado com rede ressonante no circuito em grade ou no circuito ânodo, dado na figura 1.11. Modelando o problema matematicamente, obtemos $X(x, y) = (y, -x - 2h_1y)$ se $x < -1$ e $Y(x, y) = (y, -x + 2h_2y)$ se $x > -1$. Obtemos o retrato de fase explicitado na figura 1.12.

Consideremos agora $\tilde{\Omega}_1 = \Omega - \Omega_0$. Definimos o conjunto Ω_1 de campos descontínuos $Z_0 = (X_0, Y_0)$ tais que:

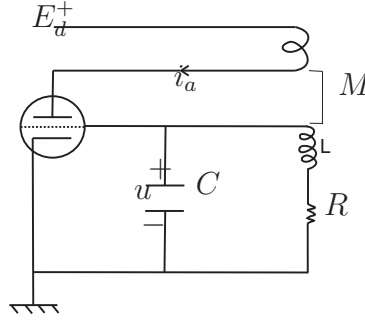


Figura 1.11: Gerador elétrico valvulado.

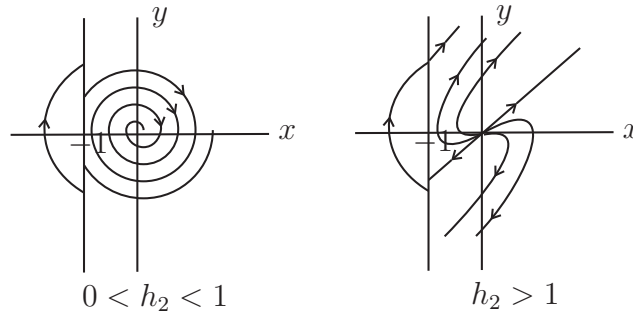


Figura 1.12: Retrato de fase.

$\Omega_1(a.1)$ — **Lips-regular**, isto é, a origem é uma singularidade do tipo Lips para o campo X_0 e regular para Y_0 (veja figura 1.13);

$\Omega_1(a.2)$ — **Bec to Bec-regular**;

$\Omega_1(a.3)$ — **Dove's tail-regular**;

$\Omega_1(b)$ — **Dobra-dobra 1-degenerada** onde contato entre os conjuntos de tangência S_X e S_Y é de ordem 2. Para alguma representação f de M temos que $X_0^2 f(0) \neq Y_0^2 f(0)$. Podemos checar que essas condições implicam que a origem é ponto de sela-nó para F_Z e a variedade central é tangente (com contato de ordem dois) a S_X e S_Y na origem. Para maiores detalhes veja [T3], página 449;

$\Omega_1(c)$ — **Dobra-cúspide** onde S_X e S_Y são transversais e exigimos que $Y_0 X_0 f(0) + X_0 Y_0 f(0) \neq 0$ (para evitarmos pseudo singularidades);

$\Omega_1(d)$ — **Ponto crítico-regular** a origem é ponto regular de Y_0 e um ponto crítico hiperbólico de X_0 , os autovalores associados ao campo deslizante na origem são dois a dois distintos, os autoespaços são transversais a S_X ;

- $\Omega_1(e)$ — **Dobra-dobra-sela-nó** a origem é ponto de dobra de X_0 e Y_0 , S_X e S_Y são transversais, a origem é um ponto de sela-nó do campo deslizante F_Z , os autoespaços de $DF_Z(0)$ são transversais a S_X e S_Y , a variedade central intercepta a região de deslize;
- $\Omega_1(f)$ — **Dobra-dobra-nilpotente** a origem é ponto de dobra de X_0 e Y_0 , S_X e S_Y são transversais, a origem é um ponto crítico hiperbólico de F_Z , os autovalores de $DF_Z(0)$ são iguais, $DF_Z(0)$ não é diagonalizável e os autoespaços interceptam a região de deslize.

Ilustramos os elementos de $\Omega_1(i)$ na figura 1.13. No trabalho [T3] mostra-se que

- (i) Ω_1 é uma subvariedade de codimensão um de Ω . Além disso, cada subconjunto $\Omega_1(i) \subset \Omega$ é uma subvariedade de codimensão um, para $i = a, b, c, d, e, f$;
- (ii) Ω_1 é aberto e denso em $\tilde{\Omega}_1$ com a topologia induzida de Ω .

Com essa notação, vamos caracterizar os subconjuntos Ω_0, Ω_1 de Ω . Considere $\mathcal{C}$ o espaço das aplicações $f : I \rightarrow \Omega$ de classe C^1 com a topologia C^1 . Introduzimos o conceito de valor de bifurcação e valor ordinário.

Definição 1.2.8 *Seja $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ um intervalo fechado. Dizemos que $\lambda_0 \in I$ é um **valor ordinário** de f se existe uma vizinhança V de λ_0 tal que $f(\lambda)$ é C^0 equivalente a $f(\lambda_0)$ para todo $\lambda \in V$. Se λ_0 não é um valor ordinário então dizemos que é um **valor de bifurcação** de f .*

Com a notação da definição anterior, temos o conceito de C^0 -equivalência entre aplicações:

Definição 1.2.9 *Dizemos que f_1 e f_2 em $\mathcal{C}$ são C^0 -equivalentes se existe um homeomorfismo $h : I \rightarrow I$ e uma aplicação $H : I \rightarrow \text{Homeo}(M)$ tal que $H(\lambda)$ é uma C^0 equivalência entre $f_1(\lambda)$ e $f_2(h(\lambda))$.*

Observação 1.2.4 *Considerando $Z_0 \in \Omega_1$, para cada caso, denotemos seus desdobramentos por $\tilde{\Omega}_1(\cdot) = \Omega_1(\cdot) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \Omega$, com $\varepsilon > 0$. Seja $f(\lambda) = Z_\lambda$, o desdobramento universal do campo descontínuo Z_0 . Denotemos por A^r a coleção dos elementos $f \in \mathcal{C}$ tais que:*

- (i) $f(I) \subset \Omega_0 \cup \Omega_1$;
- (ii) f é transversal a Ω_1 em $\lambda = 0$;
- (iii) $f(-\varepsilon)$ e $f(\varepsilon)$ estão em Ω_0 .

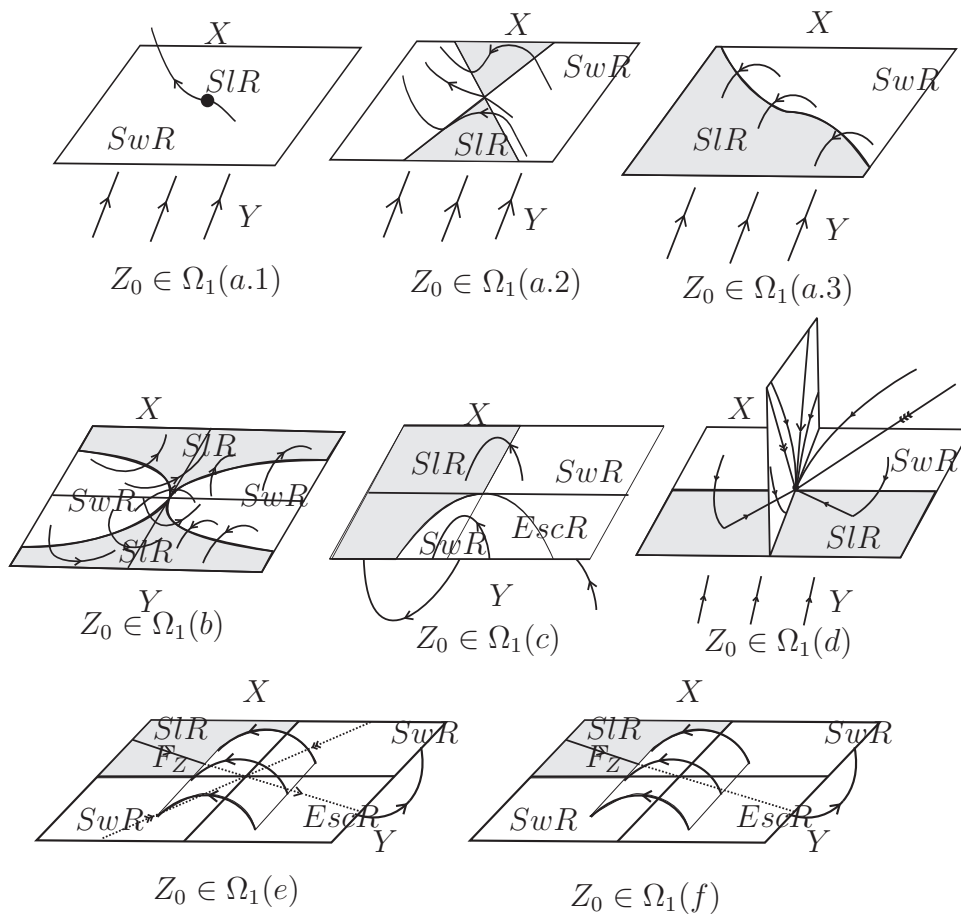


Figura 1.13: Elementos de Ω_1 .

No capítulo seguinte abordaremos um dos temas mais recorrentes na teoria qualitativa das EDO's: a estabilidade estrutural para sistemas de Filippov. Exibiremos uma classe de campos em $\Omega(3)$ que é robusta por pequenas perturbações.

CAPÍTULO 2

ESTABILIDADE ESTRUTURAL PARA SISTEMAS DESCONTÍNUOS

No Capítulo 1 Conceitos Preliminares realizamos uma pré-classificação dos sistemas de campos descontínuos exibindo a lista dos campos de codimensão zero e um. Tendo em mente essa pré-classificação caracterizaremos nesse capítulo uma classe de campos de Filippov em uma variedade de dimensão três que é estruturalmente estável e em cada caso exibiremos a respectiva forma normal. Quando falamos de forma normal, fica subentendido que estamos considerando C^0 –formas normais, isto é, formas normais obtidas via conjugação por homeomorfismos M –invariantes.

2.1 Estabilidade Estrutural

Da definição 1.2.6, do teorema 1.1.2 e das condições de transversalidade obtemos a lista dos campos de codimensão zero:

$$\Omega_0(a) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são regulares} \} \text{ (caso regular-regular);}$$

$$\Omega_0(b) = \{Z = (X, Y); X \text{ é dobra e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)} \} \text{ (caso dobra-regular);}$$

$$\Omega_0(c) = \{Z = (X, Y); X \text{ é cúspide e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)} \} \text{ (caso cúspide-regular);}$$

$$\Omega_0(d) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são dobras, } S_X \text{ é transversal a } S_Y, \text{ os autovalores de } DF_Z(0) \text{ são transversais a } S_X, S_Y \text{ e } 0 \text{ é ponto crítico hiperbólico para } F_Z \} \text{ (caso dobra-dobra).}$$

Nosso objetivo nessa seção é estudar o comportamento local de sistemas de Filippov, classificando os conjuntos de campos que são estruturalmente estáveis. Em cada caso vamos exibir as C^0 -formas normais e construiremos o homeomorfismo que fornece a equivalência topológica. Essa equivalência topológica divide o conjunto dos campos de Filippov $\Omega(3)$ em classes de equivalência e quando consideramos a formas normais tomamos o representante mais simples possível dessas classes de equivalência.

Consideremos inicialmente o caso $Z \in \Omega_0(a)$ regular-regular. Em uma vizinhança de pontos regulares que não pertencem a variedade de descontinuidade M podemos aplicar diretamente o Teorema do Fluxo Tubular. Salvo menção ao contrário, assumimos que $M = f^{-1}(0)$ com $f(x, y, z) = z$.

Proposição 2.1.1 *Considere o sistema de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega_0(a)$ regular-regular e $(0, 0, 0) \in M$, temos:*

- 1 - Se $(0, 0, 0) \in SwR$ então em uma vizinhança da origem $0 \in U$ o campo Z é topologicamente equivalente a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, com $\tilde{X}(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$, $\tilde{Y}(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$ e $\varepsilon = \text{sgn}(X.f(0))$.
- 2 - Se $(0, 0, 0) \in SlR$ e $X(0) \nparallel Y(0)$ então em uma vizinhança da origem $0 \in U$ o campo Z é topologicamente equivalente a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, com $\tilde{X}(x, y, z) = (0, 1, -1)$, $\tilde{Y}(x, y, z) = (0, 1, 1)$.
- 3 - Se $(0, 0, 0) \in EscR$ e $X(0) \nparallel Y(0)$ então em uma vizinhança da origem $0 \in U$ o campo Z é topologicamente equivalente a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, com $\tilde{X}(x, y, z) = (0, 1, 1)$, $\tilde{Y}(x, y, z) = (0, 1, -1)$.
- 4 - Se $(0, 0, 0) \in SlR \cup EscR$ é ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante F_Z (isto é, $X(0) \parallel Y(0)$) então em uma vizinhança da origem $0 \in U$ o campo Z é topologicamente equivalente a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, com
 - (i) $\tilde{X}(x, y, z) = (ax, by, c)$ e $\tilde{Y}(x, y, z) = (0, 0, -c)$ se $a = \lambda_1$ e $b = \lambda_2$ são os autovalores reais não nulos distintos de $DF_Z(0)$,
 - (ii) $\tilde{X}(x, y, z) = (ax, ay, c)$ e $\tilde{Y}(x, y, z) = (0, x, -c)$ se $a = \lambda_1$ é autovalor real não nulo duplo de $DF_Z(0)$,
 - (iii) $\tilde{X}(x, y, z) = (ax, bx, c)$ e $\tilde{Y}(x, y, z) = (-by, ay, -c)$ se $a + ib = \lambda_1$, $a - ib = \lambda_2$ são os autovalores complexos conjugados não nulos de $DF_Z(0)$, $a \neq 0$,
 e $c = \text{sgn}(\tilde{X}.f(0))$.

Demonstração No primeiro caso construímos a equivalência via composição dos fluxos de $\phi_X, \phi_Y, \phi_{\tilde{X}}$ e $\phi_{\tilde{Y}}$. Suponhamos sem perda de generalidade que $(0, 0, 0) \in SwR \uparrow$, isto é, $sgn(X.f(0)) = 1$.

Como $0 \in SwR$ os campos são transversais a $U \cap M$, onde U é uma vizinhança arbitrária da origem. Assim, dado $p \in M^+$ usando o Teorema da Função Implícita, existe $t(p) \in \mathbb{R}$, dependendo de $p \in U \cap M$, tal que $\phi_X(t(p), p) \in M$. Analogamente, para $U \cap M^-$. Restrito a variedade M definimos o homeomorfismo h como a identidade, obtemos:

$$h(p) = \begin{cases} \phi_{\tilde{X}}(-t(p), \phi_X(t(p), p)), & \text{se } p \in M^+ \\ p, & \text{se } p \in M \\ \phi_{\tilde{Y}}(-t(p), \phi_Y(t(p), p)), & \text{se } p \in M^- \end{cases} \quad (2.1)$$

o qual é contínuo e satisfaz $\phi_{\tilde{Z}}(t, h(p)) = h(\phi_Z(t, p))$.

No segundo caso, por hipótese $X(0) \nparallel Y(0)$ e $\tilde{X}(0) \nparallel \tilde{Y}(0)$ a origem será um ponto regular para os campos deslizantes F_Z e $F_{\tilde{Z}}$. Daí pelo Teorema do Fluxo Tubular existe homeomorfismo $\bar{h}$ que conjuga localmente os campos deslizantes sobre M . Para pontos fora de M podemos estender o homeomorfismo como no caso anterior pelo fluxo pois dado $p \in U \cap M^+$ existe $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_X(t(p), p) \in M$. Analogamente para $p \in U \cap M^-$. O homeomorfismo que fornece a equivalência é dado por

$$h(p) = \begin{cases} \phi_{\tilde{X}}(-t(p), \bar{h}(\phi_X(t(p), p))), & \text{se } p \in M^+ \\ \bar{h}(p), & \text{se } p \in M \\ \phi_{\tilde{Y}}(-t(p), \bar{h}(\phi_Y(t(p), p))), & \text{se } p \in M^- \end{cases} \quad (2.2)$$

O terceiro caso pode ser estudado analogamente ao caso 2. Para o último caso, a origem é ponto crítico hiperbólico de F_Z e $F_{\tilde{Z}}$, daí pelo Teorema de Grobman-Hartmann existe um homeomorfismo $\bar{h}$ definido em uma vizinhança da origem em M que conjuga os campos F_Z e $F_{\tilde{Z}}$. Para pontos que não pertencem a M o homeomorfismo pode ser definido como em (2.2) pois o campo é transversal a M para todo $p \in U \cap M$. ■

Para sistemas de Filippov em $\mathbb{R}^3$ que possuem curvas de singularidades, surgem genericamente os casos: $\Omega_0(b)$ dobra-regular, $\Omega_0(c)$ cúspide-regular e $\Omega_0(d)$ dobra-dobra. Estudemos agora a estabilidade estrutural do conjunto de campos $Z = (X, Y) \in \Omega_0(b)$

do tipo dobra-regular, que de acordo com nossa pré-classificação chamamos de $\Omega_0(b)$, isto é, $X.f(0) = 0, X^2.f(0) \neq 0$ e $Y.f(0) \neq 0$. A forma como definiremos o homeomorfismo depende do sinal de $X^2.f(0)$, ou seja, se temos dobra do tipo visível ou invisível. A próxima proposição fornece a equivalência topológica para esse caso.

Proposição 2.1.2 *O sistema de Filippov $Z \in \Omega_0(b)$ definido em uma vizinhança U da origem é topologicamente equivalente em uma vizinhança V da origem a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, onde $\tilde{X}(x, y, z) = (k_1, 0, x)$ e $\tilde{Y}(x, y, z) = (1, 0, \gamma)$, onde $k_1 = \text{sgn}(X^2.f(0))$ e $\gamma = \text{sgn}(Y.f(0))$.*

Demonstração A construção do homeomorfismo depende se temos dobra visível ou invisível, isto é, se $X^2.f(0) > 0$ ou $X^2.f(0) < 0$, respectivamente. Suponhamos inicialmente que $X^2.f(0) < 0$ e $Y.f(0) > 0$. O caso onde $Y.f(0) < 0$ pode ser estudado da mesma forma. A variedade de descontinuidade é dada implicitamente pela função $f(x, y, z) = z$. Daí pela equação (1.1) temos a expressão explícita para o campo deslizante: $F_Z = (X^1Y^3 - Y^1X^3, X^2Y^3 - Y^2X^3)$, onde $X = (X^1, X^2, X^3)$ e $Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$, logo $F_Z(0) = (X^1(0)Y^3(0), X^2(0)Y^3(0))$. Sabemos que $Y.f(0) = Y^3(0) \neq 0$, logo a origem será ponto crítico para F_Z se $X^1(0) = X^2(0) = 0$ o que contradiz o fato da origem ser ponto de dobra para X . Portanto, F_Z é regular na origem. Da mesma forma, concluímos que $F_{\tilde{Z}}$ também será regular na origem.

Consideremos $\bar{h}$ homeomorfismo qualquer entre os conjuntos de tangência S_X e $S_{\tilde{X}}$. Dado $p \in SwR$ existe $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_X(t(p), p) \in SlR$. Logo, para estendermos o homeomorfismo para M basta estendermos para SlR , mas como F_Z é regular na origem dado $p \in SlR$ existe $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{F_Z}(t(p), p) \in S_X$ e assim estendemos o homeomorfismo para toda a variedade M . Para obtermos a M -invariância precisamos fazer uma reparametrização do tempo via comprimento de arco. Neste caso a SlR atua como um atrator, assim para pontos que não estão em M a ordem para estendermos o homeomorfismo é análoga a proposição 2.1.1.

No caso onde temos tangência visível ($X^2.f(0) > 0$), observe que pontos na região $X.f(p) > 0$ não intercepta M , veja figura 2.1. Assim, para os pontos nessa região o homeomorfismo terá que ser definido de uma outra forma. Em cada região definiremos seções que são topologicamente transversais aos correspondentes fluxos. Por exemplo, tomemos Π_1, Π_2 como na figura 2.1. Para o campo $\tilde{Z}$ consideremos seções equivalentes $\tilde{\Pi}_1$ e $\tilde{\Pi}_2$.

Observe que Π_1 e Π_2 interceptam-se somente na curva de tangência S_X . Nas seções Π_1 e Π_2 podemos definir o homeomorfismo $\bar{h}$ que leva a dobra nela mesma, isto é, $\bar{h}$ leva Π_1 em $\tilde{\Pi}_1$ e Π_2 em $\tilde{\Pi}_2$. Finalmente o homeomorfismo pode ser estendido para toda

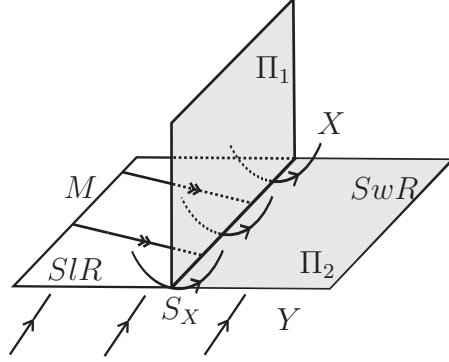


Figura 2.1: Retrato de fase em uma vizinhança de uma dobra visível.

vizinhança via fluxo. Para garantirmos a M -invariância faremos uma reparametrização por comprimento de arco no tempo. Podemos checar que o homeomorfismo definido desta forma é de fato contínuo, pois é um homeomorfismo em cada região e coincide na intersecção das regiões onde está definido.

■

Passemos agora ao caso cúspide-regular. Na proposição seguinte caracterizamos a estabilidade estrutural para esse caso.

Proposição 2.1.3 *O campo de Filippov do tipo cúspide-regular $Z \in \Omega_0(c)$ definido em uma vizinhança U da origem é topologicamente equivalente em uma vizinhança V da origem a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, com $\tilde{X}(x, y, z) = (\varepsilon_1, 0, \varepsilon_2(y + x^2))$ e $\tilde{Y}(x, y, z) = (1, 0, \gamma)$, onde $\varepsilon_1 = \text{sgn}(X^1(0))$, $\varepsilon_2 = \text{sgn}(X^3.f(0))$ e $\gamma = \text{sgn}(Y.f(0))$.*

Demonstração Da definição de cúspide em $\mathbb{R}^3$, sabemos $X.f(0) = X^2.f(0) = 0$, $X^3.f(0) \neq 0$ e os vetores no conjunto $\{Df(0), D(X.f)(0), D(X^2.f)(0)\}$ são linearmente independentes. Como Y é regular na origem, temos $Y.f(0) \neq 0$. Como no caso anterior, a expressão explícita para o campo deslizante é $F_Z = (X^1Y^3 - Y^1X^3, X^2Y^3 - Y^2X^3)$, logo se 0 é ponto crítico para o campo deslizante então $X^1(0) = X^2(0) = 0$, pois $X^3(0) = X.f(0) = 0$ e $Y.f(0) = Y^3(0) \neq 0$ (estamos admitindo que a função que define implicitamente a variedade de descontinuidade M é $f(x, y, z) = z$). Daí $X^3.f(0) = (X^1(0), X^2(0), X^3(0)).\nabla(X^2.f)(0) = 0$, contrariando o fato de que a origem é ponto de cúspide para o campo X . Assim, o campo deslizante F_Z é regular na origem.

A construção do homeomorfismo depende do sinal de $Y.f(0)$ e de $X^3.f(0)$, desta forma temos quatro casos a considerar. No caso $X^3.f(0) < 0, Y.f(0) > 0$, a dinâmica do campo Z é dada na figura 2.2 a qual depende ainda do sinal de $X^1(0)$.

Observe que a variedade M atua nesse caso, como um conjunto atrator. Definiremos o homeomorfismo em M , estendemos via fluxos para toda a vizinhança da origem e

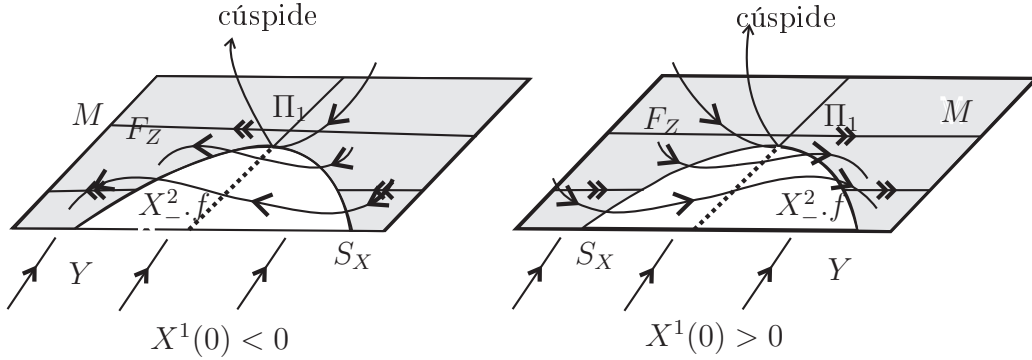


Figura 2.2: Retrato de fase em uma vizinhança de uma singularidade genérica do tipo cúspide-regular.

posteriormente reparametrizamos o tempo por comprimento de arco para garantirmos a M -invariância. Neste caso, assim como no anterior para definirmos o homeomorfismo que fornece a equivalência topológica, definiremos uma seção que é topologicamente transversal ao correspondente fluxo. Tomamos Π_1 seção transversal a curva de tangência no ponto de cúspide e $X_-^2.f$ a parte da curva de tangência S_X correspondente a tangência invisível. Note que essas curvas interceptam-se somente na origem. Definimos o homeomorfismo $\bar{h}$ que leva cada um desses objetos no seu respectivo para $\tilde{Z} : \tilde{\Pi}_1$ e $\tilde{X}_-^2.f$ e, posteriormente estendemos via fluxos de ϕ_{F_Z} , ϕ_X e ϕ_Y o homeomorfismo para toda M . De fato, no caso onde $X^1(0) < 0$, por exemplo, dado ponto $p \in SlR$ a esquerda de Π_1 , existe $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{F_Z}(t(p), p) \in \Pi_1 \cup X_-^2.f$. Além disso, note que dado $p \in X_+^2.f(x, y, 0)$, onde $X_+^2.f$ representa parte da curva de tangência correspondente as dobras visíveis, existe $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_Z(t(p), p) \in X_-^2.f$. A continuidade segue do fato que o homeomorfismo coincide na intersecção das curvas onde é definido. A maneira como estendemos o homeomorfismo é análoga para o caso onde $X^1(0) > 0$.

Os demais casos provenientes das possibilidades do sinal de $X^3.f(0)$ e $Y.f(0) : X^3.f(0) < 0, Y.f(0) < 0, X^3.f(0) > 0, Y.f(0) > 0$ e $X^3.f(0) > 0, Y.f(0) < 0$ podem ser estudados da mesma forma, isto é, para cada caso consideraremos seções transversais a curva de tangência no ponto de cúspide que nos auxiliarão na definição do homeomorfismo. ■

Consideremos agora o caso onde o campo descontínuo $Z = (X, Y)$ apresenta uma singularidade do tipo dobra na origem para ambos os campos X e Y . A estabilidade estrutural desse caso tem sido objeto de grande interesse na pesquisa atual (veja os trabalhos [J, C, J-C]), bem como tema de congressos e seminários (veja <http://www.enm.bris.ac.uk/anm/meetings/nonsmooth08/>). Teixeira provou em 1990 no trabalho [T1] que uma subfamília

de campos descontínuos do tipo dobra-dobra não é estruturalmente estável.¹ Contudo nosso objetivo aqui é explicitar alguma subfamília de $\Omega_0(d)$ que seja estruturalmente estável e nos casos onde não podemos decidir a respeito, discutir alguns exemplos de dinâmicas de campos dobra-dobra que poderiam deixar de ser estruturalmente estáveis.

Como a origem é singularidade do tipo dobra para os campos X e Y , consideraremos as condições: $X.f(0) = Y.f(0) = 0$, $X^2.f(0) \neq 0$, $Y^2.f(0) \neq 0$, autovalores de $DF(0)$ são transversais a S_X, S_Y , 0 é ponto crítico hiperbólico para F_Z e $S_X \pitchfork_0 S_Y$. Desta forma, dividiremos nosso estudo nos casos abaixo de acordo com as possibilidades de sinal de $X^2.f(0)$ e $Y^2.f(0)$:

- (i) Caso parabólico: $X^2.f(0) > 0$ e $Y^2.f(0) > 0$ (positivo) ou $X^2.f(0) < 0$ e $Y^2.f(0) < 0$ (negativo);
- (ii) Caso hiperbólico: $X^2.f(0) > 0$ e $Y^2.f(0) < 0$;
- (iii) Caso elíptico: $X^2.f(0) < 0$ e $Y^2.f(0) > 0$.

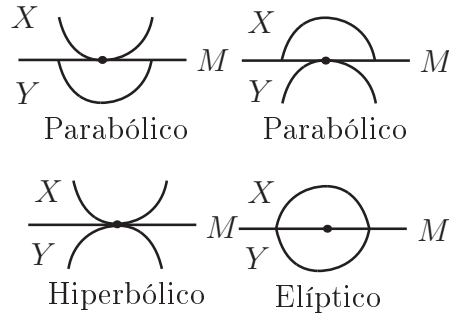


Figura 2.3: Possíveis configurações da singularidade do tipo dobra-dobra.

No caso parabólico uma das dificuldades em caracterizar a estabilidade estrutural acontece quando pontos da $EscR$ iterados pelo fluxo do campo X ou Y interceptam a SlR . Em outras palavras, dado $p \in EscR$ se existir $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que o fluxo $\phi_X(t(p), p) \in SlR$ (ou $\phi_Y(t(p), p) \in SlR$) teremos dificuldades em decidir sobre a estabilidade estrutural. Pois se tal fato ocorrer poderá dar origem a fenômenos patológicos que não sejam robustos por pequenas perturbações. Por exemplo, dada parte de uma trajetória do campo deslizante na $EscR$: $\gamma(t) \subset EscR, t \in [t_1, t_2]$, quando iteramos $\gamma(t)$ pelo fluxo do campo X obtemos o segmento de trajetória $\tilde{\gamma}(t) = \phi_X(t(\gamma(t)), \gamma(t)) \subset SlR$ o qual poderia ter uma intersecção não genérica na SlR , por exemplo, tangencias não genéricas com as órbitas de F_Z ,

¹Nesse trabalho estuda-se campos descontínuos do tipo dobra-dobra elíptico onde a origem é ponto crítico do tipo elíptico para a aplicação de primeiro retorno φ_Z associada a Z .

ou com os conjuntos de tangência S_X, S_Y que são as fronteiras da SLR . A seguir apresentamos um modelo onde a origem é uma singularidade dobra-dobra parabólica negativa. Neste modelo temos uma região $R \subset EscR$ que quando iterada pelo fluxo do campo X intercepta a SLR .

Exemplo 2.1.1 *Considere o sistema de Filippov*

$$Z(x, y, z) = \begin{cases} X_{k_1, a}(x, y, z) = (k_1, a, x), & \text{se } z > 0 \\ Y_{k_2}(x, y, z) = (0, k_2, y), & \text{se } z < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $k_1 = X^2.f(0) < 0, k_2 = Y^2.f(0) < 0$ e $a = X.Y.f(0) > 0$.

De fato, dado $p = (x_0, y_0, 0) \in EscR$ tomamos $t(p) = -\frac{2x_0}{k_1}$ e obtemos $\phi_X(t(p), p) = (-x_0, y_0 - \frac{2a}{k_1}x_0, 0)$. Definimos a região $R = \{(x, y, 0) \in EscR; y > \frac{2a}{k_1}x\}$ onde $\phi_X(t(p), p) \in SLR$ para $p \in R$.

Desta forma a resposta sobre a estabilidade estrutural nesse caso ainda permanece em aberto devido a dificuldades como esta.

A singularidade genérica para o caso dobra-dobra elíptico, também conhecida como T-singularidade pois foi no trabalho de Teixeira [T1], como comentamos anteriormente, que foi apresentado pela primeira vez um estudo sobre esse tipo de singularidade para campos de Filippov exibindo um subconjunto aberto de campos que não é estruturalmente estável. Este subconjunto trata-se do conjunto de campos descontínuos Z tais que os autovalores da aplicação de primeiro retorno associada $\varphi_Z = \phi_X \circ \phi_X$ a Z são do tipo elíptico. No caso onde esses autovalores são do tipo sela ainda permanece em aberto a estabilidade estrutural devido a dificuldades semelhantes as comentadas no caso parabólico.

Observe que para o caso dobra-dobra hiperbólico não temos retorno, isto é, se $p \in M$ deixa a variedade de descontinuidade não retorna mais. Assim, os fenômenos comentados anteriormente que tornam a análise da estabilidade estrutural árdua, não acontece para o caso hiperbólico possibilitando o seu estudo.

Como nos casos dobra-regular e cúspide-regular, definiremos o homeomorfismo para M e o estendemos via fluxo do campo para toda a vizinhança U da singularidade. Para que possamos estender o fluxo para toda U precisamos definir seções em cada região que são topologicamente transversais aos correspondentes fluxos em cada região. Consideremos as seções: $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ onde Π_1, Π_2 são seções transversais a dobra de X, Y respectivamente e Π_3, Π_4 são seções transversais aos fluxos na região onde estão definidas (veja figura 2.4).

Observe que as seções Π_i, SLR e $EscR$ interceptam-se somente na dobra-dobra $(0, 0, 0)$, para $i = 1, \dots, 4$. Considerando o campo de Filippov $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ suficientemente pró-

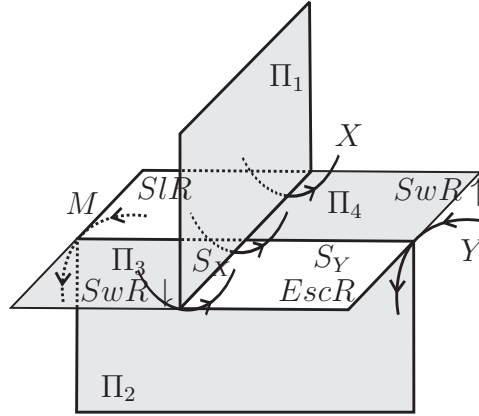


Figura 2.4: Retrato de fase em uma vizinhança de uma dobra-dobra hiperbólica.

ximo de $Z = (X, Y)$ podemos definir seções $\tilde{\Pi}_i$ analogamente a forma como o fizemos anteriormente, para $i = 1, \dots, 4$. Assim, obtemos o homeomorfismo que leva dobra-dobra hiperbólica em dobra-dobra hiperbólica. Posteriormente estendemos o homeomorfismo para toda U via fluxos do campo Z . Podemos verificar que o homeomorfismo definido desta forma é de fato contínuo pois coincide nas fronteiras.

Assim, obtemos a proposição 2.1.4 que caracteriza a subfamília de $\Omega_0(d)$ que é estruturalmente estável.

Proposição 2.1.4 *O campo de Filippov $Z \in \Omega_0(d)$ do tipo dobra-dobra hiperbólica (isto é, com $X^2.f(0) > 0, Y^2.f(0) < 0$) definido em uma vizinhança U da origem é topologicamente equivalente em uma vizinhança da origem a*

$$\tilde{Z}(x, y, z) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y, z) = (k_1, -2, x), & \text{se } z > 0 \\ \tilde{Y}(x, y, z) = (-1, k_2, y), & \text{se } z < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $k_1 = X^2.f(0) > 0$ e $k_2 = Y^2.f(0) < 0$.

Finalmente obtemos o teorema que estabelece a estabilidade estrutural para campos de Filippov para variedades de dimensão três:

Teorema A Considere o campo de vetores descontínuo $Z = (X, Y) \in \Omega$ definido em uma vizinhança U da origem. Se Z é do tipo regular-regular, dobra-regular, cúspide-regular ou dobra-dobra hiperbólica então Z é localmente estruturalmente estável.

Demonstração Se Z_0 é do tipo regular-regular é suficiente observar que as condições que definem cada um dos possíveis tipos: $X_0(0) \nparallel Y_0(0)$ e $(0, 0, 0) \in SLR \cup EscR$ é ponto

crítico hiperbólico para o campo deslizante são condições abertas e robustas. Para o caso onde o campo descontínuo apresenta uma curva singularidades basta observar que as singularidades tratadas aqui são genéricas. De fato, consideremos por exemplo o caso dobra-dobra hiperbólico. Usando o Teorema da Função Implícita e as condições genéricas $X_0^2.f(0) > 0, Y_0^2.f(0) < 0$ e o fato de não existir retorno para esse caso concluímos que para qualquer $Z_1 \in U \subset \Omega$ onde U é uma vizinhança de Z_0 também possuirá um ponto de dobra-dobra hiperbólica próximo da origem. Como Z_0 e Z_1 são topologicamente equivalentes a (2.4) com os mesmos sinais de $X^2.f(0)$ e $Y^2.f(0)$ segue que eles são também conjugados entre si e portanto são localmente estruturalmente estáveis.

Com raciocínio análogo para os demais casos concluímos a estabilidade estrutural local dos campos de Filippov $Z \in \Omega$.

■

No capítulo seguinte o conceito de estabilidade assintótica e estabilidade no sentido de Lyapunov será abordado. Definiremos este conceito para campos de Filippov e através da pré-classificação dos campos de codimensão zero e um faremos um estudo da dinâmica em uma vizinhança de uma singularidade típica no $\mathbb{R}^3$. A idéia é fornecer informações sobre a dinâmica nessa vizinhança.

CAPÍTULO 3

A-ESTABILIDADE

O nosso objetivo aqui é caracterizar a “estabilidade assintótica” (A-estabilidade) em $\Omega(3)$, para isso vamos tornar mais preciso este conceito para campos descontínuos. Focalizaremos nossa atenção em elementos de Ω_0 e Ω_1 , respectivamente, nas duas próximas seções. Dado $Z \in \Omega_i$, $i = 0, 1$ estamos interessados em: 1– estudar a existência da aplicação de primeiro retorno φ_Z definida em uma região de M , 2– explicitar a região de primeiro retorno, 3– caracterizar a A-estabilidade do campo de Filippov na origem e 4– verificar a coexistência dessas condições.

Note que nos itens 1– e 2– anteriores só faz sentido falar em aplicação de primeiro retorno para o caso onde é possível termos retorno, por exemplo, em Ω_0 temos retorno somente em $\Omega_0(d)$, dobra-dobra caso elíptico ou T-singularidade, em Ω_1 nos casos $\Omega_1(b)$, $\Omega_1(c)$, $\Omega_1(e)$, isto é, dobra-dobra 1-degenerada, dobra-cúspide, dobra-dobra-sela-nó, respectivamente.

Observação 3.0.1 *Chamamos a atenção para o fato de que, em geral, não utilizaremos as formas normais encontradas em [T3]. De fato, encontraremos formas normais que se aplicam melhor no nosso contexto. As formas normais que daremos aqui são **formas normais topológicas**, isto é, elas serão obtidas através de C^0 equivalências orbitais (homeomorfismos).*

Utilizaremos a notação: $Z = (X, Y) \in \Omega$ e $M = f^{-1}(0)$ é a variedade de descontinuidade, onde $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$. Adotaremos a convenção para a órbita futura $\phi_Z(t, x_0)$ de $Z = (X, Y)$ passando por x_0 :

- 1- Se $x_0 \notin SlR$ e para todo $t \geq 0, \phi_Z(t, x_0) \notin SlR$ então $\phi_Z(t, x_0)$ intercepta somente a SwR para todo $t \geq 0$. Daí $\phi_Z(t, x_0) = \phi_X(t, x_0)$ ou $\phi_Z(t, x_0) = \phi_Y(t, x_0)$;
- 2- Se $x_0 \in SlR$ então $\phi_Z(t, x_0)$ é definido como a órbita $\phi_{F_Z}(t, x_0)$ do campo deslizando normalizado (veja Observação 1.2.3);
- 3- Se $x_0 \notin SlR$ mas existe $t > 0$ tal que $\phi_Z(t, x_0) \in SlR$ então acontece 2.

3.1 Exemplos e Definições

Antes de iniciarmos o estudo de fato, vamos considerar as seguintes definições.

Definição 3.1.1 Dizemos que uma órbita $\phi_Z(t, x_0)$ do campo descontínuo $Z = (X, Y)$ é **singular periódica** se é fechada e composta de segmentos de órbitas de X, Y e $F(X, Y)$ mantendo a orientação.

Definição 3.1.2 1- Definimos **órbita periódica regular** como uma trajetória de Z fechada, composta de segmentos de órbitas de X e Y , mantendo a orientação.

2- Definimos **órbita pseudo periódica regular** como uma trajetória de Z fechada, composta de segmentos de órbitas de X e Y , com a orientação não preservada.

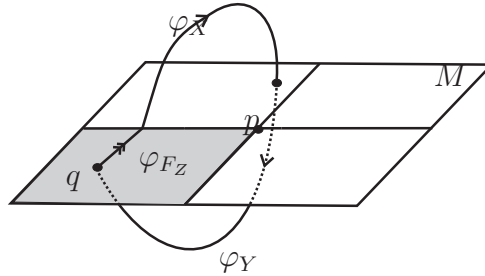


Figura 3.1: Órbita singular periódica.

Definição 3.1.3 Considere o fluxo $\phi_Z(t, \cdot)$ associado ao sistema descontínuo $Z = (X, Y)$, isto é, $\phi_Z(t, \cdot)$ é composto por parte do fluxo associado ao campo X , parte ao campo Y e quando tivermos região de deslize por parte do fluxo associado ao campo deslizando. Seja $x_0 \in M$ uma singularidade para Z .

- 1- O campo Z é dito **L-estável** em x_0 se para toda vizinhança $N_\varepsilon(x_0)$ existe uma vizinhança $N_\delta(x_0)$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$ e $t \geq 0$ então $\phi_Z(t, x) \in N_\varepsilon(x_0)$. Veja figura 3.2.

2- O campo Z é dito **A-estável** em x_0 (ou um **atrator local**) se é L-estável em x_0 e além disso, uma das duas condições é satisfeita:

- (i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_Z(t, x) = x_0$, para todo $x \in N_\delta(x_0)$;
- (ii) Existe $t_0 > 0$ tal que $\phi_Z(t_0, x) = x_0$.

A condição (ii) na definição de A-estabilidade nos diz que o fluxo de Z pode atingir o ponto singular em tempo finito. O que não acontece no caso suave clássico. Na figura 3.3 temos um exemplo onde isso acontece.

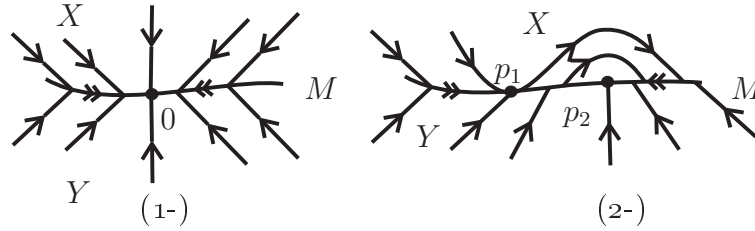


Figura 3.2: Exemplos de sistemas descontínuos A-estável, L-não estável e L-estável.

Na figura 3.2 (1-), (2-) temos um campo descontínuo que é A-estável na origem e um exemplo de campo Z que é L-não estável em p_1 e L-estável em p_2 , respectivamente. A região contida em M cuja dinâmica é destacada com uma seta dupla representa a $SlR \cup EscR$.

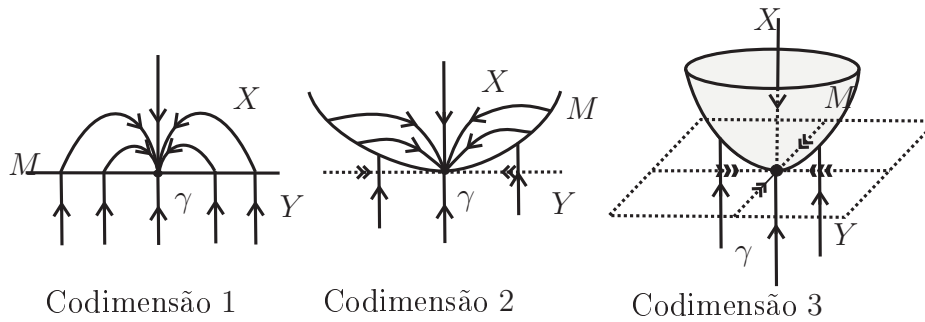


Figura 3.3: Exemplos de sistemas descontínuos A-estáveis na origem.

Na figura 3.3 a órbita γ atinge o ponto singular do sistema descontínuo em tempo finito. Observe que os retratos de fase representam campos de codimensão 1, 2 e 3, respectivamente, pois na figura à esquerda temos ponto crítico no bordo, a figura ao centro representa um campo com um ponto crítico no bordo e o contato entre uma das variedades estável e a variedade de descontinuidade é de ordem dois e na figura a direita temos os

mesmos ingredientes na figura ao centro acrescentando o contato de ordem dois entre outra variedade estável e a variedade de descontinuidade. Os retratos representados nas figuras da esquerda para direita, acontecem em campos de dimensão dois, dois e três, respectivamente. Relembremos o conceito de ω -, α -limite:

Definição 3.1.4 *Um ponto y é um ponto de ω -**limite** de x para o fluxo $\phi_Z(t, \cdot)$ se existe uma sequência t_k indo para o infinito tal que*

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} d(\phi_Z(t_k, x) - y) = 0.$$

*O conjunto de todos os pontos ω -**limite** de x por $\phi_Z(t, \cdot)$ é denotado por $\omega(x)$, $\omega(x, \phi_Z(t, \cdot))$, $L_\omega(x)$ ou $L_\omega(x, \phi_Z(t, \cdot))$ e é chamado de **conjunto ω -limite**. O conjunto α -**limite** de x é definido analogamente mas t_k vai para $-\infty$. O conjunto de todos os pontos α -limite de x é denotado por $\alpha(x)$.*

Definição 3.1.5 *A **bacia de atração** de um ponto singular p é o conjunto de todos os pontos q tais que $\omega(q) = \{p\}$.*

Relembremos a definição de sela topológica para campos suave definidos em uma variedade de dimensão dois:

Definição 3.1.6 *Dizemos que um ponto crítico p de $\dot{x} = g(x)$ é uma **sela topológica** se existem duas trajetórias Γ_1 e Γ_2 que se aproximam de p quando $t \rightarrow \infty$ e outras duas Γ_3 e Γ_4 se aproximam de p quando $t \rightarrow -\infty$ e se existe $\delta > 0$ tal que todas as outras trajetórias que começam na fronteira da vizinhança de p $V_\delta(p) \setminus \{p\}$ deixam $V_\delta(p)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. As trajetórias $\Gamma_i, i = 1, \dots, 4$ são chamadas **separatrizes**.*

A seguir definiremos quando um determinado campo de Filippov $Z \in \Omega$ satisfaz as propriedades A, L e I. Faremos uso deste tipo de nomenclatura no decorrer do texto.

Definição 3.1.7 *Dizemos que o campo descontínuo $Z = (X, Y)$ satisfaz a **propriedade A, L, I** no ponto singular $p \in M$ se o campo Z é A, L-estável ou é L-não estável em p , respectivamente.*

Observação 3.1.1 *Note que a equivalência topológica preserva as propriedades A, L e I, isto é, se Z_0 é equivalente a Z_1 e Z_0 satisfaz a propriedade A, L ou I então Z_1 também satisfaz a propriedade A, L ou I.*

Demonstração da observação 3.1.1 De fato, suponhamos inicialmente que Z_0 satisfaz a propriedade L e $x_0 = 0$. Seja $h : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ homeomorfismo que fornece a equivalência topológica entre Z_0 e Z_1 , isto é, $h(\phi_{Z_1}^{\alpha(t)}(x)) = \phi_{Z_0}^t(h(x))$, para todo $x \in (\mathbb{R}^3, 0)$ onde $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação crescente proveniente da reparametrização do tempo t dada por h com $\alpha(0) = 0$. Salientemos aqui que o homeomorfismo h é M -invariante e além disso preserva os conjuntos de tangência S_X e S_Y , consequentemente as regiões canônicas $SlR, SwR, EscR$. Em particular $h(0) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ provemos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in V_\delta(0)$ e $t > 0$ temos $\phi_{Z_1}^{\alpha(t)}(x) \in V_\varepsilon(0)$.

Como h é homeomorfismo segue que $h(V_\varepsilon(0)) = V_{\tilde{\varepsilon}}(0)$ é um conjunto aberto que contém a origem. Logo existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que para todo $\tilde{x} \in V_{\tilde{\delta}}(0)$ então $\phi_{Z_0}^t(\tilde{x}) \in V_{\tilde{\varepsilon}}(0) = h(V_\varepsilon(0))$. Para cada $\tilde{x} \in V_{\tilde{\delta}}(0)$ existe um único $x \in h^{-1}(V_{\tilde{\delta}}(0))$ tal que $h(x) = \tilde{x}$. Daí,

$$h(\phi_{Z_1}^{\alpha(t)}(x)) = \phi_{Z_0}^t(h(x)) = \phi_{Z_0}^t(\tilde{x}) \in V_{\tilde{\varepsilon}}(0) = h(V_\varepsilon(0)),$$

logo $\phi_{Z_1}^{\alpha(t)}(x) \in V_\varepsilon(0)$. Provemos assim que equivalência topológica preserva a L-estabilidade.

Suponhamos agora que Z_0 satisfaz a propriedade A. Logo, Z_0 satisfaz a propriedade L e pelo que demonstramos agora concluímos que o campo descontínuo Z_1 também satisfaz a propriedade L. Pela definição de A-estabilidade, o campo Z_0 satisfaz uma das condições a seguir:

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_Z(t, x) = 0, \text{ para todo } x \in N_\delta(0);$$

$$(ii) \quad \text{Existe } t_0 > 0 \text{ tal que } \phi_Z(t_0, x) = 0.$$

Inicialmente consideramos a hipótese de que Z_0 satisfaz a condição (i). Temos

$$h\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{Z_0}^t(x)\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(\phi_{Z_0}^t(x)). \quad (3.1)$$

Observe que a expressão (3.1) é verdadeira pois h é contínua (homeomorfismo). Por hipótese Z_0 é A-estável na origem. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que Z_0 é L-estável na origem e além disso vale a condição (i). Mas para cada $\tilde{x} \in V_{\tilde{\delta}}(0)$ existe um único $x \in V_\delta(0)$ tal que $h(x) = \tilde{x}$, onde $V_{\tilde{\delta}}(0) = h(V_\delta(0))$. De (3.1) segue que

$$0 = h(0) = h\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{Z_0}^t(x)\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(\phi_{Z_0}^t(x)), \quad (3.2)$$

para todo $x \in V_\delta(0)$. Assim, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{Z_1}^{\alpha(t)}(\tilde{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{Z_1}^{\alpha(t)}(h(x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(\phi_{Z_0}^t(x)) = 0$, onde a última igualdade segue de (3.2). Daí provamos que Z_1 satisfaz a propriedade (i) assim

como Z_0 .

Suponhamos agora que Z_0 satisfaz (ii), isto é, existe $t_1 > 0$ tal que $\phi_{Z_0}^{t_1}(x) = 0$, com $x \in V_\delta(0)$. Contudo, dado $x \in V_\delta(0)$ existe um único $\tilde{x} \in h^{-1}(V_\delta(0))$ tal que $x = h(\tilde{x})$. Assim, $h(0) = 0 = \phi_{Z_0}^{t_1}(x) = \phi_{Z_0}^{t_1}(h(\tilde{x})) = h(\phi_{Z_1}^{\alpha(t_1)}(\tilde{x}))$. Mas como h é injetora (homeomorfismo), segue que $\phi_{Z_1}^{\alpha(t_1)}(\tilde{x}) = 0$, com $\tilde{x} \in h^{-1}(V_\delta(0))$ e $\alpha(t_1) > 0$.

Desta forma, provamos que a A-estabilidade é preservada via equivalências topológicas.

3.2 A-Estabilidade de Sistemas Descontínuos em Ω_0

Vamos considerar os campos de vetores descontínuos definidos em 1.2.6. O resultado principal dessa seção é o seguinte:

Teorema B Seja $Z \in \Omega_0$ temos

- 1- $Z \in \Omega_0(a)$. Se $X(0) \nparallel Y(0)$ então Z não é L-estável na origem. Se $X(0) \parallel Y(0)$ e F_Z é assintoticamente estável em $(0,0,0)$ (na SLR) então Z satisfaz a propriedade A;
- 2- $Z \in \Omega_0(b)$ satisfaz a propriedade I;
- 3- $Z \in \Omega_0(c)$ satisfaz a propriedade I;
- 4- $Z \in \Omega_0(d)$ satisfaz a propriedade A para $Z \in \Omega_0^A(d) \subset \Omega(d)$.

Observe que para os casos 2. e 3. o campo de Filippov Z não é L-estável na origem e nos casos 1. e 4. podemos encontrar subconjuntos abertos de $\Omega_0(a)$ e $\Omega_0(d)$ tais que se Z pertence a estes subconjuntos então é A-estável na origem. Faremos a demonstração do Teorema B caso a caso. Iniciemos com

3.2.1 Caso Regular-regular $Z \in \Omega_0(a)$

A próxima proposição caracteriza a dinâmica em uma vizinhança da origem no $\mathbb{R}^3$. Utilizaremos a forma normal dada na proposição 2.1.1.

Lema 3.2.1 *Seja $Z \in \Omega_0(a)$. Se $X(0) \nparallel Y(0)$ então Z não é L-estável na origem. Se $Z \in \Omega_0^A(a)$ então Z é A-estável na origem, onde $\Omega_0^A(a) \subset \Omega_0(a)$ é o subconjunto de campos de $Z = (X, Y) \in \Omega_0(a)$ tais que $X(0) \parallel Y(0)$ e F_Z é assintoticamente estável em $(0,0,0)$.*

Demonstração Suponhamos que $X(0) \nparallel Y(0)$. Pela proposição 2.1.1 temos $M = SwR$ ou $M = SlR$ ou $M = EscR$. No primeiro caso a origem é ponto regular para Z , basta aplicarmos diretamente o Teorema do Fluxo Tubular concluindo assim que Z não é L-estável na origem. Para $M = SlR, EscR$ como $(0, 0, 0)$ é ponto regular para F_Z , analogamente ao caso anterior aplicamos o Teorema do Fluxo Tubular e concluimos que Z não é L-estável na origem.

Se $X(0) \parallel Y(0)$ e $M = SlR$ então por hipótese $(0, 0, 0)$ é ponto crítico hiperbólico para F_Z e além disso F_Z é assintoticamente estável na origem. Seja U vizinhança da origem em $\mathbb{R}^3$. Dado $p \in M^+ \cap U$ ($p \in M^- \cap U$) como $M = SlR$ existe $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_X(t(p), p) \in SlR$ ($\phi_Y(t(p), p) \in SlR$). Logo, nesse caso Z é A-estável na origem. ■

3.2.2 Caso Dobra-regular $Z \in \Omega_0(b)$

Para este caso a proposição a seguir nos diz que em uma vizinhança da origem o campo de Filippov $Z \in \Omega_0(b)$ não é L-estável.

Proposição 3.2.1 *Considere o sistema descontínuo $Z = (X, Y) \in \Omega_0(b)$ então Z satisfaz a propriedade I.*

Demonstração Pela proposição 2.1.2 a forma normal em uma vizinhança U da origem para este caso é dada por $Z = (X, Y)$ onde $X(x, y, z) = (k_1, 0, x)$ e $Y(x, y, z) = (1, 0, \gamma)$. Se $Y.f(0) = \gamma < 0$ e $X^2.f(0) = k_1 > 0$ segue diretamente do Teorema do Fluxo Tubular que Z não é L-estável na origem. Suponhamos que $X^2.f(0) < 0$ e $Y.f(0) > 0$. As regiões na variedade de descontinuidade M são $SlR = \{(x, y, 0); x < 0\}$ e $SwR = \{(x, y, 0); x > 0\}$. Da equação (1.1) e substituindo a forma normal dos campos para este caso, obtemos a expressão do campo deslizante $F_Z(x, y) = (\gamma k_1 - x, 0)$. A dinâmica do campo Z é dada na figura 3.4.

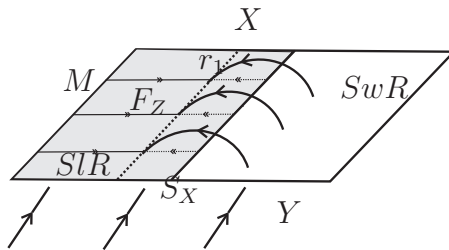


Figura 3.4: Dinâmica do campo $Z \in \Omega_0(b)$.

Como F_Z é regular na origem, do Teorema do Fluxo Tubular aplicado ao campo deslizando F_Z segue que Z não é L-estável na origem para este caso. ■

3.2.3 Caso Cúspide-regular $Z \in \Omega_0(c)$

A seguinte proposição fornece informações sobre a dinâmica do campo $Z \in \Omega_0(c)$ em uma vizinhança U da origem. Dentre essas informações destacamos o comportamento transiente de Z em U .

Proposição 3.2.2 *Se $Z \in \Omega_0(c)$ então satisfaz a propriedade I.*

Demonstração Observando as condições para que a origem seja um ponto de cúspide, regular para os campos de vetores X, Y , respectivamente, pela proposição 2.1.3 temos a forma normal para o campo de Filippov $Z = (X, Y)$: $X(x, y, z) = (\varepsilon_1, 0, \varepsilon_2(y+x^2))$ e $Y(x, y, z) = (1, 0, \gamma)$ onde $\varepsilon_1 = \text{sgn}(X^1(0))$, $\varepsilon_2 = \text{sgn}(X^3.f(0))$ e $\gamma = \text{sgn}(Y.f(0))$. Observe que $X.f(x, y, 0) = \varepsilon_2(y+x^2)$, $X^2.f(x, -x^2) = 2\varepsilon_1\varepsilon_2ax$ e $X^3.f(0) = 2\varepsilon_2 \neq 0$. Além disso, os vetores: $Df(0) = (0, 0, 1)$, $D(X.f)(0) = (0, \varepsilon_2, 0)$ e $D(X^2.f)(0) = (2\varepsilon_1\varepsilon_2, 0, 0)$ são linearmente independentes no $\mathbb{R}^3$, onde D representa o operador diferenciação.

Da equação (1.1) e das formas normais acima obtemos a expressão para o campo deslizando: $F_Z(x, y) = (\varepsilon_1\gamma - \varepsilon_2(y+x^2), 0)$. Assim, o campo F_Z é regular na origem e pelo Teorema do Fluxo Tubular a dinâmica de F_Z é topologicamente equivalente em uma vizinhança da origem a dinâmica do campo constante $\tilde{F}_Z(x, y) = (\varepsilon_1\gamma, 0)$. Assim se $SlR = \{(x, y, 0); y+x^2 > 0\}$ os pontos na região $\{(x, y, 0); y > 0\} \subset SlR$ saem de qualquer vizinhança da origem, satisfazendo as condições da propriedade I. Veja figura 3.5. Desta forma a única maneira de termos L-estabilidade é quando o campo deslizando vai no sentido dobra visível para dobra invisível e a região de deslize $SlR = \{(x, y, 0); y+x^2 < 0\}$ com $\gamma = Y.f(0) > 0$. Mas $SlR = \{(x, y, 0); X.f(x, y) < 0, Y.f(x, y) > 0\} = \{(x, y, 0); \varepsilon_2(y+x^2) < 0, Y.f(x, y, 0) > 0\}$. Logo, $\varepsilon_2 = \text{sgn}(X^3.f(0)) = 1$. Pelo que vimos acima na fronteira da $SlR \cup EscR$ temos curva de dobras: $X^2.f(x, -x^2, 0) = 2\varepsilon_1x$, a qual depende dos sinais de $x, X^1(0)$ e determina se temos dobra visível ou invisível. Assim para $\varepsilon_1 = -1$ o campo deslizando é tubular da direita para esquerda interceptando a curva de dobras visíveis. Logo o fluxo do campo descontínuo Z seguirá pelo fluxo do campo X , provando que o campo de Filippov para este caso não é L-estável na origem. Para $\varepsilon_1 = 1$ o campo deslizando é tubular da esquerda para direita e também intercepta a curva de dobras visíveis seguindo para o fluxo do campo X . Analogamente ao caso anterior temos a não

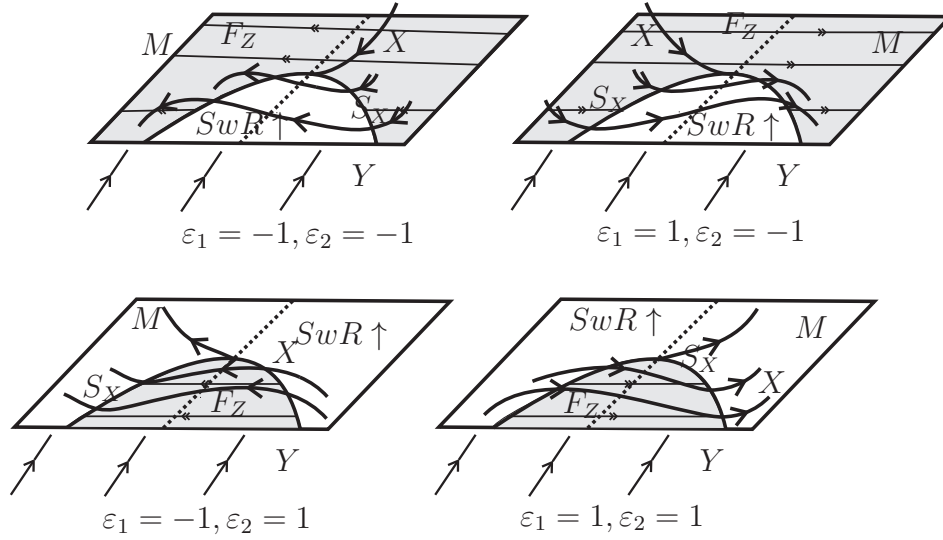


Figura 3.5: Possíveis retratos de fase de $Z \in \Omega_0(c)$ em uma vizinhança da origem.

L-estabilidade. As possíveis dinâmicas de acordo com o sinal de $X^1(0)$ e $X^3.f(0)$ são dadas na figura 3.5.

No caso onde $Y.f(0) < 0$ segue diretamente do Teorema do Fluxo Tubular aplicado a $U \cap M^-$ que $Z \in \Omega_0(c)$ satisfaz a propriedade I, onde U é uma vizinhança arbitrária da origem. Logo o campo de Filippov $Z \in \Omega_0(c)$ não é L-estável na origem, isto é, satisfaz a propriedade I.

■

3.2.4 Caso Dobra-dobra $Z \in \Omega_0(d)$

A seguir apresentaremos a proposição 3.2.3 e os lemas 3.2.2, 3.2.3 que nos fornecem uma descrição da dinâmica da T-singularidade. No capítulo 2 Estabilidade Estrutural para Sistemas Descontínuos, provamos a estabilidade estrutural para sistemas do tipo dobra-dobra hiperbólica. Em [T1] Teixeira provou que existe conjunto aberto $W \subset \Omega_0(d)$ (de fato, W é um subconjunto de campos do tipo dobra-dobra elíptico) tal que se $Z \in W$ então Z não é estruturalmente estável. Note que para termos a A, L-estabilidade um dos pré-requisitos é que M seja um atrator para Z . Assim, de antemão já excluímos os casos dobra-dobra hiperbólica e parabólica. Nos concentremos no caso elíptico (T-singularidade). Com intuito de contribuirmos no estudo dessa singularidade e estender os resultados de [T6] exibimos um subconjunto aberto de campos da T-singularidade que é A-estável em uma vizinhança da origem.

Proposição 3.2.3 *Se $Z \in \Omega_0^A(d) \subset \Omega_0(d)$ então Z satisfaz a propriedade A, onde $\Omega_0^A(d)$*

está definido em (3.3). Além disso, podemos definir aplicação de primeiro retorno φ_Z com região de retorno um subconjunto aberto $R \subset M$ e seus autovalores são do tipo sela.

Para demonstrarmos essa proposição faremos uso dos dois lemas seguintes.

Lema 3.2.2 *Considere $Z \in \Omega_0(d)$. Se $X^2.f(0) < 0, Y^2.f(0) > 0, X.(Y.f(0)) < 0, Y.(X.f(0)) < 0$ então é possível definir aplicação de primeiro retorno φ_Z associada a Z . Além disso, os autovalores de φ_Z são do tipo sela com variedade estável contida na SlR e a variedade instável na SwR .*

Demonstração Como antes, supomos que $M = f^{-1}(0)$ onde $f(x, y, z) = z$, a origem pertence a fronteira da região de deslize, é um ponto M -singular do tipo dobra de X e Y e os conjuntos de tangência S_X e S_Y são transversais. Consideremos sistema de coordenadas local, tal que as formas normais de X e Y são: $X(x, y, z) = (k_1, a, x)$ e $Y(x, y, z) = (b, k_2, y)$. Estamos interessados em definir aplicação de primeiro retorno assim, $X^2.f(0) = k_1 < 0$ e $Y^2.f(0) = k_2 > 0$. Note que os coeficientes dos campos $a = X.(Y.f)(0)$ e $b = Y.(X.f)(0)$ a princípio podem admitir qualquer valor real, a seguir vamos impor condições sobre eles para que os fenômenos que procuramos se realizem.

As regiões na variedade de descontinuidade são: $SlR = \{(x, y, 0); x < 0, y > 0\}$, $SwR = \{(x, y, 0); x > 0, y < 0\}$, $EscR = \{(x, y, 0); x > 0, y < 0\}$. Os fluxos associados aos campos X e Y são dados por: $\phi_X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_1 t, y_0 + at, z_0 + x_0 t + \frac{1}{2} k_1 t^2)$ e $\phi_Y^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + bt, y_0 + k_2 t, z_0 + y_0 t + \frac{1}{2} k_2 t^2)$. Escolhendo $t_1(x_0, y_0) = -\frac{2x_0}{k_1}$ e $t_2(x_0, y_0) = -\frac{2y_0}{k_2} + \frac{4ax_0}{k_1 k_2}$ as terceiras componentes dos fluxos associados a X e a Y se anulam. Tomando $x_0 > 0, y_0 < \frac{2a}{k_1} x_0$ segue que $t_1(x_0, y_0) > 0$ e $t_2(x_0, y_0) > 0$. Definimos a região de retorno $R = \{(x, y, 0) \in M; x > 0, y < \frac{2a}{k_1} x\}$. Obtemos a expressão para a aplicação de primeiro retorno: $\varphi_Z(x, y) = \phi_Y^{t_2} \circ \phi_X^{t_1}(x, y) = \left(\left(\frac{4ab}{k_1 k_2} - 1 \right) x - \frac{2b}{k_2} y, \frac{2a}{k_1} x - y \right)$. Observe que apesar da região de retorno definida anteriormente não ser uma vizinhança da origem, consideraremos uma extensão de φ_Z para um aberto que contenha a origem para que possamos fazer a análise local. Temos

$$D\varphi_Z(x, y) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4ba}{k_1 k_2} & -\frac{2b}{k_2} \\ \frac{2a}{k_1} & -1 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são dados por $\lambda_{\pm} = \frac{2ab - k_1 k_2 \pm 2\sqrt{ab(ab - k_1 k_2)}}{k_1 k_2}$. Queremos que os autovalores sejam reais do tipo β e $1/\beta$, isto é, $\lambda_+ = \beta$ e $\lambda_- = \beta - \frac{4\sqrt{ab(ab - k_1 k_2)}}{k_1 k_2} = 1/\beta$. Resolvendo em função de β a equação anterior, obtemos o valor de β :

$$\beta = \frac{2\sqrt{ab(ab - k_1k_2)} + (2ab - k_1k_2)}{k_1k_2} = \lambda_+.$$

Para que a escolha de β esteja bem definida, temos que garantir que: $ab(ab - k_1k_2) \geq 0$. Observando as condições anteriores: $k_1 < 0, k_2 > 0$ é suficiente impormos que $a.b > 0$. Os autovetores associados a λ_+, λ_- são, respectivamente

$$v_+ = \left(\frac{ab + \sqrt{ab(ab - k_1k_2)}}{ak_2}, 1 \right) = (\theta_+, 1),$$

$$v_- = \left(\frac{ab - \sqrt{ab(ab - k_1k_2)}}{ak_2}, 1 \right) = (\theta_-, 1).$$

Observe que $ab + \sqrt{ab(ab - k_1k_2)} > 0$ e $ab - \sqrt{ab(ab - k_1k_2)} < 0$ logo $\theta_+ < 0$ e $\theta_- > 0$. Além disso, $-1 < \lambda_- < 1$. De fato, suponhamos que $\lambda_- < -1$, isto é, $\frac{2ab - k_1k_2 - 2\sqrt{(ab)^2 - abk_1k_2}}{k_1k_2} < -1$ logo $ab > \sqrt{(ab)^2 - abk_1k_2}$. O que é um absurdo pois $-abk_1k_2 > 0$. Assim, $-1 < \lambda_-$. Se $\lambda_- > 1$ então $\frac{2ab - k_1k_2 - 2\sqrt{(ab)^2 - abk_1k_2}}{k_1k_2} > 1$, logo $ab - k_1k_2 < \sqrt{(ab)^2 - abk_1k_2}$, ou seja, $-k_1k_2 < 0$. Novamente temos um absurdo, pois suponhamos que $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$. Assim, $-1 < \lambda_- < 1$. Analogamente, provamos que $\lambda_+ < -1$. A dinâmica da aplicação de primeiro retorno é dada na figura 3.6, onde v_- e v_+ são os autoespaços associados aos autovalores com valor absoluto menor e maior que 1, respectivamente.

■

Lema 3.2.3 *Considerando as hipóteses do lema anterior mais a condição $X.Y.f(0) - Y.X.f(0) < 0$ temos que o campo deslizando F_Z associado a $Z \in \Omega_0(d)$ é A-estável na origem.*

Demonstração O campo deslizando associado a $Z = (X, Y) \in \Omega_0(d)$ é dado por: $F(x, y) = (k_1y - bx, ay - k_2x) + O(x^2, y^2)$. Nosso objetivo agora é dar condições para que o campo deslizando seja assintoticamente estável na origem. Temos que

$$DF(0) = \begin{bmatrix} -b & k_1 \\ -k_2 & a \end{bmatrix},$$

os autovalores são dados por: $\xi_{\pm} = \frac{a-b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4k_1k_2}}{2}$. Para que tenhamos o campo deslizando A-estável na origem, é suficiente que os coeficientes do campo satisfaçam as condições: $a - b < 0$ e $(a + b)^2 - 4k_1k_2 \geq 0$. Note que a segunda restrição segue direta-

mente das condições impostas no lema anterior. Os autovetores associados a ξ_+ e ξ_- são, respectivamente:

$$\omega_+ = \left(\frac{2k_1}{a+b+\sqrt{(a+b)^2-4k_1k_2}}, 1 \right) = (\rho_+, 1),$$

$$\omega_- = \left(\frac{2k_1}{a+b-\sqrt{(a+b)^2-4k_1k_2}}, 1 \right) = (\rho_-, 1).$$

Observe que $|\xi_+| < |\xi_-|$ e $k_1k_2 < 0$. Por hipótese $X.Y.f(0) = a < 0$ e $Y.X.f(0) = b < 0$ segue que $\omega_- \subset SwR$ e $\omega_+ \subset SlR$, isto é, $\rho_+ < 0$ e $\rho_- > 0$. A dinâmica do campo deslizante é dada na figura 3.6.

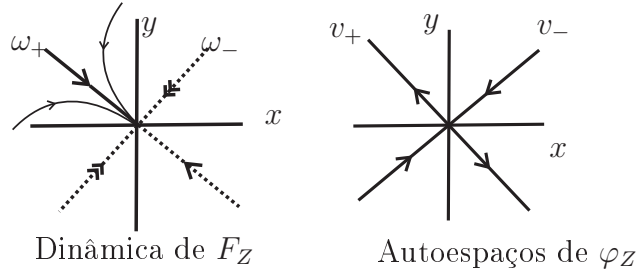


Figura 3.6: Dinâmica de F_Z e os autoespaços de φ_Z .

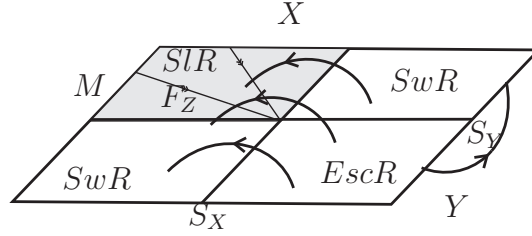
■

Demonstração da proposição 3.2.3 Antes de mais nada observe que para $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in A = \{(x, y, 0); x > 0, y > \frac{2a}{k_1}x\}$ então $\phi_X(t, p_0) \in SlR$ e a região de retorno é dada por $R = \{(x, y, 0); x > 0, y < \frac{2a}{k_1}x\} \subset M$.

Além disso, analisando a dinâmica de φ_Z concluímos que os iterados pelo fluxo ou irão para a região de deslize e daí seguirão a dinâmica do campo deslizante ou, irão para a região de escape, isto é, dado $p_0 \in SwR$ temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_Z^n(p_0) = p_n \in EscR \cup SlR$. Mas $p_n \in EscR$ se, e somente se invertemos a orientação do fluxo e, essa mudança só ocorre quando a trajetória passa pela região de deslize pois se nos restringirmos somente a SwR não é possível ocorrer essa mudança de orientação. A dinâmica do campo descontínuo é dada pela figura 3.7.

Consideremos o conjunto de campos em $\Omega_0(d)$ tal que $Z \in \Omega_0^A(d)$ satisfaz as condições impostas anteriormente. Explicitemos esse conjunto:

$$\begin{aligned} \Omega_0^A(d) &= \{Z = (X, Y) \in \Omega_0(d); X^2.f(0) < 0, Y^2.f(0) > 0, \\ &\quad Y.(X.f)(0) < 0, X.(Y.f)(0) - Y.(X.f)(0) < 0\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Figura 3.7: Dinâmica de $Z \in \Omega_0(d)$.

Considerando os resultados obtidos nos lemas 3.2.2, 3.2.3 e as observações anteriores, para concluirmos a demonstração da proposição nos resta verificar que dado $\varepsilon > 0$, o ponto $\phi_Z^t(p_0)$ está contido na bola com centro na origem e raio ε onde $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V_\delta(0)$ para $Z \in \Omega_0^A(d)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ provaremos que a expressão

$$\Delta(t, p_0) = d(\phi_X^t(p_0), 0)^2 = (x_0 + k_1 t)^2 + (y_0 + at)^2 + (z_0 + x_0 t + \frac{1}{2} k_1 t^2)^2 + t.o.s., \quad (3.4)$$

é menor que ε^2 . O intervalo onde t varia é $I = [0, t^*]$, onde $t^* = t_1(x_0, y_0) = -\frac{2x_0}{k_1} + t.o.s.$, o qual depende de $p_0 \in M$. Note que

$$\langle \phi_X^t(p_0), \phi_X^t(p_0) \rangle = \Delta(t, p_0),$$

logo $\frac{\partial \Delta(t, p_0)}{\partial t} = 2\langle X(\phi_X^t(p_0)), \phi_X^t(p_0) \rangle$. Assim, $\frac{\partial \Delta(0, p_0)}{\partial t} = 2\langle X(p_0), p_0 \rangle$. Como $\Delta(t, p_0) = \Delta(0, p_0) + \Delta'(0, p_0)t + t.o.s.$, onde $t \in (0, t^*)$ e $\Delta(0, p_0) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$. Desta forma, escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $p_0 \in V_\delta(0)$ temos o requerido. Assim, finalizamos a demonstração para este caso. ■

Antes de concluirmos a prova do Teorema B, precisamos provar que os subconjuntos $\Omega_0^A(a), \Omega_0^A(d)$ explicitados anteriormente são de fato não vazios. Exibiremos para cada conjunto um campo de Filippov, caracterizando assim a não vacuidade de cada um dos subconjuntos de Ω_0 .

Proposição 3.2.4 *Os conjuntos $\Omega_0^A(a), \Omega_0^A(d) \subset \Omega_0$ são não vazios.*

Demonstração Para cada conjunto $\Omega_0^A(i)$ exibiremos um campo Z , o qual estará caracterizado pelos coeficientes da sua forma normal, isto é, daremos os valores dos coeficientes que correspondem ao campo Z . Para $Z \in \Omega_0^A(a) \subset \Omega_0(a)$ observando a forma normal explicitada na proposição 2.1.1 item 4— atribuímos os valores $(a, b) = (-2, -1)$, ou seja, tome o campo $Z = (X, Y)$ onde $X(x, y, z) = (-2x, -y, -1)$ e $Y(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Para $Z \in \Omega_0^A(d) \subset \Omega_0(d)$ tome $(a, b, k_1, k_2) = (-2, -1, -1, 1)$, isto é, o campo $Z = (X, Y)$ com $X(x, y, z) = (-1, -2, x)$ e $Y(x, y, z) = (-1, 1, y)$. ■

Demonstração do Teorema B A demonstração deste teorema segue dos lemas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e das proposições 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4. ■

3.3 A-Estabilidade de Sistemas Descontínuos em Ω_1

Partimos agora para a caracterização da A- ou L-estabilidade da singularidade típica dos campos descontínuos de codimensão um.

Sabemos Ω_1 é uma subvariedade de codimensão um de Ω . Desta forma, utilizaremos a notação $Z_\lambda = \zeta(\lambda)$ onde $\zeta : I \rightarrow \Omega$ aplicação de classe C^1 tal que $\zeta(0) = Z_0$ e $\zeta \pitchfork_{Z_0} \Omega_1$. Em outras palavras, Ω_1 é uma subvariedade de codimensão um de Ω e $Z_0 \in \Omega_1$.

Nos teoremas a seguir, utilizaremos sistemas de coordenadas em uma vizinhança da origem, de tal forma que consideraremos para cada entrada do campo descontínuo Z_λ o jato de menor grau possível afim de simplificarmos sua expressão. Observe que as condições que determinam intrinsecamente as famílias de campos descontínuos abordadas são condições robustas, como transversalidade e hiperbolicidade. Desta forma, para obtermos as propriedades da dinâmica que nos interessa é suficiente considerarmos somente os primeiros jatos. Essa expressão simplificada chamaremos de truncamento do campo Z_λ . Os resultados principais desta seção são:

Teorema 3.3.1 *Seja $Z_0 \in \Omega_1$. O desdobramento genérico para o truncamento polinomial de Z_λ é dado pela lista:*

- (a) $\Omega_1(a.1) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (a, b, x^2 + y^2 + \lambda) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3) + t.o.s., \text{ com } a^2 + b^2 = X^3.f(0) \neq 0, k_3 = \text{sgn}(Y.f(0))\};$
- (b) $\Omega_1(a.2) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (a, b, x^2 - y^2 + \lambda) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3) + t.o.s., \text{ com } a^2 - b^2 = X^3.f(0) \neq 0, k_3 = \text{sgn}(Y.f(0))\};$
- (c) $\Omega_1(a.3) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (a, 0, x^3 + y + \lambda x) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3) + t.o.s., \text{ onde } k_3 = \text{sgn}(Y.f(0)), \text{sgn}(a) = \text{sgn}(X^4.f(0))\};$
- (d) $\Omega_1(b) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (k_1, a, \varepsilon_1(x - (y^2 + \lambda))) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (k_2, b, \varepsilon_2(x + y^2)) + t.o.s., \text{ com } |k_1| = |X^2.f(0)|, |k_2| = |Y^2.f(0)|, a = X^2(0), b = Y^2(0), \varepsilon_i = \pm 1\};$

- (e) $\Omega_1(c) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (\varepsilon_1, \lambda, \varepsilon_2(y + x^2)) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (k_1, a, x) + t.o.s., \text{ onde } \varepsilon_1 = \text{sgn}(X^1(0)), \varepsilon_2 = \text{sgn}(Y^3.f(0)), \text{sgn}(k_1) = \text{sgn}(Y^2.f(0)) \text{ e } a = Y^2(0)\};$
- (f) $\Omega_1(d) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (ax + by, cx + dy, y + ez + e\lambda) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3) + t.o.s., \text{ onde os coeficientes } a, b, c, d, e \text{ depende dos autovalores de } DX_0(0) \text{ (vide lema 3.3.7) e } k_3 = \text{sgn}(Y.f(0))\};$
- (g) $\Omega_1(e) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (a + a\lambda - a^2y, b + c\lambda - acy, x) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (c + b\lambda + b^2x - 2aby, d + d\lambda + bdx - 2bcy, y) + t.o.s., \text{ onde } a = X_0^2.f(0), b = X_0.(Y_0.f)(0), c = Y_0.(X_0.f)(0), d = Y_0^2.f(0) \text{ são não nulos e } a.d = b.c\};$
- (h) $\Omega_1(f) = \{Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda); X_\lambda(x, y, z) = (a - \frac{\lambda}{4d}, b, x - y) + t.o.s. \text{ e } Y_\lambda(x, y, z) = (c, d, y) + t.o.s., \text{ com } X_0^2.f(0) = a - b \neq 0, Y_0^2.f(0) = d \neq 0, (X_0.(Y_0.f)(0) - Y_0.(X_0.f)(0))^2 = 4(X_0^2.f(0).Y_0^2.f(0) - Y_0.(X_0.f)(0).X_0.(Y_0.f(0)))\}.$

No enunciado do Teorema C a seguir aparece subconjuntos $\Omega_1^{A,L}(\cdot) \subset \Omega_1(\cdot)$ os quais serão explicitados durante a demonstração do resultado. Lembramos que as propriedades A, L e I estão definidas na definição 3.1.7. Observando os truncamentos polinomiais obtidas no teorema 3.3.1, obtemos:

Teorema C Considere $Z_0 \in \Omega_1$. Temos

- (a) Se $Z_0 \in \Omega_1(a.1)$ então satisfaz a propriedade I;
- (b) Se $Z_0 \in \Omega_1^L(a.2) \subset \Omega_1(a.2)$ então Z_0 satisfaz a propriedade L;
- (c) Se $Z_0 \in \Omega_1(a.3)$ então satisfaz a propriedade I;
- (d) Se $Z_0 \in \Omega_1(b)$ então satisfaz a propriedade I. Contudo, existe subconjunto $\Omega_1^1(b) \subset \Omega_1(b)$ tal que se $Z_0 \in \Omega_1^1(b)$ então podemos definir aplicação de primeiro retorno φ_{Z_0} com região de retorno dada pelo conjunto aberto $R \subset M$;
- (e) Se $Z_0 \in \Omega_1^A(c) \subset \Omega_1(c)$ então satisfaz a propriedade A para $(x, y, 0) \in \Gamma^A(c) \subset M$. Se considerarmos toda a vizinhança U da origem então $Z_0 \in \Omega_1(c)$ satisfaz a propriedade I;
- (f) Se $Z_0 \in \Omega_1^A(d) \subset \Omega_1(d)$ então satisfaz a propriedade A;
- (g) Se $Z_0 \in \Omega_1^A(e) \subset \Omega_1(e)$ então satisfaz a propriedade A para $(x, y, 0) \in \Gamma^A(e) \subset M$ e podemos definir aplicação de primeiro retorno. Se considerarmos toda a vizinhança U da origem então $Z_0 \in \Omega_1(e)$ satisfaz a propriedade I;

(h) Se $Z_0 \in \Omega_1(f)$ então satisfaz a propriedade I.

Dividiremos a prova dos Teoremas 3.3.1 e C em uma série de resultados preliminares, onde em cada um desses resultados nos concentramos nos subconjuntos $\Omega_1(\cdot)$. A seguir, para cada $Z_0 \in \Omega_1(i)$ temos $Z_\lambda \pitchfork_{Z_0} \Omega_1(i)$, onde $i = a, b, c, d, e, f$ com $Z_\lambda \in \Omega_0$, para $\lambda \neq 0$.

Observação 3.3.1 Nas seções a seguir, onde demonstraremos o teorema 3.3.1, omitiremos na expressão do truncamento do desdobramento de Z_λ o termo t.o.s. com o intuito de simplificarmos a notação, visto que nossa análise é local e as condições que definem intrínsecamente cada uma das subfamílias são robustas. Contudo salientamos que a expressão apresentada durante a prova conta ainda com termos de ordem superior.

3.3.1 Caso Lips-regular $Z_0 \in \Omega_1(a.1)$

Lema 3.3.1 Se $Z_0 \in \Omega_1(a.1)$ então Z_0 satisfaz a propriedade I.

Demonstração A forma normal para o desdobramento segue de [T3]: $X_\lambda(x, y, z) = (a, b, x^2 + y^2 + \lambda)$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3)$, com $k_3 = \text{sgn}(Y.f(0))$. Sabemos que uma das condições necessárias para que tenhamos A, L-estabilidade é que M seja um conjunto atrator para o campo de Filippov Z_0 . Assim, suponhamos $k_3 = 1$. Consideremos o caso onde $\lambda = 0$, logo $X_0.f(x, y, 0) = x^2 + y^2 > 0$. Desta forma, a variedade de descontinuidade é toda região de costura neste caso, isto é, $M = SwR$.

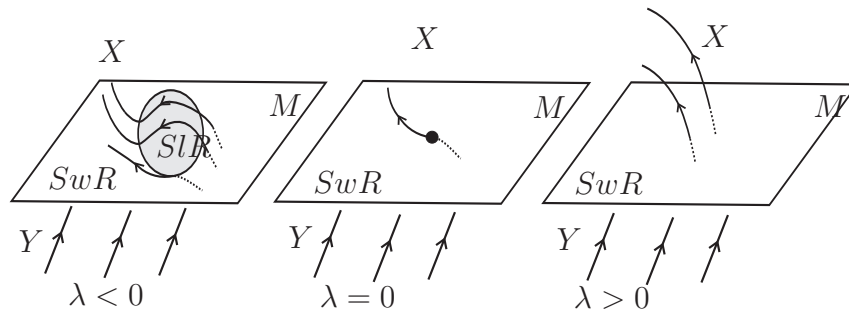


Figura 3.8: Dinâmica do campo $Z_0 \in \Omega_1(a.1)$.

Assim, dado $p \in U$ vizinhança arbitrária da origem, aplicamos o Teorema do Fluxo Tubular e concluímos que Z_0 satisfaz a propriedade I. ■

Observação 3.3.2 Se $Z_0 \in \Omega_1(a.1)$ então Z_λ não possui órbita singular periódica para todo $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde ε é positivo, suficientemente pequeno, veja figura 3.8.

De fato, assim como no lema anterior, provemos que não existe retorno para $\lambda \neq 0$. Se $\lambda > 0$ então temos somente região de costura e para $\lambda < 0$ ao longo da curva de tangência $S_{X_\lambda} = \{(x, y, 0); X_\lambda.f(x, y, 0) = 0\} = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 = -\lambda\}$ o tipo de tangência é dado pelo sinal da expressão $X_\lambda^2.f(x, y, 0) = 2(ax + by)$. O campo deslizante é dado por: $F_{Z_\lambda}(x, y) = (a - (x^2 + y^2 + \lambda), b)$, o qual é topologicamente conjugado ao campo constante $\tilde{F}_Z(x, y) = (a, b)$, para λ suficientemente pequeno. Assim teremos tangência visível e invisível ao longo da curva S_{X_λ} . Desta forma, provamos que não existe retorno para esse caso também. Logo, não existe órbita singular periódica para $\lambda \neq 0$.

3.3.2 Caso Bec to Bec-regular $Z_0 \in \Omega_1(a.2)$

Neste caso encontramos subconjunto aberto de $\Omega_1(a.2)$ tal que campos de Filippov nesse subconjunto satisfazem a L-estabilidade na origem. Temos o resultado:

Lema 3.3.2 *Existe subconjunto aberto $\Omega_1^L(a.2) \subset \Omega_1(a.2)$, definido em (3.5), tal que se $Z_0 \in \Omega_1^L(a.2)$ então Z_0 satisfaz a propriedade L.*

Demonstração A forma normal para o truncamento finito do desdobramento segue do trabalho [T3]: $X_\lambda(x, y, z) = (a, b, x^2 - y^2 + \lambda)$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3)$, com $k_3 = \text{sgn}(Y.f(0))$. Analogamente aos casos anteriores, suponhamos que $k_3 = 1$. Os fluxos dos campos X_λ e Y_λ são dados por: $\phi_X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + (x_0^2 - y_0^2 + \lambda)t + (ax_0 - by_0)t^2 + 1/3(a^2 - b^2)t^3)$ e $\phi_Y^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + t, y_0, z_0 + t)$. As regiões em M são: $SlR = \{(x, y, 0); x^2 - y^2 + \lambda < 0\}$ e $SwR \uparrow = \{(x, y, 0); x^2 - y^2 + \lambda > 0\}$. Veja figura 3.9.

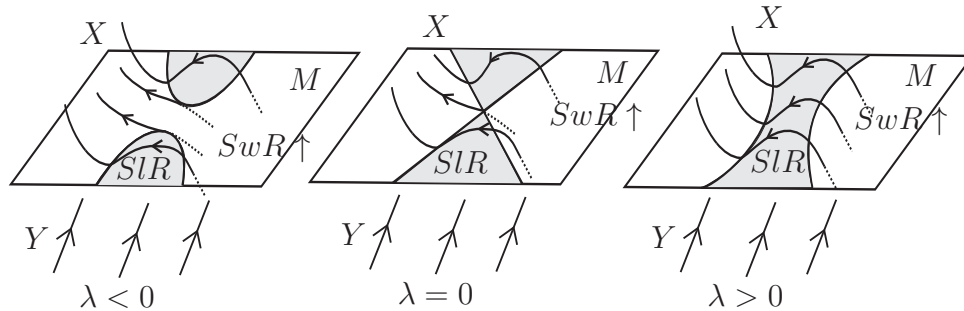


Figura 3.9: Dinâmica do campo $Z_0 \in \Omega_1(a.2)$.

O campo deslizante é dado por: $F_{Z_\lambda}(x, y) = (a - (x^2 - y^2 + \lambda), b)$. Consideremos $\lambda = 0$. O campo deslizante não possui singularidades em uma vizinhança da origem. Pelo Teorema do Fluxo Tubular, F_Z é topologicamente equivalente ao campo tubular $\tilde{F}_Z(x, y) = (a, b)$. A direção e o sentido depende do sinal de a e b , desta forma temos as

seguintes possibilidades para o campo $\tilde{F}_Z$: $1.0 < b < a, 2.0 < a < b, 3.a < 0 < b$ e $|a| < |b|$, $4.b < 0 < a$ e $|a| < |b|$, $5.a < b < 0, 6.b < a < 0, 7.a < 0 < b$ e $|a| > |b|$, $8.b < 0 < a$ e $|a| > |b|$, $9.0 < b = a$ e $10.0 > b = a$.

Explicitemos agora as condições para que tenhamos retorno. Dado $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in SwR \uparrow$ encontremos $t_1(x_0, y_0) > 0$ tal que $\phi_{X_0}^{t_1(x_0, y_0)}(p_0) \in M$. Obtemos, $t_1(x_0, y_0) = \frac{-3ax_0 + 3by_0 - \sqrt{-12(a^2 - b^2)(x_0^2 - y_0^2) + (3ax_0 - 3by_0)^2}}{2(a^2 - b^2)}$, juntamente com a condição $a^2 - b^2 < 0$. Note que essa condição $a^2 - b^2 < 0$ é necessária para que tenhamos a A, L-estabilidade. A dividiremos em dois casos: (I) $a - b < 0, a + b > 0$ e (II) $a - b > 0, a + b < 0$.

Analisando os casos 1-, ..., 10- concluímos: os casos 2- e 3- satisfazem as restrições do caso (I) e os casos 4- e 6- satisfazem as restrições do caso (II) e os casos 1-, 5-, 7-, 8-, 9- e 10- são contraditórios com a condição $a^2 - b^2 < 0$ e daí não serão considerados. Considerando essa classificação, obtemos:

- 2- (caso (I)) Satisfazem a propriedade I;
- 3- (caso (I)) Satisfazem a propriedade I;
- 4- (caso (II)) Satisfazem a propriedade I;
- 6- (caso (II)) Satisfazem a propriedade L.

De fato, detalharemos os itens 6- e 2-, a análise dos demais será análoga. Note que o conjunto de dobras é dado por $S_X = S_X^- \cup S_X^+$, onde $S_X^- = \{(x, y, 0); x = -y\}$ e $S_X^+ = \{(x, y, 0); x = y\}$ e o tipo de tangência é dado por: $X_0^2.f(x, \pm x) = 2x(a \mp b)$.

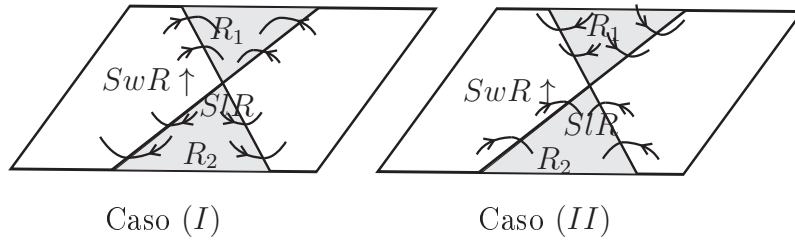


Figura 3.10: Tipos de tangência de $Z_0 \in \Omega_1(a.2)$.

Para o item 6- (caso (II)), a dinâmica do campo deslizante é topologicamente equivalente ao campo tubular da direita para a esquerda onde a componente y é maior que a componente x , isto é, o campo intercepta transversalmente as retas $S_X^\pm$.

O fluxo de Z_0 ao longo de pontos $p_0 \in S_X^-$ com $x_0 < 0$ (caso (II)) saem para $z > 0$ (tipo de tangência visível nesses pontos) e daí são iterados pelo fluxo do campo X_0 . Sabemos que existe retorno nesses casos. Verifiquemos em qual região ocorre: $\phi_{X_0}^{t_1(x_0, y_0)^-}(p_0^-) =$

$p_1^- \in M$ onde $t_1(x_0, y_0)^- = -\frac{3x_0}{a-b} > 0$, pois em (II) temos $a - b > 0$. Além disso, $p_1^- = (x_0 - \frac{3a}{a-b}x_0, -\frac{(a+2b)}{a-b}x_0) = (x_1^-, y_1^-)$. Observe que $p_1^- \in SlR$ e $y_1^- < 0$, pois $b < a < 0$ logo $a + 2b < 0$. Assim, $p_1^- \in R_2 \subset SlR$. Note que na fronteira da R_1 para o caso (I) e da R_2 para o caso (II) as dobras são do tipo invisível.

Para concluirmos que o campo Z_0 , nessas condições satisfaz a propriedade L nos resta verificar que dado $\varepsilon > 0$ o fluxo $\phi_Z^t(p_0)$ não sai da bola com centro na origem e raio ε onde $p_0 \in V_\delta(0)$ para Z_0 satisfazendo as condições anteriores. Mas isso é consequência imediata da continuidade do fluxo de Z_0 com relação as condições iniciais. Desta forma, caracterizamos a L-estabilidade para Z_0 neste caso.

Provemos agora que se Z_0 satisfaz as condições dos itens 2-,3- e 4- não será L-estável. Faremos para o item 2- e os demais serão análogos. Basta observar que o campo deslizante é topologicamente equivalente ao campo tubular onde $\tilde{F}_Z$ não intercepta as curvas $S_X^\pm$ na região R_1 (veja figura 3.10). Assim, dado $p_0 \in R_1$, $\phi_F^t(p_0)$ “foge” de qualquer vizinhança da origem. Logo, não é L-estável. Definimos o conjunto

$$\begin{aligned} \Omega_1^L(a.2) &= \{Z_0 \in \Omega_1(a.2); Y^3(0) = 1, X^1(0) - X^2(0) > 0, \\ &X^1(0) + X^2(0) < 0, X^2(0) < X^1(0) < 0\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

■

3.3.3 Caso Dove's tail-regular $Z_0 \in \Omega_1(a.3)$

Para $Z \in \Omega_1(a.3)$, concluimos que não é L-estável, isto é, todos os campos satisfazem a propriedade I.

Lema 3.3.3 *Se $Z_0 \in \Omega_1(a.3)$ então Z_0 satisfaz a propriedade I.*

Demonstração Neste caso temos $X_0(0) \neq 0, X_0.f(0) = 0 = X_0^2.f(0) = X_0^3.f(0)$ e $X_0^4.f(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular para $X_0.f$. Colocando $X^1(x, y, z) = a, X^2(0) = 0$ e $X^3(x, y, z) = x^3 + y + \lambda x$, onde λ é o parâmetro do desdobramento da singularidade. Assim como no trabalho [T3], obtemos a forma normal com truncamento finito do desdobramento para este caso: $X_\lambda(x, y, z) = (a, 0, x^3 + y + \lambda x)$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3)$, onde $k_3 = \text{sgn}(Y.f(0))$ e $\text{sgn}(a) = \text{sgn}(X^4.f(0))$. Como nos casos anteriores, suponhamos que $Y.f(0) = 1$, pois caso contrário teríamos a propriedade I diretamente. Consideremos $\lambda = 0$. As regiões são: $SlR = \{(x, y, 0); x^3 + y < 0\}$ e $SwR \uparrow = \{(x, y, 0); x^3 + y > 0\}$, veja figura a seguir.

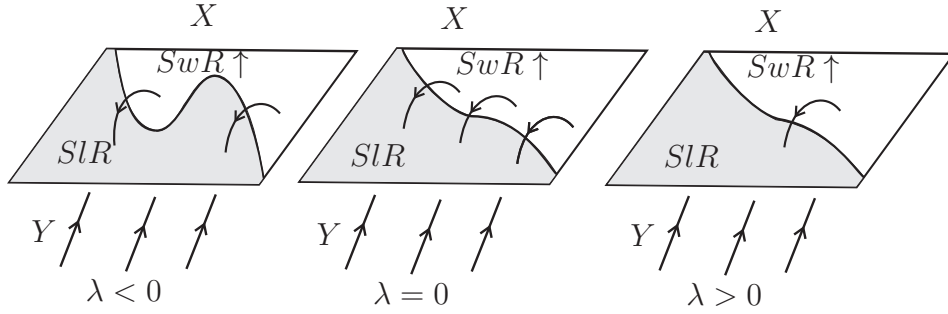


Figura 3.11: Dinâmica do campo $Z_0 \in \Omega_1(a.3)$.

O conjunto de dobras é dado por $S_X = \{(x, y, 0); y = -x^3\}$ e o tipo de tangência é dado por: $X_0^2.f(x, -x^3) = 3ax^2$. Tomemos $a < 0$, pois caso contrário teríamos $X^2.f(x, -x^3) > 0$, isto é, dobra visível, caracterizando a propriedade I. Dado $p_0 \in SwR \uparrow$, como as dobras são invisíveis, temos que existe retorno, isto é, dado $p_0 \in U$, vizinhança da origem, existe $t \geq 0$ tal que $\phi_Z^t(p_0) \in SLR$.

O campo deslizante é dado por: $F_Z(x, y) = (a - (x^3 + y), 0)$. Novamente pelo Teorema do Fluxo Tubular, o campo deslizante é topologicamente equivalente, em uma vizinhança da origem, a $\tilde{F}_Z(x, y) = (a, 0)$. Sabemos que $a < 0$ e a região de deslize é dada por $SLR = \{(x, y, 0); x^3 + y < 0\}$, assim o campo F_Z não intercepta a fronteira da região de deslize. Caracterizamos assim a não estabilidade. Logo, para $Z_0 \in \Omega_1(a.3)$ satisfaz a propriedade I. ■

Notação: Denotemos $\varphi_{Z_\lambda}(x, y)$ quando tratarmos da aplicação de primeiro retorno associada ao campo descontínuo Z_λ .

3.3.4 Caso Dobra-dobra 1-degenerada $Z_0 \in \Omega_1(b)$

Lema 3.3.4 *Existe subconjunto $\Omega_1^1(b) \subset \Omega_1(b)$ tal que se $Z_0 \in \Omega_1^1(b)$ então podemos definir aplicação de primeiro retorno φ_{Z_0} com região de retorno dada pelo conjunto aberto $R \subset M$.¹*

Demonstração Neste caso a origem é ponto de dobra para os campos X_0 e Y_0 e o contato entre os conjuntos de tangência S_X e S_Y é de ordem 2. Consideremos sistemas de coordenadas local tal que $X_0.f(x, y, z) = \varepsilon_1(x - y^2)$ e $Y_0.f(x, y, z) = \varepsilon_2(x + y^2)$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$, para $i = 1, 2$. Daí $X_0^2.f(0) = \pm X_0^1(0) \neq 0$ e $Y_0^2.f(0) = \pm Y_0^1(0) \neq 0$. Logo, $X_0^1(x, y, z) = k_1 + H_1(x, y, z)$, $X_0^2(x, y, z) = a + H_2(x, y, z)$, $Y_0^1(x, y, z) = k_2 + H_3(x, y, z)$ e

¹Os subconjuntos $\Omega_1^1(b)$, R estão definidos em (3.6), (3.7), respectivamente.

$Y_0^2(x, y, z) = b + H_4(x, y, z)$, onde $H_i : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são polinômios de grau maior ou igual a um, para $i = 1, \dots, 4$. Considerando o desdobramento dado pelo contato entre os conjuntos de tangência obtemos os truncamentos: $X_\lambda(x, y, z) = (k_1, a, \varepsilon_1(x - (y^2 + \lambda)))$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (k_2, b, \varepsilon_2(x + y^2))$.

Estamos interessados em caracterizar a A-ou L-estabilidade para o campo descontínuo Z_0 . Uma das condições necessárias é que $X_0^2.f(0) < 0$ e $Y_0^2.f(0) > 0$. Desta forma, obtemos as possíveis configurações, de acordo com o sinal de ε_i , (veja figura 3.12): Caso 1- $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$, Caso 2- $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_2 = 1$, Caso 3- $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = -1$ e Caso 4- $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$.

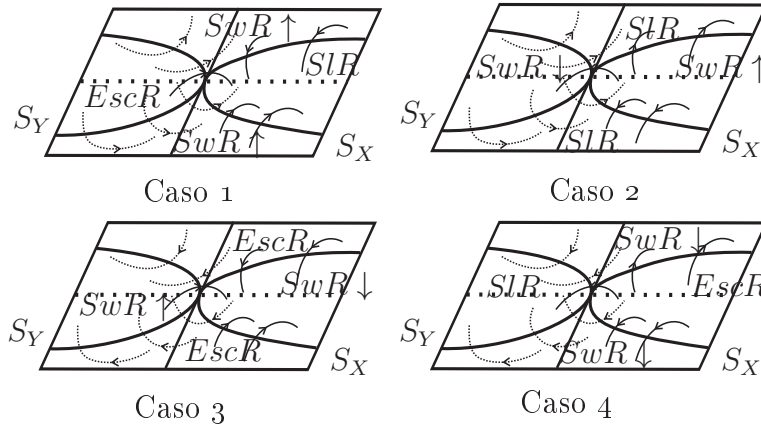


Figura 3.12: Possíveis configurações para $Z_0 \in \Omega_1(b)$.

Vamos detalhar as contas para o Caso 2, onde $\varepsilon_i = 1$, para $i = 1, 2$. Para os demais casos o procedimento será análogo. Vamos considerar $\lambda = 0$ pois para $\lambda \neq 0$ representa o caso onde os conjuntos de tangência são transversais, o qual já foi estudado. As regiões na variedade de descontinuidade para Z_λ são: $SLR = \{(x, y, 0); x < (y^2 + \lambda), x + y^2 > 0\}$, $SwR = \{(x, y, 0); x < (y^2 + \lambda), x + y^2 < 0 \text{ ou } x > (y^2 + \lambda), x + y^2 > 0\}$, $EscR = \{(x, y, 0); x > (y^2 + \lambda), x + y^2 < 0\}$.

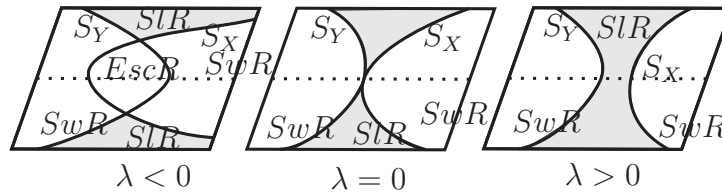


Figura 3.13: Desdobramento genérico de $Z_0 \in \Omega_1(b)$.

Explicitemos o fluxo associado aos campos X_0 e Y_0 : $\phi_X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_1 t, y_0 + at, z_0 + (x_0 - y_0^2)t + \frac{1}{2}(k_1 - 2ay_0)t^2 - \frac{a^2}{3}t^3)$ e $\phi_Y^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_2 t, y_0 + bt, z_0 + (x_0 +$

$y_0^2)t + \frac{1}{2}(k_2 + 2y_0b)t^2 + \frac{b^2}{3}t^3$). Da condição $X_0^2.f(0) < 0$ e $Y_0^2.f(0) > 0$, obtemos $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$, respectivamente. Desta forma, definimos o conjunto

$$\Omega_1^1(b) = \{Z_0 \in \Omega_1(b); X_0^2.f(0) < 0, Y_0^2.f(0) > 0\}, \quad (3.6)$$

tal que se $Z_0 \in \Omega_1^1(b)$ então podemos definir φ_{Z_0} para uma região aberta $R \subset M$, dada implicitamente pelas equações:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y, 0) \in M; \phi_{X_0}^{t_1}(x_0, y_0, 0) = (x_1, y_1, 0) \in M, \\ &\quad \phi_{Y_0}^{t_2}(x_1, y_1, 0) \in M, \text{ com } t_1(x_0, y_0), t_2(x_0, y_0) > 0\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lembrando que resolvemos as equações $\phi_{X_0}^{t_1}(x_0, y_0, 0) \in M, \phi_{Y_0}^{t_2}(x_1, y_1, 0) \in M$ em t , obtendo assim t como função das coordenadas do ponto inicial $p_0 = (x_0, y_0, 0)$, daí observando as condições $t_1(x_0, y_0) > 0, t_2(x_0, y_0) > 0$ determinamos a região R . A aplicação de primeiro retorno é dada por $\varphi_{Z_0}(x, y) = \phi_{Y_0}^{t_2} \circ \phi_{X_0}^{t_1}(x, y, 0)$ que possui a origem como ponto fixo. Analisando a dinâmica dos campos X_0 e Y_0 , obtemos

- 1- Dado $p_0 \in SwR \uparrow$ temos que $\phi_{X_0}^{t_1}(p_0) \in SlR$ se $p_0 \in (SwR \uparrow -R)$;
- 2- Dado $p_0 \in SwR \downarrow$ temos que $\phi_{Y_0}^{t_2}(p_0) \in SlR$ se $x_0 + (y_0 - \frac{2b}{k_2}x_0)^2 > 0$,

onde $p_0 = (x_0, y_0, 0)$. ■

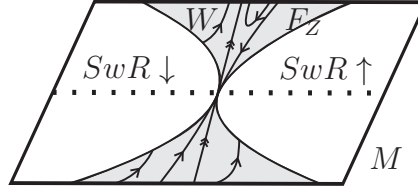
O lema seguinte nos diz que se $Z_0 \in \Omega_1(b)$ então Z_λ satisfaz a propriedade I, para $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Lema 3.3.5 *Se $Z_0 \in \Omega_1(b)$ então Z_λ satisfaz a propriedade I.*

Demonstração Com a notação do lema anterior, o campo deslizante para o caso 2 com $\lambda = 0$ é dado por: $F_Z(x, y) = (-k_2(x - y^2) + k_1(x + y^2), -b(x - y^2) + a(x + y^2))$. Das condições obtidas no lema anterior, sabemos que $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$, logo $k_1 - k_2 < 0$. O jacobiano é dado por:

$$DF_Z(0, 0) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & 0 \\ a - b & 0 \end{bmatrix}.$$

O autovetor estável de F_Z é dada por $\omega = (\frac{k_1 - k_2}{a - b}, 1)$. Observe que a origem é um ponto crítico tipo sela-nó para o campo F_Z . Além disso, no trabalho [T3] página 449

Figura 3.14: Dinâmica de F_Z para $\Omega_1(b)$.

prova-se que a variedade central da sela-nó é tangente aos conjuntos de tangência S_X e S_Y . Desta forma, obtemos a dinâmica do campo deslizante, a qual é dada na figura 3.14.

No modelo dado no caso 2 o campo descontínuo $Z_0 \in \Omega_1(b)$ satisfaz a propriedade I, pois trajetória passando pela região $W \subset SLR$ na figura 3.14 foge de qualquer vizinhança. Observe que no caso 3 obtemos um resultado idêntico, não caracterizando a L-estabilidade. Para o caso 1 para que $X_0^2 \cdot f(0) < 0, Y_0^2 \cdot f(0) > 0$ temos $k_1 > 0, k_2 > 0$, respectivamente. E,

$$DF_Z(0,0) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ a + b & 0 \end{bmatrix},$$

isto é, a origem é instável para o campo deslizante para este caso. Já para o caso 4 para que $X_0^2 \cdot f(0) < 0, Y_0^2 \cdot f(0) > 0$ temos $k_1 < 0, k_2 < 0$, respectivamente. E,

$$DF_Z(0,0) = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & 0 \\ -(a + b) & 0 \end{bmatrix},$$

isto é, a origem, como no caso anterior, é instável para o campo deslizante. Desta forma, concluímos que dada $Z_\lambda \in \Omega_1(b)$ satisfaz a propriedade I. ■

3.3.5 Caso Dobra-cúspide $Z_0 \in \Omega_1(c)$

Neste caso obtemos a proposição 3.3.1 que caracteriza o subconjunto aberto de M que é uma bacia local de atração para este caso. Contudo se considerarmos toda a vizinhança U da origem, dado $Z_0 \in \Omega_1(c)$ não será L-estável:

Proposição 3.3.1 *Seja $Z_0 \in \Omega_1(c)$ satisfaz:*

- 1- *A propriedade A para $Z_0 \in \Omega_1^A(c) \subset \Omega_1(c)$ e $(x, y, z) \in \Gamma^A(c) \subset M$ uma bacia local de atração, definidos em (3.10) e (3.9), respectivamente;*
- 2- *A propriedade I se considerarmos toda a vizinhança U de $0 \in M$.*

Para demonstrarmos a proposição 3.3.1 necessitaremos do lema 3.3.6:

Lema 3.3.6 *O truncamento finito de $Z_0 \in \Omega_1(c)$ é $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ com $X_\lambda(x, y, z) = (\varepsilon_1, \lambda, \varepsilon_2(y + x^2))$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (k_1, a, x)$, onde $\varepsilon_1 = \text{sgn}(X^1(0))$, $\varepsilon_2 = \text{sgn}(Y^3 \cdot f(0))$, $\text{sgn}(k_1) = \text{sgn}(Y^2 \cdot f(0))$ e $a = Y^2(0)$. Se $Y^2(0) < 0$, $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1$ então o campo deslizante F_Z é A-estável na origem.*

Demonstração Motivados pelas proposições 2.1.2, 2.1.3 onde exibimos as formas normais para o caso dobra-regular e cúspide-regular, respectivamente e sabendo que os conjuntos de tangência são transversais, consideremos sistemas de coordenadas local tal que $S_X = \{(x, y, 0); \varepsilon_2(y + x^2) = 0\}$ e $S_Y = \{(x, y, 0); x = 0\}$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$, para $i = 1, 2$. Obtemos $X_\lambda(x, y, z) = (\varepsilon_1, \lambda, \varepsilon_2(y + x^2))$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (k_1, a, x)$. Note que $X_0 \cdot f(x, y, 0) = \varepsilon_2(y + x^2)$, $X_0^2 \cdot f(x, -x^2) = 2\varepsilon_1\varepsilon_2x$, $X^3 \cdot f(0) = 2\varepsilon_2 \neq 0$, $Y_0 \cdot f(x, y, 0) = x$, $Y_0^2 \cdot f(0, y, 0) = k_1 \neq 0$. Temos $\varepsilon_1 = \text{sgn}(X^1(0))$, $\varepsilon_2 = \text{sgn}(Y^3 \cdot f(0))$, $\text{sgn}(k_1) = \text{sgn}(Y^2 \cdot f(0))$ e $a = Y^2(0)$. Além disso, os vetores no $\{df(0), d(X_0 \cdot f)(0), d(X_0^2 \cdot f)(0)\}$ são linearmente independentes.

As regiões em M são: $SlR = \{(x, y, 0); \varepsilon_2(y + x^2) < 0, x > 0\}$, $EscR = \{(x, y, 0); \varepsilon_2(y + x^2) > 0, x < 0\}$ e $SwR = \{(x, y, 0); \varepsilon_2(y + x^2) \cdot x > 0\}$ as quais estão explicitadas na figura 3.15 e dependem do sinal de ε_i , por isso teremos que considerar todos os possíveis sinais de ε_i : caso 1- $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1$, caso 2- $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$, caso 3- $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$, caso 4- $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1$.

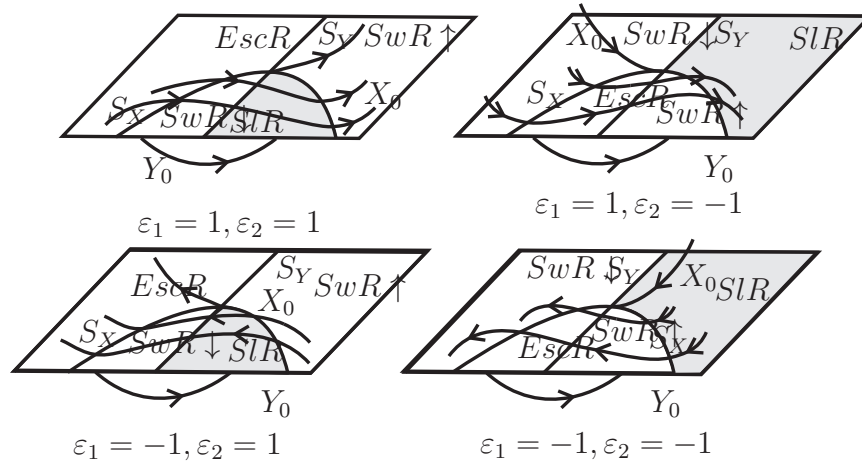


Figura 3.15: Regiões em M para $Z_0 \in \Omega_1(c)$.

O campo deslizante para este caso é dado por $F_Z(x, y) = (\varepsilon_1x - \varepsilon_2k_1(y + x^2), -a\varepsilon_2(y + x^2))$ cujos autovalores são: $\xi_1 = \varepsilon_1$ e $\xi_2 = -a\varepsilon_2$. Como estamos interessados em caracterizar a A-estabilidade para o campo de Filippov $Z_0 \in \Omega_1(c)$, temos $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 < 0$. Logo, $\varepsilon_1 = -1$. Desta forma excluimos os casos 1- e 2- pois são os casos onde $\varepsilon_1 = 1$ e

daí o campo deslizando F_Z não é L-estável. Portanto, Z_0 também não será. No caso 3-, tomando $p_0 \in \{(x, y, 0); y > 0\} \cap SwR \uparrow$ não existe retorno pois nessa região o campo X_0 é tubular apontando na direção z positivo. Veja a figura 3.15. Logo neste caso o campo de Filippov não é L-estável.

Nos resta analisar o caso 4-: $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1$. Por hipótese $Y^2(0) = a < 0$, logo $\xi_2 = -a\varepsilon_2 = a < 0$. Assim a origem é um nó atrator para o campo F_Z .

■

Demonstração da proposição 3.3.1 Consideremos somente o caso onde $\lambda = 0$. Na demonstração do lema 3.3.6 vimos que o único caso onde podemos ter A, L-estabilidade é o caso 4-: $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1$. Estudemos a possibilidade de retorno para o fluxo dos campos X_0, Y_0 , que neste caso são: $\phi_X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 - t, y_0, z_0 - (x_0 + y_0)t + t^2/2)$ e $\phi_Y^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_1 t, y_0 + at, z_0 + x_0 t + k_1/2 t^2)$.

Partindo de $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in SwR \uparrow$ obtemos $t_1(x_0, y_0) = 2(x_0 + y_0)$ tal que $\phi_{X_0}^{t_1(x_0, y_0)}(p_0) = p_1 \in M$, onde $p_1 = (-x_0, y_0 - \frac{2a}{k_1}x_0)$. Então dado $p_0 \in SwR \uparrow$ não existe retorno para pontos p_0 na região $R_1 = \{(x, y, 0); x + y < 0, y + x^2 < 0, x > 0\} \subset SwR \uparrow$, isto é, para valores iniciais $p_0 \in R_1$ não existe $t > 0$ tal que $\phi_{X_0}^t(p_0) \in M$. Provamos assim que o campo de Filippov $Z_0 \in \Omega_1(c)$ satisfaz a propriedade I. De fato, se considerarmos a função quadrado da distância entre o fluxo de X_0 e a origem do campo, obtemos

$$d(\phi_{X_0}^t(p_0), 0)^2 = [x_0 - t]^2 + [y_0]^2 + [-(x_0 + y_0)t + 1/2 t^2]^2, \quad (3.8)$$

a qual é uma função ilimitada em t para $p_0 \in R_1$. Contudo, podemos definir os subconjuntos de $\Omega_1(c)$ e de M que satisfazem, localmente, as propriedades A ou L. Para isso precisamos estudar mais detalhadamente a dinâmica do campo deslizando F_Z . Os autovalores de $DF_Z(0)$ neste caso são: $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = a$, com $a < 0$. Os respectivos autovetores são $v_{-1} = (1, 0)$ e $v_a = (\frac{k_1}{1+a}, 1)$. Estamos supondo que $Y^2.f(0) = k_1 > 0$, isto é, temos dobra invisível para o campo Y_0 , pois estamos interessados na A, L-estabilidade. Daí se $a < -1$ o autovetor $v_a \subset SwR$ será variedade forte para F_Z , ou seja, as órbitas tendem a origem tangentes a $v_{-1} = (1, 0)$. Se $a = -1$ temos um nó impróprio e se $-1 < a < 0$ então $v_a \subset SlR$ será variedade fraca para F_Z , veja figura 3.16 onde a região sombreada representa a SlR e as órbitas pontilhadas representam a dinâmica virtual do campo F_Z , pois como sabemos o campo deslizando não está definido em toda variedade M .

Neste caso 4- onde $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1$ na parte $x > 0$ temos somente dobras visíveis para o campo X_0 , isto é, a aplicação $X_0^2.f(x, -x^2)$ é definida positiva para $x > 0$. Observando a dinâmica do campo deslizando, figura 3.16, para os casos $a = -1$ e $-1 < a < 0$ o fluxo do campo F_Z na SlR sai pela tangência visível e é iterado pelo fluxo do campo X_0 .

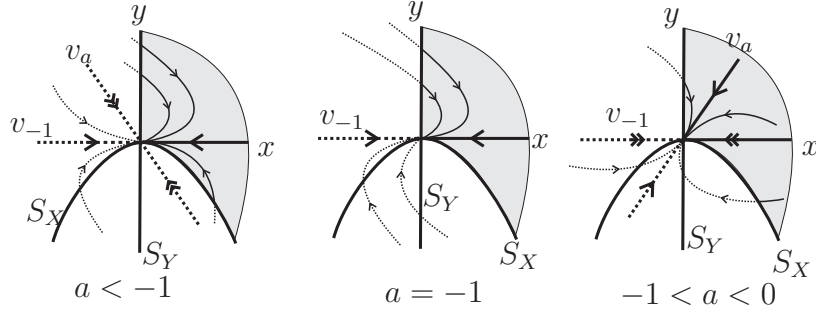


Figura 3.16: Possíveis dinâmicas de F_Z para $\Omega_1(c)$.

Determinemos qual região iterada pelo fluxo do campo Y_0 atinge a SlR , assumindo que $a < -1$, pois vimos que neste caso o campo deslizante F_Z é A-estável na origem. Dado $p_0 \in M$ vimos que $\phi_{Y_0}^{t_2}(p_0) = p_1 = (x_1, y_1, 0)$, queremos $x_1 > 0$ e $y_1 + x_1^2 > 0$, isto é, $y_0 - \frac{2a}{k_1}x_0 + x_0^2 > 0$. Definimos o conjunto

$$\Gamma^A(c) = \{(x, y, 0) \in M; y - \frac{2a}{k_1}x + x^2 > 0, x < 0\} \cup SlR \quad (3.9)$$

que é uma bacia local de atração para $Z_0 \in \Omega_1^A(c)$, onde

$$\begin{aligned} \Omega_1^A(c) &= \{Z_0 \in \Omega_1(c); \text{sgn}(X^1(0)) = -1, \text{sgn}(X^3.f(0)) = -1, \\ &\quad Y^2.f(0) < 0, Y^2(0) < -1\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

■

3.3.6 Caso Ponto crítico-regular $Z_0 \in \Omega_1(d)$

Neste caso exibiremos um subconjunto de $\Omega_1(d) : \Omega_1^A(d)$ tal que $Z_0 \in \Omega_1^A(d)$ então Z_0 será A-estável na origem.

Como consequência do Teorema de Grobman-Hartman e do Teorema da Variedade Estável concluímos que se a parte real dos autovalores no ponto crítico p de um campo de vetores suave dado por $\dot{x} = f(x)$ é negativa então este campo de vetores é assintoticamente estável em p . Enunciaremos este resultado, cuja demonstração encontra-se em [Ro] na página 155.:

Teorema 3.3.2 *Seja p um ponto crítico hiperbólico para $\dot{x} = f(x)$. Se existem autovalores de $Df(p)$ cuja parte real tenha sinal positivo então o campo de vetores f não é Liapunov estável em p . Se o sinal da parte real de todos os autovalores de $Df(p)$ é negativa então o campo de vetores f é assintoticamente estável em p .*

Utilizaremos este resultado restrito ao campo X_0 o qual está definido em M^+ , onde sabemos que se trata de um campo suave. Posteriormente, faremos a análise do contato do campo X_0 com a variedade de descontinuidade M e da dinâmica do campo deslizante para caracterizarmos a A- ou L-estabilidade para Z_0 . Apresentemos agora o resultado que caracteriza a A-estabilidade para o caso $Z_0 \in \Omega_1(d)$ onde temos a origem como ponto crítico para o campo X_0 e regular para Y_0 .

Lema 3.3.7 *Existe conjunto não vazio $\Omega_1^A(d) \subset \Omega_1(d)$, definido em (3.11), tal que se $Z_0 \in \Omega_1^A(d)$ então Z_0 é A-estável na origem.*

Demonstração A origem é um ponto regular de Y_0 e crítico hiperbólico de X_0 . Os autovalores de $DF_Z(0)$ são hiperbólicos distintos e seus respectivos autoespaços transversais a S_X na origem. Pelo menos um dos autovalores associado a $DX_0(0)$ será real não nulo e os outros dois serão complexos com parte real não nula. Além disso, observamos que uma das condições genéricas para este caso é que os autoespaços de $DX_0(0)$ sejam transversais a variedade de descontinuidade M , desta forma M não pode ser invariante pelo fluxo de X_0 , isto é, o plano $z = 0$ não pode ser uma variedade invariante para o fluxo de X_0 . Observando essas condições, obtemos $X^3(x, y, z) = y + ez$, onde a componente y garante a transversalidade do fluxo com M e $\lambda_1 = e$ é autovalor real de $DX_0(0)$. No outro autoespaço de dimensão dois podemos ter:

- (a) um par de autovalores complexos conjugados $\lambda_{2,3} = a \pm bi$,
- (b) um autovalor real duplo $\lambda_2 = \lambda_3 = a$,
- (c) ou dois autovalores reais distintos $\lambda_2 = a, \lambda_3 = d$ e $a \neq d$.

Desta forma, obtemos o truncamento para este caso $X^1(x, y, z) = ax + by$ e $X^2(x, y, z) = cx + dy$ onde os coeficientes a, b, c, d dependem dos autovalores de $DX_0(0)$, por exemplo, se acontece o caso (a), isto é, temos um par de autovalores complexos conjugados de $DX_0(0)$ então $a = d \neq 0$ e $b = -c$.

O desdobramento nesse caso consiste em deslocarmos o ponto crítico que está em M . Desta forma, obtemos o truncamento finito para o campo Z_λ : $X_\lambda(x, y, z) = (ax + by, cx + dy, y + ez + e\lambda)$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (1, 0, k_3)$, onde $k_3 = \text{sgn}(Y.f(0))$. Note que $p_\lambda = (0, 0, -\lambda)$ é ponto crítico de X_λ . O campo deslizante é dado por: $F_{Z_\lambda}(x, y) = (ak_3x + (bk_3 - 1)y - e\lambda, ck_3x + dk_3y)$.

Estamos interessados em caracterizar a A, L-estabilidade do campo de Filippov $Z_0 \in \Omega_1(d)$, daí como nos casos anteriores, vamos considerar $Y.f(0) = 1$, pois caso contrário

teríamos imediatamente a L-não estabilidade de $Z_0 \in \Omega_1(d)$. As regiões em M são: $SlR = \{(x, y, 0); y + e\lambda < 0\}$ e $SwR \uparrow = \{(x, y, 0); y + e\lambda > 0\}$. Observe que $q_\lambda = (\frac{de\lambda}{ad-bc+c}, -\frac{ce\lambda}{ad-bc+c})$ é singularidade para o campo deslizando F_{Z_λ} . Como antes, consideremos somente o caso onde $\lambda = 0$. Temos

$$DX_0(0) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 1 & e \end{bmatrix}, \quad DF_Z(0) = \begin{bmatrix} a & b-1 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Da condição de que os autoespaços de $DF_Z(0)$ são transversais a $S_X = \{(x, y, 0); X_0.f(x, y, 0) = 0\} = \{(x, y, 0); y = 0\}$ segue que $c \neq 0$. Daremos condições para que F_Z seja A-estável na origem. Uma condição suficiente para isso é que os autovalores de DF_Z sejam negativos e distintos. Posteriormente estudemos qual o tipo de tangência quando o fluxo de F_Z intercepta a fronteira da SlR . Os autovalores de $DF_Z(0)$ são $\xi_\pm = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4c(b-1)}}{2}$, com respectivos autovetores dados por $\omega_\pm = (\theta_\pm, 1) = (\frac{a-d \pm g}{2c}, 1)$, onde $g = \sqrt{(a-d)^2 + 4c(b-1)}$. Queremos que $\xi_\pm < 0$. Assim, obtemos as condições:

Condições 3.3.1 1. $\sqrt{(a-d)^2 + 4c(b-1)} < |a+d|$, 2. $a+d < 0$, 3. $(a-d)^2 + 4c(b-1) > 0$.

Note que a região de deslize é dada por $SlR = \{(x, y, 0); y < 0\}$, o conjunto de tangência $S_X = \{(x, y, 0); y = z = 0\}$ e as dobras são dadas por $X_0^2.f(x, 0, 0) = cx$. Daí o tipo de dobra: visível ou invisível, depende do sinal de c . Os autovalores de $DX_0(0)$ são: $\lambda_1 = e$, $\lambda_2 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$. Apliquemos o teorema 3.3.2 ao campo X_0 , o qual é suave quando restrito a $M^+ = \{(x, y, z); z > 0\}$. Suponhamos que $\lambda_2 \neq \lambda_3$, isto é, $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, obtemos desta forma mais uma condição. Dividiremos a demonstração em dois casos:

(i) $(a-d)^2 + 4bc < 0$ (autovalores complexos conjugados);

(ii) $(a-d)^2 + 4bc > 0$ (autovalores reais distintos).

Queremos dar condições para que exista $t > 0$ tal que $\phi_{X_0}^t(x, y, 0) \in M$, onde $(x, y, 0) \in SwR \uparrow$. Consideremos inicialmente o caso (ii). Vamos impor condições para que o campo X_0 seja A-estável na origem. Logo, $\lambda_1 = e < 0$ e

$$\lambda_2 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc} < -(a+d) \Leftrightarrow bc < ad,$$

desde que $a+d < 0$. Claramente se $\lambda_2 < 0$ então $\lambda_3 < 0$. Sejam T^3, T^2 e T^1 os autoespaços associados aos autovalores e, λ_2 e λ_3 , respectivamente. Veja figura 3.17.

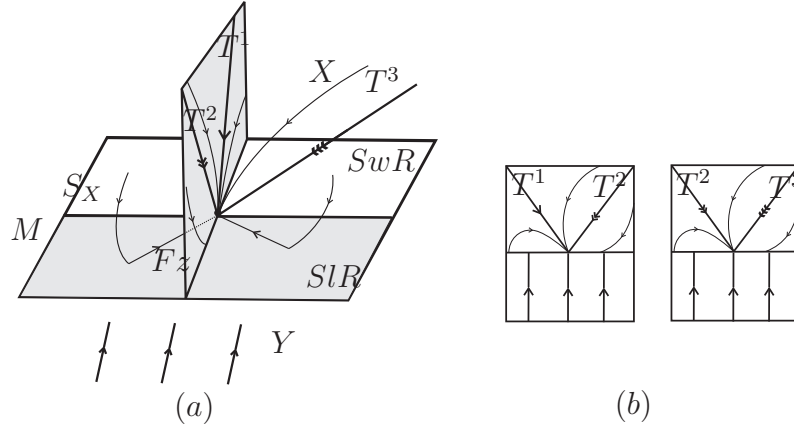


Figura 3.17: Em (a) temos a dinâmica do campo $Z_0 \in \Omega_1^A(d) \subset \Omega_1(d)$ e em (b) o detalhe das variedades bidimensionais invariantes.

Neste caso, para caracterizarmos a A,L-estabilidade do campo descontínuo Z_0 nos resta analisar a dinâmica de F_Z e o tipo de dobra (visível ou invisível) que temos na fronteira da SlR . A órbita que intercepta a SlR convergirá para a origem ou interceptará a fronteira da SlR . Temos duas possibilidades: tangência visível, daí a órbita seguirá para o fluxo do campo X_0 , o qual é A-estável na origem, ou tangência invisível e a órbita atingirá um ponto singular na fronteira da SlR em tempo finito, caracterizando assim a L-estabilidade. Recordemos que o tipo de tangência é dado por $X_0^2.f(x, 0, 0) = cx$ e os autovetores $\omega_{\pm}$ de $DF_Z(0)$ interceptam a SlR . Além disso, temos

$$(a-d) - g < (a-d) + g \Rightarrow \begin{cases} \frac{(a-d) - g}{2c} < \frac{(a-d) + g}{2c}, & c > 0 \\ \frac{(a-d) - g}{2c} > \frac{(a-d) + g}{2c}, & c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_- < \theta_+, & c > 0 \\ \theta_- > \theta_+, & c < 0, \end{cases}$$

lembrando que $g = \sqrt{(a-d)^2 + 4c(b-1)}$. As possíveis configurações para a dinâmica de F_Z são dadas na figura 3.18.

Daí concluímos que o tipo de dobra é sempre visível, isto é, o fluxo do campo deslizante escapa para $z > 0$, seguindo daí o fluxo do campo X_0 . Sabemos que o campo X_0 é A-estável na origem. Caracterizamos assim a A-estabilidade neste caso, observando as seguintes condições, juntamente com as anteriores:

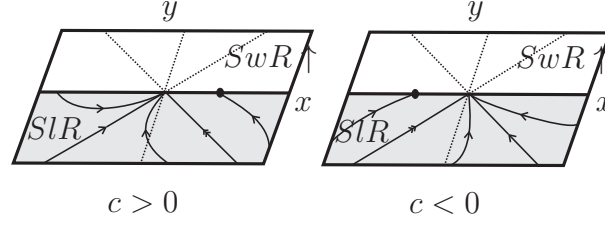


Figura 3.18: Possíveis dinâmicas de F_Z para $Z_0 \in \Omega_1^A(d)$.

Condições 3.3.2 $4.a + d < 0, 5.bc < ad, 6.e < 0, 7.(a - d)^2 + 4bc > 0$.

Consideremos agora o caso (i) ($(a-d)^2 + 4bc < 0$), onde os autovalores de $DX_0(0)$ são do tipo $\lambda_{2,3} = \eta_1 \pm \eta_2 i$ e $\lambda_1 = e$, com $\eta_1 = (a+d)/2 < 0$ e $\eta_2 = \frac{\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}}{2} > 0$. A dinâmica para esse caso é dada pela figura 3.19.² Note que dado $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in SwR \uparrow$ quando evoluímos pelo fluxo de X_0 este irá retornar a M na região de deslize SLR . Analogamente ao caso anterior, teremos a A-estabilidade nesse caso. Definimos o subconjunto aberto de $\Omega_1(d)$:

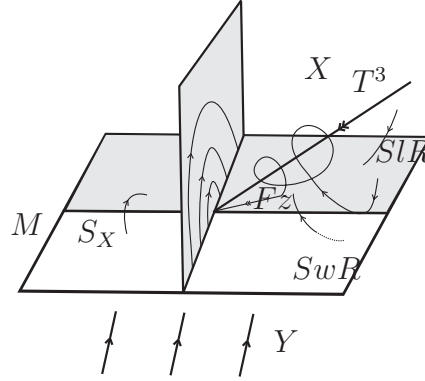


Figura 3.19: Dinâmica do campo Z_0 no caso (i).

$$\Omega_1^A(d) = \{Z_0 \in \Omega_1(d); \sqrt{(a-d)^2 + 4c(b-1)} < |a+d|,$$

$$a+d < 0, (a-d)^2 + 4c(b-1) > 0, a+d < 0, bc < ad, \quad (3.11)$$

$$e < 0, (a-d)^2 + 4bc \neq 0\}.$$

Para concluirmos a demonstração, nos falta verificar que dado $\varepsilon > 0$ o fluxo $\phi_{X_0}^t(p_0)$ não sai da bola com centro na origem e raio ε onde $p_0 \in V_\delta(0)$ para $Z_0 \in \Omega_1^A(d) \subset \Omega_1(d)$.

²Observe que trocamos a ordem das regiões de deslize e costura para tornar mais fácil a visualização da dinâmica.

Mas isso é consequência do fato de que a parte real dos autovalores de $DX_0(0)$ e $DF_Z(0)$ são negativos, isto é, a origem é um atrator local para X_0 e F_Z . Daí segue a A-estabilidade de $Z_0 \in \Omega_1^A(d)$ na origem. ■

Observação 3.3.3 *Como o campo Y_0 é transversal a M na origem, não é possível definir aplicação de primeiro retorno para esse caso, apesar de termos a A-estabilidade.*

Observação 3.3.4 *Consideremos o caso onde $\lambda \neq 0$. Sabemos que as singularidades de F_{Z_λ} e X_λ são $q_\lambda = (\frac{de\lambda}{c-bc+ad}, -\frac{ce\lambda}{c-bc+ad})$ e $p_\lambda = (0, 0, -\lambda)$, respectivamente. Temos $X_\lambda.f(x, y, 0) = y + e\lambda$ e $X_\lambda^2.f(x, -e\lambda, 0) = cx - de\lambda$. Logo o tipo de tangência (visível ou invisível) depende do sinal de $de\lambda$. O conjunto de tangência $S_X = \{(x, y, 0); y = -e\lambda\}$.*

3.3.7 Caso Dobra-dobra-sela-nó $Z_0 \in \Omega_1(e)$

Neste caso demonstremos inicialmente uma proposição que nos fornecerá um truncamento do campo descontínuo $Z_0 \in \Omega_1(e)$ e em seguida provaremos um lema que caracterizará a L-não estabilidade, contudo exibiremos um subconjunto de M que será uma bacia local de atração para este caso.

Proposição 3.3.2 *O truncamento de $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ de $Z_0 \in \Omega_1(e)$ é dado por $X_\lambda(x, y, z) = (a + a\lambda - a^2y, b + c\lambda - acy, x)$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (c + b\lambda + b^2x - 2aby, d + d\lambda + bdx - 2bcy, y)$, onde $a = X_0^2.f(0)$, $b = X_0.(Y_0.f)(0)$, $c = Y_0.(X_0.f)(0)$, $d = Y_0^2.f(0)$ são não nulos e $a.d = b.c$. Além disso, existe subconjunto $\Omega_1^A(e) \subset \Omega_1(e)$ definido em (3.12) tal que se $Z_0 \in \Omega_1^A(e)$ então o campo deslizante associado F_Z é A-estável na origem.*

Demonstração Neste caso a origem é ponto de dobra de X_0 e Y_0 , uma sela-nó para o campo deslizante F_Z , S_X é transversal a S_Y , os autoespaços de F_Z são transversais aos conjuntos de tangência e a variedade central de F_Z intercepta a região de deslize.

Explicitemos o truncamento do campo de Filippov Z_λ neste caso. Consideremos inicialmente os campos X_0 e Y_0 dados por: $X_0(x, y, z) = (a, b, x)$ e $Y_0(x, y, z) = (c, d, y)$ onde $a = X_0^2.f(0) \neq 0$, $b = X_0.(Y_0.f)(0)$, $c = Y_0.(X_0.f)(0)$ e $d = Y_0^2.f(0) \neq 0$. Como a origem é um ponto crítico do tipo sela-nó para o campo deslizante, teremos de considerar termos de ordem superior posteriormente. O campo deslizante é dado por $F_Z(x, y) = (ay - cx, by - dx)$. Por hipótese os autoespaços de F_Z são transversais a S_X, S_Y e a origem é sela-nó para F_Z então $a.d \neq 0$ e $a.d = b.c$, respectivamente. As regiões da variedade de descontinuidade são dadas por: $SlR = \{(x, y, 0); x < 0, y > 0\}$, $SwR = \{(x, y, 0); xy > 0\}$ e $EscR = \{(x, y, 0); x > 0, y < 0\}$.

Seja $Z_0 \in \Omega_1^A(e)$, o autovalor não nulo para o campo deslizando associado F_Z é $\eta = b - c = -1$, onde a segunda igualdade segue da hipótese $c = b + 1(Y_0.(X_0.f)(0) = X_0.(Y_0.f)(0) + 1)$. Assim temos uma variedade estável para o campo deslizando. Vamos explicitar a equação das variedades invariantes, as quais são da seguinte forma: $y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + t.o.s..$ Para efeito de cálculo não vamos considerar os termos de ordem superior, visto que nossa análise será local. Substituindo nas equações do campo deslizando, obtemos as expressões para a variedade central $W^c = \{(x, y); ay = cx\}$ e para a variedade estável $W^s = \{(x, y); ay = bx\}$. Além disso, queremos que W^s esteja na região de costura e que W^c esteja na região de deslize, o que implica: $c/a < 0$ (W^c na região de deslize), $b/a > 0$ (W^s na região de costura). Dessas condições concluímos que b e c têm sinais opostos e pelas hipóteses: $c = b + 1$ e $ad = bc$, concluímos que $b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4ad}}{2}$ com $a.d \in (-1/4, 0)$. Assim, obtemos as condições: 1. $b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4ad}}{2}$, 2. $a.d \in (-1/4, 0)$ com $a < 0, d > 0$, 3. $b \in (-1, 0)$, 4. $c \in (0, 1)$.

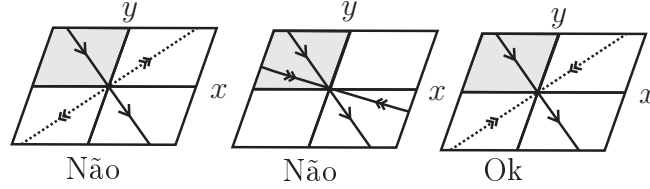


Figura 3.20: Dinâmica do campo deslizando para $Z_0 \in \Omega_1(e)$.

Definimos o subconjunto de $\Omega_1(e)$:

$$\begin{aligned} \Omega_1^A(e) &= \{Z_0 \in \Omega_1(e); X_0.(Y_0.f)(0) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4X_0^2.f(0)Y_0^2.f(0)}}{2}, \\ &X_0^2.f(0).Y_0^2.f(0) \in (-1/4, 0) \text{ com } X_0^2.f(0) < 0, \\ &Y_0^2.f(0) > 0, Y_0.(X_0.f)(0) = X_0.(Y_0.f)(0) + 1, \\ &X_0.(Y_0.f)(0) \in (-1, 0), Y_0.(X_0.f)(0) \in (0, 1)\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Neste caso, a origem é genericamente uma sela-nó para F_Z , mas seu desdobramento difere do usual na teoria clássica, pois os cantos da região de deslize persistem por pequenas perturbações de Z_0 . A singularidade não irá desaparecer como na teoria clássica. Desta forma seu desdobramento é topologicamente equivalente a: $F_\lambda(x, y) = (-x^2 + \lambda x, -y)$, onde os autoespaços coincidem com os eixos coordenados.

Nosso objetivo agora é explicitarmos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(v_i) = e_i$ para $i = 1, 2$, onde v_1 é o vetor diretor da variedade central e v_2 é o vetor

diretor da variedade estável e e_i são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$. Note que b e c têm sinais opostos, logo faz sentido em falarmos de tal aplicação.

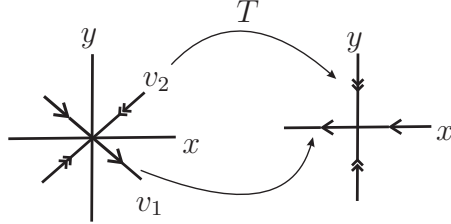


Figura 3.21: A transformação T .

Genericamente a transformação é dada por: $T(x, y) = (\lambda_1 x + \lambda_2 y, \lambda_3 x + \lambda_4 y)$ tal que $T(1, c/a) = (1, 0)$ e $T(1, b/a) = (0, 1)$. Mais explicitamente, temos a transformação T e sua inversa T^{-1} :

$$[T] = \begin{bmatrix} -b & a \\ c & a \end{bmatrix}, \quad [T^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c/a & b/a \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathbb{B} = \{(1, c/a), (1, b/a)\}$ e $\mathbb{C} = \{e_1, e_2\}$ as bases do $\mathbb{R}^2$, onde e_i denota a base canônica do $\mathbb{R}^2$. O nosso objetivo é encontrar a forma normal do campo deslizando na base $\mathbb{B}$. Sabemos que $(T^{-1} \circ [F]_{\mathbb{C}} \circ T)(x, y) = [F]_{\mathbb{B}}(x, y)$, onde $[F]_{\mathbb{B}}$ denota a expressão do campo deslizando na base $\mathbb{B}$. Assim,

$$\begin{aligned} [F]_{\mathbb{B}}(x, y) &= (-b^2 x^2 - a^2 y^2 + 2abxy - (c + b\lambda)x + a(1 + \lambda)y, \\ &\quad -bdx^2 - acy^2 + 2bcxy - d(1 + \lambda)x + (b + c\lambda)y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por outro lado sabemos da definição 1.2.4 de campo deslizando que este é obtido como combinação convexa dos campos X_λ e Y_λ , os quais são o desdobramento dos campos X_0 e Y_0 originais. Tendo em mente essa observação tomamos X_λ, Y_λ :

$$\begin{aligned} X_\lambda(x, y, z) &= (a + a\lambda - k_1 x - k_2 y, b + c\lambda - k_5 x - k_6 y, x), \\ Y_\lambda(x, y, z) &= (c + b\lambda - k_3 x - k_4 y, d + d\lambda - k_7 x - k_8 y, y), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde os coeficientes k'_i s, para $i = 1, \dots, 8$, serão obtidos em função dos coeficientes do campo Z_0 original. O campo deslizando obtido da combinação convexa dos campos X_λ e Y_λ acima é:

$$\begin{aligned}
F_{Z_\lambda}(x, y) &= (k_3x^2 - k_2y^2 + (k_4 - k_1)xy - (c + b\lambda)x + a(1 + \lambda)y, \\
&\quad k_7x^2 - k_6y^2 + (k_8 - k_5)xy - d(1 + \lambda)x + (b + c\lambda)y).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Igualando a expressão (3.13) do campo deslizante via conjugação linear T com a expressão (3.15) do campo deslizante obtido via combinação convexa de X_λ, Y_λ , obtemos as relações entre os coeficientes k'_i s e a, b, c, d do campo de Filippov original: $k_4 - k_1 = 2ab, k_2 = a^2, k_3 = -b^2, k_8 - k_5 = 2bc, k_6 = ac$ e $k_7 = -bd$. Observe que os coeficientes que introduzimos k_1 e k_5 na expressão dos campos X_λ e Y_λ não estão relacionados com os coeficientes a, b, c, d do campo Z_0 original. Desta forma, podemos atribuir $k_1 = k_5 = 0$ afim de simplificarmos o máximo a expressão final do campo Z_λ para este caso. Finalmente a expressão para os campos X_λ, Y_λ e F_{Z_λ} :

$$\begin{aligned}
X_\lambda(x, y, z) &= (a + a\lambda - a^2y, b + c\lambda - acy, x), \\
Y_\lambda(x, y, z) &= (c + b\lambda + b^2x - 2aby, d + d\lambda + bdx - 2bcy, y), \\
F_{Z_\lambda}(x, y) &= (-b^2x^2 - a^2y^2 + 2abxy - (c + b\lambda)x + a(1 + \lambda)y, \\
&\quad -bdx^2 - acy^2 + 2bcxy - d(1 + \lambda)x + (b + c\lambda)y).
\end{aligned}$$

■

Observação 3.3.5 *Observe que o campo F_{Z_λ} dado na proposição 3.3.2 é de fato o desdobramento de ordem superior do campo deslizante original $F(x, y) = F_{Z_0}(x, y) = (ay - cx, by - dx)$.*

Caracterizemos agora a L- não estabilidade do campo de Filippov $Z_0 \in \Omega_1^A(e) \subset \Omega_1(e)$ na origem e exibiremos um conjunto $\Gamma^A(e) \subset M$ que é uma bacia local de atração nesse caso.

Lema 3.3.8 *Existem conjuntos abertos $R, \Gamma^A(e) \subset M$ tais que a aplicação de primeiro retorno φ_{Z_0} está definida em R e $\Gamma^A(e)$ é uma bacia local de atração para $Z_0 \in \Omega_1^A(e)$.³ Além disso, se consideramos uma vizinhança U da origem então $Z_0 \in \Omega_1(e)$ é L-não estável na origem.*

³Os subconjuntos $R, \Gamma^A(e) \subset M$ e $\Omega_1^A(e) \subset \Omega_1(e)$ estão definidos em (3.17), (3.19) e (3.12), respectivamente.

Demonstração Consideremos o truncamento para $Z_0 \in \Omega_1^1(e)$ dado na proposição 3.3.2 e o subconjunto $\Omega_1^A(e)$ definido em (3.12). Consideremos somente os primeiros jatos dos campos X_0 e Y_0 e explicitemos a aplicação de primeiro retorno φ_{Z_0} para esse caso. Observe que o argumento acima é válido devido a continuidade da variação da aplicação de primeiro retorno com relação as condições iniciais. Consideremos $X_0(x, y, z) = (a, b, x)$ e $Y_0(x, y, z) = (c, d, y)$. Os fluxos associados a X_0 e Y_0 são:

$$\begin{aligned}\phi_{X_0}^t(x_0, y_0, z_0) &= (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + x_0t + a/2t^2), \\ \phi_{Y_0}^t(x_0, y_0, z_0) &= (x_0 + ct, y_0 + dt, z_0 + y_0t + 1/2dt^2).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Tomando $t_1(x_0, y_0) = \frac{-2x_0}{a}$ e $t_2(x_0, y_0) = \frac{4bx_0 - 2ay_0}{ad}$ a terceira componente dos fluxos de X_0 e Y_0 , respectivamente, são nulas. Lembremos que se $Z_0 \in \Omega_1^A(e)$ então $a = X_0^2.f(0) < 0$ e $d = Y_0^2.f(0) > 0$. A aplicação de primeiro retorno é dada por:

$$\varphi_{Z_0}(x, y) = \left(-x + \frac{4bcx - 2acy}{ad}, \frac{2bx}{a} - y \right) = \left(3x - \frac{2c}{d}y, \frac{2b}{a}x - y \right),$$

pois $ad = bc$. A aplicação φ_{Z_0} possui a curva $c = \{(x, y, 0); x = \frac{a}{b}y\}$ constituída por pontos fixos. Definimos a região de retorno (veja figura 3.23) para este caso:

$$R = \left\{ (x, y, 0); x > \frac{a}{2b}y, y > 0 \right\}.\tag{3.17}$$

Assim, se $(x_0, y_0, 0) \in R$ então $t_1(x_0, y_0) > 0, t_2(x_0, y_0) > 0$ e daí a aplicação φ_{Z_0} está bem definida. Verifiquemos que dado $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in R_1 = \{(x, y, 0); x < \frac{a}{2b}y, y > 0\}$ então $\phi_{X_0}^{t_1}(p_0) \in SlR$. De fato, $\phi_{X_0}^{t_1}(p_0) = (-x_0, y_0 - \frac{2b}{a}x_0) = (x_1, y_1) = p_1$, com $x_1 < 0$ e $y_1 > 0$. Logo, $p_1 \in SlR$.

Provemos agora que o campo $Z_0 \in \Omega_1(e)$ satisfaz a propriedade I. Para isso, considerando uma vizinhança arbitrária U da origem, nossa estratégia será exibir um iterado da aplicação de primeiro retorno, $\varphi_{Z_0}^n(p_0)$, que saia de $U \cap SwR$. O n -ésimo iterado da aplicação φ_{Z_0} é dado por:

$$\varphi_{Z_0}^n(x, y) = \left((2n+1)x - \frac{2an}{b}y, \frac{2bn}{a}x - (2n-1)y \right).\tag{3.18}$$

Observe que não existem pontos periódicos, diferentes daqueles na curva c . De fato, resolvendo o sistema $\varphi_{Z_0}^n(x, y) = (x, y)$ obtemos somente a curva c de pontos fixos. Definiremos agora os conjuntos $F = \{(x, y, 0); x > \frac{a}{b}y, y > 0\} \subset SwR \uparrow$ e $E = \{(x, y, 0); x > \frac{2a}{b}y, y > 0\} \subset F$, veja figura 3.22. A aplicação φ_{Z_0} satisfaz as seguintes propriedades quando restrita a esses conjuntos:

- (i) $\varphi_{Z_0}^n(p) \in F$, para todo $p \in F$;
- (ii) Consideremos as sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $\varphi_{Z_0}^n(x, y) = (x_n, y_n)$ para $(x, y) \in E$. Estas sequências são monótonas crescentes.

Denotemos por $r_1 = \{(x, y, 0); x = \frac{a}{2b}y\}$, $r_2 = \{(x, y, 0); x = \frac{a}{b}y\}$ e $r_3 = \{(x, y, 0); x = \frac{2a}{b}y\}$.

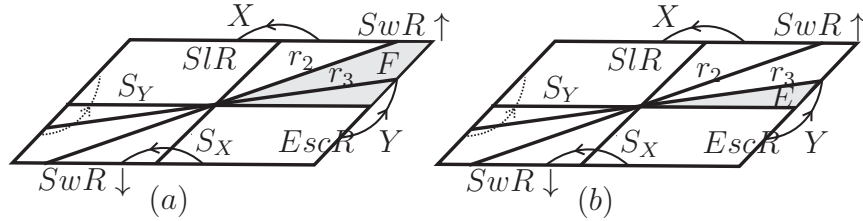


Figura 3.22: Em (a) temos o conjunto invariante F e em (b) o conjunto divergente E para $Z_0 \in \Omega_1(e)$.

A propriedade (i) nos diz que a aplicação de primeiro retorno φ_{Z_0} possui F como conjunto invariante. A L-não estabilidade de $Z_0 \in \Omega_1(e)$ segue como consequência das propriedades (i) e (ii), pois como as sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são monótonas crescentes e o conjunto F é invariante, então dado $p_0 \in E$ e U , vizinhança da origem, existirá algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{Z_0}^{n_0}(p_0)$ sai de $U \cap SwR$. Caracterizando assim a L-não estabilidade.

É claro que para os casos onde não podemos definir a aplicação de primeiro retorno, isto é, os casos onde temos tangência visível para o campo X_0 ou Y_0 segue diretamente do Teorema do Fluxo Tubular que $Z_0 \in \Omega_1(e)$ satisfaz a propriedade I. Assim, suponhamos $a = X_0^2.f(0) < 0$, $d = Y_0^2.f(0) > 0$. Por hipótese $ad = bc$ e a variedade central $W^c = \{(x, y); ay = cx\}$ intercepta a $SLR = \{(x, y, 0); x < 0, y > 0\}$, logo $a/c < 0$. Desta forma, concluímos que $b = X_0.(Y_0.f)(0) < 0$ e $c = Y_0.(X_0.f)(0) > 0$.

Provemos que φ_{Z_0} satisfaz as propriedades (i) e (ii). Iniciemos provando que o conjunto F é invariante por φ_{Z_0} . Temos $y_n = \frac{2bn}{a}x - (2n-1)y = 2n\frac{b}{a}(x - \frac{a}{b}y) + y > 0$, pois $(x, y) \in F$ e $a = X_0^2.f(0) < 0$, $b = X_0.(Y_0.f)(0) < 0$. Além disso, $x_n - \frac{a}{b}y_n = (2n+1)x - 2n\frac{a}{b}y - \frac{a}{b}(2n\frac{b}{a}x - (2n-1)y) = x - \frac{a}{b}y > 0$, pois $(x, y) \in F$. Assim provamos que F é invariante por φ_{Z_0} .

No item (ii), temos $x_{n+1} - x_n = [(2n+1)x - 2n\frac{a}{b}y] - [2nx - (2n-1)\frac{a}{b}y] = x - \frac{2a}{b}y > 0$ e $y_{n+1} - y_n = [\frac{2bn}{a}x - 2(n-1)y] - [2(n-1)\frac{b}{a}x - (2n-3)y] = \frac{2b}{a}(x - \frac{a}{b}y) > 0$, pois $\frac{b}{a} > 0$ e $(x, y) \in E \subset F$.

Concluímos assim que $Z_0 \in \Omega_1(e)$ satisfaz a propriedade I. Busquemos agora um subconjunto de M que é uma bacia local de atração para $Z_0 \in \Omega_1^A(e)$.

Vimos que $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in R_1 = \{(x, y, 0); x < \frac{a}{2b}y, y > 0\} \subset SwR \uparrow$ então $\phi_{X_0}^{t_1(x_0, y_0)}(p_0) \in SlR$. Analogamente, para $p_0 \in R_2 = \{(x, y, 0); x < \frac{2a}{b}y, y < 0\} \subset SwR \downarrow$ temos $\phi_{Y_0}^{t_2(x_0, y_0)}(p_0) \in SlR$. Basta substituir em (3.16) o valor de $t_2(x_0, y_0)$ que zera a componente $z(t)$ do fluxo de $\phi_{Y_0}^t$, lembrando que o ponto inicial agora é $p_0 \in SwR \downarrow$. Provamos na proposição 3.3.2 que se $Z_0 \in \Omega^A(e)$ então F_Z é A-estável na origem. Daí definimos uma bacia local de atração para $Z_0 \in \Omega_1^A(e)$:

$$\Gamma^A(e) = SlR \cup R_1 \cup R_2. \quad (3.19)$$

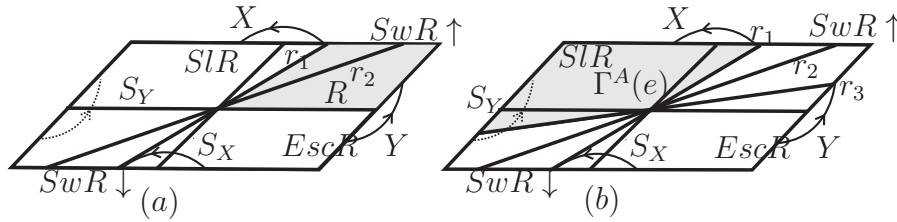


Figura 3.23: Em (a) temos a região de retorno R e em (b) uma bacia local de atração $\Gamma^A(e)$ para $Z_0 \in \Omega_1^A(e)$.

Observe que na demonstração usamos somente os primeiros jatos de X_0 e Y_0 e assim as retas r_1, r_2 e r_3 que são as fronteiras de R, F e E serão na verdade curvas c_1, c_2 e c_3 , respectivamente as quais serão tangentes as retas r_i . Por exemplo o cone F que possui um subconjunto E onde as sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são divergentes possui como fronteira as retas r_2 e o semi-eixo x positivo. Se considerássemos os termos de ordem superior teríamos $\varphi_{Z_0}(x, y) = L_{Z_0}(x, y) + \psi(x, y)$, onde L_{Z_0} representa a parte linear de φ_{Z_0} que consideramos anteriormente e ψ os termos de ordem superior, isto é, $\partial(\psi) \geq 2$, onde ∂ denota a função grau. A equação $x = \alpha(y) = \frac{a}{b}y$ define a reta $r_2 = \{(x, y, 0); x = \frac{a}{b}y = \alpha(y)\}$, onde a curva $x = \alpha(y)$ é solução da equação $[\pi_1 \circ (L_{Z_0} - Id)](x, y) = 0$, com Id, π_1 representando a aplicação identidade e a projeção na primeira componente, respectivamente. Denotemos por $f = \pi_1 \circ (\varphi_{Z_0} - Id)(x, y)$, note que $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 com $f(0, 0) = 0$. Apliquemos o Teorema da Função Implícita para provar que a curva solução $c_2(y)$ que fará parte da fronteira do setor F para φ_{Z_0} , será dada por $c_2(y) = \alpha(y) + t.o.s..$ De fato, calculemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\pi_1 \circ (\varphi_{Z_0} - Id))}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial x}(\pi_1 \circ (L_{Z_0} - Id + \psi))(0, 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\pi_1 \circ (2x - \frac{2c}{d}y + t.o.s., \frac{2b}{a}x - 2y + t.o.s.))(0, 0) = 2, \end{aligned}$$

daí pelo Teorema da Função Implícita, dado $I \times J \subset U$ vizinhança da origem existe aplicação $x = \xi(y)$ dada implicitamente pela equação $\pi_1 \circ (\varphi_{Z_0} - Id)(x, y) = 0$ para $(x, y) \in I \times J$. A curva c_2 é dada pela função $x = \xi(y)$. Além disso, segue também do Teorema da Função Implícita que

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(y) = - \frac{\frac{\partial(\pi_1 \circ (\varphi_{Z_0} - Id))}{\partial y}}{\frac{\partial(\pi_1 \circ (\varphi_{Z_0} - Id))}{\partial x}}(\xi(y), y). \quad (3.20)$$

Provemos agora que $\frac{\partial}{\partial y}[\xi(y) - \alpha(y)](0) = 0$. Daí teremos $\xi(y) = \alpha(y) + t.o.s.$ como queríamos. Se escrevermos $\xi(y) - \alpha(y) = \sum_{i=0}^n a_i y^i = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + t.o.s.$ é suficiente provar que $a_0 = a_1 = 0$. Observando a expressão para a derivada implícita dada em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi - \alpha)}{\partial y}(0, 0) &= \frac{\partial \xi}{\partial y}(0, 0) - \frac{\partial \alpha}{\partial y}(0, 0) \\ &= \left[- \frac{\frac{\partial(\pi_1 \circ (L_{Z_0} + \psi - Id))}{\partial y}}{\frac{\partial(\pi_1 \circ (L_{Z_0} + \psi - Id))}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial(\pi_1 \circ (L_{Z_0} - Id))}{\partial y}}{\frac{\partial(\pi_1 \circ (L_{Z_0} - Id))}{\partial x}} \right] (0, 0) = 0, \end{aligned}$$

pois ψ possui grau maior ou igual a dois. Logo, $a_1 = 0$, como $\xi(0) = \alpha(0) = 0$ segue diretamente que $a_0 = 0$. Para as demais curvas r_1 e r_3 o procedimento é análogo e será omitido. ■

3.3.8 Caso Dobra-dobra-nilpotente $Z_0 \in \Omega_1(f)$

O lema seguinte nos diz que a condição de existir retorno para o fluxo do campo $Z_0 \in \Omega_1(f)$ com a condição intrínseca de que o campo deslizante associado F_Z tenha um único autovalor são exclusivas, isto é, se $Z_0 \in \Omega_1(f)$ então não temos retorno para o fluxo de Z_0 . Caracterizando desta forma a L-não estabilidade.

Lema 3.3.9 *Se $Z_0 \in \Omega_1(f)$ então não têm retorno para o fluxo de Z_0 . Logo, Z_0 satisfaz a propriedade I.*

Demonstração Neste caso a origem é ponto de dobra para X_0, Y_0 e é ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante onde seus autovalores são iguais, a matriz jacobiana $DF_Z(0)$ não é diagonalizável e o autovetor intercepta a região de deslize. Considerando sistema de coordenadas local e observando que $S_X = X_0^3$ e $S_Y = Y_0^3$ são transversais

e a origem é ponto de dobra para X_0 e Y_0 , obtemos os seguintes truncamentos para os campos: $X_0(x, y, z) = (a, b, x - y)$ e $Y_0(x, y, z) = (c, d, y)$, onde $a - b \neq 0$ e $d \neq 0$.

O truncamento finito para o desdobramento do campo Z_0 é dada por $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ com $X_\lambda(x, y, z) = (a - \frac{\lambda}{4d}, b, x - y)$, $Y_\lambda(x, y, z) = (c, d, y)$ e o campo deslizante associado $F_{Z_\lambda}(x, y) = (-cx + (a + c - \frac{\lambda}{4d})y, -dx + (b + d)y)$. Consideremos somente o caso onde $\lambda = 0$. As regiões na variedade de descontinuidade para Z_0 são: $SlR = \{(x, y, 0); x - y < 0, y > 0\}$, $SwR = \{(x, y, 0); x - y > 0, y > 0\} \cup \{(x, y, 0); x - y < 0, y < 0\}$, $EscR = \{(x, y, 0); x - y > 0, y < 0\}$. O campo deslizante para este caso é dado por: $F_Z(x, y) = (-cx + (a + c)y, -dx + (b + d)y)$. Temos

$$DF_Z(0) = \begin{bmatrix} -c & a + c \\ -d & b + d \end{bmatrix},$$

tomando

$$(b - c + d)^2 = 4(ad - bc) \quad (3.21)$$

existe somente um autovalor do tipo $\frac{b-c+d}{2}$ e, além disso a matriz jacobiana é não diagonalizável. Explicitando as condições que caracterizam esse caso, de maneira intrínseca ao campo de Filippov original Z_0 , obtemos: $X_0^2 \cdot f(0) = a - b \neq 0$, $Y_0^2 \cdot f(0) = d \neq 0$, $(X_0 \cdot (Y_0 \cdot f)(0) - Y_0 \cdot (X_0 \cdot f)(0))^2 = 4(X_0^2 \cdot f(0) \cdot Y_0^2 \cdot f(0) - Y_0 \cdot (X_0 \cdot f)(0) \cdot X_0 \cdot (Y_0 \cdot f(0)))$. Aplicamos o teorema 3.3.2 ao campo deslizante F_Z que é suave quando restrito a SlR . Obtemos que se $b - c + d < 0$ então o campo deslizante F_Z é A-estável na origem. O autovetor associado a este autovalor é $v = (\frac{b+c+d}{2d}, 1)$. Queremos que $v \in SlR$, assim $\frac{b+c+d}{2d} - 1 < 0$ ou equivalentemente $\frac{b+c-d}{2d} < 0$. A dinâmica do campo deslizante é dada na figura 3.24.

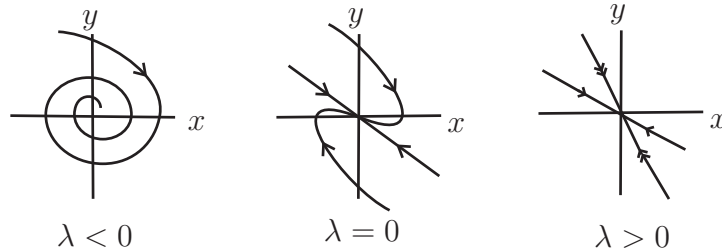


Figura 3.24: Desdobramento F_λ de F_Z associado a $Z_0 \in \Omega_1(f)$.

Os fluxos associados aos campos X_0 e Y_0 são dados por: $\phi_X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + (x_0 - y_0)t + \frac{1}{2}(a - b)t^2)$ e $\phi_Y^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + ct, y_0 + dt, z_0 + y_0t + d/2t^2)$. Uma condição necessária para que tenhamos retorno para $Z_0 \in \Omega_1(f)$ é que $X_0^2 \cdot f(0) = a - b < 0$ e $Y_0^2 \cdot f(0) = d > 0$. Além disso, definimos o subconjunto de $SwR \uparrow$: $R = \{(x, y, 0); 2bx_0 <$

$(a+b)y_0\}$. De fato, partindo de $p_0 \in R \subset SwR \uparrow$ e resolvendo em função de $t > 0$ as equações $\phi_{X_0}^{t_1}(p_0), \phi_{Y_0}^{t_2}(p_1) \in M$ onde $\phi_{X_0}^t(p_0) = p_1$, obtemos $t_1(x_0, y_0) = -\frac{2(x_0-y_0)}{a-b}$ e $t_2(x_0, y_0) = \frac{4bx_0-2(a+b)y_0}{(a-b)d}$. Se $a-b < 0, d > 0$ então $t_1(x_0, y_0), t_2(x_0, y_0) > 0$.

Contudo, observando as condições $X_0^2.f(0) = a-b < 0, Y_0^2.f(0) = d > 0$ e resolvendo a equação (3.21) em a , obtemos $a = \frac{b^2+(c-d)^2+2b(c+d)}{4d}$. Logo $a < b$ se, e somente se $b^2 + (c-d)^2 + 2b(c-d) = (b + (c-d))^2 < 0$. O que é um absurdo. Assim, não é possível definirmos retorno para esse caso. Para concluirmos a prova, basta aplicarmos o Teorema do Fluxo Tubular para $p_0 \in (U \cap SwR)$, onde U é uma vizinhança da origem. Desta forma, concluímos que se $Z_0 \in \Omega_1(f)$ então Z_0 satisfaz a propriedade I. ■

Antes de concluirmos a prova dos teoremas 3.3.1 e C, provemos que cada um dos conjuntos $\Omega_1^L(a.2), \Omega_1^A(d) \subset \Omega_1$ são, de fato, não vazios. Exibiremos para cada conjunto um ponto, caracterizando assim a sua não vacuidade.

Proposição 3.3.3 *Os conjuntos $\Omega_1^L(a.2), \Omega_1^A(d) \subset \Omega_1$ são não vazios.*

Demonstração Fornecemos para cada conjunto $\Omega_1^{A,L}(i)$ um campo Z_0 , o qual estará caracterizado pelos coeficientes de seu truncamento, isto é, daremos os valores dos coeficientes que correspondem ao campo Z_0 . Para $Z_0 \in \Omega_1^L(a.2) \subset \Omega_1(a.2)$ considere $(a, b) = (-1, -2)$, isto é, temos o campo descontínuo $X_0(x, y, z) = (-1, -2, x^2 - y^2)$ e $Y_0(x, y, z) = (1, 0, 1)$. Para $Z_0 \in \Omega_1^A(d) \subset \Omega_1(d)$ considere $(a, b, c, d, e) = (-1/4, 2, 1/16, -1, -1)$, ou seja, $X_0(x, y, z) = (-1/4x + 2y, 1/16x - y, y - z)$ e $Y_0(x, y, z) = (1, 0, 1)$. ■

Demonstração dos Teoremas 3.3.1 e C

A demonstração dos teoremas segue diretamente dos lemas 3.3.1, ..., 3.3.9 e das proposições 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3. ■

CAPÍTULO 4

A-ESTABILIDADE EM SISTEMAS DOBRA-DOBRA DEGENERADOS

No capítulo anterior, seguindo o programa de Thom-Smale, caracterizamos a A, L-estabilidade nos conjuntos de campos descontínuos no $\mathbb{R}^3$ de codimensão zero e um. Contudo dentre os casos estudados um em especial merece um destaque maior: o caso dobra-dobra. Como salientamos na introdução, atualmente têm-se estudado este caso com especial atenção. Com o intuito de darmos alguma informação sobre a dinâmica deste tipo de singularidade e como muitos dos fenômenos interessantes, provenientes de estudos de modelos reais ocorrem em codimensão alta, faremos nesse capítulo um estudo sobre a A, L-estabilidade dos campos de Filippov do tipo dobra-dobra degeneradas de codimensão zero, um e dois em uma vizinhança de uma singularidade típica (origem).

Utilizando a notação do capítulo anterior, definimos os conjuntos $\Omega_0(\delta) = \Omega_0(d)$ e $\Omega_1(\delta) = \Omega_1(b)$ das dobras de codimensão zero e um, respectivamente. Consideremos agora o conjunto $\Omega_2(\delta)$ dos campos descontínuos $Z_{0,0}$ cujo desdobramento é $Z_{\alpha,\beta} = (X_{\alpha,\beta}, Y_{\alpha,\beta})$ onde $X_{0,0}$ e $Y_{0,0}$ são campos do tipo dobra-dobra onde o contato entre os conjuntos de tangência S_X e S_Y é de ordem três.

Seguindo a mesma abordagem estabelecida no trabalho [T3], e na observação 1.2.4 concluímos que o campo $Z_{0,0} \in \Omega_2(\delta) \subset \Omega$ é de codimensão dois com relação ao conjunto Ω dos campos descontínuos em $\mathbb{R}^3$ com a topologia C^r . Desta forma, temos a seguinte lista:

- 1- **Dobra-dobra regular** Seja $\Omega_0(\delta)$ o conjunto de campos de Filippov: $\{Z = (X, Y);$

X, Y são dobras, o contato entre os conjuntos de tangência S_X e S_Y é transversal, os autovalores de $DF_Z(0)$ são transversais a S_X, S_Y e 0 é ponto crítico hiperbólico para F_Z (codimensão zero);

2- **Dobra-dobra 1-degenerada** Seja $\Omega_1(\delta)$ o conjunto de campos de Filippov: $\{Z_0 = (X_0, Y_0); X_0, Y_0 \text{ são do tipo dobra, o contato entre os conjuntos de tangência } S_X \text{ e } S_Y \text{ é quadrático. Para alguma representação } f \text{ de } M \text{ temos que } X_0^2 f(0) \neq Y_0^2 f(0). \text{ Verifica-se que essas condições implicam que a origem é ponto de sela-nó para } F_Z \text{ e a variedade central é tangente (com contato de ordem dois) a } S_X \text{ e } S_Y \text{ na origem}\}$ (codimensão um). Veja [T3], página 449 para maiores detalhes;

3- **Dobra-dobra 2-degenerada** Seja $\Omega_2(\delta)$ o conjunto de campos de Filippov: $\{Z_{0,0} = (X_{0,0}, Y_{0,0}); X_{0,0}, Y_{0,0} \text{ são do tipo dobra, o contato entre } S_X \text{ e } S_Y \text{ é cúbico. Considerando uma representação } f \text{ de } M \text{ temos que } X_{0,0}^2 f(0) \neq Y_{0,0}^2 f(0) \text{ e } Y_{0,0}^2 \neq 0. \text{ Verifica-se que sob essas condições a origem é uma sela topológica (veja definição (3.1.6)) ou um nó para o campo deslizante } F_Z. \text{ Além disso, suponhamos que as variedades invariantes de } F_Z \text{ são transversais na origem a } S_X, S_Y\}$ (codimensão dois).

Denotemos $\Omega(\delta) = \Omega_0(\delta) \cup \Omega_1(\delta) \cup \Omega_2(\delta)$.

Observação 4.0.6 *Ratificando a notação estabelecida nos capítulos anteriores, consideraremos a variedade de descontinuidade M dada implicitamente por $M = f^{-1}(0)$, onde $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = z$.*

Nossos objetivos são: 1— investigar a possibilidade de definirmos aplicação de primeiro retorno, 2— determinar a região de retorno, 3— detectar a existência de pontos fixos para a aplicação de primeiro retorno, isto é, órbitas periódicas para o campo Z , 4— caracterizarmos a A, L-estabilidade do campo de Filippov $Z \in \Omega(\delta)$ na origem e 5— verificar a coexistência desses fenômenos.

4.1 A-Estabilidade em Sistemas do tipo Dobra-dobra

Neste capítulo, assim como nos anteriores, utilizaremos a notação: propriedade A, L e I, definidas em 3.1.7. Considerando o conjunto $\Omega(\delta)$ temos os resultados:

Teorema 4.1.1 *Seja $Z \in \Omega(\delta)$, os truncamentos polinomiais são dadas por:*

- (i) *Para $Z \in \Omega_0(\delta)$ temos $X(x, y, z) = (k_1, a, x) + t.o.s.$ e $Y(x, y, z) = (b, k_2, y) + t.o.s.$, com $sgn(k_1) = sgn(X^2.f(0))$, $sgn(k_2) = sgn(Y^2.f(0))$, $a = X.(Y.f)(0)$ e $b = Y.(X.f)(0)$;*

- (ii) Para $Z_0 \in \Omega_1(\delta)$ temos $X_\lambda(x, y, z) = (k_1, a, \varepsilon_1(x - (y^2 + \lambda))) + t.o.s.$ e $Y_\lambda(x, y, z) = (k_2, b, \varepsilon_2(x + y^2)) + t.o.s.$, com $|k_1| = |X_0^2 \cdot f(0)|$, $|k_2| = |Y_0^2 \cdot f(0)|$, $a = X_0^2(0)$, $b = Y_0^2(0)$, $\varepsilon_i = \pm 1$;
- (iii) Para $Z_{0,0} \in \Omega_2(\delta)$ temos $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (k_1, c, x - (y^3 + \alpha y + \beta)) + t.o.s.$ e $Y_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (k_2, d, x) + t.o.s.$, com $\text{sgn}(k_1) = \text{sgn}(X_{0,0}^2 \cdot f(0))$, $\text{sgn}(k_2) = \text{sgn}(Y_{0,0}^2 \cdot f(0))$, $c = X_{0,0}^2(0)$ e $d = Y_{0,0}^2(0) \neq 0$.

Lembrando que $Z_0 = (X_0, Y_0)$ com $X_0 = (X_0^1, X_0^2, X_0^3)$ e $Y_0 = (Y_0^1, Y_0^2, Y_0^3)$. Os conjuntos $\Omega_i^{A,L} \subset \Omega(\delta)$ citados no teorema a seguir serão explicitados na demonstração deste resultado.

Teorema 4.1.2 *Consideremos os campos descontínuos dados no teorema 4.1.1.*

- (i) *Existe conjunto $\Omega_0^A(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$, tal que se $Z \in \Omega_0^A(\delta)$ então Z satisfaz a propriedade A;*
- (ii) *Se $Z_0 \in \Omega_1^A(\delta) \subset \Omega_1(\delta)$ então podemos definir aplicação de primeiro retorno com região de retorno dada por $R \subset M$. Se $Z_0 \in \Omega_1(\delta)$ então satisfaz a propriedade I;*
- (iii) *Existe conjunto $\Omega_2^L(\delta) \subset \Omega_2(\delta)$, definido em (4.5), tal que se $Z_{0,0} \in \Omega_2^L(\delta)$ então $Z_{0,0}$ satisfaz a propriedade L. Além disso, $\varphi_{Z_{0,0}}$ está definida em toda $SwR \uparrow$.*

Faremos a demonstração dos teoremas 4.1.1 e 4.1.2 simultaneamente.

Demonstração Caso Dobra-dobra regular $Z \in \Omega_0(\delta)$: Este caso já foi estudado no Teorema B, tomamos $\Omega_0^A(\delta) = \Omega_0^A(d)$ o qual está definido em (3.3).

Caso Dobra-dobra 1-degenerada $Z_0 \in \Omega_1(\delta)$: Este caso já foi estudado no Teorema C. Basta tomarmos R e $\Omega_1^A(\delta) = \Omega_1^1(b)$, definidos em (3.7), (3.6), respectivamente.

Caso Dobra-dobra 2-degenerada $Z_{0,0} \in \Omega_2(\delta)$: Os conjuntos de tangência S_X e S_Y têm contato cúbico, desta forma, tomando sistema de coordenadas local, obtemos os desdobramentos dos conjuntos de tangência: $S_X = \{(x, y, 0); X \cdot f(x, y, 0) = 0\} = \{(x, y, 0); x - (y^3 + \alpha y + \beta) = 0\}$ e $S_Y = \{(x, y, 0); Y \cdot f(x, y, 0) = 0\} = \{(x, y, 0); x = 0\}$. Desta forma, o truncamento para este caso é dado por: $X_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (k_1, c, x - (y^3 + \alpha y + \beta))$ e $Y_{\alpha,\beta}(x, y, z) = (k_2, d, x)$. As regiões na variedade de descontinuidade são: $SlR = \{(x, y, 0); x < y^3 + \alpha y + \beta, x > 0\}$, $SwR \downarrow = \{(x, y, 0); x < y^3 + \alpha y + \beta, x < 0\}$, $SwR \uparrow = \{(x, y, 0); x > y^3 + \alpha y + \beta, x > 0\}$ e $EscR = \{(x, y, 0); x > y^3 + \alpha y + \beta, x < 0\}$.

Consideremos somente o caso onde o contato entre os conjuntos de tangência é de ordem três, isto é, o caso $\alpha = \beta = 0$. Integrando os campos $X_{0,0}$ e $Y_{0,0}$ obtemos as seguintes expressões para os fluxos:

$$\begin{aligned}\phi_{X_{0,0}}^t(x_0, y_0, z_0) &= (x_0 + k_1 t, y_0 + ct, z_0 + (x_0 - y_0^3)t + \\ &\quad \frac{1}{2}(k_1 - 3y_0^2 c)t^2 - y_0 c^2 t^3 - \frac{1}{4}c^3 t^4),\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\phi_{Y_{0,0}}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_2 t, y_0 + dt, z_0 + x_0 t + \frac{1}{2}k_2 t^2).$$

Uma condição necessária para que possamos definir aplicação de primeiro retorno é: $X_{0,0}^2 \cdot f(0) < 0, Y_{0,0}^2 \cdot f(0) > 0$, desta forma tomamos $k_1 < 0, k_2 > 0$. Queremos que $t_1(x_0, y_0) = \frac{2(-x_0 + y_0^3)}{k_1 - 3cy^2} > 0, t_2(x_0, y_0) = \frac{2k_1 x_0 + 6cx_0 y_0^2 - 4k_1 y_0^3}{k_1 k_2 - 3ck_2 y_0^2} > 0$ tais que $\phi_{X_{0,0}}^{t_1}(x_0, y_0, z_0) = (x_1, y_1, 0)$ e $\phi_{Y_{0,0}}^{t_2}(x_1, y_1, 0) = (x_2, y_2, 0)$. Para isso definimos a região de retorno onde a aplicação $\varphi_{Z_{0,0}}$ está definida:

$$R = \{(x, y, 0); x > 0, x - y^3 > 0\} = SwR \uparrow. \quad (4.2)$$

A dinâmica do campo de Filippov neste caso é dada na figura 4.1.

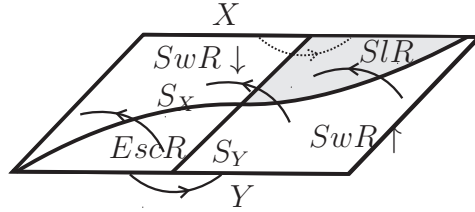


Figura 4.1: Dinâmica de $Z_{0,0} \in \Omega_2^L(\delta) \subset \Omega_2(\delta)$.

Consideremos na expressão (4.1) dos fluxos de $X_{0,0}$ e $Y_{0,0}$ somente os jatos até ordem dois. Obtemos a aplicação de primeiro retorno: $\varphi_{Z_{0,0}}(x, y) = \phi_{Y_{0,0}}^{t_2(x_0, y_0)} \circ \phi_{X_{0,0}}^{t_1(x_0, y_0)}(x, y) = (\frac{k_1 x + 3cxy^2 - 2k_1 y^3}{k_1 - 3cy^2}, \frac{2c(k_1 - k_2)x + k_1 k_2 y + 6c^2 xy^2 - c(4k_1 + k_2)y^3}{k_2(k_1 - 3cy^2)})$, a qual possui em uma vizinhança U de $(0, 0, 0)$ somente a origem como ponto fixo. Considerando a expansão em série de potências do denominador $\frac{1}{k_1 - 3cy^2}$, obtemos: $\frac{1}{k_1 - 3cy^2} = \frac{1}{k_1} + \frac{3cy^2}{k_1^2} + \frac{9c^2 y^4}{k_1^3} + O(y^5)$. Desta forma, podemos reescrever a expressão da aplicação de primeiro retorno: $\varphi_{Z_{0,0}}(x, y) = (x + \frac{6c}{k_1} xy^2 - 2y^3, (\frac{2d}{k_2} - \frac{2c}{k_1})x + y + (\frac{12cd}{k_1 k_2} - \frac{6c^2}{k_1^2})xy^2 + (\frac{2c}{k_1} - \frac{4d}{k_2})y^3) + O(x^5, y^5)$. Como nosso estudo é local, em uma vizinhança da origem, consideremos somente os termos até ordem 1 na expressão $\varphi_{Z_{0,0}}$, definimos a aplicação $f(x, y) = (x, (\frac{2d}{k_2} - \frac{2c}{k_1})x + y)$. A estratégia será estudar a dinâmica da parte liner de $\varphi_{Z_{0,0}}$. O n -ésimo iterado é dado por: $f^n(x, y) = (x, 2n(\frac{d}{k_2} - \frac{c}{k_1})x + y)$. Se $[\frac{d}{k_2} - \frac{c}{k_1}] > 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x, y) \in SLR = \{(x, y, 0); x > 0, x - y^3 < 0\}$. Observe que se $Z_{0,0} \in \Omega_2^L(\delta)$ então a desigualdade $[\frac{d}{k_2} - \frac{c}{k_1}] > 0$ é satisfeita, onde neste caso $k_1 = X_{0,0}^2 \cdot f(0), k_2 = Y_{0,0}^2 \cdot f(0), c = X_{0,0}^2(0)$ e $d = Y_{0,0}^2(0)$. Concluimos que dado $p_0 \in R$ existe $n_0 = n_0(p_0) \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{Z_{0,0}}^{n_0}(p_0) \in SLR$.

Analisemos a seguir a dinâmica do campo deslizando F_Z . Estudemos a possibilidade de F_Z ser A -estável na origem. O campo deslizando é dado pelo sistema de edo's:

$$\begin{cases} \dot{x} = (k_1 - k_2)x + k_2y^3 = \frac{1}{k_2 - k_1}(-x + \alpha_1y^3) \\ \dot{y} = (c - d)x + dy^3 = \frac{1}{k_2 - k_1}(\alpha_2x + \alpha_3y^3), \end{cases} \quad (4.3)$$

o qual é topologicamente equivalente, por um reescalonamento do tempo, ao campo $\tilde{F}_Z(x, y) = (-x + \alpha_1y^3, \alpha_2x + \alpha_3y^3)$, onde $\alpha_1 = k_2(k_2 - k_1)$, $\alpha_2 = (c - d)(k_2 - k_1)$ e $\alpha_3 = d(k_2 - k_1)$. Consideremos agora a mudança de coordenadas $u = x$ e $v = \alpha_2x + y$. Neste novo sistema de coordenadas, obtemos a expressão para o campo:

$$\tilde{F}_Z : \begin{cases} \dot{u} = -u + \alpha_1(v - \alpha_2u)^3 = -u + p(u, v) \\ \dot{v} = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3)(v - \alpha_2u)^3 = q(u, v), \end{cases} \quad (4.4)$$

onde p e q são polinômios de grau maior que 2. Resolvendo $\dot{u} = 0$ no sistema (4.4), concluímos que $u = \phi(v) = \left(\frac{384\alpha_1^3\alpha_2^8 - 192\alpha_1^2\alpha_2^5(\alpha_1^3\alpha_2^9)^{1/3} - 192\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^3\alpha_2^9)^{2/3}}{384\alpha_1^3\alpha_2^9}\right)v + \left(\frac{-48\sqrt{3}\alpha_1^3\alpha_2^7(\alpha_1^3\alpha_2^9)^{1/6}}{384\alpha_1^3\alpha_2^9} + \frac{48\sqrt{3}\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^3\alpha_2^9)^{5/6}}{384\alpha_1^3\alpha_2^9}\right)v^2 + O(v^3)$. Substituindo essa equação em $q(u, v)$, obtemos $\psi(v) = q(\phi(v), v) = \left[\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3}{8}\right)(5 + 3\alpha_1^3)\right]v^3 + \left[\frac{(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3)\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2^9}}{512\alpha_1^6\alpha_2^{21}}(48\sqrt{3}\alpha_1^4\alpha_2^{14}(\alpha_1^3\alpha_2^9)^{1/3} + 48\sqrt{3}\alpha_1^3\alpha_2^{11}(\alpha_1^3\alpha_2^9)^{2/3} - 96\sqrt{3}\alpha_1\alpha_2^5(\alpha_1^3\alpha_2^9)^{4/3})\right]v^4 + O(v^5)$. Pelo teorema 1 na página 149 de [Pk] a origem será: 1-um nó atrator se $[\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3] < 0$ (pois $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$, logo $\frac{(5+3\alpha_1^3)}{8} > 0$ lembrando que $\alpha_1 = k_2(k_2 - k_1)$, $\alpha_2 = (c - d)(k_2 - k_1)$ e $\alpha_3 = d(k_2 - k_1)$), 2- uma sela topológica se $[\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3] > 0$, veja definição 3.1.6. Como $Z_{0,0} \in \Omega_2^L(\delta)$ então $[\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3] = [(k_2 - k_1)(k_2(c - d)(k_2 - k_1) + d)] < 0$, logo $(0, 0, 0)$ é um nó atrator para o campo deslizando. Observe que na fronteira da SLR temos somente dobras invisíveis, assim caso o fluxo de F_Z , para $t \geq 0$, intercepte a fronteira da SLR teremos a L-estabilidade, caso contrário teremos a A-estabilidade. Contudo não temos como decidir sobre a A, L-estabilidade, pois isso depende da posição das variedades invariantes e, como caracterizamos a dinâmica de F_Z via o teorema 1 de [Pk] não é possível decidir a respeito. No entanto, teremos pelo menos a L-estabilidade nesse caso. Definimos o conjunto

$$\Omega_2^L(\delta) = \{Z_{0,0} \in \Omega_2(\delta); X_{0,0}^2 \cdot f(0) < 0, Y_{0,0}^2 \cdot f(0) > 0,$$

$$Y_{0,0}^2(0)X_{0,0}^2 \cdot f(0) - X_{0,0}^2(0)Y_{0,0}^2 \cdot f(0) < 0, \quad (4.5)$$

$$Y_{0,0}^2 \cdot f(0)[X_{0,0}^2(0) - Y_{0,0}^2(0)][Y_{0,0}^2 \cdot f(0) - X_{0,0}^2 \cdot f(0)] + Y_{0,0}^2 < 0\}.$$

Nos resta ainda verificar dado $\varepsilon > 0$ os fluxos $\phi_{X_0}^t(p_0), \phi_{Y_0}^t(p_1)$ não saem da bola com centro na origem e raio ε onde $p_0, p_1 \in V_\delta(0)$ para $Z_{0,0} \in \Omega_2^L(\delta) \subset \Omega_2(\delta)$. Contudo o procedimento é análogo aos casos $\Omega_1(d)$ e $\Omega_1(e)$, já estudados anteriormente. Assim, se $Z_{0,0} \in \Omega_2^L(\delta) \subset \Omega_2(\delta)$ então $Z_{0,0}$ é L-estável na origem. Concluimos a demonstração dos teoremas 4.1.1 e 4.1.2. ■

CAPÍTULO 5

PROPRIEDADES DA T-SINGULARIDADE

Nos últimos anos temos notado um crescente interesse no estudo da chamada T-singularidade. Como comentamos nos capítulos anteriores, este interesse deve-se em grande parte ao trabalho [T1] publicada por Teixeira em 1990 onde prova a A-estabilidade do campo de Filippov na origem onde os autovalores da aplicação de primeiro retorno φ_{Z_0} são do tipo elíptico ($\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$ com $|\lambda_{\pm}| \neq 1$). Ainda neste trabalho é apresentado um subconjunto aberto G^r de $\Omega_0(\delta)$ com a propriedade de que se $Z_0 \in G^r$ então Z_0 não é estruturalmente estável. No trabalho [J-C] é classificada a dinâmica em uma vizinhança da T-singularidade, um dos objetivos é explicitar o diagrama de bifurcação para essa singularidade. Em [C-B-F-J] discute-se a ocorrência da T-singularidade em modelos concretos da teoria do controle, introduzindo condições para o estudo da existência dessa singularidade.

Consideremos $Z = (X, Y) \in \Omega_0(\delta)$, pelo teorema 4.1.1 obtemos o truncamento polinomial para $Z = (X, Y)$ é dado por: $X(x, y, z) = (k_1, a, x)$ e $Y(x, y, z) = (b, k_2, y)$, com $\text{sgn}(k_1) = \text{sgn}(X^2.f(0))$, $\text{sgn}(k_2) = \text{sgn}(Y^2.f(0))$, $a = X.(Y.f)(0)$ e $b = Y.(X.f)(0)$.

Até aqui estudamos a A, L-estabilidade dos campos de Filippov em $(\mathbb{R}^3, 0)$ e, em particular a singularidade dobra-dobra em codimensões superiores. Considerando somente a parte semi-linear do campo de Filippov do tipo dobra-dobra elíptico, investigaremos agora a existência de invariantes topológicos como conexões dos conjuntos de tangência S_X e S_Y (separatrizes) e existência de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas convergindo para uma singularidade típica para $Z \in \Omega_0(\delta)$. Contudo tomando perturbações provaremos que esses invariantes não são robustos, isto é, pequenas mudanças do campo

de Filippov $Z \in \Omega_0(\delta)$ as destroem.

Provaremos que não existe órbitas pseudo-periódicas para o campo descontínuo Z do tipo dobra-dobra regular. Dado o campo descontínuo $Z \in \Omega_0(\delta)$ estudaremos quando este é reversível. Posteriormente usaremos o conceito de reversibilidade para respondermos a questão sobre a existência de órbitas periódicas de período k arbitrário (k -ciclos) para o campo de Filippov $Z \in \Omega_0(\delta)$.

5.1 T-singularidade onde φ_Z é do Tipo Sela

Na tentativa de darmos uma contribuição para o entendimento da dinâmica do sistema de Filippov dobra-dobra caso elíptico e em um certo sentido complementando o resultado em [T1], onde tínhamos os autovalores de φ_Z são não reais, analisaremos o caso onde os autovalores da aplicação de primeiro retorno são do tipo sela. Considere $Z = (X, Y) \in \Omega_0(\delta)$, obtemos o resultado:

Proposição 5.1.1 *Existem subconjuntos $\Omega_0^A(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$ e $\mathcal{O} \subset M$ tal que a aplicação de primeiro retorno φ_Z (com base em M) está bem definida e possui autovalores reais do tipo $\beta, 1/\beta$. Além disso, se $Z \in \Omega_0^A(\delta)$ então Z é A -estável na origem.*

Demonstração Vide proposição 3.2.3 e os lemas 3.2.2, 3.2.3 e tome $\mathcal{O} = R$ na proposição 3.2.3. ■

5.2 Existência de Separatrizes para T-singularidade

Consideremos nessa seção somente a parte semi-linear do campo $Z = (X, Y) \in \Omega_0(\delta)$. Provemos a existência de um subconjunto magro $\Omega_0^C(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$ onde temos a conexão dos conjuntos de tangência. Além disso, essa conexão não é estruturalmente estável.

Observe que a trajetória $\gamma(t)$ do campo de Filippov Z que conecta os conjuntos S_X e S_Y é de fato uma separatriz para Z . Pois caso exista um homeomorfismo h que conjuga os campos descontínuos Z e $\tilde{Z}$, este homeomorfismo irá conjugar necessariamente $S_X, S_{\tilde{X}}, S_Y$ e $S_{\tilde{Y}}$. Desta forma, a trajetória $\gamma(t)$ que conecta os conjuntos de tangência S_X, S_Y terá que ser levada por h em uma trajetória $\tilde{\gamma}(t)$ que conecta os conjuntos de tangência $S_{\tilde{X}}, S_{\tilde{Y}}$ de $\tilde{Z}$. Obtemos o resultado:

Proposição 5.2.1 *Considere $Z = (X, Y) \in \Omega_0^C(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$, definido em (5.1). Se $Z \in \Omega_0^C(\delta)$ então existe conexão entre os conjuntos de tangência S_X e S_Y . Além disso, esta conexão não é estruturalmente estável.*

Demonstração Considerando a parte semi-linear dada pelo truncamento polinomial obtido na proposição 3.2.3: $X(x, y, z) = (X^1, X^2, X^3) = (k_1, a, x)$ e $Y(x, y, z) = (Y^1, Y^2, Y^3) = (b, k_2, y)$. Os conjuntos de tangência são dados por: $S_X = \{(x, y, z); f(x, y, z) = (X.f)(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z); x = z = 0\}$ e $S_Y = \{(x, y, z); f(x, y, z) = (Y.f)(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z); y = z = 0\}$. Tomemos uma seção $\Sigma_0 = \{(0, y, 0); y \in I\} \subset S_X$, onde $I \subset \mathbb{R}^-$ é um intervalo aberto. Estamos interessados na existência da conexão de pontos de tangência, isto é, dado $q_0 \in S_Y$ explicitemos $p_0 \in S_X$ tal que $\varphi_Z(p_0) = q_0$, para algum $Z \in \Omega_0(\delta)$.

Consideremos os campos que possuam dobra-dobra caso elíptico, isto é, tangência invisível. Assim, $(X^2.f)(0) = k_1 < 0$ e $(Y^2.f)(0) = k_2 > 0$. Obtemos o fluxo para o campo de Filippov: $\phi_{X_0}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_1 t, y_0 + at, z_0 + x_0 t + k_1/2 t^2)$ e $\phi_{Y_0}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + bt, y_0 + k_2 t, z_0 + y_0 t + k_2/2 t^2)$.

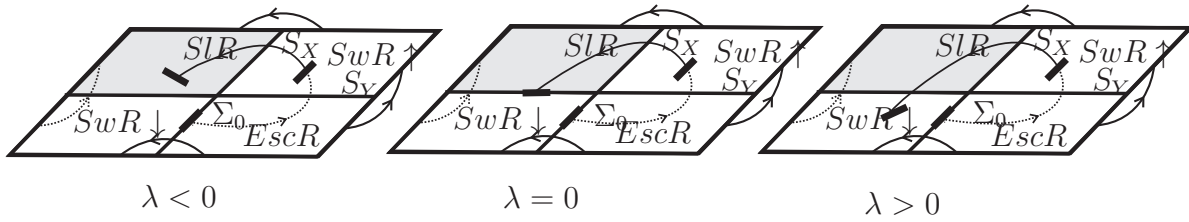


Figura 5.1: Possíveis dinâmicas para φ_Z com $Z \in \Omega_0^C(\delta)$.

Definimos o conjunto

$$\Omega_0^C(\delta) = \{(X, Y) \in \Omega_0(\delta); (Y.X.f)(0) = \frac{(X^2.f)(Y^2.f)(0)}{4(X.Y.f)(0)}, \quad (5.1)$$

$$(X^2.f)(0) < 0, (Y^2.f)(0) > 0, (X.Y.f)(0) < 0\}.$$

Denotemos por $\lambda = (-1 + \frac{4ab}{k_1 k_2}) = \left(-1 + \frac{4(Y.X.f)(0)(X.Y.f)(0)}{(X^2.f)(Y^2.f)(0)}\right)$. Note que $\Omega_0^C(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$ é um conjunto magro com relação a topologia C^r . De fato, isso segue da condição $\lambda = 0$.

Dados $Z \in \Omega_0^C(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$ e $q_0 = (x, 0, 0) \in S_Y$ queremos encontrar $p_0 = (0, y, 0) \in \Sigma_0$ tal que $\varphi_Z(p_0) = \phi_{X_0}^{t_2} \circ \phi_{Y_0}^{t_1}(p_0) = q_0$. Colocando $\phi_{Y_0}^{t_1}(p_0) = (x_1, y_1, 0) \in M$ e $\phi_{X_0}^{t_2}(x_1, y_1, 0) \in M$ obtemos $t_1 = \frac{-2y}{k_2}, t_2 = \frac{4by}{k_1 k_2}$, respectivamente. Observe que $p_1 = (x_1, y_1, 0) \in SwR \uparrow$. Tomando $k_1 < 0, k_2 > 0, b > 0$ e $p_0 \in \Sigma_0$ então $t_1, t_2 > 0$ e daí φ_Z está bem definida. A aplicação de primeiro retorno restrita a Σ_0 é dada por:

$$\varphi_Z(p_0) = \left(\frac{2b}{k_2}y, \left(-1 + \frac{4ab}{k_1 k_2}\right)y, 0\right) = \left(\frac{2b}{k_2}y, \lambda y, 0\right). \quad (5.2)$$

Desta forma, só teremos conexão dos conjuntos de tangência para $Z \in \Omega_0^C(\delta)$, isto é,

se $\lambda = 0$. Tomando $Z \in \Omega_0^C(\delta)$, $p_0 \in \Sigma_0$ obtemos $\varphi_Z(p_0) = (\frac{2by}{k_2}, \lambda y, 0) = (\frac{k_1}{2a}y, 0, 0)$. Logo, se $y = y(x) = \frac{2a}{k_1}x$ então $\varphi_Z(0, y, 0) = (x, 0, 0)$, isto é, existe conexão entre os conjuntos de tangência S_Y e S_X .

Observe que $\frac{2b}{k_2}y < 0$ para todo $y \in \Sigma_0$. Se considerarmos $\lambda \neq 0$ podemos analisar o tipo de contato entre $\varphi_Z(\Sigma_0)$ e S_Y , veja figura 5.1. Da expressão (5.2) vimos que existe conexão somente se $\lambda = 0$, e fazendo λ se aproximar de 0 a imagem $\varphi_Z(\Sigma_0)$ se aproxima do conjunto de tangência S_Y paralelamente. Desta forma, caracterizamos a não estabilidade estrutural do conjunto de campos que possui conexão entre S_X e S_Y , pois a intersecção entre $\varphi_Z(\Sigma_0)$ e S_Y não é transversal. ■

Como consequência da proposição 5.2.1 obtemos

Corolário 5.2.1 *Existe conjunto $\Omega_0^D(\delta)$ aberto e denso de $\Omega_0(\delta)$ tal que $Z \in \Omega_0^D(\delta)$ então Z não possui conexão entre os conjuntos de tangência S_X, S_Y .*

Demonstração Vimos na proposição 5.2.1 que existe conexão entre os conjuntos de tangência somente para o conjunto magro $\Omega_0^C(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$. Daí segue o corolário. ■

Estudaremos na próxima seção a possibilidade de existir órbitas pseudo periódicas para o campo de Filippov Z do tipo dobra-dobra elíptico. Veja a definição (3.1.2) para relembrar este conceito.

5.3 Órbita Pseudo Periódica

Investiguemos a possibilidade de termos uma trajetória de Z fechada, composta de segmentos de órbita de X e Y , com a orientação não preservada, isto é, órbita pseudo periódica. Uma condição necessária para a existência de tal órbita é $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$ onde $\varphi_1(x, y) = (\phi_{Y_0}^{t_2} \circ \phi_{X_0}^{t_1})(x, y)$ e $\varphi_2(x, y) = (\phi_{X_0}^{t_4} \circ \phi_{Y_0}^{t_3})(x, y, 0)$, com $t_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, 4$. Veja figura 5.3. Nessa seção provaremos que existe um subconjunto dos campos de Filippov do tipo dobra-dobra elíptico que possui uma família de órbitas periódicas não robustas. Esses resultados são resumidos na

Proposição 5.3.1 *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega_0(\delta)$.*

- (a) *Não existe órbita pseudo periódica para Z .*
- (b) *Existe subconjunto $\Omega_0^P(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$ e uma reta r passando pela origem, definidos em (5.5), (5.3), respectivamente, tal que se $p_0 \in r \subset (SwR \uparrow \cup SwR \downarrow)$ e $Z \in \Omega_0^P(\delta)$*

então p_0 é ponto fixo para φ_1 ou p_0 é ponto fixo para φ_2 . Além disso, esses pontos fixos não são genéricos.

Demonstração Como na seção anterior, consideremos o truncamento polinomial para este caso obtido na proposição 3.2.3: $X(x, y, z) = (X^1, X^2, X^3) = (k_1, a, x)$ e $Y(x, y, z) = (Y^1, Y^2, Y^3) = (b, k_2, y)$. As regiões na variedade de descontinuidade são: $SlR = \{(x, y, 0); x < 0, y > 0\}$, $SwR = \{(x, y, 0); x \cdot y > 0\}$ e $EscR = \{(x, y, 0); x > 0, y < 0\}$. Integrando o sistema obtemos os fluxos: $\phi_{X_0}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_1 t, y_0 + at, z_0 + x_0 t + k_1/2 t^2)$ e $\phi_{Y_0}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + bt, y_0 + k_2 t, z_0 + y_0 t + k_2/2 t^2)$. Desta forma obtemos as expressões para $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$:

$$\varphi_1(x, y) = \phi_Y^{t_2} \circ \phi_X^{t_1}(x_0, y_0, z_0) = \left(-x - \frac{2b(k_1 y - 2ax)}{k_1 k_2}, -y + \frac{2ax}{k_1}\right),$$

$$\varphi_2(x, y) = \phi_X^{t_4} \circ \phi_Y^{t_3}(x_0, y_0, z_0) = \left(-x + \frac{2b}{k_2} y, -\frac{2a}{k_1} x + \left(\frac{4ab}{k_1 k_2} - 1\right)y\right).$$

Para que tenhamos órbita pseudo periódica antes de mais nada temos que ter retorno para o campo de Filippov Z , isto é, o campo tem que ser do tipo dobra-dobra elíptico: $X^2.f(0) = k_1 < 0$, $Y^2.f(0) = k_2 > 0$ e $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$. Resolvendo $\varphi_1 = \varphi_2$ obtemos as condições: (i) $(X.(Y.f))(0)(Y.(X.f))(0) = (X^2.f)(0)(Y^2.f)(0)$ e (ii) $x = \frac{X^2.f(0)}{(X.(Y.f))(0)}y$. Definimos a reta

$$r = \left\{ (x, y); x = \frac{X^2.f(0)}{(X.(Y.f))(0)}y \right\}. \quad (5.3)$$

Note que o ponto inicial $p_0 \in EscR$, para que possamos iterá-lo pelos campos X e Y simultaneamente. Logo, x_0 e y_0 possuem sinais opostos. Assim, da condição (ii) obtemos $(X.(Y.f))(0) > 0$, pois $X^2.f(0) < 0$. Com essas informações e observando agora a condição (i), concluímos que $(Y.(X.f))(0) < 0$.

Explicitemos agora quais condições devemos impor sobre o campo de Filippov Z e $p_0 \in M$ para que $t_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$. Sabemos que $t_1(x_0, y_0) = -\frac{2x_0}{k_1}$, $t_2(x_0, y_0) = -\frac{2}{k_2}(-\frac{2a}{k_1}x_0 + y_0)$, $t_3(x_0, y_0) = -\frac{2}{k_2}y_0$ e $t_4(x_0, y_0) = -\frac{2}{k_1}(x_0 - \frac{2b}{k_2}y_0)$. Observando essas restrições, obtemos a região $R \subset EscR$, vide figura 5.2 onde consideramos os valores iniciais p_0 :

$$R = \{(x, y, 0) \in EscR; \frac{2b}{k_2}y < x < \frac{k_1 k_2}{2a}y\}. \quad (5.4)$$

A região R com relação as condições impostas anteriormente será não vazia desde que $k_2 > 4$. De fato, para garantirmos a não vacuidade de R temos que

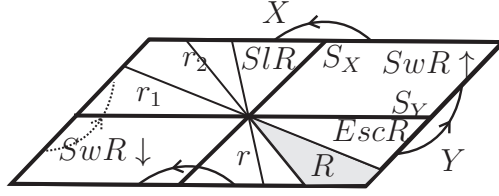


Figura 5.2: A reta r e a região R em destaque representa a região que satisfaz as condições para que $t_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$.

$$\frac{k_1 k_2}{2a} < \frac{2b}{k_2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} k_1 k_2^2 < 4ab$$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} k_1 k_2^2 < 4k_1 k_2 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} k_2 > 4,$$

na implicação (1) observemos que $k_2, a > 0$, na (2) usamos $ab = k_1 k_2$ e na (3) $k_1 < 0, k_2 > 0$. Contudo a reta r , oriunda da condição (ii), não intercepta a região R . Basta observar que $\frac{2b}{k_2} < \frac{k_1}{a}$, isto é, $2k_1 k_2 < k_1 k_2$. Onde usamos que $ab = k_1 k_2$ (condição (i)), $k_2, a > 0$ e $k_1 < 0$. Provamos desta forma que não existem órbitas pseudo periódicas para $Z \in \Omega_0(\delta)$.

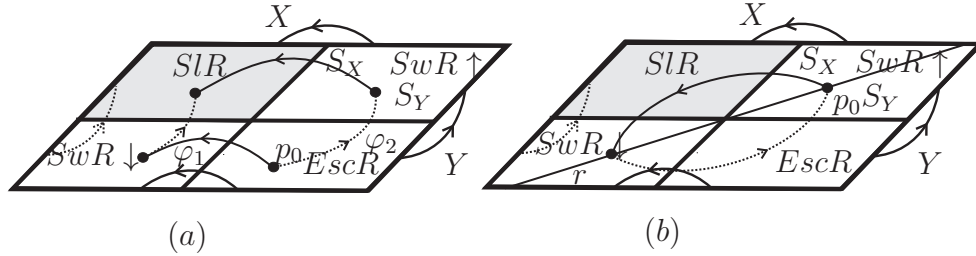


Figura 5.3: Em (a) temos a representação de uma órbita pseudo periódica. Em (b) temos a família de órbitas periódicas para $Z \in \Omega_0^P(\delta) \subset \Omega_0(\delta)$.

Mas observando as condições (i), (ii) para que $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$ e tomando $a < 0, k_1 < 0$ e $k_2 > 0$ então a reta $r \subset (SwR \uparrow \cup SwR \downarrow)$ e $t_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$. Veja figura 5.3. Considere o conjunto dos campos de Filippov:

$$\begin{aligned} \Omega_0^P(\delta) &= \{Z \in \Omega_0(\delta); X^2.f(0) < 0, Y^2.f(0) > 0, (X.(Y.f))(0) < 0, \\ &\quad (X.(Y.f))(0)(Y.(X.f))(0) = (X^2.f)(0)(Y^2.f)(0)\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Provemos que: se $p_0 \in SwR \uparrow$ e $Z \in \Omega_0^P(\delta)$ ($p_0 \in SwR \downarrow$ e $Z \in \Omega_0^P(\delta)$) então $\varphi_1(p_0) = p_0$ ($\varphi_2(p_0) = p_0$), respectivamente. Em outras palavras, sobre a reta r temos uma família de órbitas periódicas para $Z \in \Omega_0^P(\delta)$.

De fato, basta observarmos que se $Z \in \Omega_0^P(\delta)$, $p_0 \in r$ então Z satisfaz as condições (i), (ii) e $t_i \geq 0$, para $i = 1 \dots, 4$, isto é, $\varphi_1(p_0) = p_0$ ($p_0 \in r \cap SwR \uparrow$) ou $\varphi_2(p_0) = p_0$ ($p_0 \in r \cap SwR \downarrow$). Além disso, para $Z \in \Omega_0^P(\delta)$ temos $r \subset (SwR \uparrow \cup SwR \downarrow)$. Observe que se $p_0 \in (r \cap SwR \downarrow)$ então $\varphi_1(p_0) = \phi_{Y_0}^{t_2} \circ \phi_{X_0}^{t_1}(p_0) = -p_0$ e $t_1(x_0, y_0) = 0$.

Contudo essa família de órbitas periódicas não é robusta, pois a condição (i) não é genérica, definindo como na proposição 5.2.1 um conjunto magro. ■

Na próxima seção discutiremos a possibilidade de termos órbitas periódicas de períodos k arbitrariamente grandes, os k -ciclos. Com intuito de nos auxiliar nessa direção, introduziremos o conceito de reversibilidade para campos descontínuos.

5.4 Reversibilidade e k-ciclos para Campos do Tipo Dobra-dobra

Nesta seção vamos explorar algumas propriedades envolvendo a reversibilidade de sistemas do tipo dobra-dobra. Com essas propriedades de simetria investigamos acerca da existência de k -ciclos, isto é, órbitas periódicas do campo Z de período k . Consideremos $Z_0 \in \Omega_0(\delta)$.

Definição 5.4.1 Dizemos que um difeomorfismo $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ de classe C^r onde $(r > 1)$ é uma **involução** se $\xi \circ \xi = id$, ou seja, se a inversa de ξ é ela mesma. Denotaremos por $Fix(\xi)$ o conjunto $\{p \in \mathcal{V}; \xi(p) = p\}$ e $\mathcal{V}$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

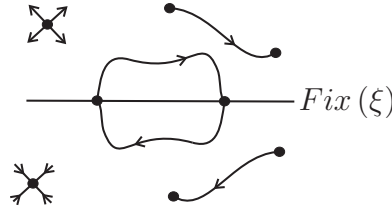
Para campos descontínuos temos o seguinte conceito de reversibilidade:

Definição 5.4.2 Dizemos que o campo descontínuo $Z = (X, Y)$ em $\mathbb{R}^n$ é **ξ -reversível** se existe uma involução $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \xi \circ X(p) = -Y(\xi(p)); \\ (ii) \quad & Fix \ \xi \subset M. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Lembremos que a variedade de descontinuidade M é dada implicitamente pela aplicação $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $f(x, y, z) = z$. Temos a seguinte proposição:

Proposição 5.4.1 Seja $Z = (X, Y) \in \Omega_0(\delta)$. Se $X.Y.f(0) = -Y.X.f(0)$, $X^2.f(0) = -Y^2.f(0)$ então o campo descontínuo Z e a aplicação de primeiro retorno associada φ_Z

Figura 5.4: Dinâmica de um campo ξ -reversível.

são ξ -reversíveis, onde $\xi(x, y, z) = (y, x, -z)$. Além disso, a origem é um ponto crítico hiperbólico do tipo sela, do tipo elíptico se $|X.Y.f(0)| > |X^2.f(0)|$, $|X.Y.f(0)| < |X^2.f(0)|$, respectivamente. Se $|X.Y.f(0)| = |X^2.f(0)|$ a origem será um ponto crítico não hiperbólico.

Demonstração De fato, como $X.f(0) = Y.f(0) = 0$ e $X^2.f(0)Y^2.f(0) \neq 0$, S_X e S_Y são transversais, tomando sistemas de coordenadas local obtemos o truncamento finito para Z_0 : $X = (k_1, a, x)$ e $Y(x, y, z) = (b, k_2, y)$. Resolvendo a equação $\xi \circ X = -Y \circ \xi$ com relação aos coeficientes dos campos, obtemos $a = -b$ e $k_1 = -k_2$, ou $X.Y.f(0) = -Y.X.f(0)$ e $X^2.f(0) = -Y^2.f(0)$. Como antes, estamos interessados em definir aplicação de primeiro retorno, logo $X^2.f(0) < 0$ e $Y^2.f(0) > 0$, o que é coerente com a condição anterior $X^2.f(0) = -Y^2.f(0)$. As regiões na variedade de descontinuidade são dadas por: $SlR = \{(x, y, 0); x < 0, y > 0\}$, $SwR = \{(x, y, 0); x > 0, y > 0 \text{ ou } x < 0, y < 0\}$, $EscR = \{(x, y, 0); x > 0, y < 0\}$. Integrando os campos X, Y obtemos a expressão para os fluxos: $\phi_{X_0}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_1 t, y_0 + at, z_0 + (x_0 t + \frac{1}{2} k_1 t^2))$ e $\phi_{Y_0}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 - at, y_0 - k_1 t, z_0 + y_0 t - \frac{1}{2} k_1 t^2)$.

Escolhendo $t_1(x_0, y_0) = -\frac{2x_0}{k_1}$ e $t_2(x_0, y_0) = \frac{-4ax_0 + 2k_1 y_0}{k_1^2}$ as terceiras componentes dos fluxos associados a X e a Y se anulam. Tomando $x_0 > 0$, $-4ax_0 + 2k_1 y_0 > 0$ segue que $t_1(x_0, y_0) > 0$ e $t_2(x_0, y_0) > 0$. Obtemos a expressão para a aplicação de primeiro retorno:

$$\varphi_Z(x, y) = \phi_{Y_0}^{t_2} \circ \phi_{X_0}^{t_1}(x, y) = \left(\left(\frac{4a^2 - k_1^2}{k_1^2} \right) x - \frac{2a}{k_1} y, \frac{2a}{k_1} x - y \right),$$

cujos autovalores são dados por $\lambda_{\pm} = -1 + \frac{2(a^2 \pm \sqrt{a^2(a-k_1)(a+k_1)})}{k_1^2}$. Note que os autovalores são hiperbólicos, pois

$$\lambda_{\pm} = 1 \Leftrightarrow -k_1^2 + 2(a^2 \pm \sqrt{a^2(a-k_1)(a+k_1)}) = k_1^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - k_1^2 = a^2 \Leftrightarrow k_1 = 0.$$

O que é um absurdo pois $X^2.f(0) = k_1 \neq 0$. Analogamente provamos que não podemos ter $\lambda_{\pm} = -1$. Além disso, a origem será um ponto crítico do tipo sela (elíptico) de φ_Z se $|a| > |k_1|$ ($|a| < |k_1|$), respectivamente. Se $|a| = |k_1|$ a origem será um ponto crítico não hiperbólico.

A inversa de φ_Z é dada por: $\varphi_Z^{-1}(x, y) = (-x + \frac{2a}{k_1}y, -\frac{2a}{k_1}x + \frac{-k_1^2 + 4a^2}{k_1^2}y)$. Temos $\xi \circ \varphi_Z(x, y, 0) = (\frac{2a}{k_1}x - y, \frac{-k_1^2 + 4a^2}{k_1^2}x - \frac{2a}{k_1}y)$ o que coincide com a expressão $\varphi^{-1} \circ \xi(x, y, 0)$. Donde segue que φ_Z é ξ -reversível neste caso. ■

Definimos o subconjunto $\Omega_0^R(\delta)$ de $\Omega_0(\delta)$:

$$\begin{aligned} \Omega_0^R(\delta) = \{ & (X, Y) \in \Omega_0(\delta); X.Y.f(0) = -Y.X.f(0), \\ & X^2.f(0) = -Y^2.f(0) \}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

como o conjunto dos campos do tipo dobra-dobra, onde o contato dos conjuntos de tangência é transversal e, além disso o campo $Z_0 \in \Omega_0^R(\delta)$ é ξ -reversível.

Uma das propriedades de reversibilidade é que se a órbita de um sistema dinâmico ξ -reversível intercepta, em pontos distintos, duas vezes o conjunto $Fix(\xi)$ temos uma órbita periódica, veja figura 5.4. Para estudarmos a existência de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas, k -periódicas para $Z \in \Omega_0^R(\delta)$ a estratégia será encontrar pontos fixos para a aplicação de primeiro retorno associada φ_Z ou para o k -ésimo iterado φ_Z^k , respectivamente. Sabemos que Z e φ_Z são ambos ξ -reversíveis.

Proposição 5.4.2 *Dados $Z_0 \in \Omega_0^R(\delta)$, definido em (5.7) e $\mathcal{C} \subset M$ onde $\mathcal{C} = \{(x, \alpha x); x \in \mathbb{R}\}, \alpha \in \mathbb{R}$.*

- (i) *Se $X^2.f(0) \neq X.Y.f(0)$ então $\varphi_{Z_0}^k(p_0) \neq p_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*
- (ii) *Se $X^2.f(0) = X.Y.f(0)$ então $\varphi_{Z_0}(p_0) = p_0$ para $p_0 \in r_1 = \{(x, y); x = y\}$ com p_0 ponto fixo não hiperbólico. Além disso, se $p_0 \in [\mathcal{C} - r_1]$ então $\varphi_{Z_0}^k(p_0) \neq p_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Em outras palavras, a proposição anterior nos diz que ao longo da reta r_1 temos uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas para o campo de Filippov $Z_0 \in \Omega_0^R(\delta)$, desde que $X^2.f(0) = X.Y.f(0)$. Além disso, considerando o conjunto $\mathcal{C}$ de todas as retas passando pela origem, Z_0 não possui k -ciclos com condição inicial $p_0 \in [\mathcal{C} - r_1]$.

Demonstração Seja $Z_0 \in \Omega_0^R(\delta)$, partimos de $p_0 = (x_0, y_0, 0) \in M$ e iteramos pela aplicação φ_Z . Inicialmente explicitemos os 1-ciclos, isto é, $p_0 \in M$ tal que $\varphi_Z(p_0) = p_0$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{-k_1^2+4a^2}{k_1^2}x - \frac{2a}{k_1}y = x \\ \frac{2a}{k_1}x - y = y, \end{cases} \quad (5.8)$$

obtemos $a = \pm k_1$. Logo, $x = \pm y$ e os 1-ciclos estão sobre as retas $\{(x, y); x = \pm y\}$. Contudo a reta $\{(x, y); x = -y\}$ está contida na $SlR \cup EscR$ e nesta região sabemos que não é possível definir aplicação de primeiro retorno. Assim os 1-ciclos estão ao longo da reta $r_1 = \{(x, y); x = y\} = Fix(\xi)$. Nos restringimos agora aos pontos $p_0 \in \mathcal{C}$. A expressão para o n-ésimo iterado de φ_Z restrita a $\mathcal{C}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \psi^n(x, \alpha x) &= \varphi_Z^n(x, \alpha x) \\ &= \left(\left[\frac{-k_1^2+4a^2}{k_1^2} - \frac{2a\alpha}{k_1} \right]^n x, \left[\frac{-k_1^2+4a^2}{k_1^2} - \frac{2a\alpha}{k_1} \right]^{n-1} \left[\frac{2a}{k_1} - \alpha \right] x \right). \end{aligned}$$

Colocando $\psi^n(x, \alpha x) = (x, \alpha x)$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \left[\frac{-k_1^2+4a^2}{k_1^2} - \frac{2a\alpha}{k_1} \right]^n = 1 \\ \left[\frac{-k_1^2+4a^2}{k_1^2} - \frac{2a\alpha}{k_1} \right]^{n-1} \left[\frac{2a}{k_1} - \alpha \right] = \alpha. \end{cases} \quad (5.9)$$

Dividindo uma equação pela outra, obtemos $k_1 = \frac{2a\alpha}{1+\alpha^2}$. Substituindo esse valor de k_1 na primeira equação, segue que $(\frac{1}{\alpha^2})^n = 1$, ou seja, $\alpha = \pm 1$. Assim, $k_1 = \pm a$ como antes. Logo, para $Z \in \Omega_0^R(\delta)$ existe somente 1-ciclos e estes estão ao longo da reta r_1 . Se $k_1 \neq \pm a$ então os sistemas (5.8) e (5.9) não possuem solução, daí não temos ponto fixo para φ_Z . Além disso, para $k_1 = -a$ vimos que a reta de pontos fixos para φ_Z é $\{(x, y, 0); x = -y\} \subset SlR \cup EscR$ o que é um absurdo, pois nessa região a aplicação φ_Z não está definida. Portanto, φ_Z possui somente a reta r_1 de pontos fixos. ■

5.4.1 Perturbações do campo Z_0 R-reversível

A proposição 5.4.2 nos diz que ao longo da reta r_1 existe uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas para Z_0 . Consideremos agora perturbações do campo reversível original do tipo

- 1- $Z_1 = Z_0 + H_1(x, y, z)$ de tal forma que Z_1 seja ainda ξ -reversível;
- 2- $Z_2 = Z_0 + H_2(x, y, z)$, onde $H_2(x, y, z)$ é polinomial e o campo Z_2 é não reversível com relação a involução ξ .

Consideremos $Z_1 = (X_1, Y_1)$ com $X_1(x, y, z) = (k_1 + h_1(x, y, z), a + h_2(x, y, z), x)$ e $Y_1(x, y, z) = (-a - h_2(x, y, z), -k_1 - h_1(x, y, z), y)$. Verifiquemos que $\xi \circ X_1 = -Y_1 \circ \xi$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \xi \circ X_1(x, y, z) &= \xi(k_1 + h_1(x, y, z), a + h_2(x, y, z), x) \\
 &= (a + h_2(x, y, z), k_1 + h_1(x, y, z), -x), \\
 -Y_1 \circ \xi(x, y, z) &= -Y_1(y, x, -z) = -(-a - h_2(x, y, z), -k_1 - h_1(x, y, z), x) \\
 &= (a + h_2(x, y, z), k_1 + h_1(x, y, z), -x).
 \end{aligned}$$

Podemos considerar a perturbação dada por $h_1(x, y, z) = sx + dy + ez$ e $h_2(x, y, z) = fx + gy + hz$. Inicialmente tomamos $h_1(x, y, z) = 0$ e $h_2(x, y, z) = hz$. Com relação a perturbação polinomial, tomamos $Z_2 = (X_2, Y_2)$ onde $X_2(x, y, z) = (k_1, a + fx, x)$ e $Y_2(x, y, z) = (-a, -k_1 + ex, nx + y)$. Considerando essas perturbações, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 5.4.3 *O campo Z_1 possui 6 órbitas periódicas, Γ_i com $i = 1, \dots, 8$ as quais são hiperbólicas desde que $X^2.f(0) \neq \pm \varepsilon X.Y.f(0)$ onde $\varepsilon = 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}$. O campo Z_2 possui 4 órbitas periódicas Λ_i com $i = 1, \dots, 4$.*

Demonstração Integrando o campo $Z_1 = (X_1, Y_1)$ onde $X_1(x, y, z) = (k_1, a + hz, x)$ e $Y_1(x, y, z) = (-a + hz, -k_1, y)$, obtemos os fluxos $\phi_{X_1}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + k_1 t, 1/6 h k_1 t^3 + h/2 t^2 x_0 + at + h z_0 t + y_0, k_1/2 t^2 + t x_0 + z_0)$ e $\phi_{Y_1}^t(x_0, y_0, z_0) = (-1/6 h k_1 t^3 + h/2 t^2 y_0 - at + h z_0 t + x_0, y_0 - k_1 t, -k_1/2 t^2 + y_0 t + z_0)$. Colocando $t_1(x_0, y_0) = -2x_0/k_1$ e $t_2(x_0, y_0) = \frac{2(-6ak_1x_0+2hx_0^3+3k_1^2y_0)}{3k_1^3}$ temos que $p_1 = \phi_{X_1}^{t_1}(x_0, y_0, 0) \in M$ e $\phi_{Y_1}^{t_2}(p_1) \in M$. Obtemos a expressão da aplicação de primeiro retorno para este caso:

$$\varphi_Z(x, y) = \left(-x + \frac{2a(6ak_1x-2hx^3-3k_1^2y)}{3k_1^3} + \frac{2h(-6ak_1x+2hx^3+3k_1^2y)^3}{81k_1^8}, \frac{2x(3ak_1-hx^2)}{3k_1^2} - y \right),$$

a qual possui os seguintes pontos fixos: $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = \left(-\sqrt{\frac{3k_1(a-k_1)}{h}}, -\sqrt{\frac{3k_1(a-k_1)}{h}}\right)$,
 $p_2 = \left(\sqrt{\frac{3k_1(a-k_1)}{h}}, \sqrt{\frac{3k_1(a-k_1)}{h}}\right)$, $p_3 = \left(-\sqrt{\frac{3k_1(a+k_1)}{h}}, \sqrt{\frac{3k_1(a+k_1)}{h}}\right)$, $p_4 = \left(\sqrt{\frac{3k_1(a+k_1)}{h}}, -\sqrt{\frac{3k_1(a+k_1)}{h}}\right)$,
 $p_5 = \left(-\sqrt{\frac{3(ahk_1-\Delta)}{2h^2}}, -\frac{\sqrt{6}k_1^2}{h\sqrt{\frac{ahk_1-\Delta}{h^2}}}\right)$, $p_6 = \left(\sqrt{\frac{3(ahk_1-\Delta)}{2h^2}}, \frac{\sqrt{6}k_1^2}{h\sqrt{\frac{ahk_1-\Delta}{h^2}}}\right)$, $p_7 = \left(-\sqrt{\frac{3(ahk_1+\Delta)}{2h^2}}, -\frac{\sqrt{6}k_1^2}{h\sqrt{\frac{ahk_1+\Delta}{h^2}}}\right)$ e $p_8 = \left(\sqrt{\frac{3(ahk_1+\Delta)}{2h^2}}, \frac{\sqrt{6}k_1^2}{h\sqrt{\frac{ahk_1+\Delta}{h^2}}}\right)$, onde $\Delta = \sqrt{h^2k_1^2(a^2 - 4k_1^2)}$.

Os quais são hiperbólicos desde que $X.Y.f(0) \neq \pm\eta X^2.f(0)$, para $\eta = 1, 2, 3/2, 3\sqrt{2}$. Além disso, podemos observar que os pontos p_1 e p_2 estão sobre a reta r_1 e p_3 e p_4 estão sobre a reta $\{(x, y, 0); x = -y\} \subset SlR \cup SwR$. Desta forma, desprezaremos esses dois últimos pontos, pois como sabemos em $SlR \cup SwR$ não é possível definirmos aplicação de primeiro retorno.

Consideremos agora o campo Z_2 . Sabemos que $X_2^2.f(0) = k_1 < 0$, logo por um reescalonamento podemos supor, sem perda de generalidade, que $k_1 = -1$. Obtemos o fluxo para este campo $\phi_{X_1}^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 - t, -\frac{f}{2}t^2 + at + ftx_0 + y_0, -\frac{t^2}{2} + tx_0 + z_0)$ e $\phi_{Y_1}^t(x_0, y_0, z_0) = (-at + x_0, -\frac{ae}{2}t^2 - t + ex_0t + y_0, \frac{t^2}{2} + \frac{an}{2}t^2 - \frac{ae}{6}t^3 - \frac{at^2(2n+et)}{2} + t^2(-1 + \frac{ae}{2}t) + \frac{1}{2}(2nt + et^2)x_0 + ty_0 + z_0)$. Tomando $t_2(x_0, y_0) = \frac{-3-3an-3ex_0+\sqrt{(3+3an+3ex_0)^2+24ae(2ax_0-nx_0+y_0)}}{2ae}$ e $t_1(x_0, y_0) = 2x_0$, temos que $p_1 = \phi_{X_1}^{t_1}(x_0, y_0, 0) \in M$ e $\phi_{Y_1}^{t_2}(p_1) \in M$. A aplicação de primeiro retorno é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_Z(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y)) &= (-x - at_2(x, y), \frac{1}{4ae}(-a^2(9n^2 + 16ex) \\ &+ (1 + ex)(-3 - 3ex + \sqrt{3}\sqrt{E(x, y)}) \\ &+ a(-12n - 8ey + 3\sqrt{3}n\sqrt{E(x, y)}))), \end{aligned}$$

onde $E(x, y) = 3(1 + ex)^2 + a^2(3n^2 + 16ex) + 2a(3n - enx + 4ey)$. A qual possui a origem mais quatro pontos fixos q_1, q_2, q_3 e q_4 , dados implicitamente pelas equações $h_1(x, y) = 0$ e $h_2(x, y) = 0$. Devido a complexidade da expressão envolvendo os pontos fixos, não discutiremos propriedades envolvendo esses pontos, como a hiperbolicidade, por exemplo. ■

Como consequência da proposição 5.4.3 temos uma idéia da sensibilidade desta família de sistemas descontínuos do tipo dobra-dobra que possui uma família de órbitas periódicas. Pois via perturbações do tipo reversível e polinomial deixamos de ter uma família de órbitas periódicas exibida na proposição 5.4.2, para termos somente um número finito.

CAPÍTULO 6

SISTEMAS COM RELÊ

Uma das classes de sistemas descontínuos mais importantes pelas suas aplicações desde 1950 na engenharia, teoria do controle, sistemas híbridos, entre outras áreas, são os sistemas com relê. Esses sistemas vem sendo estudados há algum tempo, contudo seu comportamento ainda não foi completamente entendido. A abordagem que seguimos é inspirada no trabalho [A] de Anosov e pela teoria do controle em [Z-B]. Relembramos que Anosov discutiu os então chamados sistemas com relê em $\mathbb{R}^n$ da forma $\dot{X} = Ax + \text{sgn}(x_1)k$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $A \in M_{\mathbb{R}}(m, n)$ e $k = (k_1, \dots, k_n)$ é um vetor constante no $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho, ele dá condições para a estabilidade assintótica local na origem, que é uma singularidade típica do sistema.

Existem alguns trabalhos tratando de análise qualitativa de sistemas com relê, veja [J-P, J-P-T]. Nós neste capítulo estudaremos a dinâmica de uma dessas classes de sistemas descontínuos em $\mathbb{R}^4$ que correspondem ao modelo de dois sistemas com relê acoplados. Usaremos o conceito de reversibilidade para sistemas de Filippov para estudarmos a existência de famílias de órbitas periódicas para essa classe.

6.1 Análise qualitativa de dois sistemas com relê acoplados

Sabemos que o modelo para a dinâmica de dois sistemas com relê independentes é dado por

$$Z_0 : \begin{cases} \ddot{x} = \alpha \operatorname{sgn}(x) \\ \ddot{y} = \beta \operatorname{sgn}(y). \end{cases} \quad (6.1)$$

Nosso objeto de estudo será considerar o sistema que modela dois sistemas com relê acoplados. O modelo mais simples para essa dinâmica é dado por

$$Z : \begin{cases} \ddot{x} = \alpha \operatorname{sgn}(x) + by \\ \ddot{y} = \beta \operatorname{sgn}(y), \end{cases} \quad (6.2)$$

o qual é equivalente ao sistema no $\mathbb{R}^4$ dado por

$$Z : \begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = \alpha \operatorname{sgn}(x) + by \\ \dot{y} = w \\ \dot{w} = \beta \operatorname{sgn}(y). \end{cases} \quad (6.3)$$

Antes de prosseguirmos com a análise desse campo de Filippov consideremos a convenção acerca da função $\operatorname{sgn}(\cdot)$:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Observe que a variedade de descontinuidade M do campo Z possui duas componentes de descontinuidade transversais entre si, dadas respectivamente por $\mathcal{V}_1 = \{(x, z, y, w); x = 0\}$ e $\mathcal{V}_2 = \{(x, z, y, w); y = 0\}$. Assim, $M = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$. Sejam $f, g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, z, y, w) = x$ e $g(x, z, y, w) = y$, as representações implícitas das variedades de descontinuidade são dadas por: $\mathcal{V}_1 = f^{-1}(0)$ e $\mathcal{V}_2 = g^{-1}(0)$. Observe que estudar a dinâmica do campo (6.3) é equivalente a estudarmos o campo descontínuo $(X_1(x, z, y, w), X_2(x, z, y, w), X_3(x, z, y, w), X_4(x, z, y, w))$ onde os X_i 's são definidos em cada um dos “quadrantes” $Q_1 = \{(x, z, y, w); x > 0, y > 0\}$, $Q_2 = \{(x, z, y, w); x < 0, y > 0\}$, $Q_3 = \{(x, z, y, w); x < 0, y < 0\}$ e $Q_4 = \{(x, z, y, w); x > 0, y < 0\}$, respectivamente.

Proposição 6.1.1 *Considere o sistema (6.3). Na variedade de descontinuidade M temos somente região de costura.*

Demonstração De fato, considerando os campos descontínuos $Z_{12} = (X_1, X_2)$, $Z_{23} = (X_2, X_3)$, $Z_{34} = (X_3, X_4)$ e $Z_{41} = (X_4, X_1)$ obtemos que $X_1.f(0, z, y, w) = X_2.f(0, z, y, w) = X_3.f(0, z, y, w) = X_4.f(0, z, y, w) = z$ e $X_1.g(0, z, y, w) = X_2.g(0, z, y, w) = X_3.g(0, z, y, w) = X_4.g(0, z, y, w) = w$. Donde segue que sobre as variedades de descontinuidade temos somente regiões de costura. ■

Considere uma perturbação polinomial do campo (6.3)

$$Z_p : \begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = \alpha \operatorname{sgn}(x) + by + f_1(x, z, y, w) \\ \dot{y} = w \\ \dot{w} = \beta \operatorname{sgn}(y) + f_2(x, z, y, w), \end{cases} \quad (6.5)$$

onde f_i são polinômios em (x, z, y, w) com grau de f_i maior ou igual a dois e satisfazem $f_i(x, z, y, w) = -f_i(-x, z, -y, w)$, para $i = 1, 2$. Obtemos o seguinte resultado:

Proposição 6.1.2 *O campo de vetores (6.5) é ξ -reversível onde $\xi(x, z, y, w) = (-x, z, -y, w)$.*

Demonstração Provemos que $(D\xi \circ Z_p)(x, z, y, w) = -(Z_p \circ \xi)(x, z, y, w)$. Temos

$$D\xi(x, z, y, w) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $(D\xi \circ Z_p)(x, z, y, w) = (-z, \alpha \operatorname{sgn}(x) + by + f_1(x, z, y, w), -w, \beta \operatorname{sgn}(y) + f_2(x, z, y, w))$. Por outro lado, segue que

$$\begin{aligned} -Z_p(\xi(x, z, y, w)) &= -Z_p(-x, z, -y, w) = -(z, \alpha \operatorname{sgn}(-x) - by + f_1(-x, z, \\ &\quad -y, w), w, \beta \operatorname{sgn}(-y) + f_2(-x, z, -y, w)) = (-z, \alpha \operatorname{sgn}(x) \\ &\quad + by + f_1(x, z, y, w), -w, \beta \operatorname{sgn}(y) + f_2(x, z, y, w)). \end{aligned}$$

Portanto, Z_p é ξ -reversível. ■

Nosso objetivo a seguir é exibir condições para a existência de uma família de órbitas periódicas para os sistemas (6.3) e (6.5).¹ A estratégia será explorar a propriedade de reversibilidade dos sistemas (6.3) e (6.5), obtida na proposição anterior, isto é, partimos da condição inicial $p_0 \in M$ e explicitemos a solução em $t > 0$ da equação $\phi_Z(t, (0, z_0, 0, w_0)) \in \mathcal{V}_2 = \{(x, z, y, w); y = 0\}$, onde $p_0 = (0, z_0, 0, w_0)$. Assim, obtemos a solução $t = t_2(x_0, y_0) = t(p_0) > 0$ e posteriormente resolvemos em $z_0 = z_0(w_0)$ a equação $\phi_Z(t(p_0), (0, z_0, 0, w_0)) \in M$. Obtemos assim as condições intrínsecas do campo descontínuo Z para a existência de família a 1-parâmetro de órbitas periódicas para este campo. A seguir, utilizaremos teoremas clássicos, como o Teorema da Função Implícita e o Teorema do Valor Intermediário para generalizar esse resultado para o campo (6.5).

Segue da proposição 6.1.2 que o sistema (6.3) é também ξ -reversível. Nesse caso temos $f_1(x, z, y, w) = f_2(x, z, y, w) = 0$. Observe que $\text{Fix}(\xi) = \{(x, z, y, w); x = y = 0\} = M$.

Com relação ao campo (6.3), consideremos uma seção $\Sigma_0 = g^{-1}(0) = \{(x, z, y, w); y = 0, x \neq 0\}$, transversal a $M = \{(x, z, y, w); x = y = 0\}$ e definiremos um conjunto aberto $\mathcal{O} \subset \Sigma_0$ para o qual a aplicação de primeiro retorno estará bem definida. Note que a seção Σ_0 separa o espaço em duas partes: $\Sigma_0^+ = g^{-1}(0, +\infty)$ e $\Sigma_0^- = g^{-1}(-\infty, 0)$.

Observação 6.1.1 *Integrando o sistema (6.3), obtemos o fluxo*

$$\phi_Z^t(x_0, z_0, y_0, w_0) = (x(t), z(t), y(t), w(t)), \quad (6.6)$$

onde

$$\begin{cases} x(t) &= (x_0 + z_0 t + 1/2(\alpha \text{sgn}(x) + by_0)t^2 + 1/6bw_0 t^3 + b/24\beta \text{sgn}(y)t^4, \\ z(t) &= z_0 + (\alpha \text{sgn}(x) + by_0)t + 1/2bw_0 t^2 + b/6\beta \text{sgn}(y)t^3, \\ y(t) &= y_0 + w_0 t + 1/2\beta \text{sgn}(y)t^2, \\ w(t) &= w_0 + \beta \text{sgn}(y)t. \end{cases}$$

Proposição 6.1.3 *Considere o sistema (6.3). Se $\alpha > 0, \beta = -1$ então ao longo da curva $C = \{(0, z, 0, w); z = \psi(w) = \alpha w - \frac{bw^3}{3}, w > 0\}$ existe uma família a 1-parâmetro*

¹ Neste capítulo, diferentemente dos anteriores, nosso espaço é $(\mathbb{R}^4, 0)$ e a variedade de descontinuidade M possui dimensão e codimensão igual a 2. Desta forma, M não separa o espaço $(\mathbb{R}^4, 0)$ em duas partes como nos capítulos anteriores, onde trabalhávamos em $(\mathbb{R}^2, 0)$ ou $(\mathbb{R}^3, 0)$.

de órbitas periódicas do sistema (6.3). Além disso, existe conjunto aberto $\mathcal{O} \subset (\mathbb{R}^4, 0)$ tal que se $p_0 \in \mathcal{O}$ então a aplicação de primeiro retorno φ_Z^2 está bem definida.

Demonstração A idéia é utilizarmos a proposição 6.1.2 e darmos condições intrínsecas sobre o sistema (6.3) e a condição inicial $p_0 \in M$ para que a órbita do sistema acoplado intercepte $M = \text{Fix}(\xi)$ em dois pontos distintos, obtendo assim uma órbita periódica. Em outras palavras vamos dar condições para que exista $t_2 > 0$ tal que o fluxo $\phi_Z^{t_2}(p_0) \in M$ com $p_0 \in M = \text{Fix}(\xi)$. Na observação 6.1.1 temos a expressão do fluxo para o sistema (6.3).

Na variedade de descontinuidade M considere as seguintes regiões: $R_1 = V_2 \cap \{(x, z, y, w); x > 0\}$, $R_2 = V_1 \cap \{(x, z, y, w); y > 0\}$ e $R_3 = V_2 \cap \{(x, z, y, w); x < 0\}$. Observe que uma condição suficiente para que exista órbitas periódicas para o sistema (6.2) é que $\phi_Z^{t_2}(p_0) \in M = \text{Fix}(\xi)$, onde $p_0 \in R_1 = SwR \uparrow$ e $R_3 = SwR \downarrow$. Veja a figura 6.1. Portanto, temos que garantir $(X_1.g)(0, z_0, 0, w_0) = (X_4.g)(0, z_0, 0, w_0) = w_0 > 0$ e $(X_2.g)(0, z_2, 0, w_2) = (X_3.g)(0, z_2, 0, w_2) = w_2 < 0$, onde $(0, z_2, 0, w_2) = p_2 = \phi_Z^{t_2}(p_0)$ para $t_2 > 0$. Tomemos $w_0 > 0$ e provemos a seguir que para $\alpha > 0, \beta = -1$ e $p_0 \in C = \{(0, z, 0, w); z = \psi(w) = \alpha w - \frac{bw^3}{3}, w > 0\}$ temos $z_1 < 0, w_2 < 0$ e $\phi_Z^{t_2}(p_0) \in M = \text{Fix}(\xi)$.

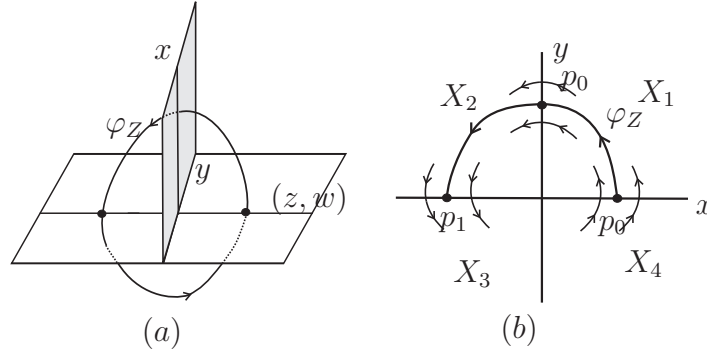


Figura 6.1: Em (a) temos uma representação da dinâmica de Z . Em (b) representamos o tipo de costura nas regiões R_i .

Resolvendo $\phi_Z^{t_2}(0, z_0, 0, w_0) \in M$ obtemos $t_2 = t_2(p_0) = \frac{-2w_0}{\beta \text{sgn}(y)} = \frac{-2w_0}{\beta}$ e $z_0 = z_0(w_0) = \psi(w_0) = -\alpha\beta w_0 - \frac{bw_0^3}{3}$. Como $\beta = -1$ então $t_2 > 0$ e $z_0 = \alpha w_0 - \frac{bw_0^3}{3}$. Obtemos $\phi_Z^{t_2}(0, z_0, 0, w_0) = p_2 = (0, z_2, 0, w_2) = -(0, z_0, 0, w_0)$. Para t variando de 0 a $t_2 = \frac{-2w_0}{\beta} = 2w_0$ a componente $z(t)$ do fluxo varia de um valor positivo para negativo.

De fato, da observação 6.1.1 sabemos que $z(t) = z_0 + (\alpha \text{sgn}(x) + by_0)t + 1/2bw_0t^2 + b/6\beta \text{sgn}(y)t^3$, onde $z_0 = \alpha w_0 - \frac{bw_0^3}{3}$. Em uma vizinhança da origem temos $\text{sgn}(z(0)) = \text{sgn}(\alpha w_0) = 1$, pois $\alpha, w_0 > 0$. Em $t = t_2$ temos $z(t_2) = (\alpha + 2\alpha \text{sgn}(x))w_0 + bw_0^3/3 =$

²A aplicação de primeiro retorno φ_Z e $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ estão definidos em (6.8) e (6.9), respectivamente.

$-\alpha w_0 + bw_0^3/3$, logo $\text{sgn}(z(t_2)) = \text{sgn}(-\alpha w_0) = -1$. Além disso, tomando $p_0 = (0, z_0, 0, w_0) \in C$ temos que $z(t^*) = w(t^*) = 0$ onde $t^* = w_0$, isto é, para $t = t^*$ o fluxo $\phi_Z^{t^*}(p_0)$ cruza o hiperplano $\{(x, z, y, w); z = w = 0\}$. Veja figura 6.1.

Observe que $w_2 = -w_0$, donde segue que $R_3 = RC \downarrow$. Iterando novamente o ponto p_2 pelo fluxo e explicitando t_3 tal que $\phi_Z^{t_3}(p_2) \in M$ obtemos $t_3 = t_1$ (como esperávamos visto que o sistema é ξ -reversível) e $\phi_Z^{t_3}(p_2) = p_0$. Donde obtemos uma família de órbitas periódicas para esse sistema que está sobre a curva

$$C = \{(0, z, 0, w); z = \psi(w) = \alpha w - \frac{bw^3}{3}, w > 0\} \quad (6.7)$$

para o campo de Filippov (6.3) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$.

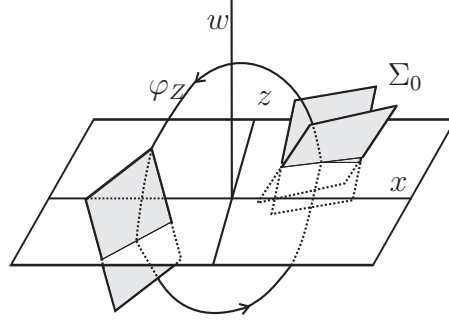


Figura 6.2: Representação da aplicação de primeiro retorno φ_Z para esse caso.

Consideremos a seção transversal a M dada por $\Sigma_0 = g^{-1}(0) = \{(x, z, y, w); y = 0, x \neq 0\}$, representada na figura 6.2. Como fizemos anteriormente, impomos condições sobre a condição inicial $p_0 \in M$ para que $R_1 = RC \uparrow$ e $R_3 = RC \downarrow$. Partimos de x_0 positivo e explicitemos $t_1 > 0$ tal que $\phi_Z^{t_1}(x_0, z_0, 0, w_0) = (x_1, z_1, 0, w_1) \in \{(x, z, 0, w); x < 0\}$. Em seguida consideramos x negativo, encontramos $t_2 > 0$ tal que $\phi_Z^{t_2}(x_1, z_1, 0, w_1) \in \{(x, z, 0, w); x > 0\}$. Analogamente aos cálculos anteriores, obtemos $w_0 > 0$ e $t_1 = 2w_0 = t_2$ pois $\beta = -1$. Desta forma a aplicação de primeiro retorno é definida por

$$\varphi_Z(x, z, w) = (x + 4wz - 8\alpha w^2 + 4/3bw^4, z - 4\alpha w, w), \quad (6.8)$$

cujos domínio de definição é dado por

$$\mathcal{O} = \{(x, z, w); x, w > 0, z < 0\}, \quad (6.9)$$

onde $\beta = -1$. ■

A proposição a seguir generaliza o resultado obtido na proposição 6.1.3.

Proposição 6.1.4 *Consideremos o sistema (6.5). Se $\alpha > 0, \beta = -1$ então existe uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas para Z_p . Além disso, existe um conjunto aberto $\tilde{\mathcal{O}} \subset \Sigma_0$ tal que se $p_0 \in \tilde{\mathcal{O}}$ então a aplicação de primeiro retorno φ_{Z_p} está bem definida.*

Demonstração Denotamos o fluxo de (6.5) por

$$\phi_{Z_p}(t, p) = (\tilde{x}(t, p), \tilde{z}(t, p), \tilde{y}(t, p), \tilde{w}(t, p)), \quad (6.10)$$

com $\tilde{x}(t, p) = x(t, p) + \psi_1(t, p), \tilde{z}(t, p) = z(t, p) + \psi_2(t, p), \tilde{y}(t, p) = y(t, p) + \psi_3(t, p)$ e $\tilde{w}(t, p) = w(t, p) + \psi_4(t, p)$ onde ψ_i denota aplicações C^∞ , para $i = 1, \dots, 4$. Como Z_p é um campo perturbado de Z , segue que o fluxo de Z_p é também uma perturbação do fluxo do campo Z , isto é, $\phi_{Z_p}(t, p) = \phi_Z(t, p) + t.o.s..$

Provamos na proposição 6.1.2 que o sistema (6.5) é ξ -reversível. Daí uma condição suficiente para a existência de famílias de órbitas periódicas é que exista $t > 0$ tal que $\phi_{Z_p}(t, p) \in M$ com $p \in M$, lembrando que $M = \text{Fix}(\xi)$. Dividiremos a demonstração em três etapas:

- (i) Se (6.10) é o fluxo de Z_p usaremos o Teorema da Função Implícita para provar que para cada $p = (0, z, 0, w) \in M$ existe $t = \tilde{t}(p) > 0$ tal que $\tilde{y}(t, p) = 0 = \tilde{y}(0, p)$. Além disso, a correspondência $p \mapsto \tilde{t}(p)$ é de classe C^1 .
- (ii) Fixado este valor de $t = \tilde{t}(p)$ definimos a função $G : (M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ por $G(z, w) = \tilde{x}(\tilde{t}(p), p)$ onde $p = (0, z, 0, w)$. Note que G é uma aplicação suave, pois $\tilde{x}(t, p)$ é de classe C^1 com relação as condições iniciais e a correspondência $p \mapsto \tilde{t}(p)$ é também C^1 . Assim, encontrar órbitas periódicas para Z_p é equivalente a encontrarmos zeros para a aplicação G . Para isso, faremos uso de uma função auxiliar $\tilde{G}(z, w) = \frac{3}{2w}G(z, w) = \frac{3}{2w}[x(\tilde{t}(w), p) + \psi_1(\tilde{t}(w), p)]$. Aplicamos o Teorema da Função Implícita em $\tilde{G}$ e exibimos um aberto $\mathcal{O} = I \times J \subset M$ e uma curva solução $w = \tilde{w}(z) = \tilde{\psi}(z)$ com $(0, 0) \in I \times J, \tilde{w}(0) = 0$ e para cada $z \in I$ existe um único $w \in J$ tal que $\tilde{G}(z, w) = 0$.
- (iii) Provamos que esta curva $w = \tilde{w}(z) = \tilde{\psi}(z)$ é também solução da equação $G(z, w) = 0$. Obtemos assim uma família de órbitas periódicas para Z_p .

Na etapa (i), consideramos a expressão (6.6) de Z , obtemos $y(t) = wt - t^2/2$, pois $\beta = -1$. Assim, o gráfico da função $y(t)$ trata-se de uma parábola com concavidade para baixo, que possui como raízes $t = 0, 2w$ e como ponto de máximo $t = w$. Seja $p = (0, z, 0, w) \in U \cap M$, onde $w > 0$ e U é uma vizinhança arbitrária da origem. Denotamos o ponto inicial por $p = (z, w)$. Definimos o intervalo de variação do tempo

t : $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$. Temos $\tilde{y}(0, (z, w)) = y(0, (z, w)) + \psi_3(0, (z, w)) = 0$ (veja expressão (6.10) do fluxo para o campo Z_p) e

$$\frac{\partial \tilde{y}(t, (z, w))}{\partial t} \Big|_{t=0} = w \neq 0. \quad (6.11)$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, concluímos que a equação $\tilde{y}(t, (z, w)) = 0$ pode ser resolvida implicitamente por $\tilde{t}(z, w)$. Mais ainda esta solução implícita é de classe C^1 . Verifiquemos que a solução implícita $\tilde{t}(z, w)$ é positiva. Por (6.10), sabemos que $\tilde{y}(t, p) = y(t, p) + \psi_3(t, p)$ e observando (6.6) temos que $y(2w, p) = 0$ logo $\tilde{t}(p) \approx t(p) = 2w > 0$, isto é, $\tilde{t}(p) > 0$.

Na etapa (ii) substituímos em $\tilde{x}(t, w)$ o valor de $t = \tilde{t}(w)$ e definimos a aplicação $G(z, w) = \tilde{x}(\tilde{t}(w), p) = x(\tilde{t}(w), p) + \psi_1(\tilde{t}(w), p)$. Considerando a aplicação auxiliar $\tilde{G}(z, w) = \frac{3}{2w}G(z, w) = \frac{3}{2w}[x(\tilde{t}(w), p) + \psi_1(\tilde{t}(w), p)]$ e da expressão (6.6) do fluxo do campo Z obtemos $\tilde{G}(z, w) = -3\alpha w + 3z + bw^3 + O(z^2, w^4)$. Apliquemos o Teorema da Função Implícita na função $\tilde{G}(., .)$. Seja U uma vizinhança arbitrária da origem, sabemos que $\tilde{G}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial w}\tilde{G}(0, 0) = -3\alpha \neq 0$. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existe aberto $I \times J \subset U$ tal que a curva $w = \tilde{\psi}(z)$ é solução da equação $\tilde{G}(z, w) = 0$, isto é, a função $w = \tilde{\psi}(z)$ é curva solução dada implicitamente pela equação

$$G(p) = \tilde{x}(\tilde{t}(p), (0, z, 0, \tilde{\psi}(z))) = 0, \quad (6.12)$$

para todo $(z, w) \in I \times J \subset U$. Denotamos a curva solução por

$$\tilde{C} = \{(z, w) \in I \times J; w = \tilde{\psi}(z)\} \cap \{(x, z, y, w); w > 0\}. \quad (6.13)$$

Finalmente na parte (iii) basta observarmos que a existência de uma curva solução da equação $\tilde{G}(z, w) = 0$ implica a curva solução desejada $w = \tilde{\psi}(z)$ para a aplicação $G(z, w) = 0$ original. De fato, para $p \in \tilde{C}$ com $w \neq 0$ temos $\tilde{G}(z, w) = 0 = \frac{3}{2w}G(z, w)$ logo $G(z, w) = 0$. Para a origem, segue diretamente que $G(0, 0) = 0$. Assim, concluímos que a curva $\tilde{C}$ representa uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas para o campo de Filippov Z_p .

Considerando a seção $\Sigma_0 = g^{-1}(0) = \{(x, z, y, w); y = 0, x \neq 0\}$ definida anteriormente, o procedimento para explicitarmos a aplicação de primeiro retorno φ_{Z_p} e o conjunto aberto $\tilde{O} \subset \Sigma_0$ para esse caso é análogo a proposição 6.1.3 utilizando agora argumentos de continuidade como fizemos anteriormente para determinarmos a solução da equação $\tilde{y}(0, p) = 0$. Os detalhes dessa parte serão omitidos. ■

BIBLIOGRAFIA

- [A-V-K] Andronov A.A., Vitt A.A. e Khaikin S.E., *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, U.K., **1966**.
- [A] Anosov, D.V. *Stability of the equilibrium positions in relay systems*, Automation and remote control, vol. **XX**, 2, (1959).
- [A-P] Arrowsmith D.K. e Place C.M., *An introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, New York, **1990**.
- [B-B-C-K] Bernardo M.di, Budd C.J., Champneys A.R. e Kowalczyk P. *Piecewise-non-smooth dynamical systems- Theory and applications*, vol. **163** of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag London Ltd., London, 2008.
- [B] Bonnard, B. Chyba, *Singular Trajectories and Their Role in Control Theory*, Mathematiques and Applications, vol. **40**, Springer, 2003.
- [B-L] Bröcker TH. e Lander L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **17**, Cambridge University Press.
- [C] Chillingworth, *The Teixeira singularity or: Stability and Bifurcation for a discontinuous vector field in R_3 at a double-fold point: DRAFT*, To appear.
- [C-B-F-J] Colombo A., Bernardo M. di, Fossas E. e Jeffrey M. R., *Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems*, Systems and Control Letters, submitted, Junho de 2009.

- [F] Filippov A. F., *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. **18** of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [H-S] Hirsch M.W. e Smale S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, **1974**.
- [J-T] Jacquemard A. e Teixeira M. A., *Invariant varieties of discontinuous vector fields*, Nonlinearity, **Vol. 18**,(2005),21-43.
- [J-P-T] Jacquemard A., Pereira W.F. e Teixeira M. A., *Generic Singularities of Relay Systems*, Journal of Dynamical and Control Systems, vol. **13**, número 4, Outubro de 2007, 503-530.
- [J-P] Jacquemard A. e Pereira W.F., *On periodic orbits of polynomial relay systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. **17**, número 2, Fevereiro de 2007, 331-347.
- [J] Jeffrey M.R., *Two-folds in nonsmooth dynamical systems*, I.F.A.C., Chaosog proceedings, Queen Mary, Junho de 2009.
- [J-C] Jeffrey M.R. and Colombo A., *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. Volume 8, Issue 2, pp. 624-640,(2009).
- [K] Koslova V.S., *Roughness of a discontinuous system*, Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriya 1 Matamatika Mekhanika, vol.**5**, 1984, 16-20.
- [Ku-R-G] Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S. e Gragnani A., *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, Int. Journal Bif. and Chaos, vol. **13**, número 8, 2003.
- [M-T] Medrado J. C. R. e Teixeira M. A., *Symetric singularities of reversible vector fields in dimension three*, Physica D, **112**, 1998, 122-131.
- [P-M] Palis J. e Melo W., *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, **7 a 26 de julho de 1975**, IMPA.
- [P1] Peixoto M. M., *On Structural stability*, Ann. of Math., **69**,(1959).
- [P2] Peixoto M. M., *Structural stability in two-dimensional manifolds*, Topology **1**,(1962).

- [P₃] Peixoto M. C., Peixoto M. M. *Structural stability in the plane with enlarged conditions*, An.Acad. Brasil. Ci.**1**,(1959).
- [Pk] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, Inc., **1991**.
- [Ro] Robinson C., *Dynamical Systems- Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, Studies in advanced mathematics, **1995**, CRC Press.
- [S] Sotomayor J., *Structural stability in manifolds with boundary-global analysis and its applications*, Vol. III, International Atomic Energy Agency, Vienna, (1974).
- [S₁] Sotomayor J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, **1979**.
- [S-T₁] Sotomayor J. and Teixeira M. A., *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*, Lect. Notes in Math., **331**, Springer Verlag, (1988),169-195.
- [S-T₂] Sotomayor J. and Teixeira M. A., *Regularization of discontinuous v.f. on a 2-dimensional manifold*, International Conference on Dif. Equations 95, (Equadiff-95), Lisbon, World Sc., (1998), Singapore, N. Jersey, London, 207-223.
- [T₁] Teixeira M. A., *Stability conditions for discontinuous vector fields*, J. Diff. Eq., **V 88**,(1990),15-29.
- [T₂] Teixeira M. A., *Perturbation theory for non-smooth systems*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, 2009.
- [T₃] Teixeira M. A., *Generic bifurcations of sliding vector fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **176**,(1993),436-457.
- [T₄] Teixeira M. A., *Generic bifurcations in manifolds with boundary*, J. Diff. Eq., **Vol. 25**,(1977),65-89.
- [T₅] Teixeira M. A., *Codimension two singularities of sliding vector fields*, Bull. Belg. Math. Soc., **Vol. 6**,(1999),369-381.
- [T₆] Teixeira M. A., *Attractivity of discontinuous vector fields*, Dynamical Systems and Applications, **Vol. 5**,(1996),31-45.

- [T7] Teixeira M. A., *Generic bifurcations of certain singularities*, Bollettino U.M.I., **Vol. 16-B**,(1979),238-254.

- [V] Vishik S. M., *Vector Fields near the boundary of a manifold*, Vestnik, Moskov, Univ. Ser. I, Mat. Meh., **27**,1(1972),21-28.

- [Z-B] Zelikin M.I. and Borisov V.F., *Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering*, Birkhäuser, 1994.

ÍNDICE

- M —singularidades, 10
- α —limite, 36
- ω —limite, 36
- órbita
 - futura, 17
 - pseudo periódica regular, 34
 - singular periódica, 34
 - periódica regular, 34
- bacia de atração, 36
- campos de vetores
 - estruturalmente estáveis, 8
 - A-estável, 35
 - deslizante, 15
 - germe equivalentes, 7
 - L-estável, 34
 - topologicamente conjugados, 8
 - topologicamente equivalentes, 8
- campos descontínuos, 14
 - M —equivalentes, 14
 - ξ -reversíveis, 85
- involução, 85
- ponto
 - M -regular, 16
 - M -singular elementar, 16
- propriedade
 - A, 36
 - I, 36
 - L, 36
- pseudo singularidade, 17
- região
 - costura, 14
 - deslize, 14
 - escape, 14
- sela topológica, 36
- separatrizes, 36
- T-singularidade, 17