



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC



*Uma Aplicação da Álgebra
Geométrica à Mecânica Clássica: a
Transformação de
Kustaanheimo-Stiefel.*

José Vicente Cipriano de Souza

jvcsouza@uol.com.br

Dissertação de Mestrado

Orientador: **Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.**

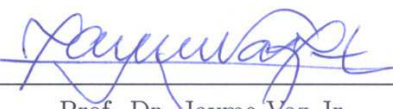
Fevereiro de 2010

Campinas - SP

*Uma aplicação da Álgebra Geométrica à Mecânica Clássica: a
Transformação de Kustaanheimo-Stiefel.*

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **José Vicente Cipriano de Souza** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de fevereiro de 2010.



Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jayme Vaz Jr. (IMECC - UNICAMP)

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC - UNICAMP)

Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr. (UFABC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Souza, José Vicente Cipriano

So89a Uma aplicação da álgebra geométrica à mecânica clássica : a transformação de Kustaanheimo-Stiefel / José Vicente Cipriano Souza -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Jayme Vaz Junior

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebra geométrica. 2. Transformação (Matemática). 3. Mecânica clássica. 4. Clifford, Álgebra de. I. Vaz Junior, Jayme. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: An application of the geometric algebra to the classical mechanics : the Kustaanheimo-Stiefel transformation.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Geometric algebra. 2. Transformation (Mathematics). 3. Classical mechanics. 4. Clifford algebras.

Área de concentração: Física-matemática

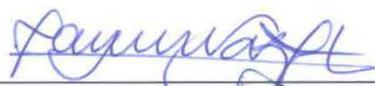
Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior (IMECC)
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC)
Prof. Dr. Roldão da Rocha Júnior (UFABC)

Data da defesa: 26/02/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de fevereiro de 2010
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). JAYME VAZ JUNIOR



Prof. (a). Dr (a). ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR



Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Dedico este trabalho aos meus pais, Joaquim
e Marly.

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, a Deus, que permitiu que eu chegasse até este ponto, da vida e dos estudos.

Agradeço aos meus pais, Joaquim e Marly, pela educação que me proporcionaram, às minhas irmãs, Rosaly, Rosângela e Rosana, pela consideração e amizade e aos meus filhos, Carlos Henrique, Daniel e Lucas os quais amo de todo coração.

Sou grato, também, à minha querida Verônica, por seu amor e incentivo.

Quero agradecer, ainda, ao Prof. Dr. Jayme Vaz Jr., pela gentileza de ter me orientado neste trabalho, com paciência e boa vontade. Agradeço, também, aos componentes da banca examinadora, por terem aceitado fazer parte da mesma.

Não poderia deixar de agradecer a todos os professores e doutorandos monitores do Mestrado Profissional do convênio AMAN/UNICAMP, em especial à Professora Doutora Sueli Irene Rodrigues Costa, ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira, ao Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. e ao monitor, agora Doutor e Professor da Unicamp, Cristiano.

Gostaria, também, de apresentar meus agradecimentos a todos os amigos da Ca-deira de Matemática/AMAN, que sempre se mostraram dispostos a colaborar de várias maneiras para que este trabalho chegasse a bom termo.

Por último, gostaria de apresentar meus sinceros agradecimentos à UNICAMP e à AMAN que me possibilitaram esta oportunidade de estudo.

Resumo

Nessa dissertação apresentamos a Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano e estudamos algumas de suas propriedades. Para exemplificar suas aplicações, estudamos a Transformação Kustaanheimo-Stiefel em termos de Álgebra Geométrica. Para isso apresentamos inicialmente a Transformação KS, que regulariza o movimento de Kepler em três dimensões removendo uma singularidade na origem, da forma como foi originalmente formulada, baseando-se em álgebra de matrizes. Feito isso, a Transformação KS é apresentada com Álgebra Geométrica, o que torna o seu entendimento geométrico mais claro e seu desenvolvimento mais simplificado. Para tal o uso do conceito de spinors é de grande importância.

Abstract

In this dissertation we presented the Geometric Algebra of Euclidean Space and studied some of its properties. To exemplify its applications, we studied the Kustaanheimo-Stiefel Transformation in terms of Geometric Algebra. This purpose we presented initially the KS Transformation which regularizes the Kepler motion in three dimensions by removing a singularity at the origin, as it was originally formulated, based on matrix algebra. Done, the KS transformation is presented with Geometric Algebra, making clearer its geometric understanding and its development more simplified. With this goal the spinors concept use is of great importance.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
1 Introdução	1
2 A álgebra geométrica ou álgebra de Clifford	3
2.1 Introdução	3
2.2 Breve história da álgebra geométrica	4
2.3 Os quatérnions	6
2.4 A álgebra de extensão ou de Grassmann	9
2.5 A álgebra geométrica ou álgebra de Clifford	10
3 A transformação KS	40
3.1 Introdução	40
3.2 A regularização de Levi-Civita	41
3.3 A transformação KS	43
3.3.1 Propriedades da Transformação KS	45
3.4 As equações do movimento	49
3.5 Regularização	52
3.6 O problema de Kepler	53
3.7 O problema de valor inicial	56
4 A transformação KS com álgebra geométrica	57
4.1 Introdução	57
4.2 Rotação e dilatação	58
4.3 Vetor posição	58

4.4	Vetor e espinor velocidade	59
4.5	A equação espinoral do movimento	66
4.6	Sistema livre de forças perturbadoras	67
Referências Bibliográficas		73

Lista de Figuras

2.1	William K. Clifford	3
2.2	Bivector e_1e_2	12
2.3	Bivector e_2e_1	12
2.4	Bivector $W = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$	12
2.5	Bivector $-W = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$	12
2.6	Trivector T	13
2.7	Trivector $-T$	13
2.8	$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	26
3.1	Kustaanheimo	40
3.2	Stiefel	40
3.3	Tullio Levi-Civita	41
3.4	A regularização de Levi-Civita	43

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos a álgebra geométrica, ou de Clifford, e uma de suas aplicações em Mecânica Clássica: a Transformação de Kustaanheimo-Stielfel, ou transformação KS, como é mais conhecida.

A Álgebra Geométrica, assim denominada pelo matemático inglês William Kingdon Clifford (1845-1879), é hoje também conhecida como Álgebra de Clifford, em sua homenagem.

A Álgebra Geométrica tem o grande mérito de integrar, de forma coerente, algumas álgebras de matrizes, a álgebra vetorial e a dos números complexos, mantendo as vantagens de cada uma e possibilitando outras tal como uma interpretação geométrica mais clara dos fenômenos, tornando-se, assim, uma linguagem matemática bastante adequada e natural para a física.

A Álgebra Geométrica tem aplicação em diversos ramos da física, desde a mecânica clássica, passando pela eletrodinâmica, até a relatividade e a teoria quântica. É lícito, portanto, almejar, com esta álgebra, a unificação da Matemática para o seu uso na Física.

A Álgebra Geométrica, no entanto, ficou por algum tempo "esquecida", sendo pouco utilizada. Entretanto, o trabalho de alguns pesquisadores, entre eles David Hestenes, vem impulsionando e divulgando o seu uso. Hestenes introduziu a utilização dos spinors operatoriais, com os quais reformulou a teoria de Dirac.

Como o próprio Hestenes fala em seu livro *New Foundations for Classical Mechanics*

[6], a utilização de spinors em teoria de mecânica clássica diminui o fosso da formulação matemática das mecânicas clássica e quântica, possibilitando ao estudante avançar mais rapidamente nos estudos.

Para ilustrar o potencial da Álgebra Geométrica de ser aplicada à mecânica clássica, mostramos neste trabalho a transformação KS que, costumeiramente expressa em linguagem de álgebra de matrizes, carecendo de uma interpretação geométrica, é interpretada, na Álgebra Geométrica, por um espinor que reúne em si as quatro coordenadas KS, e com clara interpretação geométrica.

No capítulo 2 apresentamos a Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano, suas principais propriedades, em particular o produto geométrico, as relações com a álgebra de Grassmann, com a álgebra vetorial de Gibbs e Heaviside e com os quatérnions, bem como mostramos o isomorfismo com a álgebra de matrizes e falamos sobre rotações e, ainda, sobre spinors.

No capítulo 3 apresentamos a Transformação de Kustaanheimo e Stiefel que, de maneira similar à regularização do movimento de Kepler em duas dimensões proposta por Tullio Levi-Civita, efetua a regularização do movimento de Kepler em três dimensões, baseando-se em uma aplicação do R^4 no R^3 , a fim de remover uma singularidade da equação de movimento na origem. Este método foi desenvolvido para resolver problemas em mecânica celeste mas tem se tornado uma ferramenta útil em estudos de mecânica quântica. Podemos citar, como exemplo, que o método torna possível transformar a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio em três dimensões (em um campo eletromagnético) em uma equação de Schrödinger para o oscilador harmônico isotrópico em quatro dimensões.

No capítulo 4, finalmente, mostramos como expressar a transformação KS em termos da álgebra de Clifford, que propicia uma interpretação geométrica mais clara, o que não é o caso quando se usa a álgebra de matrizes.

A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA OU ÁLGEBRA DE CLIFFORD

2.1 Introdução

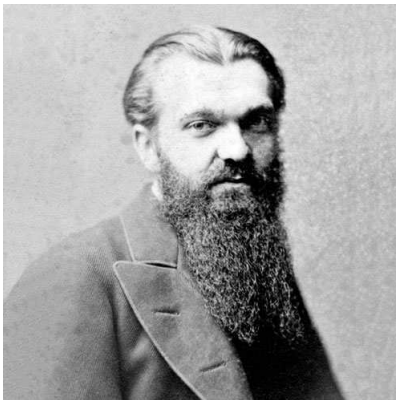


Figura 2.1: William K. Clifford

A álgebra geométrica, também conhecida como álgebra de Clifford permite representar certas grandezas físicas com outros objetos além de vetores e escalares.

Quando queremos representar grandezas angulares, como o momento angular ou o torque produzido por uma força, é conveniente usarmos os bivectores, que veremos adiante, e que representam, na verdade, fragmentos de um plano (ou plaquetas).

Além de ter área, que representa a sua magnitude, o bivector possui ainda uma ori-

entação interna, que pode ser conforme o sentido horário ou o anti-horário em que se percorre o seu perímetro e direção, que é a do plano que lhe dá suporte.

A álgebra geométrica suporta os escalares, os vetores, os bivectores e, se ficarmos no espaço tridimensional, os trivetores, que são elementos de volume e que têm, também, duas orientações possíveis, segundo a regra da mão direita ou da esquerda.

A álgebra geométrica tem muitas aplicações na física, principalmente em problemas que envolvam rotação e números imaginários. Pode descrever fenômenos em física clássica, mecânica quântica, eletromagnetismo e relatividade.

Neste capítulo faremos uma breve explanação sobre o assunto. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto recomendamos a leitura de Vaz [14].

2.2 Breve história da álgebra geométrica

A relação entre álgebra e geometria era algo que Euclides já utilizava no século III a.C., quando associava um número à dimensão de um segmento de reta.

No século XVII René Descartes estabeleceu a relação entre posição e números, no sistema que até hoje é conhecido como cartesiano, em sua homenagem. Descartes adotava a congruência para determinar a equivalência entre os segmentos de linha.

Mais tarde, já no século XIX, Hermann Grassmann, no artigo denominado "Álgebra das Extensões Lineares", propôs objetos geométricos orientados para representar as grandezas físicas. Nasceram, assim, os vetores. Entretanto, por complexo demais para sua época, seu trabalho ficou parcialmente esquecido.

Ao mesmo tempo, e com o intuito de generalizar a noção de número complexo e estendendo-os ao espaço tridimensional foi introduzido o conceito de quatérnions, que estudaremos adiante.

Costuma-se a creditar a William Rowan Hamilton (1805-1865) a introdução dos quatérnions na matemática

Entretanto, Simon L. Altman [1] apresenta as contribuições que Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851) dá ao estudo de rotações dos vetores e atribui a Rodrigues a criação dos quatérnions, por estarem "embutidos" neste estudo de rotações.

No desenvolvimento e divulgação da teoria dos quatérnions podemos citar Peter Guthrie Tait (1831-1901). Ele também teve a preocupação de encontrar aplicações físicas para os quatérnions.

William Kingdon Clifford, em 1878, teve a felicidade de formular uma álgebra capaz de englobar a de Grassman e a a estrutura dos quatérnions na chamada "álgebra geométrica", que hoje também é conhecida como "álgebra de Clifford", em sua homenagem. A álgebra de Clifford unificou as duas estruturas em uma só, de forma elegante e com grande alcance. Entretanto, devido à morte prematura de Clifford e à insuficiente divulgação do seu trabalho à época, a álgebra geométrica ficou muito pouco conhecida e utilizada.

Mais tarde o matemático Josiah Willard Gibbs (1839-1903) criou a conhecida, bastante difundida e utilizada "álgebra vetorial", mais simples e que consegue descrever satisfatoriamente vários fenômenos físicos. Esta álgebra nada mais é que uma simplificação da álgebra de Grassmann e que aproveita a parte vetorial dos quatérnions. Entretanto não consegue generalizar estes sistemas .

Oliver Heaviside (1850-1925), telegrafista inglês, também desenvolveu a álgebra vetorial, de forma independente, chegando essencialmente ao mesmo sistema desenvolvido por Gibbs [3] . Heaviside dedicava-se ao estudo da eletricidade e não primava pelo rigor matemático em seus estudos.

A álgebra geométrica, apesar de mais eficiente e completa que a de Gibbs/Heaviside, foi sendo esquecida e caiu em desuso em função do grande sucesso alcançado por esta, e pela falta da necessária divulgação. Entretanto a álgebra geométrica vem sendo usada e difundida, principalmente devido aos esforços de físicos e matemáticos, que nos mostram o seu alcance, a sua simplicidade e a descrição da natureza de que ela é capaz e de como não possui as deficiências presentes na álgebra vetorial de Gibbs.

Podemos citar como estudiosos da álgebra de Clifford: David Hestenes (Arizona, USA), Anthony Lasenby e Chris Doran (Cambridge), Pierre Angles (Toulouse), Jacques Helmstetter e Artibano Micali (Grenoble), William Baylis (Windsor, Canadá), Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. e Prof. Dr. Jayme Vaz Jr. (Brasil), entre outros.

2.3 Os quatérnions

Os quatérnions surgiram com o objetivo de estender a ideia de números complexos ao espaço tridimensional, visando à sua aplicação em mecânica.

O propósito foi introduzir novas unidades imaginárias, à semelhança da unidade i dos complexos. Foram elas j e k . Os quatérnions ficaram, portanto, com a forma $q = a + bi + cj + dk$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Os quatérnions, assim como os números complexos, têm duas partes: a parte real, $R(q) = a$ e a parte imaginária pura, ou somente pura, $P(q) = bi + cj + dk$. Pode-se ainda, considerar, respectivamente parte escalar e parte vetorial do quatérnion, ou seja, $R(q) = a$ corresponde a um escalar e $P(q) = bi + cj + dk$, a um vetor tridimensional.

Nos quatérnions consideramos as operações de soma e multiplicação como se seguem:

Soma

Para somarmos dois ou mais quatérnions devemos, tal qual os complexos, somar os termos semelhantes.

Por exemplo: sendo $q = a + bi + cj + dk$ e $p = e + fi + gj + hk$, então teremos $q + p = (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k$.

Multiplicação

Para efetuarmos o produto de dois quatérnions levamos em conta a regra distributiva do produto e as seguintes relações entre as unidades imaginárias:

$$ij = k; ji = -k;$$

$$jk = i; kj = -i;$$

$$ki = j; ik = -j;$$

$$ijk = -1.$$

donde concluímos que o produto entre as unidades imaginárias é não comutativa.

Se temos os quatérnions $q = a+bi+cj+dk$ e $p = e+fi+gj+hk$ teremos o quatérnion $qp = (ae-bf-cg-dh) + (af+be+ch-dg)i + (ag-bh+ce+df)j + (ah+bg-cf+de)k$. Devemos observar que a parte escalar é a mesma em qp e em pq .

Tendo em vista a soma e o produto dos quatérnions como foram apresentados acima podemos verificar que as seguintes regras são válidas para os mesmos:

Sendo p , q e r quatérnions, temos:

Em relação à soma:

- a) associatividade: $(p+q)+r = p+(q+r)$.
- b) Existência de elemento neutro: $q+o = o+q = q$; o é o elemento neutro para a soma.
- c) Existência de elemento inverso: $q+(-q) = (-q)+q = o$; $(-p)$ é inverso de p , para a soma.
- d) Comutatividade: $p+q = q+p$.

Em relação à multiplicação:

- a) associatividade: $p(qr) = (pq)r$.
- b) Existência de elemento neutro: $1q = q1 = q$, onde 1 é o elemento neutro para a multiplicação.
- c) Existência de elemento inverso: $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$, onde q^{-1} é o inverso multiplicativo de q (veja abaixo a expressão de q^{-1}).

Em relação à soma e multiplicação:

- Distributividade: $p(q+r) = pq+qr$.

Chamamos atenção ao fato de que a multiplicação dos quatérnions é não-comutativa.

Conjugação

A conjugação de um quatérnion é uma operação semelhante à conjugação de um complexo, ou seja, se $q = a+bi+cj+dk$ então o seu conjugado será: $q^* = a-bi-cj-dk$. O quatérnion conjugado do q denota-se por q^* ou $\bar{q}$.

Tendo em vista isto e as operações de soma e de multiplicação dos quatérnions, concluímos o seguinte:

a) $(q + r)^* = q^* + r^*$

b) $(qr)^* = r^*q^*$

c) $(q^*)^* = q$. Por esta propriedade dizemos que a conjugação é uma involução para os quatérnions.

A conjugação dos quatérnions nos permite separar a parte escalar (real) e a parte vetorial (pura) do mesmo, da seguinte forma:

a) $R(q) = \frac{q + q^*}{2}$.

b) $P(q) = \frac{q - q^*}{2}$.

Norma

A norma de um quatérnion nada mais é do que a raiz quadrada do produto deste quatérnion e o seu conjugado. Ou seja: $\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Inverso multiplicativo

O inverso multiplicativo q^{-1} do quatérnion q é obtido da forma abaixo:

$$qq^{-1} = 1 \Rightarrow q^*qq^{-1} = q^* \Rightarrow |q|^2 q^{-1} = q^* \Rightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}.$$

Rotação

Como citamos anteriormente, Olinde Rodrigues foi pioneiro no estudo das rotações de vetores, que aqui apresentamos.

Os quatérnions são ferramentas matemáticas úteis para descrever rotações de vetores no espaço tridimensional.

Seja q um quatérnion tal que $q^* = q^{-1}$ e $q = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é unitário.

Seja, ainda, $\mathbf{v}$ um vetor, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Então $\mathbf{v}' = q\mathbf{v}q^*$ corresponde ao vetor que resulta da rotação de $\mathbf{v}$ em torno do eixo cuja direção é dada por $\mathbf{u}$, por um ângulo 2θ .

Uma demonstração deste fato encontra-se no artigo de Maria Pinheiro [12].

Exemplo: Qual o quatérnion que representa uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ de um vetor $\mathbf{v}$ em torno do eixo cuja direção é dada por $k = (0, 0, 1)$?

$$\text{Resp: } q = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} k \Rightarrow q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} k.$$

Se temos o vetor $\mathbf{v}' = q\mathbf{v}q^*$, com $q^* = q^{-1}$ e aplicarmos a operação $q^*(q\mathbf{v}q^*)q$ obteremos $\mathbf{v}$, pois $q^*(q\mathbf{v}q^*)q = (q^*q)\mathbf{v}(q^*q) = \mathbf{v}$, ou seja, desfazemos assim a operação $\mathbf{v}' = q\mathbf{v}q^*$.

Efetuar a operação de rotação de um vetor $\mathbf{v}$ pelo quatérnion pq tem o mesmo efeito de efetuar a rotação por q e depois por p , pois $(pq)\mathbf{v}(pq)^* = (pq)\mathbf{v}(q^*p^*) = p(q\mathbf{v}q^*)p^*$.

A vantagem de se tratar rotações de vetores com quatérnions reside no fato de ser mais simples que o tratamento com matrizes ou por ângulos de Euler.

Outra representação dos quatérnions

Os quatérnions podem ser representados, em analogia à representação dos números complexos, por pares de reais. Nos números complexos temos $z = (a, b)$ representando o complexo $z = a + bi$. Da mesma forma, o quatérnion $q = a + bi + cj + dk$ pode ser representado pela quádrupla (a, b, c, d) . Temos, portanto, as seguintes representações correspondentes: $1 = (1, 0, 0, 0)$; $i = (0, 1, 0, 0)$; $j = (0, 0, 1, 0)$; e $k = (0, 0, 0, 1)$.

Tal representação deixa claro que $\mathbb{H}$ é um espaço vetorial de dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$.

2.4 A álgebra de extensão ou de Grassmann

Hermann Grassmann foi o matemático que teve a felicidade de introduzir o conceito de vetores na matemática, com o qual conseguiu fazer uma ligação entre geometria e álgebra, algo que sempre foi tentado por matemáticos como Euclides e René Descartes.

Os vetores, como sabemos, possuem uma magnitude (módulo), direção e sentido (orientação).

Para representar planos Grassmann elaborou o chamado produto externo entre dois vetores deste plano, que representa um fragmento do plano, ou plaqueta. O resultado do produto exterior entre dois vetores é o que chamamos de bivector e o designamos

por uma letra maiúscula. O bivetor é, portanto, um elemento de plano orientado, da mesma forma que um vetor é um elemento de linha orientado. A magnitude de um bivetor é um escalar que corresponde à área compreendida entre os dois vetores que o determinam. Então, a magnitude do bivetor $\mathbf{B}$ é o escalar denotado por $|\mathbf{B}|$.

A representação do produto exterior entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. A orientação de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ é oposta à de $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$, portanto $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$, ou seja, o produto exterior é anti-comutativo. Abaixo vemos as representações geométricas do produto exterior entre dois vetores.

Sendo dados $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ elementos da base canônica do espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$, e sendo $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, o produto exterior entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ será :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_1v_2 - u_2v_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (u_1v_3 - u_3v_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) + (u_2v_3 - u_3v_2)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3).$$

Uma vez definida uma representação para o plano, fez-se necessária a representação para o espaço. Para isso basta efetuar um produto exterior entre um bivetor e um vetor, gerando um trivetor que é um segmento de volume orientado. Assim como um bivetor encerra uma área de um paralelogramo em seu interior, o trivetor engloba o volume de um paralelepípedo.

Na álgebra de Grassmann podemos representar objetos geométricos em quaisquer dimensões, e não apenas até 3 dimensões, ou seja, temos n -vetores para representar objetos n -dimensionais.

2.5 A álgebra geométrica ou álgebra de Clifford

Introdução

A álgebra geométrica foi criada pelo matemático inglês William Clifford por volta de 1880 e tem a vantagem de aglutinar as vantagens da álgebra de Grassmann e dos quatérnions de Hamilton, além de ser capaz de representar os fenômenos físicos nas dimensões que se fizerem necessárias, com objetos geométricos adequados.

A álgebra geométrica do espaço euclidiano

Ainda que a álgebra geométrica possa ser empregada em outros sistemas, o presente trabalho ater-se-á apenas ao espaço euclidiano tridimensional, onde é válido o teorema de Pitágoras. Nestas condições nos referimos à álgebra de Clifford como $\mathcal{Cl}_3$

Vamos considerar a base do espaço tridimensional com os elementos unitários (versores) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Portanto, um vetor fica descrito como $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ nesta base, com $x_i \in \mathbb{R}$. O seu módulo $|\mathbf{v}|$ é tal que $|\mathbf{v}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Para o produto entre dois vetores consideramos a regra distributiva e, também as seguintes regras na multiplicação dos elementos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^2 = 1, \text{ para } (i = 1, 2, 3),$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0, \text{ para } i \neq j.$$

Tais regras se justificam pelo seguinte: no espaço euclidiano, considerando o $\mathbb{R}^2$, por exemplo, ao multiplicarmos um vetor por ele mesmo devemos obter o quadrado do seu módulo, ou seja, $\mathbf{v}\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Sendo $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, temos, usando a distributividade:

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3)(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1x_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + x_2x_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + x_1x_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + x_2x_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \text{ mas devemos ter } |\mathbf{v}|^2 = x_1^2 + x_2^2. \text{ Para isso, faz-se necessário que tenhamos:}$$

(i) $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = 1$, e mais ainda:

(iia) $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$, ou:

(iib) $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$.

Na álgebra geométrica utiliza-se a opção (iib), ou seja, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$. Na álgebra vetorial, todavia, é utilizada a opção (iia), $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$.

Esta é uma das diferenças fundamentais entre a álgebra de Clifford e a vetorial.

Ao admitir que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$ parte-se do princípio que $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ será sempre um escalar.

Ao adotar $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$, a álgebra geométrica admite a existência de um novo objeto, o bivector, que permite melhor representar certas grandezas físicas e que será visto adiante.

Bivetores

Na álgebra geométrica surge o bivector, ou 2-vetor, que se origina do produto externo entre dois vetores, como na álgebra de Grassmann. Portanto, o bivector W , resultante do produto externo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, nesta ordem, será o bivector $W = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, que possui magnitude, dada pela área do paralelogramo formado pela área gerada pelos dois vetores, direção, dada pelo plano que contém os dois vetores e sentido que neste caso será o que se obtém percorrendo a borda de $\mathbf{u}$ para $\mathbf{v}$. Por outro lado, o bivector $-W = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ possui a mesma magnitude, a mesma direção, porém sentido oposto ao do bivector W .

Um bivector unitário é aquele que possui magnitude 1.

O conjunto dos bivectores forma um espaço vetorial cuja base são os bivectores unitários $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, obtidos pelos produtos externos entre os vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Podemos denotar um bivector $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ como $\mathbf{e}_{ij}$.

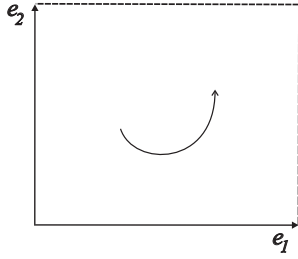


Figura 2.2: Bivector $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$

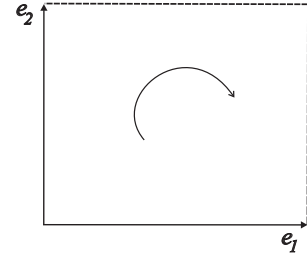


Figura 2.3: Bivector $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$

Um bivector é, portanto, uma combinação linear dos elementos desta base, ou seja $W = w_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + w_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + w_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

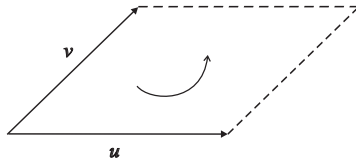


Figura 2.4: Bivector $W = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

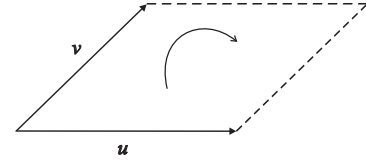


Figura 2.5: Bivector $-W = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$

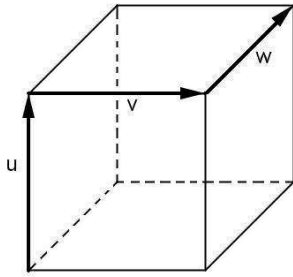
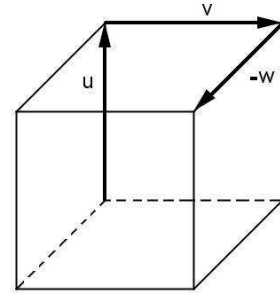
Os bivectores representam grandezas em duas dimensões, tais como o *momentum angular*.

Trivetores

O trivetor, ou 3-vetor, é outro objeto que surge na álgebra geométrica $\mathcal{Cl}_3$. Ele é o resultado do produto externo entre três vetores. Por exemplo, sejam os vetores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$. Se fizermos $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ obteremos o trivetor T , ou seja, $T = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, que tem sua expressão dada por:

$$T = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.$$

O trivetor possui magnitude, que corresponde ao volume do paralelepípedo formado pelos três vetores, direção, que é a mesma do espaço que lhe suporta e sentido, de acordo com o sentido dos vetores. Para exemplificarmos o sentido que um trivetor pode ter, considere o trivetor $T = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. O trivetor $-T = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (-\mathbf{w})$, em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ mantiveram os seus sentidos e $\mathbf{w}$ teve o seu sentido invertido, tem sentido oposto ao trivetor T .

Figura 2.6: Trivetor T Figura 2.7: Trivetor $-T$

O trivetor é objeto de um espaço unidimensional, cuja base canônica tem como elemento: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$. O objeto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ é, portanto, um elemento de volume orientado em $\mathcal{Cl}_3$. Podemos, também, denotar um trivetor $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ como $\mathbf{e}_{ijk}$.

O produto vetorial de três vetores obedece às seguintes propriedades:

- a) é associativo: $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
- b) é antissimétrico: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$,

para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

O volume do trivetor $T = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ é igual ao valor absoluto do determinante usado para calcular a expressão do trivetor e mostrada acima.

Espaços vetoriais e graduação

Seja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$ um bivector. Ele pode ser interpretado como uma classe de equivalência de fragmentos do plano de mesma magnitude (área), direção e orientação, dentro de um espaço afim $\mathcal{A}_3$ [13]. Os bivectores também podem ser chamados de 2-vetores.

Os bivectores formam um espaço vetorial associado a um espaço tridimensional por satisfazerem todas as propriedades necessárias para isto.

O espaço vetorial dos bivectores em $\mathbb{R}^3$ é denotado, na álgebra geométrica, pela notação $\wedge^2(\mathbb{R}^3)$.

De forma análoga aos bivectores, podemos chamar os vetores de 1-vetores, os trivetores de 3-vetores e os escalares, de 0-vetores.

O espaço vetorial dos escalares é denotado por $\wedge^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ e o dos vetores por $\wedge^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$. Quanto aos trivetores, ou 3-vetores, estes constituem um espaço vetorial denotado por $\wedge^3(\mathbb{R}^3)$.

Temos, portanto, associados a um espaço tridimensional, os seguintes espaços vetoriais: $\wedge^0(\mathbb{R}^3)$; $\wedge^1(\mathbb{R}^3)$; $\wedge^2(\mathbb{R}^3)$; e $\wedge^3(\mathbb{R}^3)$.

Se fizermos a soma direta $\wedge(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{k=0}^3 \wedge^k(\mathbb{R}^3)$ teremos uma estrutura coerente [14] e um elemento desta estrutura chama-se *multivetor*.

Graduação

Dizemos que os trivetores têm graduação 3. Da mesma forma, os escalares, os vetores e os bivectores têm, respectivamente, as graduações 0, 1 e 2.

Multivetores

O multivetor é o elemento presente na álgebra geométrica e compõe-se da soma de escalar, vetor, bivector e trivetor, na sua forma mais completa.

Um multivetor $M \in \wedge(\mathbb{R}^3)$ tem a forma:

$$M = (m) + (m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + m_3 \mathbf{e}_3) + (m_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + m_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + m_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) + (m_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3).$$

A norma $|M|$ deste multivetor é tal que

$$|M|^2 = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 + m_{123}^2.$$

Se considerarmos um multivetor do tipo $M_+ = (m) + (m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)$, ou seja, que possua somente escalar e bivector (ou somente um desses dois objetos), estaremos usando o que se chama subálgebra par, representada por $\mathcal{Cl}_3^+$, que é uma subálgebra da álgebra $\mathcal{Cl}_3$, pois é fechada com relação às operações de soma e multiplicação.

No caso de considerarmos um multivetor $M_- = (m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3) + (m_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, que possui apenas vetor e trivetor (ou somente um deles), estaremos usando o que se chama $\mathcal{Cl}_3^-$, que no entanto não é fechada para a multiplicação, não se constituindo, portanto, em uma subálgebra.

Seja o multivetor:

$$M = (m) + (m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3) + (m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) + (m_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3).$$

Se quisermos nos referir ao objeto de graduação k deste multivetor diremos M_k . Por exemplo, nos referiremos ao bivector que o constitui como:

$$M_2 = m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

Produto geométrico

Dado dois multivetores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, o produto geométrico entre eles é uma operação típica da álgebra geométrica definida por:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.$$

A primeira parcela do segundo membro, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, é conhecida como produto interno. À outra, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, damos o nome de produto externo.

O produto interno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ corresponde ao produto escalar da álgebra de Gibbs. O seu valor é calculado da mesma forma, ou seja, para o caso dos vetores acima, temos:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. O produto interno de vetores é, portanto, comutativo, constituindo-se na parte simétrica do produto geométrico. Podemos notar que o produto interno de dois vetores resulta em um escalar, ou seja, ocorre a redução de uma unidade na graduação em relação aos objetos envolvidos na operação. Esse produto interno obedece, ainda, à seguinte regra: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os dois vetores que se multiplicam internamente.

O *produto externo*, também conhecido como produto cunha ou produto de Grassmann, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, é calculado por:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

fórmula que pode ser escrita sob forma de determinante, de maneira semelhante ao produto vetorial de Gibbs.

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

O produto externo de vetores é, portanto, anticomutativo, constituindo-se na parte antisimétrica do produto geométrico.

O produto externo de dois vetores gera um bivector, ocasionando, portanto o aumento de uma unidade na graduação. Logo, o produto geométrico entre dois vetores afeta os mesmos de modo a diminuir um grau, pelo produto interno, e aumentar um grau na graduação, devido ao produto externo.

O módulo do bivector gerado pelo produto externo dos dois vetores é numericamente igual à área do paralelogramo determinado pelos dois vetores e, se conhecemos o ângulo θ , $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, entre os eles podemos calculá-lo utilizando a fórmula:

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta.$$

Podemos efetuar o produto externo entre um bivector e um vetor. Esta operação gera um paralelepípedo cuja base corresponde à área gerada pelo bivector e a altura corresponde ao vetor. O objeto gerado é, portanto, um trivector, dotado de magnitude (corresponde ao volume), direção e sentido (dado pela regra da mão direita, ou da mão esquerda). A dimensão de um trivector é 1. O produto externo entre o vetor $\mathbf{u}$ e o bivector $V = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ será $\mathbf{u} \wedge V = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

É importante notar que $\mathbf{u} \wedge V = V \wedge \mathbf{u}$, ou seja, o produto externo entre um vetor e um bivector é comutativo pois: $\mathbf{u} \wedge V = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = V \wedge \mathbf{u}$.

Propriedades do produto geométrico

Abaixo apresentamos as principais propriedades do Produto Geométrico:

a) *Não Comutatividade*

O produto geométrico entre dois vetores quaisquer, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, é não comutativo. A sua parte simétrica é composta pelo produto interno, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, e o produto externo, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, é a parte anti-simétrica do mesmo.

Considerando os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, temos:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \text{ logo, } \mathbf{u}\mathbf{v} \neq \mathbf{v}\mathbf{u}.$$

Podemos observar, contudo que:

- se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ou seja, se os vetores forem ortogonais, teremos $\mathbf{u}\mathbf{v} = -\mathbf{v}\mathbf{u}$, pois neste caso, $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{v}\mathbf{u}$.

- se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$, ou seja, se os vetores forem paralelos, teremos $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u}$, pois aqui, $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}\mathbf{u}$.

b) *Distributividade*

O produto geométrico é distributivo à direita e à esquerda, ou seja, considerando os vetores u , v e w , temos:

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}, \text{ e}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathbf{w} + \mathbf{v}\mathbf{w}.$$

c) *Multiplicação por escalar*

Sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores e λ um escalar, temos:

$$\lambda(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{u}(\lambda\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u})\mathbf{v}.$$

Tendo visto as propriedades acima, podemos chegar a uma relação entre produto geométrico e produto interno e também a uma relação entre produto geométrico e produto externo. Ambas são úteis no caso de se querer chegar ao produto interno ou ao produto externo se se conhecem os produtos geométricos.

- *Relação entre produto interno e produto geométrico:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}).$$

- *Relação entre produto externo e produto geométrico:*

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}).$$

Mostraremos como chegar à primeira destas fórmulas. A outra é análoga:

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} + \mathbf{vu} &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}). \end{aligned}$$

- *Produto geométrico entre três vetores.*

Por definição temos que o produto geométrico entre três vetores, u , v e w , por exemplo, obedece à regra associativa, ou seja:

$$\mathbf{u}(\mathbf{vw}) = (\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{uvw}.$$

- *Produto Geométrico entre um vetor e um bivector.*

Podemos efetuar o produto entre um vetor $\mathbf{u}$ e um bivector $V = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. Tal produto pode ser expresso como a soma das partes simétrica e anti-simétrica, como se segue:

$$\mathbf{u}V = \frac{1}{2}(\mathbf{u}V + V\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(V\mathbf{u} - \mathbf{u}V) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}V - V\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}V + V\mathbf{u}).$$

Como vimos anteriormente, o produto externo entre um vetor e um bivector é comutativo, ou seja, $\mathbf{u} \wedge V = V \wedge \mathbf{u}$. Logo, devemos fazer:

Parte simétrica: $\mathbf{u} \wedge V = \frac{1}{2}(\mathbf{u}V + V\mathbf{u}) = V \wedge \mathbf{u}$; e

Parte anti-simétrica: $\mathbf{u} \cdot V = \frac{1}{2}(\mathbf{u}V - V\mathbf{u}) = -V \cdot \mathbf{u}$.

Com isso podemos escrever a expressão para o produto geométrico entre um vetor e um bivector:

$$\mathbf{u}V = \mathbf{u} \cdot V + \mathbf{u} \wedge V.$$

Está demonstrado em [6] que:

$$\mathbf{u} \cdot V = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v}.$$

Isso significa que o produto interno de um vetor com um bivector resulta em um vetor. Combinando essas duas expressões temos:

$$\mathbf{u}V = \mathbf{u} \cdot V + \mathbf{u} \wedge V = [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v}] + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

ou seja, o produto geométrico entre um vetor e um bivector resulta na soma de um vetor e um trivector.

Podemos generalizar $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ para o caso de $\mathbf{u}\mathbf{V}_k$, onde $\mathbf{V}_k$ é um k -vetor e $\mathbf{u}$ é um vetor.

Neste caso, temos: $\mathbf{u}\mathbf{V}_k = \mathbf{u} \lrcorner \mathbf{V}_k + \mathbf{u} \wedge \mathbf{V}_k$.

O símbolo " $\lrcorner$ " significa *contração* pela esquerda, ou seja, $\mathbf{u} \lrcorner \mathbf{V}_k$ significa contração de $\mathbf{V}_k$ pela esquerda, por $\mathbf{u}$. Neste caso, ainda, temos que $\mathbf{u} \lrcorner \mathbf{V}_k$ resulta em um $(k-1)$ -vetor.

Se tivermos $\mathbf{u} \lrcorner \mathbf{V}_k$, em que $k = 1$, ou seja, $\mathbf{u} \lrcorner \mathbf{v}$, teremos como resultado um escalar e, neste caso, representamos a operação como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

No caso de $\mathbf{u} \lrcorner \mathbf{V}_2$, ou seja, o produto interno de um vetor com um bivector, o resultado será um vetor, como era de se esperar.

Segundo Lounesto [9], podemos escrever, no caso em que $\mathbf{x}$ é um vetor e $\mathbf{v}$ é um k -vetor em $\bigwedge^k \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} \lrcorner \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{v} - (-1)^k \mathbf{v}\mathbf{x}) \in \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^3.$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{v} + (-1)^k \mathbf{v}\mathbf{x}) \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^3.$$

Temos, ainda, a seguinte propriedade:

$$\mathbf{x} \lrcorner (\mathbf{u}\mathbf{v}) = (\mathbf{x} \lrcorner \mathbf{u})\mathbf{v} + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x} \lrcorner \mathbf{v}), \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}\ell_3$$

No caso do produto geométrico entre dois vetores, ou seja, $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, o resultado é uma soma entre um escalar e um bivector.

Generalizando, podemos verificar que o produto interno de um vetor por outro ob-

jeto diminui a graduação deste de uma unidade enquanto que o produto externo tem o efeito oposto, ou seja, aumenta a sua graduação de uma unidade.

Em se tratando de $\mathcal{Cl}_3$, se fizermos o produto geométrico entre um vetor e um 3-vetor o produto externo anular-se-á pois o 4-vetor que seria gerado não é objeto do $\mathcal{Cl}_3$.

O projetor $\langle \rangle_k$

Define-se $\langle \rangle_k: \wedge(\mathbb{R})^3 \rightarrow \wedge^k(\mathbb{R})^3$ como sendo: $\langle M \rangle_k = M_k$, ($k = 0, 1, 2, 3$), ou seja, $\langle \rangle_k$ "extrai" o objeto de grau k do multivetor a que se refere.

Por exemplo: se $M = (m) + (m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3) + (m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) + (m_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, então $\langle M \rangle_3 = M_3 = m_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Para um multivetor M , temos: $M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3$.

Involuções

Dado um multivetor M em $\mathcal{Cl}_3$, ou seja, $M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3$, temos as seguintes involuções:

Involução Graduada ou Graduação: $\hat{M} = \langle M \rangle_0 - \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3$;

Reversão: $\tilde{M} = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3$; e

Conjugação: $\bar{M} = \langle M \rangle_0 - \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3$

A Conjugação pode ser obtida pela composição das outras duas involuções, ou seja, $\bar{M} = \tilde{\hat{M}} = \hat{\tilde{M}}$.

Por serem involuções, qualquer uma das três operações é desfeita caso seja efetuada em duplicidade.

Para obtermos a graduação e a reversão podemos lançar mão das seguintes relações, segundo Vaz [14] :

$$\text{Graduação: } \hat{M}_k = (-1)^k M_k; \quad \text{Reversão: } \tilde{M}_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} M_k.$$

Por exemplo, para calcularmos uma reversão em $\mathcal{Cl}_4$, faremos: $\tilde{M}_0 = (-1)^0 \langle M \rangle_0 = \langle M \rangle_0$; $\tilde{M}_1 = (-1)^0 \langle M \rangle_1 = \langle M \rangle_1$; $\tilde{M}_2 = (-1)^1 \langle M \rangle_2 = -\langle M \rangle_2$; $\tilde{M}_3 = (-1)^3 \langle M \rangle_3 =$

$$-\langle M \rangle_3; \tilde{M}_4 = (-1)^6 \langle M \rangle_4 = \langle M \rangle_4.$$

Portanto, neste caso teremos: $\tilde{M} = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4$.

Segundo Lounesto [9] a graduação é um automorfismo, isto é, $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \hat{u}\hat{v}$, enquanto a reversão e a conjugação são antiautomorfismos, ou seja, $\widetilde{uv} = \tilde{v}\tilde{u}$ e $\overline{uv} = \bar{v}\bar{u}$.

Ainda segundo Lounesto [9], página 57, temos:

- A reversão pode ser usada para estender a norma do $\mathbb{R}^3$ para todos de $\mathcal{C}\ell_3$, por:

$$|u|^2 = \langle u\tilde{u} \rangle_0;$$

- A conjugação pode ser usada para determinar o inverso de $u \in \mathcal{C}\ell_3$:¹

$$u^{-1} = \frac{\bar{u}}{u\bar{u}}, \quad u\bar{u} \neq 0.$$

- A involução graduada pode ser utilizada para obtermos a soma direta:

$$\mathcal{C}\ell_3 = \mathcal{C}\ell_3^+ \oplus \mathcal{C}\ell_3^-, \text{ pois } M_{\pm} = \frac{1}{2}(M \pm \hat{M})$$

O inverso multiplicativo

O inverso multiplicativo do multivetor M , denotado por M^{-1} , é o multivetor que obedece à seguinte equação: $MM^{-1} = M^{-1}M = 1$.

Quando se trata de um vetor, $\mathbf{u}$, por exemplo, o seu inverso é dado pela fórmula $\mathbf{u}^{-1} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}$, pois $\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1} = 1 \Rightarrow \mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u} \Rightarrow |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u}^{-1} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}$.

Existem multivetores que não admitem inverso. Com efeito, o multivetor $M = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1)$ pode ser citado como exemplo, pois não existe um multivetor M^{-1} com a propriedade $MM^{-1} = M^{-1}M = 1$.

A utilização do inverso multiplicativo se dá quando temos a necessidade de dividir um multivetor por outro.

Para dividirmos o multivetor U pelo multivetor M temos duas opções: pela direita ou pela esquerda. Isto porque não podemos garantir que U e M^{-1} comutem. Temos, portanto: [6]

- Divisão de U por M pela esquerda: $M^{-1}U$, e²

- Divisão de U por M pela direita: UM^{-1} .

¹ Todo vetor não nulo possui inverso. Entretanto, isto nem sempre ocorre com os multivetores.

² A divisão pela esquerda não é equivalente à divisão pela direita, a menos que U comute com M^{-1} .

Dualidade

Dado um k -vetor U_k definimos o seu dual $\star U_k$ através de: $\star U_k = \tilde{U}_k I$, onde $I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

Se considerarmos um 3-vetor o seu dual será um escalar (0-vetor) e vice-versa. Por este motivo, o 3-vetor é chamado pseudo-escalar. Por sua vez, o dual de um vetor é um bivector e vice-versa e por isso chamamos um bivector de pseudo-vetor.

Uma propriedade importante a se notar é que um objeto e seu dual têm o mesmo número de componentes (mesma dimensão), ou seja:

O Escalar e o 3-vetor têm ambos 1 componente. Exemplo: Escalar, $N = u$ e 3-vetor, $T = u_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

O Vetor e o bivector têm ambos 3 componentes. Exemplo: Vetor, $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$ e Bivector, $U = u_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + u_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + u_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

Vamos calcular, como exemplo, o dual de $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$. Temos:

$$\star(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = (\widetilde{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}) I = (-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3, \text{ ou seja,}$$

$$\star(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3. \text{ De modo semelhante calculam-se os outros duais.}$$

Assim, temos:

$$\star 1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = I;$$

$$\star \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3;$$

$$\star \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1;$$

$$\star \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2;$$

$$\star(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3;$$

$$\star(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2;$$

$$\star(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1;$$

$$\star I = 1.$$

O dual de um objeto pode representar a mesma grandeza representada por este objeto. O momentum angular, por exemplo, é definido pelo 2-vetor $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$. O vetor momentum angular $\mathbf{l}$ é o dual de $\mathbf{L}$, ou seja, $\mathbf{l} = \star \mathbf{L}$.

Como dissemos anteriormente, devido à operação de dualidade, como o dual de um bivector é um vetor é comum chamarmos um bivector de pseudo-vetor, assim como chamam-se os 3-vetores de pseudo-escalar.

Entretanto em álgebras geométricas diferentes da $\mathcal{Cl}_3$ isto não ocorre. Se tomarmos a $\mathcal{Cl}_4$, por exemplo, temos que tanto os vetores quanto os 3-vetores são representados por 4 componentes. Logo, em $\mathcal{Cl}_4$ o dual de um 3-vetor é um vetor e vice-versa. Já em $\mathcal{Cl}_2$ um bivetor é dual de um escalar e vice-versa, pois ambos são representados por apenas 1 componente nesta álgebra.

Podemos determinar a quantidade de componentes de um k -vetor em $\mathcal{Cl}_n$. Ele é dado pelo número binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Então, por exemplo, em $\mathcal{Cl}_4$ o número de componentes de um 3-vetor é $\frac{4!}{(4-3)!3!} = 4$ e o de um vetor é $\frac{4!}{(4-1)!1!} = 4$.

A álgebra geométrica e os quatérnions

Mostraremos aqui que a álgebra geométrica par $(\mathcal{Cl}_3^+)$ é isomorfa a dos Quatérnions $(\mathbb{H})$.

Já dissemos acima que os quatérnions são elementos que têm a forma

$$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Temos ainda, nos quatérnions, as seguintes relações: $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$.

Seja o multivetor $M = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \in \mathcal{Cl}_3^+$.

Façamos ser $\mathbf{i} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, e $\mathbf{k} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$.

Com isso podemos reescrever M como $M = m - m_{23}\mathbf{i} - m_{31}\mathbf{j} - m_{12}\mathbf{k}$.

É fácil ver que $\mathbf{i}^2 = (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1$. Podemos verificar, ainda, que:

$$\mathbf{j}^2 = -1; \quad \mathbf{k}^2 = -1; \quad \mathbf{ijk} = -1; \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

Com isso fica claro que é possível fazer as associações:

$$i \leftrightarrow \mathbf{i} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2; \quad j \leftrightarrow \mathbf{j} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3; \quad k \leftrightarrow \mathbf{k} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$$

de onde se conclui ser lícito identificar as unidades quaterniônicas $\{i, j, k\}$ com os bivetores $\{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\}$ da álgebra geométrica, estabelecendo-se, assim, o isomorfismo $\mathcal{Cl}_3^+ \simeq \mathbb{H}$.

Utilizando os duais, podemos verificar que:

$i \leftrightarrow -(\star\mathbf{e}_1) = -(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$ e, da mesma forma,

$j \leftrightarrow -(\star\mathbf{e}_2)$ e, ainda, $k \leftrightarrow -(\star\mathbf{e}_3)$.

Com isso, podemos escrever: $M = m + \mathbf{I}(m_{23}\mathbf{e}_1 + m_{31}\mathbf{e}_2 + m_{12}\mathbf{e}_3) \in \mathcal{Cl}_3^+ \simeq \mathbb{H}$.

O isomorfismo entre os quatérnions e a álgebra geométrica dá-se com a identificação entre as unidades quaterniônicas (i, j, k) e os bivetores (ou pseudovetores) da álgebra geométrica. Já a álgebra vetorial tratou de identificar as unidades quaterniônicas com os vetores ortonormais $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, base desta álgebra.

A álgebra geométrica, isomorfa à dos quatérnions, é mais abrangente que esta por não se restringir ao espaço tridimensional, podendo ser utilizada em dimensões maiores.

A álgebra geométrica Cl_3 e a álgebra vetorial

O produto vetorial entre os vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é, na álgebra vetorial de Gibbs, considerado um vetor ortogonal ao plano formado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, sendo calculado por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$

Esta operação possui uma incoerência que se observa ao se inverter o sentido dos vetores envolvidos. Como resultado, era de se esperar que o vetor resultante tivesse o seu sentido também invertido o que, na realidade, não ocorre. Se fizermos o produto vetorial assim definido entre os vetores $-\mathbf{u}$ e $-\mathbf{v}$, obteremos:

$$\mathbf{w}' = (-\mathbf{u}) \times (-\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 \end{vmatrix} =$$

$$(u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

Logo, vemos que o sentido de $\mathbf{w}$ e de $\mathbf{w}'$ é o mesmo, o que se constitui numa grave incoerência. O resultado de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ não pode ser considerado, portanto, um vetor, por não se comportar como tal.

O resultado do chamado produto misto entre os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{x}$, denotado $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}$ possui, também, uma incoerência. Ao se inverterem os sentidos dos vetores não deveria haver mudança no resultado, que é um escalar, o que no entanto, não ocorre, ou seja, mudando-se os sentidos dos vetores envolvidos muda o sinal do escalar, o que se constitui numa outra incoerência na álgebra vetorial.

Na álgebra de Clifford tais incoerências não ocorrem ao calcularmos o produto vetorial entre vetores. Em tal álgebra o **produto vetorial** é definido como:

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -I(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})I$ ³ ou, equivalentemente, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = I(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, ou seja, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor dual do bivetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Se quadrarmos a relação $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -I(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$, teremos: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2 = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2$, ou seja, a magnitude de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é igual à área do paralelogramo formado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e que compõem $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Calculando, agora, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, obtemos:

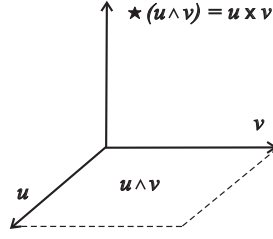
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2.$$

Usando as relações de dualidade $\star(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$; $\star(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$; e $\star(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$ no resultado obtido, ficamos com:

$$\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3, \text{ um vetor.}$$

Vamos verificar se, mudando o sentido dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o sentido do produto vetorial na álgebra geométrica também muda de sentido. Temos, portanto, $\mathbf{u} \mapsto -\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$. Como cada $\mathbf{e}_i$ muda de sentido, ou seja, $\mathbf{e}_i \mapsto -\mathbf{e}_i$, verifica-se que $I =$

³ Como é arbitrário usarmos a regra da mão direita ou a regra da mão esquerda para determinar o sentido de $u \times v$, é arbitrário usar I ou $-I$ na determinação de um dual. Podemos arbitrar: $u \times v = -I(u \wedge v)$ ou $u \times v = I(u \wedge v)$

Figura 2.8: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mapsto -I.$$

Ficamos, portanto, com:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -I(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \mapsto -(-I)[(-\mathbf{u}) \wedge (-\mathbf{v})] = I[\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}] = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Conclusão: quando fazemos uma inversão nos vetores que compõem o produto vetorial (como definido na álgebra geométrica), bem como dos $\mathbf{e}_i$, o vetor resultante sofre, também, uma inversão, ou seja, o produto vetorial é, neste caso, coerente.

Conforme podemos ler em [6] cabe aqui uma advertência: livros de álgebra vetorial normalmente fazem uma distinção entre vetores polares e vetores axiais, sendo $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ identificado como vetor axial e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, como vetores polares.

Esta identificação é desnecessária na álgebra geométrica. O "vetor axial" nada mais é que um bivector dissimulado em vetor.

O produto vetorial de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, definido como $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -I(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$, é um vetor, exatamente da mesma forma que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores.

Concluimos, portanto, que a álgebra geométrica engloba as de Grassmann e a estrutura dos quatérnions de forma satisfatória e consistente, não apresentando incoerências internas.

A álgebra geométrica $\mathcal{C}\ell_3$ e a álgebra das matrizes complexas 2×2

As matrizes σ_1 , σ_2 e σ_3 abaixo são conhecidas como matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrizes têm grande aplicação em mecânica quântica: são os ingredientes fundamentais do formalismo envolvendo partículas de spin 1/2. Vejamos a sua relação

com a álgebra de Clifford.

As matrizes de Pauli obedecem às seguintes regras ⁴:

$$\sigma_i^2 = 1, \text{ para } i = 1, 2, 3, \text{ e}$$

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \text{ para } i \neq j.$$

Estas regras são semelhantes às propriedades satisfeitas por $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ na álgebra geométrica. Podemos, então, fazer as associações:

$$\sigma_1 \leftrightarrow \mathbf{e}_1, \sigma_2 \leftrightarrow \mathbf{e}_2, \text{ e } \sigma_3 \leftrightarrow \mathbf{e}_3$$

e estabelecer, assim, um isomorfismo entre uma particular álgebra de Clifford ($\mathcal{Cl}_3$) e a das matrizes complexas 2×2 .

$$\text{Efetuando o produto } \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \text{ obtemos } \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$$

Seja o multivetor

$M = m + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + m_3 \mathbf{e}_3 + m_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + m_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + m_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + m_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, que pode ser reescrito, utilizando duais, como:

$$M = m + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + m_3 \mathbf{e}_3 + m_{12} \star \mathbf{e}_3 - m_{13} \star \mathbf{e}_2 + m_{23} \star \mathbf{e}_1 + m_{123} I.$$

Escrevendo este multivetor com as correspondentes matrizes de Pauli obteremos:

$$\begin{aligned} (M) = & m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ & m_{12} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - m_{13} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + m_{23} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ & m_{123} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efetuando as operações acima, obtemos:

$$(M) = \begin{pmatrix} (m + m_3) + i(m_{12} + m_{123}) & (m_1 - m_{13}) - i(m_2 - m_{23}) \\ (m_1 + m_{13}) + i(m_2 + m_{23}) & (m - m_3) - i(m_{12} - m_{123}) \end{pmatrix}.$$

⁴ Quando escrevemos $\sigma_i^2 = 1$, o segundo membro da igualdade significa $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esta é, portanto, a representação matricial do multivetor M . Se fizermos:

$$z_1 = (m + m_3) + i(m_{12} + m_{123});$$

$$z_2 = (m_1 + m_{13}) + i(m_2 + m_{23});$$

$$z_3 = (m_1 - m_{13}) - i(m_2 - m_{23});$$

$$z_4 = (m - m_3) - i(m_{12} - m_{123}),$$

teremos a correspondência: $M \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}$, ou seja, a correspondência entre um

multivetor em $\mathcal{C}\ell_3$ e uma matriz complexa 2×2 .

Desta forma podemos representar um multivetor que pertença a $\mathcal{C}\ell_3^+$ e também as involuções:

Se $M \in \mathcal{C}\ell_3^+$ é porque $m_1 = m_2 = m_3 = m_{123} = 0$, portanto, neste caso, teremos:

$$z_1 = m + im_{12}, \text{ que chamaremos de } w_1,$$

$$z_2 = m_{13} + im_{23}, \text{ que será } w_2,$$

$$z_3 = -m_{13} + im_{23}, \text{ que podemos verificar que se trata de } -w_2^*. \text{ E por último:}$$

$$z_4 = m - im_{12}, \text{ que corresponde a } w_1^*.$$

Concluimos, desta forma, que um multivetor $M_+ \in \mathcal{C}\ell_3^+$ pode ser representado por:

$$M_+ \leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Podemos chegar, como foi dito, às involuções:

$$\text{Conjugação: } \bar{M} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_4 & -z_3 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix};$$

$$\text{Graduação: } \hat{M} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_4^* & -z_2^* \\ -z_3^* & z_1^* \end{pmatrix}; \text{ e}$$

$$\text{Reversão: } \tilde{M} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

Observe que a matriz $\tilde{M}$ é, na verdade, a matriz transposta conjugada complexa de M , ou seja, neste caso temos a conjugação hermitiana de M . Temos, portanto,

$$\tilde{M} = M^\dagger.$$

Mostraremos, como exemplo, como chegar à expressão da graduação:

Dado $M = m + m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3 + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, temos:

$$\hat{M} = m - m_1\mathbf{e}_1 - m_2\mathbf{e}_2 - m_3\mathbf{e}_3 + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - m_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

Na representação de uma matriz 2×2 temos: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Neste caso ficamos com:

$$a_{11} = (m - m_3) + i(m_{12} - m_{123}) = z_4^*$$

$$a_{12} = (-m_1 - m_{13}) - i(-m_2 - m_{23}) = -(m_1 + m_{13}) + i(m_2 + m_{23}) = -[(m_1 + m_{13}) - i(m_2 + m_{23})] = -z_2^*$$

$$a_{21} = (-m_1 + m_{13}) + i(-m_2 + m_{23}) = -[(m_1 - m_{13}) + i(m_2 - m_{23})] = -z_3^*$$

$$a_{22} = (m + m_3) - i(m_{12} + m_{123}) = z_1^*$$

Escrevendo a matriz com estes dados, temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_4^* & -z_2^* \\ -z_3^* & z_1^* \end{pmatrix} \leftrightarrow \hat{M}$$

As demais relações são obtidas de maneira semelhante.

Rotações

Trataremos, agora, das rotações realizadas no âmbito da álgebra geométrica.

Rotação de um vetor

Suponha um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que, submetido a uma rotação arbitrária de um ângulo θ , resulte no vetor $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$. Esta operação preserva a magnitude do vetor em questão, em relação ao eixo de rotação.

Para obtermos o vetor $\mathbf{v}'$ basta realizar a operação envolvendo $R \in \mathcal{C}\ell_3^+$:

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}\tilde{R}$$

onde:

- a) $R = \exp(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2})$, onde R um é bivector denominado rotor;
- b) $\hat{\mathbf{w}}$ é um vetor unitário normal ao plano formado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$;
- c) $I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$; e
- d) R obedece à condição $\tilde{R} = R^{-1}$.

Veremos agora como obter esse resultado:

Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}'$ obtido através da rotação de $\mathbf{v}$ de um ângulo θ , em relação a $\hat{\mathbf{w}}$. Se fizermos o produto geométrico entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, teremos: $\mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}$.

Como $\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v} = I(\mathbf{v}' \times \mathbf{v})$ podemos escrever $\mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + I(\mathbf{v}' \times \mathbf{v})$.

Já vimos que:

- $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| \cos \theta$, e que:
- $|\mathbf{v}' \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| \sin \theta$, que pode ser reescrito como $\mathbf{v}' \times \mathbf{v} = |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| \hat{\mathbf{w}} \sin \theta$.

Podemos, portanto, escrever:

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| \cos \theta + |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| I\hat{\mathbf{w}} \sin \theta \Rightarrow \mathbf{v}'\mathbf{v} = |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| (\cos \theta + I\hat{\mathbf{w}} \sin \theta).$$

Utilizando a fórmula de Euler, $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, e considerando $(I\hat{\mathbf{w}})$ como unidade imaginária, já que $(I\hat{\mathbf{w}})^2 = -1$, podemos escrever: $\exp(I\hat{\mathbf{w}}\theta) = \cos \theta + I\hat{\mathbf{w}} \sin \theta$.

Com isso, obtemos:

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| \exp(I\hat{\mathbf{w}}\theta).$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima, pela direita, por $\mathbf{v}$, obtemos: $\mathbf{v}'\mathbf{v}\mathbf{v} = |\mathbf{v}'| |\mathbf{v}| \exp(I\hat{\mathbf{w}}\theta)\mathbf{v}$. Mas como $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}$ têm a mesma magnitude, pois esta não é modificada pela rotação, ficamos com:

$$\mathbf{v}' = \exp(I\hat{\mathbf{w}}\theta)\mathbf{v},$$

expressão que nos fornece o vetor $\mathbf{v}'$.

Vamos, agora, desenvolver a expressão acima, "abrindo" o expoente, ou seja:

$$\mathbf{v}' = \exp(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}) \exp(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2})\mathbf{v},$$

o que é possível em virtude das propriedades da função exponencial. Aplicando, agora, a fórmula de Euler, a este caso, ficamos com:

$$\mathbf{v}' = \exp\left(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}\right) \left(\mathbf{v} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + I\hat{\mathbf{w}}\mathbf{v} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Como $\hat{\mathbf{w}}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ segue que $\hat{\mathbf{w}}\mathbf{v} = -\mathbf{v}\hat{\mathbf{w}}$, pois $\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Logo, a nossa expressão fica:

$$\mathbf{v}' = \exp\left(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{v} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - I\hat{\mathbf{w}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

A expressão agora, usando novamente a fórmula de Euler, será:

$$\mathbf{v}' = \exp\left(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{v} \exp\left(-I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}\right).$$

A fórmula acima é atribuída a Olinde Rodrigues [1].

Devemos preferencialmente utilizar esta expressão pois a mesma, numa rotação, não altera os escalares e nem o bivector que descreve o plano através do qual se faz a rotação.

Agora, fazendo $R = \exp\left(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}\right)$, teremos a expressão $\mathbf{v}' = R\mathbf{v}\tilde{R}$.

Mostraremos, agora, que se deve ter $R\tilde{R} = 1$:

Como $R = \exp\left(I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + I\hat{\mathbf{w}}\sin\frac{\theta}{2}$, temos que $\tilde{R} = \exp\left(-I\hat{\mathbf{w}}\frac{\theta}{2}\right)$, ou seja,

$$\tilde{R} = \cos\frac{\theta}{2} - I\hat{\mathbf{w}}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Logo, $R\tilde{R} = \left(\cos\frac{\theta}{2} + I\hat{\mathbf{w}}\sin\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\frac{\theta}{2} - I\hat{\mathbf{w}}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Considere, agora, um multivector par satisfazendo à condição $\lambda = U\tilde{U} \geq 0$, então $U = \sqrt{\lambda}R$ é um múltiplo do rotor R . Portanto $U\mathbf{v}\tilde{U} = \lambda R\mathbf{v}\tilde{R}$.

U descreve, neste caso, além de uma rotação, uma dilatação no espaço tridimensional. Em particular, $U\mathbf{v}\tilde{U} = \langle U\mathbf{v}\tilde{U} \rangle_1$.

O grupo Spin(3)

O conjunto dos elementos $R \in \mathcal{C}\ell_3^+$ tais que $R\tilde{R} = 1$ forma um grupo, chamado $Spin(3)$.

$$Spin(3) = \{R \in \mathcal{C}\ell_3^+ | R\tilde{R} = 1\}.$$

Veremos agora que o grupo $\text{Spin}(3)$ é isomorfo ao grupo $\text{SU}(2)$, das matrizes complexas 2×2 , unitárias e com determinante igual a 1.

O rotor $R \in \mathcal{Cl}_3^+$ pode ser representado em forma de matriz como:

$$[R] = \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}$$

e $\tilde{R}$ será representado por:

$$[\tilde{R}] = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

isto porque, se $R = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, logo

$\tilde{R} = m - m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ e, portanto:

$$[R] = \begin{pmatrix} m + im_{12} & -m_{13} + im_{23} \\ m_{13} + im_{23} & m - im_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{R}] = \begin{pmatrix} m - im_{12} & m_{13} - im_{23} \\ -m_{13} - im_{23} & m + im_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos, inicialmente, se $[R]^\dagger$, conjugado hermitiano de $[R]$ é igual à matriz inversa de $[R]$. Com efeito:

$$[R]^\dagger = \begin{pmatrix} w_1^* & -w_2 \\ w_2^* & w_1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

$$[R]^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix}.$$

Como $[R]^\dagger = [R]^{-1}$ concluímos que a matriz $[R]$, que representa o rotor R é uma matriz unitária.

Vejamos, agora, se $\det [R] = 1$. Façamos o produto $R\tilde{R} = 1$, na representação ma-

tricial [11]:

$$\begin{aligned} [R\tilde{R}] &= \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ [R\tilde{R}] &= \begin{pmatrix} |w_1|^2 + |w_2|^2 & 0 \\ 0 & |w_2|^2 + |w_1|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

concluimos, portanto, que $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$.

Logo, $\det[R] = w_1 w_1^* + w_2 w_2^* = |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$, ou seja, a representação matricial de R tem sempre determinante igual a 1.

Podemos afirmar que, como a matriz que representa R é sempre unitária e com determinante igual a 1, existe um isomorfismo entre $Spin(3)$ e $SU(2)$, ou seja:

$$Spin(3) \simeq SU(2).$$

O espinor de Pauli

Um espinor é um elemento do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ da forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. É também conhecido como espinor de Pauli. Esse é o espaço que carrega a representação matricial do grupo $Spin(3)$.

Esta representação matricial não é a mais adequada para o que procuramos, ou seja, a interpretação geométrica que a álgebra de Clifford se propõe a nos fornecer.

Para contornar este inconveniente, consideremos inicialmente o multivetor

$$f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3).$$

Note que f é idempotente, ou seja, $f = f^2$ e que os elementos da forma $I_3 = \mathcal{C}\ell_3 f$ constituem um ideal à esquerda de $\mathcal{C}\ell_3$, ou seja, I_3 é subconjunto de $\mathcal{C}\ell_3$, e ru está em I_3 para todo u em I_3 e todo r em $\mathcal{C}\ell_3$.

Para obtermos uma forma algébrica para o espinor de Pauli escrevemos primeiramente:

$$f = |1\rangle.$$

Multiplicando o multivetor $M = (m) + (m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3) + (m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) + (m_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ pela direita por $f = |1\rangle$, ou seja, fazendo $M|1\rangle$, obteremos:
 $Mf = [(m + m_3) + I(m_{12} + m_{123})]\frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3) + [(m_1 + m_{13}) + I(m_2 + m_{23})]\mathbf{e}_1\frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3).$

Denotando, agora

$$\mathbf{e}_1\frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1f = |2\rangle$$

ficamos com:

$$M|1\rangle = [(m + m_3) + I(m_{12} + m_{123})]|1\rangle + [(m_1 + m_{13}) + I(m_2 + m_{23})]|2\rangle.$$

Calculando $M|2\rangle$ ficamos com:

$$M|2\rangle = [(m_1 - m_{13}) - I(m_2 - m_{23})]|1\rangle + [(m - m_3) - I(m_{12} - m_{123})]|2\rangle.$$

Comparando $M|1\rangle$ e $M|2\rangle$ com as expressões matriciais de um multivetor obtidas com as matrizes de Pauli,

$$(M) = \begin{pmatrix} (m + m_3) + i(m_{12} + m_{123}) & (m_1 - m_{13}) - i(m_2 - m_{23}) \\ (m_1 + m_{13}) + i(m_2 + m_{23}) & (m - m_3) - i(m_{12} - m_{123}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}$$

e lembrando que $I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ tem a função de unidade imaginária em $\mathcal{C}\ell_3$, pois $I^2 = -1$, observamos que:

$$M|1\rangle = z_1|1\rangle + z_2|2\rangle, \text{ e } M|2\rangle = z_3|1\rangle + z_4|2\rangle$$

$$\text{Como } \psi = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{pmatrix}, \text{ se fizermos a associação } |1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } |2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ficamos com:

$$\psi = (\alpha_1 + i\beta_1)|1\rangle + (\alpha_2 + i\beta_2)|2\rangle$$

que é uma definição algébrica do espinor de Pauli. Cabe ressaltar que ψ é um elemento do ideal à esquerda $I_3 = \mathcal{C}\ell_3 f$ da álgebra de Clifford.

Consideremos, agora, um multivetor $M \in \mathcal{C}\ell_3^+$, ou seja,

$M = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Podemos escrever:

$M|1\rangle = (m + im_{12})|1\rangle + (m_{13} + im_{23})|2\rangle$, que associamos com $\psi = w_1|1\rangle + w_2|2\rangle$

$M|2\rangle = (-m_{13} - i(-m_{23}))|1\rangle + (m - im_{12})|2\rangle$, que associamos com $\psi = -w_2^*|1\rangle + w_1^*|2\rangle$.

Podemos, portanto, representar o espinor como: $\psi = \begin{pmatrix} m + im_{12} \\ m_{13} + im_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

e fazer a associação: $\psi = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}$, que é a matriz que representa os multivetores $M_+ \in \mathcal{C}\ell_3^+$, conforme vimos em 2.1.

Desta forma, temos o espinor de Pauli com sua representação em $\mathcal{C}\ell_3^+$, ou seja:

$$\psi = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

O espinor operatorial de Pauli

Seja o espinor de Pauli,

$$\psi = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

ou seja, $\psi \in \mathcal{C}\ell_3^+$. Um espinor apresentado desta forma é chamado de *espinor operatorial* de Pauli para diferenciá-lo do espinor escrito sob forma matricial, ou seja, de $\psi \in \mathbb{C}^2$.

Uma de suas propriedades é ser capaz de representar uma rotação e uma dilatação em um vetor, como veremos adiante.

Se consideramos $\psi \in \mathcal{C}\ell_3^+$, temos que

$$\tilde{\psi} = m - m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \quad (2.3)$$

Efetando o produto $\psi\tilde{\psi}$ obteremos:

$$\psi\tilde{\psi} = m^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = \rho > 0. \quad (2.4)$$

Podemos escrever o espinor operatorial como $\psi = \sqrt{\rho}R$, desde que $R\tilde{R} = 1$, ou seja, desde que $R \in Spin(3)$, pois:

$$\psi\tilde{\psi} = \rho = \rho R\tilde{R} = \sqrt{\rho}R\sqrt{\rho}\tilde{R} \Rightarrow \psi = \sqrt{\rho}R.$$

Se multiplicarmos pela esquerda um espinor operatorial ψ a um vetor $\mathbf{v}$ e pela direita multiplicarmos $\tilde{\psi}$ ao mesmo vetor, ou seja, se fizermos $\psi\mathbf{v}\tilde{\psi}$ teremos como resultado um vetor obtido a partir de $\mathbf{v}$ por uma rotação θ e dilatado de ρ . Isto porque:

$$\psi\mathbf{v}\tilde{\psi} = \sqrt{\rho}R\mathbf{v}\sqrt{\rho}\tilde{R} = \rho R\mathbf{v}\tilde{R}.$$

Uma aplicação bastante prática do espinor operatorial de Pauli é que qualquer vetor $\mathbf{x}$, pode ser obtido, a partir de um vetor arbitrário, de referência, $\mathbf{e}_3$ por exemplo, após rotação e dilatação proporcionada pelo produto à esquerda pelo espinor adequado e à direita pelo seu reverso, ou seja,

$$\mathbf{x} = \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}. \quad (2.5)$$

Se queremos, por exemplo, obter o vetor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, qual deverá ser o espinor operatorial de Pauli adequado para obtê-lo, a partir de $\mathbf{e}_3$?

Supondo $\psi = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, façamos $\mathbf{x} = \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}$. Teremos:

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = (m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3(m - m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3).$$

Desenvolvendo, vamos obter a seguinte relação entre os coeficientes do vetor e do espinor:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(mm_{13} + m_{12}m_{23}) \\ x_2 &= 2(mm_{23} - m_{12}m_{13}) \\ x_3 &= m^2 + m_{12}^2 - m_{13}^2 - m_{23}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Basta, portanto, resolver o sistema decorrente para obtermos o espinor operatorial de Pauli desejado.

Podemos facilmente verificar que este sistema é indeterminado. Isso se explica pelo

fato de ψ não ser o único espinor que tem o mesmo efeito sobre $\mathbf{e}_3$. Se temos, por exemplo, $U = \exp(\beta \mathbf{e}_{21})$, β escalar arbitrário e $U \in Spin(3)$, então $U\mathbf{e}_3\tilde{U} = \mathbf{e}_3$ e, então, $\mathbf{x} = \psi U\mathbf{e}_3\tilde{U}\tilde{\psi}$. Logo, $V = \psi U$ também é um espinor com o qual obtemos $\mathbf{x}$ a partir de $\mathbf{e}_3$, pois $\mathbf{x} = V\mathbf{e}_3\tilde{V}$.

Vejamos, agora, a inversão:

Sendo $\psi = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, então

$$\tilde{\psi} = m - m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

Temos que: $\mathbf{e}_3\tilde{\psi}\mathbf{e}_3 = m - m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} + \mathbf{e}_3\tilde{\psi}\mathbf{e}_3 &= 2(m - m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \alpha(\cos\beta + \mathbf{e}_{12}\sin\beta) = \alpha\exp(\beta\mathbf{e}_{12}) = \alpha e^{\beta\mathbf{e}_{12}}, \text{ donde:} \\ (\tilde{\psi} + \mathbf{e}_3\tilde{\psi}\mathbf{e}_3)\alpha^{-1}e^{-\beta\mathbf{e}_{12}} &= 1. \end{aligned}$$

Mas $\psi = \psi.1$, logo, $\psi = \psi(\tilde{\psi} + \mathbf{e}_3\tilde{\psi}\mathbf{e}_3)\alpha^{-1}e^{-\beta\mathbf{e}_{12}} = (\psi\tilde{\psi} + \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}\mathbf{e}_3)\alpha^{-1}e^{-\beta\mathbf{e}_{12}}$, mas:

$\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi} = \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, e ainda, $\psi\tilde{\psi} = \rho$, então:

$\psi = (\rho + x\mathbf{e}_3)\alpha^{-1}e^{-\beta\mathbf{e}_{12}}$. Fazendo, agora:

$$\psi\tilde{\psi} = [(\rho + x\mathbf{e}_3)\alpha^{-1}e^{-\beta\mathbf{e}_{12}}][e^{\beta\mathbf{e}_{12}}\alpha^{-1}(\rho + \mathbf{e}_3x)] \Rightarrow \rho = \alpha^{-2}(\rho^2 + \rho\mathbf{e}_3\mathbf{x} + \rho\mathbf{x}\mathbf{e}_3 + \mathbf{x}\mathbf{e}_3\mathbf{x})$$

Mas: $\mathbf{x}\mathbf{e}_3\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{x} = (\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi})(\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}) = \psi\mathbf{e}_3\rho\mathbf{e}_3\tilde{\psi} = \rho^2$

e, ainda, $\rho\mathbf{e}_3\mathbf{x} + \rho\mathbf{x}\mathbf{e}_3 = 2\rho(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{x}) = 2\rho x_3$. Logo, ficamos com:

$$\rho = \alpha^{-2}(\rho^2 + 2\rho x_3 + \rho^2) = \alpha^{-2}(2\rho^2 + 2\rho x_3) \Rightarrow 1 = \alpha^{-2}(2\rho + 2x_3) \Rightarrow \alpha = \sqrt{2(\rho + x_3)}$$

Então, como $\psi = (\rho + x\mathbf{e}_3)\alpha^{-1}e^{-\beta\mathbf{e}_{12}}$, concluímos que:

$$\psi = \frac{(\rho + x\mathbf{e}_3)}{\sqrt{2(\rho + x_3)}}e^{-\beta\mathbf{e}_{12}}$$

sendo β arbitrário.

Enfim, observamos que, como $\mathcal{C}\ell_3^+ \simeq \mathbb{H}$, um espinor operatorial de Pauli pode ser representado por um quatérnion e, sendo os quatérnions muito utilizados em Mecânica Clássica, os espinores encontram nela vasta aplicação.

A transformação ativa do espinor

Consideremos um sistema S , ao qual está associada a base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e um sistema S' ao qual está associada a base $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, em que cada $\mathbf{e}'_i$ é obtido por uma rotação de $\mathbf{e}_i$, ou seja, $\mathbf{e}'_i = R\mathbf{e}_i\tilde{R}$. Os sistemas S e S' podem ser considerados sis-

temas equivalentes pois as bases B e B' , que a eles estão associadas, estão relacionadas entre si por uma rotação .

Podemos determinar um vetor $\mathbf{x}$, no sistema S , como $\mathbf{x} = \psi_B \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_B$ e podemos, também, determinar o mesmo vetor $\mathbf{x}$, agora no sistema S' , como $\mathbf{x} = \psi_{B'} \mathbf{e}'_3 \tilde{\psi}_{B'}$. Podemos, pois, considerar ψ_B e $\psi_{B'}$ como sendo um mesmo objeto pois determinam o mesmo vetor $\mathbf{x}$, embora em sistemas diferentes mas que se equivalem.

Cabe, portanto, uma definição precisa de espinor operatorial. Tal definição foi dada originalmente por [4] e encontra-se, também, em [14].

Um **espinor operatorial de Pauli** é uma *classe de equivalência* de elementos $\psi_B, \psi_{B'}, \dots \in \mathcal{C}\ell_3^+$ tais que $\psi_B \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_B = \psi_{B'} \mathbf{e}'_3 \tilde{\psi}_{B'} = \dots$, onde $\mathbf{e}'_i = R \mathbf{e}_i \tilde{R}$, ($i = 1, 2, 3$), $R \in Spin(3)$.

Esta classe de equivalência é denotada por Ψ . Assim sendo, ψ_B é o representante de Ψ na base B , assim como $\psi_{B'}$ é o representante de Ψ na base B' .

Podemos relacionar os objetos ψ_B e $\psi_{B'}$ através da equação:

$$\psi_{B'} = \psi_B R^{-1}.$$

Isto decorre do fato que $\psi_B \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_B = \psi_{B'} \mathbf{e}'_3 \tilde{\psi}_{B'}$ e de que $\mathbf{e}'_i = R \mathbf{e}_i \tilde{R}$.

Podemos notar que: $\psi_B = \psi_{B'} R$ e ainda que $\psi_{B'} = \psi_B R^{-1} = \psi_B \tilde{R}$, pois $R \in Spin(3)$.

Considere, agora, um vetor $\mathbf{x} = \psi_B \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_B = \psi_{B'} \mathbf{e}'_3 \tilde{\psi}_{B'}$, onde ψ_B e $\psi_{B'}$ são representantes de Ψ nas bases B e B' , respectivamente.

O vetor de referência $\mathbf{e}'_3$ foi obtido por uma rotação/dilatação em $\mathbf{e}_3$, ou seja, $\mathbf{e}'_3 = R \mathbf{e}_3 \tilde{R}$, onde $R \in Spin(3)$.

Façamos, agora uma rotação/dilatação em $\mathbf{x}$ para obtermos $\mathbf{x}'$, ou seja, $\mathbf{x}' = R \mathbf{x} \tilde{R}$.

Iremos, agora, expressar $\mathbf{x}'$ utilizando ψ'_B e $\psi'_{B'}$, representantes do espinor Ψ' nas bases B e B' , respectivamente.

Teremos, assim: $\mathbf{x}' = \psi'_B \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}'_B = \psi'_{B'} \mathbf{e}'_3 \tilde{\psi}'_{B'}$.

Como $\mathbf{x}' = R \mathbf{x} \tilde{R}$, e $\mathbf{x} = \psi_B \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_B$, ficamos com: $\mathbf{x}' = R \psi_B \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_B \tilde{R}$.

Multiplicando internamente por $\tilde{R}R = 1$ e considerando que $\tilde{R} = R^{-1}$, pois $R \in \text{spin}(3)$, segue que:

$$\mathbf{x}' = R\psi_B(\tilde{R}R)\mathbf{e}_3(\tilde{R}R)\tilde{\psi}_B\tilde{R} = R(\psi_BR^{-1})(R\mathbf{e}_3\tilde{R})(R\tilde{\psi}_B)\tilde{R}.$$

Considerando que $\psi_BR^{-1} = \psi_{B'}$ e que $R\mathbf{e}_3\tilde{R} = \mathbf{e}'_3$, segue que $\mathbf{x}' = \psi'_{B'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}'_{B'} = R\psi_{B'}\mathbf{e}'_3R\tilde{\psi}_B\tilde{R}$, o que nos leva a concluir que:

$$\psi'_{B'} = R\psi_{B'}$$

que é a **Transformação ativa do espinor de Pauli** na base B' .

Consideremos, agora, que $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}\tilde{R}$, que $\mathbf{x}' = \psi'_B\mathbf{e}_3\tilde{\psi}'_B$ e que $\mathbf{x} = \psi_B\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_B$, é imediato que :

$$\mathbf{x}' = \psi'_B\mathbf{x}\tilde{\psi}'_B = R(\psi_B\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_B)\tilde{R} = (R\psi_B)\mathbf{e}_3(\tilde{\psi}_B\tilde{R})$$

donde

$$\psi'_B = R\psi_B.$$

Temos, de maneira geral:

$$\Psi' = R\Psi.$$

A TRANSFORMAÇÃO KS

3.1 Introdução

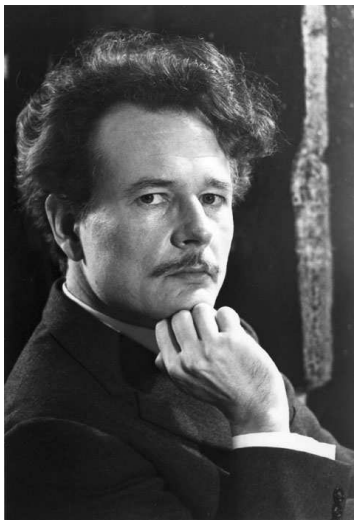


Figura 3.1: Kustaanheimo



Figura 3.2: Stiefel

Paul Kustaanheimo, cientista finlandês e Edward Stiefel, matemático suíço, formularam um método em que a regularização do movimento de Kepler no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ é desenvolvida usando uma aplicação do espaço quadridimensional $\mathbb{R}^4$ para o $\mathbb{R}^3$ [8]. A vantagem deste método é que, no $\mathbb{R}^4$, as equações diferenciais do movimento são lineares com coeficientes constantes, o que facilita sobremaneira o cálculo de tais movimentos, tarefa que no espaço $\mathbb{R}^3$ seria bem mais complicada.

Isso representa uma grande vantagem quando o problema envolve perturbações, pois torna possível o cálculo das grandezas envolvidas.

Este método, conhecido como Transformação de Kustaanheimo-Stiefel, ou transformação KS, foi desenvolvido com base no método de regularização proposto por Tullio Levi-Civita, matemático italiano.

O método de Levi-Civita é aplicado ao estudo do movimento de Kepler realizado em um plano z . A cônica descrita pelo corpo em movimento possui um dos focos na origem e a equação deste possui uma singularidade. O método consiste em fazer uma "aplicação" para um plano w , onde a cônica correspondente é centrada na origem e onde a equação do movimento é regularizada.

3.2 A regularização de Levi-Civita



Figura 3.3: Tullio Levi-Civita

A regularização de Levi-Civita permite que estudemos um movimento de Kepler, realizado em um plano z , onde a seção cônica tem um dos focos na origem, em um outro plano, w , onde a cônica é centrada na origem.

Consideremos que $z = x_1 + ix_2$ e que queiramos obter o outro plano (plano parâmetro), w . Consideremos que este plano seja $w = u_1 + iu_2$. A transformação proposta por Levi-Civita é tal que:

$$z = w^2 \tag{3.1}$$

Desenvolvendo, vamos obter: $x_1 + ix_2 = u_1^2 + 2u_1u_2i - u_2^2$, logo:

$$\begin{aligned}x_1 &= u_1^2 - u_2^2 \\x_2 &= 2u_1u_2\end{aligned}\tag{3.2}$$

ou, ainda, em forma de matrizes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.\tag{3.3}$$

Diferenciando ambas as equações do sistema 3.2 obteremos:

$$\begin{aligned}dx_1 &= 2(u_1du_1 - u_2du_2) \\dx_2 &= 2(u_2du_1 + u_1du_2)\end{aligned}\tag{3.4}$$

que podem ser escritas em forma de matrizes como:

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}.\tag{3.5}$$

A matriz de transformação de Levi-Civita goza das seguintes propriedades:

1. Cada elemento é função linear dos parâmetros u_1 e u_2 ;
2. A soma do produto de cada termo de uma fila (linha ou coluna) pelo seu correspondente na outra fila é nulo, ou seja, $u_1u_2 + (-u_2)u_1 = 0$. Podemos dizer: o produto escalar de duas filas é nulo, ou ainda, cada linha ou cada coluna é ortogonal à outra;
3. Se definirmos norma de uma fila (linha ou coluna) como sendo a soma dos quadrados dos elementos da fila, então cada fila tem a mesma norma: $(u_1^2 + u_2^2)$.

Note, ainda, que

$$dx_1^2 + dx_2^2 = 4(u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2)$$

Podemos escrever w em sua forma trigonométrica, obtendo assim: $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$, onde $\theta = \arctan(\frac{u_2}{u_1})$ e $|w| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Pela fórmula de Moivre, teremos: $w^2 = |w|^2 [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]$ e, utilizando a fórmula de Euler, temos: $w^2 = |w|^2 \exp(2\theta i)$, de onde concluimos que:

$$z = |w|^2 \exp(2\theta i) \quad (3.6)$$

logo no plano z as distâncias são o quadrado das distâncias no plano w e os ângulos são o dobro daqueles ali observados.

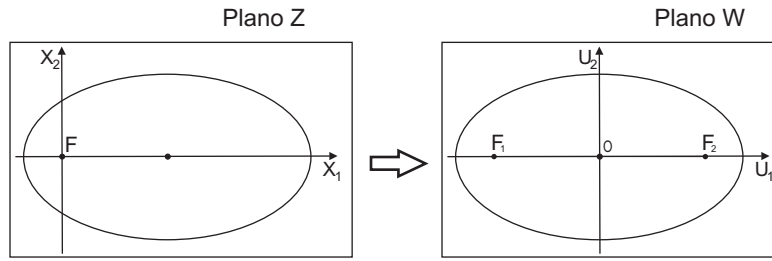


Figura 3.4: A regularização de Levi-Civita

3.3 A transformação KS

Como vimos anteriormente, a transformação de Levi-Civita permite regularizar as equações do movimento de Kepler realizando o mapeamento deste de um plano para outro. Para a discussão do movimento no espaço tridimensional seria necessário que tivéssemos uma matriz com as mesmas características da que vimos acima.

Entretanto matrizes com estas características, segundo um resultado obtido por Adolf Hurwitz, matemático alemão, somente são possíveis para matrizes de ordem 1, 2, 4 ou 8, o que inviabiliza o método de Levi-Civita para três dimensões. Vide [8].

Uma matriz de ordem 4 com as características procuradas é:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}.$$

A fim de encontrar uma igualdade de matrizes semelhante à observada em 3.5 Kustaanheimo e Stiefel chegaram à seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Resolvendo a equação matricial chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} dx_1 &= 2(u_1 du_1 - u_2 du_2 - u_3 du_3 + u_4 du_4) \\ dx_2 &= 2(u_2 du_1 + u_1 du_2 - u_4 du_3 - u_3 du_4) \\ dx_3 &= 2(u_3 du_1 + u_4 du_2 + u_1 du_3 + u_2 du_4) \\ 0 &= 2(u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4) \end{aligned} \quad (3.8)$$

A pergunta que naturalmente surgirá é: por que a última das quatro equações é igual a zero? A resposta é porque foi observado que a expressão $(u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4)$ não possui diferencial exata. Kustaanheimo e Stiefel igualaram-na a zero por este motivo. Resolvendo as três primeiras, por integração, chega-se a:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ x_2 &= 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) \\ x_3 &= 2(u_1 u_3 + u_2 u_4) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Note a semelhança entre este sistema e o apresentado em 2.6.

Da última equação do sistema 3.8 resulta a importante relação, que se mostrará fundamental neste estudo, e para a qual chamamos a atenção:

$$u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4 = 0 \quad (3.10)$$

As equações obtidas em 3.9 podem ser apresentadas sob forma de matrizes como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Comparando 3.2 com 3.9 e 3.5 com 3.7 podemos verificar a similaridade existente entre a transformação de Levi-Civita e a KS.

A relação estabelecida pela transformação KS dá-se entre dois espaços quadridimensionais, com uma condição de vínculo, 3.10, onde em um deles uma das componentes é sempre nula. Temos, portanto, uma relação estabelecida entre $x = (x_1, x_2, x_3, 0)$ e $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Na prática, podemos associar um vetor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ às entradas da matriz-coluna do lado esquerdo da equação 3.11. Este vetor x pertence a um espaço tridimensional que foi "extraído" do $\mathbb{R}^4$ pela condição de vínculo.

3.3.1 Propriedades da Transformação KS

As propriedades mais importantes da Transformação KS são:

1. O plano u_1, u_2 do espaço $\mathbb{R}^4$ é levado ao plano x_1, x_2 do espaço $\mathbb{R}^3$, de maneira similar à transformação de Levi-Civita.

2. Como a matriz de 3.11 goza das propriedades de ortogonalidade, à semelhança da matriz de Levi-Civita, temos que:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)^2. \quad (3.12)$$

Se chamarmos de r a distância radial em $\mathbb{R}^3$, ficaremos com:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2. \quad (3.13)$$

Aplicando agora a ortogonalidade na equação 3.7 temos:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 4r(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2). \quad (3.14)$$

3. Transformação inversa A transformação KS é não injetiva, pois se um ponto u_i de $\mathbb{R}^4$ é levado a um ponto x_k de $\mathbb{R}^3$, todos os pontos v_i satisfazendo às condições:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \cos \varphi - u_4 \sin \varphi \\ v_2 &= u_2 \cos \varphi + u_3 \sin \varphi \\ v_3 &= -u_2 \sin \varphi + u_3 \cos \varphi \\ v_4 &= u_1 \sin \varphi + u_4 \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.15)$$

são levados ao mesmo ponto x_k , sendo φ um ângulo arbitrário. A imagem de um ponto no $\mathbb{R}^3$ é, portanto, um círculo de raio $\sqrt{r}$ no espaço $\mathbb{R}^4$, sendo que o vetor tangente a este círculo em um ponto u_i é $\mathbf{t} = (-u_4, u_3, -u_2, u_1)$.

A relação 3.10 mostra que o vetor infinitesimal $du_i = (du_1, du_2, du_3, du_4)$ correspondente ao ponto u_i deve ser ortogonal ao círculo passando por este ponto, pois, sendo $\mathbf{t} = (-u_4, u_3, -u_2, u_1)$ o vetor tangente associado ao ponto e fazendo ser nulo o produto escalar entre o vetor tangente e o vetor du_i teremos $-u_4 du_1 + u_3 du_2 - u_2 du_3 + u_1 du_4 = 0$, que corresponde à condição citada.

4. Podemos inverter o sistema de equações 3.9 da seguinte forma:

Da primeira equação temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \Rightarrow u_1^2 + u_4^2 = x_1 + u_2^2 + u_3^2 \Rightarrow \\ u_1^2 + u_4^2 + (u_1^2 + u_4^2) &= x_1 + u_2^2 + u_3^2 + (u_1^2 + u_4^2) \Rightarrow \\ 2(u_1^2 + u_4^2) &= x_1 + r \Rightarrow \\ u_1^2 + u_4^2 &= \frac{x_1 + r}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente chegamos a:

$$u_2^2 + u_3^2 = \frac{r - x_1}{2}.$$

Da segunda equação escrevemos:

$$u_1 u_2 = u_3 u_4 + \frac{x_2}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{u_3 u_4}{u_2} + \frac{x_2}{2u_2}.$$

Substituindo este resultado na terceira equação do sistema, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_3 u_4}{u_2} + \frac{x_2}{2u_2}\right)u_3 + u_2 u_4 &= \frac{x_3}{2} \Rightarrow \frac{u_3^2 u_4}{u_2} + \frac{u_3 x_2}{2u_2} + u_2 u_4 = \frac{x_3}{2} \Rightarrow \\ 2u_4(u_3^2 + u_2^2) &= x_3 u_2 - u_3 x_2 \Rightarrow 2u_4 \frac{1}{2}(-x_1 + r) = x_3 u_2 - u_3 x_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u_4 = \frac{x_3 u_2 - u_3 x_2}{-x_1 + r}.$$

De forma análoga obtemos u_1 , u_2 e u_3 , resultando no sistema:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x_2 u_2 + x_3 u_3}{-x_1 + r}; \\ u_2 &= \frac{x_2 u_1 + x_3 u_4}{x_1 + r}; \\ u_3 &= \frac{x_3 u_1 - x_2 u_4}{x_1 + r}; \\ u_4 &= \frac{x_3 u_2 - x_2 u_3}{-x_1 + r}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

O sistema acima é útil para calcularmos uma das imagens de um ponto no $\mathbb{R}^3$, após o que a imagem de um vetor infinitesimal $dx_k = (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$ associado ao ponto é determinado pela condição 3.10.

Podemos resolver o sistema matricial 3.7 para du_i , obtendo:

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

5. Tomando-se um plano especial $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^4$ no qual encontra-se uma seção cônica centrada na origem, este pode ser levado a outra seção cônica, com um foco na origem,

num espaço $\mathbb{R}^3$, via transformação KS. Em particular uma linha reta no $\mathbb{R}^2$ é transformada em uma parábola. Esta é a principal razão para que a transformação KS seja apropriada para o estudo do movimento tridimensional de Kepler.

Podemos verificar este fato se considerarmos dois vetores u_i e v_i do $\mathbb{R}^4$ determinando um plano passando pela origem e satisfazendo à condição:

$$u_4v_1 - u_3v_2 + u_2v_3 - u_1v_4 = 0 \quad (3.18)$$

que nada mais é que a condição 3.10 modificada. Este plano, será levado ao plano $\mathbb{R}^3$ do modo Levi-Civita, ou seja, com as distâncias à origem sendo quadradas e os ângulos, dobrados, tal como em 3.6.

Isto pode ser verificado ao tomarmos dois vetores unitários ortogonais u_i e v_i e que obedeçam à condição 3.18. Combinando esta condição com a de ortogonalidade dos dois vetores, ou seja, $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 = 0$, chegamos ao sistema:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2 \cos w + u_3 \sin w \\ v_2 &= -u_1 \cos w + u_4 \sin w \\ v_3 &= -u_1 \sin w - u_4 \cos w \\ v_4 &= -u_2 \sin w + u_3 \cos w \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde w é um ângulo que depende da posição do plano $\mathbb{R}^2$. A imagem de um ponto do $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas polares são ϱ e θ é:

$$\mathbf{x} = \varrho^2 [a \cos(2\theta) + (b \cos w + c \sin w) \sin(2\theta)] \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{x}$ é a posição do vetor $\mathbf{x}_i$ e:

$$a = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ 2(u_1u_2 - u_3u_4) \\ 2(u_1u_3 + u_2u_4) \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2(u_1u_2 + u_3u_4) \\ -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ 2(u_2u_3 - u_1u_4) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} 2(u_1u_3 - u_2u_4) \\ 2(u_1u_4 + u_2u_3) \\ -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \end{pmatrix}$$

A equação 3.20 mostra, portanto, a similaridade entre o método KS e o de Levi-Civita.

3.4 As equações do movimento

Segundo a lei de Newton a equação do movimento de uma partícula de massa m , numa trajetória $t \mapsto x_k(t)$ no $\mathbb{R}^3$, submetida a uma força P_k , ($k = 1, 2, 3$), é :

$$P_k = m\ddot{x}_k. \quad (3.21)$$

Vamos, agora, proceder à descrição nas coordenadas u_α , ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) e estabelecer um movimento correspondente $u_\alpha(t)$ no $\mathbb{R}^4$.

O movimento da partícula deve obedecer à condição 3.10 a cada instante para a posição u_α e velocidade $\dot{u}_\alpha$ no $\mathbb{R}^4$. Ficamos, portanto, com:

$$u_4\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_1\dot{u}_4 = 0 \quad (3.22)$$

Vimos em 3.14 que, devido à ortogonalidade da matriz de transformação KS,

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 4r(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2)$$

A partir desta relação chegamos à expressão da velocidade, como:

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = 4r(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2). \quad (3.23)$$

onde r é a distância entre m e a origem e $r = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$.

De 3.23 obtemos a expressão da energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = 2mr(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2). \quad (3.24)$$

Devemos, agora, calcular as forças generalizadas Q_i correspondentes às coordenadas u_i . Para isso devemos impor que o trabalho realizado pelas forças sejam invariantes sob a transformação. Logo:

$$Q_1 du_1 + Q_2 du_2 + Q_3 du_3 + Q_4 du_4 = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3 \quad (3.25)$$

que pode ser escrita como [10]:

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{pmatrix}$$

Utilizando a equação 3.7 na igualdade acima ficamos com:

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & 0 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix}$$

De onde podemos concluir que:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Inserindo, agora, as equações 3.13 e 3.24 na equação de movimento de Lagrange para sistemas conservativos e forças generalizadas,

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_\alpha}$$

ficamos com:

$$Q_\alpha = 4m \left[\frac{d}{dt}(r\dot{u}_\alpha) - u_\alpha(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) \right] \quad (3.27)$$

Verificação: Vejamos, por exemplo, para $\alpha = 1$. Na equação de Lagrange temos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{u}_1} [2mr(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2)] \right) - \frac{\partial}{\partial u_1} \left[2m \left(\sum_{\alpha=1}^4 u_\alpha^2 \right) (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) \right] \Rightarrow \\ Q_1 &= \frac{d}{dt} [4mr\dot{u}_1] - 4mu_1(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) = 4m \left[\frac{d}{dt}(r\dot{u}_1) - u_1(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) \right]. \end{aligned}$$

Então, generalizando, temos para $\alpha = 1, 2, 3$ e 4 a equação apresentada em 3.27.

Estas equações nos permitem estabelecer a relação entre o movimento no $\mathbb{R}^3$ e no $\mathbb{R}^4$, levando-se em consideração que a relação estabelecida em 3.22 seja válida durante o movimento.

Torna-se necessário, neste momento, determinar os valores iniciais do movimento, que denotaremos por um expoente 0. Portanto, devemos obter a posição inicial, x_k^0 , e velocidade inicial, $\dot{x}_k^0$, em $\mathbb{R}^3$ e as correspondentes posição inicial, u_i^0 , e velocidade inicial, $\dot{u}_i^0$, em $\mathbb{R}^4$.

Para calcularmos a posição inicial u_i^0 , já tendo obtido a posição x_k^0 em $t = 0$, basta recorrermos às equações 3.16.

Por sua vez, a obtenção das velocidades dar-se-á pela aplicação dos valores em 3.17. Se quisermos obter $\dot{u}_1^0$, por exemplo, basta fazer:

$$\dot{u}_1^0 = \frac{1}{2r_0} (u_1^0 \dot{x}_1^0 + u_2^0 \dot{x}_2^0 + u_3^0 \dot{x}_3^0)$$

onde r_0 é a distância para $t = 0$. Para acharmos $\dot{u}_2^0$, $\dot{u}_3^0$ e $\dot{u}_4^0$ basta operar de forma semelhante.

Concluimos que, para obtermos o movimento em $\mathbb{R}^4$ correspondente ao $\mathbb{R}^3$, devemos resolver as equações do sistema 3.27 e considerar as condições iniciais de posição e velocidade, desde que a condição 3.22 seja satisfeita a todo instante.

Para que a condição 3.22 seja observada basta multiplicar as equações 3.27 por $u_4, -u_3, u_2, -u_1$ respectivamente, e somar. Obteremos, com isto:

$$4m \left[u_4 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_1) - u_3 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_2) + u_2 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_3) - u_1 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_4) \right] = u_4 Q_1 - u_3 Q_2 + u_2 Q_3 - u_1 Q_4.$$

O segundo membro da igualdade acima deve ser zero, tendo em vista a definição de forças generalizadas aplicadas a 3.26 [8]. Logo:

$$4m \frac{d}{dt} [r(u_4 \dot{u}_1 - u_3 \dot{u}_2 + u_2 \dot{u}_3 - u_1 \dot{u}_4)] = 0.$$

Por integração, obtemos: $r(u_4 \dot{u}_1 - u_3 \dot{u}_2 + u_2 \dot{u}_3 - u_1 \dot{u}_4) = Cte.$

Fazendo uma escolha apropriada das condições iniciais, anula-se a expressão acima no instante $t = 0$, ou seja:

$$u_4^0 \dot{u}_1^0 - u_3^0 \dot{u}_2^0 + u_2^0 \dot{u}_3^0 - u_1^0 \dot{u}_4^0 = 0,$$

e então a condição 3.22 fica válida para todo instante.

Para provar isto é necessário adotar como hipótese as equações 3.22, 3.26 e 3.27 e verificar que as coordenadas x_k definidas por 3.9 satisfazem às equações 3.21.

3.5 Regularização

As equações 3.27 têm singularidade na origem, ou seja, não são definidas neste ponto. Este problema é sanado com a introdução do trabalho W realizado pelas forças em questão. Este trabalho é calculado: em $\mathbb{R}^3$ pela expressão $W = \int \sum_{k=1}^3 P_k dx_k$ e em $\mathbb{R}^4$ pela expressão $W = \int \sum_{\alpha=1}^4 Q_\alpha du_\alpha$, cujo resultado é idêntico, e o limite inferior de cada integral é tomado do início do movimento, ou seja, quando $t = 0$.

Considerando que o trabalho pode ser expresso como a variação da energia cinética, temos, tendo em vista 3.24 :

$$W = 2mr(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3.28)$$

Inserindo este resultado na equação 3.27, obtemos:

$$Q_\alpha = 4m \frac{d}{dt}(r\dot{u}_\alpha) - \frac{1}{r}(2W + mv_0^2)u_\alpha. \quad (3.29)$$

Regularizamos o tempo, com a finalidade de remover a singularidade da equação, introduzindo o *tempo de regularização*, s , fazendo:

$$s = \int \frac{dt}{r}, \text{ onde : } \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \quad (3.30)$$

e multiplicando ambos os membros da equação 3.29 por r :

$$\begin{aligned} rQ_\alpha &= 4mr \frac{d}{dt}(r\dot{u}_\alpha) - (2W + mv_0^2)u_\alpha = 4m \left[r \frac{d}{dt} \left(r \frac{1}{r} \frac{du_\alpha}{ds} \right) \right] - (2W + mv_0^2)u_\alpha \Rightarrow \\ rQ_\alpha &= 4m \left[r \frac{d}{dt} \left(\frac{du_\alpha}{ds} \right) \right] - (2W + mv_0^2)u_\alpha = 4m \left[r \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(\frac{du_\alpha}{ds} \right) \right] - (2W + mv_0^2)u_\alpha \end{aligned}$$

Podemos, agora, escrever a equação do movimento em função da variável independente s :

$$rQ_\alpha = 4m \frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} - (2W + mv_0^2)u_\alpha \quad (3.31)$$

Estas equações 3.31 são práticas para o caso conservativo, quando o potencial V depende exclusivamente da posição do corpo. Podemos escrever, para este caso:

$$W = V_0 - V, \quad Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial u_\alpha},$$

onde V_0 é o potencial inicial.

3.6 O problema de Kepler

Consideremos um corpo de massa M_s localizado na origem do $\mathbb{R}^3$, à distância r do qual localiza-se um corpo de massa m . A energia potencial de m será:

$$V = -\frac{GM_s m}{r^2} r = -\frac{GM_s m}{r}$$

onde G é a constante de gravitação universal. Fazendo $GM_s = M$, ficamos com:

$$V = -\frac{mM}{r} \quad (3.32)$$

sendo o corpo de massa m sujeito à ação da força central e de forças perturbativas P'_k . Se considerarmos o movimento correspondente no $\mathbb{R}^4$ essas forças perturbativas serão as Q_α .

Considerando $r = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, se quisermos, por exemplo, achar Q_1 , faremos:

$$Q_1 = -\frac{\partial}{\partial u_1} \left(-\frac{mM}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{mM}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} \right) = -\frac{2mM}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)^2} u_1 \Rightarrow$$

$$Q_1 = -\frac{2mM}{r^2} u_1.$$

Portanto teremos como força de atração central, em $\mathbb{R}^4$:

$$\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\frac{mM}{r} \right) = -\frac{2mM}{r^2} u_\alpha.$$

Podemos obter as forças perturbativas Q'_α de $\mathbb{R}^4$ que agem no sistema, aplicando as suas correspondentes P'_k de $\mathbb{R}^3$ no sistema 3.26. Considerando-as interferindo no nosso caso, ficamos com:

$$Q_\alpha = -\frac{2mM}{r^2} u_\alpha + Q'_\alpha. \quad (3.33)$$

Sendo o trabalho a variação de potencial, o realizado pela ação da força de atração central, em $\mathbb{R}^3$, usando 3.32 será:

$$W = -\frac{mM}{r_0} - \left(-\frac{mM}{r} \right) = mM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

considerando, também, o devido às forças perturbativas ficaremos com:

$$W = mM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + W'. \quad (3.34)$$

Inserindo 3.33 e 3.34 em 3.31 obtemos as equações do movimento de Kepler, com forças perturbativas:

$$rQ'_\alpha + 2W'u_\alpha = m \left[4 \frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} + \left(\frac{2M}{r_0} - v_0^2 \right) u_\alpha \right]. \quad (3.35)$$

Consideremos, em 3.35, a expressão constante $\left(\frac{2M}{r_0} - v_0^2 \right)$ que aparece multiplicando u_α e façamos:

$$a = \frac{2M}{r_0} - v_0^2. \text{ Logo, teremos } a = \frac{2M - v_0^2 r_0}{r_0} \Rightarrow \frac{a}{M} = \frac{2M - v_0^2 r_0}{r_0 M}.$$

Fazendo, agora, $\frac{a}{M} = \frac{1}{a_0}$, ficamos com:

$$\frac{1}{a_0} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{M}$$

onde a_0 é o semieixo maior da elipse no movimento de Kepler, quando $t = 0$.

Multiplicando ambos os membros de $\frac{1}{a_0} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{M}$ por M , teremos: $\frac{M}{a_0} = \frac{2M}{r_0} - v_0^2$.

Aplicando este resultado à 3.35, teremos: $m \left[4 \frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} + \frac{M}{a_0} u_\alpha \right] = rQ'_\alpha + 2W'u_\alpha$.

Dividindo ambos os membros desta igualdade por $4m$ chegamos finalmente a:

$$\frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} + \frac{M}{4a_0} u_\alpha = \frac{1}{4m} (rQ'_\alpha + 2W'u_\alpha). \quad (3.36)$$

Este conjunto de equações diferenciais é completamente regular na origem e aplica-se ao caso conservativo. Note que o segundo membro da igualdade depende, exclusivamente, das forças perturbativas.

Quando o problema é do tipo não conservativo regularizamos o tempo na equação 3.27 sem usar o trabalho W , obtendo as equações:

$$rQ_\alpha = 4m \left[\frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} - \frac{u_\alpha}{r} \sum \left(\frac{du_\alpha}{ds} \right)^2 \right].$$

De 3.23 e 3.30, temos:

$$v^2 = \frac{4}{r} \sum \left(\frac{du_\alpha}{ds} \right)^2.$$

Logo,

$$rQ_\alpha = m \left[4 \frac{d^2 u_i}{ds^2} - v^2 u_\alpha \right]. \quad (3.37)$$

Finalmente, no caso não-conservativo, teremos a equação do movimento utilizando as equações 3.37 e 3.33, que resultarão em:

$$rQ'_\alpha = m \left[4 \frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} + \left(\frac{2M}{r} - v^2 \right) u_\alpha \right] \quad (3.38)$$

que é análoga à equação 3.35 mas, neste caso, o coeficiente de u_i não é constante.

3.7 O problema de valor inicial

Para obtermos uma equação do movimento de Kepler não sujeito a perturbações basta que na equação 3.36 igualemos o segundo membro a zero. Ficaremos, portanto, com:

$$\frac{d^2 u_\alpha}{ds^2} + \frac{M}{4a_0} u_\alpha = 0 \quad (3.39)$$

que é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes. Façamos ser $w^2 = \frac{M}{4a_0}$, onde w é a frequência do movimento. Então a equação tem como soluções:

$$u_\alpha = A_\alpha \cos(ws) + B_\alpha \sin(ws) \quad (3.40)$$

As constantes A_α e B_α são determinadas pelas condições iniciais do movimento.

As equações 3.39 são quatro equações diferenciais do tipo oscilador harmônico simples [10].

A TRANSFORMAÇÃO KS COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

4.1 Introdução

Nesta seção vamos reformular o material discutido no capítulo anterior, usando uma particular álgebra de Clifford.

Vimos no capítulo anterior que, para regularizar o movimento bidimensional de Kepler, o método proposto por Levi-Civita foi combinar as duas coordenadas espaciais no número complexo $x = x_1 + ix_2$ e introduzir a coordenada $u = \sqrt{x}$, reduzindo o problema à equação do oscilador harmônico bidimensional .

Para a regularização do movimento em três dimensões, Kustaanheimo e Stiefel, de maneira semelhante ao método de Levi-Civita, propuseram a regularização para a quarta dimensão, reduzindo o problema tridimensional para o oscilador harmônico em quatro dimensões. Esta regularização, tal como foi proposta, é expressa com álgebra de matrizes, que tem interpretação geométrica pouco clara.

Uma alternativa é expressar as coordenadas da transformação KS como componentes de um espinor, que permite melhor interpretação geométrica. Além desta vantagem, a representação da transformação KS com álgebra geométrica permite reunir as coordenadas em um único espinor [2] . É o que iremos tratar neste capítulo.

4.2 Rotação e dilatação

Uma rotação-dilatação em álgebra geométrica pode ser escrita como ¹:

$$\mathbf{x}' = \tilde{\psi} \mathbf{x} \psi \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ são vetores e $\psi = m + m_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + m_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ é um espinor cujo conjugado é $\tilde{\psi}$, conforme 2.3, capítulo 2.

O módulo $|\psi|$ do espinor é um escalar determinado por:

$$|\psi|^2 = \tilde{\psi}\psi = \psi\tilde{\psi} = m^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2. \quad (4.2)$$

Um espinor não nulo possui inverso, que podemos obter da seguinte forma:

$$\psi^{-1}\psi = 1 \Rightarrow \psi^{-1}\psi\tilde{\psi} = \tilde{\psi} \Rightarrow \psi^{-1}|\psi|^2 = \tilde{\psi} \Rightarrow$$

$$\psi^{-1} = |\psi|^{-2} \tilde{\psi}. \quad (4.3)$$

Aplicando este resultado em 4.1, teremos: $\mathbf{x}' = \tilde{\psi}\mathbf{x}\psi = \frac{\psi^{-1}}{|\psi|^{-2}}\mathbf{x}\psi \Rightarrow$

$$\mathbf{x}' = |\psi|^2 (\psi^{-1}\mathbf{x}\psi)$$

o que significa que $\mathbf{x}'$ é obtido pela combinação da rotação $\psi^{-1}\mathbf{x}\psi$ e da dilatação pelo fator escalar $|\psi|^2$, como já visto no capítulo 2.

4.3 Vetor posição

Seja $\mathbf{r}$ o vetor posição. No caso do nosso problema, $\mathbf{r}$ é a distância relativa entre duas partículas.

A posição $\mathbf{r}$, relativa a um vetor unitário fixado $\mathbf{e}_1$, é determinada pelo espinor ψ na equação:

$$\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi \quad (4.4)$$

¹ Utilizamos, neste capítulo, $\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi$, usual no artigo de Hestenes e Lounesto [7]. O leitor deve observar a diferença entre essa expressão e a equação 2.5. Essa diferença, obviamente, é irrelevante.

Dado $\mathbf{r}$, o espinor correspondente não é unicamente determinado por $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi$. Se S é tal que $\tilde{S}\mathbf{e}_1S = \mathbf{e}_1$, então $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\tilde{S}\mathbf{e}_1S\psi$.

Logo, se

$$\phi = S\psi \quad (4.5)$$

ficaremos com:

$$\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi = \tilde{\phi}\mathbf{e}_1\phi. \quad (4.6)$$

A relação $\phi = S\psi$ é chamada transformação de calibre ou de "gauge", por ser similar à transformação de gauge da função de onda na teoria quântica.

Dado $\mathbf{e}_1$, pela equação $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi$ o espinor ψ determina um único vetor $\mathbf{r}$, mas o vetor $\mathbf{r}$ determina ψ somente com uma transformação de gauge. Essa correspondência não unívoca é de se esperar, pois temos quatro parâmetros para especificar o espinor ψ e apenas três para especificar o vetor $\mathbf{r}$. O sistema de equações 2.6 é indeterminado por este mesmo motivo.

Assim como utilizamos o vetor unitário $\mathbf{e}_1$ podemos utilizar qualquer outro vetor unitário que se mostre conveniente.

4.4 Vetor e espinor velocidade

Fazendo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ser a posição da partícula em sua órbita, executando um movimento de Kepler, temos:

- Velocidade da partícula: $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- A posição e a velocidade da partícula determinam o *momentum angular* (por unidade de massa): $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

Efetuando o produto geométrico entre $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$, obtemos:

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + I(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = r\dot{r} + i\mathbf{h}.$$

A equação $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi$ relaciona uma órbita $\psi = \psi(t)$ no espaço espinor a uma órbita $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ no espaço posição.

Podemos relacionar a velocidade $\dot{\psi}$ do espaço espinor a uma velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ do espaço posição. Para isto devemos diferenciar a equação $r = |\mathbf{r}| = |\psi|^2 = \tilde{\psi}\psi = \psi\tilde{\psi}$, obtendo:

$$\dot{r} = \dot{\psi}\tilde{\psi} + \psi\dot{\tilde{\psi}} = 2\langle\dot{\psi}\tilde{\psi}\rangle_0. \quad (4.7)$$

Introduzindo, agora, o espinor $W = 2\psi^{-1}\dot{\psi}$ e lembrando que $\psi^{-1} = |\psi|^{-2}\tilde{\psi} = r^{-1}\tilde{\psi}$, temos:

$$W = 2\psi^{-1}\dot{\psi} = 2r^{-1}\tilde{\psi}\dot{\psi} = r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}, \quad (4.8)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\omega}$ e 4.7 foram utilizados para ser $\langle W \rangle_0 = r^{-1}\dot{r}$, pois como $\dot{r} = 2\langle\dot{\psi}\tilde{\psi}\rangle_0$, então $\langle\dot{\psi}\tilde{\psi}\rangle_0 = \frac{\dot{r}}{2}$. Com isso, $W = 2r^{-1}\tilde{\psi}\dot{\psi} = 2r^{-1}[\langle\tilde{\psi}\dot{\psi}\rangle_0 + \langle\tilde{\psi}\dot{\psi}\rangle_2] = 2r^{-1}\left[\frac{\dot{r}}{2} + \langle\tilde{\psi}\dot{\psi}\rangle_2\right]$, logo, $W = r^{-1}\dot{r} + 2r^{-1}\langle\tilde{\psi}\dot{\psi}\rangle_2$. Fazendo $I\boldsymbol{\omega} = 2r^{-1}\langle\tilde{\psi}\dot{\psi}\rangle_2$, então chegamos a 4.8. Veremos adiante que $\boldsymbol{\omega}$ é, na verdade, a velocidade angular da órbita $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Sendo $W = 2\psi^{-1}\dot{\psi}$, temos: $\frac{1}{2}W = \psi^{-1}\dot{\psi} \Rightarrow \frac{1}{2}\psi W = \psi\psi^{-1}\dot{\psi}$, logo:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\psi W.$$

Vejamos, agora, que é verdadeiro que:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\tilde{W}\mathbf{r} + \mathbf{r}W). \quad (4.9)$$

Com efeito, de $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi$, temos: $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\tilde{\psi}}\mathbf{e}_1\psi + \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}$ e de $W = \frac{2}{r}\tilde{\psi}\dot{\psi}$ obtemos: $\tilde{W} = \frac{2}{r}\tilde{\psi}\dot{\psi}$ logo: $\tilde{W}\mathbf{r} = \frac{2}{r}\tilde{\psi}\dot{\psi}\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi = \frac{2}{r}\tilde{\psi}\dot{\psi}r\mathbf{e}_1\psi \Rightarrow \tilde{W}\mathbf{r} = 2\tilde{\psi}\dot{\psi}\mathbf{e}_1\psi$.

Efetuando $\mathbf{r}W$, obtemos: $\mathbf{r}W = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi\frac{2}{r}\tilde{\psi}\dot{\psi} = \frac{2}{r}\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi\tilde{\psi}\dot{\psi} \Rightarrow \mathbf{r}W = 2\tilde{\psi}\dot{\psi}\mathbf{e}_1\psi$.

Logo, $\tilde{W}\mathbf{r} + \mathbf{r}W = 2\tilde{\psi}\dot{\psi}\mathbf{e}_1\psi + 2\tilde{\psi}\dot{\psi}\mathbf{e}_1\psi = 2\dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\tilde{W}\mathbf{r} + \mathbf{r}W)$, o que confirma 4.9.

Usando, agora, $W = r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}$, temos: $\tilde{W} = r^{-1}\dot{r} - I\boldsymbol{\omega}$.

² Utilizaremos, aqui, $\tilde{\psi}\psi = \psi\tilde{\psi} = |\psi|^2 = r$, magnitude do vetor posição, $\mathbf{r}$, para ficar mais de acordo com o que aqui tratamos, do que se usássemos ρ , como fizemos em 2.4.

Aplicando W e $\tilde{W}$ em $\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\tilde{W}\mathbf{r} + \mathbf{r}W)$, ficamos com:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}[(r^{-1}\dot{r} - I\boldsymbol{\omega})\mathbf{r} + \mathbf{r}(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega})] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = r^{-1}\dot{r}\mathbf{r} + \frac{1}{2}(I\mathbf{r}\boldsymbol{\omega} - I\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \frac{1}{2}I(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}). \text{ Usando, agora, } \mathbf{r}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} + I(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}), \text{ teremos:}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}I[\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} + I(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} + I(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))] \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}I[2I(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})] = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}), \text{ o que nos dá:}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (4.10)$$

Isto vem a confirmar que $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da órbita $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ como dissemos anteriormente. A componente radial de $\boldsymbol{\omega}$ é irrelevante para $\dot{\mathbf{r}}$. Portanto, podemos fazer:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = \langle \boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \rangle_0 = 0.$$

Logo, podemos escrever: $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} = -\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}$, ou, ainda:

$$\tilde{W}\mathbf{r} = \mathbf{r}W \quad (4.11)$$

pois:

$$\tilde{W}\mathbf{r} = (r^{-1}\dot{r} - I\boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = r^{-1}\mathbf{r}\dot{r} - I\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} = r^{-1}\mathbf{r}\dot{r} + I\mathbf{r}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{r}W.$$

Aplicando, na igualdade $\tilde{W}\mathbf{r} = \mathbf{r}W$, as expressões $W = 2\psi^{-1}\dot{\psi}$ e $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi$, teremos:

$$\tilde{W}\mathbf{r} = \mathbf{r}W \Rightarrow \widetilde{(2\psi^{-1}\dot{\psi})}\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi 2\psi^{-1}\dot{\psi} \Rightarrow \tilde{\dot{\psi}}(\tilde{\psi}^{-1}\tilde{\psi})\mathbf{e}_1\psi = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1(\psi\psi^{-1})\dot{\psi} \Rightarrow$$

$$\tilde{\dot{\psi}}\mathbf{e}_1\psi = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}$$

que equivale à condição:

$$\langle I\tilde{\dot{\psi}}\mathbf{e}_1\dot{\psi} \rangle_0 = \langle I\mathbf{e}_1\tilde{\dot{\psi}}\tilde{\psi} \rangle_0 = 0. \quad (4.12)$$

Temos, com isto, uma relação entre ψ e a sua derivada temporal $\dot{\psi}$.

Expressando ψ e $\dot{\psi}$ em termos de componentes, a relação 4.12 é equivalente à condição KS, 3.10 .

Aplicamos, agora, $\tilde{W}\mathbf{r} = \mathbf{r}W$ em $\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\tilde{W}\mathbf{r} + \mathbf{r}W)$, obtendo: $\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}W + \mathbf{r}W) \Rightarrow$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}W.$$

Isolemos, agora, W nesta equação:

$$\mathbf{r}W = \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{r}^{-1}\mathbf{r}W = \mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} \Rightarrow W = \mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}}.$$

Com isto, ficamos com o seguinte resultado para 4.8:

$$W = 2\psi^{-1}\dot{\psi} = \mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} = r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}. \quad (4.13)$$

Multiplicando $\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} = r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}$, pela esquerda, por $\mathbf{r}$, teremos:

$$\mathbf{r}\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}).$$

Aplicando, agora, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega})$ em $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r} + I\mathbf{h}$, teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\mathbf{r}(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}) &= r\dot{r} + I\mathbf{h} \Rightarrow (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{r})(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}) = r\dot{r} + I\mathbf{h} \Rightarrow \\ \mathbf{r}^2(r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}) &= r\dot{r} + I\mathbf{h} \Rightarrow r\dot{r} + r^2I\boldsymbol{\omega} = r\dot{r} + I\mathbf{h} \Rightarrow r^2I\boldsymbol{\omega} = I\mathbf{h} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\omega} = r^{-2}\mathbf{h}.$$

A expressão acima relaciona a velocidade angular com o *momentum angular* e é uma alternativa à condição $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = \langle \boldsymbol{\omega} \mathbf{r} \rangle_0 = 0$.

Isto porque, sendo $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ e $\boldsymbol{\omega} = r^{-2}\mathbf{h}$, então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} &= (r^{-2}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = r^{-2}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) = r^{-2}[(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}] = r^{-2}[-I(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}] \Rightarrow \\ r^{-2} \left[-I\frac{1}{2}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \right] &= r^{-2} \left\{ -I\frac{1}{2}\frac{1}{2}[(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r})\mathbf{r} + \mathbf{r}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r})] \right\} \Rightarrow \\ r^{-2} \left[-I\frac{1}{4}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}\mathbf{r}) \right] &= r^{-2} \left[-I\frac{1}{4}(-r\dot{\mathbf{r}} + r\dot{\mathbf{r}}) \right] = 0 \end{aligned}$$

A expressão $W = 2\psi^{-1}\dot{\psi} = \mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}}$, por sua vez, estabelece uma relação entre $\dot{\psi}$ e $\dot{\mathbf{r}}$. Podem-se, ainda, obter outras, como $\frac{4}{r} |\dot{\psi}|^2 = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{r^2}$, que veremos abaixo como se chega.

Vimos que $|W|^2 = W\tilde{W}$. Mas $W = \frac{2}{r}\tilde{\psi}\dot{\psi}$ e $\dot{\psi} = \frac{1}{2}\psi W$, logo $\psi W = 2\dot{\psi} \Rightarrow \tilde{W}\tilde{\psi} = 2\dot{\psi} \Rightarrow \tilde{W}\tilde{\psi}\tilde{\psi}^{-1} = 2\dot{\psi}\tilde{\psi}^{-1} \Rightarrow \tilde{W} = 2\dot{\psi}\tilde{\psi}^{-1}$ com isto concluímos que:

$$|W|^2 = W\tilde{W} = \left(\frac{2}{r}\tilde{\psi}\dot{\psi}\right)\left(2\frac{\dot{\psi}}{\tilde{\psi}}\right) = \frac{4}{r}\dot{\psi}\tilde{\psi} = \frac{4}{r}|\dot{\psi}|^2. \quad (4.14)$$

Por outro lado, vimos que $\dot{\mathbf{r}} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi} + \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}$ e, ainda que $\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}$, donde concluímos que :

$$\dot{\mathbf{r}} = 2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi} = 2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}. \quad (4.15)$$

uma forma alternativa para 4.13 bastante usada.

Usando essa igualdade, podemos escrever:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = 2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi} = 4\tilde{\psi}\mathbf{e}_1|\dot{\psi}|^2\mathbf{e}_1\dot{\psi} = 4|\dot{\psi}|^2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi} = 4|\dot{\psi}|^2|\dot{\psi}|^2.$$

Dividindo, agora, $\dot{\mathbf{r}}^2$ por r^2 e lembrando que $|\dot{\psi}|^2 = r$, temos:

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{r^2} = \frac{4}{r}\frac{|\dot{\psi}|^2}{r}|\dot{\psi}|^2 = \frac{4}{r}|\dot{\psi}|^2 \quad (4.16)$$

de 4.14 e 4.16 , vem:

$$|W|^2 = W\tilde{W} = \frac{4}{r}|\dot{\psi}|^2 = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{r^2} \quad (4.17)$$

uma nova relação entre $\dot{\psi}$ e $\dot{\mathbf{r}}$.

Vimos em 4.15 que $\dot{\mathbf{r}} = 2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}$. Logo:

$$2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi} = \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow 2r\mathbf{e}_1\dot{\psi} = \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow$$

$$2r\dot{\psi} = \mathbf{e}_1\dot{\mathbf{r}}. \quad (4.18)$$

A condição KS é, na verdade, uma condição de gauge. Para verificar isto basta considerar um tempo arbitrário como uma transformação de gauge $\phi = S\psi$.

Devemos relacionar $\dot{\phi}$ com $\dot{\psi}$ para determinar o efeito da transformação de gauge.

Podemos escrever um espinor S na forma

$$S = e^{(1/2)I\mathbf{e}_1\theta}$$

onde θ é o ângulo de rotação, e $I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, pseudoescalar unitário, que comuta com todos os vetores e $I^2 = -1$.

Diferenciando esta expressão e considerando $\theta = \theta(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= [e^{(1/2)I\mathbf{e}_1\theta}](\tfrac{1}{2}I\mathbf{e}_1\dot{\theta}) \Rightarrow \\ \dot{S} &= S\frac{1}{2}I\mathbf{e}_1\dot{\theta}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Usando $\dot{\psi} = \frac{1}{2}\psi W$, a transformação de gauge $\phi = S\psi$ e $\dot{S} = S\frac{1}{2}I\mathbf{e}_1\dot{\theta}$, teremos:

$$\dot{\phi} = \dot{S}\psi + S\dot{\psi} = S\frac{1}{2}I\mathbf{e}_1\dot{\theta}\psi + S\frac{1}{2}\psi W = \frac{1}{2}I\mathbf{e}_1\dot{\theta}(S\psi) + \frac{1}{2}(S\psi)W \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{1}{2}(I\mathbf{e}_1\dot{\theta}\phi + \phi W)$$

Considerando, agora, que $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi = \tilde{\phi}\mathbf{e}_1\phi$, temos:

$$\begin{aligned}\phi\mathbf{r}\tilde{\phi} &= \phi\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\phi\tilde{\phi} = r^2\mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{e}_1 = \frac{\phi\mathbf{r}\tilde{\phi}}{r^2}, \text{ então, de } \dot{\phi} = \frac{1}{2}(I\mathbf{e}_1\dot{\theta}\phi + \phi W), \text{ vem:} \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{2}(I\frac{\phi\mathbf{r}\tilde{\phi}}{r^2}\dot{\theta}\phi + \phi W) \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{1}{2}(I\frac{\phi\mathbf{r}}{r^2}\dot{\theta}\tilde{\phi}\phi + \phi W) \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{1}{2}(I\frac{\phi\mathbf{r}}{r^2}\dot{\theta}r + \phi W) \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= \frac{1}{2}\phi(I\frac{\mathbf{r}}{r}\dot{\theta} + W) \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{2}\phi(I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} + W).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Isto mostra como W pode ser alterada mediante uma transformação de gauge.

Desenvolvendo a expressão 4.20, temos:

$$\begin{aligned}2\dot{\phi} &= \phi(i\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} + W) \Rightarrow 2\phi^{-1}\dot{\phi} = \phi^{-1}\phi(i\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} + W) \Rightarrow 2\phi^{-1}\dot{\phi} = i\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} + W \\ \text{utilizando o fato que } W &= 2\psi^{-1}\dot{\psi} = r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega}, \text{ e ainda que } \boldsymbol{\omega} = r^{-2}\mathbf{h} \text{ segue que:} \\ 2\phi^{-1}\dot{\phi} &= I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} + 2\psi^{-1}\dot{\psi} \Rightarrow 2\phi^{-1}\dot{\phi} = I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} + r^{-1}\dot{r} + I\boldsymbol{\omega} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$2\phi^{-1}\dot{\phi} = 2\psi^{-1}\dot{\psi} + I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} = r^{-1}\dot{r} + I(r^{-2}\mathbf{h} + \hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}),\tag{4.21}$$

o que mostra que a transformação de gauge acrescenta uma componente radial, $\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}$, à velocidade angular.

Isolemos, agora, $\dot{\theta}$, a partir da expressão $2\phi^{-1}\dot{\phi} = 2\psi^{-1}\dot{\psi} + I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}$:

como $2\psi^{-1}\dot{\psi} = \mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}}$, então:

$$2\phi^{-1}\dot{\phi} = \mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} + I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} \Rightarrow I\hat{\mathbf{r}}2\phi^{-1}\dot{\phi} = I\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} + I\hat{\mathbf{r}}I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} \Rightarrow I\hat{\mathbf{r}}2\phi^{-1}\dot{\phi} = I\frac{\mathbf{r}}{r}\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}$$

mas $\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ e como $\hat{\mathbf{r}}$ é vetor unitário, temos que $\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} = 1$, logo:

$$I\hat{\mathbf{r}}2\phi^{-1}\dot{\phi} = Ir^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = Ir^{-1}\dot{\mathbf{r}} - I\hat{\mathbf{r}}2\phi^{-1}\dot{\phi}.$$

Como $\dot{\theta}$ é um escalar, podemos escrever:

$$\dot{\theta} = \langle Ir^{-1}\dot{\mathbf{r}} - I\hat{\mathbf{r}}2\phi^{-1}\dot{\phi} \rangle_0 = -\langle I\hat{\mathbf{r}}2\phi^{-1}\dot{\phi} \rangle_0. \quad (4.22)$$

Podemos isolar $\dot{\theta}$, também, da maneira que se segue:

$2\phi^{-1}\dot{\phi} = 2\psi^{-1}\dot{\psi} + I\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}$. Multiplicando, pela esquerda, por $I\phi$ e fazendo $2\psi^{-1}\dot{\psi} = \mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}}$, temos:

$$2I\phi\phi^{-1}\dot{\phi} = I\phi\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \phi\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} \Rightarrow 2I\dot{\phi} = I\phi\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \phi\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}$$

Multiplicando, agora, pela esquerda, por $\tilde{\phi}\mathbf{e}_1$, temos:

$$2I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi} = I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\phi\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \tilde{\phi}\mathbf{e}_1\phi\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}. \text{ Tendo em vista que } \tilde{\phi}\mathbf{e}_1\phi = \mathbf{r}, \text{ temos:}$$

$$2I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi} = I\mathbf{r}\mathbf{r}^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta} \Rightarrow 2I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi} = I\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r}\dot{\theta} = I\dot{\mathbf{r}} - \frac{r^2}{r}\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$r\dot{\theta} = I\dot{\mathbf{r}} - 2I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\theta} = Ir^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \frac{2}{r}I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi}.$$

Como $\dot{\theta}$ é um escalar podemos escrever:

$$\dot{\theta} = \langle Ir^{-1}\dot{\mathbf{r}} - \frac{2}{r}I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi} \rangle_0 = -\frac{2}{r}\langle I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi} \rangle_0 \quad (4.23)$$

de 4.22 e 4.23, temos:

$$\dot{\theta} = -\langle I\hat{\mathbf{r}}2\phi^{-1}\dot{\phi} \rangle_0 = -\frac{2}{r}\langle I\tilde{\phi}\mathbf{e}_1\dot{\phi} \rangle_0. \quad (4.24)$$

Isto se reduz à condição KS, $\langle I\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi} \rangle_0 = \langle I\mathbf{e}_1\dot{\psi}\tilde{\psi} \rangle_0 = 0$, se, e somente se, $\dot{\theta} = 0$.

Assim, a condição KS fixa a condição de gauge a um valor constante, ou seja, o gauge pode ser mudado livremente em um tempo, mas seu valor para todos os outros instantes é então fixado pela condição KS [7] .

Qualquer alternativa para a condição KS gauge terá uma velocidade angular com componente radial não nula. Como a equação $\dot{\mathbf{r}} = r\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ mostra que a componente radial não afeta a velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ no espaço posição, então a escolha da condição de gauge é livre.

4.5 A equação espinorial do movimento

Obtemos a equação espinorial do movimento, correspondente à equação do movimento no espaço posição, a partir da diferenciação da equação 4.18, $2r\dot{\psi} = \mathbf{e}_1\psi\dot{\mathbf{r}}$, como se segue:

$$\frac{d}{dt}(2r\dot{\psi}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_1\psi\dot{\mathbf{r}}) \Rightarrow 2\frac{d}{dt}(r\dot{\psi}) = \mathbf{e}_1\psi\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{e}_1\dot{\psi}\dot{\mathbf{r}}.$$

$$\text{De } 2r\dot{\psi} = \mathbf{e}_1\psi\dot{\mathbf{r}}, \text{ segue que } \dot{\psi} = \frac{\mathbf{e}_1\psi\dot{\mathbf{r}}}{2r}, \text{ logo } 2\frac{d}{dt}(r\dot{\psi}) = \psi\psi^{-1}\mathbf{e}_1\psi\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{e}_1\frac{\mathbf{e}_1\psi\dot{\mathbf{r}}}{2r}\dot{\mathbf{r}},$$

$$\text{mas, como } \psi^{-1} = \frac{1}{r}\tilde{\psi}, \text{ então } 2\frac{d}{dt}(r\dot{\psi}) = \psi\frac{1}{r}\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi\ddot{\mathbf{r}} + \psi\frac{1}{r}\frac{\mathbf{e}_1^2}{2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$\text{como } \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi = \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{e}_1^2 = 1, \text{ ficamos com: } 2\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\psi}{dt}\right) = \psi\frac{1}{r}(\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2).$$

Utilizando, agora, a relação

$$\frac{d}{ds} = r\frac{d}{dt} \quad (4.25)$$

teremos:

$$2\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left(r\frac{1}{r}\frac{d\psi}{ds}\right) = \psi\frac{1}{r}(\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2) \Rightarrow 2\frac{1}{r}\frac{d^2\psi}{ds^2} = \psi\frac{1}{r}(\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2).$$

Concluindo:

$$2\frac{d^2\psi}{ds^2} = \psi(\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2). \quad (4.26)$$

A equação 4.26 é de fundamental importância, pois relaciona as equações vetorial e espinorial do movimento.

Utilizando a equação do movimento, $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}$, onde $\mathbf{f}$ é uma força perturbadora ordinária (por unidade de massa) e μ é uma constante, na equação 4.26, obtemos:

$$2\frac{d^2\psi}{ds^2} = \psi\left[\mathbf{r}\left(-\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}\right) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2\right] = \psi\left[-\mu\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{r}\mathbf{f} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2\right] \Rightarrow$$

$$2\frac{d^2\psi}{ds^2} + \mu\psi\frac{r^2}{r^3} - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \psi\mathbf{r}\mathbf{f} \Rightarrow 2\frac{d^2\psi}{ds^2} - \psi\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}\right) = \psi\mathbf{r}\mathbf{f}.$$

Sendo $\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi = \mathbf{r}$, então $\psi\mathbf{r}\mathbf{f} = \psi\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi\mathbf{f} = r\mathbf{e}_1\psi\mathbf{f}$. Fazendo E ser igual à expressão entre parênteses na equação acima, ou seja, $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}$, ficaremos com:

$$2\frac{d^2\psi}{ds^2} - E\psi = \psi\mathbf{r}\mathbf{f} \quad (= r\mathbf{e}_1\psi\mathbf{f}). \quad (4.27)$$

Esta é a equação KS em termos de álgebra geométrica!

A expressão $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}$ é a Energia de Kepler do Movimento, que também pode ser calculada pela expressão $E = |\psi|^{-2} \left(2 \left| \frac{d\psi}{ds} \right|^2 - \mu \right)$.

Com a equação 4.27, que expressa a equação KS com álgebra geométrica, determina-se a equação do espaço espinor quando $\mathbf{f}$ é dada numa função explícita de $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$, sendo $\mathbf{r}\mathbf{f}$ expresso como função de ψ e de $\dot{\psi}$, usando-se $\mathbf{r} = \tilde{\psi}\mathbf{e}_1\psi$ e $\dot{\mathbf{r}} = 2\tilde{\psi}\mathbf{e}_1\dot{\psi}$.

O fator de perturbação $\mathbf{r}\mathbf{f} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{f} + I(\mathbf{r} \times \mathbf{f})$ em 4.27 decompõe-se na parte radial, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}$, que afeta o tamanho e a forma da órbita de Kepler, e no torque, $I(\mathbf{r} \times \mathbf{f})$, que influi na orientação da órbita no espaço.

4.6 Sistema livre de forças perturbadoras

No caso de termos $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, ou seja, o movimento livre de perturbações, a equação assume a forma:

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} - \frac{1}{2}E\psi = 0. \quad (4.28)$$

Para $E < 0$ e tomando $\omega = \sqrt{\frac{E}{2}}$ temos o problema reduzido a quatro equações de osciladores harmônicos, da seguinte forma:

$$\psi = \psi_0 + \psi_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \psi_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \psi_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad (4.29)$$

em que:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\psi_0}{ds^2} - \frac{1}{2}E\psi_0 &= 0; \\
 \frac{d^2\psi_{12}}{ds^2} - \frac{1}{2}E\psi_{12} &= 0; \\
 \frac{d^2\psi_{13}}{ds^2} - \frac{1}{2}E\psi_{13} &= 0; \\
 \frac{d^2\psi_{23}}{ds^2} - \frac{1}{2}E\psi_{23} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

A solução de cada uma das equações acima resultará em:

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= A_0 \cos \omega s + B_0 \sin \omega s; \\
 \psi_{12} &= A_{12} \cos \omega s + B_{12} \sin \omega s; \\
 \psi_{13} &= A_{13} \cos \omega s + B_{13} \sin \omega s; \\
 \psi_{23} &= A_{23} \cos \omega s + B_{23} \sin \omega s.
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Entretanto, o movimento de Kepler livre de forças perturbativas, por ser um movimento de força central, ocorre em um único plano. Portanto, se considerarmos que o movimento ocorre no plano determinado pelo 2-vetor $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, com o vetor $\mathbf{e}_1$ apontando na direção da posição inicial da partícula, teremos:

$$A_{13} = B_{13} = A_{23} = B_{23} = 0.$$

Com isso, aplicando em 4.29, teremos:

$$\begin{aligned}
 \psi &= [A_0 \cos(\omega s) + B_0 \sin(\omega s)] + [A_{12} \cos(\omega s) + B_{12} \sin(\omega s)]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \Rightarrow \\
 \psi &= [A_0 + A_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] \cos(\omega s) + [B_0 + B_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] \sin(\omega s)
 \end{aligned}$$

Da condição inicial $\mathbf{r}(0) = \tilde{\psi}(0)\mathbf{e}_1\psi(0)$ e tomando $s = 0 \Leftrightarrow t = 0$, temos:

$$\mathbf{r}(0) = (A_0^2 - A_{12}^2)\mathbf{e}_1 - 2A_0A_{12}\mathbf{e}_2.$$

Se $\mathbf{r}(0) = r_0 \mathbf{e}_1$, então $A_{12} = 0$ e $A_0 = \sqrt{r_0}$.

Da equação 4.18, temos: $2r\dot{\psi} = \mathbf{e}_1 \psi \dot{\mathbf{r}} = 2\psi'$, onde $\psi' = \frac{d\psi}{ds}$. Logo:

$$2\psi'(0) = \mathbf{e}_1 A_0 \dot{\mathbf{r}}(0) = \sqrt{r_0} \mathbf{e}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) + \sqrt{r_0} \mathbf{e}_1 \wedge \dot{\mathbf{r}}(0).$$

Se $\dot{\mathbf{r}}(0) = v_{01} \mathbf{e}_1 + v_{02} \mathbf{e}_2$, temos: $2\psi'(0) = 2(B_0 + B_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \omega = \sqrt{r_0} v_{01} + \sqrt{r_0} v_{02} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$.

De onde vem: $2B_0 \omega = \sqrt{r_0} v_{01}$ e, ainda, $2B_{12} \omega = \sqrt{r_0} v_{02}$.

Tomando $v_{01} = 0$, segue que:

$$\psi(s) = \sqrt{r_0} \cos(\omega s) + \frac{\sqrt{r_0} v_{02}}{2\omega} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin(\omega s).$$

Fazendo $A = \sqrt{r_0}$ e $B = \frac{\sqrt{r_0} v_{02}}{2\omega}$, teremos, finalmente, a solução particular do nosso problema:

$$\psi(s) = A \cos(\omega s) + B \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin(\omega s). \quad (4.32)$$

Quando a rotação $\hat{r} = \psi^{-1} \mathbf{e}_1 \psi$ se dá em um plano, então

$$\mathbf{r} = \tilde{\psi} \mathbf{e}_1 \psi = \mathbf{e}_1 \psi^2. [6]$$

Se aplicarmos à equação 4.32 chegaremos ao vetor posição:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 [A \cos \omega s + B \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin \omega s]^2.$$

Desenvolvendo vamos obter [11]:

$$\mathbf{r} = \left[\frac{A^2 - B^2}{2} + \frac{A^2 + B^2}{2} \cos(2\omega s) \right] \mathbf{e}_1 + AB \sin(2\omega s) \mathbf{e}_2 \quad (4.33)$$

A equação 4.33 representa uma elipse cuja origem do sistema coincide com o foco, e com as seguintes dimensões:

- Eixo maior: $2a = A^2 + B^2$;
- Eixo menor: $2b = AB$;
- Distância focal: $2c = A^2 - B^2$; e

- Excentricidade: $\mathcal{E} = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}$.

Para a obtenção de r basta usarmos a relação: $r = |\mathbf{r}| = \tilde{\psi}\psi$.

Sendo $\psi = A \cos(\omega s) + B \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin(\omega s)$, teremos:

$$r = [A \cos(\omega s) - B \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin(\omega s)] [A \cos(\omega s) + B \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin(\omega s)].$$

Desenvolvendo a expressão acima obtemos:

$$r = \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2 - B^2}{2} \cos(2\omega s). \quad (4.34)$$

Sendo $2a = A^2 + B^2$, $2c = A^2 - B^2$ e a excentricidade $\mathcal{E} = \frac{c}{a}$, se fizermos $\varphi = 2\omega s$, a equação acima fica:

$$r = a(1 + \mathcal{E} \cos \varphi). \quad (4.35)$$

Utilizando, agora, a relação 4.25, teremos:

$$dt = r ds \Rightarrow dt = [a(1 + \mathcal{E} \cos \varphi)] ds \Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^s a[1 + \mathcal{E} \cos(2\omega s)] ds,$$

logo:

$$t = as - \frac{c}{2\omega} \sin(2\omega s).$$

Como $\varphi = 2\omega s$, temos:

$$t = \frac{a\varphi}{2\omega} - \frac{c}{2\omega} \sin \varphi. \quad (4.36)$$

O ângulo φ é conhecido como anomalia excêntrica.

Podemos expressar 4.35 na forma polar definindo: $\cos \varphi = -\frac{\mathcal{E} + \cos \theta}{1 + \mathcal{E} \cos \theta}$.

Donde: $1 + \mathcal{E} \cos \varphi = \frac{1 + \mathcal{E} \cos \theta - \mathcal{E}^2 - \mathcal{E} \cos \theta}{1 + \mathcal{E} \cos \theta} = \frac{1 - \mathcal{E}^2}{1 + \mathcal{E} \cos \theta}$.

Mas de 4.35, temos: $\frac{r}{a} = 1 + \mathcal{E} \cos \varphi$. Logo, ficamos com:

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - \mathcal{E}^2}{1 + \mathcal{E} \cos \theta}. \quad (4.37)$$

Podemos verificar em [5] , página 94, que a natureza das órbitas depende do valor de $\mathcal{E}$, segundo o esquema abaixo:

$\mathcal{E} > 1$; $E > 0$ Hipérbole;

$\mathcal{E} = 1$; $E = 0$ Parábola;

$\mathcal{E} < 1$; $E < 0$ Elipse; e

$\mathcal{E} = 0$; $E = -\frac{m\mu^2}{2l^2}$ Circunferência.

Neste último caso l é a magnitude do vetor *momentum angular*.

Conclusão

Este trabalho introduz a álgebra de Clifford, ou álgebra geométrica, do espaço euclidiano, discutindo uma de suas muitas aplicações à Mecânica Clássica: a transformação de Kustaanheimo Stiefel.

Nós pudemos observar que a álgebra de Clifford tem grande alcance e possibilidades, já que sintetiza em um único esquema as estruturas dos quatérnions e da álgebra de extensão de Grassmann.

A Álgebra Geométrica é ideal para se tratar de rotações e dilatação de vetores pois, em uma única operação de multiplicação de um vetor por um espinor e pelo reverso deste, podemos obter estes efeitos, gerando outro vetor que nos interesse. Operações deste tipo são muito mais simples de se efetuar usando-se a álgebra de Clifford Cl_3 que com matrizes.

No caso explorado nesta dissertação, a transformação KS, vimos que a álgebra geométrica proporciona uma interpretação geométrica mais clara, simplificação de operações matemáticas além de, em uma única expressão, serem encerradas várias informações sobre o problema em estudo.

Por estas características podemos dizer que a álgebra de Clifford proporciona uma ligação estreita entre a Física e a Matemática e deve ser utilizada e desenvolvida como uma linguagem adequada e natural para a Física.

Referências Bibliográficas

- [1] ALTMANN, S. L. Hamilton, Rodrigues and the Quaternion Scandal. *Mathematical Magazine* 62 (1989), 291–308.
- [2] BARTSCH, T. The Kustaanheimo-Stiefel transformation in geometric algebra. *Journal of Physics A: Mathematical and General* (2003).
- [3] CROWE, M. J. *A History of Vector Analysis - The Evolution of the idea of a Vectorial System*. Dover Publications, Inc., New York, 1993.
- [4] FIGUEIREDO, V. L., CAPELAS DE OLIVEIRA, E., AND RODRIGUES JR, W. A. Covariant, Algebraic, and Operator Spinors. *Journal of Theoretical Physics* 29 (1990), 371–395.
- [5] GOLDSTEIN, H., POOLE, C., AND SAFKO, J. *Classical Mechanics*, 3rd ed. Addison Wesley, 2000.
- [6] HESTENES, D. *New Foundations for Classical Mechanics*, 3rd ed. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [7] HESTENES, D., AND LOUNESTO, P. Geometry of Spinor Regularization. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 30 (1983), 171–179.
- [8] KUSTAAHEIMO, P., AND STIEFEL, E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. *Journal für die reine und angewandte mathematik* (1965), 204–219.
- [9] LOUNESTO, P. *Clifford Algebras and Spinors*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

-
- [10] MENON, M. D. L. T. Uma representação spinorial para a transformação de Kustaanheimo e Stiefel. <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000047830>, 1988.
- [11] MONTEIRO, I. O. Álgebra geométrica do espaço euclidiano: conceitos básicos e algumas aplicações físicas. http://www.ceunes.ufes.br/downloads/2/luciofassarella-monografia_igor.pdf, 2009.
- [12] PINHEIRO, M. L. G. Quaterniões: Cálculo numérico e simbólico. http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/6766/1/Quaterni%c3%b5es__c%c3%a1lculo%20num%c3%a9rico%20e%20simb%c3%b3loco.pdf, 2006.
- [13] PORTEUS, I. R. *Topological Geometry*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1981.
- [14] VAZ JR., J. A Álgebra Geométrica do Espaço Euclideano e a Teoria de Pauli. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 19 (1997), 234–259.