

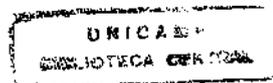
# Modelamentos de Kirchhoff/Born para propagação de ondas

Maria Amélia Novais Schleicher

Prof. Dr. Martin Tygel  
Orientador

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos  
Co-orientador

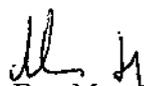
Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica, UNI-  
CAMP, para obtenção do título de Doutora em  
Matemática Aplicada.

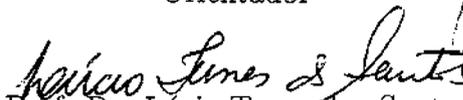


## Modelamentos de Kirchhoff/Born para propagação de ondas

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Maria Amélia Novais Schleicher e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de Novembro de 1998.

  
Prof. Dr. Martin Tygel  
Orientador

  
Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos  
Co-orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Martin Tygel
2. Prof. Dr. Bjørn Ursin
3. Prof. Dr. Ivan de Araújo Simões Filho
4. Prof. Dr. Paulo Sérgio Lucio
5. Profa. Dra. Maria Cristina Cunha

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA APLICADA.

UNIDADE	B. C.
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	Sch 37m
V.º	
Ed.	
TÍTULO DC/	40854
PREC.	2 F 8/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	933,00
DATA	09/04/00
N.º CPD	

CM-00139654-2

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Schleicher, Maria Amélia Novais

Sch37m Modelamentos de Kirchhoff/Born para propagação de ondas /  
Maria Amélia Novais Schleicher -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

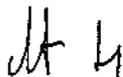
Orientador : Martin Tygel

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Propagação de ondas. I. Tygel, Martin. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

**Tese de Doutorado defendida e aprovada em 23 novembro de 1998**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof (a). Dr (a). MARTIN TYGEL**



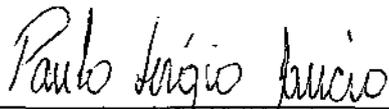
---

**Prof (a). Dr (a). BJORN URSIN**



---

**Prof (a). Dr (a). IVAN DE ARAÚJO SIMÕES FILHO**



---

**Prof (a). Dr (a). PAULO SÉRGIO LUCIO**



---

**Prof (a). Dr (a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA**

“Segura na mão de Deus e vai ... ”

Aos meus pais, pelo amor  
que sinto por eles.

## Agradecimentos

Ao professor Martin Tygel, pela proposta do presente trabalho e pela sua orientação na elaboração do mesmo.

Ao professor Lúcio Tunes dos Santos, pelas inúmeras discussões, pela dedicação e por ter permitido utilizar os seus programas de Raios e de cálculo da solução exata quando o refletor é plano.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática Aplicada, pelo apoio e incentivo. Em particular, gostaria de agradecer a Fátima Espíndola por ter ajudado-me inúmeras vezes.

A todos os meus amigos, em particular, a Magda, a Dirce, a Lúcia, ao Frederico e ao Maurílio pelo carinho e apoio.

Ao CNPq, a Capes, a FAPESP e a UFSCar pelo apoio financeiro.

Ao professor Peter Hubral por ter permitido rodar os meus programas na Universidade de Karlsruhe através do WIT Consórcio.

Ao professor Bjørn Ursin pelas sugestões e pelas discussões.

Parafraseando a amiga Fernanda, gostaria de dizer ao Jörg, meu marido: “aquele com quem dividimos o que temos e o que somos não cabem agradecimentos”. De fato, qualquer tentativa de fazê-lo seria incompleta e exagerada ao mesmo tempo. Incompleta pois não são enumeráveis as razões pelas quais eu gostaria de lhe dizer obrigada e exagerada, como seria exagerado agradecer a mim mesma.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Meio elástico anisotrópico</b>	<b>6</b>
2.1	Equação elastodinâmica . . . . .	6
2.1.1	Tensor deformação . . . . .	6
2.1.2	Tensor tensão . . . . .	8
2.1.3	Relação entre o tensor tensão e o tensor deformação – equação elastodinâmica . . . . .	10
2.1.4	Condições iniciais e condições de fronteira . . . . .	11
2.1.5	Função de Green elastodinâmica . . . . .	12
2.2	Teoria dos raios . . . . .	13
2.3	Aproximação de Born . . . . .	15
2.4	Integral Born-Kirchhoff . . . . .	19
2.5	Aproximação de Kirchhoff . . . . .	20
2.6	Considerações finais . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Integrais de Born-Kirchhoff e Kirchhoff num meio elástico isotrópico</b>	<b>24</b>
3.1	Considerações gerais . . . . .	25
3.2	Estudo dos fatores de obliquidade . . . . .	26
3.2.1	Fator de obliquidade de Kirchhoff . . . . .	26
3.2.2	Fator de obliquidade de Born-Kirchhoff . . . . .	27
3.3	Coefficiente espalhante de Born-Kirchhoff . . . . .	30
3.4	Linearização do coeficiente de reflexão de ondas-planas . . . . .	33
3.4.1	Espalhamento P-P . . . . .	34
3.4.2	Espalhamento S-S . . . . .	35
3.4.3	Espalhamento P-S . . . . .	36

3.4.4	Espalhamento S-P . . . . .	38
3.5	Comparação dos núcleos . . . . .	39
3.5.1	Razão entre os fatores de obliquidade de Kirchhoff e de Born-Kirchhoff . . . . .	39
3.5.2	Igualdade dos núcleos . . . . .	40
3.6	Considerações finais . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Meio acústico</b>	<b>43</b>
4.1	Equação da onda acústica . . . . .	43
4.2	Função de Green . . . . .	44
4.3	Representação geral do campo de onda espalhado . . . . .	45
4.4	Aproximação de Born . . . . .	48
4.5	A integral Born-Kirchhoff . . . . .	51
4.6	Aproximação de Kirchhoff . . . . .	52
4.7	Comparação entre as aproximações de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Algoritmos</b>	<b>57</b>
5.1	Integral de Born . . . . .	57
5.2	Integrais de Kirchhoff . . . . .	60
5.3	Diferenças Finitas . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Experimentos Numéricos</b>	<b>66</b>
6.1	Modelo 1 . . . . .	68
6.2	Modelo 2 . . . . .	73
6.3	Modelo 3 . . . . .	76
6.4	Modelo 4(a) . . . . .	82
6.5	Modelo 4(b) . . . . .	87
6.6	Modelo 5 . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>96</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>100</b>
	<b>A Cálculo dos coeficientes de reflexão linearizados</b>	<b>103</b>
	<b>B Função de Green para um meio acústico com velocidade con-     stante</b>	<b>110</b>



## RESUMO

Para descrever o campo de onda refletido de um único refletor (alvo) em um meio elástico anisotrópico não homogêneo existem duas aproximações integrais muito conhecidas. Estas são a integral de Born que integra sobre as perturbações supostamente pequenas em um volume contendo o refletor e a integral de Kirchhoff que integra o campo especularmente refletido ao longo do refletor. Nesta tese, mostramos que outras aproximações integrais podem ser obtidas a partir destas duas. A integral de Born pode ser transformada numa integral de superfície ao longo do refletor que é chamada de integral de Born-Kirchhoff por exibir características das duas integrais clássicas. Um outra aproximação integral se obtém por substituição do coeficiente de reflexão utilizado na aproximação de Kirchhoff por uma versão que deixa a expressão resultante recíproca. Esta aproximação é chamada de integral de Kirchhoff Recíproca. Todas estas aproximações em integrais de superfície tem a mesma contribuição no ponto de reflexão especular. Assim, a avaliação assintótica de todas elas usando o método de fase estacionária fornece a expressão da teoria de raios.

Investigamos estas aproximações numericamente para o caso acústico. Em nossos experimentos numéricos, todas as integrais mencionadas aproximam razoavelmente bem o campo de onda refletido (calculado pelo método de Diferenças Finitas). Porém, a qualidade da aproximação depende do modelo investigado. Também não se pode determinar um método que forneça sempre o melhor resultado. Apesar disso, a aproximação pela integral de Born-Kirchhoff mostrou-se a mais estável, fornecendo em todos os exemplos estudados um resultado de boa qualidade, sendo ou o melhor ou perto do melhor. Além disso, o tempo computacional para este método é (junto com o da aproximação Kirchhoff Recíproca) o mais baixo de todos os métodos sob investigação.

## ABSTRACT

To describe the reflected wavefield of a single (target) reflector in an elastic anisotropic medium, there exist two well-known integral approximations. These are the Born integral that integrates over supposedly small perturbations within a volume that contains the reflector, and the Kirchhoff integral that integrates over the specularly reflected field along the reflector. In this theses, we show that other integral approximations can be obtained starting from these two. The Born integral can be transformed into a surface integral along the reflector, which is called the Born-Kirchhoff integral since it exhibits characteristics of both the classical integral. Another integral approximation is obtained by substituting the reflection coefficient that is used in the Kirchhoff approximation by another version that turns the resulting integral expression reciprocal. This approximation is called the Reciprocal Kirchhoff integral. All these approximations in the form of surface integrals contain the same contribution at the specular reflection point. Therefore, their asymptotic evaluations using the stationary-phase method yields the ray-theory expression.

We numerically investigate these approximations in the acoustic case. In all our numerical experiments, all above integrals approximate the reflected wavefield (as calculated by the Finite Differences method) quite well. However, the quality of the approximation depends on the investigated model. Also, a method that would always provide the best approximation cannot be determined. In spite of that, the Born-Kirchhoff integral proved to be the most stable approximation that yielded in all studied examples a result of good quality, either the best one or close to the best one. Moreover, the computation time for this method is (together with that for the Reciprocal Kirchhoff approximation) the smallest one of all methods under investigation.

# Capítulo 1

## Introdução

A prospecção sísmica de reflexão é o método mais importante para a localização e o monitoramento de petróleo e gás natural. A sísmica de reflexão utiliza a geração de ondas na superfície da terra ou do mar para que, através da análise das ondas refletidas no subsolo, registradas também na superfície, possam ser determinadas a estrutura e outras propriedades do subsolo. O problema matemático fundamental da prospecção sísmica de reflexão é a inversão dos dados sísmicos, i.e., a recuperação de informações sobre o subsolo a partir dos registros na superfície. Para a realização e possíveis melhoramentos de esquemas de inversão, é crucial o bom entendimento do comportamento da propagação de ondas acústicas e elásticas em diferentes circunstâncias (Bleistein & Gray, 1985). Para alcançar este objetivo, modelos diretos são ferramentas importantes.

Uma vez que a propagação de ondas sísmicas está descrita pela equação de onda elástica ou acústica, o ideal seria obter a solução exata desta equação. Infelizmente, isto só é possível em situações demasiadamente simples. Para serem obtidas descrições do fenômeno da propagação de ondas em modelos mais realistas, são necessárias algumas aproximações relacionadas com diferentes condições, ou suposições, a respeito do meio ou das ondas pesquisadas. A melhor aproximação para a descrição da propagação de ondas pode ser obtida usando o Método de Diferenças Finitas. Para um meio arbitrariamente complicado pode-se calcular uma aproximação tão precisa quanto necessário, bastando para isso usar as condições de estabilidade (Mufti et al., 1996). Porém, este procedimento pode ter um alto custo. Assim, procuram-se outros métodos que possam dar uma boa aproximação do fenômeno es-

tudado sem o alto custo das Diferenças Finitas. Neste trabalho estudamos várias aproximações sugeridas na literatura e apresentamos algumas modificações novas. Comparamos os resultados obtidos com essas aproximações com a solução obtida por Diferenças Finitas.

Talvez a aproximação mais usada em sismica seja a Teoria dos Raios (veja, por exemplo, Červený, 1995), a qual fornece uma descrição de propagação de ondas em alta-frequência. Problemas mais gerais usam a representação integral do campo de onda (Frazer & Sen, 1985; Langenberg, 1986; Tygel et al., 1994). Através de certas hipóteses e simplificações (como, por exemplo, pequenos contrastes nos parâmetros, alta frequência, etc.) as duas aproximações mais utilizadas para representação do campo espalhado ou refletido, são as aproximações de Born e de Kirchhoff (Bleistein, 1984 e 1987; Beylkin & Burridge, 1990; Wapenaar & Berkhout, 1993).

A suposição básica para a aproximação de Born é que a propagação de ondas em um modelo semelhante ao estudado, chamado modelo de referência, já é conhecido. Dentro de uma certa região, a chamada região perturbada, os parâmetros do modelo variam em comparação com o modelo de referência. Esta variação, porém, é supostamente pequena, i.e., os parâmetros perturbados são ainda semelhantes aos não perturbados. O resultado aproximado é uma integral de volume sobre a região perturbada cujo integrando contém um coeficiente espalhante. Fisicamente, a aproximação de Born pode ser interpretada como a superposição de fontes secundárias pontuais (difratores) distribuídos pelo volume da região perturbada. Esta representação satisfaz à condição de reciprocidade (i.e., se as posições da fonte e do receptor forem trocadas, a resposta não se altera).

A suposição de que os parâmetros do meio tenham perturbações pequenas na aproximação de Born pode não ser conveniente para modelos sísmicos onde existem contrastes bruscos entre a região perturbada e a não perturbada. Em muitos casos na prática, os meios são constituídos por camadas onde os parâmetros elásticos variam de forma suave, separadas por interfaces suaves através das quais os parâmetros elásticos variam bruscamente. O campo de onda refletido em uma destas interfaces é geralmente modelado pela aproximação de Kirchhoff. Na aproximação de Kirchhoff, supõe-se que o espalhamento se dá sobre uma superfície suave na qual os parâmetros do meio sofrem uma descontinuidade. Acima da interface, onde estão localizados a fonte e o receptor, a função de Green é supostamente conhecida exata ou aproximadamente. O campo de onda espalhado (ou refletido) é obtido

por uma integral de superfície ao longo da interface, onde o campo refletido é aproximado pelo campo incidente multiplicado por um coeficiente de reflexão de ondas planas. Como a integração é uma operação linear, pode-se calcular o campo de ondas refletido em mais que uma interface por superposição de integrais desse tipo. A interpretação física da aproximação de Kirchhoff é que o campo de onda incidente é localmente, i.e., em cada ponto do refletor, representado por uma onda plana com a mesma amplitude e mesma direção de propagação. O refletor é localmente representado por um elemento diferencial plano, tangente ao refletor. Cada uma das ondas planas locais é refletida no correspondente elemento do refletor satisfazendo a lei de Snell. A integral de Kirchhoff descreve então a superposição de todas estas ondas planas locais ao longo do refletor e a propagação do campo de ondas resultante do refletor até o receptor. Na sua forma original (veja, por exemplo, Bleistein, 1984; 1987) esta representação não satisfaz à propriedade de reciprocidade. Visando superar esta dificuldade, além de melhorar os resultados obtidos, outros coeficientes de espalhamento podem ser introduzidos na formulação de Kirchhoff. Esta tese se dedica à investigação da qualidade destas aproximações, com o objetivo de estabelecer critérios, quando se pode esperar melhores resultados de qual aproximação.

No nosso estudo analítico, consideramos um modelo de dois semi-espacos elásticos anisotrópicos não homogêneos, separados por uma superfície suave, através da qual os parâmetros do meio são descontínuos. Além disso, consideramos um meio elástico anisotrópico de referência contínuo dado. À primeira vista, as aproximações de Born e de Kirchhoff deveriam conduzir a respostas que não deveriam se diferenciar muito quando aplicadas a este modelo que satisfaz todas as hipóteses. Porém, experimentos numéricos mostram que existem diferenças entre as duas respostas. Com o objetivo de entender este fato melhor, estudamos neste trabalho as duas aproximações analiticamente e comparamos os resultados numericamente. Também comparamos as aproximações com o resultado de Diferenças Finitas para julgar em que situação se pode esperar a melhor resposta de qual método.

Antes de começarmos o nosso estudo analítico, observamos que a o campo refletido na aproximação de Born é representado por uma integral de volume sobre a região perturbada, enquanto na aproximação de Kirchhoff por uma integral de superfície ao longo do refletor. Por esta diferença, as duas aproximações não são facilmente comparáveis. Para superar esta dificuldade, usamos inicialmente o Teorema de Betti, i.e., a formulação do teorema

da divergência para meios elásticos anisotrópicos, e aproximações em alta-frequência para transformar a integral de volume da aproximação de Born em uma integral de superfície com a mesma estrutura da integral de Kirchhoff. Em seguida, investigamos a equivalência desta integral com a integral de superfície vindo da aproximação de Kirchhoff. Observamos que a única diferença está no núcleo destas integrais.

No caso de meios elásticos isotrópicos, é possível investigar o coeficiente de espalhamento obtido na transformação da integral de volume da representação de Born em uma integral de superfície ao longo do refletor. Observamos que no ponto de reflexão especular, este coeficiente de espalhamento, multiplicado com o fator de obliquidade proveniente da mesma transformação, coincide com a aproximação linearizada do coeficiente de reflexão de ondas planas, multiplicada com o fator de obliquidade da integral de Kirchhoff. Tendo em vista que a aproximação de Born pressupõe um contraste fraco entre os parâmetros do meio, vemos que no ponto especular, os núcleos das integrais de superfície da aproximação de Kirchhoff Clássica e da transformação da integral de Born são aproximadamente iguais. Porém, os dois núcleos das integrais são diferentes fora do ponto de reflexão especular. A principal diferença é que o campo de ondas representada pela nova integral de superfície, denominada Born-Kirchhoff (Ursin & Tygel, 1997), satisfaz a propriedade de reciprocidade entre fonte e receptor, o que não era o caso na representação de Kirchhoff Clássica, sendo considerado uma desvantagem desta aproximação. Para completarmos o nosso estudo analítico, repetimos esta comparação no caso acústico, com os correspondentes resultados, como foi publicado anteriormente por Novais et al. (1997).

Com o objetivo de verificar a qualidade das várias aproximações para a representação de um campo de ondas refletidas em um refletor suave, comparamos as respostas destas aproximações numericamente. Uma vez que a equação da onda não pode ser resolvida analiticamente para meios não homogêneos, o nosso resultado de referência será obtido pelo método de Diferenças Finitas (Mufti et al., 1996). Para o caso mais simples de um refletor plano abaixo de um semi-espço homogêneo, onde a solução analítica é conhecida, mostramos que o método de Diferenças Finitas fornece o melhor resultado de todos os métodos. Isto justifica a escolha deste método como referência para os outros modelos. Por causa das limitações dos nossos recursos computacionais, as comparações numéricas tiveram que ser restritas ao caso acústico.

Nas nossas comparações numéricas, incluímos, além das Diferenças Finitas (DF) e da aproximação de Born Clássica (BC), as seguintes escolhas para o coeficiente de reflexão na integral da superfície:

- **Coeficiente de reflexão clássico** (veja, por exemplo, Bleistein, 1987). A aproximação que usa este coeficiente chamamos de Kirchhoff Clássica (KC).
- **Coeficiente de reflexão recíproco**. Este coeficiente foi introduzido por Deregowski & Brown (1983) para o caso acústico. Generalizamos isto para o caso elástico isotrópico. Utilizando este coeficiente na integral obtida pela aproximação de Kirchhoff, temos a reciprocidade na representação resultante. Por este motivo, chamamos a aproximação com este coeficiente de Kirchhoff Recíproca (KR).
- **Coeficiente de reflexão linearizado**. Este coeficiente é obtido após uma linearização do coeficiente de reflexão recíproco ou através da transformação da integral de Born em uma integral de superfície ao longo do refletor. Portanto, a aproximação utilizando este coeficiente é chamado de Born-Kirchhoff (BK).

Este trabalho tem a seguinte disposição. O segundo capítulo contém a teoria para o meio elástico anisotrópico, bem como as aproximações de Born, de Kirchhoff e de Born-Kirchhoff. Neste capítulo mostramos que as integrais de Kirchhoff Clássica e de Born-Kirchhoff tem a mesma estrutura, com uma única diferença no núcleo. No terceiro capítulo abordamos a teoria para o caso do meio isotrópico e comparamos analiticamente as aproximações. Mostramos neste capítulo que os núcleos das integrais de Kirchhoff Clássica e de Born-Kirchhoff são iguais no ponto de reflexão especular. No quarto capítulo fazemos um breve resumo da teoria de propagação de ondas num meio acústico; abordamos a aproximação de Born e de Kirchhoff e as comparamos com os resultados correspondentes ao capítulo anterior. No quinto capítulo descrevemos os algoritmos utilizados nos experimentos numéricos, que são descritos no sexto capítulo. Comparamos numericamente todas as aproximações descritas neste trabalho com o método de Diferenças Finitas para alguns modelos característicos. No sétimo capítulo apresentamos as conclusões.

# Capítulo 2

## Meio elástico anisotrópico

Neste capítulo, estudamos o deslocamento de uma partícula no subsolo causado por uma onda sísmica que se propaga em um meio elástico, anisotrópico de uma certa fonte até um receptor. Começamos com um breve estudo das ferramentas que são necessárias para este objetivo. Depois revisamos a derivação das integrais de Born e de Kirchhoff. Para possibilitar a comparação destas duas representações aproximadas do campo de onda refletido, transformamos a integral de Born numa integral de superfície com a mesma estrutura da integral de Kirchhoff. A representação resultante é denominada integral de Born-Kirchhoff (Ursin & Tygel, 1997).

### 2.1 Equação elastodinâmica

#### 2.1.1 Tensor deformação

Nesta seção determinamos o chamado tensor deformação. Esta discussão segue as linhas apresentadas por Pšenčík (1994). Para tal, estudamos o deslocamento de dois pontos vizinhos no subsolo por causa de uma força externa.

Seja  $P = (x_1, x_2, x_3)$  um ponto genérico em um volume  $V$  e  $Q = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$  um ponto na vizinhança de  $P$ . Queremos saber como a distância varia entre esses dois pontos com a deformação do volume  $V$ . Suponhamos que durante a deformação o ponto  $P$  seja deslocado para  $P' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  e o ponto  $Q$  seja deslocado para o ponto

$Q' = (x_1' + dx_1', x_2' + dx_2', x_3' + dx_3')$  (veja Figura 2.1). Então o vetor deslocamento  $\mathbf{u}(Q)$  pode ser expresso em termos do vetor deslocamento  $\mathbf{u}(P)$ , por

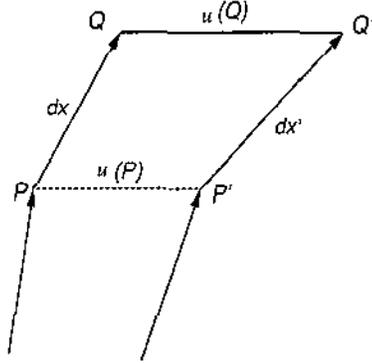


Figura 2.1: Após a deformação no volume  $V$ , partículas que ocupavam as posições  $P$  e  $Q$  são deslocadas para as posições  $P'$  e  $Q'$ , respectivamente.

$$u_i(Q) = u_i(x_k + dx_k) \approx u_i(x_k) + \frac{\partial u_i(x_k)}{\partial x_j} dx_j = u_i(P) + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.1)$$

Para observar a mudança na distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  devido a deformação, comparamos os quadrados das distâncias  $\overline{PQ}$  e  $\overline{P'Q'}$  (veja Figura 2.1). Para  $\overline{PQ}^2$ , temos

$$\overline{PQ}^2 = dx_i dx_i. \quad (2.2)$$

Na igualdade acima estamos usando a convenção de Einstein onde a ocorrência de dois índices (não mais que dois) repetidos implica a somação sobre eles, i.e.,  $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3 = dx_i dx_i$ . Usando propriedades vetoriais e a equação (2.1), obtemos

$$dx'_i = dx_i + u_i(Q) - u_i(P) \approx dx_i + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.3)$$

Portanto,

$$\overline{P'Q'}^2 = dx'_i dx'_i \approx \left( dx_i + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j \right) \left( dx_i + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_k} dx_k \right)$$

$$= dx_i dx_i + \left( \frac{\partial u_k(P)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(P)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \quad (2.4)$$

Logo,

$$\overline{P'Q'^2} - \overline{PQ^2} \approx 2E_{jk} dx_k dx_j, \quad (2.5)$$

onde

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k(P)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(P)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_k} \right). \quad (2.6)$$

Vemos que  $E_{jk}$  é um tensor simétrico de segunda ordem, chamado de *tensor deformação*. Neste trabalho usamos a hipótese de que a deformação é pequena, i.e.,

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1. \quad (2.7)$$

Portanto, negligenciamos o termo de segunda ordem em (2.6) e definimos o tensor  $e_{jk}$  por

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k(P)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(P)}{\partial x_k} \right), \quad (2.8)$$

o qual muitos autores chamam de *pequeno tensor deformação* (veja, por exemplo, Pšenčík, 1994). Aqui nós chamamos simplesmente de *tensor deformação*. Observamos que  $e_{jk}$  é um tensor de segunda ordem, simétrico e linear.

### 2.1.2 Tensor tensão

Vamos agora introduzir o tensor tensão conforme definido em Aki & Richards (1980). Para tal, analisamos as forças internas atuando mutuamente entre partículas adjacentes dentro de um contínuo. A *tração* em um ponto é definida pelo limite  $\delta F / \delta S$  quando  $\delta S \rightarrow 0$ , onde  $\delta F$  é o infinitésimo de força atuando sob o infinitésimo de área  $\delta S$ . Convencionamos que  $\delta F$  tem a mesma direção que a normal,  $\boldsymbol{\eta}$ , à superfície  $\delta S$ . Denotamos o limite acima por  $T(\boldsymbol{\eta})$ . (Veja Figura 2.2). Pela convenção acima vemos que a tração depende da orientação de  $\delta S$ . Além disso, pela terceira Lei de Newton (ação=reação), temos

$$T(-\boldsymbol{\eta}) = -T(\boldsymbol{\eta}). \quad (2.9)$$

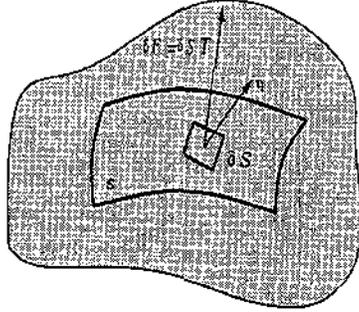


Figura 2.2: Tração atuando em  $\delta S$

Seja  $V$  um volume e  $\partial V$  a fronteira deste volume. Então  $\partial V$  é sujeita a distribuição da tração  $T(\boldsymbol{\eta})$  e cada elemento de massa de  $V$  pode ser sujeito à forças externas  $f(\boldsymbol{x}, t)$ . Usando o princípio do equilíbrio de momento linear, i.e., a taxa de troca do momento de partículas de  $V$  é igual as forças atuando sobre estas partículas, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV = \iiint_V f dV + \iint_S T(\boldsymbol{\eta}) dS, \quad (2.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade.

Usando os argumentos do tetraedro (veja, por exemplo, Aki & Richards, 1980), definimos o *tensor tensão* como

$$\tau_{kl} = T_l(\hat{e}_k), \quad (2.11)$$

onde  $T_l(\hat{e}_k)$  é a  $l$ -ésima componente da tração que atua sob o plano normal ao  $k$ -ésimo eixo. Portanto

$$T_i = \tau_{ij} \boldsymbol{\eta}_j. \quad (2.12)$$

Daí, de (2.10) e do Teorema da Divergência de Gauss, temos que:

$$\iiint_V (\rho \ddot{u}_i - f_i - \tau_{ji,j}) dV = 0, \quad (2.13)$$

onde um índice  $‘, j’$  significa  $\partial/\partial x_j$  e  $\ddot{u}_i$  significa  $\partial^2 u_i / \partial t^2$ .

O integrando acima deve ser zero onde ele é contínuo, porque  $V$  é um volume arbitrário e, portanto,

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ji,j}, \quad (2.14)$$

que é a *primeira forma para equação do movimento*.

Usando a taxa de troca do momento angular em (2.10), a equação (2.14) e fazendo alguns cálculos (veja, por exemplo, Aki & Richards, 1980), observamos que o tensor tensão é simétrico, i.e.,

$$\tau_{kj} = \tau_{jk}. \quad (2.15)$$

### 2.1.3 Relação entre o tensor tensão e o tensor de formação – equação elastodinâmica

É natural esperarmos que quando um corpo está sofrendo uma deformação, ele esteja sofrendo uma certa tensão. Em outras palavras, existe uma relação entre o tensor tensão e o tensor deformação. Esta relação é a chamada de *relação constitutiva* e foi determinada por Robert Hooke (veja Aki & Richards, 1980) através de medições em corpos elásticos. Neste trabalho usamos a generalização da Lei de Hooke, a qual diz que cada componente do tensor tensão é uma combinação linear do tensor deformação, i.e., que existem, coeficientes  $c_{ijkl}$  tal que

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}. \quad (2.16)$$

Se o corpo obedece à relação constitutiva (2.16), então ele é chamado de *linearmente elástico*. Os  $c_{ijkl}$  de (2.16) são componentes do *tensor elástico* de quarta ordem, os quais são chamados de *parâmetros elásticos*. Estas componentes satisfazem à seguinte relação de simetria

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{klij}. \quad (2.17)$$

As relações (2.17) podem ser vistas através das simetrias dos tensores tensão e deformação e do uso da função de energia da deformação (esta última pode ser encontrada em Aki & Richards, 1980). Vemos que as simetrias em (2.17) reduzem o número de componentes independentes do tensor elástico de 81 para 21.

Agora, obtemos uma das equações mais importantes em elastodinâmica expressa em termos do deslocamento. Para isto, substituímos (2.8) em (2.16) e ficamos com

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (2.18)$$

Daí e de (2.14), temos a forma (mais geral) da *equação da elastodinâmica para um meio anisotrópico não homogêneo*

$$(c_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.19)$$

### 2.1.4 Condições iniciais e condições de fronteira

Para resolvermos a equação (2.19) em uma região  $R$ , necessitamos conhecer os valores de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  para um tempo inicial,  $t_0$ , em qualquer ponto desta região (*condições iniciais*). Além disso, precisamos conhecer o valor do vetor deslocamento e/ou da tração sobre a fronteira de  $R$  para qualquer tempo  $t \geq t_0$  (*condições de fronteira*). Finalmente, devemos conhecer a distribuição espacial da força  $f$  na região  $R$  para  $t \geq t_0$ .

#### Condições iniciais

Na sísica, podemos supor que não há movimento das partículas no subsolo antes do início do experimento a ser descrito, i.e., o experimento é causal. Matematicamente isto significa que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  são nulos para  $t < t_0$ .

Quanto à densidade da força volumétrica  $f_i$  na equação do movimento (2.19), consideramos dois casos diferentes neste trabalho. No primeiro especificamos  $f_i$  de tal forma que ela represente uma fonte sísmica pontual. No segundo consideramos que as fontes estejam fora da região sob interesse, que implica que  $f_i$  é zero e portanto a equação elastodinâmica torna-se homogênea.

#### Condições de fronteira

As equações do movimento deduzidas acima são aplicadas a meios nos quais a densidade, bem como os parâmetros elásticos e as suas derivadas variam continuamente de tal forma que os coeficientes da equação do movimento estejam definidos. Mas existem superfícies no meio nas quais a continuidade é violada. Tais superfícies são chamadas de *fronteiras* ou *interfaces*.

O vetor deslocamento e a tração devem satisfazer sobre as fronteiras e as interfaces certas condições.

Consideramos as condições de fronteira resultantes de dois meios “colados” por uma interface, i.e., dois meios que estão em contato sem formar cavidades ou escorregar<sup>1</sup>. Avaliamos duas situações: a interface entre dois meios elásticos e um semi-espaço com uma superfície livre. Na primeira, se a interface estiver entre dois sólidos, as condições físicas impõem continuidade do vetor deslocamento e da tração sobre a interface. Na segunda, a física não impõe qualquer condição sobre o vetor deslocamento, mas requer que a tração na fronteira seja zero.

### 2.1.5 Função de Green elastodinâmica

A solução da equação

$$(c_{ijkl}g_{kn,l})_{,j} - \rho\ddot{g}_{in} = -\delta_{in}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0) \quad (2.20)$$

é conhecida como *função de Green elastodinâmica* (Aki & Richards, 1980). A função de Green  $g_{in} = g_{in}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$  é a  $i$ -ésima componente cartesiana do vetor deslocamento registrado no ponto  $\mathbf{x}$  e no instante  $t$ , gerada na posição  $\mathbf{x}_0$  e no instante  $t_0$  por uma fonte unitária orientada na direção do  $n$ -ésimo eixo cartesiano.

Usamos as condições iniciais de causalidade, i.e.,  $g_{in}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \dot{g}_{in}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0$  para  $t < t_0$  e  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ .

Se as condições de fronteiras são independentes do tempo, então a função de Green pode ser trasladada no tempo (veja, por exemplo, Aki & Richards, 1980)

$$g_{in}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = g_{in}(\mathbf{x}, t - t_0; \mathbf{x}_0, 0) = g_{in}(\mathbf{x}, -t_0; \mathbf{x}_0, -t), \quad (2.21)$$

a qual é uma relação de reciprocidade para tempos de fonte e de receptor. Outra relação de reciprocidade existente para a função de Green com condições de fronteiras homogêneas é para posição de fontes e receptores

$$g_{in}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = g_{ni}(\mathbf{x}_0, t; \mathbf{x}, t_0). \quad (2.22)$$

A solução da equação (2.20) para o caso geral não pode ser encontrada analiticamente.

<sup>1</sup>Esta última condição não se aplica quando pelo menos um dos dois meios é um fluido.

## 2.2 Teoria dos raios

A equação elastodinâmica homogênea ( $f_i = 0$  na equação (2.19)) para um meio anisotrópico é dada por

$$(c_{ijkl}u_{k,l})_{,j} - \rho\ddot{u}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.23)$$

onde  $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$  é a  $i$ -ésima componente do vetor deslocamento,  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  é a densidade e  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x})$  são os parâmetros elásticos do meio avaliados no ponto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .

Suponhamos que a solução da equação (2.23) seja (aproximadamente) da seguinte forma (Červený, 1995)

$$u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{x})F(t - \tau(\mathbf{x})). \quad (2.24)$$

Para encontrarmos as funções desconhecidas  $U_i(\mathbf{x})$  e  $\tau(\mathbf{x})$ , devemos substituir (2.24) em (2.23). Isto conduz a

$$F''N_i(U) - F'M_i(U) + FL_i(U) = 0, \quad (2.25)$$

onde

$$\begin{aligned} N_i(U) &= c_{ijkl}U_k\tau_{,l}\tau_{,j} - \rho U_i, \\ M_i(U) &= (c_{ijkl}U_k\tau_{,l})_{,j} + c_{ijkl}U_{k,l}\tau_{,j}, \\ L_i(U) &= (c_{ijkl}U_{k,l})_{,j}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A equação

$$N_i(U) = 0, \quad (2.27)$$

pode ser rescrita na forma da equação de Christoffel para o meio anisotrópico não homogêneo

$$(\bar{\Gamma}_{ik} - \delta_{ik})U_k = 0, \quad (2.28)$$

onde

$$\bar{\Gamma}_{ik} = \rho^{-1}c_{ijkl}\tau_{,l}\tau_{,j}. \quad (2.29)$$

A matriz  $\bar{\Gamma}_{ik}$  tem três autovalores reais positivos  $G(\mathbf{x}_m, \tau_m)$  (função da variável espacial), cada um correspondendo a um autovetor  $h_i(\mathbf{x}_m)$ . Da equação de Christoffel, temos

$$G(\mathbf{x}_m, \tau_m) = 1.$$

Esta é a equação iconal para um meio anisotrópico não homogêneo. Existem, portanto, em princípio três equações iconais correspondentes a três diferentes ondas. O vetor deslocamento de cada uma, pode ser escrito como

$$U_i(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})h_i(\mathbf{x}), \quad (2.30)$$

que indica que cada onda é linearmente polarizada.

Vamos deduzir a equação do transporte para amplitudes  $A(\mathbf{x})$  em um meio anisotrópico não homogêneo. Para isto vamos inserir a equação (2.30) na equação  $M_i(U)h_i = 0$ :

$$A_{,j}c_{ijkl}h_k h_i \tau_{,l} + A(c_{ijkl}h_k \tau_{,l})_{,j}h_i + c_{ijkl}A_{,l}h_k h_i \tau_{,j} + Ac_{ijkl}h_{k,l}\tau_{,j}h_i = 0. \quad (2.31)$$

Usando a simetria do tensor elástico  $c_{ijkl} = c_{klij}$  na equação acima temos

$$2A_{,j}c_{ijkl}h_k h_i \tau_{,l} + A(c_{ijkl}h_k h_i \tau_{,l})_{,j} = 0. \quad (2.32)$$

Introduzindo o vetor velocidade de grupo, definido por  $v_i^{(g)} = \rho^{-1}c_{ijkl}\tau_{,l}h_j h_k$ , na equação (2.32), vem

$$2\rho A_{,j}v_j^{(g)} + A(\rho v_j^{(g)})_{,j} = 0. \quad (2.33)$$

Esta é a equação do transporte para o meio anisotrópico não homogêneo. Ela pode ser rescrita da seguinte forma

$$\left(\rho AA^* v_j^{(g)}\right)_{,j} = 0, \quad (2.34)$$

onde  $*$  denota o conjugado complexo do número.

Uma vez que as duas primeiras equações dadas no sistema (2.26) já definem as duas incógnitas  $\tau$  e  $U_i$  da expressão (2.24), a terceira equação só pode ser satisfeita quando a expressão (2.24) for realmente uma solução da equação da onda elastodinâmica (2.23). Isto é o caso em meios homogêneos. Em outras situações, a expressão (2.24) representa uma aproximação da solução verdadeira. Neste caso, o termo  $L_i(U)$  pode ser usado só para verificar a precisão da determinação de  $U$ .

Integrando ambos os lados da equação (2.34) sobre um volume  $V$ , formado por uma parte do tubo de raio limitado por duas diferentes frentes de fase, e usando o teorema de Gauss, temos

$$A(\tau) = A(\tau_0) \left[ \frac{\rho(\tau_0)c(\tau_0)|\Omega(\tau_0)|}{\rho(\tau)c(\tau)|\Omega(\tau)|} \right]^{1/2} e^{-i\sigma(\tau_0,\tau)\pi/2}, \quad (2.35)$$

onde  $|\Omega(\tau)|$  é o fator de espalhamento geométrico que descreve a diminuição da amplitude devido à abertura geométrica de um tubo infinitesimal de raios. Ele é dado pelo Jacobiano da transformação entre coordenadas cartesianas e coordenadas do raio. Além disso,  $c(\tau)$  é a velocidade de fase, a qual pode ser determinada pela equação da solubilidade da equação de Christoffel,

$$\det(\Gamma_{ik} - c^2 \delta_{ik}) = 0. \quad (2.36)$$

Esta equação cúbica fornece três valores da velocidade de fase, correspondente às três ondas que podem propagar em um meio anisotrópico (Pšenčík, 1994). A quantidade  $\sigma(\tau_0, \tau)$  é conhecida com um índice da trajetória do raio, ou abreviadamente o índice KMAH<sup>2</sup> (Chapman, 1982). Ele dá o número de pontos no qual o sinal de  $\Omega$  troca. Estes pontos são chamados pontos de caústica e, portanto,  $\sigma$  dá o número de pontos de caústica encontrado ao longo do raio. Os pontos de caústica podem ser de primeira ou segunda ordem. Os pontos de caústica de primeira ordem são contados uma vez e os de segunda ordem duas vezes.

## 2.3 Aproximação de Born

Nesta seção apresentamos a representação integral do campo de onda espalhado usando a aproximação de Born, conforme descrito em Ursin & Tygel (1997).

Suponhamos que o meio seja elástico anisotrópico e não homogêneo. Suponhamos ainda que, em uma região limitada, o meio apresente perturbações com respeito a um meio de referência contínuo no qual a propagação de onda seja conhecida.

Utilizando a transformada de Fourier no tempo para a função de Green, rescrevemos a equação (2.20) da seguinte forma

$$-\omega^2 \rho G_{in} - (c_{ijkl} G_{kn,l})_{,j} = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s), \quad (2.37)$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}G = \mathcal{I} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s), \quad (2.38)$$

---

<sup>2</sup>denominada em reverência às contribuições teóricas por Keller, Maslov, Arnold e Hörmander

onde  $\mathcal{L}$  é a matriz operador  $3 \times 3$  da equação da onda (2.23) e  $\underline{I}$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ .

Suponhamos que os parâmetros do meio possam ser expressos da seguinte forma

$$\rho = \rho^0 + \Delta\rho, \quad c_{ijkl} = c_{ijkl}^0 + \Delta c_{ijkl}, \quad (2.39)$$

onde  $\rho^0 = \rho^0(\mathbf{x})$  e  $c_{ijkl}^0 = c_{ijkl}^0(\mathbf{x})$  são os parâmetros do meio de referência,  $\Delta\rho = \Delta\rho(\mathbf{x})$  é a perturbação na densidade e  $\Delta c_{ijkl} = \Delta c_{ijkl}(\mathbf{x})$  são as perturbações dos parâmetros elásticos. Suponhamos que  $\Delta\rho$  e  $\Delta c_{ijkl}$  tem seu suporte compacto estritamente dentro de um volume  $V$  limitado por uma superfície fechada  $\partial V$ .

Como em Ursin & Tygel (1997), supomos que  $\underline{\mathcal{G}}^0$  seja uma aproximação conhecida para a função de Green para o meio de referência. Então  $\underline{\mathcal{G}}^0$  satisfaz a seguinte equação

$$\mathcal{L}^0 \underline{\mathcal{G}}^0 = \underline{I} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) + \underline{E}, \quad (2.40)$$

onde  $\mathcal{L}^0$  é o operador de onda elastodinâmica associado ao meio de referência com parâmetros  $\rho^0$  e  $c_{ijkl}^0$ ,  $E(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  é uma função erro. Suponhamos também que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \Delta\mathcal{L}$ , onde  $\Delta\mathcal{L}$  é o operador correspondente a perturbação do meio. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \underline{\mathcal{G}}^0 &= (\mathcal{L}^0 + \Delta\mathcal{L}) \underline{\mathcal{G}}^0 \\ &= \underline{I} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) + \underline{E} + \Delta\mathcal{L} \underline{\mathcal{G}}^0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde

$$\Delta\mathcal{L}_{ik} G_{kn}^0 = -\omega^2 \Delta\rho G_{in}^0 - (\Delta c_{ijkl} G_{kn,l}^0)_{,j}. \quad (2.42)$$

A função de Green do meio perturbado,  $\underline{\mathcal{G}}$ , na equação (2.37) define um operador integral,  $\mathcal{G}$ , o qual formalmente é o inverso de  $\mathcal{L}$ . Sua aplicação a um tensor de segunda ordem  $H(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  é dado por

$$[\mathcal{G}_{mi} H_{in}](\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = \int_V G_{mi}(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}) H_{in}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV. \quad (2.43)$$

Aplicando  $\mathcal{G}$  à equação (2.41), obtemos

$$\mathcal{G} \mathcal{L} \underline{\mathcal{G}}^0 = \underline{\mathcal{G}} + \mathcal{G} \underline{E} + \mathcal{G} \Delta\mathcal{L} \underline{\mathcal{G}}^0. \quad (2.44)$$

Suponhamos que  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 + \mathcal{G}^S$  e  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 + \mathcal{G}^S$ . Daí e de (2.44), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^S &= -\mathcal{G}\underline{E} - \mathcal{G}\Delta\mathcal{L}\mathcal{G}^0 \\ &= -\mathcal{G}\underline{E} - (\mathcal{G}^0 + \mathcal{G}^S)\Delta\mathcal{L}\mathcal{G}^0 \\ &= -\mathcal{G}\underline{E} - \mathcal{G}^0\Delta\mathcal{L}\mathcal{G}^0 - \mathcal{G}^S\Delta\mathcal{L}\mathcal{G}^0.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Supondo que há um espalhamento simples, i.e., usando a aproximação de Born, podemos negligenciar o último termo do lado direito da igualdade em (2.45), pois é de segunda ordem. Negligenciando também o erro  $\underline{E}$  e utilizando (2.43), rescrevemos (2.45) da seguinte forma

$$\mathcal{G}^S \approx \mathcal{G}^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = - \int_V \mathcal{G}^0(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}) \Delta\mathcal{L}(\mathbf{x}) \mathcal{G}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV. \quad (2.46)$$

A interpretação física desta fórmula é direta. O campo é transmitido da fonte em  $\mathbf{x}^s$  para o ponto espalhante  $\mathbf{x}$  pela função de Green  $\mathcal{G}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$ . O operador  $\Delta\mathcal{L}(\mathbf{x})$  produz o campo espalhado, que é então transmitido para o receptor em  $\mathbf{x}^r$  pela outra função de Green  $\mathcal{G}^0(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x})$ . Usando (2.42) em (2.46), temos

$$\begin{aligned}G_{mn}^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= \int_V G_{mi}^0(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}) [\omega^2 \Delta\rho G_{in}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \\ &\quad + (\Delta c_{ijkl} G_{kn,l}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s))_{,j}] dV.\end{aligned}\quad (2.47)$$

A reciprocidade em (2.22) implica que  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) = \mathcal{G}^T(\mathbf{x}^s, \omega; \mathbf{x})$ . Utilizando este último fato e integrando (2.47) por partes, ficamos com

$$\begin{aligned}G_{mn}^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= \int_V [\omega^2 \Delta\rho G_{im}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) G_{in}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \\ &\quad - \Delta c_{ijkl} G_{im,j}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) G_{kn,l}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)] dV,\end{aligned}\quad (2.48)$$

onde a integral de superfície que aparece na integração por partes é zero desde que as perturbações sejam zero sobre  $\partial V$ .

Verificamos que a perturbação da função de Green na aproximação de Born,  $\mathcal{G}^B(\mathbf{x}^s, \omega; \mathbf{x}^r)$ , também satisfaz a relação de reciprocidade. Usando a propriedade de simetria de  $\Delta c_{ijkl}$ , temos

$$G_{mn}^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = \int_V [\omega^2 \Delta\rho G_{im}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) G_{in}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta c_{ijkl} G_{im,j}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G_{kn,l}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) dV \\
= & \int_V \left[ \omega^2 \Delta \rho G_{in}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G_{im}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right. \\
& \left. - \Delta c_{klij} G_{in,j}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G_{km,l}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right] dV \\
= & G_{nm}^B(\mathbf{x}^s, \omega; \mathbf{x}^r). \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Suponhamos que estamos trabalhando em alta-frequência e então, podemos usar a teoria dos raios para aproximar as funções de Green no meio de referência. Inicialmente consideramos a função de Green que liga a fonte ao ponto espalhante no meio de referência,  $\tilde{G}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}^s)$ . Então

$$G_{ij}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \approx h_i^s(\mathbf{x}) \frac{a(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)}}{\sqrt{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}^s)}} h_j(\mathbf{x}^s), \tag{2.50}$$

onde  $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)$  é o tempo de trânsito ao longo do raio que vai de  $\mathbf{x}^s$  a  $\mathbf{x}$  (o qual chamamos de raio da fonte),  $\mathbf{h}(\mathbf{x}^s)$  e  $\mathbf{h}^s(\mathbf{x})$  são vetores (unitários) de polarização do raio da fonte, na fonte e no ponto espalhante, respectivamente, e  $a(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)$  é o fator de amplitude dado por

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) = \frac{e^{-i(\pi/2)\text{sgn}(\omega)\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)}}{4\pi\sqrt{v^s(\mathbf{x})v(\mathbf{x}^s)}L^s(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)}. \tag{2.51}$$

Aqui  $v^s(\mathbf{x})$  e  $v(\mathbf{x}^s)$  são as velocidades (de fase) do raio da fonte encontradas no ponto espalhante e na fonte, respectivamente, e  $L^s(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)$  é o fator de espalhamento geométrico relativo definido por Červený (1995).

Pela hipótese de alta frequência e de (2.50), obtemos

$$\begin{aligned}
G_{ij,k}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) & \approx i\omega T_{,k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) G_{ij}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \\
& = i\omega p_k^s G_{ij}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s), \tag{2.52}
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{p}^s = \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)$  é o vetor vagarosidade do raio da fonte.

Sob a mesma aproximação para o raio que liga o ponto espalhante ao receptor (o qual chamamos de raio do receptor), o campo espalhado (2.48) pode ser aproximada em alta frequência por

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) & = \omega^2 \int_V \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x}^r)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^r)}} S(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) a(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) \times \\
& e^{i\omega[T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) + T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)]} \frac{\mathbf{h}^T(\mathbf{x}^s)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^s)}} d\mathbf{x}, \tag{2.53}
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  é o vetor polarização e

$$S(\mathbf{x}) = h_i^r(\mathbf{x}) \left[ \frac{\Delta\rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \delta_{ik} + \frac{\Delta c_{ijkl}(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} p_j^r p_i^s \right] h_k^s(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

é o *coeficiente espalhante*.

A equação (2.53) é a *representação do campo espalhado em um meio elástico usando a aproximação de Born*. Esta equação é igual a equação (23) de Ursin & Tygel (1997).

## 2.4 Integral Born-Kirchhoff

Suponhamos que  $V$  em (2.53) é dividido por uma interface  $\Sigma$ , a qual separa  $V$  em dois domínios:  $V_1$  e  $V_2$ . Ambos os domínios são supostos regulares para que a fórmula (2.8.3) de Bleistein possa ser aplicada. Portanto, as duas integrais de superfícies sobre as fronteiras  $\partial V_1$  e  $\partial V_2$  de  $V_1$  e  $V_2$  são obtidas. Mediante a hipótese de que fora de  $V$  não há perturbações no meio, as partes das fronteiras  $\partial V_1$  e  $\partial V_2$  que não coincidem com  $\Sigma$  podem ser estendidas ao infinito. Daí e da condição de radiação de Sommerfeld (Bleistein, 1984)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}; \omega) &= O(1/r), \quad r = |\mathbf{x}|, \\ G_r(\mathbf{x}; \omega) - (i\omega/v)G(\mathbf{x}; \omega) &= o(1/r), \quad \text{quando } r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.55)$$

temos que as integrais ao longo destas partes não contribuem. Portanto, as integrais que contribuem são as duas integrais de superfície ao longo de  $\Sigma$ , mas por lados opostos. Dada a orientação idêntica da integral de superfície original, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{G}^B \approx \tilde{G}^{BK}(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= i\omega \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x}^r)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^r)}} S(\mathbf{x}) \mathcal{O}_{BK} a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) \\ &\quad \times e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} \frac{\mathbf{h}^T(\mathbf{x}^s)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^s)}} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde  $S(\mathbf{x})$  está definido em (2.54) e

$$\mathcal{O}_{BK} = \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)}{|\nabla T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)|^2}. \quad (2.57)$$

Aqui,  $\boldsymbol{\eta}$  é a normal à superfície  $\Sigma$  em  $\boldsymbol{x}$ . Chamamos  $\mathcal{O}_{BK}$  de *fator de obliquidade de Born-Kirchhoff*. A equação (2.56) é idêntica à equação (39) do paper de Ursin & Tygel (1997).

Na equação (2.56), introduzimos a notação

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{x}^r, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^s) &= a(\boldsymbol{x}^r, \boldsymbol{x}) a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^s) \\ T(\boldsymbol{x}^r, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^s) &= T(\boldsymbol{x}^r, \boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^s). \end{aligned} \quad (2.58)$$

## 2.5 Aproximação de Kirchhoff

Para deduzirmos a integral de Kirchhoff, usamos o teorema da divergência na sua forma para meios elásticos anisotrópicos, i.e., o chamado Teorema de Betti (Aki & Richards, 1980). Este teorema formula a relação entre uma integral de superfície,  $I_S$ , e uma integral de volume,  $I_V$ , i.e.,

$$\begin{aligned} I_S &= \int_{\partial V} (c_{ijkl} G_{km,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r) G_{in}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s) \\ &\quad - c_{ijkl} G_{kn,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s) G_{im}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r)) \boldsymbol{\eta}_j dS \\ &= \int_V (c_{ijkl} G_{km,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r) G_{in}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s) \\ &\quad - c_{ijkl} G_{kn,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s) G_{im}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r))_{,j} dV \\ &= I_V, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde o volume  $V$  contém fontes e receptores, mas não contém pontos espalhantes.

Podemos rescrever a integral de volume da seguinte forma

$$\begin{aligned} I_V &= \int_V [(c_{ijkl} G_{km,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r))_{,j} G_{in}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s) \\ &\quad + c_{ijkl} G_{km,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r) G_{in,j}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s) - \\ &\quad - (c_{ijkl} G_{kn,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s))_{,j} G_{im}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r) \\ &\quad - c_{ijkl} G_{kn,l}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s) G_{im,j}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r)] dV. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Usamos a equação (2.37) no primeiro e no terceiro termo da integral acima e obtemos

$$I_V = \int_V [(-\delta_{im} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^r) - \rho \omega^2 G_{im}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^r)) G_{in}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}^s)$$

$$\begin{aligned}
& +c_{ijkl}G_{km,l}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)G_{in,j}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \\
& -(-\delta_{in}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) - \rho\omega^2G_{in}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s))G_{im}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \\
& -c_{ijkl}G_{in,j}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)G_{km,l}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)] dV. \tag{2.61}
\end{aligned}$$

O segundo e o quinto termo na integral acima se cancelam. Usando a simetria do tensor de rigidez  $c_{ijkl}$ , vemos que o terceiro e o sexto termo também se cancelam. Se  $G_{mn}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  representa somente o campo de onda direta e o volume  $V$  contém a fonte e o receptor, então a integral acima conduz a  $G_{nm}(\mathbf{x}^s, \omega; \mathbf{x}^r) - G_{mn}(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s)$ . Devido a relação de simetria (2.22), temos que a integral  $I_V$  é igual a zero. Daí concluímos que a integral de superfície (2.59) também é zero.

A situação é diferente se  $G_{mn}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  representa a superposição de um campo direto e um campo espalhado, i.e.,

$$G_{mn}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) = G_{mn}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) + G_{mn}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s). \tag{2.62}$$

Para o campo direto,  $G_{mn}^0(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$ , o volume  $V$  contém fonte e receptor e portanto a integral de superfície é zero. Para o campo espalhado,  $G_{mn}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$ , o volume  $V$  contém somente o receptor, mas não contém as fontes. Portanto, o resultado final da integração sobre o volume é

$$I_V = G_{mn}^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s). \tag{2.63}$$

Determinamos a seguinte representação para o campo espalhado

$$\begin{aligned}
G_{mn}^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = & - \int_{\partial V} (c_{ijkl}G_{kn,l}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)G_{im}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \\
& - c_{ijkl}G_{km,l}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)G_{in}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s))\eta_j dV, \tag{2.64}
\end{aligned}$$

que é a *integral de Kirchhoff* para o meio elástico anisotrópico. Cabe observar que esta é uma representação exata do campo espalhado em uma interface em forma de uma equação integral. Para que esta representação possa ser utilizada para modelamento sísmico, precisamos determinar aproximações para os valores desconhecidos do campo espalhado  $G_{in}^S$  e suas derivadas no refletor.

Para este objetivo, consideramos agora que as fontes secundárias (i.e., os pontos espalhantes) sejam confinadas a uma região fora de  $V$ , a qual é separada de  $V$  por uma superfície  $\Sigma$  dada. Como é usualmente feito quando

descrevemos espalhamento por meio da integral de Kirchhoff (Pšenčík, 1994), estendemos  $\partial V$  da integração para infinito onde nenhum ponto espalhante se encontra, senão estendemos para a superfície  $\Sigma$ . Lá, não podemos estender  $\partial V$  porque supomos que as fontes estão fora do volume  $V$ . Novamente, devido a condição de radiação de Sommerfeld, a integração sobre a parte infinita da fronteira  $\partial V$  não contribui. Portanto, a integração na equação (2.64) reduz a uma integral de superfície sobre  $\Sigma$ . Observa-se que isto resulta em uma troca de sinal da integral porque o vetor normal à superfície, que antes apontava para o exterior de  $V$ , agora é escolhido a apontar para o interior. Usamos a aproximação de Kirchhoff, na qual o campo espalhado na superfície  $\Sigma$  e sua derivada são aproximadas pelo campo especularmente refletido e sua derivada, respectivamente, (Bleistein, 1984). Em sua generalização para meios elásticos (Schleicher & Tygel, 1998), temos

$$G_{in}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \approx G_{in}^{ref}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s), \quad (2.65)$$

$$G_{kn,i}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \approx G_{kn,i}^{ref}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s). \quad (2.66)$$

Através da aproximação em alta frequência para as derivadas das funções de Green, no receptor e após a reflexão, correspondente à equação (2.52)

$$G_{kn,i}^{ref}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \approx G_{kn}^{ref}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) i\omega p_i^{ref} \quad (2.67)$$

e

$$G_{km,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \approx G_{km}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) i\omega p_i^r, \quad (2.68)$$

onde  $p_i^{ref}$  e  $p_i^r$  são as componentes dos vetores vagarosidade no ponto espalhante do raio incidente após a reflexão especular e no receptor. Além disso, suponhamos que o campo refletido no ponto  $\mathbf{x}$ ,  $G_{kn}^{ref}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  seja dado pelo campo incidente,  $G_{kn}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  multiplicado pelo coeficiente de reflexão da onda sob consideração,  $R = R(\mathbf{x})$ , i.e.,  $G_{kn}^{ref}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \approx R G_{kn}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$ .

Substituindo as equações (2.65), (2.66) e (2.68) na equação (2.64), chegamos a

$$\begin{aligned} G_{mn}^S \approx G_{mn}^K(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= i\omega \int_{\Sigma} R \left( c_{ijkl} G_{kn}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) p_l^{ref} G_{im}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right. \\ &\quad \left. - c_{ijkl} G_{km}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) p_l^r G_{in}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right) \eta_j dS \\ &= i\omega \int_{\Sigma} G_{kn}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G_{im}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \\ &\quad \times R c_{ijkl} \left( \eta_j p_l^{ref} - \eta_l p_j^r \right) dS, \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde usamos a simetria de  $c_{ijkl}$ . Agora, usando as equações correspondentes a (2.50) da teoria dos raios para as funções de Green, temos finalmente a seguinte representação do campo espalhado

$$\mathcal{G}^K(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = i\omega \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x}^r)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^r)}} R \mathcal{O}_K a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} \frac{\mathbf{h}^T(\mathbf{x}^s)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^s)}} dS, \quad (2.70)$$

onde

$$\mathcal{O}_K = \frac{c_{ijkl}}{\rho} h_i^r h_k^{ref} (\eta_j p_l^{ref} - \eta_l p_j^r). \quad (2.71)$$

Aqui chamamos  $\mathcal{O}_K$  de *fator de obliquidade de Kirchhoff*. A equação (2.70) é a resposta do campo espalhado na aproximação de Kirchhoff.

## 2.6 Considerações finais

Comparando as equações (2.56) e (2.70), observamos que alcançamos o nosso objetivo de escrever as duas aproximações para o campo refletido como uma integral sobre a interface refletora com a mesma estrutura. Unificando, podemos então escrever

$$\mathcal{G}^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) \approx i\omega \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x}^r)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^r)}} \mathcal{K}_A(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} \frac{\mathbf{h}^T(\mathbf{x}^s)}{\sqrt{\rho(\mathbf{x}^s)}} dS, \quad (A = BK \text{ ou } K) \quad (2.72)$$

onde as integrais de Born-Kirchhoff (2.56) e de Kirchhoff (2.70) apresentam somente uma expressão diferente para o núcleo da integral (2.72),  $\mathcal{K}_A$ . Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A(\mathbf{x}) &= S(\mathbf{x}) \mathcal{O}_{BK}(\mathbf{x}) && \text{para Born-Kirchhoff, e} \\ \mathcal{K}_A(\mathbf{x}) &= R(\mathbf{x}) \mathcal{O}_K(\mathbf{x}) && \text{para Kirchhoff.} \end{aligned} \quad (2.73)$$

No próximo capítulo, investigamos os dois núcleos acima em mais detalhes para um meio elástico isotrópico com o objetivo de mostrar a relação entre eles.

## Capítulo 3

# Integrais de Born-Kirchhoff e Kirchhoff num meio elástico isotrópico

Neste capítulo, estudamos as integrais de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff, derivadas no capítulo anterior para um meio elástico anisotrópico, em um meio mais simples, a saber, o meio isotrópico.

Vimos no capítulo anterior que estas duas integrais são estruturalmente iguais e podem ser representadas pela mesma fórmula (2.72), com a única diferença no respectivo núcleo, como quantificado na equação (2.73). Neste capítulo, investigamos estes dois núcleos em mais detalhes em um meio isotrópico, onde as expressões podem ser simplificadas. Vamos ver que, sob a hipótese de um contraste fraco, estes núcleos são iguais no ponto estacionário, i.e., no ponto no qual a lei de Snell vale entre os raios conectando a fonte com o ponto no refletor e esse ponto com o receptor. É neste ponto que acontece a reflexão especular descrita pela teoria dos raios, e é deste ponto que vem a contribuição principal das integrais de Born-Kirchhoff e Kirchhoff.

Como já vimos anteriormente as integrais de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff tem duas diferenças principais. O núcleo da integral de Born-Kirchhoff contém um coeficiente de espalhamento linearizado e a expressão resultante para o campo refletido é recíproca. Por outro lado, o núcleo da integral de Kirchhoff contém o coeficiente de reflexão de ondas planas que não é linear e a representação de Kirchhoff não é recíproca. Por estas razões, generalizamos este coeficiente de reflexão clássico de tal maneira que ele garanta a recipro-

cidade da integral de Kirchoff modificada, porém não alterando o seu valor no ponto estacionário. Realizamos isto estendendo a idéia de Deregowski & Brown (1983), a qual utiliza o ângulo médio entre os raios da fonte e do receptor, para meios elásticos. Supondo um contraste fraco, linearizamos este novo coeficiente de reflexão recíproco, com o objetivo de comparar o resultado com o coeficiente de espalhamento da integral de Born-Kirchoff.

### 3.1 Considerações gerais

O meio isotrópico é um meio invariante por qualquer rotação, i.e., os parâmetros elásticos não dependem da direção de propagação. Isto se reflete matematicamente no fato que ele é descrito por dois parâmetros elásticos independentes, os quais são chamados *parâmetros (ou constantes) de Lamé*. As componentes do tensor elástico para este meio (ou tensor rigidez) são dadas (Aki & Richards, 1980) por

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.1)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são os referidos parâmetros de Lamé e  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.2)$$

O parâmetro  $\mu$  é chamado módulo de cisalhamento (ou parâmetro de rigidez).

Substituindo a expressão (3.1) na equação elastodinâmica geral (2.19), obtemos

$$\lambda_{,j} u_{k,k} + \lambda u_{k,ki} + \mu_{,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3.3)$$

que é a equação elastodinâmica para um meio elástico isotrópico. Observando a identidade

$$(\nabla \mu \times \text{rot } \mathbf{u})_i = \mu_{,k} u_{k,i} - \mu_{,k} u_{i,k}, \quad (3.4)$$

rescrevemos a equação (3.3) em sua forma vetorial

$$(\lambda + \mu) \nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \lambda \text{div } \mathbf{u} + \nabla \mu \text{rot } \mathbf{u} + 2(\nabla \mu \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.5)$$

Se o meio isotrópico for homogêneo, i.e.,  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\rho$  constantes, então a equação (3.5) assume a seguinte forma

$$(\lambda + \mu) \nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.6)$$

Em um meio isotrópico homogêneo, a equação (3.6) pode ser desacoplada em duas equações, as quais descrevem os dois tipos de ondas que podem propagar no meio elástico isotrópico, a saber, a onda primária (onda P) polarizada linearmente paralela à direção da propagação, i.e., uma onda longitudinal, e a onda secundária (onda S), em geral polarizada eliticamente perpendicular à direção da propagação, i.e., uma onda transversal. Em meios isotrópicos não homogêneos, estes dois tipos de ondas não desacoplam. Especialmente em uma interface temos sempre que levar em conta a reflexão monotípica (P-P e S-S) e a reflexão convertida (P-S e S-P)<sup>1</sup>. No nosso estudo dos núcleos das integrais de Born-Kirchhoff e Kirchhoff vamos ter que considerar estas quatro possibilidades de reflexão independentemente.

## 3.2 Estudo dos fatores de obliquidade

Nesta seção, utilizando as propriedades do meio isotrópico, expressamos os fatores de obliquidade das integrais de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff no ponto estacionário em uma forma mais útil para o nosso objetivo de comparar os núcleos dados na equação (2.73) em um meio elástico isotrópico.

### 3.2.1 Fator de obliquidade de Kirchhoff

Para calcularmos o fator de obliquidade da integral de Kirchhoff, basta substituir  $c_{ijkl}$  na equação (2.71). Daí (Schleicher & Tygel, 1998)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K &= \frac{1}{\rho} [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] h_i^r h_k^{ref} (\eta_j p_i^{ref} - \eta_l p_j^r) \\ &= \frac{1}{\rho} [\lambda h_j^r h_i^{ref} + \mu (\delta_{jl} h_i^r h_i^{ref} + h_i^r h_j^{ref})] (\eta_j p_i^{ref} - \eta_l p_j^r). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aqui temos que dividir a análise do fator de obliquidade para considerar as diferentes formas de reflexão. Analisamos dois casos: (a) o raio que chega ao receptor vem de uma onda P (este caso inclui: reflexões P-P e S-P), (b) o raio que chega ao receptor vem de uma onda S (este caso inclui: reflexões P-S e S-S). No caso (a), o raio do receptor é de uma onda P que possui

---

<sup>1</sup>De uma onda S incidente, somente a componente polarizada dentro do plano de propagação, a chamada onda SV, dá origem a uma onda convertida.

a polarização paralela ao vetor vazarosidade. Podemos, portanto escrever tanto para o raio do receptor (índice  $r$ ) quanto para o raio especular (índice  $ref$ ),  $h_i^\gamma = v_p p_i^\gamma$  e  $h_i^\gamma p_i^\gamma = \frac{1}{v_p}$ , onde  $v_p$  é a velocidade da onda P e  $\gamma = r$  ou  $ref$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K &= \frac{1}{\rho} \left[ \lambda v_p p_j^r v_p p_l^{ref} + \mu (\delta_{jl} h_i^r h_i^{ref} + v_p^2 p_l^r p_j^{ref}) \right] (\eta_j p_l^{ref} - \eta_l p_j^r) \\ &= \frac{1}{\rho} \left[ \lambda + 2\mu (-h_i^{ref} h_i^r) \right] (p_l^r \eta_l - p_l^{ref} \eta_l). \end{aligned} \quad (3.8)$$

No caso (b), o raio do receptor é de uma onda S, a qual possui a polarização perpendicular ao vetor vazarosidade e, portanto,  $h_i^\gamma p_i^\gamma = 0$ , onde  $\gamma = r$  ou  $ref$ . Usando este fato em (3.7), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K &= \frac{1}{\rho} \left[ \lambda h_j^r h_i^{ref} + \mu (\delta_{jl} h_i^r h_i^{ref} + h_l^r h_j^{ref}) \right] (\eta_j p_l^{ref} - \eta_l p_j^r) \\ &= \frac{1}{\rho} \mu \left[ h_i^r h_i^{ref} (p_l^{ref} \eta_l - \eta_l p_l^r) + h_l^r h_j^{ref} \eta_j p_l^{ref} - h_l^r h_j^{ref} \eta_l p_j^r \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

No ponto de reflexão especular vale que  $\mathbf{h}^{ref} = -\mathbf{h}^r$ . Logo, a expressão de  $\mathcal{O}_K$  neste ponto é a seguinte

$$\begin{aligned} (a): \quad \mathcal{O}_K &= \frac{1}{\rho} [\lambda + 2\mu] (p_j^r - p_j^{ref}) \eta_j, \\ (b): \quad \mathcal{O}_K &= \frac{\mu}{\rho} \left[ -(p_l^{ref} - p_l^r) \eta_l \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Portanto, temos uma expressão comum para ambos os casos, (a) e (b), sendo:

$$\mathcal{O}_K = (v^r)^2 (p_j^r - p_j^{ref}) \eta_j, \quad (3.11)$$

onde  $v^r$  é a velocidade no ponto de reflexão para o raio do receptor, i.e.,  $v^r = v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  no caso (a) e  $v^r = v_s = \sqrt{\mu/\rho}$  no caso (b).

### 3.2.2 Fator de obliquidade de Born-Kirchhoff

Para calcularmos o fator de obliquidade da integral de Born-Kirchhoff, também precisamos considerar dois casos, porém separados de forma diferente da da seção anterior. Consideramos: (i) Reflexão monotípica, i.e.,

espalhamento P-P e S-S, e (ii) Reflexão convertida, i.e., espalhamento P-S e S-P.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o plano tangente à interface de reflexão no ponto  $P$  (veja Figura 3.1) seja o plano  $xy$  e que a normal no ponto  $P$  seja, portanto

$$\boldsymbol{\eta} = (0, 0, 1). \quad (3.12)$$

(Isto será considerado pelo resto deste capítulo.)

### Reflexões Monotípicas (P-P e S-S).

Observe que:

$$\mathbf{p}^s + \mathbf{p}^r = \left( \frac{\sin \alpha}{\tilde{v}}, 0, \frac{\cos \alpha}{\tilde{v}} \right) + \left( -\frac{\sin \beta}{\tilde{v}}, 0, \frac{\cos \beta}{\tilde{v}} \right), \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{p}^s + \mathbf{p}^r) = \frac{\cos \alpha}{\tilde{v}} + \frac{\cos \beta}{\tilde{v}}, \quad (3.14)$$

$$|\nabla T|^2 = \frac{1}{\tilde{v}^2} + \frac{1}{\tilde{v}^2} + 2 \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\tilde{v}^2}, \quad (3.15)$$

e

$$\boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{p}^r - \mathbf{p}^{ref}) = \frac{\cos \beta_{ref}}{\tilde{v}} + \frac{\cos \beta}{\tilde{v}}, \quad (3.16)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo agudo<sup>2</sup> que o vetor vagarosidade do segmento de raio que liga a fonte ao ponto  $P$  faz com a normal ao refletor neste ponto,  $\beta$  é o ângulo agudo<sup>3</sup> que o vetor vagarosidade do segmento de raio liga o receptor ao ponto  $P$  faz com a normal ao refletor neste ponto,  $\beta_{ref}$  é o ângulo de reflexão correspondente ao raio incidente, i.e.,  $\beta_{ref} = \alpha$ , e

$$\tilde{v} = \begin{cases} v_p, & \text{para espalhamento P-P} \\ v_s, & \text{para espalhamento S-S} \end{cases}. \quad (3.17)$$

Note que devido ao meio ser isotrópico  $\alpha$  e  $\beta$  estão no mesmo plano.

Usando (2.57), (3.14), (3.15) e (3.16), temos

$$\mathcal{O}_{BK} = \left( \frac{\cos \alpha}{\tilde{v}} + \frac{\cos \beta}{\tilde{v}} \right) / \left( \frac{1}{\tilde{v}^2} + \frac{1}{\tilde{v}^2} + \frac{2 \cos(\alpha + \beta)}{\tilde{v}^2} \right). \quad (3.18)$$

<sup>2</sup>Aqui estamos considerando o sentido anti-horário. (Veja Figura 3.1)

<sup>3</sup>Consideramos o sentido horário. (Veja Figura 3.1)

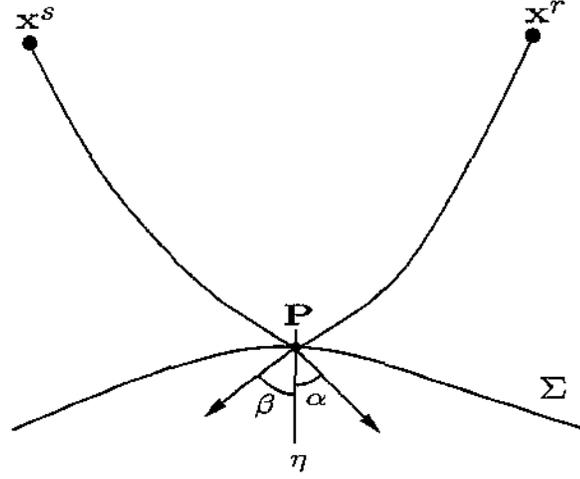


Figura 3.1: Disposição dos ângulos

### Reflexões Convertidas (P-S e S-P).

Observe que:

$$\mathbf{p}^s + \mathbf{p}^r = \left( \frac{\sin \alpha}{v_1}, 0, \frac{\cos \alpha}{v_1} \right) + \left( -\frac{\sin \beta}{v_2}, 0, \frac{\cos \beta}{v_2} \right), \quad (3.19)$$

$$|\nabla T_B|^2 = \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + 2 \frac{\cos(\alpha + \beta)}{v_1 v_2}, \quad (3.20)$$

e

$$\mathbf{p}^r - \mathbf{p}^{ref} = \left( -\frac{\sin \beta}{v_2}, 0, \frac{\cos \beta}{v_2} \right) - \left( \frac{\sin \beta_{ref}}{v_2}, 0, -\frac{\cos \beta_{ref}}{v_2} \right), \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{p}^{ref}$  é o vetor vagarosidade do campo de onda incidente refletido no ponto  $P$ . Nota-se que neste caso o ângulo  $\beta_{ref}$  está ligado ao ângulo de incidência  $\alpha$ , pela lei de Snell. Além disso,  $v_1$  é a velocidade do raio da fonte, i.e.,

$$v_1 = \begin{cases} v_p, & \text{para espalhamento P-S} \\ v_s, & \text{para espalhamento S-P} \end{cases}, \quad (3.22)$$

e  $v_2$  é a velocidade do raio do receptor, i.e.,

$$v_2 = \begin{cases} v_p, & \text{para espalhamento S-P} \\ v_s, & \text{para espalhamento P-S} \end{cases}. \quad (3.23)$$

Usando as expressões, (2.57), (3.19), (3.20) e (3.21), temos:

$$\mathcal{O}_{BK} = \left( \frac{\cos \alpha}{v_1} + \frac{\cos \beta}{v_2} \right) / \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{2 \cos(\alpha + \beta)}{v_1 v_2} \right). \quad (3.24)$$

Nota-se que esta expressão é levemente diferente da correspondente fórmula (3.18) para reflexões monotípicas.

### 3.3 Coeficiente espalhante de Born-Kirchhoff

Como vimos no capítulo anterior, o coeficiente espalhante da integral de Born-Kirchhoff (que é o mesmo que aparece na integral de Born) é dado pela equação (2.54). Aqui escrevemos

$$S(P) = \frac{1}{\rho} A_{ik} h_i^r h_k^s, \quad (3.25)$$

onde

$$A_{ik} = \Delta \rho \delta_{ik} + \Delta c_{ijkl} p_j^r p_l^s. \quad (3.26)$$

com  $\Delta \rho$  é a perturbação na densidade,  $\Delta c_{ijkl}$  são as perturbações dos parâmetros elásticos,  $\mathbf{p}^s$  e  $\mathbf{p}^r$  são os vetores vazarosidades dos segmentos dos raios da fonte e do receptor ligados ao ponto  $P$ ,  $\mathbf{h}^s$  e  $\mathbf{h}^r$  são os seus correspondentes vetores de polarização.

A análise do coeficiente espalhante de Born-Kirchhoff será feita na mesma duas etapas do fator obliquidade, i.e., (i) reflexões monotípicas, e (ii) reflexões convertidas.

#### Reflexões monotípicas (P-P e S-S)

Os vetores vazarosidade dos segmentos dos raios da fonte e do receptor ligados ao ponto  $P$  são dados por

$$\mathbf{p}^s = \left( \frac{\sin \alpha}{\tilde{v}}, 0, \frac{\cos \alpha}{\tilde{v}} \right), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{p}^r = \left( -\frac{\sin \beta}{\tilde{v}}, 0, \frac{\cos \beta}{\tilde{v}} \right), \quad (3.28)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos agudos que os vetores  $\mathbf{p}^s$  e  $\mathbf{p}^r$  fazem com a normal a superfície no ponto  $P$ , respectivamente, (veja Figura 3.1) e  $\tilde{v}$  está definido em (3.17). Inicialmente, calculamos  $A_{ik}$  da equação (3.26)

$$A_{11} = \frac{\Delta\mu}{\tilde{v}^2} \cos \alpha \cos \beta - \frac{2\Delta\mu + \Delta\lambda}{\tilde{v}^2} \sin \alpha \sin \beta + \Delta\rho, \quad (3.29)$$

$$A_{12} = 0, \quad (3.30)$$

$$A_{13} = -\frac{\Delta\lambda}{\tilde{v}^2} \sin \beta \cos \alpha + \frac{\Delta\mu}{\tilde{v}^2} \sin \alpha \cos \beta, \quad (3.31)$$

$$A_{21} = 0, \quad (3.32)$$

$$A_{22} = \frac{\Delta\mu}{\tilde{v}^2} \cos(\alpha + \beta) + \Delta\rho, \quad (3.33)$$

$$A_{23} = 0, \quad (3.34)$$

$$A_{31} = \frac{\Delta\lambda}{\tilde{v}^2} \cos \beta \sin \alpha - \frac{\Delta\mu}{\tilde{v}^2} \sin \beta \cos \alpha, \quad (3.35)$$

$$A_{32} = 0, \quad (3.36)$$

$$A_{33} = -\frac{\Delta\mu}{\tilde{v}^2} \sin \alpha \sin \beta + \frac{\Delta\lambda + 2\Delta\mu}{\tilde{v}^2} \cos \alpha \cos \beta + \Delta\rho. \quad (3.37)$$

Os vetores de polarização para o espalhamento P-P são

$$\mathbf{h}^s = \tilde{v}\mathbf{p}^s = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad (3.38)$$

$$\mathbf{h}^r = \tilde{v}\mathbf{p}^r = (-\sin \beta, 0, \cos \beta), \quad (3.39)$$

e para o espalhamento S-S são

$$\mathbf{h}^s = (\cos \alpha, 0, -\sin \alpha), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{h}^r = (\cos \beta, 0, \sin \beta). \quad (3.41)$$

Substituindo as equações (3.30) até (3.41) na equação (3.25), obtemos

$$S(P) = \begin{cases} \frac{\Delta\rho}{\rho} \cos(\alpha + \beta) + (1 + \cos(2\alpha + 2\beta)) \frac{\Delta\mu}{\rho v_p^2} + \frac{\Delta\lambda}{\rho v_p^2}, & \text{para P-P,} \\ \frac{\Delta\rho}{\rho} \cos(\alpha + \beta) + \frac{\Delta\mu}{\rho v_s^2} \cos(2\alpha + 2\beta), & \text{para S-S.} \end{cases} \quad (3.42)$$

Introduzindo o ângulo total entre o raio da fonte e o raio do refletor,  $\theta = \alpha + \beta$ , e usando algumas propriedades trigonométricas, obtemos

$$S(P) = \begin{cases} \frac{\Delta\rho}{\rho} \cos \theta + \frac{\Delta\lambda}{\lambda + 2\mu} + 2\frac{\Delta\mu}{\lambda + 2\mu} \cos^2 \theta, & \text{espalhamento P-P,} \\ \frac{\Delta\rho}{\rho} \cos \theta + \frac{\Delta\mu}{\mu} \cos 2\theta, & \text{espalhamento S-S.} \end{cases} \quad (3.43)$$

### Reflexões Convertidas (P-S e S-P)

Neste caso, os vetores vagarosidade são dados por

$$\mathbf{p}^s = \left( \frac{\sin \alpha}{v_1}, 0, \frac{\cos \alpha}{v_1} \right), \quad (3.44)$$

$$\mathbf{p}^r = \left( -\frac{\sin \beta}{v_2}, 0, \frac{\cos \beta}{v_2} \right), \quad (3.45)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos agudos dos respectivos raios, e  $v_1$  e  $v_2$  estão definidos em (3.22) e (3.23). Também, calculamos  $A_{ik}$  da equação (3.26) para este caso, e obtemos

$$A_{11} = \frac{\Delta\mu}{v_1 v_2} \cos \alpha \cos \beta - \frac{2\Delta\mu + \Delta\lambda}{v_1 v_2} \sin \alpha \sin \beta + \Delta\rho, \quad (3.46)$$

$$A_{12} = 0, \quad (3.47)$$

$$A_{13} = -\frac{\Delta\lambda}{v_1 v_2} \sin \beta \cos \alpha + \frac{\Delta\mu}{v_1 v_2} \sin \alpha \cos \beta, \quad (3.48)$$

$$A_{21} = 0, \quad (3.49)$$

$$A_{22} = \frac{\Delta\mu}{v_1 v_2} \cos(\alpha + \beta) + \Delta\rho, \quad (3.50)$$

$$A_{23} = 0, \quad (3.51)$$

$$A_{31} = \frac{\Delta\lambda}{v_1 v_2} \cos \beta \sin \alpha - \frac{\Delta\mu}{v_1 v_2} \sin \beta \cos \alpha, \quad (3.52)$$

$$A_{32} = 0, \quad (3.53)$$

$$A_{33} = -\frac{\Delta\mu}{v_1 v_2} \sin \alpha \sin \beta + \frac{\Delta\lambda + 2\Delta\mu}{v_1 v_2} \cos \alpha \cos \beta + \Delta\rho. \quad (3.54)$$

Os vetores de polarização para o espalhamento P-S são

$$\mathbf{h}^s = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad (3.55)$$

$$\mathbf{h}^r = (\cos \beta, 0, \sin \beta), \quad (3.56)$$

e para o espalhamento S-P são

$$\mathbf{h}^s = (-\cos \alpha, 0, \sin \alpha), \quad (3.57)$$

$$\mathbf{h}^r = (-\sin \beta, 0, \cos \beta). \quad (3.58)$$

Em ambos os casos obtemos a mesma expressão para o coeficiente de espalhamento,

$$S(P) = \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin \theta + \frac{\Delta\mu}{v_p v_s \rho} \sin 2\theta, \quad (3.59)$$

onde  $\theta = \alpha + \beta$ .

### 3.4 Linearização do coeficiente de reflexão de ondas-planas

Como já discutimos na introdução deste capítulo, falta um passo para a comparação dos núcleos das integrais de Born-Kirchhoff e Kirchhoff. Este passo consiste na linearização do coeficiente de reflexão recíproco. O coeficiente de reflexão recíproco tem que ser utilizado porque o fenômeno físico de uma onda refletida apresenta reciprocidade, porém, como observamos anteriormente, a integral Kirchhoff com o coeficiente de reflexão clássico não apresenta esta propriedade. Então estendemos a idéia de Deregowsky & Brown (1983), que a princípio foi sugerida para o caso do meio acústico, para o caso do meio elástico isotrópico. A introdução deste novo coeficiente de reflexão é justificada pelo fato que é igual ao coeficiente de reflexão clássico no ponto de reflexão, e além disso, torna recíproca a integral de Kirchhoff modificada que usa este coeficiente. Chamamos esta integral de Kirchhoff modificada de integral de Kirchhoff Recíproca e a consideramos como uma nova aproximação do campo de onda espalhado.

Uma vez que os coeficientes para os quatro tipos de reflexão são diferentes, temos que separar a análise em quatro casos. Nota-se que esta linearização é diferente daquela apresentada em Aki & Richards (1980) ou Červený (1995), porque nestas publicações é o coeficiente de reflexão clássico que está sendo linearizado.

### 3.4.1 Espalhamento P-P

O coeficiente de reflexão  $R_{PP} = R_{PP}(\alpha)$  para o espalhamento P-P em função do ângulo de incidência,  $\alpha$ , é dado por (veja Červený, 1995)

$$R_{PP} = N_{PP}/D, \quad (3.60)$$

onde

$$\begin{aligned} N_{PP} = & q^2 p^2 P_1 P_2 P_3 P_4 + \rho \hat{\rho} (v_s \hat{v}_p P_1 P_4 - v_p \hat{v}_s P_2 P_3) \\ & - v_p v_s P_3 P_4 Y^2 + \hat{v}_p \hat{v}_s P_1 P_2 X^2 - v_p \hat{v}_p v_s \hat{v}_s p^2 Z^2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

e

$$\begin{aligned} D = & q^2 p^2 P_1 P_2 P_3 P_4 + \rho \hat{\rho} (v_s \hat{v}_p P_1 P_4 + v_p \hat{v}_s P_2 P_3) \\ & + v_p v_s P_3 P_4 Y^2 + \hat{v}_p \hat{v}_s P_1 P_2 X^2 + v_p \hat{v}_p v_s \hat{v}_s p^2 Z^2, \end{aligned} \quad (3.62)$$

com

$$\begin{aligned} q &= 2(\hat{\rho} \hat{v}_s^2 - \rho v_s^2), & X &= \hat{\rho} - q p^2, \\ Y &= \rho + q p^2, & Z &= \hat{\rho} - \rho - q p^2, \\ P_1 &= (1 - v_p^2 p^2)^{1/2}, & P_2 &= (1 - v_s^2 p^2)^{1/2}, \\ P_3 &= (1 - \hat{v}_p^2 p^2)^{1/2}, & P_4 &= (1 - \hat{v}_s^2 p^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Aqui,  $\hat{v}_p$ ,  $\hat{v}_s$  e  $\hat{\rho}$  são as velocidades e a densidade do meio perturbado, respectivamente. Além disso,  $p = \sin \alpha / V$ , onde  $V$  é a velocidade de propagação da onda incidente e  $\alpha$  é o ângulo de incidência.

As raízes em  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) podem ser imaginárias. Quando isto ocorrer, iremos escolher o sinal positivo para a raiz quadrada imaginária, i.e.,

$$\begin{aligned} P_1 &= i(v_p^2 p^2 - 1)^{1/2} \quad \text{para } p > 1/v_p, \\ P_2 &= i(v_s^2 p^2 - 1)^{1/2} \quad \text{para } p > 1/v_s, \\ P_3 &= i(\hat{v}_p^2 p^2 - 1)^{1/2} \quad \text{para } p > 1/\hat{v}_p, \\ P_4 &= i(\hat{v}_s^2 p^2 - 1)^{1/2} \quad \text{para } p > 1/\hat{v}_s. \end{aligned} \quad (3.64)$$

O coeficiente de reflexão definido em (3.60)-(3.64) não garante a reciprocidade da representação da onda refletida quando substituído na integral de

Kirchhoff. Como porém o fenômeno físico é recíproco, então precisamos de um coeficiente que deixe a integral de Kirchhoff recíproca. Como Deregowski & Brown (1983) no caso acústico, observamos que no ponto de reflexão especular  $\theta = 2\alpha$ , onde  $\theta$  é o ângulo que o raio incidente faz com o raio refletido, e portanto no ponto de reflexão especular  $\sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos \theta)}/2$ . Então a extensão natural,  $R_{PP}^R(\theta)$  de  $R_{PP}(\alpha)$ , para que a resultante integral seja recíproca, é substituir  $\sin \alpha$  por  $\sqrt{(1 - \cos \theta)}/2$  em  $R_{PP}(\alpha)$ , também em outros pontos do refletor.

É claro que  $R_{PP}^R(\theta)$  é igual a  $R_{PP}(\alpha)$  no ponto de reflexão especular. Logo, para  $R_{PP}^R(\theta)$  ser o nosso coeficiente generalizado das integrais de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff, devemos mostrar que em meios com contraste fraco ela se reduz ao coeficiente espalhante de Born vezes a razão dos fatores de obliquidade. Isso será mostrado na próxima seção. Primeiro, determinamos uma expressão linearizada para o coeficiente espalhante  $R_{PP}^R(\theta)$ . Consideramos então

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \rho + \Delta\rho, \\ \hat{\mu} &= \mu + \Delta\mu, \\ \hat{\lambda} &= \lambda + \Delta\lambda,\end{aligned}\tag{3.65}$$

com as perturbações  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\mu$  e  $\Delta\lambda$  supostamente pequenas. Realizamos então no numerador  $N_{PP}$  e no denominador  $D$  da equação (3.60) a substituição da extensão  $\alpha \rightarrow \theta$  (veja Apêndice A), expandimos  $N_{PP}/D$  em uma Série de Taylor em  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\mu$  e  $\Delta\lambda$ , simplificamos o resultado e tomamos o termo de primeira ordem, obtendo o coeficiente linearizado

$$R_{PP}^L(\theta) = \frac{\Delta\lambda + 2\Delta\mu \cos^2 \theta}{2(\lambda + 2\mu)(1 + \cos \theta)} + \frac{\Delta\rho \cos \theta}{2\rho(1 + \cos \theta)}.\tag{3.66}$$

### 3.4.2 Espalhamento S-S

O coeficiente de reflexão  $R_{SS} = R_{SS}(\alpha)$  para o espalhamento S-S é também dado por uma fração (veja Červený, 1995)

$$R_{SS} = N_{SS}/D,\tag{3.67}$$

onde agora

$$N_{SS} = q^2 p^2 P_1 P_2 P_3 P_4 + \rho \hat{\rho} (v_p \hat{v}_s P_2 P_3 - v_s \hat{v}_p P_1 P_4) - v_p v_s P_3 P_4 Y^2 + \hat{v}_p \hat{v}_s P_1 P_2 X^2 - v_p \hat{v}_p v_s \hat{v}_s p^2 Z^2, \quad (3.68)$$

e  $D$ ,  $q$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  são definidos em (3.62)-(3.63).

Como a onda incidente é uma onda com velocidade de propagação  $S$ , então  $p = \sin \alpha / v_s$ . Usamos a mesma idéia do caso do espalhamento P-P, ou seja, estendemos o coeficiente  $R_{SS}(\alpha)$  para um coeficiente  $R_{SS}^R(\theta)$  substituindo  $\sin \alpha$  substituído por  $\sqrt{(1 - \cos \theta)/2}$ , onde  $\theta$  é o ângulo que o raio incidente faz com o raio refletido num ponto da superfície de reflexão.

Da mesma forma para mostrarmos que esta é uma boa definição para o coeficiente generalizado das integrais de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff, temos que mostrar que num meio de contraste fraco ela se reduz ao coeficiente espalhante de Born. Considerando  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\lambda}$  como nas equações (3.65) e calculando a extensão  $\alpha \rightarrow \beta$  de  $N_{SS}$  e  $D$  e a série de Taylor de  $N_{SS}/D$  até a primeira ordem (veja o Apêndice A), obtemos o coeficiente linearizado

$$R_{SS}^L(\theta) = \frac{-\Delta\mu}{2\mu(1 + \cos\theta)} + \frac{\Delta\rho \cos\theta}{2\rho(1 + \cos\theta)} + \frac{\Delta\mu}{\mu} \frac{\cos^2\theta}{1 + \cos\theta}. \quad (3.69)$$

### 3.4.3 Espalhamento P-S

O coeficiente de reflexão para o espalhamento P-S é dado por (veja Červený, 1995)

$$R_{PS}(\alpha) = N_{PS}/D, \quad (3.70)$$

onde

$$N_{PS} = 2v_p p P_1 (q P_3 P_4 Y + \hat{v}_p \hat{v}_s X Z), \quad (3.71)$$

e  $D$ ,  $q$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  estão definidos em (3.62) e (3.63). A primeira idéia para encontrarmos o coeficiente generalizado para as integrais de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff consiste em usar a mesma extensão  $\alpha \rightarrow \theta$  do caso dos espalhamentos monotípicos (P-P e S-S). Observa-se, porém, que neste caso o coeficiente de reflexão resultante não fornece uma integral de Kirchhoff recíproca. Precisa-se então de uma outra idéia para transformar

o coeficiente de reflexão dado em um coeficiente recíproco. Portanto, introduzimos os dois parâmetros do raio da fonte,  $p_p = \sin \alpha / v_p$ , e do raio do receptor,  $p_s = \sin \beta / v_s$  (observe que  $p_p = p_s$  no ponto estacionário). Para obter o coeficiente recíproco  $R_{PS}^R$  que neste caso depende de  $\alpha$  e  $\beta$ , fazemos as seguintes modificações nas fórmulas (3.62), (3.63) e (3.71):

$$\begin{aligned}
X &= \hat{\rho} - qp_p p_s, & Y &= \rho + qp_p p_s, & Z &= \hat{\rho} - \rho - qp_p p_s, \\
P_1 &= \sqrt{1 - v_p^2 p_p p_s}, & P_2 &= \sqrt{1 - v_s^2 p_p p_s}, \\
P_3 &= \sqrt{1 - \hat{v}_p^2 p_p p_s}, & P_4 &= \sqrt{1 - \hat{v}_s^2 p_p p_s}, \\
N_{PS} &= 2v_p p_p P_1 (qP_3 P_4 Y + \hat{v}_p \hat{v}_s X Z), \\
D &= q^2 p_p p_s P_1 P_2 P_3 P_4 + \rho \hat{\rho} (v_s \hat{v}_p P_1 P_4 + v_p \hat{v}_s P_2 P_3) \\
&+ v_p v_s P_3 P_4 Y^2 + \hat{v}_p \hat{v}_s P_1 P_2 X^2 + v_p \hat{v}_p v_s \hat{v}_s p_p p_s Z^2. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

As outras quantidades utilizadas na equação (3.71) são dadas pelas equações (3.63). Observe que estas modificações não alteram o valor do coeficiente de reflexão no ponto estacionário.

Com o mesmo procedimento descrito nas seções anteriores, obtemos o coeficiente linearizado para este caso,

$$\begin{aligned}
R_{PS}^L &= \left[ v_s \sin \alpha (\Delta \rho v_s v_p - 2\Delta \mu \sin \alpha \sin \beta + \right. \\
&\quad \left. 2\Delta \mu \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \right] / \\
&\quad \left[ 2\mu v_p \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \right]. \tag{3.73}
\end{aligned}$$

No ponto de reflexão, a lei de Snell garante a seguinte igualdade

$$\frac{\sin \alpha}{v_p} = \frac{\sin \beta}{v_s}. \tag{3.74}$$

Usando este fato, temos que no ponto de reflexão especular, a equação (A.11) pode ser rescrita da seguinte forma

$$R_{PS}^L = \frac{v_s \sin \alpha}{2\mu v_p \cos \beta} [\Delta\rho v_s v_p + 2\Delta\mu \cos(\alpha + \beta)]. \quad (3.75)$$

### 3.4.4 Espalhamento S-P

O coeficiente de reflexão para o espalhamento S-P é dado em Červený (1995) por

$$R_{SP}(\alpha) = N_{SP}/D, \quad (3.76)$$

onde

$$N_{SP} = -2v_s p P_2 (q P_3 P_4 Y + \hat{v}_p \hat{v}_s X Z), \quad (3.77)$$

e  $D$ ,  $q$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  estão definidos em (3.62) e (3.63).

Vamos generalizar este coeficiente da mesma forma que fizemos para o espalhamento P-S, i.e., vamos usar o parâmetro do raio incidente,  $p_s$ , e do raio do receptor,  $p_p$ . Para isso usamos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $D$  como definidos em (3.72) e modificamos a fórmula (3.77)

$$R_{SP}^R = -2v_s p_s P_2 D^{-1} (q P_3 P_4 Y + \hat{v}_p \hat{v}_s X Z). \quad (3.78)$$

Após a linearização do numerador  $N_{SP}$  da fórmula (3.78), obtemos

$$\begin{aligned} N_{SP} = & 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \left( v_s v_p \rho \left( \Delta\rho - 2 \frac{\Delta\mu \sin \alpha \sin \beta}{v_s v_p} \right) + \right. \\ & \left. 2\Delta\mu \rho \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Daí, de (3.72) e (3.78), temos a seguinte expressão para o coeficiente linearizado

$$\begin{aligned} R_{SP}^L = & \left[ \sin \alpha \left( v_s v_p \left( \Delta\rho - 2\Delta\mu \frac{\sin \alpha \sin \beta}{v_s v_p} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2\Delta\mu \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \right) \right] / \\ & 2v_p v_s \rho \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Calculando  $R_{SP}^L$  no ponto de reflexão especular, obtemos

$$R_{SP}^L = \frac{\sin \alpha}{2v_p v_s \rho \cos \beta} [v_s v_p \Delta \rho + 2\Delta \mu \cos(\alpha + \beta)] . \quad (3.81)$$

### 3.5 Comparação dos núcleos

Nesta seção, utilizamos as expressões encontradas nas seções anteriores para os fatores de obliquidade e para os coeficientes de espalhamento e de reflexão linearizado para mostrarmos que para meios isotrópicos com contrastes fracos, os núcleos da equação (2.72) são iguais no ponto estacionário.

Inicialmente, calculamos a razão do fator de obliquidade de Kirchhoff pelo fator de obliquidade de Born-Kirchhoff. Em seguida, mostramos que no ponto de reflexão especular vale a igualdade dos núcleos, por multiplicar esta razão pelo coeficiente de reflexão linearizado e por observar que isto resulta no coeficiente de espalhamento de Born-Kirchhoff. A comparação tem que ser feita individualmente nos quatro casos de reflexão.

#### 3.5.1 Razão entre os fatores de obliquidade de Kirchhoff e de Born-Kirchhoff

**Reflexões Monotípicas (P-P e S-S).**

Rescrevendo os fatores de obliquidade de Kirchhoff e Born-Kirchhoff, temos

$$O_K = \bar{v}^2 \left( \frac{\cos \beta}{\bar{v}} + \frac{\cos \beta_{ref}}{\bar{v}} \right) , \quad (3.82)$$

e

$$O_{BK} = \left( \frac{\cos \alpha}{\bar{v}} + \frac{\cos \beta}{\bar{v}} \right) / \left( \frac{1}{\bar{v}^2} + \frac{1}{\bar{v}^2} + \frac{2 \cos(\alpha + \beta)}{\bar{v}^2} \right) , \quad (3.83)$$

onde  $\bar{v}$  está definida em (3.17). Então no ponto de reflexão ( $\beta_{ref} = \beta = \alpha$ ), a razão entre eles é

$$\frac{O_K}{O_{BK}} = 4 \cos^2 \alpha = 2(1 + \cos \theta) , \quad (3.84)$$

onde  $\theta = \alpha + \beta = 2\alpha$ .

### Reflexões Convertidas (P-S e S-P).

Os fatores de obliquidade para estes casos são:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K &= v_2^2 \left( \frac{\cos \beta}{v_2} + \frac{\cos \beta_{ref}}{v_2} \right), \\ \mathcal{O}_{BK} &= \left( \frac{\cos \alpha}{v_1} + \frac{\cos \beta}{v_2} \right) / \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{2 \cos(\alpha + \beta)}{v_1 v_2} \right), \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  estão definidos em (3.22) e (3.23), respectivamente. Portanto, no ponto de reflexão ( $\sin \alpha/v_1 = \sin \beta/v_2$ )

$$\frac{\mathcal{O}_K}{\mathcal{O}_{BK}} = \frac{2(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha + \beta)) \cos \beta}{v_1 v_2 \cos \alpha + v_1^2 \cos \beta}. \quad (3.86)$$

### 3.5.2 Igualdade dos núcleos

#### Espalhamento P-P

Para mostrarmos que os núcleos da integral de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff são iguais no ponto de reflexão especular, multiplicamos a razão dada (3.66) pelo coeficiente linearizado (3.84). Deste procedimento, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_K}{\mathcal{O}_{BK}} R_{PP}^L(\theta) &= 2(1 + \cos \theta) \left[ \frac{\Delta \lambda + 2\Delta \mu \cos^2 \theta}{2(\lambda + 2\mu)(1 + \cos \theta)} + \frac{\Delta \rho \cos \theta}{2\rho(1 + \cos \theta)} \right] \\ &= \frac{\Delta \lambda}{\lambda + 2\mu} + \frac{2\Delta \mu}{\lambda + 2\mu} \cos^2 \theta + \frac{\Delta \rho}{\rho} \cos \theta \\ &= \frac{\Delta \lambda}{\rho v_p^2} + \frac{\Delta \mu}{\rho v_p^2} (1 + \cos 2\theta) + \frac{\Delta \rho}{\rho} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Mas a última igualdade é a mesma equação dada em (3.42) para o caso do espalhamento P-P e  $\theta = \alpha + \beta$ . Portanto, temos que no ponto de reflexão especular  $\mathcal{O}_K R_{PP}^L(\theta) = \mathcal{O}_{BK} S(P)$ .

### Espalhamento S-S

Da mesma forma que no caso do espalhamento P-P, multiplicamos a razão (3.84) pelo coeficiente linearizado (A.7), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{O}_\kappa}{\mathcal{O}_{BK}}R_{SS}^L(\theta) &= \frac{-\Delta\mu}{\mu} + \frac{\Delta\rho}{\rho}\cos\theta + \frac{\Delta\mu}{\mu}2\cos^2\theta \\ &= \frac{\Delta\rho}{\rho}\cos\theta + \frac{\Delta\mu}{\rho v_s^2}\cos 2\theta,\end{aligned}\quad (3.88)$$

que é a mesma equação dada em (3.43) para o espalhamento S-S. Logo,  $\mathcal{O}_\kappa R_{SS}^L(\theta) = \mathcal{O}_{BK}S(P)$  no ponto de reflexão especular.

### Espalhamento P-S/S-P

Para mostrar que  $\mathcal{O}_\kappa R_{PS}^L = \mathcal{O}_{BK}S(P)$  no ponto de reflexão, usamos as equações (3.75) e (3.86) para calcular

$$\frac{\mathcal{O}_\kappa}{\mathcal{O}_{BK}}R_{PS}^L = \frac{\Delta\rho}{\rho}\sin(\alpha + \beta) + \frac{\Delta\mu}{\rho v_p v_s}\sin(2\alpha + 2\beta).\quad (3.89)$$

Mas o lado direito da igualdade acima nada mais é que a equação (3.59). Mostramos, portanto, que no ponto de reflexão especular  $\mathcal{O}_\kappa R_{PS}^L = \mathcal{O}_{BK}S(P)$ .

O caso do espalhamento S-P é análogo, basta observar que as equações (3.75) e (3.81) são iguais.

## 3.6 Considerações finais

Neste capítulo mostramos individualmente para os quatro casos de reflexão elástica em meios isotrópicos (P-P, P-S, S-S, S-P) que, no ponto de reflexão especular, o núcleo da integral de Born-Kirchhoff é igual ao da integral de Kirchhoff com o novo coeficiente de reflexão linearizado, i.e.,

$$\mathcal{O}_\kappa(\mathbf{x}^*)R^L(\mathbf{x}^*) = \mathcal{O}_{BK}(\mathbf{x}^*)S(\mathbf{x}^*),$$

onde  $\mathbf{x}^*$  é o ponto de reflexão. Podemos concluir que os núcleos das integrais de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff definidos na equação (2.73) são iguais neste ponto, quando se considera um contraste fraco onde a linearização do coeficiente de reflexão é válida.

O coeficiente reflexão recíproco introduzido neste capítulo não somente tem importância para esta linearização, mas também é relevante em si pelas seguintes razões: no ponto de reflexão especular ele é igual ao coeficiente clássico. Além de satisfazer esta condição necessária, ele é fisicamente mais plausível porque torna a integral de Kirchhoff recíproca. Portanto, a integral de Kirchhoff usando este coeficiente recíproco pode ser considerada uma nova aproximação para o campo espalhado, a qual chamamos de Integral de Kirchhoff Recíproca.

# Capítulo 4

## Meio acústico

Neste capítulo, derivamos a forma acústica da representação geral para o campo de onda espalhado registrado no receptor através das aproximações de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff. Como no meio isotrópico, mostramos que no ponto de reflexão especular as duas aproximações fornecem a mesma expressão, i.e., os núcleos das respectivas integrais associadas são iguais no ponto de reflexão especular. As expressões obtidas neste capítulo formam a base das implementações computacionais para os testes numéricos descritos nos próximos capítulos. Estes testes foram restritos ao caso acústico pela disponibilidade dos recursos computacionais.

Todas as fórmulas derivadas neste capítulo podem ser obtidas alternativamente especificando as fórmulas correspondentes do caso elástico dos capítulos anteriores para o meio acústico. Porém, optamos por incluir a derivação completa e independente para o caso acústico por duas razões. A primeira é que neste caso existem algumas simplificações da derivação geral. A segunda é que queríamos deixar este capítulo auto-consistente, assim facilitando a leitura para o leitor somente interessado no caso acústico. Para o leitor já familiarizado com os Capítulos 2 e 3 incluímos referências freqüentes às correspondentes fórmulas do caso elástico.

### 4.1 Equação da onda acústica

Um meio onde o módulo de cisalhamento ( $\mu$ ) é nulo é chamado de *fluido* ou de *meio acústico*. Em um meio acústico o esforço hidrostático é negativo e

$\tau_{ii}/3$  é denotado por  $-p$ , onde  $p$  é a *pressão acústica*. Por consistência com a literatura, introduzimos o módulo de volume (incompressibilidade)  $k = k(\mathbf{x})$ . Nota-se que para um meio acústico  $k = \lambda$ . Daí, de (2.18), de (2.19) e (3.1), temos

$$p_{,i} + f_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (4.1)$$

Derivando a equação (4.1) com respeito a  $x_i$  e usando que  $u_{i,i} = -p/k$ , obtemos

$$\left(-\frac{p_{,i}}{\rho}\right)_{,i} + \left(\frac{f_i}{\rho}\right)_{,i} = -\frac{1}{k}\ddot{p}, \quad (4.2)$$

ou

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) - \frac{1}{k}\ddot{p} = \tilde{f}(\mathbf{x}, t), \quad (4.3)$$

que é a conhecida por *equação da onda acústica* com termo de fonte  $\tilde{f}(\mathbf{x}, t) = (f_i/\rho)_{,i}$ .

## 4.2 Função de Green

Correspondente ao caso elástico anisotrópico desenvolvido na Seção 2.1.5, a solução da equação (4.3) com o termo de fonte sendo uma fonte pontual é chamada de *função de Green acústica*.

Inicialmente, consideramos a equação da onda acústica (4.3) com termo de fonte pontual

$$g_{,ii} - \frac{1}{\rho}g_{,i\rho,i} - \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}\ddot{g} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0), \quad (4.4)$$

onde  $v^2 = k/\rho$ .

A solução  $g \equiv g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$  desta equação é conhecida como *função de Green acústica*. O primeiro parâmetro  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  é a posição de observação,  $t$  representa o tempo nesta posição,  $\mathbf{x}_0$  é a posição inicial e  $t_0$  é o tempo no qual o pulso  $\delta$  foi gerado na posição inicial. Como  $t$  e  $t_0$  representam tempo corrente, podemos mudá-los “igualmente”

$$g(\mathbf{x}, t - t_0; \mathbf{x}_0, 0) = g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = g(\mathbf{x}, -t_0; \mathbf{x}_0, -t), \quad (4.5)$$

que é a condição de reciprocidade no tempo fonte e receptor. Esta é a versão acústica da relação de reciprocidade (2.21) para o caso elástico anisotrópico.

Como mostramos no Apêndice B a função de Green acústica para um meio de velocidade constante é dada por

$$g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - t_0 - r/v). \quad (4.6)$$

Observamos em (4.6) que esta função é recíproca em relação a fonte e o receptor, i.e.,

$$g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = g(\mathbf{x}_0, t; \mathbf{x}, t_0). \quad (4.7)$$

Esta equação corresponde a relação (2.22) do caso elástico anisotrópico. Observa-se que esta propriedade permanece válida em um meio com velocidade variável.

### 4.3 Representação geral do campo de onda espalhado

Inicialmente, consideramos um meio acústico não homogêneo, caracterizado pela densidade  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  e pelo módulo de volume  $k = k(\mathbf{x})$ . Para uma fonte pontual no espaço que emite um pulso temporal  $F(t)$ , a equação da onda (4.3) para a pressão acústica  $p = U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  no domínio da frequência pode ser escrita, correspondente a equação (2.38), da seguinte forma

$$\mathcal{L}U = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right) + \frac{\omega^2}{k(\mathbf{x})} U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) = -F(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s), \quad (4.8)$$

onde  $F(\omega)$  é o pulso no domínio da frequência,  $\omega$  é a frequência angular e  $\mathbf{x}^s = (x_s, y_s, z_s)$  é a posição da fonte. Nosso objetivo é determinar uma representação para  $U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  no receptor localizado em  $\mathbf{x}^r = (x_r, y_r, z_r)$ .

Nota-se que a seguinte derivação difere um pouco do caso elástico. Supomos que a função de Green  $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)$  de um campo de onda gerado por uma fonte unitária localizada em  $\mathbf{x}^r$  e se propagando em um meio não homogêneo com velocidade de referência  $v_0(\mathbf{x})$  seja conhecida. Esta função satisfaz a equação de Helmholtz

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x})} \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right) + \frac{\omega^2}{k_0(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^r), \quad (4.9)$$

onde  $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x})$  e  $k_0 = k_0(\mathbf{x})$  são a densidade e o módulo de volume do meio de referência, respectivamente.

Representamos os parâmetros do meio pelos parâmetros de referência mais uma perturbação, i.e.,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}) + \Delta\rho(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad k(\mathbf{x}) = k_0(\mathbf{x}) + \Delta k(\mathbf{x}). \quad (4.10)$$

Agora, multiplicando (4.8) por  $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)$ , (4.9) por  $U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  e integrando sobre um volume arbitrário  $V$  que contenha  $\mathbf{x}^s$  e  $\mathbf{x}^r$ , obtemos

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= F(\omega)G(\mathbf{x}^s, \omega; \mathbf{x}^r) + \int_V \left[ G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right) \right. \\ &\quad - U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x})} \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right) \\ &\quad \left. + \omega^2 \left( \frac{1}{k(\mathbf{x})} - \frac{1}{k_0(\mathbf{x})} \right) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right] dV \\ &= F(\omega)G(\mathbf{x}^s, \omega; \mathbf{x}^r) + \int_V \left[ \frac{G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)}{\rho(\mathbf{x})} \nabla^2 U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right. \\ &\quad + G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \right) \nabla U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \\ &\quad - U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x})} \right) \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \\ &\quad - \frac{U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)}{\rho_0(\mathbf{x})} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \\ &\quad \left. - \omega^2 \left( \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x})k_0(\mathbf{x})} \right) U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right] dV, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $dV$  denota o elemento de volume.

Aplicando em (4.11) a primeira Identidade de Green (veja, por exemplo, Bleistein, 1984), obtemos após algumas simplificações

$$U(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = F(\omega)G(\mathbf{x}^s, \omega; \mathbf{x}^r) + \int_{\partial V} \left[ \frac{G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)}{\rho(\mathbf{x})} \frac{\partial U}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)}{\rho_0(\mathbf{x})} \frac{\partial G}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \Big] dS \\
& + \int_V \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x}) \rho_0(\mathbf{x})} \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \nabla U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV \quad (4.12) \\
& - \omega^2 \int_V \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x}) k_0(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV,
\end{aligned}$$

onde  $dS$  denota o elemento de área,  $\partial/\partial\eta$  denota a derivada direcional em direção da normal apontando para fora do volume  $V$  e  $\partial V$  é a fronteira de  $V$ .

A equação (4.12) é uma representação integral geral exata para o campo de onda registrado no receptor uma vez que  $U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)$  e  $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)$  sejam conhecidas. Agora rescrevemos esta representação de tal forma que permite a descrição de um campo espalhado. Neste caso, é razoável supor que o campo de onda  $U$  seja a superposição do campo de onda incidente  $U^I$  e do campo de onda espalhado  $U^S$ , i.e.,

$$U = U^I + U^S. \quad (4.13)$$

O campo de onda incidente é a resposta, na ausência de um refletor, da propagação da onda no meio de referência gerada pela fonte sob consideração. Portanto  $U^I$  satisfaz

$$\left[ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x})} \nabla \right) + \frac{\omega^2}{k_0(\mathbf{x})} \right] U^I(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) = -F(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s), \quad (4.14)$$

sujeito a condição de Sommerfeld (2.55). Logo,

$$U^I(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) = F(\omega) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s). \quad (4.15)$$

Daí, de (4.12) e de (4.13), temos

$$\begin{aligned}
U^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= \int_{\partial V} \left[ \frac{G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)}{\rho(\mathbf{x})} \frac{\partial U}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right. \\
&\quad \left. - \frac{U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)}{\rho_0(\mathbf{x})} \frac{\partial G}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right] dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_V \frac{\Delta\rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})\rho_0(\mathbf{x})} \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \nabla U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV \\
& - \omega^2 \int_V \frac{\Delta k}{k(\mathbf{x})k_0(\mathbf{x})} U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) dV, \quad (4.16)
\end{aligned}$$

que é uma *representação integral exata* para o campo de onda espalhado registrado em  $\mathbf{x}^r$ . Porém, esta é inútil para modelamento sísmico, porque normalmente  $U$  e  $G$  não são conhecidas no refletor.

## 4.4 Aproximação de Born

Nesta seção, usamos a aproximação de Born e chegamos a uma representação aproximada para o campo de onda espalhado que pode ser usada para modelamento. Para isto, suponhamos que  $\partial V$  em (4.16) seja uma esfera de raio infinito e que  $\Delta k(\mathbf{x}) = 0$  e  $\Delta\rho(\mathbf{x}) = 0$  em  $V$ , exceto num volume próprio  $\Omega$  (veja Figura 4.1).

Usando a condição de Sommerfeld (2.55), vemos que

$$\int_{\partial V} \left[ \frac{G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)}{\rho(\mathbf{x})} \frac{\partial U^S}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) - \frac{U^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)}{\rho_0(\mathbf{x})} \frac{\partial G^S}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right] dS = 0. \quad (4.17)$$

Daí e de (4.16), temos

$$\begin{aligned}
U^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) & = \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta\rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})\rho_0(\mathbf{x})} \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \nabla U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \right. \\
& \quad \left. - \omega^2 \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x})k_0(\mathbf{x})} U(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right] dV. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Suponhamos que o contraste em  $\Omega$  do meio seja fraco (*aproximação de Born*), ou seja, que os parâmetros do meio variam pouco. Colocando isto em linguagem matemática, temos que as perturbações relativas são pequenas, i.e.,

$$\frac{\Delta\rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \ll 1, \quad \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x})} \ll 1. \quad (4.19)$$

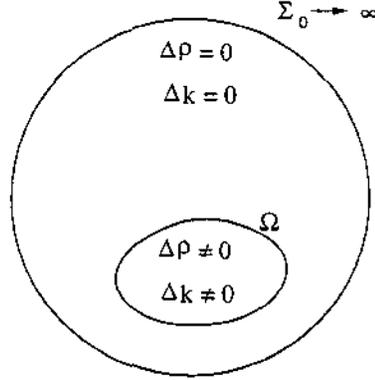


Figura 4.1: Configuração para a representação da integral de volume  $V$  para a aproximação de Born.

Daí, temos que o campo espalhado é pequeno em comparação com o campo incidente, i.e.,

$$U^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \ll U^I(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s).$$

Portanto podemos aproximar  $U^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} U^S \approx U^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= -\omega^2 \int_{\Omega} \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x})k_0(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) U^I(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})\rho_0(\mathbf{x})} \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \nabla U^I(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV, \end{aligned} \quad (4.20)$$

que corresponde à fórmula (2.46) do caso elástico.

Agora, usando Teoria dos Raios de ordem zero e supondo que trabalhamos com aproximações em alta-freqüência, podemos escrever

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \approx a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)} \quad (4.21)$$

e aproximar

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) \approx i\omega (\nabla T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) \cdot \boldsymbol{\eta}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s), \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad (4.22)$$

onde  $a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)$  é a amplitude definida em (2.51) e  $T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)$  é o tempo de trânsito do raio que liga  $\mathbf{x}^s$  a  $\mathbf{x}$ .

Finalmente, usando as equações (4.15) e (4.22), rescrevemos a equação (4.20) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
U^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= -\omega^2 F(\omega) \int_{\Omega} \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x})k_0(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) dV \\
&\quad + F(\omega) \int_{\Omega} \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})\rho_0(\mathbf{x})} \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV \\
&= -\omega^2 F(\omega) \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})\rho_0(\mathbf{x})} \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x})k_0(\mathbf{x})} \right] G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Observamos que  $U^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s)$  em (4.23) é recíproca com respeito a fonte e o receptor e que não depende da geometria de aquisição, i.e., das posições de  $\mathbf{x}_r$  e  $\mathbf{x}_s$ .

Usando teoria dos raios (veja Červený, 1995) para a função de Green, rescrevemos a integral de volume (4.23) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
U^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= -\omega^2 F(\omega) \int_{\Omega} \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^r)v_0(\mathbf{x}^r)} \left[ \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k(\mathbf{x})} + \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \cos \theta^{rs}(\mathbf{x}) \right] \\
&\quad \frac{a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)}{v_0(\mathbf{x})} e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^s)v_0(\mathbf{x}^s)} dV \\
&\approx -\omega^2 F(\omega) \int_{\Omega} \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^r)v_0(\mathbf{x}^r)} \left[ \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k_0(\mathbf{x})} + \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x})} \cos \theta^{rs}(\mathbf{x}) \right] \\
&\quad \frac{a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)}{v_0(\mathbf{x})} e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^s)v_0(\mathbf{x}^s)} dV, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

onde usamos a notação (2.58) e

$$v_0(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{k_0(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x})}}. \tag{4.25}$$

Além disso, observamos

$$\begin{aligned}
\nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) &= \frac{\cos \theta^{rs}}{v_0(\mathbf{x})^2}, \\
\nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) \cdot \boldsymbol{\eta} &= \frac{\cos \theta^s}{v_0(\mathbf{x})} \quad \text{e} \quad \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{\cos \theta^r}{v_0(\mathbf{x})}. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Correspondente à equação (2.53) podemos escrever

$$U^B(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = -\omega^2 F(\omega) \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^r) v_0(\mathbf{x}^r)} \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^s) v_0(\mathbf{x}^s)} \int_{\Omega} S(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} dV, \quad (4.27)$$

onde

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \left( \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k_0(\mathbf{x})} + \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x})} \cos \theta^{rs}(\mathbf{x}) \right), \quad (4.28)$$

é o coeficiente de espalhamento da integral de Born no caso acústico.

## 4.5 A integral Born-Kirchhoff

Paralelo ao que foi feito no caso elástico na Seção 2.4, vamos transformar nesta seção a integral de volume, (4.27), obtida usando a aproximação de Born em uma integral de superfície, a qual chamamos de Born-Kirchhoff. Para isto usamos o teorema da divergência e aproximações em alta frequência.

Para transformarmos a integral de volume (4.27) em uma integral de superfície, usamos o resultado (2.8.3) de Bleistein (1984) e fazemos aproximações em alta-frequência. Assim, (4.27) é equivalente à

$$U^B \approx U^{BK}(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = i\omega F(\omega) \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^r) v_0(\mathbf{x}^r)} \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^s) v_0(\mathbf{x}^s)} \times \int_{\Sigma} S(\mathbf{x}) \mathcal{O}_{BK} a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} dS, \quad (4.29)$$

onde  $S(\mathbf{x})$  está definido em (4.28) e o fator de obliquidade de Born-Kirchhoff,  $\mathcal{O}_{BK}$ , é formalmente igual ao do caso elástico anisotrópico definido na equação (2.57).

Em (4.29) consideramos que a fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  é composta do refletor  $\Sigma$  e uma semi-esfera  $\Sigma_0$  inferior ao refletor e fazemos  $\Sigma_0 \rightarrow \infty$ . Portanto, a integral em  $\Sigma_0$  não contribui. A integral (4.29) é chamada de *Born-Kirchhoff* (Novais et al., 1997), correspondentemente à equação (2.56).

## 4.6 Aproximação de Kirchhoff

O ponto de partida para a expressão do campo de onda espalhado usando a aproximação de Kirchhoff também é a representação (4.16). Consideramos que  $V$  seja um volume no semi-espaço superior, e  $\partial V$  consiste de um refletor  $\Sigma$  e uma semi-esfera,  $\Sigma_0$ , de raio infinito (veja Figura 4.2a). Suponhamos que o meio considerado seja igual ao meio de referência no semi-espaço superior a  $\Sigma$ , i.e.,  $\Delta\rho(\mathbf{x}) = 0$  e  $\Delta k(\mathbf{x}) = 0$  em  $V$ . Portanto, a equação (4.16) pode ser reescrita como

$$U^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = \int_{\Sigma} \left[ \frac{G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r)}{\rho(\mathbf{x})} \frac{\partial U^S}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) - \frac{U^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s)}{\rho_0(\mathbf{x})} \frac{\partial G}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) \right] dS. \quad (4.30)$$

Esta é a integral de Kirchhoff para o meio acústico que corresponde a integral (2.64).

Em alta-freqüência, a aproximação de Kirchhoff consiste em aproximar o campo de onda espalhado pelo campo de onda incidente vezes um coeficiente de reflexão  $R \equiv R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x}))$  (veja, por exemplo, Bleistein, 1984 ou Wapenaar & Berkhout, 1993), i.e.,

$$\begin{aligned} U^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) &= R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) U^I(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s), \\ \frac{\partial U^S}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) &= -R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) \frac{\partial U^I}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s), \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$R = \frac{\rho(\mathbf{x}) \cos \theta^s(\mathbf{x}) - \rho_0(\mathbf{x}) \sqrt{[v_0(\mathbf{x})/v(\mathbf{x})]^2 - 1 + \cos^2 \theta^s(\mathbf{x})}}{\rho(\mathbf{x}) \cos \theta^s(\mathbf{x}) + \rho_0(\mathbf{x}) \sqrt{[v_0(\mathbf{x})/v(\mathbf{x})]^2 - 1 + \cos^2 \theta^s(\mathbf{x})}}, \quad (4.32)$$

é o coeficiente de reflexão da onda plana incidente sob o mesmo ângulo  $\theta^s(\mathbf{x})$ , que o raio liga  $\mathbf{x}^s$  a  $\mathbf{x}$  faz com a normal,  $\boldsymbol{\eta}$ , à superfície  $\Sigma$  no ponto  $\mathbf{x}$  (veja Figura 4.2(b)). Neste trabalho chamamos a equação (4.32) de *coeficiente de reflexão clássico* e quando usamos a resposta do campo de onda espalhado obtida usando a aproximação de Kirchhoff com o coeficiente de reflexão clássico, chamamos de *Kirchhoff Clássico*.

Substituindo (4.15), (4.22) e (4.31) em (4.30) e usando o teorema da reciprocidade (veja a equação (4.7)),  $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) = G(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x})$ , obtemos

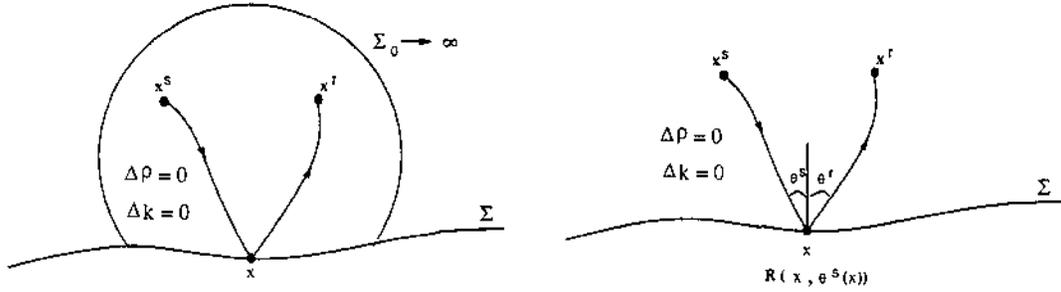


Figura 4.2: (a) Configuração do volume  $V$  para a aproximação de Kirchhoff; (b) Raios, ângulo incidente e ângulo refletido

correspondentemente à equação (2.69),

$$U^s \approx U^K(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = i\omega F(\omega) \int_{\Sigma} G(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}) R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) \times \left( \frac{\nabla T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)}{\rho(\mathbf{x})} + \frac{\nabla T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r)}{\rho_0(\mathbf{x})} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dS. \quad (4.33)$$

Interpretamos (4.33), da direita para a esquerda, como sendo a propagação de uma frente de onda gerada por uma fonte pontual em  $\mathbf{x}^s$  até  $\mathbf{x}$  em  $\Sigma$ , refletindo em  $\Sigma$  e se propagando de  $\mathbf{x}$  ao receptor  $\mathbf{x}^r$ .

Usando a aproximação (4.21) e as equações dadas em (4.26) na integral acima, obtemos

$$U^K(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = i\omega F(\omega) \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^r) v_0(\mathbf{x}^r)} \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^s) v_0(\mathbf{x}^s)} \times \int_{\Sigma} R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) \mathcal{O}_K a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} dS, \quad (4.34)$$

onde o fator de obliquidade de Kirchhoff,  $\mathcal{O}_K$ , agora é dado por

$$\mathcal{O}_K = (\cos \theta^s(\mathbf{x}) + \cos \theta^r(\mathbf{x})). \quad (4.35)$$

Observa-se que está é a correspondente representação para o caso acústico da representação (2.70).

Como no caso elástico, observamos que  $R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x}))$  depende da geometria de aquisição e que estamos supondo que  $\Sigma$  é relativamente suave. Observamos também, que a representação (4.34) para  $U^S$  não é recíproca com relação à fonte e ao receptor, i.e., se trocarmos a posição da fonte pela posição do receptor, não obtemos a mesma resposta.

Mediante a estes fatos, analisamos o coeficiente de reflexão introduzido por Deregowski & Brown (1983), o qual é recíproco com relação a fonte e ao receptor. A este coeficiente de reflexão chamamos de coeficiente de reflexão recíproco e ele tem a seguinte forma

$$R^R(\mathbf{x}, \theta_M(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x}) \cos \theta_M(\mathbf{x}) - \rho_0(\mathbf{x}) \sqrt{[v_0(\mathbf{x})/v(\mathbf{x})]^2 - 1 + \cos^2 \theta_M(\mathbf{x})}}{\rho(\mathbf{x}) \cos \theta_M(\mathbf{x}) + \rho_0(\mathbf{x}) \sqrt{[v_0(\mathbf{x})/v(\mathbf{x})]^2 - 1 + \cos^2 \theta_M(\mathbf{x})}}, \quad (4.36)$$

onde  $\theta_M(\mathbf{x}) = (\theta^s(\mathbf{x}) + \theta^r(\mathbf{x}))/2$  e  $\theta^r(\mathbf{x})$  é o ângulo que o raio que liga  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}^r$  faz com a normal a  $\Sigma$  no ponto  $\mathbf{x}$ . A aproximação de Kirchhoff com o coeficiente recíproco acima resulta na versão acústica da integral *Kirchhoff Recíproca*.

Observamos que no ponto de reflexão especular (i.e., no ponto onde vale a lei de Snell),  $\theta^s = \theta^r$  e, portanto,  $R^R(\mathbf{x}, \theta_M(\mathbf{x})) = R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}))$ . Como o ponto de reflexão especular é o ponto que traz a maior contribuição, então esperamos que as respostas das duas aproximações sejam bastante semelhantes.

## 4.7 Comparação entre as aproximações de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff

Nesta seção repetimos as considerações do Capítulo 3 para o caso acústico, i.e., comparamos a resposta do campo de onda espalhado obtida através das aproximações de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff para o meio acústico. Como estas aproximações são feitas considerando o mesmo fenômeno físico, então com as mesmas hipóteses a respeito do meio os resultados das duas aproximações deveriam ser iguais. Mostramos que no ponto de reflexão especular, os integrandos das respectivas integrais são idênticos.

Inicialmente, observamos que, correspondente à equação (2.72), podemos escrever ambas as integrais (4.29) e (4.34) na forma

$$U^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) \approx i\omega F(\omega) \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}^r) v_0(\mathbf{x}^r) \rho_0(\mathbf{x}^s) v_0(\mathbf{x}^s)} \\ \times \int_{\Sigma} \mathcal{K}_A(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} dS, \quad (4.37)$$

( $A = K$  ou  $BK$ ), onde a diferença é somente nos núcleos. Como no caso elástico anisotrópico, temos

$$\mathcal{K}_A(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) \mathcal{O}_{BK}(\mathbf{x}) \quad \text{para Born-Kirchhoff, e} \quad (4.38)$$

$$\mathcal{K}_A(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) \mathcal{O}_K(\mathbf{x}) \quad \text{para Kirchhoff,} \quad (4.39)$$

onde  $S(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{O}_{BK}$ ,  $R$  e  $\mathcal{O}_K$  são dados pelas equações (4.28), (2.57), (4.32) e (4.35), respectivamente. Como antes, chamamos  $\mathcal{K}_K = \mathcal{K}_K(\mathbf{x})$  de *núcleo de Kirchhoff* e  $\mathcal{K}_{BK} = \mathcal{K}_{BK}(\mathbf{x})$  de *núcleo de Born-Kirchhoff*.

Mostramos abaixo que  $\mathcal{K}_K$  e  $\mathcal{K}_{BK}$  são iguais no ponto de reflexão, uma vez que o coeficiente  $R$  esteja linearizado. Usando a hipótese que o meio tem contraste fraco, temos (veja o Apêndice C)

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \theta^s}{v_0^2(\mathbf{x})} - \frac{1}{v_0^2(\mathbf{x})} + \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}} \approx \frac{1}{v_0} \left[ \cos \theta^s + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \theta^s} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_0} - \frac{\Delta k}{k_0} \right) \right]. \quad (4.40)$$

Portanto

$$R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) \approx R^L(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) = \frac{1}{4} \left[ (1 - \tan^2 \theta^s) \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + (1 + \tan^2 \theta^s) \frac{\Delta k}{k_0} \right], \quad (4.41)$$

a qual pode ser rescrita

$$R^L(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) = \frac{1}{4 \cos^2 \theta^s} \left[ \cos 2\theta^s \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + \frac{\Delta k}{k_0} \right]. \quad (4.42)$$

Agora, substituindo (4.42) e (4.35) em (4.39), temos

$$\mathcal{K}_K(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4 \cos^2 \theta^s} \left[ \cos 2\theta^s \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + \frac{\Delta k}{k_0} \right] (\cos \theta^s(\mathbf{x}) + \cos \theta^r(\mathbf{x})). \quad (4.43)$$

Por outro lado, usando as equações (4.26) e (4.28), rescrevemos a equação (4.38) da seguinte forma

$$\mathcal{K}_{BK}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\Delta k(\mathbf{x})}{k_0(\mathbf{x})} + \frac{\Delta \rho(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x})} \cos \theta^{rs}(\mathbf{x}) \right] \frac{\cos \theta^s(\mathbf{x}) + \cos \theta^r(\mathbf{x})}{2(1 + \cos \theta^{rs}(\mathbf{x}))}. \quad (4.44)$$

No ponto de reflexão especular,  $\tilde{\mathbf{x}}$ , onde  $\theta = \theta^s = \theta^r$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_K(\tilde{\mathbf{x}}) &\approx \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \left[ \cos 2\theta \frac{\Delta \rho(\tilde{\mathbf{x}})}{\rho_0(\tilde{\mathbf{x}})} + \frac{\Delta k(\tilde{\mathbf{x}})}{k_0(\tilde{\mathbf{x}})} \right] (2 \cos \theta) \\ &= \mathcal{K}_{BK}(\tilde{\mathbf{x}}).\end{aligned}\tag{4.45}$$

Então vemos que no ponto de reflexão especular o núcleo de Kirchhoff linearizado é igual ao núcleo de Born-Kirchhoff.

Observa-se que a integral Born-Kirchhoff resulta direto quando se lineariza o coeficiente de reflexão recíproco  $R^R(\mathbf{x}, \theta_M(\mathbf{x}))$  ao invés do coeficiente de reflexão clássico  $R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x}))$ . Em outras palavras, os núcleos da aproximação Kirchhoff Recíproca após a linearização é igual ao da aproximação Born-Kirchhoff em todos os pontos do refletor. Esta propriedade justifica a escolha do nome Born-Kirchhoff para esta aproximação.

# Capítulo 5

## Algoritmos

Neste capítulo, apresentamos os algoritmos implementados para o cálculo numérico do campo espalhado segundo as integrais de Born (de volume), Kirchhoff Clássica, Born-Kirchhoff e Kirchhoff Recíproca (de superfície). Apresentamos também o algoritmo de Diferenças Finitas utilizado para o cálculo do mesmo campo. Como é usual em estudos de modelamento, os resultados obtidos por um esquema de Diferenças Finitas representam o padrão de comparação. Para possibilitar os cálculos numéricos nos recursos computacionais disponíveis, todos os modelos considerados consistem de dois meios acústicos homogêneos, separados por uma interface curva suave, com as fontes e os receptores dentro de um mesmo plano,  $y = 0$ . Além disso, a densidade será suposta constante e unitária nos dois meios, o contraste existindo apenas na velocidade. Todas as implementações foram realizadas em 3-D.

### 5.1 Integral de Born

Nesta seção, descrevemos o algoritmo utilizado na implementação da integral de Born, equação (4.23). Como estamos considerando a densidade constante, temos que  $\Delta\rho = 0$ . Portanto escrevemos a equação (4.23) da seguinte forma

$$U^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = F(\omega)\hat{U}(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s), \quad (5.1)$$

onde

$$\hat{U}(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = \int_{\Omega} \omega^2 \frac{\alpha(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})^2} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^r) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^s) dV. \quad (5.2)$$

Observamos que (5.2) não é precisamente (4.23). Mas se tomarmos  $\alpha(\mathbf{x}) = -\Delta k / (k_0 \rho_0)$  em (5.2), obtemos (4.23). A fórmula acima é a mesma de Bleistein et al. (1985). Além disso, observamos que a equação (5.1) é o produto de duas transformadas de Fourier e, portanto, para se obter a resposta no domínio do tempo, basta calcular a transformada inversa de cada uma e convoluir as duas. Isto é, basta calcular a transformada inversa de  $\hat{U}^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s)$  e convoluir com a função fonte  $f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ .

Para calcularmos a transformada inversa de  $\hat{U}(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s)$ , usamos a aproximação da função de Green em alta frequência,  $G(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}) \approx a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r) e^{i\omega T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r)}$  e aplicamos a transformada de Fourier no tempo na equação (5.2). Assim,

$$\hat{u}(\mathbf{x}^r, t; \mathbf{x}^s) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} -\frac{\alpha(\mathbf{x})}{v_0(\mathbf{x})^2} a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r) a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) \delta(t - T(\mathbf{x})) dV, \quad (5.3)$$

onde escrevemos  $T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s)$ , definido na equação (2.58), por  $T(\mathbf{x})$  para simplificar a notação.

Para discretizar a integral de volume (5.3), escrevemos  $\mathbf{x} = (x_i, y_j, z_k)$  com  $x_i = x_{min} + (i-1)\Delta x$ ,  $y_j = y_{min} + (j-1)\Delta y$ ,  $z_k = z_{min} + (k-1)\Delta z$ ,  $t_l = t_{min} + (l-1)\Delta t$ . Usando uma idéia de Santos e Symes (1995), aproximamos a "função"  $\delta$  de Dirac por

$$\delta(t) \approx \begin{cases} (\Delta t + t)/\Delta t^2, & -\Delta t \leq t \leq 0 \\ (\Delta t - t)/\Delta t^2, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Aplicando a regra de trapézios na integral da equação (5.3), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{I}(t_l) &= -\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \sum_{i,j,k} \frac{\alpha(x_i, y_j, z_k)}{v_0(x_i, y_j, z_k)^2} a((x_i, y_j, z_k); \mathbf{x}^s) a((x_i, y_j, z_k); \mathbf{x}^r) \\ &\quad \times [(1 - S_{i,j,k}) \delta_{l-J_{i,j,k}-1} + S_{i,j,k} \delta_{l-J_{i,j,k}-2}], \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

$$S_{i,j,k} = \frac{T(x_i, y_j, z_k) - t_{min}}{\Delta t} - J_{i,j,k}, \quad (5.7)$$

$$J_{i,j,k} = \text{Int} \left( \frac{T(x_i, y_j, z_k) - t_{min}}{\Delta t} \right), \quad (5.8)$$

e  $\text{Int}(\cdot)$  significa a parte inteira do número.

Usamos o esquema de Diferenças Finitas Centrais para aproximar a derivada de segunda ordem no tempo

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{I}(t_l) \approx \frac{\hat{I}(t_{l+1}) - 2\hat{I}(t_l) + \hat{I}(t_{l-1}))}{\Delta t^2}. \quad (5.9)$$

**Algoritmo** - Dados  $\mathbf{x}^s$ ,  $\mathbf{x}^r$  e  $f$ :

- . Calcule:  $\gamma = -\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}$ .
- . Para cada  $i, j, k$ :
  - . Defina:  $v(\mathbf{x})$ ,  $\alpha(\mathbf{x})$ .
  - . Calcule:  $T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)$ ,  $T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r)$ ,  $a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)$ ,  $a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r)$ .
  - . Calcule:  $J_{i,j,k}$  e  $S_{i,j,k}$ .
  - . Calcule:  $A = a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r)$ .
  - . Calcule:  $C = A \frac{\alpha(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})^2}$ .
  - . Na posição  $J_{i,j,k} + 1$  do traço, some  $(1 - S_{i,j}) \times C$ .
  - . Na posição  $J_{i,j,k} + 2$  do traço, some  $(S_{i,j}) \times C$ .
- . Multiplique este traço por  $\gamma$ .
- . Aplique o Operador de Diferenças Finitas no tempo a este traço.
- . Convolua o traço final com a fonte  $f$ .

Este processo é repetido para cada par fonte/receptor.

## 5.2 Integrais de Kirchhoff

Nesta seção descrevemos o algoritmo utilizado na implementação da integral de Kirchhoff. Por causa da identidade estrutural da integral de Born-Kirchhoff e da integral de Kirchhoff Recíproca, as implementações delas utilizam o mesmo algoritmo.

Podemos rescrever a representação (4.37) da seguinte forma

$$U^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) = F(\omega)\tilde{U}^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s), \quad (5.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{U}^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s) &= \int_{\Sigma} i\omega \sqrt{v_0(\mathbf{x}^r) v_0(\mathbf{x}^s)} \mathcal{K}_A(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) e^{i\omega T(\mathbf{x})} dS, \\ &(A = B, BK, R) \end{aligned} \quad (5.11)$$

e novamente, por simplificar a notação, escrevemos  $T(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) = T(\mathbf{x})$ . Esta é a representação de: Kirchhoff Clássico se  $\mathcal{K}_A$  é dado pela equação (4.39) com  $R$  dado na equação (4.32), Born-Kirchhoff quando  $\mathcal{K}_A$  é dado pela equação (4.38) e Kirchhoff Recíproca se  $\mathcal{K}_A$  dado pela equação (4.39) com  $R$  substituído por  $R^R$  definido em (4.36).

Aplicando a transformada de Fourier no tempo na equação (5.11), obtemos a transformada inversa de  $\tilde{U}^S(\mathbf{x}^r, \omega; \mathbf{x}^s)$

$$\tilde{u}^S(\mathbf{x}^r, t; \mathbf{x}^s) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \sqrt{v_0(\mathbf{x}^r) v_0(\mathbf{x}^s)} \mathcal{K}_A(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}, \mathbf{x}^s) \delta(t - T(\mathbf{x})) dS. \quad (5.12)$$

Suponhamos que  $\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 | z = g(x, y)\}$ , onde  $g$  é uma função suave. Aplicando a mudança de coordenadas em (5.12), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{u}^S(\mathbf{x}^r, t; \mathbf{x}^s) &= \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\mathcal{A}} \sqrt{v_0(\mathbf{x}^r) v_0(\mathbf{x}^s)} a(\mathbf{x}^r, (x, y, g(x, y)), \mathbf{x}^s) \\ &\quad \times \mathcal{K}_A(x, y, g(x, y)) \delta(t - T(x, y, g(x, y))) \\ &\quad \times \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $\mathcal{A} = g^{-1}(\Sigma)$  descreve a abertura considerada da integração (idealmente  $[-\infty, \infty]$  em  $x$  e  $y$ ).

Para calcularmos a integral (5.13) numericamente, usamos o mesmo esquema citado anteriormente. Suponhamos que a malha é uniforme,  $x_i =$

$x_{min} + (i - 1)\Delta x$ ,  $y_j = y_{min} + (j - 1)\Delta y$ ,  $z = g(x_i, y_j)$  e  $t_l = t_{min} + (l - 1)\Delta t$ ,  $i, j, l \geq 1$  e aproximamos a “função”  $\delta$  de Dirac como em (5.4). Aplicando a regra do trapézio na integral da equação (5.13), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t_l) &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{j,i} a(\mathbf{x}^r, (x_i, y_j, g(x_i, y_j)), \mathbf{x}^s) \mathcal{K}_A(x_i, y_j, g(x_i, y_j)) \\ &\quad \times [(1 - S_{i,j})\delta_{l-J_{i,j}-1} + S_{i,j}\delta_{l-J_{i,j}-2}] \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde

$$S_{i,j} = \frac{T(x_i, y_j, g(x_i, y_j)) - t_{min}}{\Delta t} - J_{i,j}, \quad (5.15)$$

$$J_{i,j} = \text{Int} \left( \frac{T(x_i, y_j, g(x_i, y_j)) - t_{min}}{\Delta t} \right), \quad (5.16)$$

e  $\delta_j$  está definido em (5.6).

Novamente, usamos o esquema de diferenças finitas centrais para aproximar a derivada de primeira ordem no tempo

$$\frac{d}{dt} \tilde{I}(t_l) \approx \frac{\tilde{I}(t_{l+1}) - \tilde{I}(t_{l-1}))}{2\Delta t}. \quad (5.17)$$

**Algoritmo** - Dados  $\mathbf{x}^s$ ,  $\mathbf{x}^r$  e  $f$ :

- . Calcule:  $\zeta = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$
- . Para cada  $i, j$ :
  - . Calcule:  $T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s), T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r), a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s), a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r), \eta, R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x})), S(\mathbf{x}), \nabla T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s), \nabla T(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r), g_x, g_y$ .
  - . Calcule:  $J_{i,j}$  e  $S_{i,j}$ .
  - . Calcule:  $\text{Ref} = \mathcal{K}_A \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$
  - . Calcule:  $A = a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) a(\mathbf{x}; \mathbf{x}^r)$ .
  - . Calcule:  $C = A \times \text{Ref}$ .

- . Na posição  $J_{i,j} + 1$  do traço, some  $(1 - S_{i,j}) \times C$ .
- . Na posição  $J_{i,j} + 2$  do traço, some  $(S_{i,j}) \times C$ .
- . Multiplique este traço por  $\zeta$ .
- . Aplique o operador (5.17) a este traço.
- . Convolua o traço final com a fonte  $f$ .

Este processo é repetido para cada par fonte/receptor. Observamos que apesar do algoritmo acima calcular  $R$  e  $S$ , devemos ter um elemento de entrada no programa para escolher qual dos dois. No caso da escolha ser  $R$  ainda devemos ter a escolha para o coeficiente de reflexão clássico ou o recíproco.

### 5.3 Diferenças Finitas

Todos os métodos descritos referem-se a soluções aproximadas do problema de interesse. Para comparar as propriedades destas soluções, necessitamos ter acesso, senão à solução exata, pelo menos a uma garantida aproximação da mesma. A não ser em modelos muito simples, a equação da onda tridimensional em meios não homogêneos, não admite solução exata em forma analítica fechada. Desta forma, um método numérico é requerido para sua determinação. Em nosso caso, o método numérico que melhor aproxima a solução analítica é o conhecido Método das Diferenças Finitas. Este método converge para a a solução exata quando o esquema utilizado obedece a condição Courant-Friedrichs-Lewy (condição de estabilidade). Neste trabalho, não somente usamos as condições de estabilidade apresentadas em Mufti et al. (1996), como também o esquema centrado de quarta ordem no espaço e centrado de segunda ordem no tempo. Essa escolha se deve ao fato de que, em alguns experimentos numéricos, observamos que o esquema de segunda ordem no tempo e no espaço apresenta uma dispersão numérica significativamente maior. Também foi mostrado em Alford et al. (1974) que os esquemas centrados de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço aumentam a precisão significativamente.

O Método de Diferenças Finitas apresenta um alto custo computacional devido a grande quantidade de memória que tem de ser utilizada. Com

efeito, para o caso geral, onde há não homogeneidade dos parâmetros nas três dimensões espaciais, a cada passo no tempo temos que armazenar dados e cálculos em grandes malhas tridimensionais, ocupando enorme memória computacional.

Uma alternativa bem conhecida de contornar este problema, consiste em limitar a variação dos parâmetros do meio ao plano  $xz$ , considerando ainda fontes e receptores num plano, digamos  $z = 0$ . Embora apresentado na sua total generalidade, implementação do Método de Diferenças Finitas utilizada nesta tese será restrita a modelos que não dependem da direção  $y$ . Assim, ao invés de guardarmos a velocidade em uma malha tridimensional, guardamos em uma malha bidimensional, com conseqüente economia de memória computacional.

### Estratégia de Implementação

No nosso algoritmo de Diferenças Finitas consideramos uma malha uniforme em cada direção. O ponto  $P$  com coordenadas  $(x, y, z)$  é descrito por  $x_i = x_{min} + i \Delta x$ ,  $y_j = y_{min} + j \Delta y$  e  $z_k = z_{min} + k \Delta z$ , onde  $i, j, k$  são os índices ao longo de  $x, y, z$ , respectivamente. Desta forma, o ponto  $P$  será indicado por  $P_{i,j,k}$ . Também o tempo  $t$ , terá a seguinte forma  $t_l = t_{min} + l \Delta t$ .

Como vimos no Capítulo 4, podemos modelar a propagação de ondas acústicas pela equação (4.3), a qual, para densidade constante e unitária, se escreve

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}/v^2 + f(t)\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s), \quad (5.18)$$

onde  $u = u(x, y, z)$  é a pressão acústica,  $v = v(x, y, z)$  é a velocidade de propagação do meio e  $f(t)$  é a função fonte localizada em  $(x_s, y_s, z_s)$ .

A fórmula do Operador de Diferenças Finitas centrais de quarta ordem para o primeiro termo do lado direito da equação (5.18) é

$$(u_{xx})_{i,j,k}^l = \left[ -u_{i-2,j,k}^l + 16(u_{i-1,j,k}^l + u_{i+1,j,k}^l) - 30u_{i,j,k}^l - u_{i+2,j,k}^l \right] / [12(\Delta x)^2] + O[(\Delta x)^4]. \quad (5.19)$$

Os outros termos com derivadas parciais no espaço podem ser expressos de forma análoga. Para a derivada no tempo, temos a relação de diferença central de segunda ordem

$$(u_{tt})_{i,j,k}^l = (u_{i,j,k}^{l-1} - 2u_{i,j,k}^l + u_{i,j,k}^{l+1}) / [(\Delta t)^2] + O[(\Delta t)^2]. \quad (5.20)$$

Para o termo de fonte, escrevemos

$$[f(t)]_{i,j,k}^l = \begin{cases} f(t^l), & \text{em } i = i_s, j = j_s, k = k_s, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (5.21)$$

Substituindo (5.19), (5.20) e (5.21) em (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} u_{i,j,k}^{l+1} = & -\frac{1}{12} \left\{ a_{i,j,k} \left[ u_{i-2,j,k}^l + u_{i+2,j,k}^l - 16 \left( u_{i-1,j,k}^l + u_{i+1,j,k}^l \right) + 30u_{i,j,k}^l \right] \right. \\ & + b_{i,j,k} \left[ u_{i,j-2,k}^l + u_{i,j+2,k}^l - 16 \left( u_{i,j-1,k}^l + u_{i,j+1,k}^l \right) + 30u_{i,j,k}^l \right] \\ & \left. + e_{i,j,k} \left[ u_{i,j,k-2}^l + u_{i,j,k+2}^l - 16 \left( u_{i,j,k-1}^l + u_{i,j,k+1}^l \right) + 30u_{i,j,k}^l \right] \right\} \\ & + 2u_{i,j,k}^l - u_{i,j,k}^{l-1} + f_{i,j,k}^l, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} &= (v_{i,j,k} \Delta t / \Delta x)^2, \\ b_{i,j,k} &= (v_{i,j,k} \Delta t / \Delta y)^2, \\ e_{i,j,k} &= (v_{i,j,k} \Delta t / \Delta z)^2, \end{aligned} \quad (5.23)$$

e  $v_{i,j,k}$  denota a velocidade em  $(i, j, k)$ . Lembramos que apesar de implementarmos o Método de Diferenças Finitas para qualquer campo de velocidade, usamos modelos que não dependem da direção  $y$ . Isto foi necessário para economizar memória computacional.

Para iniciar o processo de propagação, fazemos

$$u_{i,j,k}^0 = 0, \quad \forall(i, j, k). \quad (5.24)$$

As condições de fronteira que usamos foram

$$\begin{aligned} u_{i,j,0}^l &= 0, \quad \forall(i, j, l), \\ u_{i,0,k}^l &= 0, \quad \forall(i, k, l), \\ u_{0,j,k}^l &= 0, \quad \forall(j, k, l). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Como o propósito desta tese é fazer uma comparação do campo de onda espalhado obtido através do Método de Diferenças Finitas com o obtido usando as aproximações de Born, de Born-Kirchhoff, de Kirchhoff e Kirchhoff

Recíproca, então escolhemos as condições de fronteira acima e não a condição com fronteira absorvente (veja Mufti, 1990).

### Dispersão e estabilidade numérica

Suponhamos que  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ . Então o maior valor de  $h$ , que pode ser usado sem causar excesso de dispersão de energia, é dado pela condição (veja Mufti et al., 1996)

$$h \leq \frac{c_{min}}{\vartheta f_{max}}, \quad (5.26)$$

onde  $c_{min}$  é o mínimo das velocidades usadas no modelo,  $f_{max}$  é a frequência máxima nos dados,  $\vartheta$  é o número de amostras por mínimo de comprimentos de ondas  $\lambda_{min}$ , dado por  $\lambda_{min} = c_{min}/f_{max}$ .

Além disso, para um dado valor na malha associada ao domínio espacial, o sistema torna-se numericamente instável a menos que o intervalo de tempo satisfaça a condição

$$\Delta t \leq \frac{b h}{c_{max}}, \quad (5.27)$$

onde  $c_{max}$  representa o máximo valor das velocidades do modelo e  $a$  é uma constante que depende da dimensão do espaço. Mufti (1990) mostrou que para problemas tridimensionais  $b = 0.5$  e o valor ótimo de  $\vartheta$  é 3.5. Cabe ressaltar que isto só é válido, em princípio, para o esquema que estamos considerando, i.e., quarta ordem centrado no espaço e segunda ordem centrado no tempo.

# Capítulo 6

## Experimentos Numéricos

Neste capítulo, descrevemos alguns experimentos numéricos realizados em certos modelos escolhidos para mostrar vantagens e desvantagens das aproximações discutidas teoricamente nos capítulos anteriores. Em praticamente todos os casos de interesse, não existe solução exata analítica que possa ser utilizada para efetiva avaliação dos diferentes métodos apresentados. Por este motivo, o Método de Diferenças Finitas é tradicionalmente a escolha adequada para padrão de comparação. Esta escolha é justificada pelo fato que este método trata do problema na sua formulação exata e o erro é devido somente a avaliação numérica. O Método de Diferenças Finitas, para sua correta utilização, deve ser calibrado através de um exemplo, mesmo bem simples, onde a solução exata pode ser calculada analiticamente. Em nosso trabalho utilizamos o modelo de dois meios homogêneos separados por uma interface plana. Para este caso, a solução exata pode ser escrita como uma integral fechada avaliada numericamente com boa precisão (Santos et al., 1996). O Método de Diferenças Finitas apresentou erro percentual inferior a 2% relativo a solução exata, portanto uma calibração aceitável. As implementações das demais aproximações apresentaram erros em torno de 4%.

A implementação do Método de Diferenças Finitas para a equação da onda tridimensional completa foi realizada numa SGI PowerChallenge L (memória: 768 MByte, Processador:  $4 \times 75\text{MHz}$  R8000, peak MFlops:  $4 \times 300$ , Diskarray: 16GByte + 8GByte + 23 GByte). Tendo em vista a melhor explicitação teórica (vide Capítulo 4), optamos por realizar os experimentos numéricos no caso acústico.

Conforme indicado no Capítulo 5, uma grande dificuldade do Método de

Diferenças Finitas é a sua enorme demanda de esforço computacional. Ainda seguindo as observações descritas no referido capítulo, esta demanda pode ser minorada pela escolha de modelos onde há variação de parâmetros na direção  $y$ , estando fontes e receptores “em plano”, i.e., num plano  $xz$  (por exemplo,  $z = 0$ ). Esta foi a escolha que optamos em todos os experimentos. Os resultados, mesmo considerando esta restrição, fornecem uma boa ilustração da aplicação dos diferentes métodos e permitem uma comparação entre os mesmos.

Em todos os modelos investigados foi usada como fonte o pulso de Küpper (veja Figura 6 no domínio do tempo e Figura 6.2 no domínio da frequência), também chamada fonte Fuchs-Müller (veja, Küpper, 1958). A escolha da fonte Küpper se deve à malha grosseira que teve que ser usada por causa do enorme requerimento de memória computacional que o Método de Diferenças Finitas exige. Com esta malha grosseira, outras fontes apresentadas na literatura apresentam maior dispersão numérica. Uma vez que os modelos

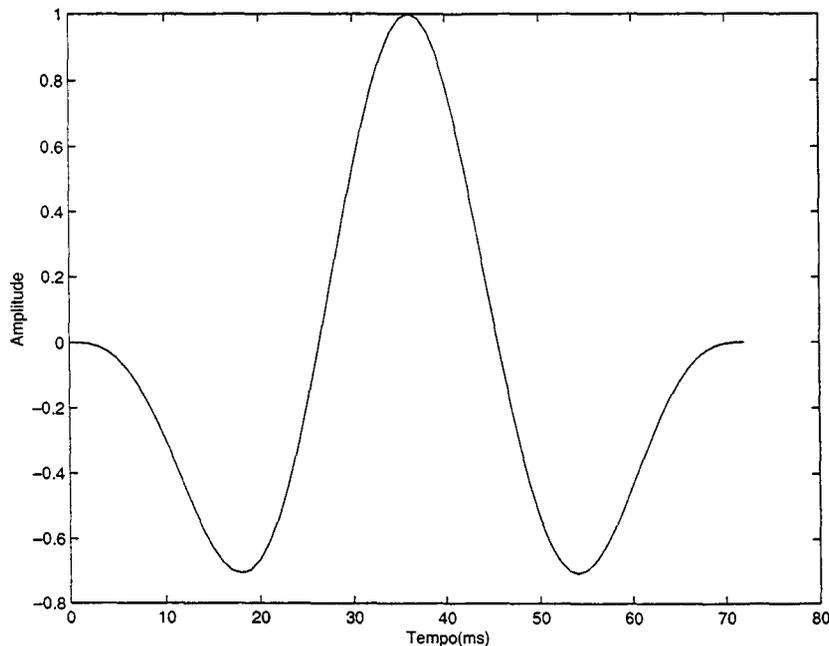


Figura 6.1: Pulso de Küpper no domínio do tempo

escolhidos não dependem da direção  $y$ , mostramos no que segue em todos os casos o corte no plano  $y = 0$ .

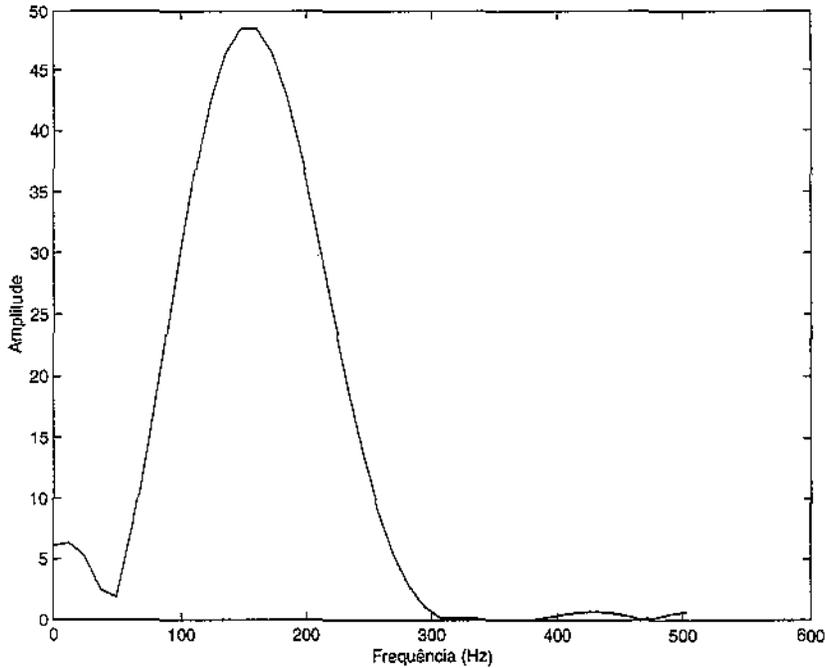


Figura 6.2: Pulso de Küpper no domínio da frequência

## 6.1 Modelo 1

O Modelo 1 consiste de dois semi-espacos homogêneos, separados por um refletor plano localizado a 550 m de profundidade (veja Figura 6.3). Como já foi mencionado no capítulo anterior, estamos supondo que a densidade seja unitária em todos os modelos. A velocidade acima do refletor é  $v_0 = 3000$  m/s e abaixo é  $v_1 = 3500$  m/s. Portanto, o contraste relativo é de 16,67% em  $v$  ou de 36,11% em  $k$ . Aqui foi escolhida uma configuração de tiro comum (“common shot”) em geometria “split spread”. Trabalhamos na unidade de metros, a fonte tem as coordenadas  $(300,0,0)$  e os receptores tem as coordenadas  $(20r, 0, 0)$ , onde  $r$  varia de 0 até 30 em intervalos de 1. A malha usada foi  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10$  m e a amostragem temporal foi  $\Delta t = 1$  ms para todos os modelamentos realizados.

### Análise Numérica

Os resultados dos modelamentos numéricos aplicados ao Modelo 1 se encontram nas Figuras 6.4 (solução exata) e 6.5 (soluções aproximadas).

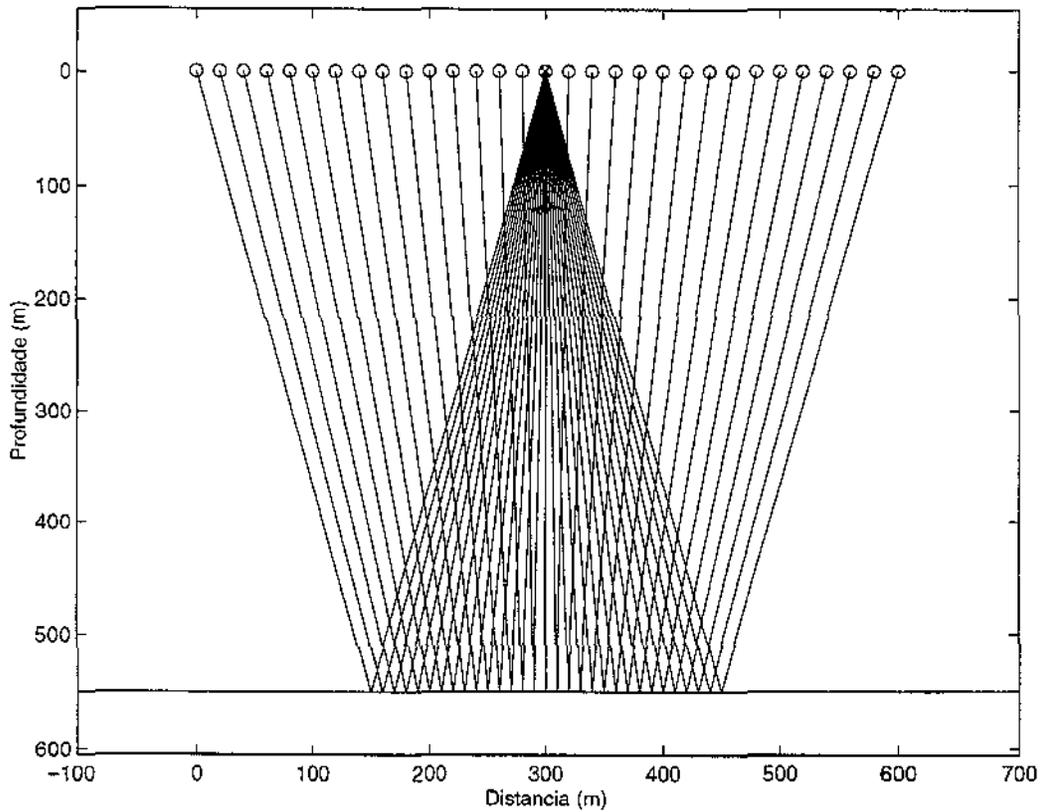


Figura 6.3: Refletor, geometria de aquisição e família de raios do Modelo 1.

Antes de investigar a qualidade da aproximação, comparamos o tempo de máquina (CPU) utilizado para o modelamento. As aproximações de Kirchhoff Clássica, Kirchhoff Recíproca e o Born-Kirchhoff precisaram na média de 9 segundos, e a de Born demorou 11 minutos e o Método de Diferenças Finitas levou 12 horas e 52 minutos. Os tempos dos programas para a Teoria dos Raios e para a solução analítica não são comparáveis, porque estes foram implementados em linguagens diferentes.

Nas Figuras 6.4 e 6.5 observamos que o campo refletido modelado tem o mesmo tempo de chegada em todas as figuras, mas as amplitudes são diferentes. Para uma análise de amplitudes mais quantitativa, plotamos na Figura 6.6 o erro relativo das amplitudes obtidas pelas aproximações integrais e pelo Método de Diferenças Finitas em comparação com as obtidas

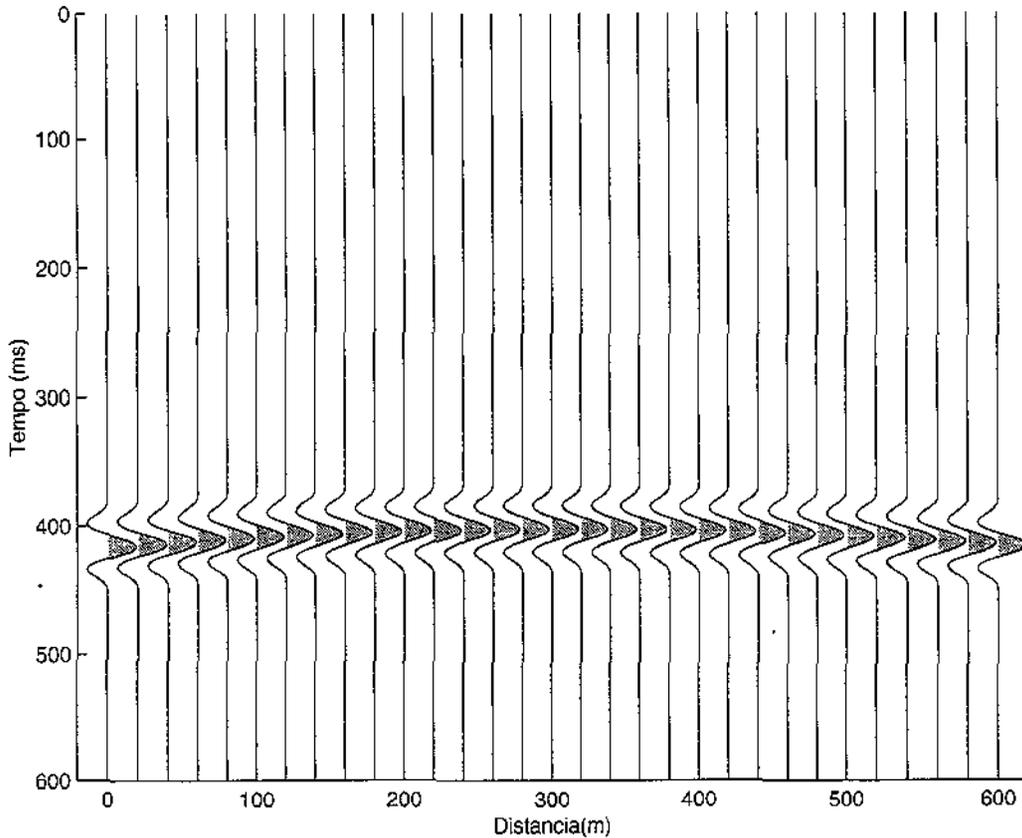


Figura 6.4: Sismogramas obtido para o Modelo 1 utilizando a Solução Analítica.

utilizando a solução analítica. Claramente vemos que o Método de Diferenças Finitas apresenta o melhor resultado, superestimando as amplitudes por 1% a 2%. Todas as outras aproximações subestimam as amplitudes, chegando a ter erros superiores a 4%.

Diferente do que é esperado para propagação de ondas planas e um refletor plano, a Teoria dos Raios neste caso não apresentou o melhor resultado. Este fato acontece porque a fonte utilizada nos nossos modelos é pontual e a distância ao refletor é relativamente pequena. Portanto a aproximação com o coeficiente de reflexão de uma onda plana não é boa. Porém, para encontrar o coeficiente de reflexão para uma onda esférica, devemos resolver um sistema não trivial de Equações Diferenciais Parciais. Born-Kirchhoff,

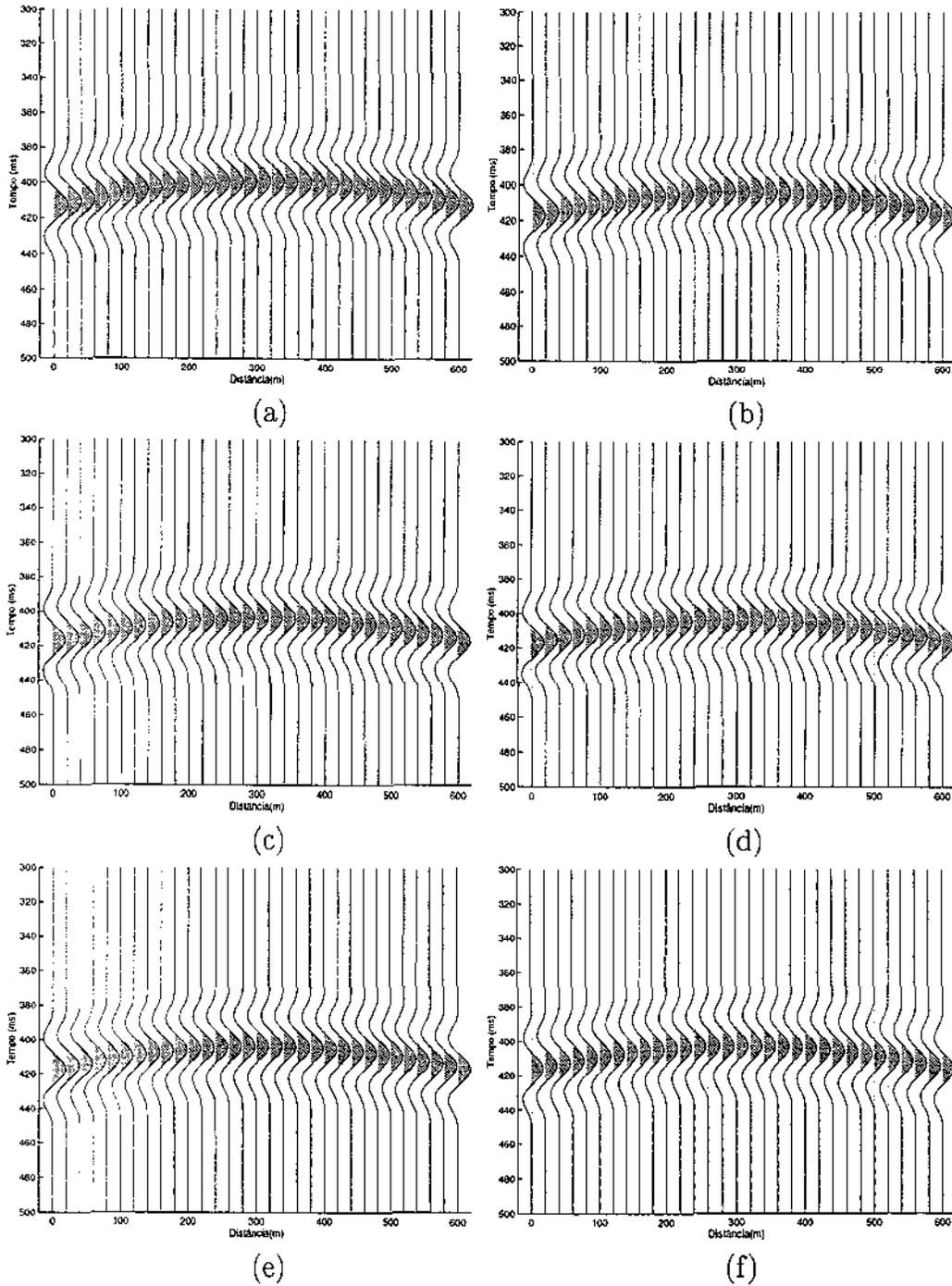


Figura 6.5: Sismogramas obtidos para o Modelo 1 utilizando: (a) Método de Diferenças Finitas; (b) Aproximação de Kirchhoff Clássica; (c) Aproximação de Born-Kirchhoff; (d) Aproximação de Kirchhoff Recíproca; (e) Teoria dos Raios; (f) Aproximação de Born.

Kirchhoff Recíproca e Teoria dos Raios apresentaram resultados comparáveis, os quais variam de 3.4% a 5.5%. Já o Kirchhoff Clássica apresentou erro relativo variando entre 5% e 6%. Born é o que apresentou o pior resultado pois o seu erro está variando entre 11.5% e 14%.

Como o resultado obtido usando o Método de Diferenças Finitas foi o melhor e além disso, ele converge para a solução exata quando as condições de estabilidade e consistência são satisfeitas (Mufti, 1990; Strikwerda, 1989), vamos utilizá-lo como padrão nos próximos modelos para fazer a comparação com as aproximações discutidas neste texto.

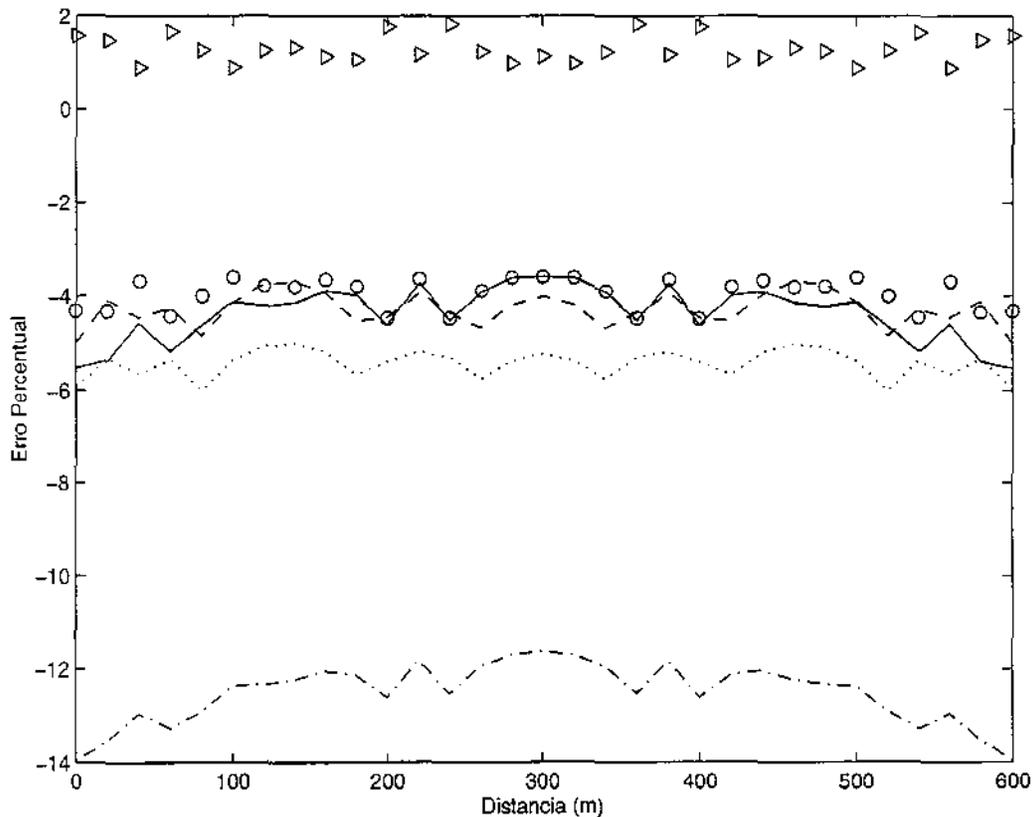


Figura 6.6: Erro relativo em comparação com a Solução Exata. Método de Diferenças Finitas: triângulos; Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

## 6.2 Modelo 2

O Modelo 2 (veja Figura 6.7) é dado por um refletor fracamente curvado localizado entre 160 m e 180 m de profundidade, o qual tem a parametrização  $\Sigma = \{(x, y, 700 - 300 \exp(-(x - 800)^2/10^4)) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Consideramos novamente uma configuração de tiro comum. A fonte está localizada em  $(0, 0, 0)$  e os receptores estão localizados em  $(100 + 20r, 0, 0)$ , com  $r = 0, 1, \dots, 45$ . O contraste é o mesmo do Modelo 1, i.e., a velocidade acima do refletor é  $v_0 = 3000$  m/s e abaixo é  $v_1 = 3500$  m/s. A malha usada para o modelamento pelas aproximações de Born, Born-Kirchhoff, Kirchhoff Recíproca, Teoria dos Raios e pelo Método de Diferenças Finitas foi novamente  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10$  m,  $\Delta t = 1$  ms.

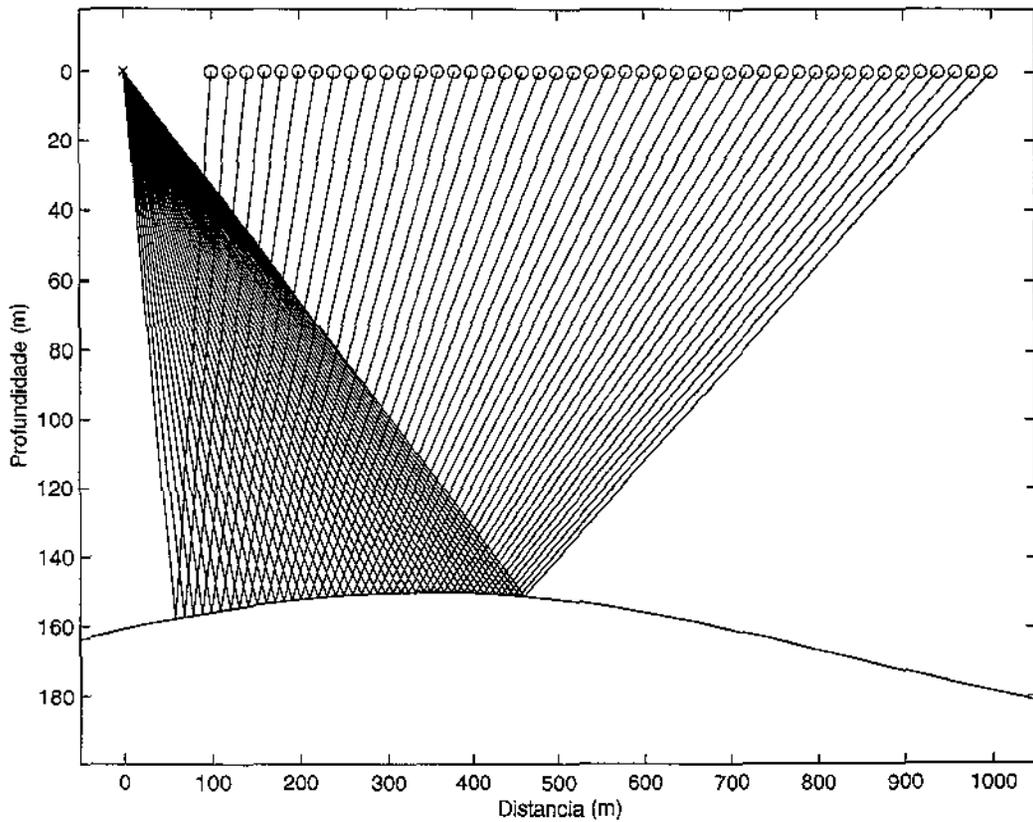


Figura 6.7: Refletor, geometria de aquisição e família de raios do Modelo 2.

Para a aproximação de Kirchhoff Clássica foi usado  $\Delta x = \Delta y = 2$  m e  $\Delta t = 1$  ms. Diminuimos as distâncias no caso da aproximação Kirchhoff Clássica, pois usando a malha mais grosseira, este modelamento apresentou muito ruído numérico.

### **Análise Numérica**

Os resultados dos modelamentos numéricos aplicados ao Modelo 2 se encontram nas Figuras 6.8(a) (Método de Diferenças Finitas), 6.8(b) (Kirchhoff Clássica), 6.8(c) (Born-Kirchhoff), 6.8(d) (Kirchhoff Recíproca), 6.8(e) (Teoria dos Raios) e 6.8(f) (Born).

Com o Modelo 2, o tempo de CPU para rodar as aproximações de Born-Kirchhoff e Kirchhoff Recíproca foi na média de 23 segundos, a de Born 19 minutos, Kirchhoff Clássica 8 minutos e 47 segundos e o Método de Diferenças Finitas 9 horas e 17 minutos. Cabe aqui ressaltar que Kirchhoff Clássica levou mais tempo que as outras aproximações do tipo Kirchhoff porque tivemos que refinar a malha por causa do ruído.

Novamente observamos que a parte cinemática do modelamento é igualmente boa em todas as aproximações. Na amplitude se observa maiores diferenças. Nota-se que próximo de 480 m temos o ponto que corresponde ao ângulo crítico. Vemos nas Figuras 6.8(d) e 6.8(e) que próximo a este ponto a amplitude de Kirchhoff Recíproca e de Teoria dos Raios fica maior que nos outros. Isto pode ser melhor visto na Figura 6.9, a qual mostra o erro dos picos das amplitudes de cada sismograma. A Teoria dos Raios próximo a este ponto chega a atingir um erro de 115% quando comparado ao Método de Diferenças Finitas. Kirchhoff Recíproca ainda tem um erro de 67%. Na região do ângulo crítico vemos que Kirchhoff Clássica apresenta o melhor resultado (veja Figura 6.9). Analisando Kirchhoff Clássica vemos que há registro de perda na amplitude quando os receptores estão muito afastados da fonte, veja Figuras 6.8(a), 6.8(b) e 6.9. Já Born apresenta um erro inferior a 5% na amplitude para receptores próximos da fonte (menos de 160 m da fonte) e para receptores longe da fonte, ele subestima a amplitude em mais de 20%. O que apresenta melhor resultado na média é Born-Kirchhoff pois apresenta maior domínio onde as amplitudes apresentam menores erros.

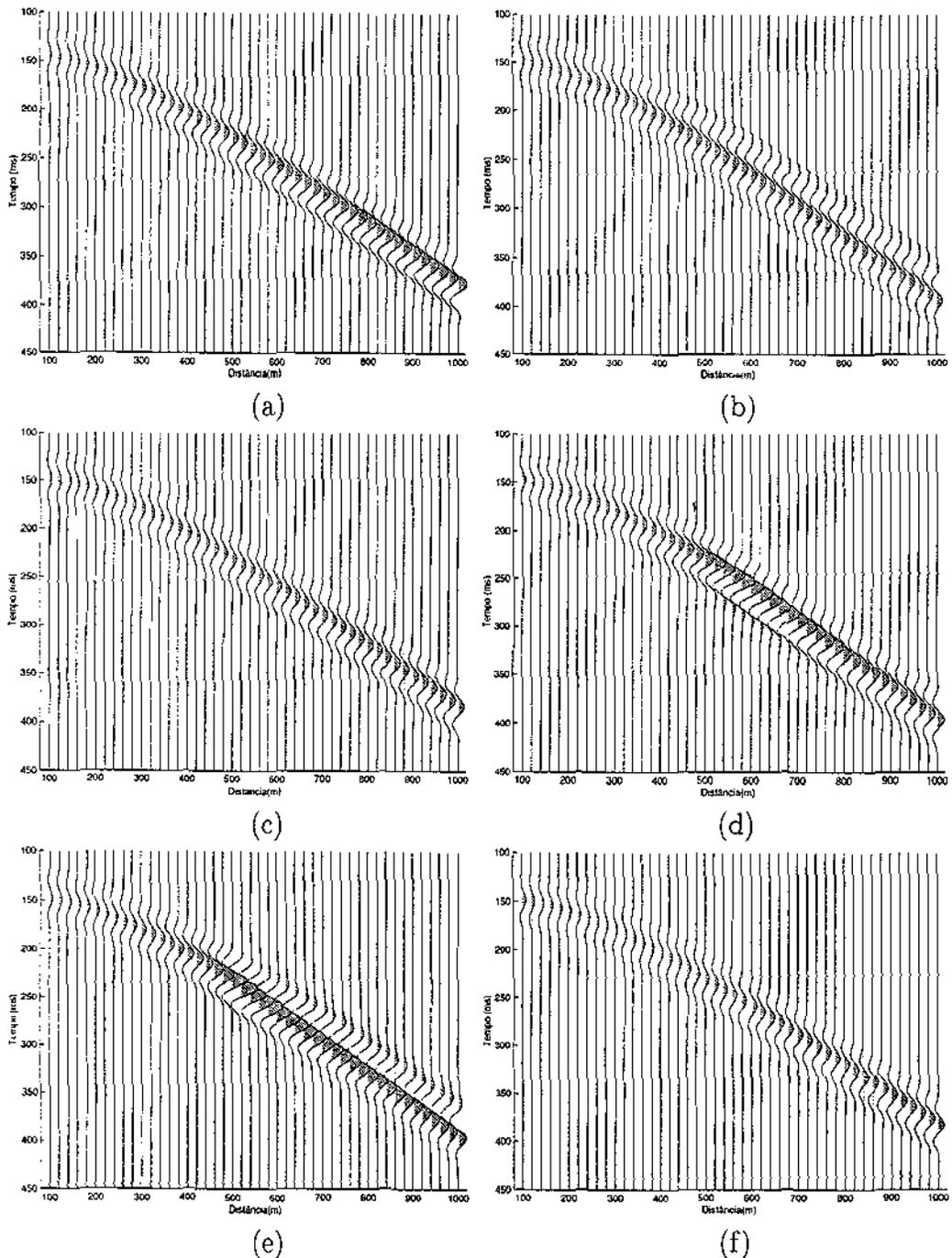


Figura 6.8: Sismogramas obtidos para o Modelo 2 utilizando: (a) Método de Diferenças Finitas; (b) Aproximação de Kirchhoff Clássica; (c) Aproximação de Born-Kirchhoff; (d) Aproximação de Kirchhoff Recíproca; (e) Teoria dos Raios; (f) Aproximação de Born.

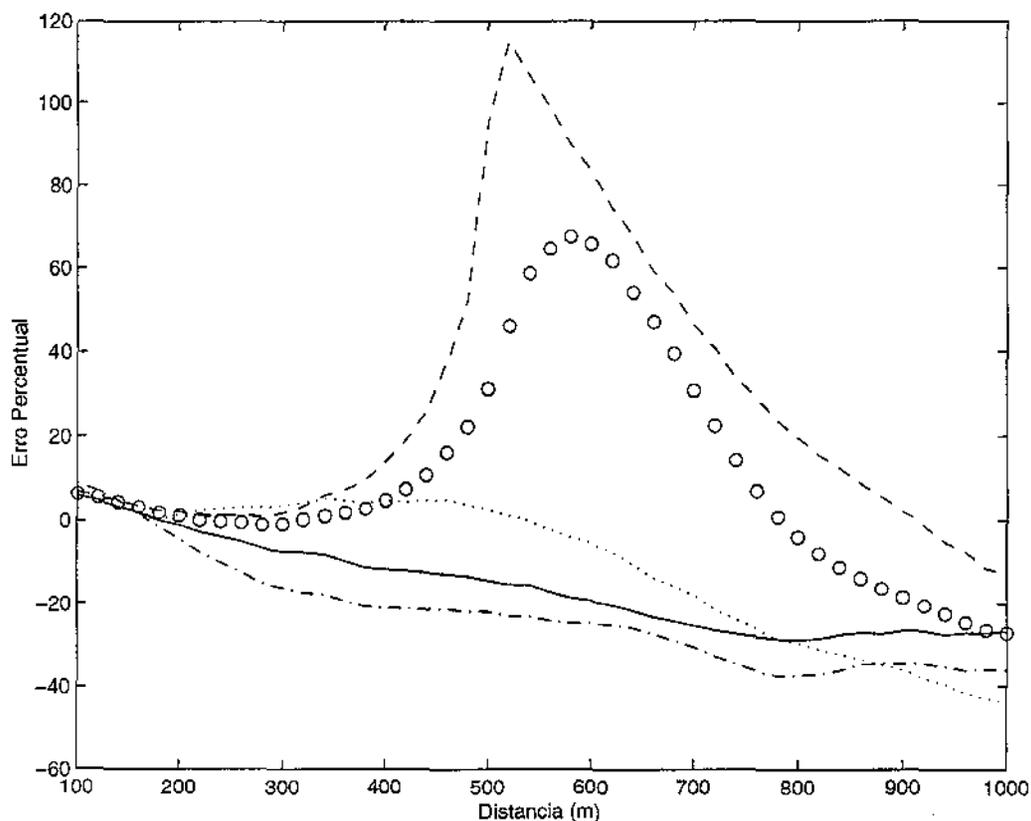


Figura 6.9: Erro relativo em comparação com o Método de Diferenças Finitas. Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Recíproca: círculos; Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

### 6.3 Modelo 3

O Modelo 3 (veja Figura 6.10) consiste de um refletor anticlinal parametrizado por  $\Sigma = \{(x, y, 500 + 250 \exp(-(x - 800)^2/10^5)) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . A geometria de aquisição é a de tiro comum em geometria “split spread” com a fonte localizada na posição  $(800, 0, 0)$  e os receptores localizados em  $(40r, 0, 0)$ , e  $r = 0, 1, \dots, 40$ . Ainda igual aos modelos anteriores, a velocidade acima do refletor é  $v_0 = 3000$  m/s e abaixo do refletor é  $v_1 = 3500$  m/s. A malha utilizada foi de  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10$ m e  $\Delta t = 1$ ms. Observa-se que neste caso não foi necessário refinar a malha para Kirchhoff Clássica. Este tipo de

geometria do refletor junto com a geometria de aquisição considerada neste exemplo é um importante teste para todas as aproximações porque o campo de onda refletido passou por uma cáustica.

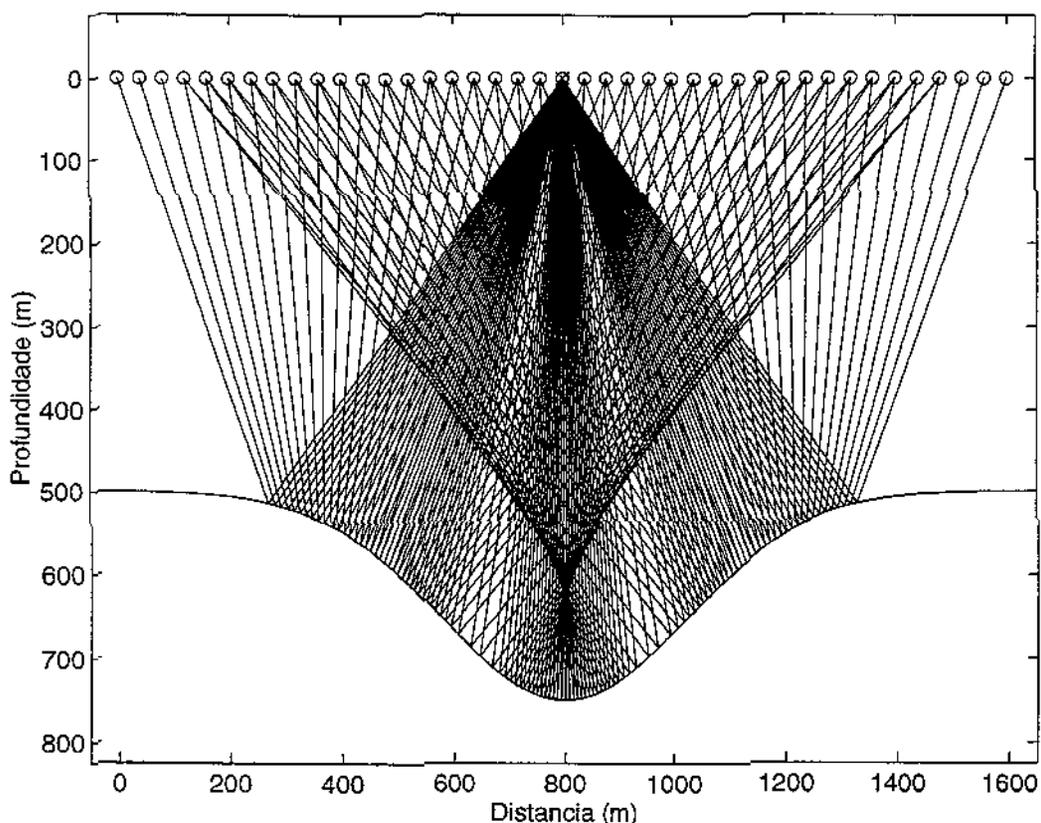


Figura 6.10: Refletor, geometria de aquisição e família de raios do Modelo 3.

### Análise Numérica

Os resultados dos modelamentos numéricos aplicados ao Modelo 3 se encontram nas Figuras 6.11(a) (Método de Diferenças Finitas), 6.11(b) (Kirchhoff Clássica), 6.11(c) (Born-Kirchhoff), 6.11(d) (Kirchhoff Recíproca), 6.11(e) (Teoria dos Raios) e 6.11(f) (Born).

O tempo de CPU para as aproximações de Kirchhoff foi na média 32 segundos, para Born foi 37 minutos e para o Método de Diferenças Finitas 24 horas e 24 minutos.

Observamos que na primeira chegada Teoria dos Raios, Kirchhoff

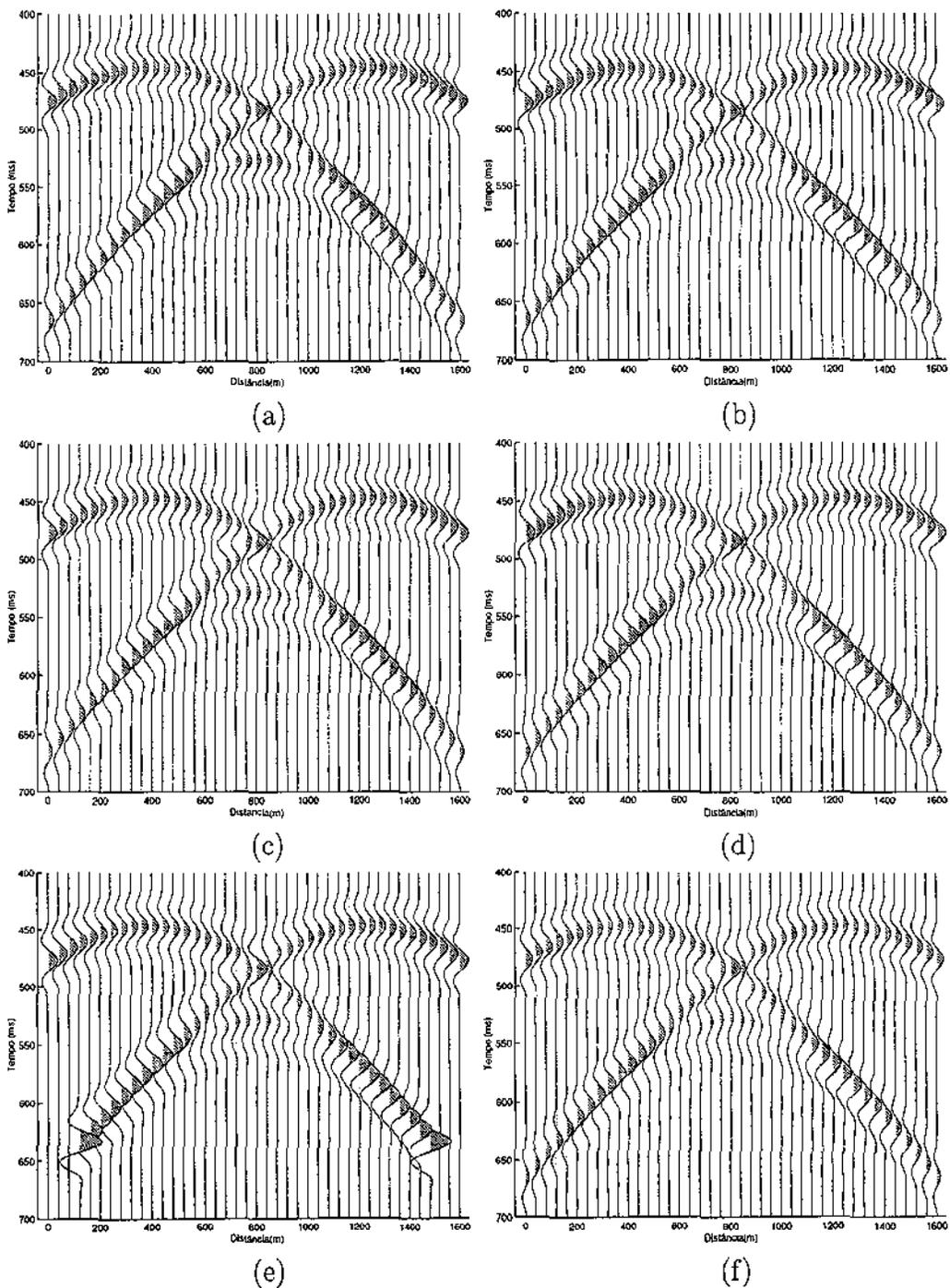


Figura 6.11: Sismogramas obtidos para o Modelo 3 utilizando: (a) Método de Diferenças Finitas; (b) Aproximação de Kirchhoff Clássica; (c) Aproximação de Born-Kirchhoff; (d) Aproximação de Kirchhoff Recíproca; (e) Teoria dos Raios; (f) Aproximação de Born.

Clássica, Kirchhoff Recíproca e Born-Kirchhoff não apresentam muita variação na amplitude, i.e., as amplitudes para a primeira chegada estão na mesma faixa. Também podemos ver na Figura 6.12 que para registro em receptores perto da fonte, numa vizinhança menor que 400 m, o erro da amplitude dessas aproximações não ultrapassa 6%. A partir da vizinhança superior a 400 m, as amplitudes já apresentam erros com quase 12%. Nesta mesma figura podemos ver que Born apresenta amplitudes pequenas demais.

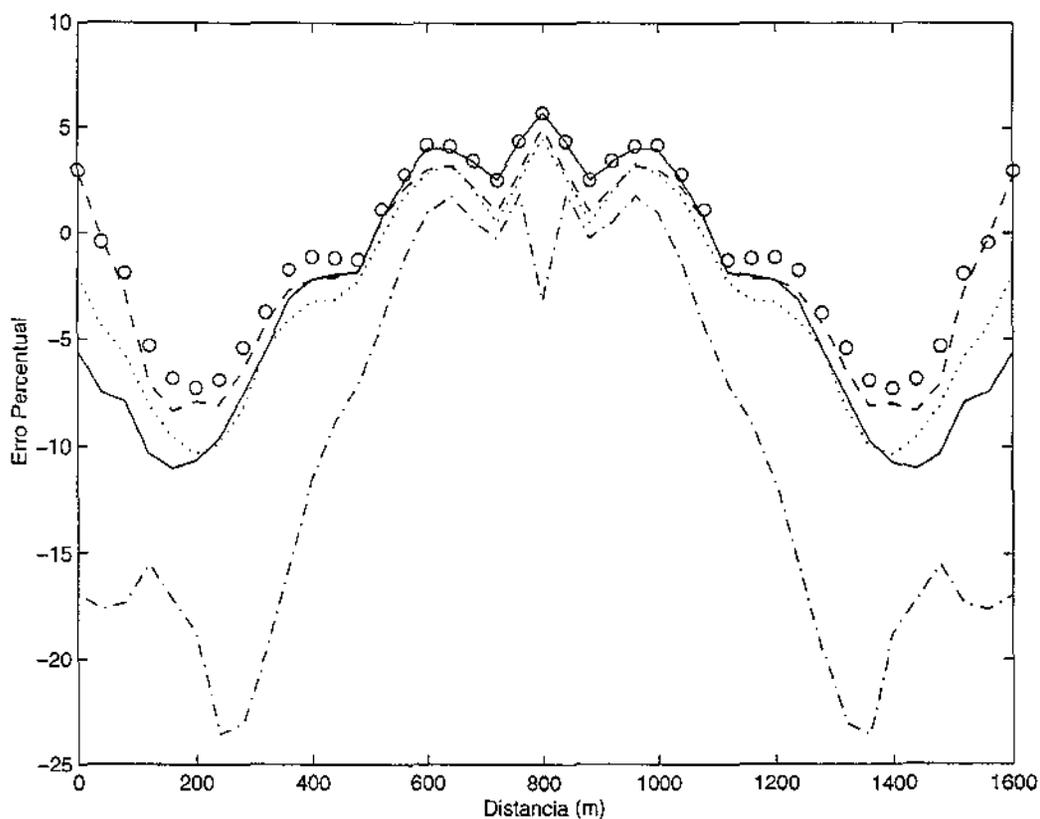


Figura 6.12: Erro relativo das amplitudes da primeira chegada em comparação com o Método de Diferenças Finitas. Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

Na Figura 6.13 estão exibidos os erros percentuais nos valores da ampli-

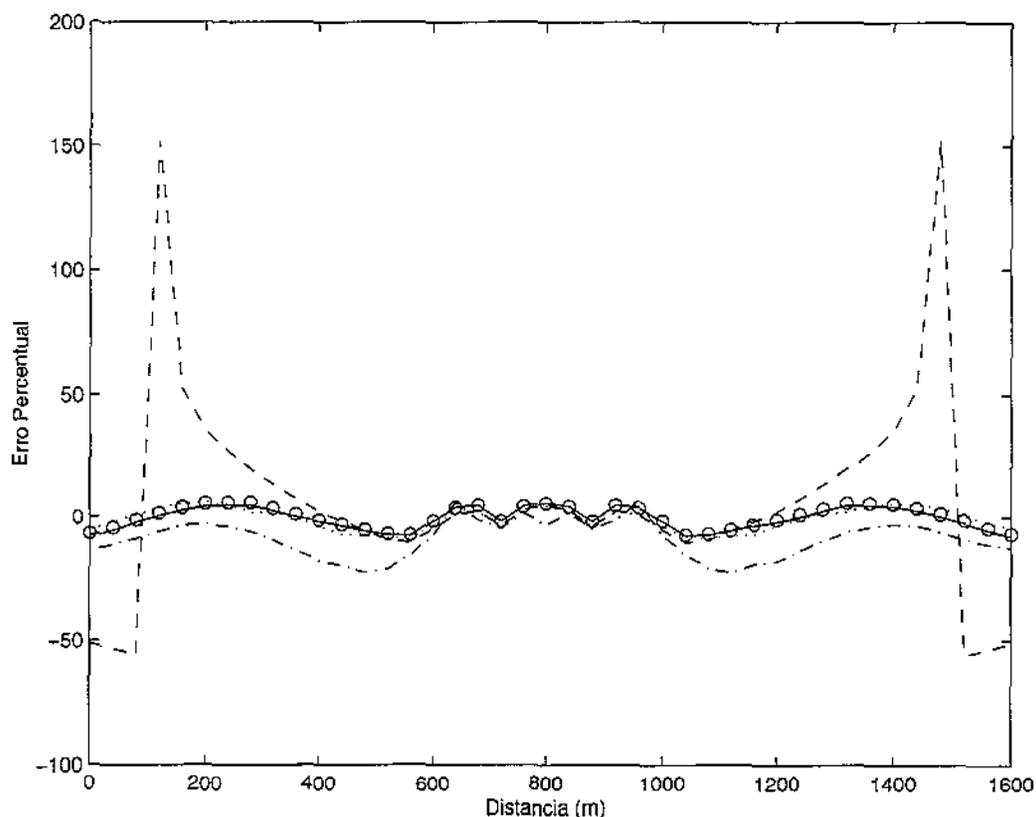


Figura 6.13: Erro relativo das amplitudes da segunda chegada em comparação com o Método de Diferenças Finitas. Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

tude da segunda chegada. Com exceção de Teoria dos Raios, todos apresentam erros pequenos. Mas novamente Born apresenta um erro negativo de quase 20%. Teoria dos Raios não apresenta a segunda onda para os três primeiros receptores e para os três últimos. Estas são chegadas não especulares resultantes da caústica e não são descritas pela Teoria dos Raios de Ordem Zero. As aproximações de Kirchhoff Recíproca, Kirchhoff Clássica e Born-Kirchhoff são os que apresentam melhores resultados nesta segunda chegada para este modelo; a margem de erro deles não ultrapassa a 5%.

A Figura 6.14 mostra os erros percentuais nos valores da amplitude da terceira chegada. Claramente todos os resultados apresentados comparados

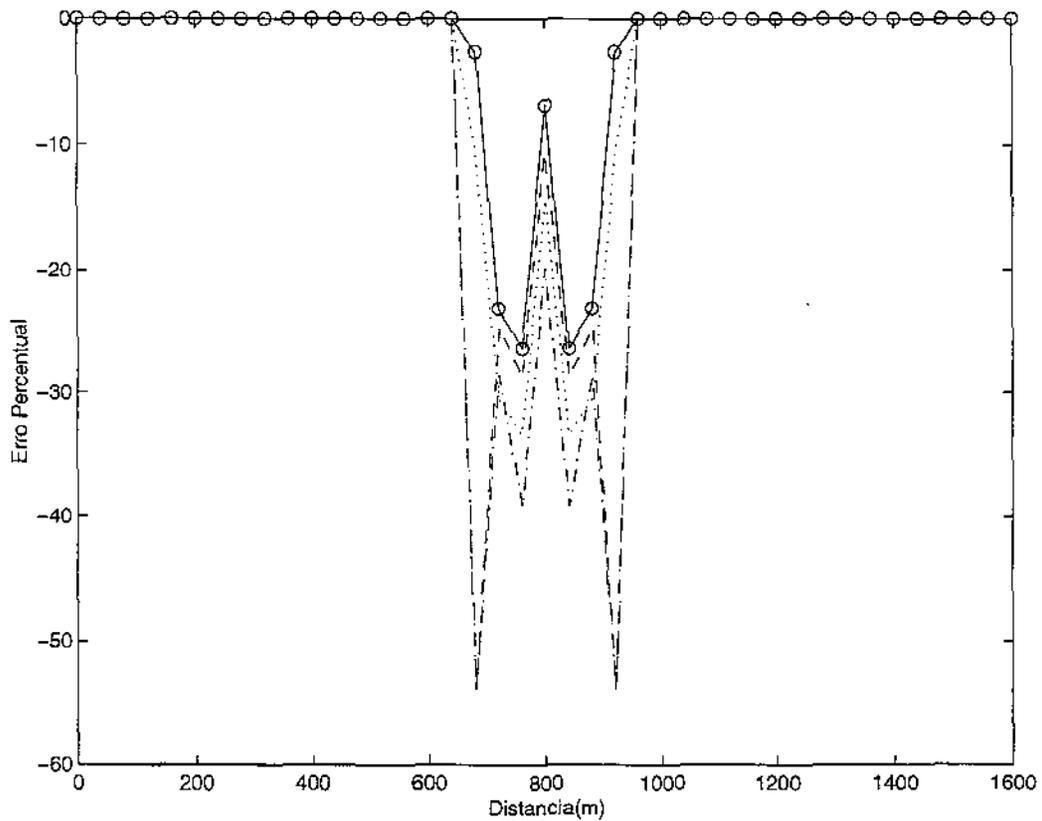


Figura 6.14: Erro relativo das amplitudes da terceira chegada em comparação com o Método de Diferenças Finitas. Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

com o Método de Diferenças Finitas são de péssima qualidade com erros entre 30% e 50%. Mas, mesmo assim, observamos que nenhum método superestima a amplitude e que Born sempre apresenta a menor amplitude. Além disso, podemos observar que Kirchhoff Recíproca e Born-Kirchhoff apresentaram os resultados menos ruins.

## 6.4 Modelo 4(a)

O Modelo 4 (veja Figura 6.15) consiste de um refletor altamente inclinado com o formato de um “tobogã”. A parametrização para este refletor é  $\Sigma = \{(x, y, 200 * (1 + \exp(-(x - 600)^2 / 10^5)) + x/6) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . A geometria de aquisição para este modelo é a de tiro comum com fonte localizada em (0,0,0) e receptores localizados em  $(100 + 30r, 0, 0)$ , com  $r = 0, 1, \dots, 40$ . A velocidade acima do refletor é novamente  $v_0 = 3000$  m/s, mas a debaixo foi escolhida  $v_1 = 3100$  m/s, para reduzir o contraste relativo para 3,33% em  $v$  ou 6,67% em  $k$ . Para este contraste menor espera-se um melhor desempenho da aproximação de Born. A malha utilizada foi a mesma que os modelos anteriores. Mas a aproximação de Kirchhoff Clássica com esta malha apresentou muito ruído numérico. Portanto, a malha teve que ser reduzida para  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2$ m.

### Análise Numérica

Os resultados dos modelamentos numéricos aplicados ao Modelo 4(a) se encontram nas Figuras 6.16(a) (Método de Diferenças Finitas), 6.16(b) (Kirchhoff Clássica), 6.16(c) (Born-Kirchhoff), 6.16(d) (Kirchhoff Recíproca), 6.16(e) (Teoria dos Raios) e 6.16(f) (Born).

Na média, quando rodados com a mesma malha, tivemos que o tempo de CPU para aproximação de Kirchhoff foi de 23 segundos, enquanto de Born foi de 20 minutos e 33 segundos e o Método de Diferenças Finitas foi de 16 horas, 27 minutos e 47 segundos. Kirchhoff Clássica com a malha mais fina levou 27 minutos e 47 segundos.

Este é um modelo muito interessante, pois o modelamento apresenta resultados inesperados. Começando com a observação que a diferença entre as velocidades acima e abaixo do refletor é pequena, pode-se esperar que a resposta obtida através da aproximação de Born seja boa. Este fato é confirmado como pode ser visto comparando as Figuras 6.16(a) e 6.16(f), onde os dois sismogramas observados tem uma aparência muito semelhante. O resultados da aproximação Kirchhoff Recíproca e Born-Kirchhoff (Fig. 6.16(c)-(d)) também apresentam a mesma semelhança. A grande surpresa está no resultado de Kirchhoff Clássica. Uma vez que Teoria dos Raios (veja Figura 6.16(e)) e os outros dois métodos denominados Kirchhoff apresentaram boas aproximações para a onda refletida, esperamos o mesmo de Kirchhoff Clássica. Porém, comparando a Figura 6.16(b) com o resultado do Método de Diferenças Finitas

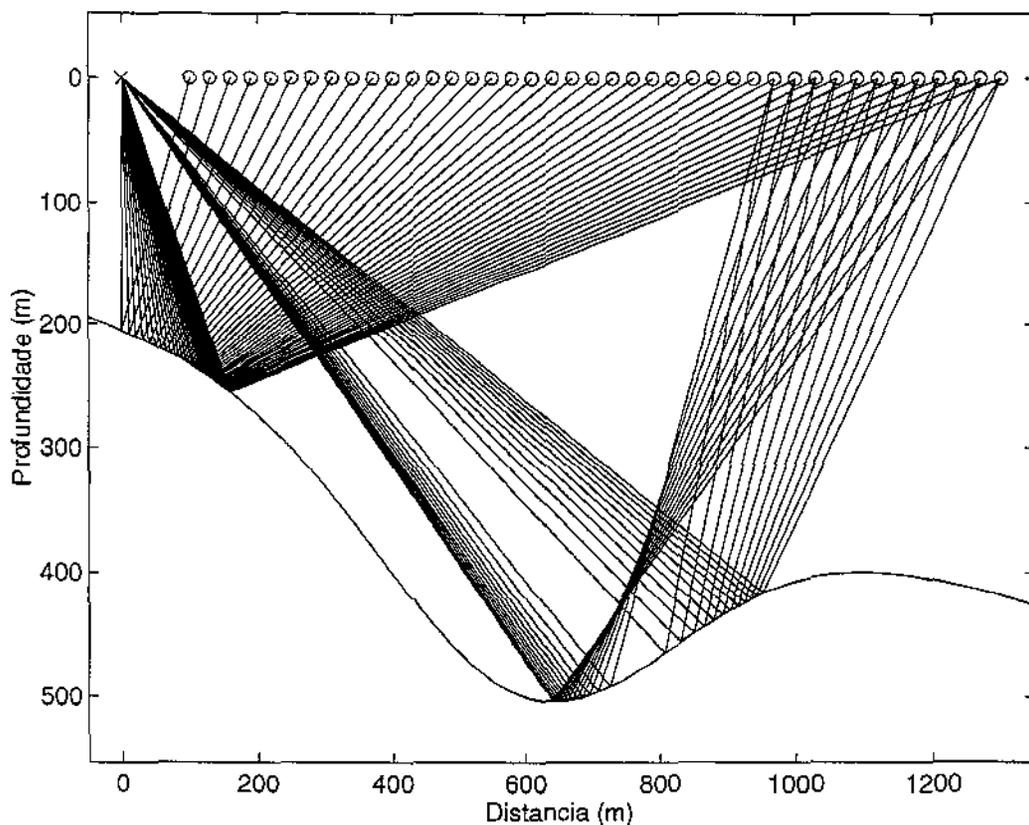


Figura 6.15: Refletor, geometria de aquisição e família de raios para o Modelo 4.

(Figura 6.16(a)), observamos que a segunda chegada está muito superestimada na amplitude. Ela pode ser observada nos primeiros traços computados, onde na seção calculada pelo Método de Diferenças Finitas não se acha nenhum sinal.

Agora examinando o gráfico da Figura 6.17, o qual exhibe o erro relativo dos picos de amplitude da primeira chegada das aproximações estudadas neste trabalho com as obtidas pelo Método de Diferenças Finitas, observamos o seguinte comportamento

- A aproximação de Born-Kirchhoff subestima a amplitude perto da fonte com erro máximo de 9%. A partir de 250 m, o erro fica inferior a 5%, a partir de 600 m, o erro não ultrapassa 2%. Novamente, esta apro-

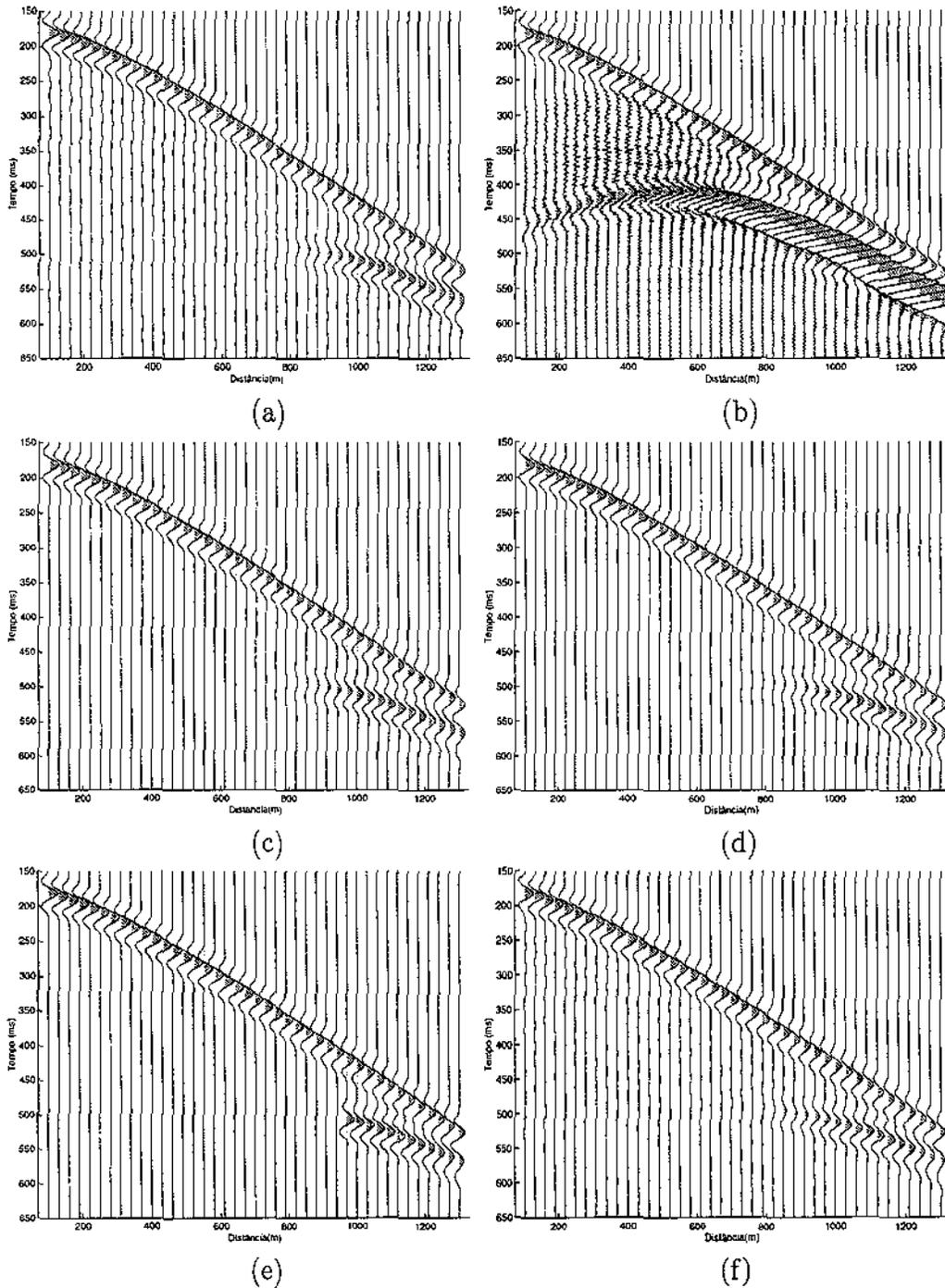


Figura 6.16: Sismogramas obtidos para o Modelo 4(a) utilizando: (a) Método de Diferenças Finitas; (b) Aproximação de Kirchhoff Clássica; (c) Aproximação de Born-Kirchhoff; (d) Aproximação de Kirchhoff Recíp roca; (e) Teoria dos Raios; (f) Aproximação de Born.

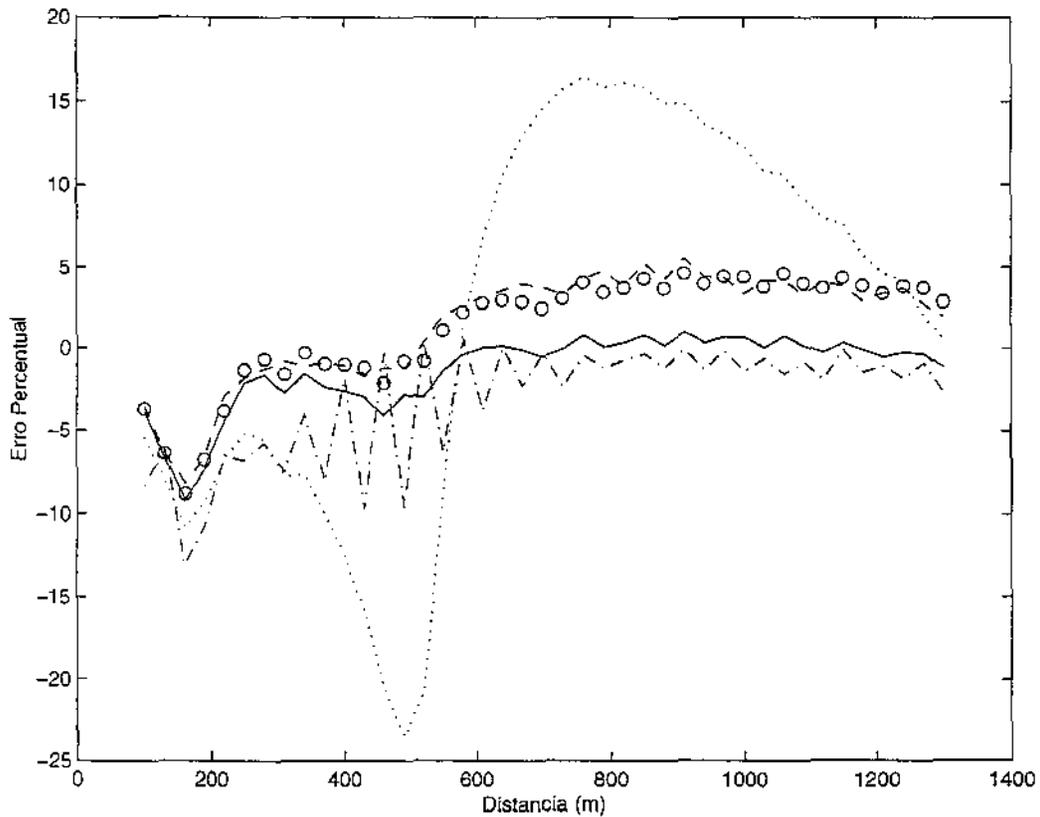


Figura 6.17: Erro relativo em comparação com o Método de Diferenças Finitas, das amplitudes da primeira chegada. Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

ximação teve o maior domínio onde as amplitudes estão mais próximas de estarem corretas quando comparada com o Método de Diferenças Finitas.

- A aproximação de Kirchhoff Clássica subestima a amplitude próximo da fonte, onde apresenta erro relativo entre 5 e 12%. Os receptores localizados entre 500 m e 800 m registram uma grande variação na amplitude o erro atinge 17%. Esse fato é devido a curvatura do refletor.
- Próximo da fonte, a aproximação de Born apresenta grande erro na

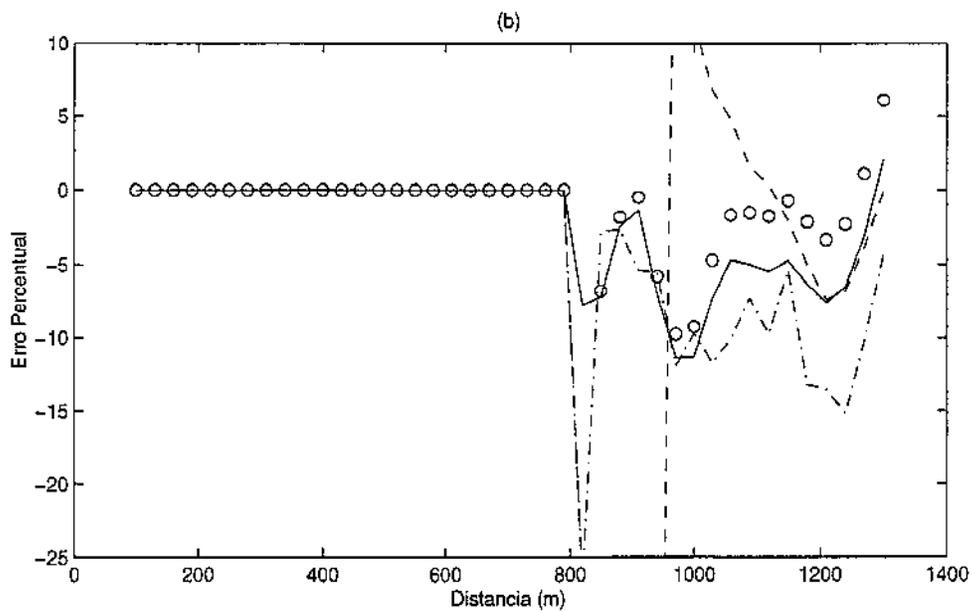
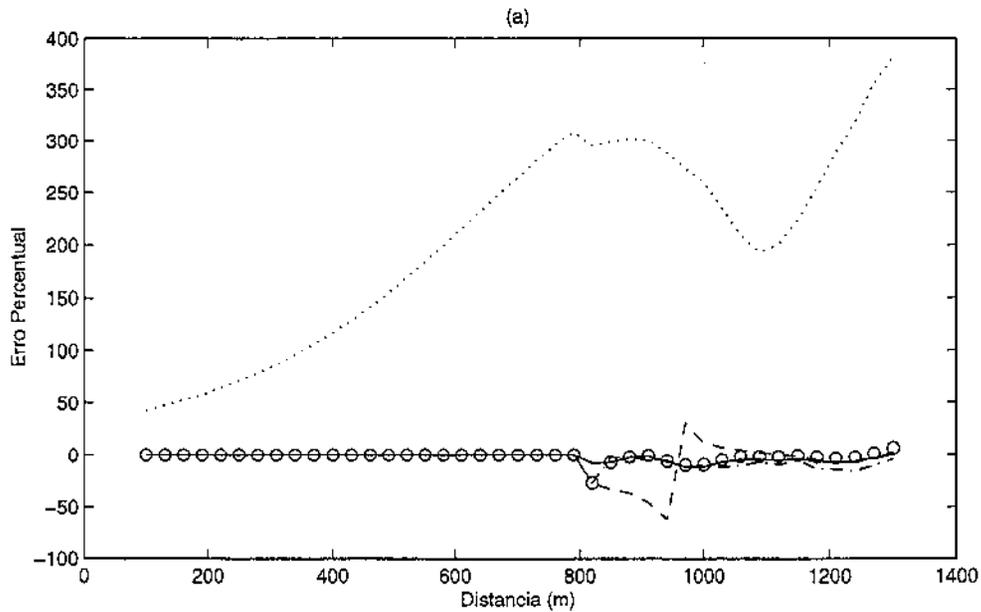


Figura 6.18: (a) Erro relativo em comparação com o Método de Diferenças Finitas, das amplitudes da segunda chegada. Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Born: linha tracejada-pontilhada; Teoria dos Raios: linha tracejada. (b) Detalhe de (a).

amplitude. Longe da fonte ele apresenta um erro menor que 3%. Neste modelo, Born apresenta um bom resultado. Observe que mesmo neste caso, Born subestima a amplitude verdadeira.

- A aproximação de Kirchhoff Recíproca e Teoria dos Raios apresentam erro inferior a 10%. Após 250 m da fonte o erro fica inferior a 5%.

O gráfico da Figura 6.18 mostra o erro da amplitude da segunda chegada. Observamos na Figura 6.18 (a) que a aproximação de Kirchhoff Clássica apresenta erros absurdos nos picos, chegando quase a 400%. Teoria dos Raios também apresenta um erro muito grande (>50%), o qual já podíamos ver no sismograma mostrado na Figura 6.16(e) onde não aparece a segunda chegada antes do traço em 960 m. Born, Kirchhoff Recíproca e Born-Kirchhoff apresentam melhores resultados neste modelo. Na Figura 6.18 (b) podemos ver que o erro de Born atinge -25%, enquanto de Born-Kirchhoff e de Kirchhoff Recíproca não ultrapassa 10%.

## 6.5 Modelo 4(b)

Para melhor investigação da diferença apresentada entre os modelamentos Born e Kirchhoff, usamos o Modelo 4(a) com uma variação na velocidade. Neste novo modelo consideramos a velocidade acima do refletor  $v_0 = 3000$  m/s e abaixo  $v_1 = 3500$  m/s. Além deste, todos os outros parâmetros foram conservados iguais ao do Modelo 4(a).

### Análise Numérica

Os resultados dos modelamentos numéricos aplicados ao Modelo 4(b) se encontram nas Figuras 6.19(a) (Método de Diferenças Finitas), 6.19(b) (Kirchhoff Clássica), 6.19(c) (Born-Kirchhoff), 6.19(d) (Kirchhoff Recíproca), 6.19(e) (Teoria dos Raios) e 6.19(f) (Born).

O tempo de CPU para este modelo foi: Kirchhoff Recíproca, Born-Kirchhoff: 30 segundos; Born: 29 minutos e 21 segundos; Método de Diferenças Finitas: 18 horas, 13 minutos e 38 segundos; Kirchhoff Clássica (com a malha mais fina): 46 minutos e 18 segundos.

O Modelo 4(b) é igual ao Modelo 4(a) a menos da velocidade abaixo do refletor. Então a cinemática dos dois tem que ser igual, mas a dinâmica não. Podemos ver este fato comparando as Figuras 6.16(a) e 6.19(a); 6.16(b)

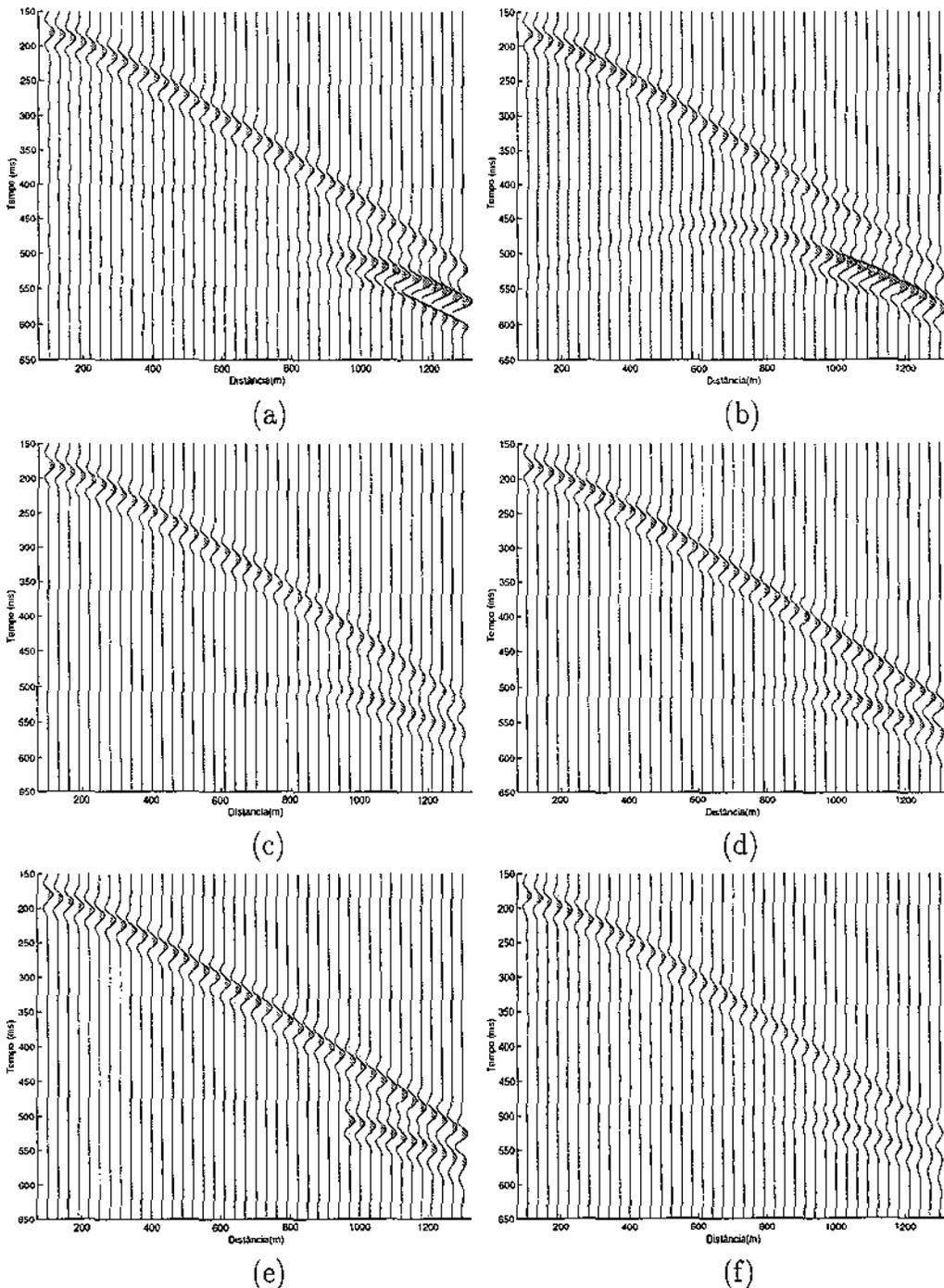


Figura 6.19: Sismogramas obtidos para o Modelo 4(b) utilizando: (a) Método de Diferenças Finitas; (b) Aproximação de Kirchhoff Clássica; (c) Aproximação de Born-Kirchhoff; (d) Aproximação de Kirchhoff Recíproca; (e) Teoria dos Raios; (f) Aproximação de Born.

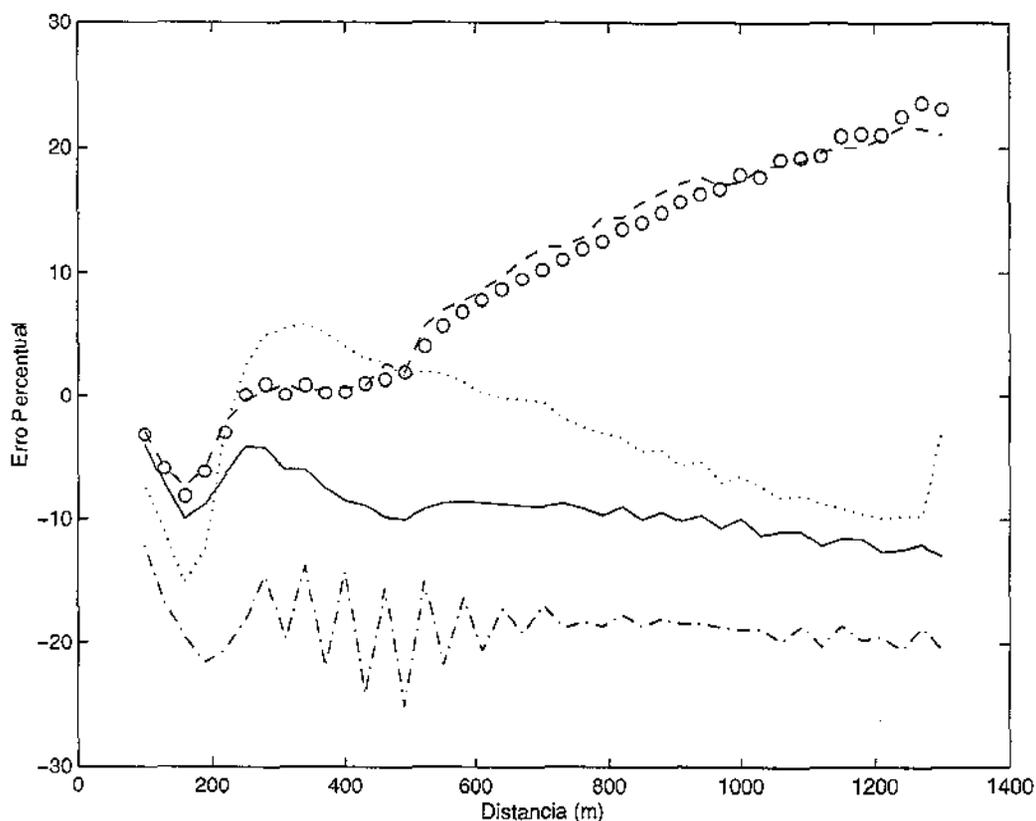


Figura 6.20: Erro relativo em comparação com o Método de Diferenças Finitas, das amplitudes da primeira chegada. Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

e 6.19(b); 6.16(c) e 6.19(c); 6.16(d) e 6.19(d); 6.16(e) e 6.19(e); 6.16(f) e 6.19(f). Já na Figura 6.19 observamos, que o Kirchhoff Clássica superestima o domínio do segundo evento, o mesmo aparecendo com pequenas amplitudes nos primeiros traços modelados.

As Figuras 6.20 e 6.21 mostram o erro relativo da comparação dos picos da primeira e da segunda chegada de cada sismograma obtido através das aproximações consideradas neste trabalho e os picos obtidos utilizando o Método de Diferenças Finitas. Através dela observamos:

- Teoria dos Raios e Kirchhoff Recíproca tem praticamente o mesmo com-

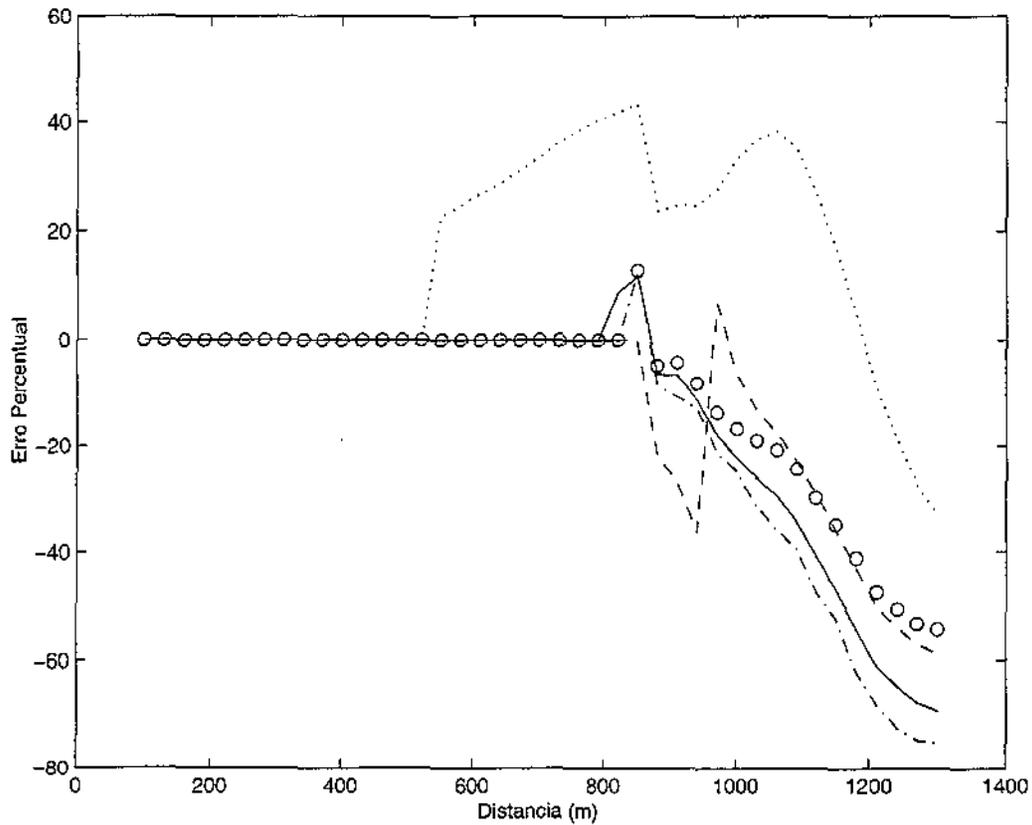


Figura 6.21: Erro relativo em comparação com o Método de Diferenças Finitas, das amplitudes da segunda chegada. Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Teoria dos Raios: linha tracejada; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

portamento. Para receptores localizados antes de 600 m, eles apresentam erro inferior a 10%, e apresentam erro de até 22% para receptores longe da fonte.

- Para receptores próximos da fonte, Kirchhoff Clássica apresenta erro de até -15% e para receptores localizados entre 300 m e 1300 m o erro não ultrapassa a 10% (ora superestimando, ora subestimando a amplitude).
- Para receptores perto da fonte, Born-Kirchhoff apresenta erro inferior a 10%. Longe da fonte, Born-Kirchhoff apresenta perda na amplitude,

seu erro, porém nunca ultrapassa a 12%.

- Born novamente passa a subestimar as amplitudes, apresentando erro superior a 11% e inferior a 24%.

Também na Fig. 6.21 vemos que Kirchhoff Clássica apresenta eventos que os outros métodos utilizados aqui não apresentam. Nesta figura não estão aparecendo os eventos próximos da fonte, mas estes estão lá com uma amplitude muito pequena comparada ao restante (veja Fig. 6.19(b)). A razão é que o “picking” automático não detecta eventos com amplitudes muito pequenas. Esta segunda chegada, quando comparada com o resultado do Método de Diferenças Finitas, é ruim em todas as aproximações. Observa-se que neste modelo, Kirchhoff Clássica apresenta novamente eventos não físicos, porém não tão dramático quanto no Modelo 4(a).

## 6.6 Modelo 5

O Modelo 5 (veja Figura 6.22) consiste de uma superfície linear por partes com uma quina localizada a 400 m de profundidade, a qual pode ser parametrizada por  $\Sigma = \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } z = 550 - x/2 + (x/2 - 150) * \max(0, \text{sgn}(x - 300))\}$ . A geometria de aquisição é um tiro comum com uma fonte localizada em  $(0, 0, 0)$  e os receptores localizados em  $(20r, 0, 0)$ , onde  $r = 0, 1, \dots, 35$ . A velocidade acima do refletor é  $v_0 = 3000$  m/s e abaixo é  $v_1 = 3500$  m/s. A malha usada foi  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10$  m e a amostragem temporal foi  $\Delta t = 1$  ms.

### Análise Numérica

Os resultados dos modelamentos numéricos aplicados ao Modelo 5 se encontram nas Figuras 6.23(a) (Método de Diferenças Finitas), 6.23(b) (Kirchhoff Clássica), 6.23(c) (Born-Kirchhoff), 6.23(d) (Kirchhoff Recíproca), 6.23(e) (Teoria dos Raios) e 6.23(f) (Born).

O tempo de CPU para este modelo foi: Kirchhoff Recíproca, Born-Kirchhoff: 11 segundos; Born: 11 minutos; Kirchhoff Clássica (com a malha mais fina): 4 minutos e 15 segundos; Método de Diferenças Finitas: 8 horas, 28 minutos e 48 segundos. Este refletor é muito interessante, pois ele tem uma beira de difração.

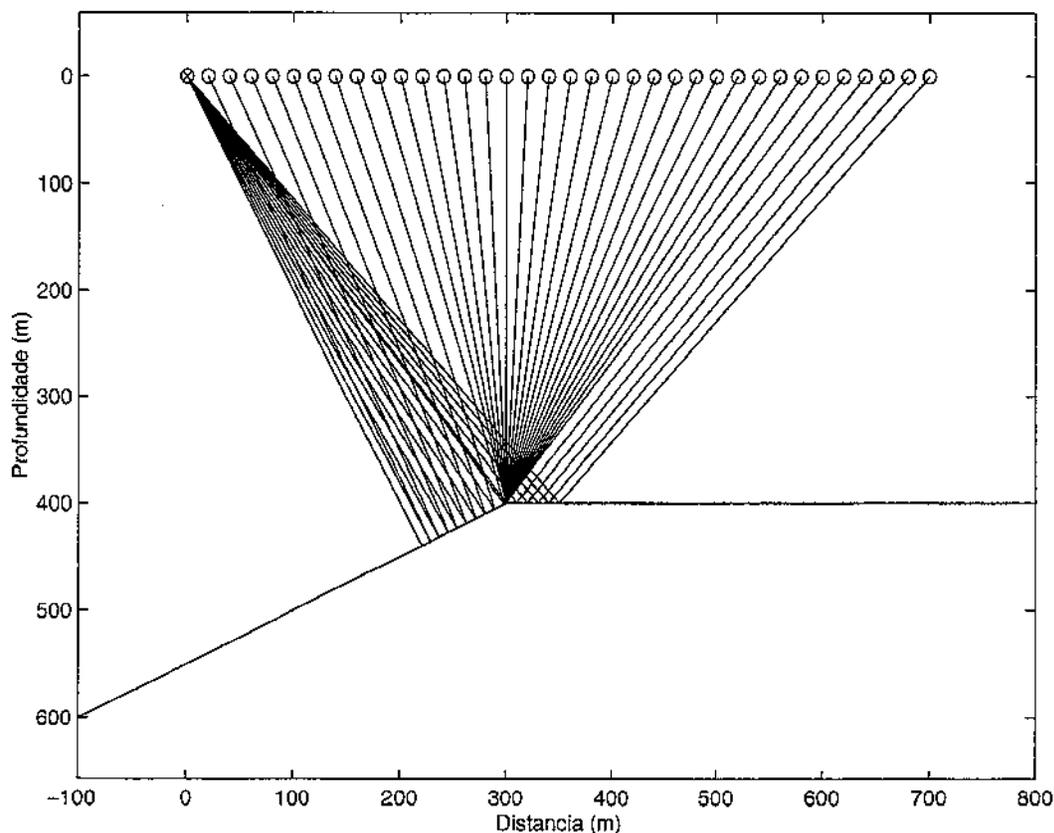


Figura 6.22: Refletor, geometria de aquisição e família de raios para o Modelo 5.

Comparando as Figuras 6.23(a) e 6.23(e), observamos que entre 200 m e 600 m as amplitudes do sismograma obtido por Teoria dos Raios quase não existem. Este é um fato esperado por causa que Teoria dos Raios de Ordem Zero não leva em conta as difrações. Os eventos aparecem somente porque a realização de traçamento de raios utilizada não distingue entre um refletor fortemente curvado e uma quina. Todos os outros sismogramas apresentam a mesma cinemática do Método de Diferenças Finitas (veja Figuras 6.23(a), 6.23(b), 6.23(c), 6.23(d) e 6.23(f)), mas a dinâmica é um pouco diferente (veja Figuras 6.24 e 6.25).

A Figura 6.25 mostra que para este modelo a aproximação de Kirchhoff Clássica apresentam erro inferior a 6%; Kirchhoff Recíproca apresenta erro

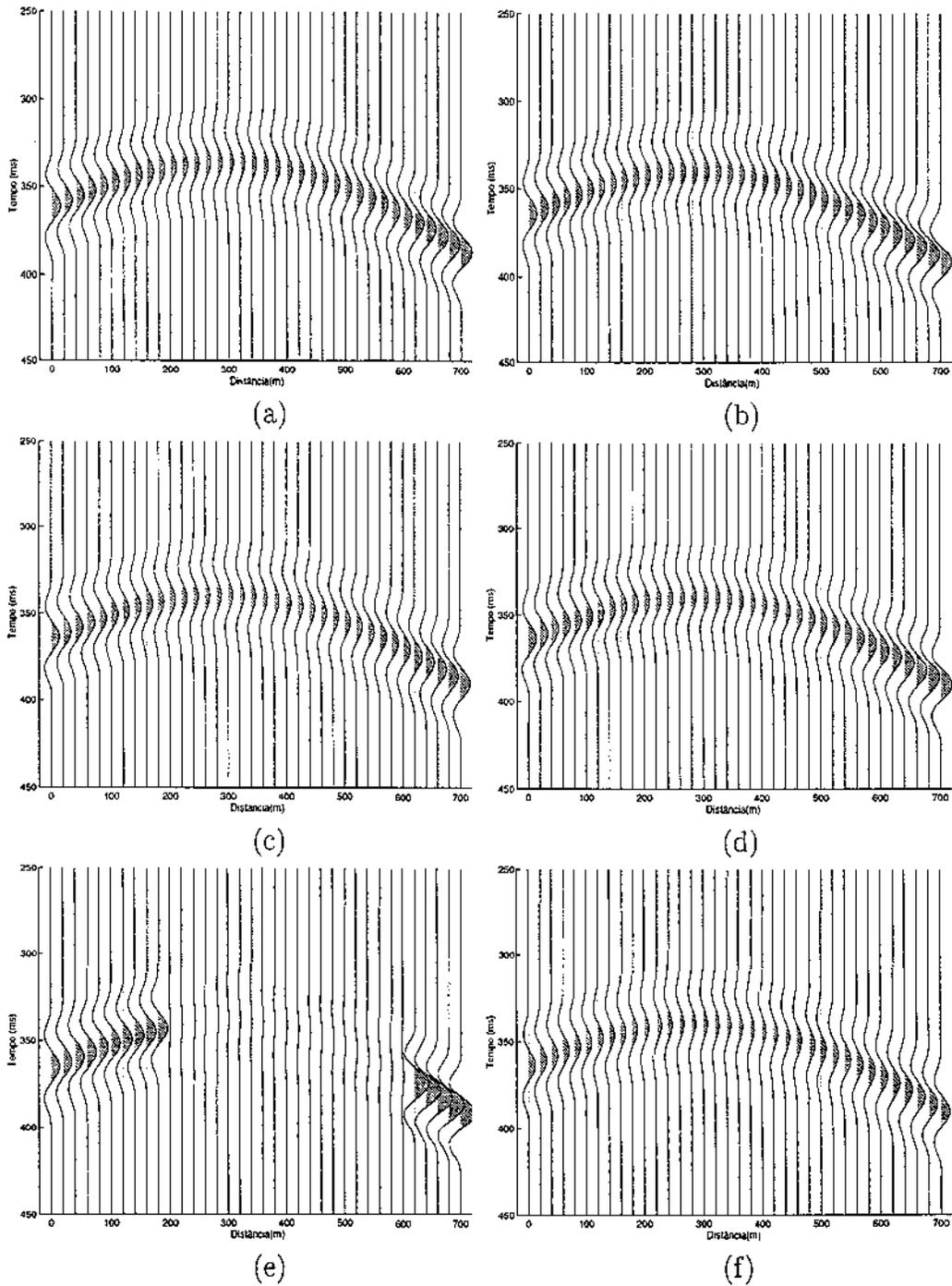


Figura 6.23: Sismogramas obtidos para o Modelo 5 utilizando: (a) Método de Diferenças Finitas; (b) Aproximação de Kirchhoff Clássica; (c) Aproximação de Born-Kirchhoff; (d) Aproximação de Kirchhoff Recíproca; (e) Teoria dos Raios; (f) Aproximação de Born.

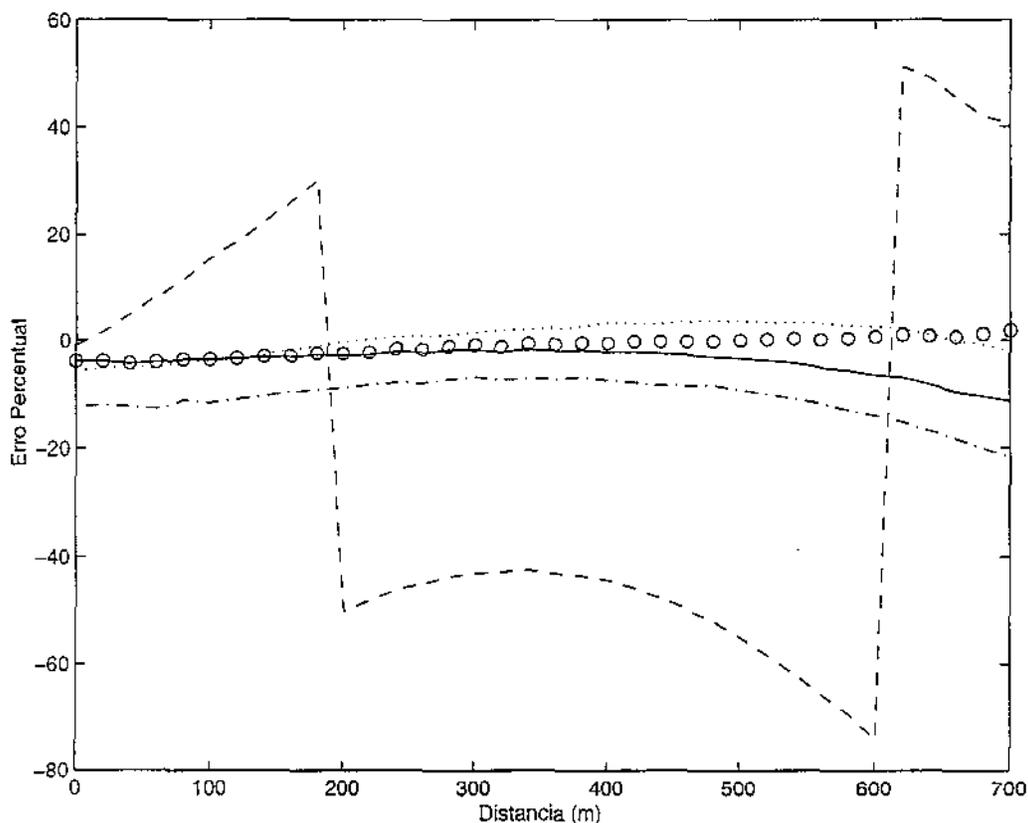


Figura 6.24: Erro relativo das amplitudes em comparação com o Método de Diferenças Finitas. Teoria dos Raios: linha tracejada; Born-Kirchhoff: linha sólida; Kirchhoff Recíproca: círculos; Kirchhoff Clássica: linha pontilhada; Born: linha tracejada-pontilhada.

inferior a 4% para registro em receptores próximo a fonte e menores que 1% para registro em receptores longe da fonte; Born subestima as amplitudes, chegando a ter erro de 22% para registro em receptores longe da fonte; e Born-Kirchhoff registra erro inferior a 5% nos primeiros 550 m e depois erro no máximo de 12%.

Este modelo mostra que os erros da amplitude da onda difratada de modelamentos de Kirchhoff podem ser da mesma ordem dos erros de ondas refletidas. Isto é uma observação que está em contraste com a afirmação, frequente na literatura, que as ondas difratadas são modeladas por métodos Kirchhoff

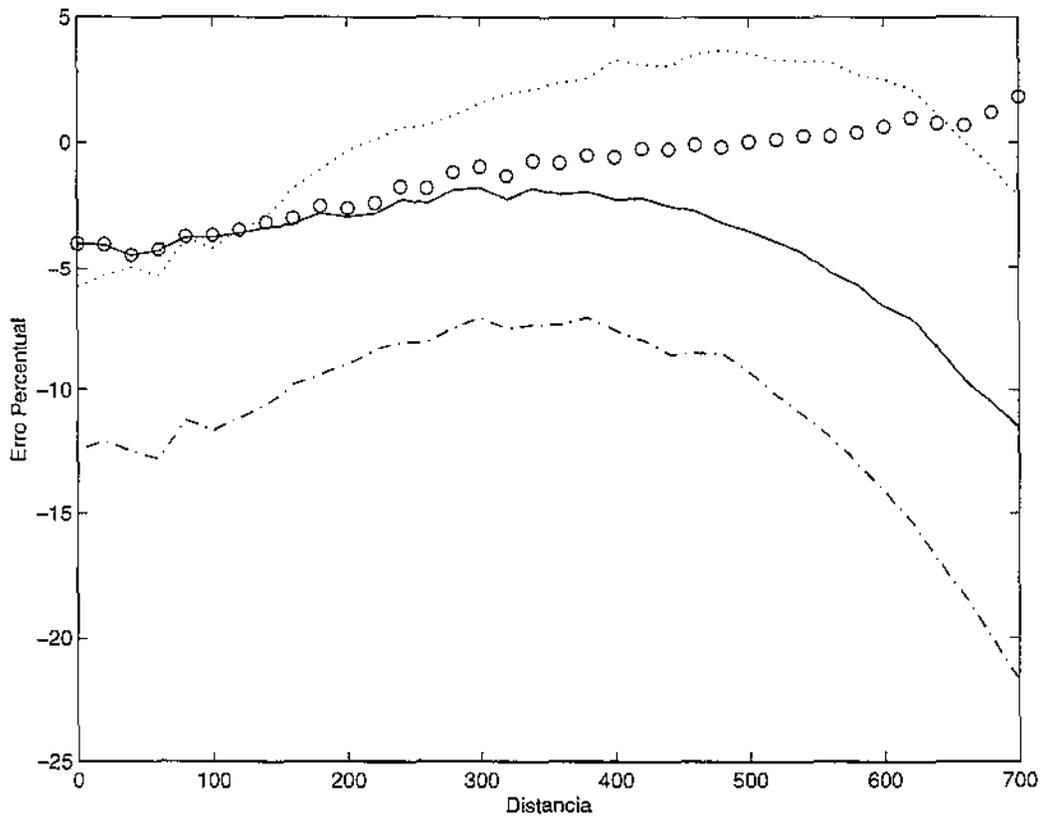


Figura 6.25: Detalhe da figura anterior.

cinematicamente corretas mas dinamicamente erradas. A Teoria dos Raios é, esperadamente, incapaz de modelar as amplitudes da onda difratada e das reflexões perto de quinas.

# Capítulo 7

## Conclusões

Nesta tese foi estudado o modelamento aproximado de ondas refletidas, elásticas e acústicas, num meio tridimensional não homogêneo. Para este fim foram investigadas as conhecidas aproximações de Born e de Kirchhoff bem como Teoria de Raios. Além destas aproximações anteriormente existentes foram sugeridas novas aproximações tomando como base as integrais de Born e de Kirchhoff.

A primeira das aproximações sugeridas, chamada Kirchhoff Recíproca, baseia-se numa idéia de Deregoswki & Brown (1983). No caso acústico e para reflexões elásticas monotípicas, ela consiste na substituição do ângulo de incidência do raio que conecta a fonte a um ponto genérico da interface com a normal a esta interface, usado na aproximação de Kirchhoff no coeficiente de reflexão de ondas planas, pelo ângulo médio entre os raios que conectam a fonte e o receptor ao referido ponto da interface. Esta aproximação é generalizada também para o caso de ondas elásticas convertidas. Como mostrado na parte teórica desta tese, ambos os coeficientes de reflexão são idênticos no ponto de reflexão especular (ponto estacionário da integral de Kirchhoff). A nova aproximação Kirchhoff Recíproca tem a vantagem de que o seu resultado não se modifica com a troca da posição entre fonte e receptor (i.e., vale o princípio da reciprocidade). Esta propriedade é requerida fisicamente de uma onda refletida, mas a aproximação de Kirchhoff (chamada Kirchhoff Clássica para melhor distinção de outras aproximações na base da integral de Kirchhoff que foram introduzidas nesta tese) não a apresenta.

A segunda das aproximações sugeridas (Ursin & Tygel, 1997; Novais et al., 1997) é chamada Born-Kirchhoff. No caso geral, ela resulta da trans-

formação da aproximação de Born, para uma distribuição dos parâmetros do meio descontínuo ao longo de uma superfície, numa integral de superfície ao longo desta descontinuidade. Observa-se que esta aproximação também satisfaz a condição de reciprocidade. No caso acústico, a aproximação de Born-Kirchhoff também resulta da aproximação Kirchhoff Recíproca se o coeficiente de reflexão é substituído por sua aproximação linear (nos contrastes de velocidade e densidade do meio).

Além da introdução das novas aproximações e da investigação teórica delas em meios elásticos e acústicos, foram comparados os resultados com outros modelamentos mais tradicionais, a saber: um esquema explícito do Método Diferenças Finitas de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo e um modelamento por Teoria de Raios usando um programa já existente. Para calibração, todos os programas foram aplicados a um modelo consistente de um refletor plano e velocidade constante e os resultados foram comparados com os de uma implementação da solução analítica para este modelo.

Para o melhor entendimento das propriedades das diferentes aproximações foram escolhidos modelos básicos para os testes numéricos. Por todos os modelamentos realizados foram observados os seguintes fatos:

- Todas as aproximações funcionam igualmente bem cinematicamente, i.e., para a computação de tempos de trânsito.
- Com respeito as amplitudes, observam-se os seguintes fatos:
  1. Quando as hipóteses são satisfeitas, Kirchhoff Clássica (apesar de não ser recíproca) apresenta bons resultados, especialmente pré-crítico.
  2. Kirchhoff Clássica pode gerar eventos não físicos quando o refletor apresenta curvatura grande. Este fato já foi observado por Frazer & Sen (1985).
  3. A aproximação Kirchhoff Recíproca funciona bem até na vizinhança do ângulo crítico. Perto do ângulo crítico e na região pós-crítica, a amplitude segue a da Teoria de Raios que pode superestimar a verdadeira (Diferenças Finitas) por quase 100%.
  4. Como esperado, a aproximação de Born trabalha melhor para pequenos contrastes, porém sempre subestimando as amplitudes.

Para todos os modelos usados, pode-se dizer que Born fornece um limitante inferior para a amplitude verdadeira.

5. Os custos computacionais das três aproximações baseadas na integral de Kirchhoff são significativamente menores do que o de Born (veja Tabela 7.1). Em alguns casos foi necessário diminuir a malha para que a aproximação Kirchhoff Clássica não apresentasse um forte ruído numérico, assim passando a aproximação de Born no tempo gasto. Mesmo a aproximação de Born é de ordem de magnitude menos caro do que o Método de Diferenças Finitas. Deve-se mencionar que o custo das aproximações integrais aumenta com o custo de traçamento de raios envolvido, que no caso dos modelos simples pode ser feito analiticamente. O custo do Método de Diferenças Finitas não depende significativamente do campo de velocidade.
6. Em todos os modelos sem difrações, os resultados da Teoria de Raios foram comparáveis com os dos métodos Kirchhoff.
7. Ao contrário do esperado, as três aproximações Kirchhoff apresentaram bons resultados para o modelamento de difrações.
8. Born-Kirchhoff apresentou bons resultados para refletores com grandes curvaturas. Aonde todas as outras aproximações tiveram bons resultados, este foi comparável.

Mét. \ Mod.	M1	M2	M3	M4(a)	M4(b)	M5
MDF	12h 52m	9h 17m	24h 24m	16h 27m 47s	18h 13m 38s	8h 28m 48s
KC	9s	8m 47s*	32 s	27m 47s*	46 m 18s*	4m 15s*
BK	9s	23s	32s	23s	30s	11 s
KR	9s	23s	32s	23s	30s	11 s
Born	11m	19m	37m	20m 33s	29m 21s	11m

\* O método foi rodado com uma malha mais fina por causa da dispersão numérica.

Tabela 7.1: Comparação dos tempos de CPU para os diferentes métodos de modelamento

Em conclusão, não se pode determinar “o melhor” esquema para modelamento aproximado, sem consideração do modelo. Porém, para uma

resposta econômica, de qualidade razoável, propõe-se a aproximação Born-Kirchhoff. Esta se mostrou nos nossos experimentos numéricos a mais estável, sempre fornecendo um resultado próximo ao melhor ou o melhor. Cada uma das outras aproximações falhou em pelo menos um modelo.

Como observação final devemos notar que os resultados numéricos desta tese não podem ser considerados abrangentes. Como foi mencionado no Capítulo 5, puderam ser feitos somente testes com modelos acústicos pequenos com camadas homogêneas e dentro do plano  $xz$ . Antes de conclusões finais sobre a qualidade dos métodos apresentados devem-se realizar mais testes com modelos maiores e mais representativos que apresentem heterogeneidade em todas as dimensões.

No entanto, os resultados obtidos fornecem uma primeira comparação entre os vários métodos de modelamento em meios simples, os quais podem ser bastante úteis em estudos de propagação de ondas sísmicas com vistas a exploração e monitoramento de reservatórios de petróleo. A extensão dos resultados a modelos mais realistas representa uma linha de pesquisa bastante interessante para o futuro.

# Bibliografia

- [1] Alford, R. M., Kelly, K. R. e Boore, D. M., 1974, *Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation*, Geophysics, 39, 834-842.
- [2] Aki, K., e Richards, P. G., 1980, *Quantitative seismology - theory and methods, Vol.1*, W.F. Freeman and Company, New York.
- [3] Beylkin, G., e Burridge, R., 1990, *Linearized inverse scattering problems in acoustics and elasticity*, Wave Motion, 12, 15-52.
- [4] Bleistein, N., 1984, *Mathematical methods for wave phenomena*, Academic Press, Orlando, Florida.
- [5] Bleistein, N., 1987, *On the imaging of reflectors in the earth*, Geophysics, 52, 7, 931-942.
- [6] Bleistein, N., e Gray, S. H., 1985, *An extension of the Born inversion method to a depth dependent reference profile*, Geophysical Prospecting, 33, 999-1022.
- [7] Butkov, E., 1988, *Física Matemática*, Editora Guanabara Koogan.
- [8] Červený, V., 1995, *Seismic wave fields in three-dimensional isotropic and anisotropic structures*, Lecture Notes, University of Trondheim, Trondheim, Noruega.
- [9] Chapman, C. H., e Coates, R. T., 1994, *Generalized Born scattering in anisotropic media*, Wave Motion, 19, 309-341.

- [10] Chapman, C. H., e Drummond, R., 1982, *Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory*, Bulletin of the Seismological Society of America, 72, S277-S317.
- [11] Deregowski, S. M., e Brown, S. M., 1983, *A theory of acoustic diffractors applied to 2-D models*, Geophysical Prospecting, 31, 293-333.
- [12] Frazer, L. N., e Sen, M. K., 1985, *Kirchhoff- Helmholtz reflection seismograms in a laterally inhomogeneous multi-layered elastic medium - I, theory*, Geophys. J. R. Astr. Soc., 89, 121-147.
- [13] de Hoop, M. V., e Bleistein, N., 1996, *Micro-local, non-linear, resolution analysis of generalized Radon transform inversions in anisotropic media*, Project Review, Center of Wave Phenomena, Colorado School of Mines, CWP-206, 27-54.
- [14] John, F., 1982, *Partial differential equations*, Fourth Edition, Springer-Verlag.
- [15] Küpper, F. J., 1958, *Theoretische Untersuchungen über die Mehrfach-aufstellung von Geophonen*, Geophys. Prospect., 6, 194-256.
- [16] Langenberg, K.J., 1986, *Applied inverse problems for acoustic, electromagnetic, and elastic wave scattering, basic methods in tomography and inverse problems*, Malvern Physics Series, P.C. Sabatier, Adam Hilger, Bristol & Philadelphia.
- [17] Lumley, D. E. e Beydoun, W. B., 1993, *Angle-dependent reflectivity estimation by Kirchhoff migration/inversion: Theory*, Stanford Exploration Report, SEP 79, 205-225.
- [18] Mufti, I. R., 1990, *Large-scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance*, Geophysics, 55, 1166-1182.
- [19] Mufti, I. R., Pita, J. A., e Huntley, R. W., 1996, *Finite-difference depth migration of exploration-scale 3D seismic data*, Geophysics, 61, 776-794.
- [20] Novais, A., Santos, L. T., Tygel, M., e Ursin, B., 1997, *A unified Born-Kirchhoff representation for acoustic media*, Journal of Seismic Exploration, 6, 227-237.

- [21] Pšenčík, I., 1994, *Introduction to seismic methods*, Lecture Notes, PPPG/UFBa.
- [22] Santos, L., e Symes, W., 1995, *Efficient free-surface Kirchhoff modeling*, Technical Report- CRPC-TR95556 - Rice University.
- [23] Strikwerda, J. C., 1989, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth & Brooks/Cole.
- [24] Schleicher, J., e Tygel, M., 1998, *A scalar description of elementary waves in isotropic elastic media: modeling and migration*, Relatório de Pesquisa, IMECC/UNICAMP, RP 83/98.
- [25] Schleicher, J., Tygel, M., e Hubral, P., 1993, *3-D true-amplitude finite-offset migration*, *Geophysics*, 8, 1112-1126.
- [26] Tygel, M., Schleicher, J., e Hubral, P., 1994, *Kirchhoff-Helmholtz theory in modeling and migration*, *Journal of Seismic Exploration*, 3, 203-214.
- [27] Tygel, M., e Hubral, P., 1997, *Transient waves in Layered Media*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- [28] Ursin, B., e Tygel, M., 1997, *Reciprocal volume and surface scattering integrals for anisotropic elastic media*, *Wave Motion*, 26, 31-42.
- [29] Wapenaar, C. P. A., e Berkhout, A.J., 1993, *Representations of seismic reflection data*, *Journal of Seismic Exploration*, 2, 123-131.

# Apêndice A

## Cálculo dos coeficientes de reflexão linearizados

### Espalhamento P-P

Aqui vamos denotar  $\cos \theta = x$  para simplificações nos nossos cálculos. Para o uso do Mathematica, representamos os parâmetros do meio perturbado como

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \rho + \Delta\rho\varepsilon, \\ \hat{\mu} &= \mu + \Delta\mu\varepsilon, \\ \hat{\lambda} &= \lambda + \Delta\lambda\varepsilon,\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde  $\varepsilon$  é suposto pequeno. Então expandimos o numerador ( $N_{PP}$ ) e o denominador ( $D$ ) da equação (3.62) como séries de Taylor em  $\varepsilon$ , já com a substituição da extensão do ângulo. Usando o Mathematica para fazer os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned}N_{PP} = & - \left\{ \rho \sqrt{1 - \frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} \left[ \Delta\rho \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \frac{\rho^2}{2\mu} \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \right] + \\ & \left. \frac{\left( \frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho^2 (1-x)}{4(\lambda+2\mu) \sqrt{\frac{1+x}{2}}} \right\} - \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \left[ \frac{\left(\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho}\right) \rho^3(1-x)}{4(\lambda+2\mu)\sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}} + \frac{2\Delta\mu\rho^2}{\lambda+2\mu} \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}(1-x) \right] \right. \\
& \times \left. \sqrt{\frac{1+x}{2}} + \frac{\left(\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho}\right) \rho^3 \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}(1-x)}{4(\lambda+2\mu)\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \right] \\
& + \left[ \left( -\frac{2\Delta\rho\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^3} + \frac{(\Delta\lambda+2\Delta\mu)\mu + \Delta\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2} \right) \right. \\
& \left. \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \frac{\rho^4}{2\mu(\lambda+2\mu)} + 2\sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho \left( \Delta\rho - \frac{\Delta\mu\rho(1-x)}{\lambda+2\mu} \right) \right] \\
& \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} \\
& \left\{ \rho \left[ \left( \Delta\rho\sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} + \left( -\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} + \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \frac{\rho^2}{2(\lambda+2\mu)} \right) \right] \\
& \times \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} + \frac{\left(\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho}\right) \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho^2(1-x)}{4(\lambda+2\mu)\sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}} \left] \sqrt{\frac{1+x}{2}} \varepsilon \right. \\
& \times \left[ 2\sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho^2 \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right. \\
& \left. + \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho^2 \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} \sqrt{1+x} \right]^{-1} + O(\varepsilon^2) \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
D &= 4\rho^2 \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} + \\
& \left\{ \rho \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} \left[ \left( \Delta\rho\sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} + \frac{\rho^2}{2\mu} \left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \right) \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} \\
& + \frac{\left( \frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho^2 (1-x)}{4(\lambda+2\mu)\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \left] + \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \right. \\
& \times \left[ \left( \frac{\left( \frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \rho^3 (1-x)}{4(\lambda+2\mu)\sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}} + \frac{2\Delta\mu\rho^2\sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}(1-x)}{(\lambda+2\mu)} \right) \right. \\
& \times \left. \sqrt{\frac{1+x}{2}} + \frac{\left( \frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \rho^3 \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}(1-x)}{4(\lambda+2\mu)\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \right] \\
& \sqrt{\frac{1+x}{2}} \left[ \left( \frac{-2\Delta\rho\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^3} + \frac{(\Delta\lambda+2\Delta\mu)\mu + \Delta\mu(\lambda+2\mu)}{\rho} \right) \right. \\
& \left. \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \frac{\rho^4}{2\mu(\lambda+2\mu)} + 2\sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho \left( \Delta\rho - \frac{\Delta\mu\rho(1-x)}{\lambda+2\mu} \right) \right] \\
& \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} \rho \\
& \left[ \left( \Delta\rho\sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} + \frac{\left( -\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} + \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho^2}{2(\lambda+2\mu)} \right) \right. \\
& \times \left. \sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}} + \frac{\left( \frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}} \rho^2 (1-x)}{4(\lambda+2\mu)\sqrt{1-\frac{\mu(1-x)}{2(\lambda+2\mu)}}} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Fazendo a expansão em série de Taylor de  $N_{PP}/D$ , simplificando o resultado e tomando o termo de primeira ordem, temos

$$S_{PP}(\theta) = \frac{\Delta\lambda + 2\Delta\mu x^2}{2(\lambda + 2\mu)(1+x)} + \frac{\Delta\rho x}{2\rho(1+x)}, \tag{A.4}$$

que é o nosso coeficiente linearizado para o caso da onda P-P.

### Espalhamento S-S

Fazendo  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\lambda}$  como em (A.1) e  $x = \cos\theta$ , e usando o Mathematica, obtemos que o numerador da equação (3.67) é

$$\begin{aligned}
N_{SS} = & \left\{ \rho^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{(\lambda + 2\mu)(1-x)}{2\mu}} \left[ -\frac{\rho}{2(\lambda + 2\mu)} \left( -\frac{\Delta\rho(\lambda + 2\mu)}{\rho^2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\Delta\lambda + 2\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} - \frac{\left( \frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \rho(1-x)}{4\mu\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \right] + \\
& \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \left[ \frac{\rho}{2\mu} \left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{(\lambda + 2\mu)(1-x)}{2\mu}} + \right. \\
& \left. \frac{\left( \frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \rho(1-x)}{4\mu\sqrt{1 - \frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} + \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \right. \\
& \times \left\{ -\sqrt{1 - \frac{(\lambda + 2\mu)(1-x)}{2\mu}} \left[ \frac{\left( \frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \rho^3(1-x)}{4\mu\sqrt{\frac{1+x}{2}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\frac{\Delta\mu}{\mu}\rho^2\sqrt{\frac{1+x}{2}}(1-x) \right] - \frac{\rho^3}{4\mu}\sqrt{\frac{1+x}{2}} \frac{\left( \frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) (1-x)}{\sqrt{1 - \frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}}} \right\} \\
& + \left\{ \rho^2 \left[ \frac{\rho}{2\mu} \left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} + \frac{\rho}{2(\lambda + 2\mu)} \right. \right. \\
& \left. \left( -\frac{\Delta\rho(\lambda + 2\mu)}{\rho^2} + \frac{\Delta\lambda + 2\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \right] + 2\rho\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\
& \left. \left( \Delta\rho - \frac{\Delta\mu\rho(1-x)}{\mu} \right) \right\} \sqrt{1 - \frac{(\lambda + 2\mu)(1-x)}{2\mu}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} \left. \right\} \varepsilon \\
& + O(\varepsilon^2). \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Devido ao fato que  $p = \sin \theta / v^s$ , o denominador assume a forma

$$\begin{aligned}
D = & 4\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\rho^2\sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}}\sqrt{\frac{1+x}{2}} + \left\{ \rho \left[ \rho \left( \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \right. \right. \right. \\
& \sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}} \left[ \frac{\rho}{2(\lambda+2\mu)} \left( -\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} + \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \right. \\
& \left. \left. \left. \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{1+x}{2}} + \frac{\left(\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\rho(1-x)}{4\mu\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \right] + \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \right. \right. \\
& \left. \left. \left[ \frac{\rho}{2\mu} \left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\left(\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\rho(1-x)}{4\mu\sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}}} \right] \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right\} + \\
& 2\Delta\mu\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}}\sqrt{\frac{1+x}{2}} \left. \right] + \\
& \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \left( \sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}} \left[ \frac{\left(\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho}\right)\rho^3(1-x)}{4\mu\sqrt{\frac{1+x}{2}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\frac{\Delta\mu}{\mu}\rho^2\sqrt{\frac{1+x}{2}}(1-x) \right] + \frac{\rho^3\left(\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho}\right)\sqrt{\frac{1+x}{2}}(1-x)}{4\mu\sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}}} \right) \\
& + \left[ \rho^2 \left( \frac{\rho}{2\mu} \left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} + \frac{\rho}{2(\lambda+2\mu)}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left( -\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} + \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \right) + 2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\rho \times \right. \\
& \left. \left. \left( \Delta\rho - \frac{\Delta\mu\rho(1-x)}{\mu} \right) \right] \sqrt{1-\frac{(\lambda+2\mu)(1-x)}{2\mu}}\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right\} \varepsilon +
\end{aligned}$$

$O(\varepsilon^2)$ .

(A.6)

Fazendo a expansão em série de Taylor de  $N_{SS}/D$ , simplificando o resultado e tomando o termo de primeira ordem, temos

$$S_{SS}(\theta) = \frac{-\Delta\mu}{2\mu(1+x)} + \frac{\Delta\rho x}{2\rho(1+x)} + \frac{\Delta\mu}{\mu} \frac{x^2}{1+x}. \quad (\text{A.7})$$

### Espalhamento P-S

Usando o Mathematica na fórmula (3.71) e nas novas fórmulas dadas em (3.72), obtemos

$$N_{PS} = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \left[ v_s v_p \rho \left( \Delta\rho - 2\Delta\mu \frac{\sin \alpha \sin \beta}{v_s v_p} \right) + 2\Delta\mu \rho \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (\text{A.8})$$

e

$$\begin{aligned} D = & 4v_s v_p \rho^2 \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} + \\ & \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \left[ \rho^2 \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{\left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) v_s v_p \rho}{2\mu} + \frac{\left( -\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} + \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) v_s v_p \rho}{2(\lambda+2\mu)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2v_s v_p \rho \left( \Delta\rho - 2\Delta\mu \frac{\sin \alpha \sin \beta}{v_p v_s} \right) \right] + v_s \rho \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \right. \\ & \times \left[ \frac{\left( \frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} - \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) \rho \sin \alpha \sin \beta}{2v_s \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta}} + \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \times \right. \\ & \left. \left( \Delta\rho v_p + \frac{\left( -\frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} + \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) v_p \rho}{2(\lambda+2\mu)} \right) \right] + v_p \rho \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \\ & \left. \left[ \frac{\left( \frac{\Delta\rho(\lambda+2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta\lambda+2\Delta\mu}{\rho} \right) \rho \sin \alpha \sin \beta}{2v_p \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta}} + \left( \Delta\rho v_s + \frac{\left( -\frac{\Delta\rho\mu}{\rho^2} + \frac{\Delta\mu}{\rho} \right) v_s \rho^2}{2\mu} \right) \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \Big] + v_s v_p \left( \frac{\left( \frac{\Delta \rho (\lambda + 2\mu)}{\rho^2} - \frac{\Delta \lambda + 2\Delta \mu}{\rho} \right) \rho^2 \sin \alpha \sin \beta}{2v_s v_p \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta}} \right. \\
& \times \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} + \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \times \\
& \left( \frac{\left( \frac{\Delta \rho \mu}{\rho^2} - \frac{\Delta \mu}{\rho} \right) \rho^2 \sin \alpha \sin \beta}{2v_s v_p \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} + \frac{4\Delta \mu \rho \sin \alpha \sin \beta}{v_s v_p}} \right. \\
& \left. \left. \times \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \right) \Big] \varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a expansão em série de Taylor e simplificando, temos

$$\begin{aligned}
S_{PS} = & \left[ v_s \sin \alpha (\Delta \rho v_s v_p - 2\Delta \mu \sin \alpha \sin \beta + \right. \\
& \left. 2\Delta \mu \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{v_p}{v_s} \sin \alpha \sin \beta} \right] / \\
& \left[ 2\mu v_p \sqrt{1 - \frac{v_s}{v_p} \sin \alpha \sin \beta} \right]. \tag{A.11}
\end{aligned}$$

## Apêndice B

# Função de Green para um meio acústico com velocidade constante

Neste apêndice deduzimos a solução da equação (4.4) para um meio acústico homogêneo, i.e., a função de Green acústica para um meio com velocidade constante. Para um meio homogêneo,  $\rho_{,i} = 0$  e a equação (4.4) torna-se

$$g_{,ii} - \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}\ddot{g} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0). \quad (\text{B.1})$$

Usamos a transformada de Fourier no tempo para a função de Green,

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) e^{i\omega t} dt, \quad (\text{B.2})$$

e rescrevemos a equação (B.1) da seguinte forma

$$G_{,ii}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0, t_0) + k^2 G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0, t_0) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) e^{i\omega t_0}, \quad (\text{B.3})$$

onde  $k^2 = \omega^2/v^2$ .

Rescrevendo (B.3) em coordenadas esféricas ( $x = r \cos \theta \sin \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \phi$ ), e levando em conta a simetria esférica, obtemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG_r}{dr} \right) + k^2 G_r = -\delta(r) e^{i\omega t_0}, \quad (\text{B.4})$$

onde  $G_r = G_r(r, \omega, t_0) = G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0, t_0)$  e  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ .

A equação (B.4) pode ser rescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d^2}{dr^2} [rG_r] \right) + k^2 G_r = -\delta(r) e^{i\omega t_0}, \quad (\text{B.5})$$

que tem como solução (veja, por exemplo, Butkov, 1983)

$$G_r(r, \omega, t_0) = \frac{G_1}{r} e^{ikr} + \frac{G_2}{r} e^{-ikr}, \quad (\text{B.6})$$

onde  $G_1$  e  $G_2$  são constantes que dependem de  $t_0$ .

A solução de (B.6) representa duas ondas esféricas. A primeira parcela em (B.6) representa uma *onda esférica "outgoing"*, i.e., uma onda que propaga da origem para o infinito conforme o tempo vai crescendo. A segunda parcela em (B.6) representa uma *onda esférica "ingoing"*, ela se propaga na direção da origem conforme o tempo cresce. Vamos considerar apenas as ondas outgoing, i.e.,  $G_2 = 0$ . Para especificarmos  $G_r(r, \omega, t_0)$ , devemos encontrar  $G_1$ . Para  $r \neq 0$  o valor de  $G_1$  não pode ser determinado. A solução tem uma singularidade em  $r = 0$ , logo é impossível determinar  $G_1$  somente com  $G_r$  em  $r = 0$ . Para determinarmos  $G_1$ , integramos a equação (B.3) sob a esfera  $V_\epsilon$  de raio  $\epsilon$  e centro na origem, obtendo

$$\iiint_{V_\epsilon} \frac{\partial^2 G_r}{\partial x_i^2} dV + k^2 \iiint_{V_\epsilon} G_r dV = -e^{i\omega t_0}. \quad (\text{B.7})$$

Aplicando o teorema de Gauss na primeira integral de (B.7) e usando (B.6) com  $G_2 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\epsilon} G_{r,ii} dV &= \iint_{S_\epsilon} \frac{\partial G_r}{\partial x_i} \eta_i dS = \iint_{S_\epsilon} \frac{\partial G_r}{\partial r} dS \\ &= \iint_{S_\epsilon} \left( -\frac{G_1}{\epsilon^2} + \frac{G_1}{\epsilon} ik \right) e^{ik\epsilon} dS = 4\pi\epsilon^2 \left( -\frac{G_1}{\epsilon^2} + \frac{G_1}{\epsilon} ik \right) e^{ik\epsilon} \\ &= 4\pi(-G_1 + ik\epsilon G_1) e^{ik\epsilon}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde  $S_\epsilon$  é a superfície de  $V_\epsilon$ . Podemos escrever a equação (B.7) da seguinte forma

$$4\pi(-G_1 + ik\epsilon G_1) e^{ik\epsilon} + k^2 \iiint_{V_\epsilon} \frac{G_1}{r} e^{ikr} dV = -e^{i\omega t_0}. \quad (\text{B.9})$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  em (B.9), a integral de volume vai para zero e ficamos com

$$G_i = \frac{1}{4\pi} e^{i\omega t_0}. \quad (\text{B.10})$$

Portanto

$$G_r(r, \omega, t_0) = \frac{1}{4\pi r} e^{i\omega(t_0 - r/v)}. \quad (\text{B.11})$$

Usando a transformada de Fourier inversa da função de Green, obtemos

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_r(r, \omega, t_0) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi r} e^{-i\omega(t - (t_0 + r/v))} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r} \delta(t - t_0 - r/v). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Esta é a função de Green para um meio acústico com velocidade constante.

## Apêndice C

### Linearização do coeficiente de reflexão para o meio acústico

Neste apêndice fazemos os cálculos para mostrar a aproximação dada na equação (4.40). Para isto, usamos a hipótese que o meio em questão apresenta contraste fraco. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta^s}{v_0^2(\mathbf{x})} - \frac{1}{v_0^2(\mathbf{x})} + \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}} &= \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \sqrt{-\sin^2 \theta^s + \frac{v_0^2(\mathbf{x})}{v^2(\mathbf{x})}} \\ &= \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \sqrt{-\sin^2 \theta^s + \frac{k_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 + \Delta\rho}{k_0 + \Delta k} \right)} \\ &= \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \sqrt{-\sin^2 \theta^s + \left( 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{1}{1 + \Delta k/k_0} \right)} \\ &\approx \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \sqrt{-\sin^2 \theta^s + \left( 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) \left( 1 - \frac{\Delta k}{k_0} \right)} \\ &\approx \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \sqrt{-\sin^2 \theta^s + 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{\Delta k}{k_0}} \\ &= \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \sqrt{\cos^2 \theta^s + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{\Delta k}{k_0}} \\ &\approx \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \left[ \cos \theta^s + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \theta^s} \left( \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{\Delta k}{k_0} \right) \right]. \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

Aqui usamos que  $-\pi/2 < \theta^s < \pi/2$ . Utilizando este resultado em (4.42), o numerador toma a seguinte forma

$$\frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \frac{1}{2 \cos \theta^s} \left[ (2 \cos^2 \theta^s - 1) \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + \frac{\Delta \mathbf{k}}{k_0} \right], \quad (\text{C.2})$$

e o denominador

$$\frac{1}{v_0(\mathbf{x})} 2 \cos \theta^s \left\{ 1 + \frac{1}{4 \cos^2 \theta^s} \left[ (2 \cos^2 \theta^s + 1) \frac{\Delta \rho}{\rho_0} - \frac{\Delta \mathbf{k}}{k_0} \right] \right\}. \quad (\text{C.3})$$

Portanto

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}, \theta^s(\mathbf{x})) &\approx \left\{ 1 - \frac{1}{4 \cos^2 \theta^s} \left[ (2 \cos^2 \theta^s + 1) \frac{\Delta \rho}{\rho_0} - \frac{\Delta \mathbf{k}}{k_0} \right] \right\} \\ &\approx \frac{1}{4 \cos^2 \theta^s} \left[ \cos 2\theta^s \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + \frac{\Delta \mathbf{k}}{k_0} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (1 - \tan^2 \theta^s) \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + (1 + \tan^2 \theta^s) \frac{\Delta \mathbf{k}}{k_0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$