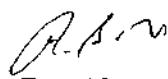


8.0
11/10/95

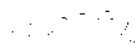
Sobre Polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuições

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Eliana Xavier Linhares de Andrade e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de março de 1995.

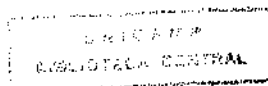


Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
orientador



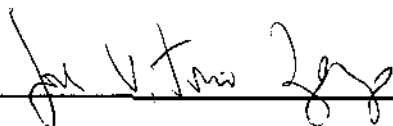
Prof.ª Dra. Maria Cristina C. Cunha
co-orientadora

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de DOUTOR em Ciências em Matemática Aplicada.

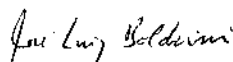


Tese defendida e aprovada em, 23 de Março de 199

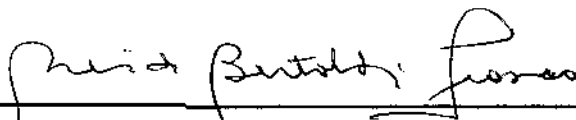
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



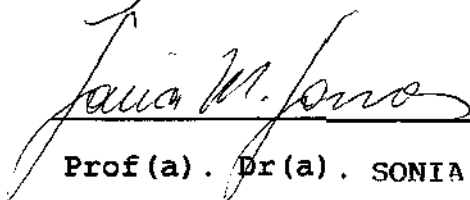
Prof(a). Dr(a). JOSE VITORIO ZAGO



Prof(a). Dr(a). JOSE LUIZ BOLDRINI



Prof(a). Dr(a). NEIDE MARIA BERTOLI FRANCO



Prof(a). Dr(a). SONIA MARIA GOMES



Prof(a). Dr(a). ALAGACONE SRI RANGA

ao Audeni, esposo e companheiro querido
e
às minhas filhas Milena, Vanessa e Cíntia,
dedico.

À minha mãe, ofereço.

Agradecimentos

Ao Prof. A. Sri Ranga, pelo estímulo, apoio e pela orientação atenciosa e segura deste trabalho.

À Prof^a Maria Cristina Castro Cunha, orientadora do programa de doutorado, pela confiança em mim depositada , pela amizade e ótimo convívio.

À minha família, por tanto carinho e confiança e também pela compreensão à minha ausência constante.

Ao meu pai, pelo carinho, estímulo e demasiada confiança dedicados a mim e por todas as vezes que prontamente atendeu às minhas solicitações.

À Prof^a Cleonice Fátima Bracciali, colega e amiga querida, pela valiosa contribuição na correção deste trabalho.

Aos colegas do DCCE / IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto especialmente os da área de Análise Numérica, pelo estímulo e apoio, que foram decisivos à realização deste trabalho.

Aos amigos do curso de doutorado, pelos bons momentos que me propiciaram.

À CAPES / PICD - pelo apoio financeiro .

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar certos polinômios similares aos ortogonais e regras de quadratura interpolatórias associadas, para uma classe de distribuições fortes, $d\psi(t)$, definidas em um intervalo $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, que possuem a propriedade de simetria (inversa) $d\psi(t) = -d\psi(c/t)$, $c > 0$, $t \in (a, b)$.

Abstract

The main purpose of this work is to study certain polynomials which are similar to orthogonal polynomials and their associated interpolating quadrature rules, for a class of strong distributions, $d\psi(t)$, defined on an interval $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, which satisfy the symmetric property $d\psi(t) = -d\psi(c/t)$, $c > 0$, $t \in (a, b)$.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Polinômios Ortogonais e Similares	6
2.1	Polinômios Ortogonais	6
2.2	Polinômios Similares.	9
2.3	Algumas propriedades dos polinômios similares e associados	14
2.4	Fórmulas de Quadratura	20
3	Polinômios que dependem de um parâmetro	24
3.1	Introdução	24
3.2	Propriedades dos polinômios $B_n(\lambda, z)$ e associados	29
3.3	Fórmulas de Quadratura	34
3.4	Determinação dos zeros de $B_n(\lambda, z)$	37
3.4.1	Método LR modificado	41
4	Classe de distribuições especiais	47

4.1	Introdução	47
4.2	As distribuições $S\bar{c}S(a, b)$ e $B_n(\lambda, z)$	52
4.3	Exemplos	56
5	Conclusão	69
	Referências Bibliográficas	72

Capítulo 1

Introdução

Seja $\psi(t)$ uma função definida em (a, b) real, limitada, não-decrescente, com infinitos pontos de aumento em (a, b) e tal que os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t) , \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

existem e são finitos.

Nessas condições $d\psi(t)$ é uma distribuição (ou medida) em (a, b) . Se $f(z)$ é positiva para $z \in (a, b)$ então, se $\int_a^b f(t)d\psi(t)$ existe, é positiva. Se os μ_m existem para $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, então a distribuição $d\psi(t)$ é *forte*, assim chamada pois surgiu como solução de problemas fortes de momento, estudados por Jones, Thron e Waadeland [16] e Jones, Njåstad e Thron [13].

Referimo-nos à distribuição forte em (a, b) como uma *distribuição forte de Stieltjes*, ou, simplesmente, distribuição $SS(a, b)$, se $(a, b) \subseteq (0, \infty)$. Qualquer distribuição $SS(a, b)$ é, também, uma distribuição $SS(0, \infty)$ com $\psi(t)$ constante fora de (a, b) .

Todas as integrais, aqui neste trabalho, são do tipo Riemman-Stieltjes.

Dada uma distribuição $SS(a, b)$, $d\psi(t)$, os polinômios $B_n(z)$, $n \geq 1$, definidos por:

$$(i) \quad B_n(z) \quad \text{é mônico de grau } n, \quad n \geq 0; \tag{1.2}$$

$$(ii) \quad \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1,$$

são bastante estudados nos contextos de frações contínuas (M-fração, T- fração) associadas a duas séries de potências (ver, por exemplo, Jones, Njåstad e Thron [12] e Sri Ranga [20]), e fórmulas de quadratura do tipo

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{r=1}^n W_{n,r} f(z_{n,r}) + E_n(f),$$

onde

$$E_n(f) = 0 \text{ sempre que } t^n f(t) \in \mathcal{P}_{2n-1}.$$

Veja, por exemplo, os trabalhos de Sri Ranga e Andrade [23], Sri Ranga [25], Jones, Thron e Waadeland [16] e Jones e Thron [14].

As regras de quadratura acima são as mesmas regras gaussianas associadas a polinômios de Laurent (ou L-polinômios) consideradas em Jones e Thron [15] e Jones, Njåstad e Thron [13].

Em Sri Ranga [25], investigou-se os polinômios $B_n(z)$ e as regras de quadratura interpolatórias associadas, para uma classe de distribuições $SS(a, b)$, denotadas por distribuições $ScS(a, b)$, que satisfazem à propriedade de simetria (inversa):

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(c/t)}{\sqrt{c/t}}, \quad t \in (a, b).$$

Neste trabalho, propomos um estudo dos polinômios $B_n(\lambda, z)$ definidos por

$$B_n(\lambda, z) = B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z),$$

onde λ é um parâmetro real.

Porém, nosso principal objetivo, é investigar os polinômios $B_n(\lambda, z)$ e as regras de quadratura interpolatórias para uma classe de distribuições $SS(a, b)$ que possuem a seguinte propriedade de simetria:

$$d\psi(t) = -d\psi(c/t), \quad t \in (a, b),$$

para $c > 0$ e que chamaremos de distribuições $S\bar{c}S(a, b)$.

Nosso interesse em estudar essa classe de distribuições iniciou-se com a distribuição $S\bar{c}S(a, b)$

$$d\bar{\psi}(t) = \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt, \quad (1.3)$$

que surge da seguinte maneira:

Consideremos dada uma relação de recorrência da forma

$$P_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z),$$

onde

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z - \beta_1$$

e, $\beta_n, \alpha_{n+1}, \quad n \geq 1$, são números reais positivos, limitados inferior e superiormente.

Se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha > 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta > 0 \quad \text{então,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(z)}{nP_n(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{z-t} \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt,$$

onde

$$a = \left\{ \sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha} \right\}^2 \quad e \quad b = \left\{ \sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha} \right\}^2.$$

A prova do resultado acima, encontra-se no capítulo 4 deste trabalho.

Para o caso de polinômios ortogonais, é bem conhecido que satisfaz à relação de recorrência

$$Q_{n+1}(z) = (z - \gamma_{n+1})Q_n(z) - \lambda_{n+1}Q_{n-1}(z),$$

onde

$$Q_0(z) = 1, \quad Q_1(z) = z - \gamma_1$$

e, $\gamma_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}, \lambda_{n+1} > 0, n \geq 1$.

Um resultado, devido a Blumenthal [1], é o seguinte:

Se, γ_n e $\lambda_{n+1} > 0, n \geq 1$, são números reais limitados e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma \quad \text{então,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{nQ_n(z)} = \int_a^b \frac{1}{z-t} \frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt,$$

onde $a = \gamma - 2\sqrt{\lambda}$ e $b = \gamma + 2\sqrt{\lambda}$.

Notemos que a distribuição acima é a distribuição de Tchebyshev deslocada para o intervalo (a, b) . De certa maneira, a distribuição $d\bar{\psi}(t)$, dada em (1.3) é como a distribuição de Tchebyshev para o caso dos polinômios similares (1.2).

Para realizarmos o estudo proposto, organizamos este trabalho em cinco capítulos, sendo o primeiro introdutório e o último de conclusões. Essa ordem foi escolhida naturalmente, onde os resultados de cada capítulo, a partir do segundo, serão usados nos capítulos posteriores.

No segundo capítulo - *Polinômios ortogonais e similares* - fazemos um breve estudo sobre os polinômios ortogonais e similares aos ortogonais: definições, propriedades e alguns resultados sobre seus zeros e fórmulas de quadratura associadas. Esses polinômios são pré-requisitos essenciais ao desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 3 - *Polinômios que dependem de um parâmetro* - definimos os polinômios $B_n(\lambda, z)$, onde λ é um parâmetro real, a partir dos polinômios $B_n(z)$ dados por (1.2). Na segunda secção desse capítulo, provamos algumas propriedades sobre $B_n(\lambda, z)$ e polinômios associados, dentre as quais uma relação de recorrência de três termos para o caso de $\lambda = \alpha_{n+1}$ e sobre os zeros de $B_n(\lambda, z)$. Na secção 3 construímos uma fórmula de quadratura associada a $B_n(\lambda, z)$ e demonstramos algumas propriedades satisfeitas pelos pesos dessa fórmula. Ainda nesse capítulo, na quarta secção, apresentamos uma maneira versátil e eficiente para determinarmos os zeros de $B_n(\lambda, z)$.

No capítulo 4 - *Classe de distribuições especiais* - demonstramos alguns resultados sobre os polinômios $B_n(z)$ e $B_n(\lambda, z)$ associados à classe de distribuições $S\bar{c}S(a, b)$. Propriedades sobre as regras de quadratura associadas a $B_n(\lambda, z)$ são, também, apresentadas. Ainda nesse capítulo, damos alguns exemplos de distribuições $S\bar{c}S(a, b)$ e

aplicamos uma nova regra de quadratura, obtida como consequência do trabalho de Sri Ranga e Veiga [26], para a avaliação numérica de uma classe de integrais.

No capítulo 5 - *Conclusões* - apresentamos as conclusões e observações finais sobre o trabalho.

Por último, nas *Referências Bibliográficas*, relacionamos os livros e artigos por nós consultados ou citados .

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais e Similares

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre os polinômios ortogonais e similares aos ortogonais, pré-requisitos essenciais ao desenvolvimento deste trabalho. Em Sri Ranga [20], encontramos todos os resultados aqui apresentados sobre os polinômios similares. Optamos por incluir, aqui, algumas provas, pois omitiremos, nos capítulos posteriores, provas que podem ser deduzidas dessas apenas com pequenas modificações.

2.1 Polinômios Ortogonais

Entre os polinômios associados à relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais.

As aplicações de tais polinômios à Análise Aplicada são muitas e novas aplicações surgem a todo momento (Gautschi [10]).

As aplicações dos polinômios ortogonais associados às chamadas medidas clássicas, como as de Jacobi, Hermite e Laguerre, têm, particularmente, papel fundamental em muitos problemas das ciências e das engenharias. Ao contrário do que gostaríamos, os polinômios ortogonais associados às medidas não clássicas ainda não gozam de semelhante privilégio. Isto se deve, em parte, às restrições encontradas para gerá-los.

A seguir, daremos a definição e algumas propriedades dos polinômios ortogonais. Para isso, consideremos $d\psi(t)$ uma distribuição em (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1.1)$$

Uma sequência de polinômios ortogonais mônicos, $P_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, pode, então, ser definida por:

(i) $P_n(z)$ é mônico de grau n ,

$$(ii) \quad \int_a^b t^m P_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ v_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.2)$$

A relação (2.1.2) (ii) é equivalente à

$$\int_a^b P_m(t) P_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ c_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

A existência dessa sequência ortogonal, tal que $P_n(z)$ é precisamente de grau n , depende da condição:

$$H_n^{(0)} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.3)$$

onde $H_n^{(m)}$ são os determinantes de Hankel dados por:

$$H_{-1}^{(m)} = 0, \quad H_0^{(m)} = 1, \\ H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+m} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}. \quad (2.1.4)$$

A condição (2.1.3) pode ser facilmente provada (ver, por exemplo, Chihara [2]) e, como o coeficiente do termo de maior grau é um, os polinômios $P_n(z)$ são, também, únicos.

O fato de $d\psi(t)$ ser uma medida não negativa (ou distribuição positiva definida) nos garante que $v_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Estabelecida a existência da sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(z)\}_{n=0,1,\dots}$, podemos definir uma segunda sequência de polinômios, $\{Q_n(z)\}_{n=0,1,\dots}$, onde $Q_n(z)$ tem grau $n - 1$, do seguinte modo:

$$Q_n(z) = \int_a^b \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z - t} d\psi(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esses são os polinômios associados que aparecem na teoria de polinômios ortogonais.

É fácil mostrar (ver Szegő [34], Chihara [2]) que os polinômios $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &= (z - b_{n+1})P_n(z) - a_{n+1}P_{n-1}(z) \\ Q_{n+1}(z) &= (z - b_{n+1})Q_n(z) - a_{n+1}Q_{n-1}(z) \end{aligned}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.5)$$

com

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1, \quad P_1(z) = z - b_1 \quad e \\ Q_0(z) &= 0, \quad Q_1(z) = \mu_0 \end{aligned}$$

e os coeficientes a_{n+1} e b_{n+1} são dados por:

$$a_{n+1} = \frac{\int_a^b P_n^2(t) d\psi(t)}{\int_a^b P_{n-1}^2(t) d\psi(t)}, \quad n \geq 1 \quad e \quad b_{n+1} = \frac{\int_a^b t P_n^2(t) d\psi(t)}{\int_a^b P_n^2(t) d\psi(t)}, \quad n \geq 0.$$

Como podemos notar, os coeficientes a_{n+1} são positivos para todo $n \geq 1$.

O aspecto mais interessante da relação de recorrência de três termos (2.1.5) é que os coeficientes $a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$, contém todas as informações sobre os polinômios $P_n(z)$. Especificando, como mencionado em Gautschi [9]:

- Os coeficientes a_n e b_n fornecem uma maneira compacta para se representar os polinômios ortogonais, requerendo-se somente dois vetores de parâmetros, o

mesmo não ocorrendo com os coeficientes ou com os zeros dos polinômios, que necessitam de matrizes bi-dimensionais.

- Conhecendo-se os coeficientes a_n e b_n , é possível calcular os valores de $P_n(z)$ ou de suas derivadas, facilmente, através de (2.1.5). O procedimento não é apenas direto mas, também, muito mais estável que o cálculo de $P_n(z)$ (ou de suas derivadas) através de seus coeficientes.
- A partir dos coeficientes a_n e b_n podemos construir a matriz tri-diagonal simétrica:

$$J_n = \begin{pmatrix} b_1 & \sqrt{a_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{a_2} & b_2 & \sqrt{a_3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_3} & b_3 & \sqrt{a_4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{a_{n-1}} & b_{n-1} & \sqrt{a_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{a_n} & b_n \end{pmatrix},$$

conhecida por matriz de Jacobi de ordem n , que nos permite calcular os zeros de $P_n(z)$ rápida e eficientemente, pois são os auto-valores de J_n .

Todas as técnicas modernas de se gerar polinômios ortogonais, principalmente o método de Stieltjes, o algoritmo de Tchebyshev e o algoritmo modificado de Tchebyshev foram idealizados com o objetivo de fornecer os coeficientes a_n e b_n e, portanto, o usuário pode se beneficiar de todas as vantagens acima mencionadas.

Os polinômios ortogonais possuem muitas outras propriedades interessantes e um bom estudo sobre eles pode ser encontrado em Szegő [34] e Chihara [2].

2.2 Polinômios Similares.

A introdução do problema forte de momento pelos pesquisadores Jones, Thron e Waadeland [16] abriu caminho para o estudo de polinômios que apresentam propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. O problema forte de momento pode ser expresso da seguinte forma:

“Dado uma sequência $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ de números reais, em que condições existe uma medida não negativa $d\psi(t)$ tal que

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots? \quad ”$$

Jones, Thron e Waadeland resolveram o problema acima, quando $d\psi(t)$ é uma medida forte de Stieltjes, isto é, $(a, b) \subseteq (0, \infty)$. Com o objetivo de estudar o problema forte de momento para o caso em que $a = -\infty$ e $b = \infty$, conhecido como problema forte de momento de Hamburger, Sri Ranga [20] introduziu uma sequência de polinômios mônicos $B_n^{(k)}(z)$, similares aos polinômios ortogonais, definidos por:

$$\int_a^b t^{k-n+s} B_n^{(k)}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1 \\ \rho_n^{(k)} > 0, & \text{se } s = n \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \dots$ e para k inteiros positivos ou negativos, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $d\psi(t)$ é uma distribuição para a qual os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

existem e são finitos.

Vamos considerar, aqui, somente os polinômios $B_n^{(k)}(z)$ para $k = 0$ e intervalos $[a, b]$ que estejam totalmente contidos do lado positivo do eixo real, isto é, $0 \leq a < b \leq \infty$. Assim, $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes. Denotaremos tais polinômios por $B_n(z)$ e os chamaremos, simplesmente, de polinômios similares.

Portanto, os polinômios $B_n(z), n = 0, 1, 2, \dots$, são dados por:

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1 \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

O resultado que demonstraremos a seguir é de primordial importância para a prova da existência dos polinômios $B_n(z)$.

Teorema 2.1 Para as distribuições fortes de Stieltjes, $d\psi(t)$, (para as quais os momentos μ_m satisfazem (2.2.1), os determinantes de Hankel, $H_n^{(m)}$, dados em (2.1.4) satisfazem:

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad (2.2.3)$$

para m, n inteiros, $n \geq 1$.

Demonstração: Para provar o resultado acima, basta mostrarmos que a matriz:

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{pmatrix}$$

é definida positiva, isto é, o produto interno $\langle \mathcal{H}_n x, x \rangle > 0$, para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Mas, se $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, então :

$$\langle \mathcal{H}_n x, x \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i+j} x_i x_j.$$

Por (2.2.1):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_n x, x \rangle &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b t^{m+i+j} x_i x_j d\psi(t) \\ &= \int_a^b t^m \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i x_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} t^j x_j \right) d\psi(t) \\ &= \int_a^b t^m \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i x_i \right)^2 d\psi(t). \end{aligned}$$

Como $0 \leq a < b \leq \infty$, obtemos que $\langle \mathcal{H}_n x, x \rangle > 0$.

Portanto, $\det \mathcal{H}_n = H_n^{(m)} > 0$, m, n inteiros, $n \geq 1$. $\square$

Como estamos considerando polinômios $B_n(z)$ mônicos, se

$$B_n(z) = \sum_{r=0}^n b_{n,n-r} z^{n-r}, \quad \text{então} \quad (2.2.4)$$

$b_{n,n} = 1$, para todo $n \geq 0$.

Usando (2.2.1), podemos escrever (2.2.2) como um sistema de equações lineares algébricas nos coeficientes de $B_n(z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{-n} b_{n,0} + \mu_{-n+1} b_{n,1} + \dots + \mu_0 b_{n,n} = 0 \\ \mu_{-n+1} b_{n,0} + \mu_{-n+2} b_{n,1} + \dots + \mu_1 b_{n,n} = 0 \\ \dots \qquad \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \mu_{-1} b_{n,0} + \mu_0 b_{n,1} + \dots + \mu_{n-1} b_{n,n} = 0 \\ \mu_0 b_{n,0} + \mu_1 b_{n,1} + \dots + \mu_n b_{n,n} = \rho_n \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

Usando a regra de Cramer, o coeficiente $b_{n,n}$ pode ser dado por:

$$b_{n,n} = \frac{\rho_n H_n^{(-n)}}{H_{n+1}^{(-n)}}, \quad n \geq 0.$$

Como consideramos $b_{n,n} = 1$, temos:

$$\rho_n = \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n)}} > 0, \quad n \geq 0. \quad (2.2.6)$$

Se substituirmos a última equação de (2.2.5) por (2.2.4) e, novamente, aplicarmos a regra de Cramer, obtemos:

$$B_n(z) = \frac{1}{H_n^{(-n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \dots & \mu_0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, n \geq 0. \quad (2.2.7)$$

Assim, vemos que a condição necessária e suficiente para a existência de $B_n(z)$ é que $H_n^{(-n)} \neq 0$.

Se substituirmos $z = 0$ em (2.2.7), obtemos

$$B_n(0) = (-1)^n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)}} = b_{n,0}, \quad n \geq 0. \quad (2.2.8)$$

Logo, a condição necessária e suficiente para a existência do polinômio $B_n(z)$ com $B_n(0) \neq 0$ é que $H_n^{(-n)} \neq 0$ e $H_n^{(-n+1)} \neq 0$.

Portanto, pelo teorema 2.1, os polinômios mônicos similares $B_n(z)$, definidos por (2.2.2), existem, são únicos e $b_{n,0} \neq 0$.

Usando a relação:

$$\int_a^b t^{-(n+1)} B_n(t) d\psi(t) = \mu_{-n-1} b_{n,0} + \mu_{-n} b_{n,1} + \dots + \mu_{-1} b_{n,n}$$

em (2.2.5), encontramos:

$$\eta_n = \int_a^b t^{-(n+1)} B_n(t) d\psi(t) = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n-1)}}{H_n^{(-n)}}, \quad n \geq 0, \quad (2.2.9)$$

que é diferente de zero.

Associado ao polinômio similar $B_n(z)$ podemos definir um outro polinômio, $A_n(z)$, de grau $n - 1$, por:

$$A_n(z) = \int_a^b \frac{B_n(z) - B_n(t)}{z - t} d\psi(t), \quad n \geq 1. \quad (2.2.10)$$

É fácil ver que o coeficiente do termo de maior grau de $A_n(z)$ é μ_0 .

O quociente $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$ satisfaz:

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \dots + \frac{\mu_{n-1}}{z^n} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \\ -\mu_{-1} - \mu_{-2}z - \dots - \mu_{-n}z^{n-1} + O(z^n). \end{cases}$$

Facilmente podemos mostrar esse resultado bastando, para isso, dividirmos (2.2.10) por $B_n(z)$. Daí, segue que:

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \int_a^b \frac{1}{z-t} d\psi(t) - \frac{1}{B_n(z)} \int_a^b \frac{B_n(t)}{z-t} d\psi(t).$$

Expandindo o lado direito dessa igualdade nas vizinhanças do infinito e do zero e usando a relação (2.2.2), obtemos o resultado desejado.

Considerando a equação (2.2.10) para $A_n(z)$, encontramos:

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \int_a^b t^{-p} \frac{t^p B_n(z) - t^p B_n(t)}{z-t} d\psi(t) \\ &= \int_a^b t^{-p} \frac{t^p B_n(z) - z^p B_n(t)}{z-t} d\psi(t) + \int_a^b t^{-p} \frac{(z^p - t^p) B_n(t)}{z-t} d\psi(t). \end{aligned}$$

Por (2.2.2), a segunda integral do lado direito da equação acima é nula para $1 \leq p \leq n$.

Portanto,

$$A_n(z) = \int_a^b t^{-p} \frac{t^p B_n(z) - z^p B_n(t)}{z-t} d\psi(t), \quad 0 \leq p \leq n. \quad (2.2.11)$$

2.3 Algumas propriedades dos polinômios similares e associados

Os polinômios similares $B_n(z)$ e seus polinômios associados $A_n(z)$, definidos na secção anterior, exibem muitas propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais.

A mais interessante e útil delas é a relação de recorrência de três termos que daremos a seguir.

Teorema 2.2 *Sejam $B_n(z)$ e $A_n(z)$ os polinômios definidos em (2.2.2) e (2.2.10), respectivamente. Então, as seguintes relações de recorrência são verdadeiras para $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned} B_{n+1}(z) &= (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-1}(z), \quad (a) \\ A_{n+1}(z) &= (z - \beta_{n+1})A_n(z) - \alpha_{n+1}zA_{n-1}(z), \quad (b) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

onde

$$B_0(z) = 1, \quad B_1(z) = z - \beta_1$$

$$A_0(z) = 0, \quad A_1(z) = \mu_0$$

e os coeficientes α_{n+1} e β_{n+1} satisfazem:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} > 0, \quad n \geq 1 \tag{2.3.2}$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}, \quad n \geq 1, \tag{2.3.3}$$

onde ρ_n e η_n são os definidos em (2.2.6) e (2.2.9), respectivamente.

Demonstração:

Para provar esses resultados, vamos considerar, primeiramente, os polinômios $B_n(z)$. Como $B_n(z)$ é um polinômio mônico de grau n , o polinômio:

$$B_{n+1}(z) - zB_n(z)$$

é de grau, no máximo, n . Portanto, pode ser escrito sob a forma:

$$B_{n+1}(z) - zB_n(z) = -\beta_{n+1}B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-1}(z) + P_{n-1}(z),$$

onde α_{n+1} e β_{n+1} são tais que $P_{n-1}(z)$ é de grau $n-1$.

Tomemos

$$P_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} z^j.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima por z^{-n+s} e integrando, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b t^{-n+s} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+s+1} B_n(t) d\psi(t) \\
&= -\beta_{n+1} \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) - \alpha_{n+1} \int_a^b t^{-(n-1)+s} B_{n-1}(t) d\psi(t) \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} \int_a^b t^{-n+j+s} d\psi(t).
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n-1$, respectivamente, na equação acima, obtemos o sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} \mu_{-n+j} & = & 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} \mu_{-n+1+j} & = & 0 \\ \vdots & & \\ \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} \mu_{-2+j} & = & 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} \mu_{-1+j} & = & \alpha_{n+1} \rho_{n-1} - \rho_n \end{array} \right.$$

cujas incógnitas são os coeficientes do polinômio $P_{n-1}(z)$ e cujo determinante da matriz dos coeficientes é $H_n^{(-n)}$ que, como já sabemos, é maior do que zero.

Assim, se tomarmos:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$$

o sistema será homogêneo e, sua única solução é $p_{n-1,j} = 0$, $j = 0, \dots, n-1$, o que significa dizer que $P_{n-1}(z) \equiv 0$ e, assim (2.3.1)(a) está provado.

Para determinarmos o coeficiente β_{n+1} , tomemos $s = -1$ em (2.3.4).

Logo, $0 = -\beta_{n+1} \eta_n - \alpha_{n+1} \eta_{n-1}$ e, daí, segue, imediatamente, (2.3.3).

Podemos, agora, usar a relação (2.3.1)(a) para mostrarmos (2.3.1)(b). Temos que:

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(z) - B_{n+1}(t) &= (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n+1}(z) \\
&\quad - (t - \beta_{n+1})B_n(t) + \alpha_{n+1}tB_{n+1}(t) \\
&= (z - \beta_{n+1})(B_n(z) - B_n(t)) \\
&\quad - \alpha_{n+1}z(B_{n-1}(z) - B_{n-1}(t)) + (z - t)(B_n(t) - \alpha_{n+1}B_{n-1}(t))
\end{aligned}$$

Dividindo por $(z - t)$ e integrando, obtemos:

$$A_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})A_n(z) - \alpha_{n+1}zA_{n-1}(z) + \rho_n - \alpha_{n+1}\rho_{n-1}$$

que, de (2.3.2), é a relação de recorrência (2.3.1)(b).

Isto completa a prova do teorema. $\square$

Substituindo (2.2.6) e (2.2.9), respectivamente em (2.3.2) e (2.3.3), podemos escrever:

$$\alpha_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)} H_n^{(-n+1)}} > 0, \quad n \geq 1 \quad (2.3.5)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_n^{(-n+1)} H_{n+1}^{(-n-1)}} > 0, \quad n \geq 1. \quad (2.3.6)$$

A última equação também é verdadeira para $n = 0$, em vista de $\beta_1 = b_{1,0}$.

Podemos, ainda, escrever

$$\alpha_{n+1} = \frac{\int_a^b B_n(t) d\psi(t)}{\int_a^b B_{n-1}(t) d\psi(t)}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\int_a^b t^{-n} B_{n-1}(t) d\psi(t)}{\int_a^b t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t)}.$$

Como consequências da relação de recorrência de três termos, muitos resultados envolvendo $B_n(z)$ e $A_n(z)$ podem ser encontrados como, por exemplo, as relações abaixo:

$$A_n(z)B_{n-1}(z) - A_{n-1}(z)B_n(z) = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2 \mu_0 z^{n-1}, \quad n \geq 2, \quad (2.3.7)$$

$$G_{n+1}(z) = \{B_n(z)\}^2 + \alpha_{n+1}\beta_n\{B_{n-1}(z)\}^2 + \alpha_{n+1}\alpha_n z^2 G_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.3.8)$$

onde

$$G_n(z) = B'_n(z)B_{n-1}(z) - B'_{n-1}(z)B_n(z), \quad n \geq 1.$$

Aqui, $B'_n(z)$ corresponde à derivada de $B_n(z)$.

De (2.3.8), segue que:

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(z) &= \{B_{2n}(z)\}^2 + \alpha_{2n+1}\beta_{2n}\{B_{2n-1}(z)\}^2 \\ &\quad + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}z^2\{B_{2n-2}(z)\}^2 \\ &\quad + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\beta_{2n-2}z^2\{B_{2n-3}(z)\}^2 \quad (a) \\ &\quad + \dots + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\dots\alpha_4\alpha_3\beta_2z^{2n-2}\{B_1(z)\}^2 \\ &\quad + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\dots\alpha_3\alpha_2z^{2n}\{B_0(z)\}^2, \\ e &\hspace{15em} (2.3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2n}(z) &= \{B_{2n-1}(z)\}^2 + \alpha_{2n}\beta_{2n-1}\{B_{2n-2}(z)\}^2 \\ &\quad + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}z^2\{B_{2n-3}(z)\}^2 \\ &\quad + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}\beta_{2n-3}z^2\{B_{2n-4}(z)\}^2 \quad (b) \\ &\quad + \dots + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\dots\alpha_4\alpha_3z^{2n-2}\{B_1(z)\}^2 \\ &\quad + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\dots\alpha_3\alpha_2\beta_1z^{2n-2}\{B_0(z)\}^2. \end{aligned}$$

De (2.2.3) e (2.2.8) temos que todos os polinômios $B_n(z)$ existem e satisfazem $B_n(0) \neq 0$, $n \geq 1$. Logo, $z = 0$ não é zero dos polinômios $B_n(z)$. Além disso, se $z = z_{n,i}$ é um zero de $B_n(z)$, pela fórmula (2.3.7):

$$A_n(z_{n,i})B_{n-1}(z_{n,i}) = \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_2\mu_0(z_{n,i})^{n-1}.$$

Segue, então, o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *Se $z_{n,i}$ é um zero do polinômio similar $B_n(z)$, para $n \geq 1$, então, ele é diferente dos zeros de $A_n(z)$ e dos de $B_{n-1}(z)$.*

Sobre os zeros dos polinômios similares $B_n(z)$ valem, ainda, os seguintes resultados:

Teorema 2.4 *Os zeros do polinômio similar $B_n(z)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração:

Como $0 \leq a < b \leq \infty$, z^{-n} não muda de sinal em (a, b) . Portanto, $B_n(z)$ deve mudar de sinal pelo menos uma vez em (a, b) , visto que

$$\int_a^b t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = 0.$$

Seja r , $0 < r < n$, a quantidade de pontos em (a, b) , onde $B_n(z)$ muda de sinal, pontos esses que chamaremos de:

$$z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,r}.$$

O polinômio: $z^{-n}(z - z_{n,1})(z - z_{n,2}) \dots (z - z_{n,r})B_n(z)$ não muda de sinal em (a, b) e, então,

$$\int_a^b t^{-n}(t - z_{n,1})(t - z_{n,2}) \dots (t - z_{n,r})B_n(t) d\psi(t) \neq 0.$$

Como $r < n$, por (2.2.2), este resultado é uma contradição.

Logo, existem, no mínimo, n pontos no intervalo (a, b) que são zeros de $B_n(z)$.

Como $B_n(z)$ é um polinômio de grau n , o resultado segue imediatamente. $\square$

Teorema 2.5 *Entre dois zeros consecutivos do polinômio $B_{n-1}(z)$ existe um zero de $B_n(z)$.*

Demonstração: De (2.3.9)(a) e (2.3.9)(b)

$$G_n(z) = \{B'_n(z)B_{n-1}(z) - B'_{n-1}(z)B_n(z)\} > 0, \quad (2.3.10)$$

para todo $z \in \mathbb{R}^+, n \geq 1$.

Como os zeros, $z_{n-1,r}$, $r = 1, \dots, n-1$, de $B_{n-1}(z)$ são simples, reais e positivos, temos que

$$\begin{aligned} G_n(z_{n-1,r}) &> 0 \\ B'_{n-1}(z_{n-1,r}) &\neq 0 \end{aligned}, r = 1, \dots, n-1.$$

Sejam $z_{n-1,j}$ e $z_{n-1,j+1}$ dois zeros consecutivos de $B_{n-1}(z)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $B'_{n-1}(z_{n-1,j}) > 0$. Logo, $B'_{n-1}(z_{n-1,j+1}) < 0$.

Assim, de (2.3.10):

$$B_n(z_{n-1,j}) < 0 \text{ e } B_n(z_{n-1,j+1}) > 0.$$

O resultado do teorema segue, portanto, imediatamente. $\square$

Vamos denotar, daqui por diante, os zeros de $B_n(z)$ por $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$, $n \geq 1$ que satisfazem:

$$z_{n,1} < z_{n,2} < \dots < z_{n,n}, n \geq 1.$$

2.4 Fórmulas de Quadratura

Regras de quadratura da forma

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{r=1}^n W_{n,r} f(x_{n,r}) + E_n(f) \quad (2.4.1)$$

são largamente usadas para aproximar integrais. As fórmulas de quadratura de máximo grau de precisão para as quais $E_n(f) = 0$ sempre que $f(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, são, também, conhecidas por regras de quadratura gaussianas e usam, para sua construção, os polinômios ortogonais. (ver, por exemplo, Krylov [17], Davis & Rabinowitz [5] e [6] ou Stroud & Secrest [33]).

Consideraremos, aqui, regras de quadratura da forma (2.4.1) onde $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes em (a, b) .

Seja $f(z)$ uma função real arbitrária.

Podemos expressar $z^n f(z)$ através de seu polinômio de interpolação sobre os n zeros de $B_n(z)$, $z_{n,r}$, $r = 1, 2, \dots, n$. Isto é,

$$F(z) = z^n f(z) = P_n(z) + R_n(z),$$

onde $P_n(z)$ é o polinômio interpolador de $F(z)$ de grau menor ou igual a $n - 1$ e $R_n(z)$, o erro resultante.

Escrevendo $P_n(z)$ na forma de Lagrange e $R_n(z)$ através da fórmula de diferenças divididas, obtemos:

$$F(z) = \sum_{r=1}^n \frac{B_n(z)}{(z - z_{n,r})B'_n(z_{n,r})} (z_{n,r})^n f(z_{n,r}) + B_n(z)F[z_{n,1}, \dots, z_{n,n}, z].$$

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade acima por z^{-n} e integrando em (a, b) , chegamos a:

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{r=1}^n W_{n,r} f(z_{n,r}) + E_n(f), \quad (2.4.2)$$

onde:

$$W_{n,r} = \frac{(z_{n,r})^n}{B'_n(z_{n,r})} \int_a^b t^{-n} \frac{B_n(t)}{t - z_{n,r}} d\psi(t), \quad (2.4.3)$$

para $r = 1, 2, \dots, n$ e,

$$E_n(f) = \int_a^b t^{-n} B_n(t) F[z_{n,1}, \dots, z_{n,n}, t] d\psi(t).$$

Se $F(z)$ é um polinômio de grau menor que $2n$, $F[z_{n,1}, \dots, z_{n,n}, z]$ é um polinômio de grau, no máximo, $n - 1$ (ver, por exemplo, Phillips & Taylor [19] ou de Boor [7]). Daí, prova-se facilmente que se $F(z) = z^n f(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$, então, $E_n(f) = 0$.

O teorema, a seguir, mostra que a regra de quadratura (2.4.2) é de máximo grau de precisão algébrica.

Teorema 2.6 Na fórmula de quadratura (2.4.2), $E_n(f) = 0$ sempre que $z^n f(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Demonstração: Como $F(z) = z^n f(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, $F[z_{n,1}, \dots, z_{n,n}, z]$ é um polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$.

Podemos, então, escrevê-la da forma:

$$F[z_{n,1}, \dots, z_{n,n}, z] = \sum_{s=0}^{n-1} v_s z^s.$$

Assim,

$$E_n(f) = \sum_{s=0}^{n-1} v_s \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t)$$

De (2.2.2), cada uma das parcelas do lado direito da igualdade acima é nula.

Portanto, $E_n(f) = 0$, sempre que $z^n f(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, como queríamos demonstrar.

□

Consequência imediata desse teorema é que a fórmula de quadratura (2.4.2) é interpolatória, isto é, $E_n(f) = 0$ sempre que $f(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Consideremos, agora, $z^n f(z) = \left\{ \frac{B_n(z)}{z - z_{n,j}} \right\}^2$, $1 \leq j \leq n$, um polinômio de grau $2n - 2$.

Então,

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) > 0. \quad \text{Mas,}$$

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \int_a^b t^{-n} \left\{ \frac{B_n(t)}{t - z_{n,j}} \right\}^2 d\psi(t), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Pelo teorema anterior, chegamos que:

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = W_{n,j} z_{n,j}^{-n} \{B'_n(z_{n,j})\}^2, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Portanto, $W_{n,j} > 0$, $1 \leq j \leq n$.

Teorema 2.7 *Se $z_{n,r}$, $r = 1, 2, \dots, n$, são os zeros de $B_n(z)$, então, os números reais $W_{n,r}$, $r = 1, 2, \dots, n$, tais que*

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{r=1}^n W_{n,r} f(z_{n,r})$$

sempre que $z^n f(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, existem, são únicos e maiores que zero.

Sri Ranga [20], seguindo a teoria dos polinômios ortogonais, chamou os números $W_{n,r}$ de números de Christoffel de $B_n(z)$.

Consideremos, agora, o quociente $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$, onde $A_n(z)$ é o polinômio associado a $B_n(z)$ definido em (2.2.10). $A_n(z)$ é um polinômio de grau $n - 1$. Logo, coincide com seu polinômio interpolador sobre os zeros $z_{n,r}$, $r = 1, \dots, n$, de $B_n(z)$. Isto é,

$$A_n(z) = \sum_{r=1}^n \frac{B_n(z)}{(z - z_{n,r})B'_n(z_{n,r})} A_n(z_{n,r}).$$

Daí,

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \sum_{r=1}^n \frac{\ell_{n,r}}{(z - z_{n,r})}, \quad n \geq 1 \quad (2.4.4)$$

onde

$$\ell_{n,r} = \frac{A_n(z_{n,r})}{B'_n(z_{n,r})}. \quad (2.4.5)$$

Mas, de (2.2.11)

$$A_n(z) = \int_a^b t^{-n} \frac{t^n B_n(z) - z^n B_n(t)}{z - t} d\psi(t).$$

Substituindo $z = z_{n,r}$ na equação acima

$$A_n(z_{n,r}) = (z_{n,r})^n \int_a^b t^{-n} \frac{B_n(t)}{t - z_{n,r}} d\psi(t).$$

Aplicando o resultado acima em (2.4.5), obtemos

$$\ell_{n,r} = W_{n,r}.$$

Portanto,

$$W_{n,r} = \frac{A_n(z_{n,r})}{B'_n(z_{n,r})}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Capítulo 3

Polinômios que dependem de um parâmetro

3.1 Introdução

Consideraremos, neste capítulo, polinômios mônicos de grau n , $B_n(\lambda, z)$, que dependem de um parâmetro real λ , que pode depender de n , e que definiremos por:

Definição 3.1: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos

$$B_n(\lambda, z) = B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.1.1)$$

onde $B_n(z)$, $n \geq 0$, são os polinômios similares definidos no capítulo anterior.

Esses polinômios são definidos a partir dos $B_n(z)$ do mesmo modo que os polinômios quase ortogonais são definidos a partir dos polinômios ortogonais (ver, por exemplo, Chihara [2]).

Multiplicando-se $B_n(\lambda, z)$ por z^{-n+s} e integrando em (a, b) , de (2.2.2) segue que:

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda, t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq s \leq n-1, & (a) \\ \rho_n - \lambda \rho_{n-1}, & \text{se } s = n & (b). \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Substituindo-se $B_n(\lambda, z) = \sum_{i=0}^n b_{n,n-i}^{(\lambda)} z^{n-i}$, onde $b_{n,n}^{(\lambda)} = 1$, em (3.1.2) (a) e (3.1.2)(b)

Fazendo $s = 1, 2, \dots, n-1$, de (2.2.2) e (3.1.4), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{n-2} \xi_j \int_a^b t^{-n+1} B_j(t) d\psi(t) = 0 \\ \sum_{j=0}^{n-3} \xi_j \int_a^b t^{-n+2} B_j(t) d\psi(t) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \sum_{j=0}^1 \xi_j \int_a^b t^{-2} B_j(t) d\psi(t) = 0 \\ \xi_0 \int_a^b t^{-1} B_0(t) d\psi(t) = 0 \end{array} \right.$$

que é um sistema triangular superior nas variáveis $\xi_{n-2}, \dots, \xi_1, \xi_0$.

De (2.2.9), concluímos que $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_{n-2} = 0$.

Fazendo $\lambda = -\xi_{n-1}$, chegamos ao resultado desejado. $\square$

Podemos mostrar, facilmente, de (3.1.2), que se $\lambda = \alpha_{n+1}$, então $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ satisfaz:

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\alpha_{n+1}, t) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n. \quad (3.1.5)$$

Associado ao polinômio $B_n(\lambda, z)$, podemos definir um outro polinômio de grau $n-1$ por:

$$A_n(\lambda, z) = \int_a^b \frac{B_n(\lambda, z) - B_n(\lambda, t)}{z - t} d\psi(t). \quad (3.1.6)$$

A verificação de que $A_n(\lambda, z)$ é um polinômio de grau $n-1$ é trivial, visto que $(z-t)$ é um fator de $(z^p - t^p)$, para $p \geq 1$.

De (3.1.1), obtemos:

$$A_n(\lambda, z) = A_n(z) - \lambda A_{n-1}(z), \quad n \geq 1. \quad (3.1.7)$$

Observemos que o coeficiente do termo de maior grau de $A_n(\lambda, z)$ é μ_0 , para $n \geq 1$.

De (3.1.2)(a), segue que:

$$A_n(\lambda, z) = \int_a^b t^{-p} \frac{t^p B_n(\lambda, z) - z^p B_n(\lambda, t)}{z - t} d\psi(t), \quad (3.1.8)$$

onde p é um inteiro qualquer, tal que $0 \leq p \leq n - 1$.

Se $\lambda = \alpha_{n+1}$, de (3.1.5), mostramos que:

$$A_n(\alpha_{n+1}, z) = \int_a^b t^{-p} \frac{t^p B_n(\alpha_{n+1}, z) - z^p B_n(\alpha_{n+1}, t)}{z - t} d\psi(t), \quad -1 \leq p \leq n - 1. \quad (3.1.9)$$

Analisando o quociente $\frac{A_n(\alpha_{n+1}, z)}{B_n(\alpha_{n+1}, z)}$, é fácil demonstrar que:

$$\frac{A_n(\alpha_{n+1}, z)}{B_n(\alpha_{n+1}, z)} = \begin{cases} \mu_0 z^{-1} + \mu_1 z^{-2} + \dots + \mu_n z^{-n-1} + 0(z^{-n-2}) \\ -\mu_{-1} - \mu_{-2} z - \dots - \mu_{-n-1} z^{n-2} + 0(z^{n-1}) \end{cases}$$

Então,

$$\int_a^b \frac{1}{z - t} d\psi(t) \quad \text{coincide com} \quad \frac{A_n(\alpha_{n+1}, z)}{B_n(\alpha_{n+1}, z)}$$

até o termo z^{-n-1} , pela primeira série, e até o termo z^{n-2} , pela segunda série.

Sejam $\tilde{\eta}_n$ e $\tilde{\rho}_n$ os valores de:

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\alpha_{n+1}, t) d\psi(t) \quad \text{para} \quad s = 0 \quad \text{e} \quad s = n + 1,$$

respectivamente, isto é

$$\tilde{\rho}_n = \int_a^b t B_n(\alpha_{n+1}, t) d\psi(t), \quad n \geq 1, \quad (3.1.10)$$

$$\tilde{\eta}_n = \int_a^b t^{-n} B_n(\alpha_{n+1}, t) d\psi(t), \quad n \geq 1. \quad (3.1.11)$$

No sistema linear (3.1.3), considerando o polinômio $B_n(\alpha_{n+1}, z)$, a última equação será:

$$\mu_0 b_{n,0}^{(\alpha_{n+1})} + \mu_1 b_{n,1}^{(\alpha_{n+1})} + \dots + \mu_n b_{n,n}^{(\alpha_{n+1})} = 0.$$

Acrescentando a equação (3.1.10) ao sistema, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \mu_{-n+1}b_{n,0}^{(\alpha_{n+1})} & + & \mu_{-n+2}b_{n,1}^{(\alpha_{n+1})} & + & \dots & + & \mu_1b_{n,n}^{(\alpha_{n+1})} & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \mu_0b_{n,0}^{(\alpha_{n+1})} & + & \mu_1b_{n,1}^{(\alpha_{n+1})} & + & \dots & + & \mu_nb_{n,n}^{(\alpha_{n+1})} & = & 0 \\ \mu_1b_{n,0}^{(\alpha_{n+1})} & + & \mu_2b_{n,1}^{(\alpha_{n+1})} & + & \dots & + & \mu_{n+1}b_{n,n}^{(\alpha_{n+1})} & = & \tilde{\rho}_n. \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

Resolvendo pela regra de Cramer:

$$b_{n,n}^{(\alpha_{n+1})} = \tilde{\rho}_n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_{n+1}^{(-n+1)}}.$$

Como $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ é um polinômio mônico:

$$\hat{\rho}_n = \frac{H_{n+1}^{(-n+1)}}{H_n^{(-n+1)}} > 0, \quad n \geq 1. \quad (3.1.13)$$

De maneira análoga, obtemos:

$$\tilde{\eta}_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n+1)}}, \quad n \geq 1. \quad (3.1.14)$$

Substituindo a última equação de (3.1.12) por

$$1b_{n,0}^{(\alpha_{n+1})} + zb_{n,1}^{(\alpha_{n+1})} + \dots + z^n b_{n,n}^{(\alpha_{n+1})} = B_n(\alpha_{n+1}, z)$$

e, novamente aplicando a regra de Cramer, chegamos que:

$$B_n(\alpha_{n+1}, z) = \frac{1}{H_n^{(-n+1)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_1 \\ \mu_{-n+2} & \mu_{-n+3} & \dots & \mu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} \quad (3.1.15)$$

Portanto, $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ é o único polinômio mônico que satisfaz (3.1.5).

Fazendo, agora, $z = 0$ em (3.1.15):

$$B_n(\alpha_{n+1}, 0) = (-1)^n \frac{H_n^{(-n+2)}}{H_n^{(-n+1)}}, \quad n \geq 1, \quad (3.1.16)$$

o que, pelo teorema 2.1, é diferente de zero.

Logo, $z = 0$ não é um zero de $B_n(\alpha_{n+1}, z)$, ou, $b_{n,0}^{(\alpha_{n+1})} \neq 0$.

3.2 Propriedades dos polinômios $B_n(\lambda, z)$ e associados

Como no caso de polinômios ortogonais e similares, os polinômios $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ e seus associados, $A_n(\alpha_{n+1}, z)$, satisfazem, também, a uma relação de recorrência de tres termos.

Teorema 3.2 *Os polinômios $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ e $A_n(\alpha_{n+1}, z)$ definidos por (3.1.1) e (3.1.6), respectivamente, para $\lambda = \alpha_{n+1}$, satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:*

$$B_{n+1}(\alpha_{n+2}, z) = (z - \tilde{\beta}_{n+1})B_n(\alpha_{n+1}, z) - \tilde{\alpha}_{n+1}zB_{n-1}(\alpha_n, z) \quad (a) \quad (3.2.1)$$

$$A_{n+1}(\alpha_{n+2}, z) = (z - \hat{\beta}_{n+1})A_n(\alpha_{n+1}, z) - \tilde{\alpha}_{n+1}zA_{n-1}(\alpha_n, z) \quad (b)$$

com:

$$B_0(\alpha_1, z) = 1 \quad , \quad B_1(\alpha_2, z) = z - \tilde{\beta}_1,$$

$$A_0(\alpha_1, z) = 0 \quad , \quad A_1(\alpha_2, z) = \mu_0 \quad e,$$

os coeficientes $\tilde{\alpha}_{n+1}$ e $\tilde{\beta}_{n+1}$ são dados por:

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \frac{\tilde{\rho}_n}{\tilde{\rho}_{n-1}} \quad , \quad n \geq 1 \quad (3.2.2)$$

$$\tilde{\beta}_{n+1} = -\tilde{\alpha}_{n+1} \frac{\tilde{\eta}_{n-1}}{\tilde{\eta}_n} \quad , \quad n \geq 1 \quad e \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \alpha_2, \quad (3.2.3)$$

com $\tilde{\rho}_n$ e $\tilde{\eta}_n$ definidos por (3.1.13) e (3.1.14), respectivamente.

Demonstração:

A demonstração é exatamente a mesma do teorema 2.2 fazendo-se, apenas, algumas modificações óbvias. $\square$

Das relações de recorrência acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
A_n(\alpha_{n+1}, z)B_{n-1}(\alpha_n, z) &= A_{n-1}(\alpha_n, z)B_n(\alpha_{n+1}, z) \\
&= [(z - \tilde{\beta}_n)A_{n-1}(\alpha_n, z) - \tilde{\alpha}_n z A_{n-2}(\alpha_{n-1}, z)]B_{n-1}(\alpha_n, z) \\
&\quad - A_{n-1}(\alpha_n, z)[(z - \tilde{\beta}_n)B_{n-1}(\alpha_n, z) - \tilde{\alpha}_n z B_{n-2}(\alpha_{n-1}, z)] \\
&= \tilde{\alpha}_n z [A_{n-1}(\alpha_n, z)B_{n-2}(\alpha_{n-1}, z) \\
&\quad - A_{n-2}(\alpha_{n-1}, z)B_{n-1}(\alpha_n, z)]
\end{aligned}$$

Segue, então, que:

$$\begin{aligned}
A_n(\alpha_{n+1}, z)B_{n-1}(\alpha_n, z) &= A_{n-1}(\alpha_n, z)B_n(\alpha_{n+1}, z) \\
&= \tilde{\alpha}_n \tilde{\alpha}_{n-1} \dots \tilde{\alpha}_2 \mu_0 z^{n-1}, \quad n \geq 2
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Além disso, se

$$T_n(z) = B'_n(\alpha_{n+1}, z)B_{n-1}(\alpha_n, z) - B'_{n-1}(\alpha_n, z)B_n(\alpha_{n+1}, z),$$

para $n \geq 1$, onde $B'_n = \frac{d B_n}{dz}$, temos

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(z) &= \frac{d}{dz}[(z - \tilde{\beta}_{n+1})B_n(\alpha_{n+1}, z) - \tilde{\alpha}_{n+1} z B_{n-1}(\alpha_n, z)]B_n(\alpha_{n+1}, z) \\
&\quad - B'_n(\alpha_{n+1}, z)[(z - \tilde{\beta}_{n+1})B_n(\alpha_{n+1}, z) - \tilde{\alpha}_{n+1} z B_{n-1}(\alpha_n, z)] \\
&= \{B_n(\alpha_{n+1}, z)\}^2 + \tilde{\alpha}_{n+1} z [-B'_{n-1}(\alpha_n, z)B_n(\alpha_{n+1}, z) \\
&\quad + B'_n(\alpha_{n+1}, z)B_{n-1}(\alpha_n, z)] - \tilde{\alpha}_{n+1} B_{n-1}(\alpha_n, z)B_n(\alpha_{n+1}, z) \\
&= \{B_n(\alpha_{n+1}, z)\}^2 - \tilde{\alpha}_{n+1} B_{n-1}(\alpha_n, z)B_n(\alpha_{n+1}, z) + \tilde{\alpha}_{n+1} z T_n(z).
\end{aligned}$$

Aplicando esta relação para $T_n(z)$ e substituindo-se $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ na segunda parcela pela sua relação de recorrência, chegamos que:

$$T_{n+1}(z) = \{B_n(\alpha_{n+1}, z)\}^2 + \tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{\beta}_n \{B_{n-1}(\alpha_n, z)\}^2 + \tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{\alpha}_n z^2 T_{n-1}(z) \tag{3.2.5}$$

para $n \geq 2$.

Se $z_{n,i}^{(\alpha_{n+1})}$, $1 \leq i \leq n$, é um zero de $B_n(\alpha_{n+1}, z)$, de (3.2.4), obtemos:

$$A_n(\alpha_{n+1}, z_{n,i}^{(\alpha_{n+1})})B_{n-1}(\alpha_n, z_{n,i}^{(\alpha_{n+1})}) = \tilde{\alpha}_n \tilde{\alpha}_{n-1} \dots \tilde{\alpha}_2 \mu_0 \left\{ z_{n,i}^{(\alpha_{n+1})} \right\}^{n-1}.$$

Como, de (3.1.16), $z = 0$ não anula o polinômio $B_n(\alpha_{n+1}, z)$, chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja $z_{n,i}^{(\alpha_{n+1})}$, $1 \leq i \leq n$, um zero de $B_n(\alpha_{n+1}, z)$. Então, $z_{n,i}^{(\alpha_{n+1})}$, $1 \leq i \leq n$, não é zero de $A_n(\alpha_{n+1}, z)$ ou de $B_{n-1}(\alpha_n, z)$.*

Sobre os zeros dos polinômios $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ temos, também, o seguinte resultado:

Teorema 3.4 *Entre dois zeros consecutivos do polinômio $B_{n-1}(\alpha_n, z)$ existe um zero do polinômio $B_n(\alpha_{n+1}, z)$.*

Demonstração:

A prova deste fato, consequência imediata da relação (3.2.5), é análoga à do teorema 2.5. $\square$

Uma propriedade muito importante e útil dos polinômios $B_n(\lambda, z)$ é a seguinte:

Teorema 3.5 *Os zeros do polinômio $B_n(\lambda, z)$, para $n \geq 1$, são reais, distintos e, pelo menos $n - 1$ deles, pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração:

A prova é trivial para $n = 1$.

Suponhamos que $B_n(\lambda, z)$, $n \geq 2$, não possua zeros em (a, b) .

Logo, $z^{-n+1}B_n(\lambda, z)$ não muda de sinal em (a, b) pois, $0 \leq a < b \leq \infty$. Então, a integral

$$\int_a^b t^{-n+1} B_n(\lambda, t) d\psi(t) \neq 0,$$

o que, por (3.1.2) é uma contradição.

Portanto, $B_n(\lambda, z)$, $n \geq 2$, tem, ao menos, um zero em (a, b) .

Sejam $z_{n,1}^{(\lambda)}, z_{n,2}^{(\lambda)}, \dots, z_{n,r}^{(\lambda)}$, $1 < r < n - 1$, os zeros de multiplicidade ímpar de $B_n(\lambda, z)$ em (a, b) .

Então, o polinômio

$$(z - z_{n,1}^{(\lambda)})(z - z_{n,2}^{(\lambda)}) \dots (z - z_{n,r}^{(\lambda)}) B_n(\lambda, z)$$

não muda de sinal em (a, b) .

Logo,

$$\int_a^b t^{-n+1} (t - z_{n,1}^{(\lambda)})(t - z_{n,2}^{(\lambda)}) \dots (t - z_{n,r}^{(\lambda)}) B_n(\lambda, t) d\psi(t) \neq 0$$

Como $(z - z_{n,1}^{(\lambda)})(z - z_{n,2}^{(\lambda)}) \dots (z - z_{n,r}^{(\lambda)})$ é um polinômio de grau r , $1 < r \leq n - 2$, por (3.1.2) o fato de a integral acima ser diferente de zero é uma contradição.

Portanto, $B_n(\lambda, z)$ tem, pelo menos, $n - 1$ zeros de multiplicidade ímpar em (a, b) . Como $B_n(\lambda, z)$ é um polinômio de grau n , segue, imediatamente, o resultado do teorema. $\square$

Analogamente, provamos que

Teorema 3.6 *Os zeros do polinômio $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Denotemos por $z_{n,1}^{(\lambda)}, z_{n,2}^{(\lambda)}, \dots, z_{n,n}^{(\lambda)}$ os zeros de $B_n(\lambda, z)$ em ordem crescente.

Da relação de recorrência de tres termos para $B_n(z)$ e de (3.1.1), temos que:

$$B_n(\lambda, 0) = (-1)^n \beta_1 \dots \beta_{n-1} (\beta_n + \lambda).$$

Assim, para $\lambda = -\beta_n$:

$$B_n(-\beta_n, 0) = 0, \quad \text{isto é,} \quad z_{n,1}^{(-\beta_n)} = 0.$$

Além disso, podemos dizer que, se $\lambda > -\beta_n$, então, $z_{n,1}^{(\lambda)} > 0$, enquanto que, se $\lambda < -\beta_n$, $z_{n,1}^{(\lambda)} < 0$.

Teorema 3.7 *Sejam $n \geq 1$ e $0 \leq \lambda \leq \alpha_{n+1}$. Então, todos os zeros de $B_n(\lambda, z)$ pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração:

Sabemos que todos os zeros de $B_n(0, z) = B_n(z)$ e de $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ pertencem ao intervalo (a, b) .

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} (-1)^n B_n(0, a) &> 0, & (-1)^n B_n(\alpha_{n+1}, a) &> 0 \\ B_n(0, b) &> 0 & e & B_n(\alpha_{n+1}, b) > 0, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

para $n \geq 1$, pois são polinômios mônicos.

Agora,

$$\begin{aligned} B_n(\lambda, z) &= B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z) \\ &= B_n(0, z) - \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}} B_n(0, z) + \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}} B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}}\right) B_n(0, z) + \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}} (B_n(z) - \alpha_{n+1} B_{n-1}(z)) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}}\right) B_n(0, z) + \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}} B_n(\alpha_{n+1}, z). \end{aligned}$$

Dessas relações e de (3.2.6), temos, para $0 \leq \lambda \leq \alpha_{n+1}$:

$$(-1)^n B_n(\lambda, a) > 0 \quad e \quad B_n(\lambda, b) > 0, \quad n \geq 1. \tag{3.2.7}$$

Do teorema 3.5, $z_{n,n-1}^{(\lambda)} < b$. Agora, se $z_{n,n}^{(\lambda)} > b$, devemos ter $B_n(\lambda, b) < 0$, o que, por (3.2.7), é uma contradição.

Analogamente, podemos mostrar que $z_{n,1}^{(\lambda)} < a$ leva a uma contradição.

Portanto, o teorema está provado. $\square$

3.3 Fórmulas de Quadratura

Seja $f(z)$ uma função real arbitrária.

Analogamente ao que foi feito na secção 2.4, se expressarmos $F(z) = z^{n-1}f(z)$ através de seu polinômio de interpolação de Lagrange sobre os zeros $z_{n,r}^{(\lambda)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, de $B_n(\lambda, z)$, obtemos:

$$F(z) = \sum_{r=1}^n \frac{(z_{n,r}^{(\lambda)})^{n-1} B_n(\lambda, z)}{(z - z_{n,r}^{(\lambda)}) B'_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)})} f(z_{n,r}^{(\lambda)}) + R_n(\lambda, z) \quad (3.3.1)$$

onde $R_n(\lambda, z)$ é o erro cometido, que expressaremos através de diferenças divididas:

$$R_n(\lambda, z) = B_n(\lambda, z) F[z_{n,1}^{(\lambda)}, z_{n,2}^{(\lambda)}, \dots, z_{n,n}^{(\lambda)}, z].$$

Multiplicando-se ambos os membros de (3.3.1) por z^{-n+1} e integrando em (a, b) relativamente à distribuição $SS(a, b)$, $d\psi(t)$, obtemos a fórmula de quadratura:

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{r=1}^n W_{n,r}^{(\lambda)} f(z_{n,r}^{(\lambda)}) + E_n(\lambda, f), \quad (3.3.2)$$

onde

$$W_{n,r}^{(\lambda)} = \frac{(z_{n,r}^{(\lambda)})^{n-1}}{B'_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)})} \int_a^b t^{-n+1} \frac{B_n(\lambda, t)}{t - z_{n,r}^{(\lambda)}} d\psi(t), \quad (3.3.3)$$

para $r = 1, 2, \dots, n$ e

$$E_n(\lambda, f) = \int_a^b t^{-n+1} B_n(\lambda, t) F[z_{n,1}^{(\lambda)}, \dots, z_{n,n}^{(\lambda)}, t] d\psi(t).$$

Facilmente podemos mostrar que se $F(z) = z^{n-1}f(z) \in \mathcal{P}_{n-1}$, então, $E_n(\lambda, f) = 0$.

Teorema 3.8 *A fórmula de quadratura (3.3.2), com pesos $W_{n,r}^{(\lambda)}$, $1 \leq r \leq n$, dados por (3.3.3), é exata, isto é,*

$$E_n(\lambda, f) = 0, \quad \text{sempre que } z^{n-1}f(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}.$$

Demonstração:

Para provar este resultado, tomemos $z^{n-1}f(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}$ e a escrevemos da forma:

$$z^{n-1}f(z) = B_n(\lambda, z)Q_{n-2}(\lambda, z) + r_{n-1}(\lambda, z),$$

onde $Q_{n-2}(\lambda, z)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $n-2$ e $r_{n-1}(\lambda, z)$ de grau, no máximo, $n-1$.

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade acima por z^{-n+1} e integrando em (a, b), obtemos o resultado desejado, uma vez que (3.3.2) é exata para toda função $g(z)$, tal que $z^{n-1}g(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$. $\square$

Se tomarmos $f(z)$ como o polinômio $B_n(\lambda, z)$, para $\lambda \neq \alpha_{n+1}$, temos que $z^{n-1}B_n(\lambda, z) \in \mathbb{P}_{2n-1}$ e facilmente mostramos que a regra de quadratura (3.3.2) não é exata para essa função.

Como, pelo teorema acima, $E_n(\lambda, f) = 0$ sempre que $f(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$, (3.3.2) é, também, uma regra de quadratura interpolatória usual.

Do mesmo modo, podemos provar, para $\lambda = \alpha_{n+1}$, que :

Teorema 3.9 *Consideremos a fórmula de quadratura (3.3.2) onde $z_{n,r}^{(\lambda)}$ são os zeros de $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ e $W_{n,r}^{(\lambda)}$ são dados por (3.3.3) com $\lambda = \alpha_{n+1}$. Então:*

$$E_n(\alpha_{n+1}, f) = 0, \quad \text{sempre que } z^{n-1}f(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}.$$

Vamos, agora, considerar o quociente $\frac{A_n(\lambda, z)}{B_n(\lambda, z)}$. Analogamente ao que foi feito na secção 2.4, para todo λ real obtemos que:

$$\frac{A_n(\lambda, z)}{B_n(\lambda, z)} = \sum_{r=1}^n \frac{W_{n,r}^{(\lambda)}}{z - z_{n,r}^{(\lambda)}}, \quad n \geq 1 \quad \text{e, daí:}$$

$$W_{n,r}^{(\lambda)} = \frac{A_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)})}{B_n'(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)})}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3.4)$$

Teorema 3.10 *Se $\lambda > -\beta_n$, então os pesos $W_{n,r}^{(\lambda)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, da fórmula de quadratura (3.3.2), dados por (3.3.3), são positivos.*

Demonstração:

Consideremos $f(z) = z^{-n+1} \left\{ \frac{B_n(\lambda, z)}{z - z_{n,j}^{(\lambda)}} \right\}^2$, $1 \leq j \leq n$, em (3.3.2).

Então,

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) > 0.$$

Como $z^{n-1}f(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}$, pelo teorema 3.8,

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = W_{n,j}^{(\lambda)} \left\{ z_{n,j}^{(\lambda)} \right\}^{-n+1} \left\{ B_n'(\lambda, z_{n,j}^{(\lambda)}) \right\}^2, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Mas, $0 < z_{n,1}^{(\lambda)} < z_{n,2}^{(\lambda)} < \dots < z_{n,n}^{(\lambda)}$.

Portanto, $W_{n,j}^{(\lambda)} > 0, 1 \leq j \leq n$. $\square$

Analogamente, provamos o

Teorema 3.11 *Se $\lambda < -\beta_n$, então os pesos $W_{n,r}^{(\lambda)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, da fórmula de quadratura (3.3.2), dados por (3.3.3), satisfazem:*

se n é par

$$W_{n,1}^{(\lambda)} < 0, \quad W_{n,r}^{(\lambda)} > 0, \quad r = 2, \dots, n$$

e, se n é ímpar

$$W_{n,r}^{(\lambda)} > 0, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Se tomarmos $f(z) = 1$ em (3.3.2) obtemos:

$$\sum_{r=1}^n W_{n,r}^{(\lambda)} = \mu_0.$$

3.4 Determinação dos zeros de $B_n(\lambda, z)$.

Da relação de recorrência de três termos para os polinômios similares $B_n(z)$, equação (2.3.1)(a), e de (3.1.1), obtemos:

$$B_n(\lambda, z) = [z - (\beta_n + \lambda)]B_{n-1}(z) - \alpha_n z B_{n-2}(z). \quad (3.4.1)$$

Assim, conhecidos os valores de α_j e β_j , $j = 1, \dots, n$ dados em (2.3.2) e (2.3.3), respectivamente, uma maneira versátil e eficiente para se calcular os zeros $z_{n,r}^{(\lambda)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, dos polinômios $B_n(\lambda, z)$ será apresentada a seguir.

Teorema 3.12 *Os zeros do polinômio de grau n , $B_n(\lambda, z)$, $n \geq 1$, são os auto-valores da matriz de Hessenberg de ordem n*

$$\mathbf{H}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \beta_n + \lambda \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \beta_n + \lambda \\ 0 & \alpha_3 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \beta_n + \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} & \beta_n + \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n & \beta_n + \lambda \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

onde $\gamma_i = \beta_i + \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Demonstração:

i) Consideremos $\lambda \neq -\beta_n$.

Logo, $z = 0$ não é um zero de $B_n(\lambda, z)$.

Da relação de recorrência (2.3.1)(a) e de (3.4.1):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B_1(z) & = & (z - \beta_1)B_0(z) \\ B_2(z) & = & (z - \beta_2)B_1(z) - \alpha_2 z B_0(z) \\ B_3(z) & = & (z - \beta_3)B_2(z) - \alpha_3 z B_1(z) \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \dots \\ B_{n-1}(z) & = & (z - \beta_{n-1})B_{n-2}(z) - \alpha_{n-1} z B_{n-3}(z) \\ B_n(\lambda, z) & = & [z - (\beta_n + \lambda)]B_{n-1}(z) - \alpha_n z B_{n-2}(z) \end{array} \right.$$

Após algumas manipulações simples, podemos escrever o sistema acima como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 B_0(z) = z B_0(z) - B_1(z) \\ \alpha_2 B_0(z) + \frac{1}{z} \beta_2 B_1(z) = B_1(z) - \frac{1}{z} B_2(z) \\ \frac{1}{z} \alpha_3 B_1(z) + \frac{1}{z^2} \beta_3 B_2(z) = \frac{1}{z} B_2(z) - \frac{1}{z^2} B_3(z) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{1}{z^{n-3}} \alpha_{n-1} B_{n-3}(z) + \frac{1}{z^{n-2}} \beta_{n-1} B_{n-2}(z) = \frac{1}{z^{n-3}} B_{n-2}(z) - \frac{1}{z^{n-2}} B_{n-1}(z) \\ \frac{1}{z^{n-2}} \alpha_n B_{n-2}(z) + \frac{1}{z^{n-1}} (\beta_n + \lambda) B_{n-1}(z) = \frac{1}{z^{n-2}} B_{n-1}(z) - \frac{1}{z^{n-1}} B_n(\lambda, z) \end{array} \right.$$

Colocando $\tilde{B}_r(z) = z^{-r} B_r(z)$, $r = 0, \dots, n$, obtemos:

$$\mathbf{F}_n(\lambda) \mathbf{b}_n(z) = z \mathbf{G}_n \mathbf{b}_n(z) - \mathbf{e}_n(\lambda, z) ,$$

onde

$$\mathbf{F}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n & \beta_n + \lambda \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b}_n(z) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_0(z) \\ \tilde{B}_1(z) \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n-2}(z) \\ \tilde{B}_{n-1}(z) \end{pmatrix} ,$$

$$\mathbf{G}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} e,$$

$$\mathbf{e}_n(\lambda, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z\tilde{B}_n(z) - \lambda\tilde{B}_{n-1}(z) \end{pmatrix}.$$

Mas, para qualquer zero $z_{n,r}^{(\lambda)}$, $1 \leq r \leq n$, de $B_n(\lambda, z)$, $\mathbf{e}_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)}) = \underline{0}$.

Assim:

$$\mathbf{F}_n(\lambda) \mathbf{b}_n(z_{n,r}^{(\lambda)}) = z_{n,r}^{(\lambda)} \mathbf{G}_n \mathbf{b}_n(z_{n,r}^{(\lambda)}), \quad 1 \leq r \leq n.$$

Vemos, então, que $z_{n,r}^{(\lambda)}$, $1 \leq r \leq n$, são os auto-valores da matriz

$$\mathbf{H}_n(\lambda) = \mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{F}_n(\lambda),$$

com correspondentes auto-vetores $\mathbf{b}_n(z_{n,r}^{(\lambda)})$, $1 \leq r \leq n$.

Como a inversa da matriz não-singular $\mathbf{G}_n$ é:

$$\mathbf{G}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

segue, imediatamente, o resultado do teorema.

ii) Consideremos, agora, $\lambda = -\beta_n$.

Então, $z_{n,1}^{(-\beta_n)} = 0$ conforme vimos na secção 3.2. Assim, de (3.4.1):

$$B_n(-\beta_n, z) = z(B_{n-1}(z) - \alpha_n B_{n-2}(z)).$$

Os demais zeros, $z_{n,r}^{(-\beta_n)}$, $2 \leq r \leq n$, de $B_n(-\beta_n, z)$ são, então, os zeros de $B_{n-1}(\alpha_n, z)$ que são positivos, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) e, pelo item i), são os auto-valores da matriz de Hessenberg

$$\mathbf{H}_{n-1}(\alpha_n) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-2} & \beta_{n-1} + \alpha_n \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-2} & \beta_{n-1} + \alpha_n \\ 0 & \alpha_3 & \dots & \gamma_{n-2} & \beta_{n-1} + \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} + \alpha_n \end{pmatrix}$$

Mas, os auto-valores de $\mathbf{H}_n(-\beta_n)$ são os zeros de

$$\det(\mathbf{H}_n(-\beta_n) - z\mathbf{I}) = -z \begin{vmatrix} \gamma_1 - z & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \alpha_2 & \gamma_2 - z & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \alpha_3 & \gamma_3 - z & \dots & \gamma_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1} - z \end{vmatrix},$$

desenvolvendo-se pela última coluna.

Como $\gamma_{n-1} = \beta_{n-1} + \alpha_n$, os n zeros de $B_n(-\beta_n, z)$ são os auto-valores de $\mathbf{H}_n(-\beta_n)$, como queríamos demonstrar. $\square$

A prova do teorema acima para $\lambda = 0$ pode ser encontrada em Sri Ranga e Andrade [23].

Como os auto-valores, $z_{n,r}^{(\lambda)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, da matriz de Hessenberg $\mathbf{H}_n(\lambda)$, $\lambda > -\beta_n$, dada em (3.4.2), são positivos e distintos, podem ser calculados eficientemente através do método QR (de Francis) ou LR (de Rutishauser).

Ambos os métodos podem ser implementados sem encontrarmos qualquer dificuldade na decomposição mas, é preferível usarmos o método QR , mesmo que ele requiera consideravelmente mais operações aritméticas que o método LR , devido às suas propriedades de convergência e estabilidade numérica superiores. É possível aplicar técnicas de aceleração ao método QR o que resulta em convergência extremamente rápida.

Contudo, fazendo-se uma pequena modificação no método LR conseguimos obter um algoritmo extremamente simples e que foi, também, obtido por Jones e Magnus

[11] usando outros caminhos. Chamamos esse algoritmo de Método *LR* Modificado e o apresentaremos a seguir.

3.4.1 Método *LR* modificado

Consideremos a matriz de Hessenberg $\mathbf{H}_n(\lambda)$, quando $\lambda > -\beta_n$, e vamos decompô-la no produto:

$$\mathbf{H}_n(\lambda) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} , \quad (3.4.3)$$

onde

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1/\gamma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1}/\gamma_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \beta_n + \lambda \\ 0 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \beta_n + \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n + \lambda \end{pmatrix} .$$

sendo:

$$\ell_{i+1,i} = \frac{\gamma_{i-1}\alpha_{i+1}}{\gamma_i\beta_{i-1}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

com $\beta_0 = \gamma_0 = 1$.

Seja $\mathbf{H}_n^{(0)} = \mathbf{H}_n(\lambda)$, isto é,

$$\mathbf{H}_n^{(0)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(0)} & \gamma_2^{(0)} & \gamma_3^{(0)} & \dots & \gamma_{n-1}^{(0)} & \gamma_n^{(0)} \\ \alpha_2^{(0)} & \gamma_2^{(0)} & \gamma_3^{(0)} & \dots & \gamma_{n-1}^{(0)} & \gamma_n^{(0)} \\ 0 & \alpha_3^{(0)} & \gamma_3^{(0)} & \dots & \gamma_{n-1}^{(0)} & \gamma_n^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n^{(0)} & \gamma_n^{(0)} \end{pmatrix} ,$$

onde:

$$\gamma_i^{(0)} = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\gamma_n^{(0)} = \beta_n + \lambda,$$

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Decompomos $\mathbf{H}_n^{(0)} = (\mathbf{L}^{(0)}\mathbf{D}^{(0)})\mathbf{U}^{(0)}$ e, seja

$$\mathbf{H}_n^{(1)} = \mathbf{U}^{(0)}(\mathbf{L}^{(0)}\mathbf{D}^{(0)}) \quad (3.4.4)$$

Notemos que:

$$\mathbf{H}_n^{(1)} = \mathbf{U}^{(0)}\mathbf{H}_n^{(0)}[\mathbf{U}^{(0)}]^{-1}$$

Logo, as matrizes $\mathbf{H}_n^{(0)}$ e $\mathbf{H}_n^{(1)}$ são similares e, portanto, possuem os mesmos autovalores.

Além disso, de (3.4.4), obtemos, facilmente:

$$\mathbf{H}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_2^{(1)} & \gamma_3^{(1)} & \dots & \gamma_{n-1}^{(1)} & \gamma_n^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} & \gamma_2^{(1)} & \gamma_3^{(1)} & \dots & \gamma_{n-1}^{(1)} & \gamma_n^{(1)} \\ 0 & \alpha_3^{(1)} & \gamma_3^{(1)} & \dots & \gamma_{n-1}^{(1)} & \gamma_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n^{(1)} & \gamma_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

onde

$$\gamma_i^{(1)} = \beta_i^{(1)} + \alpha_{i+1}^{(1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \text{com}$$

$$\beta_0^{(1)} = 1, \quad \alpha_1^{(1)} = \alpha_{n+1}^{(1)} = 0,$$

$$\beta_i^{(1)} = \beta_{i-1}^{(0)} \frac{\gamma_i^{(0)}}{\gamma_{i-1}^{(0)}} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(0)} \frac{\gamma_i^{(0)}}{\gamma_{i-1}^{(0)}} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Observamos que os elementos de $\mathbf{H}_n^{(1)}$ têm a mesma forma que os elementos de $\mathbf{H}_n^{(0)}$. Repetindo o processo para $\mathbf{H}_n^{(1)}$ obtemos $\mathbf{H}_n^{(2)}$ exatamente do mesmo modo que $\mathbf{H}_n^{(1)}$ foi obtida de $\mathbf{H}_n^{(0)}$.

Podemos, então, construir o seguinte algoritmo:

Algoritmo 3.4.1:

Inicialização

$$\alpha_{n+1}^{(0)} = 0$$

$$\beta_0^{(0)} = 1$$

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\beta_i^{(0)} = \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\beta_n^{(0)} = \beta_n + \lambda$$

Continuação

Para $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_{n+1}^{(k+1)} = 0$$

$$\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_i^{(k)} \frac{\alpha_{i+1}^{(k)} + \beta_i^{(k)}}{\alpha_i^{(k)} + \beta_{i-1}^{(k)}} \quad (3.4.5)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$\beta_i^{(k+1)} = \beta_{i-1}^{(k)} \frac{\alpha_{i+1}^{(k)} + \beta_i^{(k)}}{\alpha_i^{(k)} + \beta_{i-1}^{(k)}} \quad (3.4.6)$$

Observe, que não há necessidade de calcularmos as matrizes $\mathbf{H}_n^{(k)}$ e, nem de efetuarmos as decomposições $\mathbf{H}_n^{(k)} = \mathbf{L}_n^{(k)} \mathbf{D}_n^{(k)} \mathbf{U}_n^{(k)}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$. A cada passo, calculamos apenas dois vetores, tornando este algoritmo mais adequado para se calcular os auto-valores das matrizes $\mathbf{H}_n(\lambda)$ do que, até mesmo, o método QR .

Para provar a convergência do método LR modificado vamos comparar as matrizes similares, $\mathbf{H}_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, gerados pelo algoritmo 3.4.1, com as matrizes similares, $\mathbf{A}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, que resultam da aplicação do método LR .

Denotemos por $h_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, os elementos da matriz de Hessenberg

$\mathbf{H}_n(\lambda), k = 0, 1, \dots$. Então,

$$h_{ii}^{(k)} = \gamma_i^{(k)} = \alpha_{i+1}^{(k)} + \beta_i^{(k)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.7)$$

$$h_{i+1,i}^{(k)} = \alpha_{i+1}^{(k)} = \alpha_{i+1}^{(k-1)} \frac{\gamma_{i+1}^{(k-1)}}{\gamma_i^{(k-1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.4.8)$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{i+1,i}^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Sejam $\mathbf{A}^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 0, 1, 2, \dots$, com $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{H}_n(\lambda)$, as matrizes de Hessenberg do método LR .

Temos que $\mathbf{H}_n^{(k)} = \mathbf{L}^{(k)} \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{U}^{(k)}$ com $\mathbf{H}_n^{(0)} = \mathbf{H}_n(\lambda)$ e

$$\mathbf{D}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^{(k)}/\gamma_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1}^{(k)}/\gamma_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4.9)$$

Usando a indução finita em k , pode-se provar que:

$$\mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{D}^{(0)} \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(k-1)}) \mathbf{H}_n^{(k)} (\mathbf{D}^{(0)} \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(k-1)})^{-1}. \quad (3.4.10)$$

Portanto, as matrizes $\mathbf{A}^{(k)}$ e $\mathbf{H}_n^{(k)}$ são similares e, além disso, como as matrizes $\mathbf{D}^{(k)}, k = 0, 1, \dots$, acima, são diagonais, temos

$$h_{ii}^{(k)} = a_{ii}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De (3.4.10), e usando (3.4.9), obtemos:

$$\begin{aligned} a_{i+1,i}^{(k)} &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_i^{(j)}}{\gamma_i^{(j)}} h_{i+1,i}^{(k)} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_{i-1}^{(j)}}{\beta_{i-1}^{(j)}} \\ &= \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_i^{(j)}}{\gamma_i^{(j)}} \frac{\gamma_{i-1}^{(j)}}{\beta_{i-1}^{(j)}} \right\} h_{i+1,i}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Usando (3.4.6)

$$a_{i+1,i}^{(k)} = \frac{\beta_i^{(0)}}{\beta_i^{(k)}} h_{i+1,i}^{(k)} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Como a matriz $\mathbf{H}_n(\lambda)$, $\lambda > -\beta_n$ tem todos seus auto-valores positivos e distintos e, além disso, $\alpha_i^{(k)}$ e $\beta_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots$, são positivos, o método LR converge, isto é:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{T},$$

onde $\mathbf{T}$ é uma matriz triangular superior a longo de cuja diagonal estão os auto valores de $\mathbf{H}_n(\lambda)$.

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i+1,i}^{(k)} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

e, como consequência,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{i+1,i}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_i^{(k)}}{\beta_i^{(0)}} a_{i+1,i}^{(k)} = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

De (3.4.8).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{i+1}^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Da relação (3.4.7) chegamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_i^{(k)} = z_{n,i}^{(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

pois, $\alpha_{n+1}^{(k)} = 0$ para todo $k \geq 0$.

Demonstramos, assim, o seguinte:

Teorema 3.13 *Consideremos a matriz $\mathbf{H}_n(\lambda)$ dada por (3.4.2) com $\lambda > -\beta_n$. Então, a sequência de matrizes similares $\mathbf{H}_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, gerada pelo algoritmo 3.4.1,*

converge para uma matriz triangular superior ao longo de cuja diagonal estão os autovalores, $z_{n,i}^{(\lambda)}$, $i = 1, \dots, n$, da matriz $\mathbf{H}_n(\lambda)$, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_i^{(k)} = z_{n,i}^{(\lambda)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad e$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{i+1}^{(k)} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Capítulo 4

Classe de distribuições especiais

Neste capítulo vamos considerar os polinômios $B_n(\lambda, z)$, definidos em (3.1.1), e regras de quadratura interpolatórias associadas a distribuições fortes de Stieltjes que satisfazem a uma certa propriedade de simetria.

4.1 Introdução

Conforme já mencionamos no Capítulo 1, em Sri Ranga [25], os polinômios $B_n(z)$ e as regras de quadratura interpolatórias foram investigadas para uma classe de distribuições fortes de Stieltjes no intervalo (a, b) , $(SS(a, b))$, denotadas por distribuições $ScS(a, b)$, que satisfazem à propriedade de simetria (inversa)

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(c/t)}{\sqrt{c/t}}, \quad t \in (a, b).$$

Aqui, vamos considerar os polinômios reais $B_n(\lambda, z)$, definidos no capítulo anterior, e regras de quadraturas interpolatórias associadas, para uma classe de distribuições $SS(a, b)$ que possuem a propriedade de simetria:

$$d\psi(t) = -d\psi(c/t), \quad t \in (a, b), \quad \text{para } c > 0. \quad (4.1.1)$$

Como na distribuições $ScS(a, b)$, devemos ter $a = 0$, se e somente se $b = \infty$; se $0 < a < b < \infty$ então, $c = ab$. Quando $d\psi(t)$ puder ser expressa da forma $w(t)dt$,

então, $w(t)$ satisfaz:

$$t w(t) = (c/t)w(c/t), \quad t \in (a, b).$$

Por conveniência, denotaremos a classe de distribuições que satisfaz (4.1.1), por distribuições $S\bar{c}S(a, b)$.

Lema 4.1 *Sejam $d\psi(t)$ uma distribuição $S\bar{c}S(a, b)$ e $f(t)$ integrável relativamente a $d\psi(t)$ em (a, b) . Então,*

$$\int_a^b f(t)d\psi(t) = \int_a^b f(c/t)d\psi(t).$$

Demonstração:

Consideremos a mudança de variável $t = \frac{c}{u}$.

Daí,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)d\psi(t) &= \int_b^a f(c/u)d\psi(c/u). \\ &= \int_a^b f(c/u)(-d\psi(c/u)). \end{aligned}$$

De (4.1.1), segue o resultado do lema. $\square$

Algumas propriedades de distribuições $S\bar{c}S(a, b)$ especiais, onde $c = 1$, foram consideradas em Common e McCabe [3].

Uma consequência imediata do Lema 4.1 acima é:

Lema 4.2 *Seja $d\psi(t)$ uma distribuição $S\bar{c}S(a, b)$. Então,*

$$\mu_m = c^m \mu_{-m}, \quad m \geq 0 \quad e, \quad (4.1.2)$$

$$\int_a^b t^m Q(t)d\psi(t) = c^m \int_a^b t^{-m} Q(c/t)d\psi(t), \quad (4.1.3)$$

para todo polinômio $Q(z)$.

Usando os lemas acima, podemos mostrar o seguinte resultado sobre os polinômios $B_n(\alpha_{n+1}, z)$:

Teorema 4.3 *Se $d\psi(t)$ é uma distribuição $S\bar{C}S(a, b)$, então, o polinômio $B_n(\alpha_{n+1}, z)$, associado a essa distribuição, satisfaz:*

$$B_n(\alpha_{n+1}, z) = \frac{z^n B_n(c/z)}{B_n(0)}. \quad (4.1.4)$$

Como consequência, seus zeros, $z_{n,r}^{(\alpha_{n+1})}$, $r = 1, \dots, n$, satisfazem:

$$\frac{c}{z_{n,r}^{(\alpha_{n+1})}} = z_{n,n+r-1}, \quad r = 1, \dots, n, \quad (4.1.5)$$

onde $z_{n,r}$, $r = 1, \dots, n$, são os zeros de $B_n(z)$.

Demonstração:

A prova da igualdade (4.1.5), usando (4.1.4), é trivial.

O primeiro resultado é imediato, se $n = 0$.

Consideremos $n \geq 1$.

Do Lema 4.2 e de (2.2.2):

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) &= c^{-n+s} \int_a^b t^{n-s} B_n(c/t) d\psi(t) \\ &= c^{-n+s} \int_a^b t^{-s} \{t^n B_n(c/t)\} d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \end{aligned}$$

Como $z = 0$ não é um zero de $B_n(z)$, dividindo a última integral acima por $B_n(0)$, e fazendo $s = n - r$, obtemos:

$$\int_a^b t^{-n+r} \left\{ \frac{t^n B_n(c/t)}{B_n(0)} \right\} d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq r \leq n, \quad n \geq 1.$$

Por (3.1.15), os únicos polinômios mônicos que satisfazem à relação acima são os polinômios $B_n(\alpha_{n+1}, z)$.

Chegamos, assim, ao resultado esperado. $\square$

Da relação de recorrência de três termos (2.3.1)(a), obtemos:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(0) &= -\beta_{n+1}B_n(0) \\ &= (-1)^{n+1}\beta_{n+1}\beta_n \dots \beta_1, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Temos, ainda, que:

$$B_{n+1}\left(\frac{c}{z}\right) = \left(\frac{c}{z} - \beta_{n+1}\right) B_n\left(\frac{c}{z}\right) - \alpha_{n+1} \frac{c}{z} B_{n-1}\left(\frac{c}{z}\right), \quad n \geq 1.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $z^{n+1}/B_{n+1}(0)$ e usando (4.1.6) chegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{z^{n+1}B_{n+1}(c/z)}{B_{n+1}(0)} &= \left(z - \frac{c}{\beta_{n+1}}\right) \frac{z^n B_n(c/z)}{B_n(0)} \\ &\quad - z \frac{c\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}\beta_n} \frac{z^{n-1}B_{n-1}(c/z)}{B_{n-1}(0)}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

De (4.1.4) e (3.2.1)(a), obtemos que os coeficientes da relação de recorrência de três termos para $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ satisfazem:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{n+1} &= \frac{c}{\beta_n\beta_{n+1}}\alpha_{n+1}, \quad n \geq 1, & (a) \\ \tilde{\beta}_{n+1} &= \frac{c}{\beta_{n+1}}, \quad n \geq 0. & (b) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Teorema 4.4 *Seja $B_n(z)$ o polinômio similar associado à distribuição $S\bar{C}S(a, b), d\psi(t)$. Então, os coeficientes da relação de recorrência (2.3.1)(a) satisfazem:*

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{c}{\beta_n\beta_{n+1}}, \quad n \geq 1, \tag{4.1.9}$$

onde $\gamma_n = \beta_n + \alpha_{n+1}$.

Demonstração:

Da definição dos polinômios $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ e da relação de recorrência (2.3.1)(a) chegamos que :

$$\begin{aligned} B_n(\alpha_{n+1}, z) &= B_n(z) - \alpha_{n+1}B_{n-1}(z) \\ &= \frac{1}{z}(B_{n+1}(z) + \beta_{n+1}B_n(z)). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

De (4.1.7):

$$B_{n+1}(\alpha_{n+2}, z) = \left(z - \frac{c}{\beta_{n+1}} \right) B_n(\alpha_{n+1}, z) - \frac{c\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}\beta_n} z B_{n-1}(\alpha_n, z)$$

e, então, usando (4.1.10):

$$\begin{aligned} B_{n+1}(z) - \alpha_{n+2}B_n(z) &= \left(z - \frac{c}{\beta_{n+1}} \right) (B_n(z) - \alpha_{n+1}B_{n-1}(z)) \\ &\quad - \frac{c\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}\beta_n} z \frac{1}{z} (B_n(z) + \beta_n B_{n-1}(z)). \end{aligned}$$

Logo,

$$B_{n+1}(z) = \left\{ z - \left[\frac{c}{\beta_{n+1}} \left(1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n} \right) - \alpha_{n+2} \right] \right\} B_n(z) - \alpha_{n+1} z B_{n-1}(z).$$

Comparando essa relação de recorrência com (2.3.1)(a), obtemos:

$$\beta_{n+1} = \frac{c}{\beta_{n+1}} \left(1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n} \right) - \alpha_{n+2},$$

de onde segue imediatamente o resultado do teorema. $\square$

Temos, de (4.1.4), que

$$\begin{aligned} B_n(\alpha_{n+1}, z) &= B_n(z) - \alpha_{n+1}B_{n-1}(z) \\ &= \frac{z^n B_n(c/z)}{B_n(0)} \end{aligned}$$

Fazendo $z = 0$ em (3.2.1)(a) e usando (4.1.8)(b), obtemos:

$$\begin{aligned} B_n(\alpha_{n+1}, 0) &= (-1)^n \tilde{\beta}_n \tilde{\beta}_{n-1} \dots \tilde{\beta}_1 \\ &= (-1)^n \frac{c^n}{\beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_1} = \frac{c^n}{B_n(0)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

4.2 As distribuições $S\bar{c}S(a, b)$ e $B_n(\lambda, z)$

Vamos considerar, nesta secção, que $\lambda \in \mathbb{R}$ é tal que $B_n(\lambda, 0) \neq 0$, isto é, $\lambda \neq -\beta_n$.

Aplicando o lema 4.1 a (3.1.2)(a), obtemos:

$$\int_a^b t^{-n+s} t^n B_n(\lambda, c/t) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2.$$

Como $\lambda \neq -\beta_n$,

$$\int_a^b t^{-n+s} \left\{ \frac{t^n B_n(\lambda, c/t)}{B_n(\lambda, 0)} \right\} d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2.$$

Assim, do Teorema 3.1, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -\beta_n$, existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{z^n B_n(\lambda, c/z)}{B_n(\lambda, 0)} = B_n(\eta, z), \quad n \geq 1. \quad (4.2.1)$$

Incluimos, na igualdade acima, o caso $n = 1$. Como facilmente se pode demonstrar, a igualdade também é verdadeira para este caso.

Como $B_n(z) = B_n(0, z)$, de (3.1.1), temos:

$$z^n B_n\left(\lambda, \frac{c}{z}\right) = z^n B_n\left(0, \frac{c}{z}\right) - \lambda z^n B_{n-1}\left(0, \frac{c}{z}\right), \quad n \geq 1.$$

Assim, de (4.1.4) e (4.1.10):

$$\begin{aligned} z^n B_n\left(\lambda, \frac{c}{z}\right) &= B_n(0, 0) (B_n(0, z) - \alpha_{n+1} B_{n-1}(0, z)) \\ &\quad - \lambda B_{n-1}(0, 0) (B_n(0, z) + \beta_n B_{n-1}(0, z)) \\ &= B_n(0, z) (B_n(0, 0) - \lambda B_{n-1}(0, 0)) \\ &\quad - B_{n-1}(0, z) (\alpha_{n+1} B_n(0, 0) + \lambda \beta_n B_{n-1}(0, 0)), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Daí, para $n \geq 1$:

$$\frac{z^n B_n(\lambda, c/z)}{B_n(\lambda, 0)} = B_n(0, z) - \frac{\alpha_{n+1} B_n(0, 0) + \lambda \beta_n B_{n-1}(0, 0)}{B_n(0, 0) - \lambda B_{n-1}(0, 0)} B_{n-1}(0, z).$$

Comparando com a relação (4.2.1), encontramos:

$$\eta = \frac{\alpha_{n+1}B_n(0,0) + \lambda\beta_n B_{n-1}(0,0)}{B_n(0,0) - \lambda B_{n-1}(0,0)}, \quad n \geq 1.$$

Como $B_n(0,0) = -\beta_n B_{n-1}(0,0)$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.5 *Para qualquer $n \geq 1$, se*

$$\eta = \frac{\beta_n(\alpha_{n+1} - \lambda)}{\beta_n + \lambda}, \quad (4.2.2)$$

então, os polinômios $B_n(\lambda, z)$ e $B_n(\eta, z)$ estão relacionados pela relação (4.2.1).

Além disso, quando $\lambda, \eta > -\beta_n$,

$$z_{n,r}^{(\lambda)} = \frac{c}{z_{n,n+1-r}^{(\eta)}}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad e,$$

se $\lambda, \eta < -\beta_n$,

$$z_{n,1}^{(\lambda)} = \frac{c}{z_{n,1}^{(\eta)}}, \quad z_{n,r}^{(\lambda)} = \frac{c}{z_{n,n+2-r}^{(\eta)}}, \quad r = 2, \dots, n.$$

A segunda parte do teorema acima é consequência imediata das observações feitas no capítulo anterior, após o Teorema 3.2, sobre os zeros de $B_n(\lambda, z)$, quando $\lambda > -\beta_n$ ou $\lambda < -\beta_n$.

Um caso especial do teorema acima é:

Teorema 4.6 *Para qualquer $n \geq 1$, se λ é igual a*

$$\hat{\lambda}_n = \sqrt{\beta_n} \left(\sqrt{\gamma_n} - \sqrt{\beta_n} \right) \quad \text{ou} \quad (4.2.3)$$

$$\check{\lambda}_n = \sqrt{\beta_n} \left(-\sqrt{\gamma_n} - \sqrt{\beta_n} \right)$$

então,

$$\frac{z^n B_n(\lambda, c/z)}{B_n(\lambda, 0)} = B_n(\lambda, z). \quad (4.2.4)$$

Em particular,

$$z_{n,r}^{(\hat{\lambda}_n)} = \frac{c}{z_{n,n+1-r}^{(\hat{\lambda}_n)}} , \quad r = 1, 2, \dots, n , \quad e$$

$$z_{n,1}^{(\check{\lambda}_n)} = -\sqrt{c}, \quad z_{n,r}^{(\check{\lambda}_n)} = \frac{c}{z_{n,n+2-r}^{(\check{\lambda}_n)}} , \quad r = 2, \dots, n.$$

Demonstração:

Em (4.2.2), tomando $\lambda = \eta$, obtemos:

$$\lambda^2 + 2\beta_n \lambda - \beta_n \alpha_{n+1} = 0$$

cujas raízes são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= -\beta_n \pm \sqrt{\beta_n^2 + \beta_n \alpha_{n+1}} \\ &= -\beta_n \pm \sqrt{\beta_n} \sqrt{\beta_n + \alpha_{n+1}} \\ &= \sqrt{\beta_n} \left(-\sqrt{\beta_n} \pm \sqrt{\gamma_n} \right). \end{aligned}$$

Designando por $\hat{\lambda}_n$ a raiz positiva e por $\check{\lambda}_n$, a raiz negativa, chegamos às equações (4.2.3) e à relação (4.2.4).

Temos que $\check{\lambda}_n < -\beta_n$. Logo, o polinômio $B_n(\check{\lambda}_n, z)$ tem uma raiz negativa. Como, pelo teorema 3.5, as demais raízes são positivas, de (4.2.4), obtemos:

$$z_{n,1}^{(\check{\lambda}_n)} = \frac{c}{z_{n,1}^{(\hat{\lambda}_n)}}$$

Portanto, $z_{n,1}^{(\check{\lambda}_n)} = -\sqrt{c}$.

Isto completa a prova. $\square$

Consideremos, agora, o polinômio $A_n(\lambda, z)$, associado a $B_n(\lambda, z)$, definido em (3.1.8).

Substituindo t por $\frac{c}{u}$, obtemos:

$$A_n(\lambda, c/z) = \frac{z}{c} \int_a^b u \frac{B_n(\lambda, c/z) - B_n(\lambda, c/u)}{u - z} d\psi(u).$$

Então, para λ, η satisfazendo (4.2.2) temos, de (4.2.1),

$$\begin{aligned}
A_n(\lambda, \frac{c}{z}) &= \frac{z^{-n+1}}{c} B_n(\lambda, 0) \int_a^b u^{-n+1} \frac{u^n B_n(\eta, z) - z^n B_n(\eta, u)}{u - z} d\psi(u) \\
&= \frac{z^{-n+1}}{c} B_n(\lambda, 0) \int_a^b u^{-n+1} \frac{u^n B_n(\eta, z) - z^n B_n(\eta, u) + zu^{n-1} B_n(\eta, z) - zu^{n-1} B_n(\eta, z)}{u - z} d\psi(u) \\
&= \frac{z^{-n+1}}{c} B_n(\lambda, 0) \int_a^b u^{-n+1} \frac{zu^{n-1} B_n(\eta, z) - z^n B_n(\eta, u) + u^{n-1}(u - z) B_n(\eta, z)}{u - z} d\psi(u)
\end{aligned}$$

Portanto, para λ, η , que satisfazem (4.2.2)

$$A_n(\lambda, c/z) = \frac{z^{-n+1}}{c} B_n(\lambda, 0) (\mu_0 B_n(\eta, z) - z A_n(\eta, z)) , \quad n \geq 1. \quad (4.2.5)$$

Estamos, agora, em condições de provar o seguinte resultado:

Teorema 4.7 *Para toda distribuição $S\bar{c}S(a, b)$, $d\psi(t)$, se $\lambda, \eta > -\beta_n$ e satisfazem (4.2.2), então, os pesos da fórmula de quadratura (3.3.2) satisfazem:*

$$W_{n,r}^{(\lambda)} = W_{n,n+1-r}^{(\eta)} , \quad r = 1, \dots, n , \quad n \geq 1.$$

$$\text{Em particular, } W_{n,r}^{(\hat{\lambda}_n)} = W_{n,n+1-r}^{(\hat{\lambda}_n)} , \quad r = 1, \dots, n, \quad n \geq 1.$$

Demonstração:

De (4.2.1), obtemos:

$$B'_n(\lambda, c/z) = \frac{z^{-n+1}}{c} B_n(\lambda, 0) (n B_n(\eta, z) - z B'_n(\eta, z)) , \quad n \geq 1. \quad (4.2.6)$$

Fazendo $z = z_{n,n+1-r}^{(\lambda)}$, em (4.2.5) e (4.2.6), pelo teorema 4.5, chegamos que:

$$\begin{aligned}
A_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)}) &= A_n(\lambda, c/z_{n,n+1-r}^{(\eta)}) \\
&= -\frac{(z_{n,n+1-r}^{(\eta)})^{-n+2}}{c} B_n(\lambda, 0) A_n(\eta, z_{n,n+1-r}^{(\eta)})
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} B'_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)}) &= B'_n(\lambda, c/z_{n,n+1-r}^{(\eta)}) \\ &= -\frac{(z_{n,n+1-r}^{(\eta)})^{-n+2}}{c} B_n(\lambda, 0) B'_n(\eta, z_{n,n+1-r}^{(\eta)}) \end{aligned}$$

Logo, de (3.3.4):

$$W_{n,r}^{(\lambda)} = \frac{A_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)})}{B'_n(\lambda, z_{n,r}^{(\lambda)})} = \frac{A_n(\eta, z_{n,n+1-r}^{(\eta)})}{B'_n(\eta, z_{n,n+1-r}^{(\eta)})}$$

Portanto,

$$W_{n,r}^{(\lambda)} = W_{n,n+1-r}^{(\eta)}, \quad r = 1, \dots, n, \quad n \geq 1, \text{ como queríamos demonstrar.} \quad \square$$

Analogamente, podemos também provar o:

Teorema 4.8 *Seja $d\psi(t)$ uma distribuição $S\bar{c}S(a, b)$. Então, se $\lambda, \eta < -\beta_n$ e satisfazem (4.2.2), os pesos da regra de quadratura (3.3.2) satisfazem:*

$$W_{n,1}^{(\lambda)} = W_{n,1}^{(\eta)} \quad e \quad W_{n,r}^{(\lambda)} = W_{n,n+2-r}^{(\eta)}, \quad r = 2, \dots, n, \quad n \geq 2.$$

Em particular, $W_{n,r}^{(\tilde{\lambda}_n)} = W_{n,n+2-r}^{(\tilde{\lambda}_n)}$, $r = 2, \dots, n$, $n \geq 2$.

4.3 Exemplos

Como exemplos de distribuições $S\bar{c}S(a, b)$, $d\psi(t) = w(t)dt$, podemos citar:

Exemplo 4.1: $d\psi(t) = t^{-1}dt$, $t \in (0, \infty)$.

Exemplo 4.2: $d\psi(t) = t^{-1}e^{-(t+\frac{c}{t})}dt$, $t \in (0, \infty)$.

Exemplo 4.3: Consideremos a distribuição log-normal deslocada:

$$d\psi(t) = \frac{1}{2K\sqrt{\pi}} t^{-1} e^{-\left(\frac{\ln(t)}{2K}\right)^2} dt, \quad t \in (0, \infty).$$

Essa distribuição, também considerada em Common e McCabe [3], é uma distribuição $ScS(0, \infty)$, com $c = 1$ e, os coeficientes da relação de recorrência (2.3.1)(a) são dados por:

$$\beta_n = q^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \alpha_{n+1} = q^{\frac{1}{2}}(q^{-n} - 1) \quad , \quad n \geq 1,$$

onde $q = e^{-2K^2}$.

É interessante notar que essa distribuição é também uma distribuição $ScS(0, \infty)$ com $c = q$.

Verifica-se, facilmente, que os coeficientes acima satisfazem (4.1.9). Seguindo caminhos semelhantes àqueles usados por Cooper, Jones e Thron [4] e Pastro [18], obtemos:

$$B_n(z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \binom{n}{r}_q q^{r/2} z^{n-r} \quad , \quad n \geq 1,$$

onde $\binom{n}{r}_q$ são os coeficientes q-binomiais dados por:

$$\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1 \quad e \quad \binom{n}{r}_q = \frac{\prod_{k=1}^n (1 - q^k)}{\prod_{k=1}^r (1 - q^k) \prod_{k=1}^{n-r} (1 - q^k)} \quad , \quad 1 \leq r \leq n-1,$$

para $n \geq 0$.

Podemos escrever

$$B_n(\lambda, z) = z^n + \sum_{r=1}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \binom{n}{r}_q \left[1 + \lambda q^{-1/2} q^{n-r} \frac{(1 - q^r)}{(1 - q^n)} \right] q^{r/2} z^{n-r} \quad , \quad n \geq 1.$$

Portanto, para $\lambda = \hat{\lambda}_n = q^{1/2}(q^{-n/2} - 1)$, obtemos:

$$B_n(\hat{\lambda}_n, z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \binom{n}{r}_q \left[\frac{q^{r/2} + q^{(n-r)/2}}{1 + q^{n/2}} \right] z^{n-r} \quad , \quad n \geq 1,$$

e para $\lambda = \check{\lambda}_n = q^{1/2}(-q^{-n/2} - 1)$, obtemos:

$$B_n(\check{\lambda}_n, z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \binom{n}{r}_q \left[\frac{q^{r/2} - q^{(n-r)/2}}{1 - q^{n/2}} \right] z^{n-r} \quad , \quad n \geq 1.$$

Da simetria dos coeficientes de $B_n(\hat{\lambda}_n, z)$ e $B_n(\check{\lambda}_n, z)$ vemos que esses polinômios satisfazem (4.2.4).

Exemplo 4.4: Consideremos a distribuição

$$d\bar{\psi}(t) = \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}}, \quad t \in (a, b), \quad 0 < a < b < \infty,$$

que é uma distribuição $S\bar{c}S(a, b)$ com $c = ab$.

Este é o mais interessante dos exemplos dados e surge da seguinte forma:

Teorema 4.9 *Consideremos dada uma relação de recorrência da forma:*

$$P_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z),$$

com

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z - \beta_1,$$

e tal que $0 < \check{\beta} \leq \beta_n \leq \hat{\beta} < \infty$ e $0 < \check{\alpha} \leq \alpha_{n+1} \leq \hat{\alpha} < \infty$, $n \geq 1$.

Se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$$

então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(z)}{nP_n(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_u^v \frac{1}{z-t} \frac{1 + \sqrt{uv}/t}{\sqrt{v-t}\sqrt{t-u}} dt,$$

onde $u = \{\sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha}\}^2$ e $v = \{\sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha}\}^2$.

Demonstração:

De um resultado de Sri Ranga [21] (teorema 5.2), fazendo $Q_{2n}(x) = P_n(x^2)$, obtemos:

$$\frac{Q'_{2n}(x)}{2nQ_{2n}(x)} = \frac{xP'_n(x^2)}{nP_n(x^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{x-s} \frac{|s| + \mu_1\mu_2/|s|}{\sqrt{\mu_2^2 - s^2}\sqrt{s^2 - \mu_1^2}} ds \quad (4.3.1)$$

onde $\mu_1 = \sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha}$, $\mu_2 = \sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha}$ e

$$\mathcal{B} = [-\mu_2, -\mu_1] \cup [\mu_1, \mu_2].$$

Na expressão do lado direito de (4.3.1), se transferirmos a integral sobre $[-\mu_2, -\mu_1]$ para o intervalo $[\mu_1, \mu_2]$ chegaremos a:

$$\frac{P'_n(x^2)}{nP_n(x^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{2}{x^2 - s^2} \frac{s + \mu_1\mu_2/s}{\sqrt{\mu_2^2 - s^2}\sqrt{s^2 - \mu_1^2}} ds.$$

Tomemos, agora, $t = s^2$, na expressão que está do lado direito e, substituindo x^2 por z em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(z)}{nP_n(z)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_1^2}^{\mu_2^2} \frac{2}{z - t} \frac{\sqrt{t} + \mu_1\mu_2/\sqrt{t}}{\sqrt{\mu_2^2 - t}\sqrt{t - \mu_1^2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_u^v \frac{1}{z - t} \frac{1 + \sqrt{uv}/t}{\sqrt{v - t}\sqrt{t - u}} dt \end{aligned}$$

onde $u = \mu_1^2$ e $v = \mu_2^2$.

Chegamos, portanto, ao que queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 4.10 Para a distribuição $d\bar{\psi}(t)$, para $n \geq 1$, temos:

$$z_{n,n+1-r}^{(\hat{\lambda}_n)} = (\beta + \alpha\nu_{n,r}) + \sqrt{(\beta + \alpha\nu_{n,r})^2 - \beta^2}, \quad (4.3.2)$$

$$\begin{aligned} z_{n,r}^{(\hat{\lambda}_n)} &= \frac{ab}{z_{n,n+1-r}^{(\hat{\lambda}_n)}}, \quad \text{para } r = 1, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor, \\ e \quad W_{n,r}^{(\hat{\lambda}_n)} &= \frac{2\pi}{n}, \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Aqui,

$$\nu_{n,r} = 1 + \cos\left(\frac{2r-1}{n}\pi\right), \quad \beta = \sqrt{ab} \quad e \quad \alpha = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4}.$$

Demonstração:

As equações acima claramente satisfazem às condições estabelecidas nos teoremas 4.6 e 4.7.

Consideremos, primeiramente, os polinômios similares $\hat{B}_n(z)$, $n \geq 1$, associados à distribuição $\frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}}$, isto é:

$$\int_a^b t^{-n+s} \hat{B}_n(t) \frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1. \quad (4.3.4)$$

A distribuição $\frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt$ é uma distribuição $ScS(a, b)$ com $c = ab$. Os polinômios $\hat{B}_n(z)$ foram estudados com algum detalhe em Sri Ranga [25], onde se mostrou que:

$$\frac{z^n \hat{B}_n(ab/z)}{\hat{B}_n(0)} = \hat{B}_n(z), \quad n \geq 1. \quad (4.3.5)$$

Se, em (4.3.4), fizermos $t = ab/u$, usando a relação acima, obtemos:

$$\int_a^b u^{-n+r} \hat{B}_n(u) \frac{\sqrt{ab}/u}{\sqrt{b-u}\sqrt{u-a}} du = 0, \quad 1 \leq r \leq n, \quad n \geq 1.$$

Adicionando a igualdade acima a (4.3.4), obtemos:

$$\int_a^b t^{-n+s} \hat{B}_n(t) d\bar{\psi}(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1.$$

Assim, pelos teoremas 3.1 e 4.6 e, de (4.3.5), temos:

$$\hat{B}_n(z) = B_n(\hat{\lambda}_n, z),$$

pois os zeros de $\hat{B}_n(z)$ pertencem ao intervalo (a, b) , como mostramos no teorema 2.4.

Em Sri Ranga [25], mostrou-se que os zeros de $\hat{B}_n(z)$ e, portanto os de $B_n(\hat{\lambda}_n, z)$ são dados por (4.3.2).

Sri Ranga e Veiga [26], provaram que se $0 < a < b < \infty$ e $w(t) = \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}}$, então

$$\int_a^b f(t) w(t) dt = \frac{\pi}{n} \sum_{r=1}^n f(z_{n,r}),$$

para $z^{n-1} f(z) \in \mathcal{P}_{2n-2}$, onde $z_{n,r}$ são os zeros de $\hat{B}_n(z)$.

Isto completa a prova do teorema. $\square$

Temos, então, uma nova regra de quadratura dada por:

$$\int_a^b f(t) \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt = \frac{2\pi}{n} \sum_{r=1}^n f(z_{n,r}^{(\hat{\lambda}_n)}) + E_n(\hat{\lambda}_n, f), \quad (4.3.6)$$

onde $E_n(\hat{\lambda}_n, f) = 0$, sempre que $z^{n-1}f(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}$ e $z_{n,r}^{(\hat{\lambda}_n)}$ é dado por (4.3.2).

Observe-se que se $f(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$, então, $E_n(\hat{\lambda}_n, f) = 0$.

Esta é, portanto, uma fórmula de quadratura do tipo Tchebyshev.

A seguir, aplicaremos a regra de quadratura dada acima para avaliarmos numericamente uma classe de integrais dada por:

$$I = \int_{-1}^1 g(x) f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (4.3.7)$$

onde $g(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas no intervalo $[-1, 1]$. Suponhamos que a função $f(x)$ tenha singularidade isolada no ponto $-\lambda$, onde $|\lambda| > 1$.

Como exemplos especiais dessa classe de integrais temos:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x+\lambda)^r} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad |\lambda| > 1, \quad r \geq 1, \quad \text{e}$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 g(x) \ln(x+\lambda) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \lambda > 1.$$

Para aproximar essa classe de integrais, uma escolha adequada seria a fórmula de quadratura de Gauss-Tchebyshev (veja, por exemplo, Krylov [17]). Como $g(x)$ e $f(x)$ não possuem singularidades no intervalo $[-1, 1]$, poderíamos esperar boa convergência através dessa regra. Entretanto, quando a singularidade de $f(x)$ está bem próxima do intervalo, isto é, quando $|\lambda|$ está perto de 1, a regra de quadratura de Gauss-Tchebyshev apresenta comportamento altamente insatisfatório.

A aplicação da nova regra de quadratura (4.3.6) às integrais I_1 e I_2 , nas condições citadas acima, apresentou ótimo desempenho, conforme veremos abaixo.

Sejam a e b dois números reais positivos tais que $\frac{b}{a} = \frac{|\lambda| + 1}{|\lambda| - 1}$. Então, se

$$x = x(t) = \frac{\lambda}{|\lambda|} (2t - b - a) / (b - a), \quad (4.3.8)$$

obtemos:

$$I = \int_a^b g(x(t)) \frac{f(x(t))}{1 + \sqrt{ab}/t} \cdot \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt.$$

É fácil ver que, quando $t = 0$, temos $x = -\lambda$.

Logo, a singularidade de $f(x)$, no ponto $x = -\lambda$, está, agora, localizada no ponto $t = 0$.

Consideremos os casos especiais das integrais I_1 e I_2 e comparemos os resultados obtidos pela aplicação da regra de quadratura de Gauss-Tchebyshev com os obtidos pela nova regra, os quais foram gerados num microcomputador 486 DX, usando-se a linguagem Turbo Pascal 7.0 com dupla precisão.

A Integral I_1 .

Aplicando a transformação linear (4.3.8) à integral I_1 , obtemos:

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} I_1 = \left(\frac{b-a}{2} \right)^r \int_a^b g \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{2t}{b-a} - |\lambda| \right) \frac{t^{-r}}{1 + \sqrt{ab}/t} \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt.$$

Tomando $b = |\lambda| + 1$ e $a = |\lambda| - 1$, $b - a = 2$ e, portanto,

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} I_1 = \int_a^b g \left(\frac{\lambda t}{|\lambda|} - |\lambda| \right) \frac{t^{-r}}{1 + \sqrt{ab}/t} \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt.$$

Estamos, agora, em condições de aplicar a regra de quadratura (4.3.6) a essa integral.

Quando $g(t) = \exp(t)$, o comportamento de ambas as regras de quadratura na aproximação da integral I_1 , pode ser visto nos quadros 4.1, 4.2 e 4.3. Nesses quadros, os algarismos sublinhados representam os dígitos incorretos.

Para $r = 1$ e $\lambda = 1.1$, o valor exato da integral, isto é, o valor da integral, calculada numericamente, com 15 algarismo significativos de precisão, é 4.39889820293419. A regra de quadratura (4.3.6) converge para esse valor com $n = 15$ pontos, enquanto que a de Gauss-Tchebyshev precisa de cerca de 40 pontos para atingir a mesma precisão.

Quando $r = 1$ e $\lambda = 1.01$, a nova regra de quadratura novamente converge para o valor exato da integral com $n = 15$ pontos, enquanto que com a regra de Gauss-Tchebyshev, a convergência se dará com $n > 60$ pontos.

Quadro 4.1 - Aproximações da integral I_1

$r=1$ $\lambda = 1.1$	Valor exato: 4.39889820293419 (para 15 algarismos significativos)	
Nº Pontos n	Tchebyshev	Nova Regra
2	<u>3.73420410564591</u>	4. <u>29062607546071</u>
5	4.34546158033538	4.39886235163140
10	4.39825773050812	4.39889820293175
15	4.39889061421973	4.39889820293419
20	4.39889811303072	4.39889820293419
25	4.39889820186911	4.39889820293419
30	4.39889820292158	4.39889820293419
35	4.39889820293404	4.39889820293419
40	4.39889820293419	4.39889820293419

Quadro 4.2 - Aproximação da integral I_1

$r=1$ $\lambda = 1.01$	Valor exato: 10.2639878472229 (para 15 algarismos significativos)	
Nº Pontos n	Tchebyshev	Nova Regra
2	<u>4.41234564556321</u>	10. <u>0898085495086</u>
5	7. <u>10419867284627</u>	10.263 <u>8544952129</u>
10	<u>9.63117219583743</u>	10.263987847 <u>1835</u>
15	10. <u>0345299400422</u>	10.2639878472229
20	10. <u>2075299327530</u>	10.2639878472229
30	10.2606319606739	10.2639878472229
40	10.2637889891283	10.2639878472229
50	10.2639760657562	10.2639878472229
60	10.2639871492305	10.2639878472229

No caso $r = 2$ e $\lambda = 1.01$, a nova regra de quadratura atinge a precisão com $n = 15$ pontos apenas, enquanto que a regra de Gauss-Tchebyshev, para $n = 60$ pontos, não conseguiu, ainda, o valor desejado.

Esses resultados mostram, claramente, o comportamento superior, quanto à convergência, da regra de quadratura (4.3.6) com relação à de Gauss-Tchebyshev, quando $g(x) = \exp(x)$, $r \geq 1$ e λ está próximo de 1.

Observações semelhantes foram feitas quando $g(x)$ é tomado como, por exemplo, $\sin(x)$, $\arctan(x)$ e $\exp(-x)$.

Quadro 4.3 - Aproximações da integral I_1

$r=2$ $\lambda = 1.01$	Valor exato: 414.487347140548 (para 15 algarismos significativos)	
Nº Pontos n	Tchebyshev	Nova Regra
2	<u>9.52253826727022</u>	414.450763018071
5	<u>73.3065885725925</u>	414.487330285584
10	<u>247.983129030994</u>	414.487347140545
15	<u>354.863991893518</u>	414.487347140548
20	<u>395.720726633069</u>	414.487347140548
30	<u>412.895421482874</u>	414.487347140548
40	<u>414.364946344790</u>	414.487347140548
50	<u>414.478433355217</u>	414.487347140548
60	<u>414.486720578251</u>	414.487347140548

A Integral I_2

Aplicando a transformação (4.3.8) à integral I_2 e fazendo $b = |\lambda| + 1$ e $a = |\lambda| - 1$, obtemos:

$$I_2 = \frac{\lambda}{|\lambda|} \int_a^b g\left(\frac{\lambda t}{|\lambda|} - |\lambda|\right) \frac{\ln(\lambda t/|\lambda| - |\lambda| + \lambda)}{1 + \sqrt{ab}/t} \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt.$$

Como $\lambda > 1$, chegamos a:

$$I_2 = \int_a^b g(t - \lambda) \frac{\ln(t)}{1 + \sqrt{ab}/t} \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt.$$

Os quadros 4.4, 4.5 e 4.6, a seguir, mostram o comportamento da nova regra de quadratura e o da de Gauss-Tchebyshev na aproximação da integral I_2 quando $g(x) = 1$.

Quando $\lambda = 1.1$, podemos observar que a regra de quadratura (4.3.6) converge para o valor exato da integral com $n = 20$ pontos, enquanto que a regra de Gauss-Tchebyshev necessita de aproximadamente 40 pontos para obter a precisão desejada.

Quadro 4.4 - Aproximações da integral I_2

$\lambda = 1.1$	Valor exato: -0.78407532096167 (para 15 algarismos significativos)	
Nº Pontos n	Tchebyshev	Nova Regra
2	-0.53798251925644	-0.65429680854182
5	-0.77667539308596	-0.78425626196926
10	-0.78403123153076	-0.78407531594543
15	-0.78407497271987	-0.78407532096183
20	-0.78407531786746	-0.78407532096167
30	-0.78407532096138	-0.78407532096167
40	-0.78407532096167	-0.78407532096167

Quadro 4.5 - Aproximações da integral I_2

$\lambda = 1.01$	Valor exato: -1.73366720616294 (para 15 algarismos significativos)	
Nº Pontos n	Tchebyshev	Nova Regra
2	-1. <u>02688324582172</u>	-1. <u>05660131812328</u>
5	-1. <u>59678688631788</u>	-1. <u>74991094326297</u>
10	-1. <u>71558535924280</u>	-1. <u>73361911803848</u>
15	-1. <u>73066857878739</u>	-1. <u>73366737436584</u>
25	-1. <u>73355989323465</u>	-1. <u>73366720616536</u>
35	-1. <u>73366266309195</u>	-1.73366720616294
45	-1. <u>73366699681608</u>	-1.73366720616294
55	-1. <u>73366716030284</u>	-1.73366720616294
60	-1. <u>73366720389879</u>	-1.73366720616294

Quando $\lambda = 1.01$, o quadro 4.5 nos mostra que, para a nova regra de quadratura, a convergência se deu com cerca de 35 pontos, ao passo que com a regra de quadratura de Gauss-Tchebyshev, necessitamos de mais de 60 pontos para obtermos a mesma precisão.

Quadro 4.6 - Aproximações da integral I_2

$\lambda = 1.001$	Valor exato: -2.03710150107382 (para 15 algarismos significativos)	
Nº Pontos n	Tchebyshev	Nova Regra
2	<u>-1.08251926373189</u>	<u>-0.67859265442601</u>
5	<u>-1.72649266394189</u>	<u>-2.1896980035028</u>
15	<u>-1.98845742116654</u>	<u>-2.03729356811280</u>
25	<u>-2.02433892383446</u>	<u>-2.03710185496565</u>
35	<u>-2.03326163751410</u>	<u>-2.03710150179145</u>
45	<u>-2.03586490057843</u>	<u>-2.03710150107534</u>
55	<u>-2.03668565083233</u>	-2.03710150107382
65	<u>-2.03695732015781</u>	-2.03710150107382
75	<u>-2.03705036466060</u>	-2.03710150107382
85	<u>-2.03708304595454</u>	-2.03710150107382

Finalmente, para o caso em que $\lambda = 1.001$, a regra de quadratura de Gauss-Tchebyshev ainda não convergiu com $n = 85$, enquanto que a regra de quadratura (4.3.6) atingiu a precisão desejada com cerca de 55 pontos.

Aqui, também, podemos ver o comportamento superior da regra de quadratura (4.3.6), quanto à convergência, comparada à regra de Gauss-Tchebyshev.

Capítulo 5

Conclusão

O estudo da classe de distribuições especiais $S\bar{c}S(a, b)$, levou-nos à obtenção de muitos resultados interessantes sobre os polinômios similares aos ortogonais $B_n(z)$, definidos e estudados em Sri Ranga [20], e cujas principais propriedades apresentamos no Capítulo 2. Como exemplo, podemos citar o Teorema 4.4, que relaciona entre si os coeficientes da relação de recorrência de tres termos (2.3.1).

Porém, os resultados mais interessantes surgiram quando relacionamos as distribuições $S\bar{c}S(a, b)$, especificamente, aos polinômios

$$B_n(\lambda, z) = B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z), \lambda \in \mathbb{R},$$

definidos e estudados no Capítulo 3. Nesse capítulo, demonstramos algumas propriedades satisfeitas por esses polinômios e seus associados, $A_n(\lambda, z)$, quando relacionados à distribuições fortes quaisquer, como a relação de recorrência de tres termos satisfeita por $B_n(\alpha_{n+1}, z)$ e $A_n(\alpha_{n+1}, z)$ e, os teoremas 3.3 a 3.7 que fornecem informações sobre os zeros de $B_n(\lambda, z), \lambda \in \mathbb{R}$. Ainda nesse capítulo, construímos uma fórmula de quadratura da forma

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{r=1}^n W_{n,r}^{(\lambda)} f(z_{n,r}^{(\lambda)}) + E_n(\lambda, f)$$

onde, $d\psi(t)$ é uma distribuição $SS(a, b)$, $E_n(\lambda, f) = 0$ sempre que $z^{n-1} f(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}$ e $z_{n,r}^{(\lambda)}, r = 1, \dots, n$, são os zeros de $B_n(\lambda, z)$. Na secção 3.4 fornecemos uma ma-

neira versátil e eficiente para calcularmos os zeros de $B_n(\lambda, z)$, através dos auto-valores de uma matriz de Hessenberg, construída usando-se os coeficientes da relação de recorrência de tres termos para $B_n(z)$, (2.3.1).

Com relação à distribuição $S\bar{c}S(a, b)$, demonstramos, no Teorema 4.6, que, para alguns valores especiais de λ , os zeros de $B_n(\lambda, z)$, $n \geq 1$, satisfazem a uma certa propriedade de simetria inversa. Provamos, também, que, para esses valores de λ , os pesos, $W_{n,r}^{(\lambda)}$, na fórmula de quadratura acima estão relacionados entre si.

Os resultados apresentados neste trabalho sobre os polinômios $B_n(z)$ e $B_n(\lambda, z)$ e regras de quadratura, associados à classe de distribuições $S\bar{c}S(a, b)$, estão resumidos nos artigos: “ Some Consequences of a Symmetry in Strong Distributions ”, em co-autoria com A. Sri Ranga e J. H. McCabe, aceito para publicação no Journal of Mathematical Analysis and Applications e, “ A Weight Function that Appears in the Limit and Certain Associated Polynomials ”, também, em co-autoria com A. Sri Ranga.

Em [26], Sri Ranga e Veiga mostraram que a regra de quadratura acima citada, com $d\bar{\psi}(t)$ a distribuição $S\bar{c}S(a, b)$ dada por

$$d\bar{\psi}(t) = \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt$$

é uma regra de quadratura do tipo Tchebyshev com nós e pesos dados explicitamente. A distribuição $d\bar{\psi}(t)$ acima aparece como um limite, conforme provamos no Capítulo 4. Mostramos a superioridade dessa regra de quadratura com relação à de Gauss-Tchebyshev.

Como consequência dos resultados obtidos em nosso trabalho, especialmente os do Capítulo 4, em Sri Ranga e Bracciali [27] foram considerados os coeficientes da fração contínua

$$\frac{\rho_0}{z - \beta_1 - \frac{\alpha_2 z}{z - \beta_2 - \frac{\alpha_3 z}{z - \beta_3 - \dots}}}$$

que correspondem a dois pontos, 0 e ∞ , para a função de Stieltjes

$$\int_a^b \frac{1}{z-t} d\bar{\psi}(t), \quad 0 < a < b < \infty.$$

Em Sri Ranga e McCabe [32], foram aplicados resultados nossos para obter informações sobre a classe de distribuições $ScS(a, b)$.

Em [28], Sri Ranga achou uma relação entre polinômios ortogonais simétricos e polinômios similares associados às distribuições $ScS(a, b)$. Com isso, chegou a novos importantes resultados na área de polinômios ortogonais. Para isso, foi de importância fundamental o uso de nossos resultados. Esse trabalho foi aceito para publicação no Proc. Amer. Math. Society.

No artigo, submetido para publicação, Sri Ranga [31] estendeu os resultados acima, para o caso de polinômios ortogonais, ou seja, obteve resultados sobre os coeficientes das relações de recorrências de polinômios ortogonais associados com quaisquer duas distribuições simétricas $d\phi_1(x)$ e $d\phi_2(x)$ tais que $d\phi_2(x) = (1 + kx^2)d\phi_1(x)$, $k > 0$. Novamente, essas extensões foram possíveis graças aos resultados obtidos por nós.

Esses são alguns frutos da pesquisa iniciada por nós sobre a classe de distribuições $S\bar{c}S(a, b)$.

Muito há ainda para ser feito.

Um estudo que nos parece ser bastante promissor é sobre os polinômios

$$B_n(\lambda_1, \dots, \lambda_r, z) = B_n(z) - \sum_{i=1}^r \lambda_i B_{n-i}(z), \quad 1 < r < n.$$

associados às distribuições $SS(a, b)$, $n \geq 1$, $0 \leq a < b \leq \infty$.

Referências Bibliográficas

- [1] Blumenthal, O. *Über die Entwicklung einer willkürlichen funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int_{-\infty}^0 [\phi(\xi)/(z - \xi)]d\xi$* , Inaugural thesis, University of Göttingen, Göttingen, Germany, 1898.
- [2] Chihara, T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [3] Common, A.K. & McCabe, J.H., *The symmetric strong moment problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics, aceito.
- [4] Cooper, S.C., Jones, W.B. & Thron, W.J., *Assymptotics of orthogonal L-polynomials for log-normal distributions*, Constructive Approx., 8 (1992), 59-67.
- [5] Davis, P.J. & Rabinowitz, P., *Numerical Integration*, Blaisdell Publ. Co., (1967).
- [6] Davis, P.J. & Rabinowitz, P., *Methods of Numerical Integrations*, Academic Press, New York (1975).
- [7] de Boor, C., *A Pratical Guide To Splines*, Springer-Verlag, New York, (1978).
- [8] Gautschi, W., *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*. In: Butzer, P.L., Fehér, F., eds., E.B. Christoffel - The influence of his work in mathematics and physical science, pp. 72-147, Birkhäuser Verlag, Basel (1981).
- [9] Gautschi, W., *On generating orthogonal polynomials*, SIAM Journal of Sci. Stat. Comput., 3 (1982), 289-317.

- [10] Gautschi, W., *Orthogonal polynomials - Constructive theory and applications*, Journal of Comput. and Applied Mathematics, 12 e 13 (1985), 61-76.
- [11] Jones, W.B. & Magnus, A., *Computations of poles of Two-point Padé approximants and their Limits*, Journal of Computational and Applied Mathematics, v.6, 2 (1980), 105-119.
- [12] Jones, W.B., Njåstad, O. & Thron, W.J., *Two-point Padé expansions for a family of analytic functions*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 9 (1983), 105-123.
- [13] Jones, W.B., Njåstad, O. & Thron, W.J., *Orthogonal Laurent polynomials and a strong Hamburger moment problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 98 (1984), 528-554.
- [14] Jones, W.B. & Thron, W.J., *Continued Fraction: Anal. Theory and Applications*, In: Encyclopaedia of mathematics and its applications, vol. 11, Addison-Wesley, Reading, (1980).
- [15] Jones, W.B. & Thron, W.J., *Orthogonal Laurent polynomials and Gaussian quadrature*, In: Gustafson, K.E., Reinhardt, W.P., eds, Quantum mechanics in mathematics, chemistry, and physics, pp. 449-455, Plenum Press, New York, (1981).
- [16] Jones, W.B., Thron, W.J. & Waadeland, H., *A strong Stieltjes moment problem*, Transaction Amer. Math. Society, 261 (1980), 503-528.
- [17] Krylov, V.I., *Approximate Calculation of Integrals*, Macmillan, New York, 1962.
- [18] Pasto, P.I., *Orthogonal polynomials and some q -beta integrals of Ramanujan*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 112 (1985), 517-540.
- [19] Phillips, G.M. & Taylor, P.J., *Theory and Applications of Numerical Analysis*, Academic Press, London (1973).

- [20] Sri Ranga, A., *Continued fractions with correspond to two series expansions, and the strong Hamburger moment problem*. Tese de doutoramento, Univ. of St. Andrews, St. Andrews, Escócia(1984).
- [21] Sri Ranga, A., *On a recurrence formula associated with strong distributions*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, 21 (1991), 1335-1348.
- [22] Sri Ranga, A., *Polinômios ortogonais e similares*, Tese de Livre-Docência, Universidade de São Paulo, São Carlos (SP) (1990).
- [23] Sri Ranga, A. & Andrade, E.X.L., *Zeros of polynomials which satisfy a certain three term recurrence relation*, Communications in the Anal.Theory of Continued Fractions, 1 (1992), 61-65.
- [24] Sri Ranga, A. & Andrade, E.X.L., *Avaliação numérica de uma classe de integrais*, Revista de Matemática e Estatística, UNESP, 11 (1993), 165-172.
- [25] Sri Ranga, A., *Another quadrature rule of highest degree of precision*, Numerische Mathematik, 68 (1994), 283-294.
- [26] Sri Ranga, A. & Veiga, M., *A Tchebyshev type quadrature rule with some interesting properties*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 51 (1994), 263-265.
- [27] Sri Ranga, A. & Bracciali, C.F., *A Continued fraction associated with a special Stieltjes function*, Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions, 3 (1994), 60-64.
- [28] Sri Ranga, A., *Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials*, Proc. Amer. Mathem. Society, (aceito).
- [29] Sri Ranga, A., Andrade, E.X.L. & McCabe, J.H., *Some consequences of a symmetry in strong distributions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (aceito).
- [30] Sri Ranga, A. & Andrade, E.X.L., *A weight function that appears in the limit and certain associated polynomials*, submetido.

- [31] Sri Ranga, A., *Companion orthogonal polynomials*, submetido.
- [32] Sri Ranga, A. & McCabe, J.H., *On pairwise related strong Stieltjes distributions*, submetido.
- [33] Stroud, A.H. & Secrest, D., *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey .
- [34] Szegő, G., *Orthogonal polynomials*, American Math. Society, Colloq. Publ., New York, 23, 1939.