

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Área de concentração: Biomatemática

A presença evolutiva de um material impactante
e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas:
modelagem e aproximação

Este exemplar corresponde à redação final da Tese
de Doutorado devidamente corrigida e defendida por
Renata Cristina Sossae e aprovada pela comissão
julgadora.

Campinas, 29/08/2003.

Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Banca Examinadora:

1. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
2. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva
3. Dr. Eduardo Massad
4. Dr. Sérgio Furtado dos Reis
5. Dr. Laécio Carvalho de Barros

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Sossae, Renata Cristina

S74p

A presença evolutiva de um material impactante e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas: modelagem e aproximação / Renata Cristina Sossae -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : João Frederico de Costa Azevedo Meyer

Doutorado (Tese) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Equações diferenciais parciais não-lineares. 2.Impacto ambiental. 3.Método de elementos finitos. 4.Ecossistema. 5.Difusão – Modelos matemáticos. I. Meyer, João Frederico da Costa Azevedo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Resumo e Abstract

Resumo

Neste trabalho, partindo de um efetivo problema de impacto ambiental numa região de pantanal e de um levantamento na literatura, justificamos a modelagem de uma interação entre quatro espécies-chave, incluindo as ações intra-específicas. Este quadro recebe a perturbação da presença de um produto impactante, nascido de ações antrópicas na região ou próximas, e o sistema evolutivo de equações diferenciais parciais não-linear usado para modelar aspectos transientes dos níveis populacionais é apresentado em suas formulações clássica e variacional. Um esquema algorítmico é apresentado, com o qual se obtêm aproximações locais de terceira ordem nas variáveis espaciais e de segunda ordem na aproximação temporal. A aproximação espacial feita com o Método dos Elementos Finitos, usando os de segunda ordem em triângulos com os quais se discretiza o domínio. No tempo, usa-se Crank-Nicolson e, para aproximar a solução do sistema não-linear resultante, recorre-se a uma sucessiva linearização em cada passo no tempo. Resultados numéricos são apresentados de modo a permitir discussão e análise dos gráficos obtidos para as soluções aproximadas.

Abstract

In this work, we describe a problem of environmental impact in a wetland region and we present a study of the available literature in which similar problems are modelled: with this, we justify the choice of a nonlinear system of partial differential equations which include both actions within each of the species and between them. The mathematical model, defined in the classical form, is presented in its variational form. An algorithmic approach is presented with the purpose of discretizing spatial approximations with a local third-degree method, as well as discretizing the time variable with a local second-degree method. In space, the Finite Element method is used with second order approximations on the triangles which make up the discretized domain, and, in time, the chosen method is that of Crank-Nicolson. For the resulting non-linear system, a successive linearization method is adopted in each time-step. Numerical results are presented and visualized in order to permit analysis and discussion of approximated results.

*Aos meus pais, Fladyr e Olinda,
pelo incentivo e compreensão.*

*“Não importa onde você parou...
em que momento da vida você cansou...
o que importa é que sempre é possível e necessário ‘Recomeçar’.”*
Carlos Drummond de Andrade

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que me ajudaram e me apoiaram, e em especial:

Ao amigo e orientador Prof. Dr. João Frederico C. A. Meyer (Joni), pela amizade, carinho e orientação dispensada nas pesquisas aqui apresentadas.

Aos demais membros da Banca Examinadora, Professores Drs. Jacques, Eduardo, Sérgio, Laécio e Yuri, pela contribuição para o aprimoramento deste trabalho.

À Capes pelo imprescindível apoio financeiro prestado.

Aos amigos Geraldo Lúcio Diniz e Renato Fernandes Cantão pela amizade e contribuição na parte computacional.

À Secretaria da Pós-Graduação e do Departamento de Matemática Aplicada pela ajuda diária.

À todos os amigos que sempre me incentivaram e apoiaram nestes últimos anos.

Aos colegas do Unisal pelo convívio, pelas palavras de carinho nos momentos de desânimo e pelos bons momentos.

Às minhas irmãs, Flávia e Fabiana, pela dedicação e amizade.

Campinas, SP.

Renata Cristina Sossae

29, Agosto, 2003

Sumário

Resumo e Abstract	iii
Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Dinâmica Populacional Não Linear com Interação Presa-Predador	7
1 Modelo Matemático	7
2 Formulação Variacional	10
3 O Método de Galerkin	13
4 Discretização espacial: Método de Elementos Finitos	16
5 Discretização temporal: Método de Crank-Nicolson	17
6 Uma Simplificação Conveniente do Problema Discreto Linearizado	19
2 Dinâmicas Populacionais Não Lineares com Interações do Tipo Presa-Predador com Competição	28
1 Introdução	28
2 Formulação Variacional das Dinâmicas Populacionais	36
3 O Modelo Discreto	40
1 Introdução	40
2 O Método de Galerkin	40
3 Discretização espacial: Método de Elementos Finitos	43
4 Discretização temporal: Método de Crank-Nicolson	46
5 O Problema Discretizado Não Linear	50

4	Resultados das Simulações Numéricas	57
5	Conclusão	76
A	Esquema Computacional	79
	Bibliografia	93

Lista de Figuras

1.1	Comportamento evolutivo do convívio de duas espécies que interagem.	25
1.2	Comportamento evolutivo do convívio de duas espécies que interagem.	26
2.1	Fluxograma da cadeia trófica em <i>Esteros del Iberá</i>	32
2.2	Mapa de circulação de água.	34
3.1	Batimetria da lagoa de <i>Iberá</i>	44
3.2	Discretização da lagoa de <i>Iberá</i> usando o <i>software Triangle</i> (ver Shewchuk, 2002).	45
4.1	Níveis populacionais na ausência do produto impactante.	58
4.2	Comportamento do nó #2424 numa região sem o contaminante.	59
4.3	Material Impactante na região inferior da lagoa.	60
4.4	Níveis populacionais com o contaminante na parte inferior da lagoa.	61
4.5	Mesmos níveis populacionais vistos por outro ângulo.	62
4.6	Comportamento evolutivo dos níveis populacionais no nó #2424.	63
4.7	Evolução do material impactante.	64
4.8	Níveis populacionais na presença do produto tóxico.	65
4.9	Outra visão dos níveis populacionais na presença do produto tóxico.	66
4.10	Efeito tóxico no nó #1302 na região afetada pelo contaminante.	67
4.11	Evolução de um nó fora da região de efeito do material impactante.	68
4.12	Evolução do material impactante – iteração 400.	69
4.13	Níveis populacionais na presença do agente tóxico – iteração 400.	70
4.14	Outra visão dos níveis populacionais em escalas diferentes.	71
4.15	Níveis populacionais na mesma escala.	72

4.16	Comportamento da população 1 após 400 iterações.	73
4.17	Comportamento evolutivo dos níveis populacionais para o nó #1302.	74
4.18	Comportamento evolutivo dos níveis populacionais para o nó #2424.	75

Introdução

O crescimento e o decaimento de populações e a luta de espécies na natureza para sobreviver frente a outras vem sendo estudado ao longo da história da matemática. Aplicações de conceitos simples de matemática a tais fenômenos foram usados séculos atrás. Entre os principais modelos matemáticos de população citamos os de Malthus (1798), Verhulst (1838), Gompertz (1825), Lotka (1925) e Volterra e D'Ancona (1926) entre muitos outros.

Estes modelos consideravam apenas a variação temporal, isto é, pressupunham uma distribuição espacial homogênea dos indivíduos. No entanto há toda uma série de fenômenos, influenciados, por exemplo por configurações geográficas, cuja modelagem exige a inclusão de outra variável, a espacial. Segundo alguns autores Carl (1971); Gurney e Nisbet (1975); Gurtin e MacCamy (1977), pequenos grupos migram para outras regiões quando a densidade da população no local atinge determinados níveis. Fenômenos de dispersão e de migração são observados em quase todo tipo de população existente na natureza, sendo inclusive fator de equilíbrio populacional de certas espécies. Em trabalho anterior (Sossae, 1995), efetuamos a modelagem e a aproximação numérica de uma situação em que uma única espécie era considerada.

Também aqui pode se tornar necessário incluir na modelagem características sistêmicas, incorporando fenômenos como mutualismo, competição, predação, entre outros. Podemos observar este fato no artigo de Skellam (1951) que considera o caso de duas espécies de plantas que competem no mesmo habitat. Estes modelos clássicos do tipo Lotka-Volterra continuam presentes na bibliografia acadêmica e em aplicações, dada sua grande versatilidade e sua simplificada descrição de realidades bastante variadas. Esta frase se aplica àquelas situações em que diversos tipos de não linearidades estão presentes nos sistemas de equações que descrevem as relações na espécie e entre espécies.

Para descrever estes fenômenos de dinâmica populacional com variações temporal e espacial tem-se utilizado Equações Diferenciais Parciais. Estes modelos que consideram também as variações espaciais, além de aspectos evolutivos e, em alguns casos, equações e sistemas de tipo Difusão-Advecção, definitivamente desbancaram os sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias na descrição e na avaliação do comportamento evolutivo de Dinâmicas Populacionais inter e intra-específicas. Ao mesmo tempo que o instrumental matemático permitia incluir na modelagem os aspectos espaciais, o instrumental numérico-computacional permitia que se considerassem não-linearidades nas equações, de modo a aproximar os modelos das realidades estudadas, embora afastassem-nas dos relativos confortos de soluções analíticas.

Tais modelos motivam diversos estudos na tentativa de compreender melhor os comportamentos temporal e espacial de espécies e ecossistemas complexos através da análise e códigos numéricos cada vez mais sofisticados sob o ponto de vista da utilização de ferramentas matemáticas, como por exemplo, análises de estabilidade de pontos de equilíbrio e trajetórias no plano de fase (ver Azar, 1995; Keitt e Johnson, 1995; Kohlmeier e Edenhoh, 1995; Van den Bosch e Gabriel, 1997; Dubey, 1997; Moreira e Yuquan, 1997) sistemas hamiltonianos e métodos de perturbação (ver King, 1996; Auger e Poggiale, 1996), estimativas de parâmetros (ver Tayasu *et al.*, 1996; Wu *et al.*, 1996; Jensen, 1996) etc.

Nesta linha, desde os trabalhos pioneiros de Skellam (1951), Nisbet e Gurney (1982) e, ainda, Gurtin e MacCamy (1977), podemos citar Ding (1992) que trabalham com um sistema que apresenta difusão e um termo não linear; Milner e Rabbiolo (1992) que propõem algoritmos rapidamente convergentes para a determinação de soluções aproximadas para o sistema de Gurtin e MacCamy com dois sexos; Ikeda e Mimura (1993) que consideram o problema de coexistência de duas espécies em competição mediada por um predador, usando um sistema de reação-difusão adaptado ao modelo de Lotka-Volterra com diferentes taxas de difusão para presa e predador, já o sistema de três equações não linear é analisado sob o ponto de vista da existência de pontos de equilíbrio e soluções estáveis; Cantrell e Cosner (1996c) analisam um modelo descrito por um sistema de duas equações que descrevem a colonização de uma ilha por uma espécie de pássaro na ausência e na presença de competição com outra espécie nativa. A dinâmica vital da espécie colonizadora é considerada malthusiana até certo

período, passando depois a verhulstiana, incorporando também um efeito Allee na população colonizadora. Em um artigo recente, Cantrell e Cosner (1998) trabalham com sistemas de equações de reação-difusão que descrevem modelos de interação entre duas espécies do tipo presa-predador e competição estabelecendo resultados qualitativos, via análise de pontos de equilíbrio, para que as espécies persistam no habitat considerado. Anteriormente Cantrell e Cosner (1996b), Cantrell e Cosner (1996a) já haviam publicado outros dois artigos utilizando as equações de reação-difusão em vários casos em que podem estar presentes tanto espécies que competem entre si como presas e predadores. Outro artigo de Cantrell e Cosner (1989) analisa a dinâmica de uma população em um meio fortemente heterogêneo, considerando que esta característica afeta a taxa intrínseca de reprodução da espécie.

O artigo de Cosner (1996) afirma que existe um número razoável de trabalhos matemáticos em dinâmica populacional baseados na teoria qualitativa de persistência, em que se usam modelos precisos com dinâmicas complicadas, e poucos trabalhos que são parcialmente quantitativos em seus tratamentos. Este tipo de comentário tem uma contribuição importante à nossa proposta de incluir, no capítulo 2 uma modelagem que considera o efeito tóxico ou nocivo que varia geograficamente no meio, afetando a população de modo espacialmente diferenciado. A grande maioria de trabalhos que consideram este efeito, fazem-no de modo homogêneo em todo o domínio, ainda que dependendo de diversos fatores, uma simplificação que temos grande interesse em eliminar.

Alguns trabalhos, como o de Lacaz (1998), Diniz (1994), Sossae (1995), Pregnotatto (2002) que incluem a dispersão populacional, além das características migratórias, vêm contribuindo para o estudo de diferentes fenômenos populacionais e visam mudar a segunda parte da afirmação acima feita por Cosner.

Neste tipo de modelagem fazem-se algumas adaptações aos modelos clássicos de dispersão, acrescentando uma Dinâmica Vital não linear, exigindo assim um cuidado especial tanto na análise quanto na aproximação numérica, já que métodos numéricos adequados e uma apresentação conveniente dos resultados qualitativos podem contribuir para estreitar esforços de cooperação entre Matemática Aplicada e, genericamente, a Ecologia Aplicada, aumentando a oportunidade de escolha de modelagens para estudo, análise e compreensão de

fenômenos populacionais.

Em nossa pesquisa, o objetivo principal é o de definir um Modelo do tipo Difusão Advecção, combinando interações específicas na Dinâmica Populacional com a hostilidade do meio em forma da presença de produtos tóxicos cujas concentrações variam no espaço e no tempo. Tal modelagem será realizada combinando Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de tipo Clássico Lotka-Volterra com Dinâmicas Populacionais não lineares, Equações Diferenciais Parciais de Difusão-Advecção acrescido de um termo de decaimento que deixa de ser constante, podendo variar com o espaço, com o tempo e até com as próprias densidades populacionais.

Apesar de haver alguns resultados analíticos quanto às condições para o estudo da existência, unicidade ou regularidade de soluções para estas equações, muitas vezes é necessário recorrer a Métodos Discretos de Aproximações. Assim utilizou-se o Método de Galerkin em conjunto com técnicas de tipo Crank-Nicolson e, na discretização espacial, o Método de Elementos Finitos de Segunda Ordem.

O trabalho visa uma aplicação no estudo de uma região pantanosa chamada Esteros de Iberá localizada no nordeste da Argentina, utilizando alguns resultados do estudo de caso de Bernardes (1998).

Utilizaremos esta região como aplicação, por termos na região a definição de uma cadeia trófica bem definida (Momo e Sastre, 1999). Além disto os dados disponíveis permitem uma imediata adaptação a outros ecossistemas semelhantes (como, no Brasil o Pantanal Matogrossense).

A proposta é estudar a interação presa-predador com competição entre espécies carismáticas e/ou chaves da região, como, por exemplo, estudar o subsistema jacaré-pássaro, peixe-rã, incluindo nesta modelagem como o efeito de um agente tóxico no meio pode afetar estas espécies. Este agente tóxico pode ser proveniente de regiões vizinhas (como as plantações de arroz ou os campos de soja no sul do Brasil contíguos ou próximos dos esteros de Iberá, por exemplo). Estudos sobre pesticidas e sua presença no meio (ver Commission of European Communities, 1991), indicam que pesticidas usados nesta região mencionada foram

encontrados também em lagos na Itália próximos a outras culturas. Será interessante estudar o impacto evolutivo desses pesticidas na cadeia trófica da região sulamericana, já que uma das propostas do governo argentino é transformar os esteros em região eco-turística.

Em termos da criação de cenários de impacto, será útil modelar, aproximar e simular os efeitos da presença de poluentes tóxicos sobre espécies relevantes, seja por serem carismáticas, seja por serem espécies chaves, efeitos estes variando no tempo e no espaço.

No capítulo 1 faz-se um estudo inicial com duas espécies interagindo em um mesmo ambiente. Apresenta-se também o modelo matemático proposto para o caso presa-predador, bem como sua formulação variacional e algumas simulações. O objetivo é o de criar uma intuição do inter-relacionamento entre espécies (e dentro de cada uma), sem , ainda os efeitos “viajantes” de produtos tóxicos: aqui o efeito da hostilidade de meio ligado a esse produto é considerado constante.

O capítulo 2 trata do impacto ambiental de espécies afetadas pela presença de poluentes numa região pantanosa. Apresenta-se o modelo matemático com 4 espécies, sendo duas presas que competem entre si e dois predadores que também competem entre si. A sua formulação variacional é proposta e resultados teóricos são estabelecidos. A escolha deste modelo em particular é aí justificada.

No capítulo 3, visando discretizações espacial e temporal, utiliza-se o Método de Elementos Finitos de segunda ordem via Método de Galerkin na discretização espacial e o Método de Crank-Nicolson na discretização temporal, obtendo sistemas não lineares. Como o capítulo 2 adota um efeito de hostilidade do meio como uma variação linear independente de espaço e tempo, o capítulo 3 irá introduzir sucessivamente:

1. a resolução aproximada da equação estacionária de Stokes para a região estudada, obtendo assim um cenário de circulação hidrodinâmica;
2. a resolução aproximada da equação de difusão-advecção que, usando o mapa de circulação de 1. como dado de entrada, fornece os sucessivos cenários da presença de produtos tóxicos no meio estudado e, finalmente,

3. o efeito tóxico – variando no espaço e no tempo – é introduzido no subsistema de relacionamentos inter/intra específicos isolado.

Para aproximar numericamente a solução deste sistema, utiliza-se o processo de sucessivas iterações a cada passo no tempo.

As soluções apresentadas através de simulações comentadas encontram-se no capítulo 4 juntamente com as conclusões deste trabalho.

Capítulo 1

Dinâmica Populacional Não Linear com Interação Presa-Predador

1 Modelo Matemático

Na maioria das situações reais estão presentes duas ou mais espécies distintas interagindo em um mesmo ambiente. Em muitos trabalhos recentes, figuram estudos em que além de relações interespecíficas se incluem fenômenos específicos de dispersão populacional e migração.

Problemas clássicos para, por exemplo, duas espécies no sentido de Lotka-Volterra são modelados com sistemas, às vezes não lineares, de equações diferenciais ordinárias.

Este tipo de modelagem pressupõe uma distribuição homogênea da população em todo o domínio espacial e, portanto, a única variável dependente é a temporal.

No entanto há muitas situações nas quais a não-homogeneidade desempenha um importante papel. Junto com Skellam (1951), um grupo de autores têm utilizado Equações Diferenciais Parciais na modelagem de fenômenos de dinâmica populacional que sejam também espaço-dependentes.

Desde 1974 com Hadler, Heiden e Roth diversos trabalhos paradigmáticos têm surgido na literatura modelando variação espacial com dinâmica populacional de duas ou mais espécies.

Sucessivamente, voltaram a este tema genérico Rothe e Mottoni (1979), Hirano e Naito (1983), Edelstein-Keshet (1986), Wolkind *et al.* (1991), Timm e Okubo (1992), Ikeda e Mimura (1993), Choudhury (1994a), Choudhury (1994b), Newson (1995), Ngwa e Maini (1995), Ruuth (1995), Buffoni *et al.* (1995), Rascle e Zitti (1995), Wilder *et al.* (1995), Raychaudhuri *et al.* (1996), Gourley e Britton (1996), Cosner (1996), Gourley *et al.* (1996), Allegretto *et al.* (1997), Gourley e Bartuccelli (1997), Cantrell e Ward Jr. (1997), Kareiva (1983), Hernández (1998), Pregnolato (2002).

Alguns destes trabalhos utilizam-se de dinâmicas populacionais não-lineares mas o tratamento numérico aqui apresentado tem apenas algumas semelhanças com Pregnolato (2002).

Dentro deste contexto que combina os clássicos sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias com características mais recentes com Equações Diferenciais Parciais, estudaremos primeiramente modelos de predação e competição, considerando também fenômenos como:

- Dispersão Populacional de cada espécie;
- Processos de tipo Migratório de cada espécie;
- Decaimento das espécies devido a possíveis efeitos de hostilidade do meio;
- Dinâmicas Vitais, e
- Relações interespecíficas.

Nesta situação, para duas populações P_1 e P_2 que interagem, um modelo matemático que descreve tais fenômenos, com $P_1 = P_1(x, y, t)$, $P_2 = P_2(x, y, t)$, $t \in (0, T]$, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dado pelo sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} &= \operatorname{div}(\alpha_1 \nabla P_1) - \operatorname{div}(\mathbb{V}P_1) - \sigma_1(x, y, t)P_1 + c_1 P_1 P_2 + F_1 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} &= \operatorname{div}(\alpha_2 \nabla P_2) - \operatorname{div}(\mathbb{W}P_2) - \sigma_2(x, y, t)P_2 + c_2 P_1 P_2 + F_2 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

sendo o domínio Ω o meio considerado e, para $I = 1, 2$,
 $P_I = P_I(x, y, t)$ as populações ou as densidades populacionais,
 $\alpha_I = \alpha_I(x, y, t)$ os coeficientes de difusão ou dispersão populacional,
 $\sigma_I = \sigma_I(x, y, t)$ as taxas de hostilidade da espécie no meio Ω durante o período $[0, T]$,
 $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ vetores do campo de velocidades de migração populacional ou de advecção,
 c_I taxa da relação interespecífica, e
 F_I , é uma dinâmica populacional da espécie, no meio Ω durante o período $[0, T]$.

Ao longo deste trabalho assumiremos a dinâmica vital de Verhulst, ou seja, $F_I = \lambda_I \left(1 - \frac{P_I}{K_I}\right) P_I$, onde λ_I é a taxa de crescimento intrínseca e K_I é a capacidade suporte.

Podemos classificar o tipo de interação entre as espécies P_1 e P_2 por considerações sobre os coeficientes c_I . Assumindo que c_1 e c_2 são não nulos (para que existam as interações), temos:

- Se $c_1 < 0$ e $c_2 > 0$, o sistema é chamado presa-predador onde o índice 1 representa a densidade populacional da presa e o índice 2 a do predador.
- Se $c_1 < 0$ e $c_2 < 0$ há competição entre as populações 1 e 2.
- Se $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tem-se mutualismo ou cooperação ou simbiose.
- Se $c_1 < 0$ e $c_2 = 0$ (ou $c_1 = 0$ e $c_2 < 0$) há comensalismo.
- Se $c_1 > 0$ e $c_2 = 0$ (ou $c_1 = 0$ e $c_2 > 0$) tem-se amensalismo.

Sendo assim, nosso sistema de equações proposto no caso presa-predador é o sistema não linear de Equações a Derivadas Parciais dado por:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_1 \nabla P_1) + \operatorname{div}(\mathbb{V} P_1) + \sigma_1 P_1 = \lambda_1 \left(1 - \frac{P_1}{K_1}\right) P_1 - c_1 P_1 P_2,$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_2 \nabla P_2) + \operatorname{div}(\mathbb{W} P_2) + \sigma_2 P_2 = \lambda_2 \left(1 - \frac{P_2}{K_2}\right) P_2 + c_2 P_1 P_2.$$

Assumindo $a_I = \lambda_I$ e $b_I = \frac{\lambda_I}{K_I}$, para $I = 1, 2$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_1 \nabla P_1) + \operatorname{div}(\mathbb{V}P_1) + \sigma_1 P_1 &= a_1 P_1 - b_1 P_1^2 - c_1 P_1 P_2, \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_2 \nabla P_2) + \operatorname{div}(\mathbb{W}P_2) + \sigma_2 P_2 &= a_2 P_2 - b_2 P_2^2 + c_2 P_1 P_2.\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

Do ponto de vista genérico, as condições inicial e de contorno são do tipo misto, combinando condições homogêneas de Dirichlet e de Newmann:

$$P_I(x, y, 0) = P_{I_0}(x, y), \quad \text{e}$$

$$P_I|_{\Gamma_{0_I}} = 0, \quad \text{e} \quad -\alpha \frac{\partial P_I}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_{1_I}} = 0$$

com Γ_{0_I} e Γ_{1_I} disjuntas satisfazendo $\Gamma_{0_I} \cup \Gamma_{1_I} = \partial\Omega$ para $I = 1, 2$.

2 Formulação Variacional

O sistema (1.1.2) é um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. Sua complexidade apresenta desafios tanto para o matemático quanto para o matemático aplicado em função das muitas dificuldades teóricas, algorítmicas e de ordem computacional.

Em primeiro lugar – e favorecendo tanto o ponto de vista da análise real quanto da numérica – iremos optar não pela formulação clássica, dita forte, dada em (1.1.2), mas pela formulação fraca, no sentido de distribuições, dada pelo sistema $P_I = P_I(x, y, t)$, $I = 1, 2$ em $\mathcal{V} = \{P \in H^1((0, T), H^1(\Omega)) : \operatorname{tr}(P) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, obtendo o sistema

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} v \, ds - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_1 \nabla P_1) v \, ds + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{V} P_1) v \, ds + \int_{\Omega} \sigma_1 P_1 v \, ds - a_1 \int_{\Omega} P_1 v \, ds + \\
& + b_1 \int_{\Omega} P_1^2 v \, ds + c_1 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0 \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} v \, ds - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_2 \nabla P_2) v \, ds + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{W} P_2) v \, ds + \int_{\Omega} \sigma_2 P_2 v \, ds - a_2 \int_{\Omega} P_2 v \, ds + \\
& + b_2 \int_{\Omega} P_2^2 v \, ds - c_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0, \quad \forall v \in V
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

sendo o espaço de funções teste, V , dado por $V = \{v \in H^1(\Omega) : \operatorname{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$.

Observamos que o espaço V parece restringir o escopo da formulação, visto que exige a pertinência das derivadas primeiras ao espaço de funções quadrado integráveis sobre Ω . No entanto, o objetivo é recorrer ao Teorema de Green, o que transforma (1.2.1) em

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} v \, ds + \int_{\Omega} \alpha_1 \nabla P_1 \cdot \nabla v \, ds - \alpha_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial \eta} v \, d\gamma + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{V} P_1) v \, ds + \int_{\Omega} \sigma_1 P_1 v \, ds - \\
& - \int_{\Omega} a_1 P_1 v \, ds + b_1 \int_{\Omega} P_1^2 v \, ds + c_1 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0 \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} v \, ds + \int_{\Omega} \alpha_2 \nabla P_2 \cdot \nabla v \, ds - \alpha_2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial \eta} v \, d\gamma + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{W} P_2) v \, ds + \int_{\Omega} \sigma_2 P_2 v \, ds - \\
& - \int_{\Omega} a_2 P_2 v \, ds + b_2 \int_{\Omega} P_2^2 v \, ds - c_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0 \quad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

Ora, considerando, α_I , as dispersões e $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ os campos vetoriais de migração como independentes do tempo, do espaço e das próprias populações e usando as condições homogêneas de contorno, obtêm-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} v \, ds + \alpha_1 \int_{\Omega} \nabla P_1 \cdot \nabla v \, ds + V_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial x} v \, ds + V_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial y} v \, ds + \\
& + \int_{\Omega} \sigma_1 P_1 v \, ds - a_1 \int_{\Omega} P_1 v \, ds + b_1 \int_{\Omega} P_1^2 v \, ds + c_1 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0 \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} v \, ds + \alpha_2 \int_{\Omega} \nabla P_2 \cdot \nabla v \, ds + W_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial x} v \, ds + W_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial y} v \, ds + \\
& + \int_{\Omega} \sigma_2 P_2 v \, ds - a_2 \int_{\Omega} P_2 v \, ds + b_2 \int_{\Omega} P_2^2 v \, ds - c_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0,
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

para $\forall v \in V$.

Usa-se a formulação variacional, em vez da formulação clássica, por aquela aceitar condições menos restritivas dos parâmetros, da solução e das condições inicial e de contorno. Além disso, as demonstrações de existência e unicidade da solução fraca em casos como este, podem ser bem mais simples comparadas com as de soluções clássicas.

Escrevendo o sistema acima na notação de produto escalar em $L^2(\Omega)$ obtem-se o sistema:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} | v \right) + \alpha_1 (\nabla P_1 | \nabla v) + (\sigma_1 P_1 | v) - a_1 (P_1 | v) + \mathbb{V} (\nabla P_1 | v) + \\
& + b_1 (P_1^2 | v) + c_1 (P_1 P_2 | v) = 0 \\
& \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} | v \right) + \alpha_2 (\nabla P_2 | \nabla v) + (\sigma_2 P_2 | v) - a_2 (P_2 | v) + \mathbb{W} (\nabla P_2 | v) + \\
& + b_2 (P_2^2 | v) - c_2 (P_1 P_2 | v) = 0 \quad \forall v \in V,
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

onde os produtos escalares são definidos por

$$\begin{aligned}
& \bullet (f|g) = (f|g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)ds, \\
& \bullet (\nabla P_I \|\nabla v) = (\nabla P_I \|\nabla v)_{(L^2(\Omega))^2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P_I}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P_I}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) ds \quad \text{e} \\
& \bullet \langle f|g \rangle = \langle f|g \rangle_{L^2(\Gamma)} \int_{\Gamma} f(x)g(x)d\gamma,
\end{aligned}$$

e os subíndices foram omitidos para simplificar a notação.

3 O Método de Galerkin

Uma das opções para a construção de uma solução aproximada do ponto de vista do espaço é o Método de Galerkin (ver Johnson, 1987), em conjunto com uma separação de variáveis espacial e temporal e com o Método de Crank-Nicolson, que discretiza a parte temporal. Este método consiste em procurar uma solução aproximada, construindo um subespaço V_h de V , sendo este subespaço de dimensão finita N . Assim, o problema variacional já apresentado é reformulado nesse novo subespaço.

Em outras palavras, sendo V_h um subespaço de base $\beta = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, o sistema (1.2.3) torna-se:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} | v_h \right) + \alpha_1 (\nabla P_1 \|\nabla v_h) + (\sigma_1 P_1 | v_h) + \mathbb{V}(\nabla P_1 | v_h) - a_1 (P_1 | v_h) \\
& + b_1 (P_1^2 | v_h) + c_1 (P_1 P_2 | v_h) = 0 \\
& \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} | v_h \right) + \alpha_2 (\nabla P_2 \|\nabla v_h) + (\sigma_2 P_2 | v_h) + \mathbb{W}(\nabla P_2 | v_h) - a_2 (P_1 | v_h) \\
& + b_2 (P_2^2 | v_h) - c_2 (P_1 P_2 | v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Fazendo então uma separação das variáveis temporal e espacial $\forall v_h \in V_h$,

$$v_h = \sum_{j=1}^N c_j(t) \varphi_j(x, y) = \sum_{j=1}^N c_j(t) \varphi_j, \quad (1.3.2)$$

buscamos uma solução $P_{I_h} \in V_h$, que aproxime a solução $P_I \in V(I = 1, 2)$ de tal forma que:

$$P_{I_h} = \sum_{j=1}^N P_{I_j}(t) \varphi_j(x, y) = \sum_{j=1}^N P_{I_j}(t) \varphi_j, \quad (1.3.3)$$

e para a qual,

$$\frac{\partial P_{I_h}}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{dP_{I_j}}{dt} \varphi_j. \quad (1.3.4)$$

Reescrevendo o sistema (1.3.1) no subespaço V_h de V , usando (1.3.3) e (1.3.4) obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{dP_{1_j}(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + V_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\ & + V_2 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - a_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \\ & + b_1 \underbrace{\left(\left(\sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \varphi_j \right) \left(\sum_{k=1}^N P_{1_k}(t) \varphi_k \right) | \varphi_i \right)}_{(1)} + c_1 \underbrace{\left(\left(\sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \varphi_j \right) \left(\sum_{k=1}^N P_{2_k}(t) \varphi_k \right) | \varphi_i \right)}_{(2)} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{dP_{2_j}(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + W_1 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\
& + W_2 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - a_2 \sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_2 \underbrace{\left(\left(\sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) \varphi_j \right) \left(\sum_{k=1}^N P_{2_k}(t) \varphi_k \right) | \varphi_i \right)}_{(1)} + c_1 \underbrace{\left(\left(\sum_{j=1}^N P_{2_j}(t) \varphi_j \right) \left(\sum_{k=1}^N P_{1_k}(t) \varphi_k \right) | \varphi_i \right)}_{(2)} = 0,
\end{aligned}
\tag{1.3.5}$$

para cada elemento φ_i da base β de V_h .

Rearranjando convenientemente os termos não lineares (1) e (2) acima obtem-se, para $I = 1, 2$:

$$\sum_{j=1}^N P_{I_j}(t) \left(\varphi_j \sum_{k=1}^N P_{I_k}(t) \varphi_k | \varphi_i \right) = \sum_{j=1}^N P_{I_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{I_k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right)$$

substituindo em (1.3.5) tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{dP_{1_j}(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + V_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\
& + V_2 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - a_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\varphi_j | \varphi_i) \\
& + b_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{1_k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) + c_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{2_k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{dP_{2j}(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + W_1 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\
& + W_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - a_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) (\varphi_j | \varphi_i) \\
& + b_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{2k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) - c_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{1k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

para $\forall \varphi_i \in \beta$.

Isto corresponde a um sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias na variável t com a condição inicial (já discretizada) dada implicitamente por

$$\sum_{j=1}^N P_{Ij}(0) \varphi_j(x, y) = P_{I_0}(x, y), \quad I = 1, 2, \tag{1.3.7}$$

que na formulação variacional se torna

$$\sum_{j=1}^N P_{Ij}(0) (\varphi_j | \varphi_i) = (P_{I_0} | \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \beta \text{ e } I = 1, 2.$$

4 Discretização espacial: Método de Elementos Finitos

Parte básica do método de Elementos Finitos consiste na discretização do domínio do problema – através da construção de uma malha – em subdomínios simples, os elementos finitos, e o uso de conceitos varacionais para construir uma solução aproximada sobre estes subdomínios, usando funções especialmente escolhidas.

Constrói-se então uma malha de elementos finitos (neste caso são triângulos) sobre o domínio Ω , obtendo uma triangularização Ω_h .

É importante observar que nem sempre o domínio Ω coincide com o domínio Ω_h ; mas nesses casos quando $h \rightarrow 0$, temos $\Omega_h \rightarrow \Omega$, sendo h o diâmetro do maior elemento da malha.

Devido a possíveis dificuldades provenientes dos termos advectivos, optamos por trabalhar com elementos finitos de segunda ordem, isto é, com o espaço das funções quadráticas.

Além destas dificuldades, havendo uma dominância do termo advectivo, pode-se obter uma oscilação na solução numérica. Para evitar esta oscilação, utiliza-se um critério que fornece uma condição sobre a discretização do domínio. É a Condição de Peclet:

$$\frac{V_i \Delta x_i}{\alpha} \leq 2$$

para $i = 1, 2$ e Δx_i no lugar de Δx e Δy .

Para maiores detalhes sobre elementos finitos (ver Johnson, 1987; Kardestuncer e Norrie, 1987).

5 Discretização temporal: Método de Crank-Nicolson

Conforme indicado acima, utiliza-se o Método de Crank-Nicolson¹ para discretizar a variável temporal da equação (1.3.6). O método consiste em usar as aproximações:

$$P_I(t_n + \Delta t/2) \simeq \frac{P_I(t_n) + P_I(t_{n+1})}{2}, \quad \text{e}$$

$$\frac{dP_I}{dt}(t_n + \Delta t/2) \simeq \frac{P_I(t_{n+1}) - P_I(t_n)}{\Delta t}$$

para $I = 1, 2$, ambas da ordem de $(\Delta t)^2$ em (1.3.3) estimada em $t = t_n + \Delta t/2$ (ver Carnahan *et al.*, 1969; Kardestuncer e Norrie, 1987).

¹Neste parágrafo iremos simplificar na realidade, o Método de Crank-Nicolson genérico – Meyer, 1988.

Obtem-se, então:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} - P_{1j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \\
& + V_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - a_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_1 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + c_1 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] = 0, \\
\\
& \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} - P_{2j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \\
& + W_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - a_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_2 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] - \\
& - c_2 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] = 0, \tag{1.5.1}
\end{aligned}$$

um sistema não linear em $P_{I_k}^{(n)} = (P_{I_1}^{(n)}, P_{I_2}^{(n)}, \dots, P_{I_N}^{(n)})$ onde $P_{I_k}^{(n)}$ caracteriza-se pela relação:

$$P_{I_k}^{(n)} = P_I(x_k, y_k, t_n), \quad I = 1, 2 \quad (1.5.2)$$

com a condição inicial dada por $P_{I_k}^{(0)} = P_{I_0}(x_k, y_k)$ ou implicitamente por meio da formulação variacional, o que dá

$$\sum_{k=1}^N P_{I_j}^{(0)}(\varphi_k | \varphi_i) = (P_{I_0}(x, y) | \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \beta \text{ e } I = 1, 2. \quad (1.5.3)$$

6 Uma Simplificação Conveniente do Problema Discreto Linearizado

Em vez de fazer uso do sistema não linear acima descrito usa-se a aproximação (ver Meyer, 1988):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} - P_{1_j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} + P_{1_j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\ & + V_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} + P_{1_j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} + P_{1_j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} + P_{1_j}^{(n)}}{2} (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - a_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} + P_{1_j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\ & + b_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} + P_{1_j}^{(n)}}{2} \left[\sum_{k=1}^N P_{1_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\ & + c_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1_j}^{(n+1)} + P_{1_j}^{(n)}}{2} \left[\sum_{k=1}^N P_{2_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] = 0, \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} - P_{2j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \\
& + W_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - a_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left[\sum_{k=1}^N P_{2k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + c_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left[\sum_{k=1}^N P_{1k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] = 0, \quad \forall \varphi_i \in \beta.
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

A diferença desta expressão para a de (1.5.1) reside no uso de $P_{I_k}^{(n)}$ nos últimos termos do lado esquerdo, transformando o sistema não-linear numa iteração linear aproximada, de primeira ordem. Reagrupando os termos de modo conveniente obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N P_{1j}^{(n+1)} \left\{ \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \right. \\
& + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \frac{\Delta t}{2} (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) + b_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{1k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + c_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\} = \\
& = \sum_{j=1}^N P_{1j}^{(n)} \left\{ \left(1 + a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \right. \\
& - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) - \frac{\Delta t}{2} (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - b_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{1k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - c_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N P_{2_j}^{(n+1)} \left\{ \left(1 - a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \right. \\
& \left. + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \frac{\Delta t}{2} (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) + b_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - c_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{1_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \right\} = \\
& = \sum_{j=1}^N P_{2_j}^{(n)} \left\{ \left(1 + a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \right. \\
& \left. - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) - \frac{\Delta t}{2} (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - b_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + c_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{1_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

O resultado será o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) P_1^{(n+1)} &= \mathbb{B}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) P_1^{(n)} \\
\mathbb{C}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) P_2^{(n+1)} &= \mathbb{D}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) P_2^{(n)}
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

com a condição inicial $P_I^{(0)} = (P_{I_1}^{(0)}, P_{I_2}^{(0)}, \dots, P_{I_N}^{(0)})$ dada por (1.5.2) ou (1.5.3), onde as matrizes $\mathbb{A}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)})$ e $\mathbb{C}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)})$ são definidas por

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) + b_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{1_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + c_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \\
c_{ij} &= \left(1 - a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) + b_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{1_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - c_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2_k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right]
\end{aligned}$$

e analogamente $\mathbb{B}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)})$ e $\mathbb{D}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)})$ são definidas por:

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \left(1 + a_1 \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i\right) - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i\right) - \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2} (\sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - b_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_k^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - c_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \\
d_{ij} &= \left(1 + a_2 \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i\right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i\right) - \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2} (\sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - b_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_k^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + c_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[P_{2k}^{(n)} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right].
\end{aligned}$$

Os processos iterativos são obtidos mediante as relações de recorrência (1.6.2) dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_1^{(0)} \in \mathbb{R}^N \text{ e} \\ \mathbf{P}_1^{(n+1)} \text{ obtido da solução de} \\ \mathbb{A}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) \cdot \mathbf{P}_1^{(n+1)} = \mathbb{B}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) \cdot \mathbf{P}_1^{(n)} \end{array} \right. \quad (1.6.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_2^{(0)} \in \mathbb{R}^N \text{ e} \\ \mathbf{P}_2^{(n+1)} \text{ obtido da solução de} \\ \mathbb{C}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) \cdot \mathbf{P}_2^{(n+1)} = \mathbb{D}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}) \cdot \mathbf{P}_2^{(n)} \end{array} \right. \quad (1.6.4)$$

Do ponto de vista algorítmico, as matrizes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ não serão obtidas nó por nó como os índices indicam, mas elemento por elemento num processo usual, e são atualizadas a cada passo do tempo. Isto irá corresponder a uma única iteração interna em cada passo, embora diversas possam ser efetuadas. Para sua obtenção, usamos as submatrizes de rigidez (ver Sossae, 1995) obtidas em um elemento finito genérico. O procedimento do algoritmo é o de percorrer a malha elemento por elemento acumulando os termos nas matrizes gerais.

Neste algoritmo aqui descrito e programado em Sossae *et al.* (1999), temos o uso do vetor descritivo das respectivas populações no estágio temporal anterior como sendo o valor da média indicada no Método de Crank-Nicolson. A rigor isto corresponde à primeira aproximação polinomial:

$$f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) = f(t_0) + \mathcal{O}(\Delta t).$$

Um modo prático de melhorar sensivelmente esta aproximação consiste em introduzir sucessivas aproximações a cada passo no tempo (ver Rachford, 1973; Meyer, 1988).

O objetivo deste procedimento é o de melhorar sensivelmente a ordem de aproximação. O algoritmo adotado pode, inclusive evitar boa parte das oscilações numéricas e consiste em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_1^{(0)}, \mathbf{P}_2^{(0)} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{P}_1^{(n+1)} \text{ e } \mathbf{P}_2^{(n+1)} \text{ obtidos das sucessivas soluções de:} \\ \mathbb{A}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}) \cdot \mathbf{P}_1^{(**)} \mathbb{B}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}) \cdot \mathbf{P}_1^{(n)} \\ \mathbb{C}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}) \cdot \mathbf{P}_2^{(**)} \mathbb{D}(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}) \cdot \mathbf{P}_2^{(n)} \end{array} \right. \quad (1.6.5)$$

com $\mathbf{P}_I^{(*)}$ dado inicialmente por $\mathbf{P}_I^{(n)}$ e a partir da segunda iteração interna, assumindo o valor de $\mathbf{P}_I^{(**)}$. O valor obtido na iteração interna final será a aproximação adotada para a de $\mathbf{P}_I^{(n+1)}$ (ver Douglas Jr. et al., 1979).

Este método de tipo preditor-corretor, definido no âmbito de uma discretização Crank-Nicolson, irá melhorar as aproximações mas não indefinidamente: ele tende à melhor aproximação da ordem de $(\Delta t)^2$ em cada iteração temporal². Seu pequeno inconveniente de exibir oscilações iniciais muito rapidamente desaparece, tornando-se especialmente adequado para estudos de situações assintóticas.

Uma das simulações³ efetuadas para este modelo com o esquema numérico descrito visa descrever o comportamento evolutivo do convívio de duas espécies (presa e predador) com dinâmica verhulstiana e com condições iniciais visando retratar a invasão de um habitat por um grupo de predadores. Assim a condição inicial de presas é a de uma população homogeneamente distribuída por todo o domínio (respeitadas as condições de contorno e observadas na figura 1.1 no alto à esquerda), enquanto que a população inicial de predadores indica um pequeno grupo num dos extremos do domínio (figura 1.1 no alto à direita). Além disto, a hostilidade do meio se manifesta com o comportamento $\sigma = \sigma(x, y)$ constante, portanto, só no tempo. Obviamente os resultados obtidos são afetados por este decaimento populacional. A tentativa visa reproduzir, de fato, um meio hostil ou até a presença de um produto tóxico (figura 1.1, as duas de baixo e figura 1.2).

²Resultados de convergência podem ser encontrados nos trabalhos citados: Rachford (1973), Douglas Jr. et al. (1979) e Meyer (1988).

³O programa foi desenvolvido na linguagem FORTRAN-77 em ambiente UNIX em SPARC-Station (SUN). Na resolução do sistema linear $A_I(P_I^{(n)})P_I^{(n+1)} = B_IP_I^{(n)}$, a cada iteração, utilizou-se o método LU via subrotina SGECO e SGESL do LINPACK. Os gráficos foram obtidos através do software MATHEMATICA disponível no LABMA (Laboratório de Matemática Aplicada - IMECC - UNICAMP).

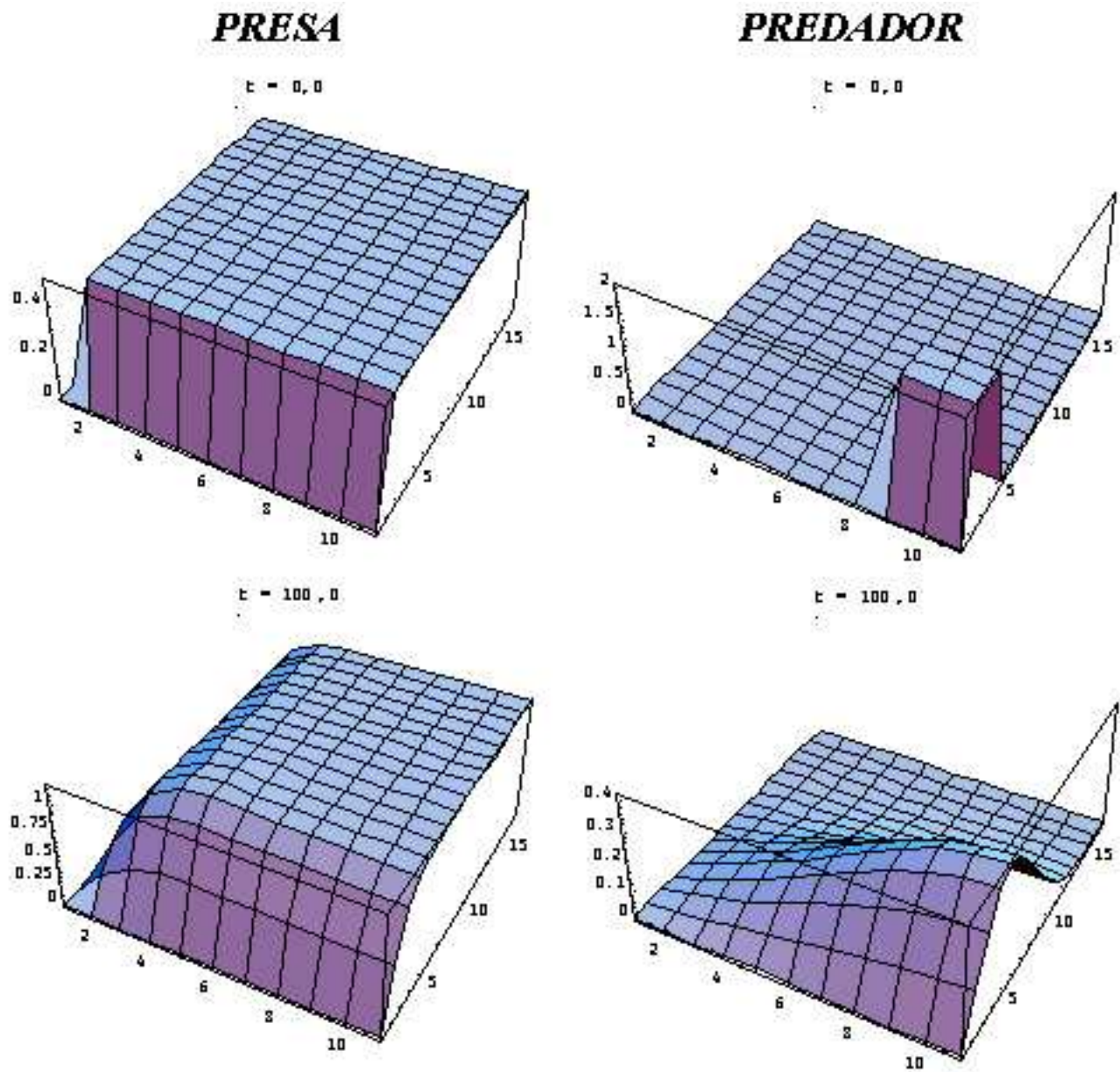


Figura 1.1: Comportamento evolutivo do convívio de duas espécies que interagem.

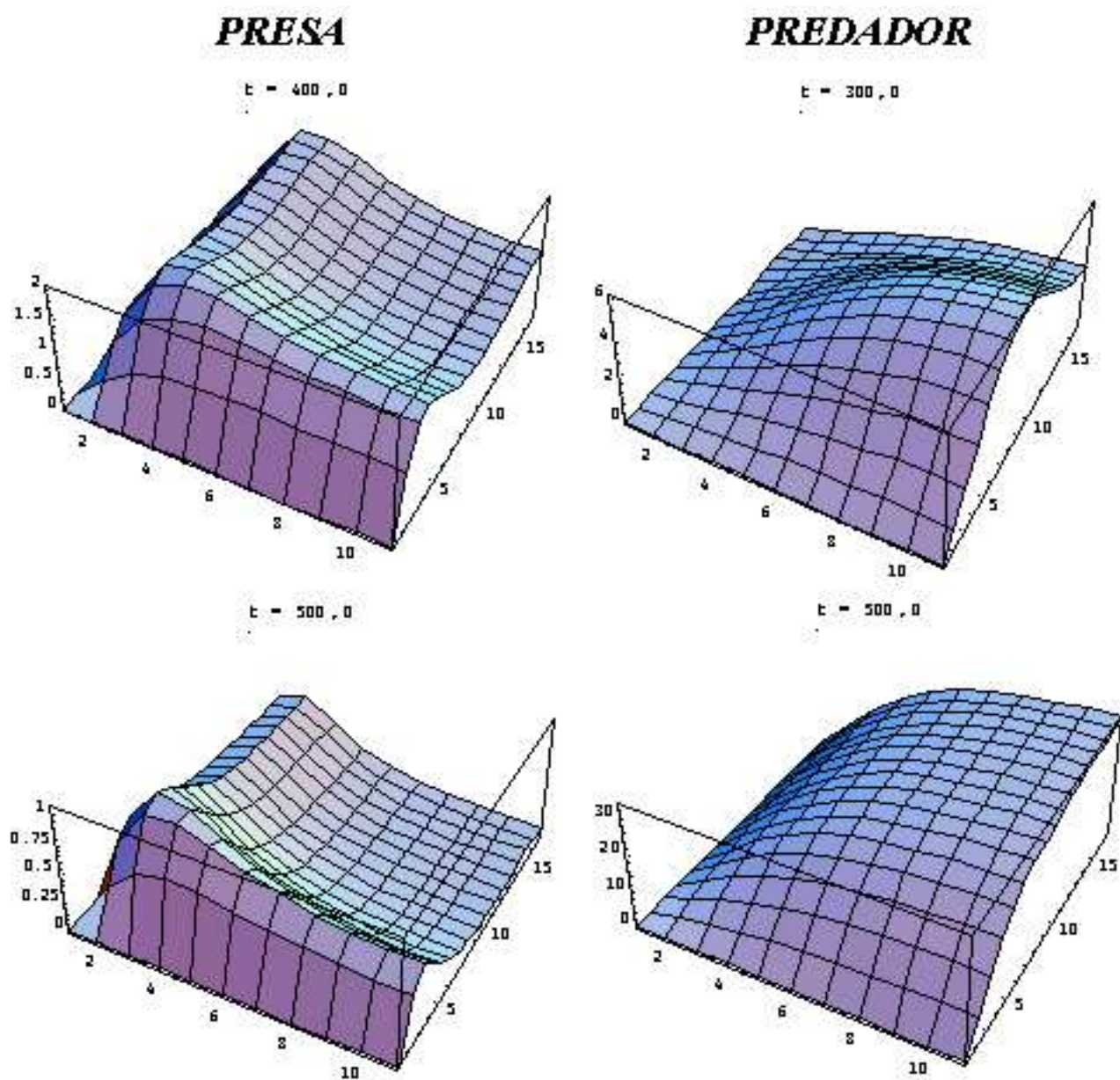


Figura 1.2: Comportamento evolutivo do convívio de duas espécies que interagem.

A situação clássica para o sistema Lotka-Volterra mostra o ciclo do predador seguindo de modo relativamente próximo o da presa mas nesta situação , tanto o movimento da presa na direção horizontal (ao longo do eixo-x) quanto a variação da toxicidade alteram radicalmente este quadro, com a presa sobrevivendo onde a toxicidade é baixa e os predadores não são abundantes (figura 1.2). Por outro lado, podemos observar como, neste experimento, o predador de fato segue a presa, reduzindo seus níveis populacionais e, assim, sobrevivendo.

Este ensaio trouxe resultados esperados, mas há um fator que não aparece diretamente mas que é de fundamental importância: a variação da hostilidade – correspondendo, por exemplo, a um contaminante que foi trazido para a região e aí se dispersou – afeta não só a sobrevivência das populações, mas seu comportamento espacial.

Capítulo 2

Dinâmicas Populacionais Não Lineares com Interações do Tipo Presa-Predador com Competição

1 Introdução

Iremos aqui estudar a situação de impacto ambiental sobre espécies afetadas pela presença de poluentes numa região pantanosa da Argentina chamada Esteros de Iberá.

O estudo dessa região se deve ao fato que, em meados de 1997, foi firmado um projeto de cooperação envolvendo, em primeira instância, as Universidades de Siena e de Roma na Itália, del Salvador e Nacional del Centro na Argentina, Federal do Rio Grande do Sul e Estadual de Campinas no Brasil, de Cádiz na Espanha e de York na Inglaterra e submetido e aprovado pela União Européia em formato de um Projeto de Cooperação Internacional (INCO) para o estudo de regiões de pântano no sul do continente americano iniciando com uma avaliação do impacto de atividades antrópicas numa área da região do nordeste da Argentina, perto da fronteira com o estado do Rio Grande do Sul, região esta em que se localiza um pantanal denominado Esteros de Iberá.

Os Esteros de Iberá estão localizados na província de Corrientes e se compõem de uma vasta bacia hidrográfica com lagoas e ilhas flutuantes de vegetação agrupada. A área total desta bacia é de cerca de 10000 km^2 com uma profundidade média, no centro das lagoas,

de menos de 5 metros. *Luna*, *Galarza*, *Fernández* e *Iberá* são as maiores lagoas do sistema e a alimentação hídrica se dá basicamente por aportes pluviais¹. São regiões de baixa circulação, totalmente rodeadas por pântanos (com exceção da Lagoa Iberá que tem um pequeno trecho numa região arenosa) e por retardarem o escoamento superficial, armazenando água e funcionando como evapotranspirante (Bernardes, 1998). Os principais canais de drenagem do sistema são o rio *Corrientes* a sudoeste, e o rio *Miriñay*, que nasce na lagoa de Iberá, a sudeste.

O nome Iberá vem do guarani para “Água que brilha”, nome que revela a natureza histórica da reverência da população local para com as águas do Iberá.

Há relativamente poucos estudos efetuados na região, dadas as dificuldades de acesso e da existência de uma infra-estrutura bastante limitada para visitantes. A pouca informação disponível revela uma rica biodiversidade e a presença de várias espécies da flora e fauna. No entanto, isto não tem sido utilizado no estabelecimento de políticas de gerenciamento deste rico recurso natural.

Ameaças à estabilidade e à biodiversidade da região do Iberá vêm principalmente de recentes expansões na agroindústria local e da demanda por áreas de pastagens, com a introdução do uso de agroquímicos e de práticas de fogo induzido. Além destas, recentes estratégias de desenvolvimento de vias de escoamento de produtos do Mercosul chegaram a projetar a passagem pelos Esteros da principal hidrovía Paraguay-Paraná, um projeto com fortes possibilidades de desestabilizar o ecossistema existente. A este quadro, acrescentem-se as fontes de poluentes atmosféricos de pólos industriais do Sul do Brasil. Em suma – e de modo genérico – os Esteros correm o risco de sofrer muitos tipos de impactos.

A importância internacional da proteção dessa região (como do Pantanal matogrossense, também ameaçado pela mesma hidrovía...) já foi estabelecido pelo Plano Intergovernamental de Mudanças Climáticas Globais. A enorme quantidade de água fresca não contaminada presente no sistema de lagos do Iberá continuará tendo uma grande importância internacional. A chave do desenvolvimento sustentável dessa região e de outras regiões é uma

¹Não obstante, estudos recentes indicam forte correlação entre o nível da represa de Yaciretá (a montante na bacia do Paraná) e nas lagoas e esterios (ver European Union INCO Project, 2003).

precisa avaliação de seus recursos naturais e o estabelecimento de estratégias adequadas e a longo prazo para seu gerenciamento.

No estabelecimento deste tipo de política, avaliações qualitativa e quantitativamente precisas se fazem necessárias no estudo de impacto de atividades na região e nas proximidades. Também o estudo de populações e das interações entre espécies e os efeitos dos mencionados poluentes devem ser considerados, reunindo instrumental matemático de avaliação e de simulação para a ação conjunta com técnicas de outras áreas científicas.

Muitas são as necessidades do uso de instrumental matemático no estudo dos problemas de impacto nesta região com seus múltiplos aspectos. Bernardes (1998) fez um estudo introdutório preparando um *software* para a simulação do comportamento evolutivo de poluentes aquáticos de superfície, usando-o no caso da lagoa de Iberá, uma das diversas lagoas do ecossistema estudado.

Em seu trabalho, Bernardes se baseou em poluentes provenientes das culturas de soja e arroz vizinhas à região estudada como a maior fonte de poluição. Como exemplos da agressão que a atividade agroindustrial pode causar ao meio ambiente temos: o uso de pesticidas organoclorados ou organofosforados e defensivos fenólicos, que são poluentes de superfície; repelentes para aves, que podem ser substâncias fenólicas ou aromáticas ou ainda a queima de combustíveis e solventes à base de petróleo, todos poluentes de superfície e ainda poluentes à base de alumínio e cobre, com especial atenção aos hidróxidos, $\text{Al}(\text{OH})_3$ e $\text{Cu}(\text{OH})_2$, que floculam em condições de saturação na água.

Outro dos aspectos que vem exigindo a atenção dos técnicos da equipe do projeto citado é o efeito de poluentes cuja presença varia espacial e temporalmente sobre espécies locais. Nestes casos o estudo de uma única espécie pode não responder a questões de efeitos sistêmicos, devendo os modelos incluir a ação não apenas intra-específica mas também inter-específica.

Diniz (2003) também abordou o estudo de poluentes em sistemas ar-água visando

criar e justificar modelagem e instrumental algorítmico que se adequam a avaliação da presença evolutiva de contaminantes no meio. Seus estudos foram orientados levando em conta a mesma região: os Esteros de Iberá.

Pregnoatto (2002) estudou a modelagem e possibilidades de simulação computacional de uma determinada espécie carismática afligida por uma epizootia local. Nesse estudo surgem não linearidades em que se observam algumas semelhanças com aquelas aqui consideradas. A diferença básica, no entanto, refere-se à adoção de espécies identificadas pela sua etologia relativamente à sua cadeia trófica bem como os efeitos tóxicos induzidos pela presença evolutiva e advectiva de contaminantes.

Da equipe argentina do Projeto Iberá, participaram docentes do Departamento de Ecologia de Universidade Nacional de Luján. Um dos resultados de seu esforço foi a identificação do esquema abaixo, que ilustra a cadeia trófica (Momo e Sastre, 1999). Aí, podemos observar num dos extremos, quatro espécies com interação nitidamente definida: dois predadores competindo entre si por duas presas que também competem entre si pelas espécies mais ‘abaixo’ na cadeia (ver figura (2.1)).

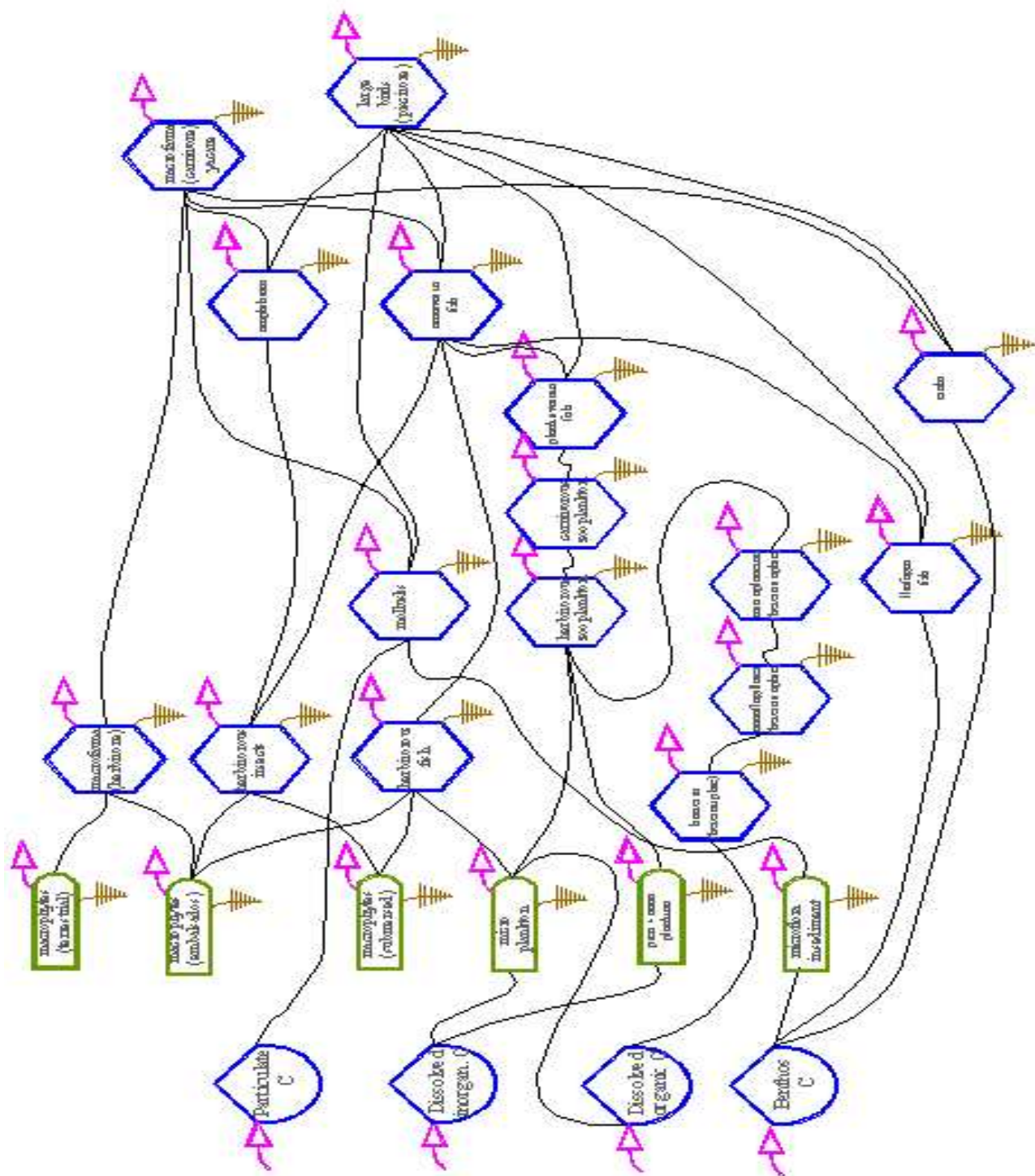


Figura 2.1: Fluxograma da cadeia trófica em *Esteros del Iberá*.

Assim, teremos as quatro espécies dadas matematicamente pelas presas $P_1(x, y, t)$ e $P_2(x, y, t)$ e os predadores $P_3(x, y, t)$ e $P_4(x, y, t)$.

Para essa situação, buscamos formular um modelo matemático que descreva genericamente a interação dos dois predadores (jacarés e pássaros) competindo entre si por duas presas (peixes e rãs) também competindo entre si ainda sob o efeito da presença evolutiva do efeito de um agente tóxico e, ao mesmo tempo adotando dinâmicas populacionais de tipo Verhulst.

Como no capítulo anterior, iremos construir o modelo necessário incluindo as respectivas dispersões populacionais bem como as dinâmicas de cada espécie. Para isto, os instrumentos tão clássicos quanto atuais são adotados: a equação de Dispersão-Migração e a dinâmica de Verhulst. Além disto, ocorrem, ainda de modo clássico (Lotka-Volterra) as interações e, por último, o efeito evolutivo e espacialmente não-homogêneo da hostilidade do meio expresso pelo parâmetro: $\sigma = \sigma(x, y, t)$.

Nesta modelagem a referida hostilidade é obtida em passos sucessivos:

1. Resolução numérica da equação de Stokes, identificando um mapa local de circulação de água (figura 2.2), obtido através do programa implementado por Cantão e D'Afonseca (1998).
2. Resolução numérica da equação de difusão-advecção, obtendo o parâmetro $\sigma(x, y, t)$ – usando o campo de velocidades obtidos no item 1. – criando um cenário evolutivo em que se mapeia no tempo e no espaço a passagem de contaminantes pelo meio.

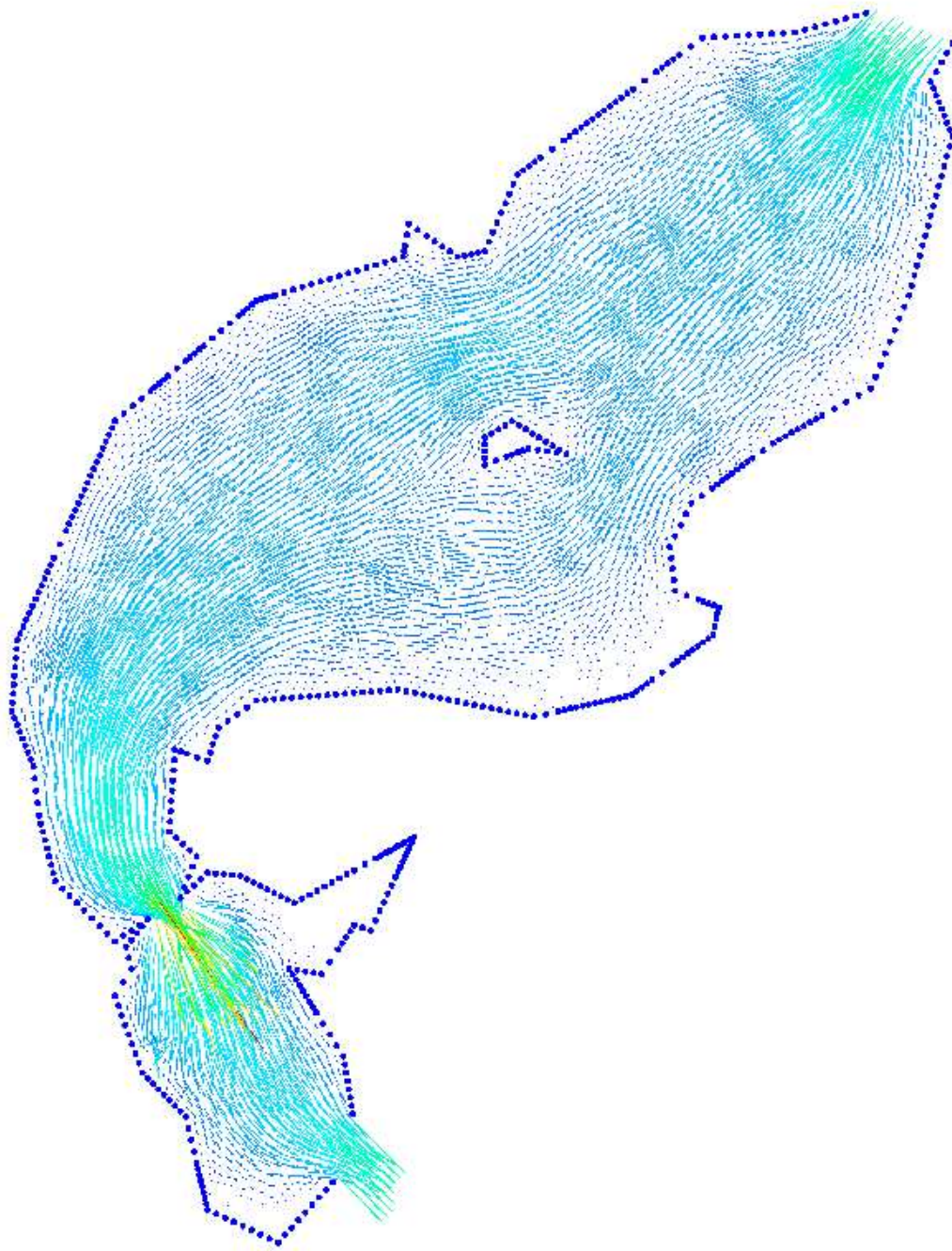


Figura 2.2: Mapa de circulação de água.

Em seguida, e usando os resultados explicitados acima, obtemos o sistema não linear dado por

•Equação de Stokes: $-div(\nabla \vartheta) + \nabla \mathcal{P} = g$, supondo $div \vartheta = 0$ e obtendo assim ϑ , o campo de velocidades para $\mathcal{P}$, a pressão e g uma perturbação que pode ser nula.

(ver Kardestuncer e Norrie, 1987; Peyret e Taylor, 1985)

•Equação de Difusão-Advecção: $\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \alpha \Delta \sigma + \text{div}(\vartheta \sigma) + s\sigma = 0$ com $\sigma(x, y, 0) = \sigma_0(x, y)$,

e com $\sigma|_{\Gamma_0} = 0$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} = 0$, obtendo $\sigma_i^{(n)} \cong \sigma(x_i, y_i, t_n)$.

$$\bullet \frac{\partial P_1}{\partial t} - \text{div}(\alpha_1 \nabla P_1) + \text{div}(\mathbb{V} P_1) + \rho_1 \sigma_1 P_1 = \lambda_1 \left(1 - \frac{P_1}{K_1}\right) P_1 - c_1 P_1 P_3 - d_1 P_1 P_4 - e_1 P_1 P_2$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} - \text{div}(\alpha_2 \nabla P_2) + \text{div}(\mathbb{W} P_2) + \rho_2 \sigma_2 P_2 = \lambda_2 \left(1 - \frac{P_2}{K_2}\right) P_2 - c_2 P_2 P_3 - d_2 P_2 P_4 - e_2 P_1 P_2$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial t} - \text{div}(\alpha_3 \nabla P_3) + \text{div}(\mathbb{U} P_3) + \rho_3 \sigma_3 P_3 = \lambda_3 \left(1 - \frac{P_3}{K_3}\right) P_3 + c_3 P_1 P_3 + d_3 P_2 P_3 - e_3 P_3 P_4$$

$$\frac{\partial P_4}{\partial t} - \text{div}(\alpha_4 \nabla P_4) + \text{div}(\mathbb{T} P_4) + \rho_4 \sigma_4 P_4 = \lambda_4 \left(1 - \frac{P_4}{K_4}\right) P_4 + c_4 P_1 P_4 + d_4 P_2 P_4 - e_4 P_3 P_4$$

onde, para $I = 1$ a 4 ,

$P_I = P_I(x, y, t)$ são as populações ou as densidades populacionais,

$\alpha_I = \alpha_I(x, y, t)$ são os coeficientes de efetiva dispersão populacional,

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$, $\mathbb{U}$ e $\mathbb{T}$ são os vetores velocidade de migração populacional ou advecção,

ρ_I são parâmetros indicativos do decaimento populacional de P_I devido à mortalidade causada pela quantidade σ do poluente,

$\sigma_I = \sigma_I(x, y, t)$ são as taxas de decaimento da espécie P_I no meio Ω durante o período $[0, T]$,

λ_I são as taxas de crescimento intrínseco para as populações P_I ,

K_I são as capacidades suporte das populações P_I , e

c_I, d_I e e_I são as taxas da relação interespecífica.

Reescrevendo a parte final do sistema geral dado acima para $a_I = \lambda_I$ e $b_I = \frac{\lambda_I}{K_I}$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_1 \nabla P_1) + \operatorname{div}(\mathbb{V}P_1) + \rho_1 \sigma_1 P_1 &= a_1 P_1 - b_1 P_1^2 - c_1 P_1 P_3 - d_1 P_1 P_4 - e_1 P_1 P_2 \\
\frac{\partial P_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_2 \nabla P_2) + \operatorname{div}(\mathbb{W}P_2) + \rho_2 \sigma_2 P_2 &= a_2 P_2 - b_2 P_2^2 - c_2 P_2 P_3 - d_2 P_2 P_4 - e_2 P_1 P_2 \\
\frac{\partial P_3}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_3 \nabla P_3) + \operatorname{div}(\mathbb{U}P_3) + \rho_3 \sigma_3 P_3 &= a_3 P_3 - b_3 P_3^2 + c_3 P_1 P_3 + d_3 P_2 P_3 - e_3 P_3 P_4 \\
\frac{\partial P_4}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_4 \nabla P_4) + \operatorname{div}(\mathbb{T}P_4) + \rho_4 \sigma_4 P_4 &= a_4 P_4 - b_4 P_4^2 + c_4 P_1 P_4 + d_4 P_2 P_4 - e_4 P_3 P_4
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Do ponto de vista genérico, a condição inicial é dada na forma

$$P_I(x, y, 0) = P_{I_0}(x, y), \quad \text{e}$$

enquanto que as condições de contorno são de tipo misto, consideradas aqui homogêneas:

$$P_I|_{\Gamma_{0_I}} = 0 \quad \text{e} \quad -\alpha \frac{\partial P_I}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_{1_I}} = 0,$$

com $\Gamma_{0_I} \cup \Gamma_{1_I} = \partial\Omega$ para $I = 1$ a 4 , evidenciando partes da fronteira do domínio em que não há passagem (ver Pregnolato, 2002).

2 Formulação Variacional das Dinâmicas Populacionais

O modelo identificado acima será reproduzido mencionando apenas o subsistema que inclui as quatro equações das ações intra e interespecíficas: as das quatro dinâmicas populacionais, enfim a equação de Stokes e a de Difusão-Advecção receberam tratamento em outros trabalhos.

Para se acompanhar a formulação variacional dessas equações, sua discretização, suas expressões algorítmicas e simulações numéricas, pode-se, entre outros, consultar trabalhos de

outros membros do grupo de Ecologia Matemática do DMA/IMECC: Cantão (1998); Bernardes (1998); Diniz (2003) além do software de Cantão e D'Afonseca (1998) e da tese de Oliveira (2003).

Como no capítulo anterior é conveniente se adotar a formulação fraca ou variacional em vez da clássica. Assim, o problema dado por $P_I = P_I(x, y, t)$, $I = 1$ a 4 no espaço $\mathcal{V} = \{P \in H^1((0, T), H^1(\Omega)) : tr(P) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$ irá se tornar:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} v \, ds - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_1 \nabla P_1) v \, ds + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{V}P_1) v \, ds + \int_{\Omega} \rho_1 \sigma_1 P_1 v \, ds - a_1 \int_{\Omega} P_1 v \, ds + \\
& + b_1 \int_{\Omega} P_1^2 v \, ds + c_1 \int_{\Omega} P_1 P_3 v \, ds + d_1 \int_{\Omega} P_1 P_4 v \, ds + e_1 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0, \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} v \, ds - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_2 \nabla P_2) v \, ds + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{W}P_2) v \, ds + \int_{\Omega} \rho_2 \sigma_2 P_2 v \, ds - a_2 \int_{\Omega} P_2 v \, ds + \\
& + b_2 \int_{\Omega} P_2^2 v \, ds + c_2 \int_{\Omega} P_2 P_3 v \, ds + d_2 \int_{\Omega} P_2 P_4 v \, ds + e_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0 \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_3}{\partial t} v \, ds - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_3 \nabla P_3) v \, ds + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{U}P_3) v \, ds + \int_{\Omega} \rho_3 \sigma_3 P_3 v \, ds - a_3 \int_{\Omega} P_3 v \, ds + \\
& + b_3 \int_{\Omega} P_3^2 v \, ds - c_3 \int_{\Omega} P_1 P_3 v \, ds - d_3 \int_{\Omega} P_2 P_3 v \, ds + e_3 \int_{\Omega} P_3 P_4 v \, ds = 0, \text{ e} \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_4}{\partial t} v \, ds - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_4 \nabla P_4) v \, ds + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{T}P_4) v \, ds + \int_{\Omega} \rho_4 \sigma_4 P_4 v \, ds - a_4 \int_{\Omega} P_4 v \, ds + \\
& + b_4 \int_{\Omega} P_4^2 v \, ds - c_4 \int_{\Omega} P_1 P_4 v \, ds - d_4 \int_{\Omega} P_2 P_4 v \, ds + e_4 \int_{\Omega} P_3 P_4 v \, ds = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$$\forall v \in V = \{v \in H^1(\Omega) : tr(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}.$$

O instrumental analítico a ser usado aqui é o do capítulo anterior com duas modificações: são quatro (e não apenas duas) as populações e, conseqüentemente, são três (e não apenas um) os termos que modelam ações interespecíficas.

Aplicando então o Teorema de Green, considerando α_I , as dispersões e $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$ e $\mathbb{T}$ os campos vetoriais de migração como independentes localmente do tempo, da variável espacial e das próprias populações, e usando as condições de contorno, têm-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial t} v \, ds + \alpha_1 \int_{\Omega} \nabla P_1 \cdot \nabla v \, ds + V_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial x} v \, ds + V_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_1}{\partial y} v \, ds + \\
& + \int_{\Omega} \rho_1 \sigma_1 P_1 v \, ds - a_1 \int_{\Omega} P_1 v \, ds + b_1 \int_{\Omega} P_1^2 v \, ds + c_1 \int_{\Omega} P_1 P_3 v \, ds + \\
& + d_1 \int_{\Omega} P_1 P_4 v \, ds + e_1 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0, \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial t} v \, ds + \alpha_2 \int_{\Omega} \nabla P_2 \cdot \nabla v \, ds + W_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial x} v \, ds + W_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_2}{\partial y} v \, ds + \\
& + \int_{\Omega} \rho_2 \sigma_2 P_2 v \, ds - a_2 \int_{\Omega} P_2 v \, ds + b_2 \int_{\Omega} P_2^2 v \, ds + c_2 \int_{\Omega} P_2 P_3 v \, ds + \\
& + d_2 \int_{\Omega} P_2 P_4 v \, ds + e_2 \int_{\Omega} P_1 P_2 v \, ds = 0, \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_3}{\partial t} v \, ds + \alpha_3 \int_{\Omega} \nabla P_3 \cdot \nabla v \, ds + U_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_3}{\partial x} v \, ds + U_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_3}{\partial y} v \, ds + \\
& + \int_{\Omega} \rho_3 \sigma_3 P_3 v \, ds - a_3 \int_{\Omega} P_3 v \, ds + b_3 \int_{\Omega} P_3^2 v \, ds - c_3 \int_{\Omega} P_1 P_3 v \, ds - \\
& - d_3 \int_{\Omega} P_2 P_3 v \, ds + e_3 \int_{\Omega} P_3 P_4 v \, ds = 0, \text{ e} \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial P_4}{\partial t} v \, ds + \alpha_4 \int_{\Omega} \nabla P_4 \cdot \nabla v \, ds + T_1 \int_{\Omega} \frac{\partial P_4}{\partial x} v \, ds + T_2 \int_{\Omega} \frac{\partial P_4}{\partial y} v \, ds + \\
& + \int_{\Omega} \rho_4 \sigma_4 P_4 v \, ds - a_4 \int_{\Omega} P_4 v \, ds + b_4 \int_{\Omega} P_3^2 v \, ds - c_4 \int_{\Omega} P_1 P_4 v \, ds - \\
& - d_4 \int_{\Omega} P_2 P_4 v \, ds + e_4 \int_{\Omega} P_3 P_4 v \, ds = 0 \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

A principal característica de originalidade da expressão (2.2.2) reside na combinação de modelos citada anteriormente, usando a aproximação de Stokes para obter um mapa de circulação aquático que é usado como dado de entrada na produção de mapas evolutivos da presença de contaminantes do meio, sendo esta presença, ainda, usada como dado de entrada no passo seguinte, representando a hostilidade tóxica do meio atingindo as populações que interagem dentro e fora das respectivas espécies. Esta combinação encadeada de modelos e aproximações não figura na bibliografia.

Apesar de resultados recentes e de trabalhos em fase final de preparação (ver Bozhkov, 2003) no que concerne existência e unicidade e características de solução do sistema (2.2.2), esta formulação ainda coloca tanto ao analista quanto ao analista numérico desafios significativos. As características que a ele conferem não-linearidades tornam-no menos tratável tanto no sentido analítico, quanto para se definirem métodos numéricos de aproximação de ordem razoavelmente adequada.

Capítulo 3

O Modelo Discreto

1 Introdução

Neste capítulo iremos definir sucessivas etapas de discretização do sistema (2.2.2), abrindo caminho para a possibilidade de se trabalhar com soluções aproximadas de qualidade. Como no capítulo 1 iremos:

- (i) Recorrer ao Método de Galerkin (de separação das variáveis espaciais da temporal);
- (ii) Introduzir a discretização espacial pelo Método dos Elementos Finitos de Segunda Ordem;
- (iii) Adotar a aproximação na variável temporal pelo clássico Método de Crank-Nicolson; e
- (iv) Proceder a iterações lineares a cada passo no tempo como modo de contornar a não-linearidade tanto do sistema originalmente definido quanto daqueles resultados deste procedimento.

2 O Método de Galerkin

A opção para a construção de uma solução aproximada do ponto de vista do espaço é, então, a do Método de Galerkin visando o uso do Método de Elementos Finitos (ver Johnson,

1987). Portanto, repetindo o mesmo processo de separação de variáveis do capítulo 1, iremos, em vez de procurar as soluções $P_1(x, y, t)$, $P_2(x, y, t)$, $P_3(x, y, t)$ e $P_4(x, y, t)$ do problema (2.2.2), construir aproximações do tipo:

$$P_{I_h} = \sum_{j=1}^N P_{I_j}(t) \varphi_j(x, y) = \sum_{j=1}^N P_{I_j}(t) \varphi_j \quad \text{para } I = 1 \text{ a } 4 \quad (3.2.1)$$

e para as quais temos

$$\frac{\partial P_{I_h}}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{dP_{I_j}}{dt} \varphi_j. \quad (3.2.2)$$

Esta aproximação irá refletir, entre outras características, na mudança dos espaços tanto das soluções procuradas, quanto das funções-teste inerentes ao Método de Elementos Finitos. Assim, em vez de termos

$$P_I \in \mathcal{V} = \{P \in H^1((0, T), H^1(\Omega)) : tr(P) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$$

iremos teoricamente construir soluções aproximadas neste nível em subespaços V_h de dimensão finita N gerados pela base $\beta = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$.

Reescrevendo portanto o sistema (2.2.2) para V_h o subespaço de base β e rearranjando convenientemente os termos não lineares, obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{dP_{1_j}(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(V_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\ & + \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(V_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\rho_1 \sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - a_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \\ & + b_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{1_k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) + c_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{3_k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) + \\ & + d_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{4_k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) + e_1 \sum_{j=1}^N P_{1_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{2_k}(t) (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{dP_{2j}(t)}{dt} (\varphi_j|\varphi_i) + \alpha_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) (\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(W_1 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} |\varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(W_2 \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} |\varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) (\rho_2 \sigma_2 \varphi_j |\varphi_i) - a_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) (\varphi_j |\varphi_i) + \\
& + b_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{2k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) + c_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{3k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) + \\
& + d_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{4k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) + e_2 \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{1k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{dP_{3j}(t)}{dt} (\varphi_j|\varphi_i) + \alpha_3 \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) (\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) \left(U_1 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} |\varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) \left(U_2 \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} |\varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) (\rho_3 \sigma_3 \varphi_j |\varphi_i) - a_3 \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) (\varphi_j |\varphi_i) + \\
& + b_3 \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{3k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) - c_3 \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{1k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) - \\
& - d_3 \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{2k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) + e_3 \sum_{j=1}^N P_{3j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{4k}(t) (\varphi_k \varphi_j |\varphi_i) \right) = 0, \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{dP_{4_j}(t)}{dt} (\varphi_j|\varphi_i) + \alpha_4 \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) (\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) \left(T_1 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x}|\varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) \left(T_2 \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}|\varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) (\rho_4 \sigma_4 \varphi_j|\varphi_i) - a_4 \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) (\varphi_j|\varphi_i) + \\
& + b_4 \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{4_k}(t) (\varphi_k \varphi_j|\varphi_i) \right) - c_4 \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{1_k}(t) (\varphi_k \varphi_j|\varphi_i) \right) - \\
& - d_4 \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{2_k}(t) (\varphi_k \varphi_j|\varphi_i) \right) + e_4 \sum_{j=1}^N P_{4_j}(t) \left(\sum_{k=1}^N P_{3_k}(t) (\varphi_k \varphi_j|\varphi_i) \right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

para $\forall \varphi_i \in \beta$.

As equações (3.2.3) correspondem a um sistema não linear de Equações Diferenciais Ordinárias na variável t com a condição inicial (já discretizada) dada implicitamente por

$$\sum_{j=1}^N P_{I_j}(0) (\varphi_j|\varphi_i) = (P_{I_0}|\varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \beta \text{ e } I = 1 \text{ a } 4. \tag{3.2.4}$$

A transformação do sistema não linear de Equações Diferenciais Parciais (2.2.2) para o sistema não linear de Equações Diferenciais Ordinárias dado em (3.2.3), embora produza sensível simplificação, continua a apresentar dificuldades analíticas de modo a convencer o analista a continuar a recorrer a discretizações apropriadas.

3 Discretização espacial: Método de Elementos Finitos

Diferentemente do capítulo 1 em que a triangularização do domínio – através da construção de uma malha conveniente – era regular (um retângulo), e, portanto, domínio discretizado Ω_h e domínio original Ω coincidiam, o domínio a ser considerado é retirado, por

assim dizer, do mapa. Trata-se da Lagoa de Iberá. A regularidade do retângulo do capítulo 1 inexistente e Ω_h não coincide com Ω . Vemos, de modo bastante intuitivo, porém, que sucessivos refinamentos da malha levam Ω_h a convergir (de algum modo) para o domínio original Ω . Nesse sentido, podemos ilustrativamente comparar as figuras 3.1 e 3.2.

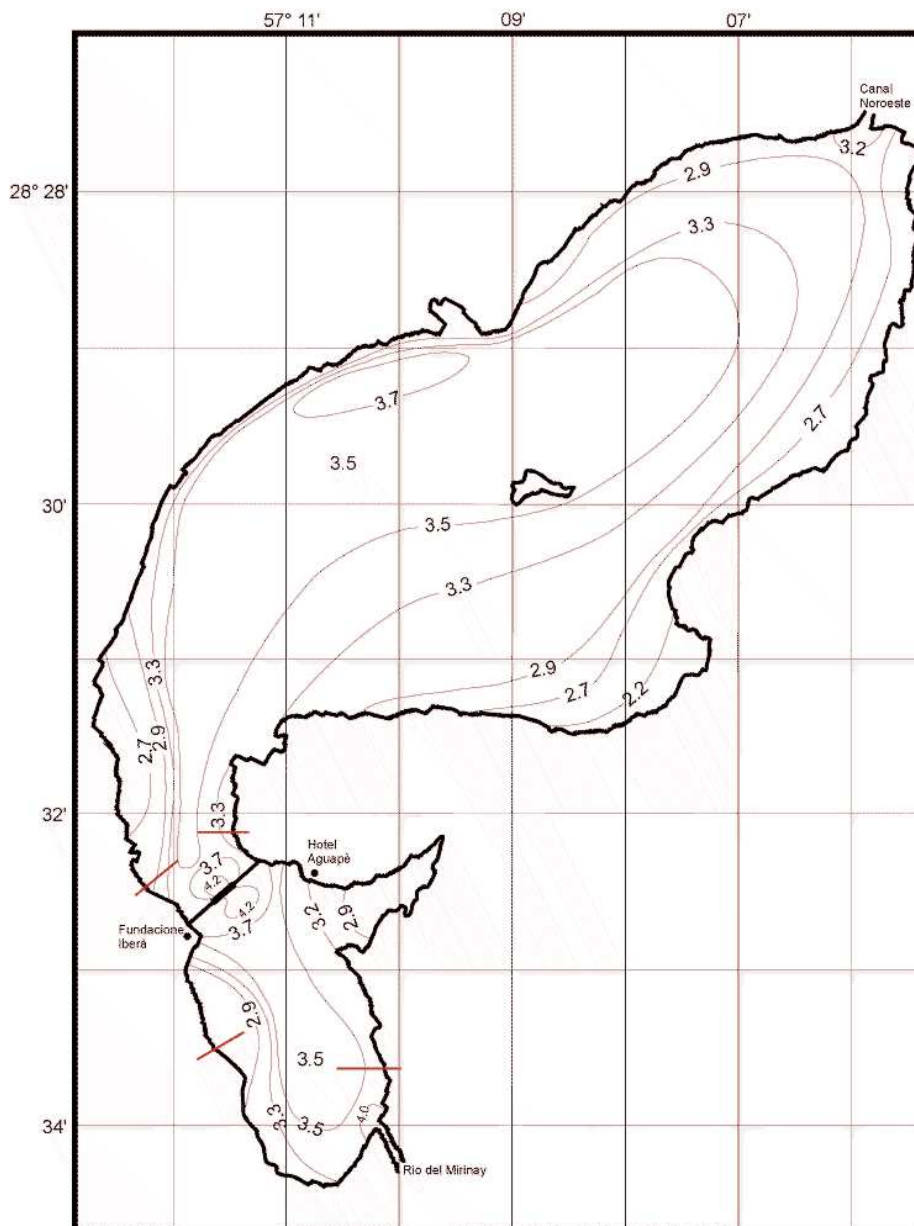


Figura 3.1: Batimetria da lagoa de *Iberá*.

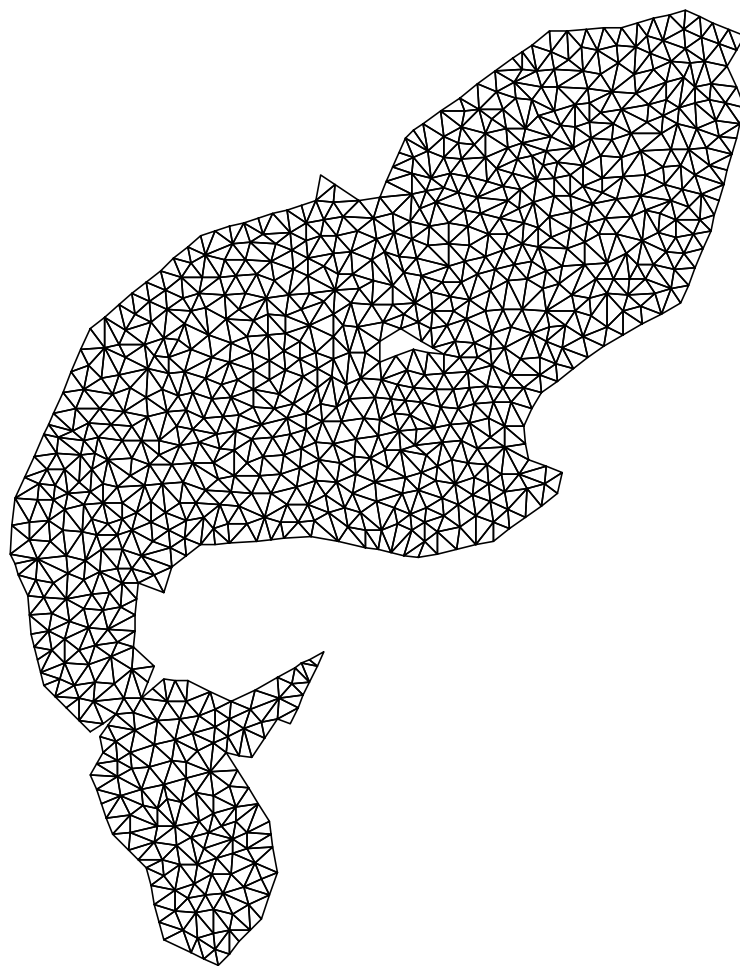


Figura 3.2: Discretização da lagoa de *Iberá* usando o *software Triangle* (ver Shewchuk, 2002).

4 Discretização temporal: Método de Crank-Nicolson

Uma discretização semelhante àquela descrita no capítulo 1 será adotada aqui. Assim, adotando os operadores de aproximação de Crank-Nicolson o sistema (3.2.3) se torna:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} - P_{1j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N V_{1j} \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N V_{2j} \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} (\rho_1 \sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - a_1 \sum_{j=1}^N \frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_1 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + c_1 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + d_1 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + e_1 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{1j}^{(n+1)} + P_{1j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} - P_{2j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N W_{1j} \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N W_{2j} \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\rho_2 \sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - a_2 \sum_{j=1}^N \frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_2 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + c_2 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + d_2 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + e_2 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{2j}^{(n+1)} + P_{2j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{P_{3j}^{(n+1)} - P_{3j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_3 \sum_{j=1}^N \frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N U_{1j} \frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N U_{2j} \frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} (\rho_3 \sigma_3 \varphi_j | \varphi_i) - a_3 \sum_{j=1}^N \frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_3 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] - \\
& - c_3 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] - \\
& - d_3 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + e_3 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{3j}^{(n+1)} + P_{3j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] = 0, \text{ e}
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \frac{P_{4j}^{(n+1)} - P_{4j}^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_4 \sum_{j=1}^N \frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N T_{1j} \frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \sum_{j=1}^N T_{2j} \frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} (\rho_4 \sigma_4 \varphi_j | \varphi_i) - a_4 \sum_{j=1}^N \frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + b_4 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] - \\
& - c_4 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] - \\
& - d_4 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] + \\
& + e_4 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{P_{4j}^{(n+1)} + P_{4j}^{(n)}}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right) \right] = 0, \text{ para } \forall \varphi_i \in \beta.
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Como anteriormente, esta discretização resulta num sistema não linear em $P_{I_k}^{(n)} = (P_{I_1}^{(n)}, P_{I_2}^{(n)}, \dots, P_{I_N}^{(n)})$ onde $P_{I_k}^{(n)}$ caracteriza-se pela relação:

$$P_{I_k}^{(n)} \cong P_I(x_k, y_k, t_n), \quad I = 1 \text{ a } 4$$

com a condição inicial dada implicitamente pelos sistemas

$$\sum_{j=1}^N P_{I_j}^{(0)} (\varphi_j | \varphi_i) = (P_{I_0} | \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \beta \text{ e } I = 1 \text{ a } 4. \tag{3.4.5}$$

5 O Problema Discretizado Não Linear

Reagrupando os termos de (3.4.1) a (3.4.4) de modo a separar os termos relativos ao $(n+1)$ -ésimo passo no tempo obtemos o sistema não linear dado sucessivamente por:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N P_{1_j}^{(n+1)} \left\{ \left(1 - a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + V_{1_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \right. \\
& + V_{2_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \frac{\Delta t}{2} (\rho_1 \sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) + b_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1_k}^{(n+1)} + P_{1_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + c_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3_k}^{(n+1)} + P_{3_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + d_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4_k}^{(n+1)} + P_{4_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + e_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2_k}^{(n+1)} + P_{2_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\} = \\
& = \sum_{j=1}^N P_{1_j}^{(n)} \left\{ \left(1 + a_1 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - V_{1_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \right. \\
& - V_{2_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) - \frac{\Delta t}{2} (\rho_1 \sigma_1 \varphi_j | \varphi_i) - b_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1_k}^{(n+1)} + P_{1_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - c_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3_k}^{(n+1)} + P_{3_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - d_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4_k}^{(n+1)} + P_{4_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - e_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2_k}^{(n+1)} + P_{2_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\}, \tag{3.5.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N P_{2_j}^{(n+1)} \left\{ \left(1 - a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + W_{1_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \right. \\
& + W_{2_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \frac{\Delta t}{2} (\rho_2 \sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) + b_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2_k}^{(n+1)} + P_{2_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + c_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3_k}^{(n+1)} + P_{3_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + d_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4_k}^{(n+1)} + P_{4_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + e_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1_k}^{(n+1)} + P_{1_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\} = \\
& = \sum_{j=1}^N P_{2_j}^{(n)} \left\{ \left(1 + a_2 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - W_{1_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \right. \\
& - W_{2_j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) - \frac{\Delta t}{2} (\rho_2 \sigma_2 \varphi_j | \varphi_i) - b_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2_k}^{(n+1)} + P_{2_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - c_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3_k}^{(n+1)} + P_{3_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - d_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4_k}^{(n+1)} + P_{4_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - e_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1_k}^{(n+1)} + P_{1_k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\}, \tag{3.5.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N P_{3j}^{(n+1)} \left\{ \left(1 - a_3 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_3 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + U_{1j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \right. \\
& + U_{2j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \frac{\Delta t}{2} (\rho_3 \sigma_3 \varphi_j | \varphi_i) + b_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - c_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - d_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + e_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Bigg\} = \\
& = \sum_{j=1}^N P_{3j}^{(n)} \left\{ \left(1 + a_3 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_3 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - U_{1j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \right. \tag{3.5.3} \\
& - U_{2j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) - \frac{\Delta t}{2} (\rho_3 \sigma_3 \varphi_j | \varphi_i) - b_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + c_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + d_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - e_3 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Bigg\}, \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N P_{4j}^{(n+1)} \left\{ \left(1 - a_4 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_4 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + T_{1j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \right. \\
& + T_{2j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \frac{\Delta t}{2} (\rho_4 \sigma_4 \varphi_j | \varphi_i) + b_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - c_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - d_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + e_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\} = \\
& = \sum_{j=1}^N P_{4j}^{(n)} \left\{ \left(1 + a_4 \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \alpha_4 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - T_{1j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \right. \tag{3.5.4} \\
& - T_{2j} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) - \frac{\Delta t}{2} (\rho_4 \sigma_4 \varphi_j | \varphi_i) - b_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{4k}^{(n+1)} + P_{4k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + \\
& + c_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{1k}^{(n+1)} + P_{1k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] + d_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{2k}^{(n+1)} + P_{2k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] - \\
& - e_4 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{P_{3k}^{(n+1)} + P_{3k}^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

De modo sucinto, têm-se

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_I \left(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}, P_4^{(n)}, P_1^{(n+1)}, P_2^{(n+1)}, P_3^{(n+1)}, P_4^{(n+1)} \right) P_I^{(n+1)} = \\ = \mathbb{B}_I \left(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}, P_4^{(n)}, P_1^{(n+1)}, P_2^{(n+1)}, P_3^{(n+1)}, P_4^{(n+1)} \right) P_I^{(n)} \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

com a condição inicial $P_I^{(0)} = (P_{I_1}^{(0)}, P_{I_2}^{(0)}, \dots, P_{I_N}^{(0)})$ e $I = 1$ a 4 .

Diversos modos de se obter a solução de (3.5.5) estão disponíveis. Como no capítulo 1 e em outros trabalhos iremos contornar a dificuldade de aproximar a solução de (3.5.5) linearizando o sistema segundo Rachford (1973); Douglas Jr. et al. (1979); Meyer (1988); Pregnotatto (2002).

Os processos iterativos são obtidos mediante o seguinte algoritmo:

1. resolve-se o sistema

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)} \right) P_1^{(*)} = \\ = \mathbb{B}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)} \right) P_1^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_1^{(*)}$;

2. resolve-se, agora, o sistema

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)} \right) P_2^{(*)} = \\ = \mathbb{B}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)} \right) P_2^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_2^{(*)}$;

3. resolve-se, em seguida o sistema

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)} \right) P_3^{(*)} &= \\ &= \mathbb{B}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)} \right) P_3^{(0)}\end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_3^{(*)}$;

4. e finalmente, resolve-se o sistema

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_4 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)}, P_4^{(0)} \right) P_4^{(*)} &= \\ &= \mathbb{B}_4 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)}, P_4^{(0)} \right) P_4^{(0)}\end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_4^{(*)}$;

5. resolve-se então, o sistema

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)}, P_4^{(*)} \right) P_1^{(**)} &= \\ &= \mathbb{B}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)}, P_4^{(*)} \right) P_1^{(0)}\end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_1^{(**)}$;

6. resolve-se agora o sistema

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)}, P_4^{(*)} \right) P_2^{(**)} &= \\ &= \mathbb{B}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)}, P_4^{(*)} \right) P_2^{(0)}\end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_2^{(**)}$;

7. resolve-se agora o sistema

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(**)}, P_3^{(*)}, P_4^{(*)} \right) P_3^{(**)} &= \\ &= \mathbb{B}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(**)}, P_3^{(*)}, P_4^{(*)} \right) P_3^{(0)}\end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_3^{(**)}$;

8. resolve-se, finalmente o sistema

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_4 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(**)}, P_3^{(**)}, P_4^{(*)} \right) P_4^{(**)} = \\ & = \mathbb{B}_4 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_4^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(**)}, P_3^{(**)}, P_4^{(*)} \right) P_4^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor $P_4^{(**)}$.

9. Procedendo analogamente, obtêm-se sucessivamente $P_1^{(***)}$, $P_2^{(***)}$, $P_3^{(***)}$ e $P_4^{(***)}$ até que se definam as aproximações dos vetores $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, $P_3^{(1)}$ e $P_4^{(1)}$. Geralmente não há ganhos ao se repetir muitas vezes estas iterações internas a cada passo no tempo (ver Rachford, 1973; Douglas Jr. et al., 1979; Meyer, 1988).
10. O procedimento de 1. a 9. é repetido com $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$, $P_3^{(n)}$ e $P_4^{(n)}$ no lugar de $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}$, $P_3^{(0)}$ e $P_4^{(0)}$, para se obter, após as iterações internas o (n+1)-ésimo passo na iteração temporal, $P_1^{(n+1)}$, $P_2^{(n+1)}$, $P_3^{(n+1)}$ e $P_4^{(n+1)}$.

Este método de tipo preditor-corretor, definido no âmbito de uma discretização Crank-Nicolson irá melhorar as aproximações mas não indefinidamente: ele tende à melhor aproximação da ordem de $(\Delta t)^2$ em cada iteração temporal¹.

Este esquema de aproximações, portanto, calcula aproximações da solução de ordem quadrática do ponto de vista espacial global, e de ordem também quadrática temporalmente, mas na visão local.

¹Resultados de convergência podem ser encontrados nos trabalhos citados: Rachford (1973), Douglas Jr. et al. (1979) e Meyer (1988)).

Capítulo 4

Resultados das Simulações Numéricas

Neste capítulo serão apresentados alguns ensaios numéricos para simular os efeitos de um impacto ambiental causado por um agente tóxico na região da lagoa de Iberá, nos níveis populacionais das quatro espécies interagentes consideradas.

Os parâmetros usados foram estimados na tentativa de testar o modelo. Assim, foram adotados parâmetros que indicassem:

- (i) maior difusão/dispersão para uma das presas (P_2) e para uma das espécies predadoras (P_3), menores valores nas outras duas;
- (ii) um efeito significativamente maior do tóxico sobre as presas, e inferior nos predadores;
- (iii) para a reprodução, maiores taxas intrínsecas para as espécies predadas do que para os predadores, e
- (iv) um parâmetro (verhulstiano) do efeito da competição intra específica maior em uma das espécies de predadores (P_3) e em uma das presas (P_1), com valores menores para as outras duas.

O algoritmo (3.5.5) foi programado em ambiente MATLAB no equipamento do Laboratório de Matemática Aplicada no IMECC. Em anexo (ver Apêndice A) apresenta-se a listagem de um dos ensaios. Diversos outros recursos inclusive do MATLAB foram utilizados, bem como recursos de *software* do grupo de pesquisa (Shewchuk, 2002; Cantão e D'Afonseca,

1998).

Em primeiro lugar, a figura 4.1 mostra, na iteração 250, os níveis populacionais¹ em toda a região na ausência de efeitos tóxicos do contaminante.

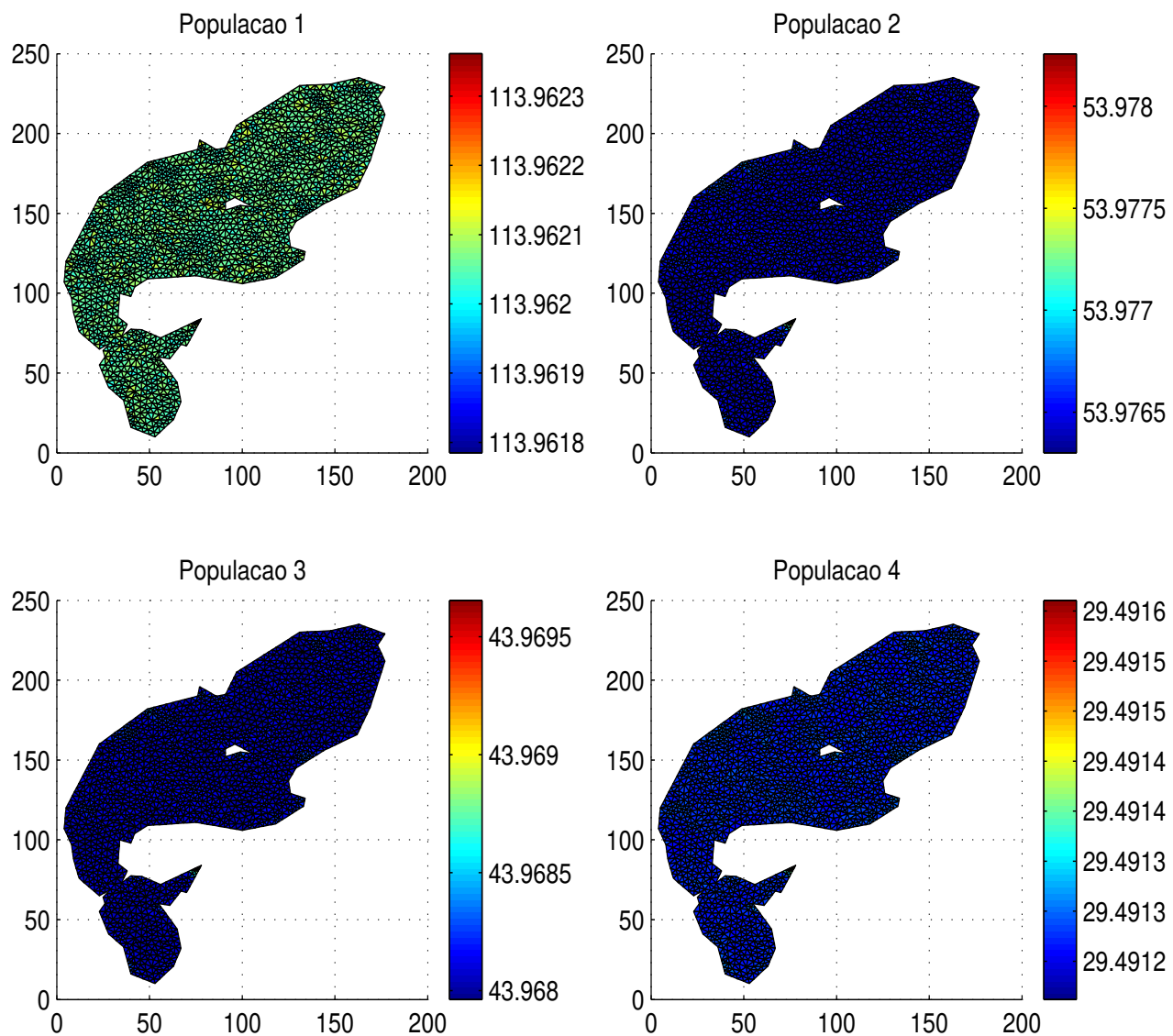


Figura 4.1: Níveis populacionais na ausência do produto impactante.

¹Os níveis populacionais adotados inicialmente foram: $P_1 = 200$, $P_2 = 100$, $P_3 = 50$ e $P_4 = 25$.

A figura 4.2 acompanha o comportamento de um nó (#2424) escolhido aleatoriamente na ausência de efeitos tóxicos do contaminante. Neste caso também percebemos os efeitos clássicos de sistemas do tipo presa-predador-competição.

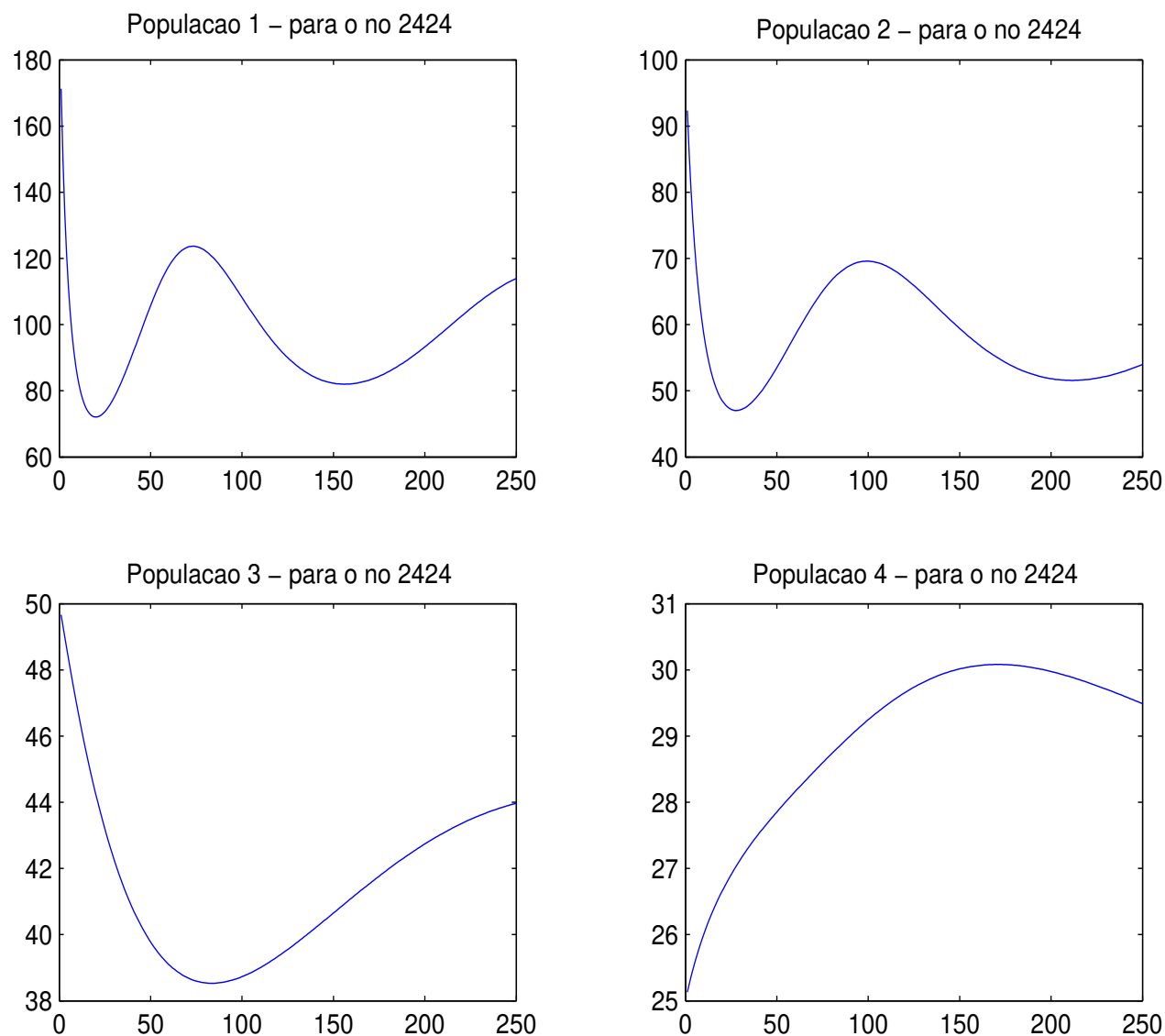


Figura 4.2: Comportamento do nó #2424 numa região sem o contaminante.

Nessa simulação concentramos de início o material poluente na região inferior da lagoa. Assim, a figura 4.3 ilustra o final da evolução do tóxico nesta região, na iteração 250.

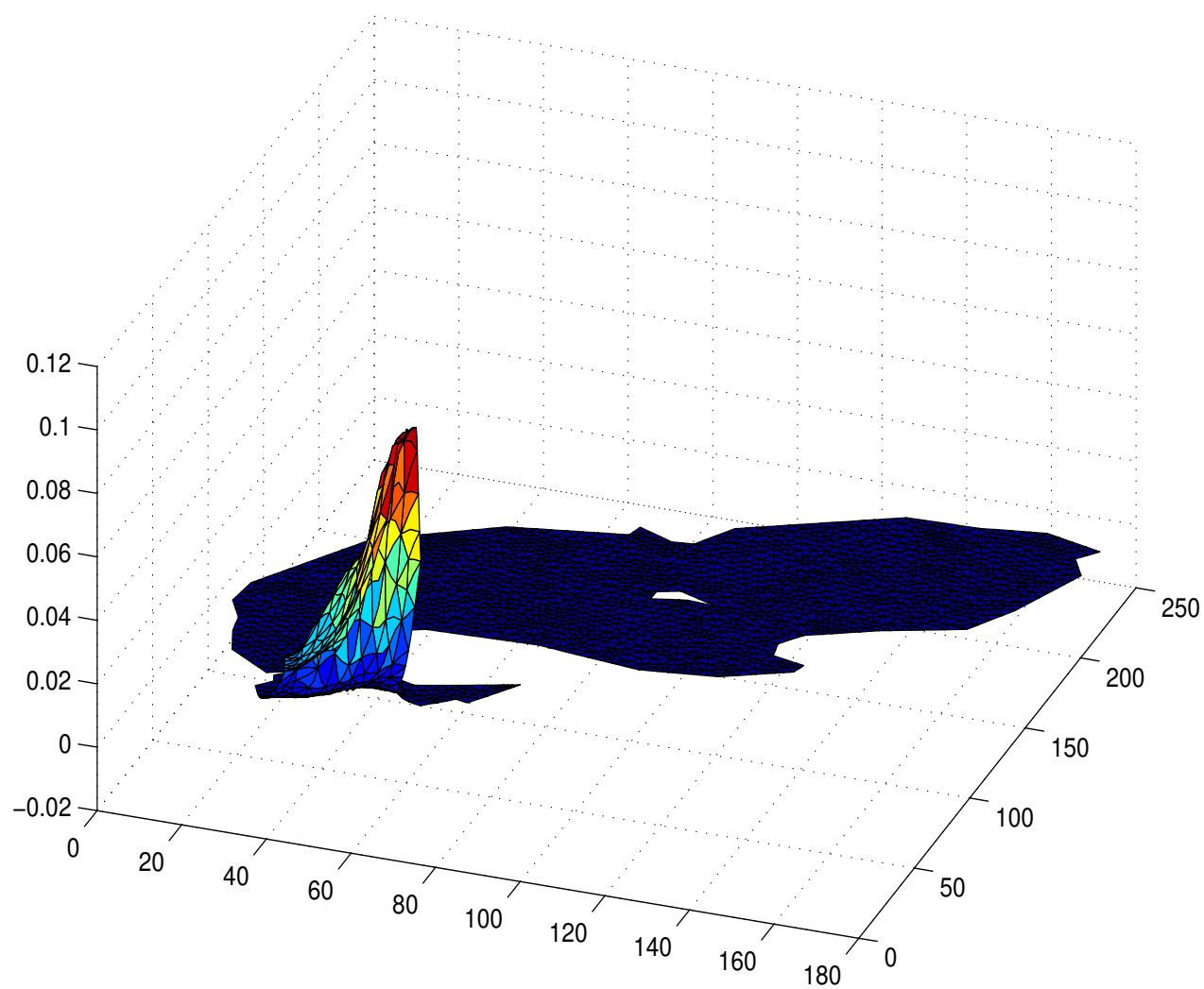


Figura 4.3: Material Impactante na região inferior da lagoa.

Já nas figuras 4.4 e 4.5 são apresentados os níveis populacionais após 250 iterações, os mesmos gráficos de diferentes pontos de vista.

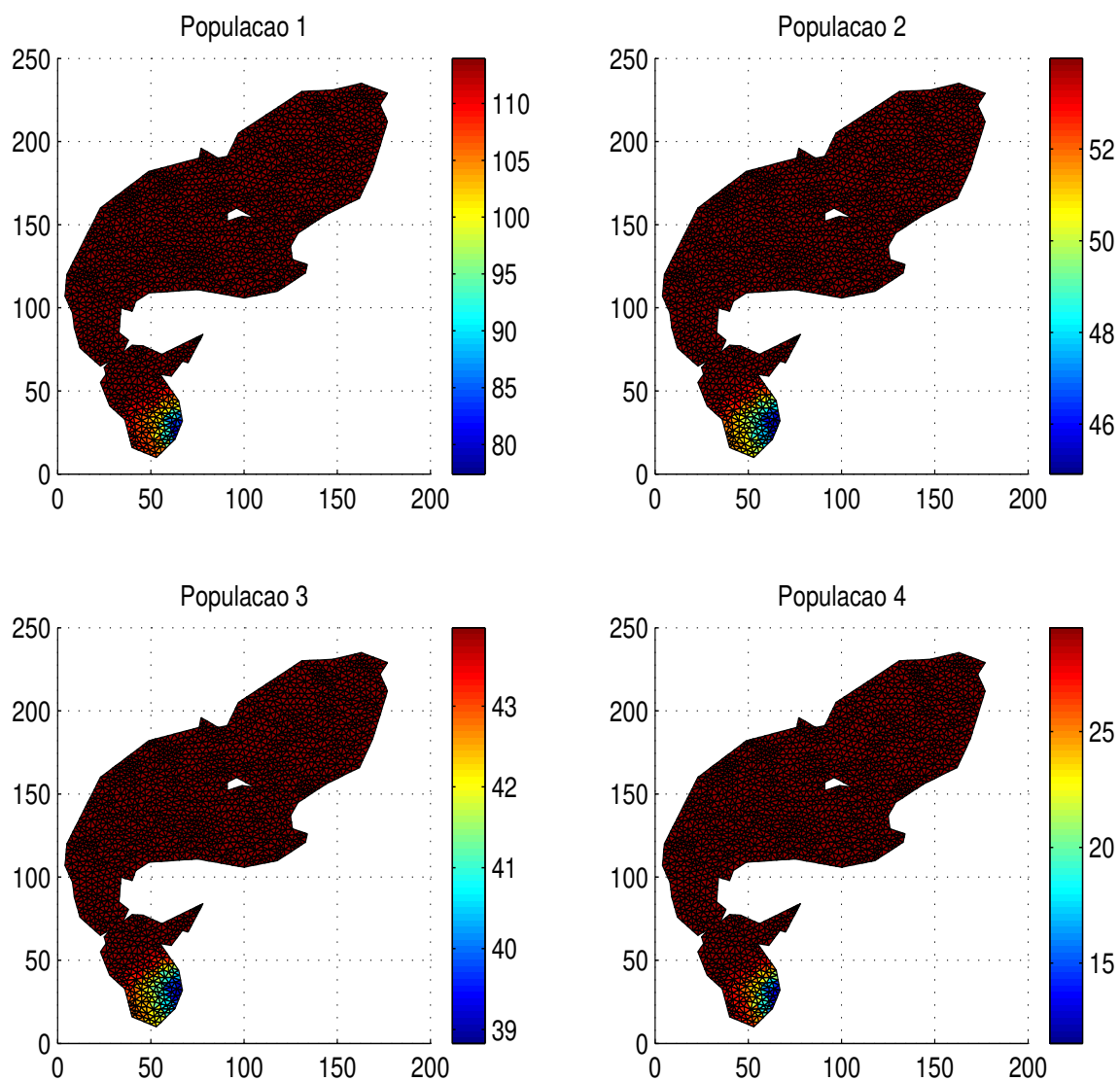


Figura 4.4: Níveis populacionais com o contaminante na parte inferior da lagoa.

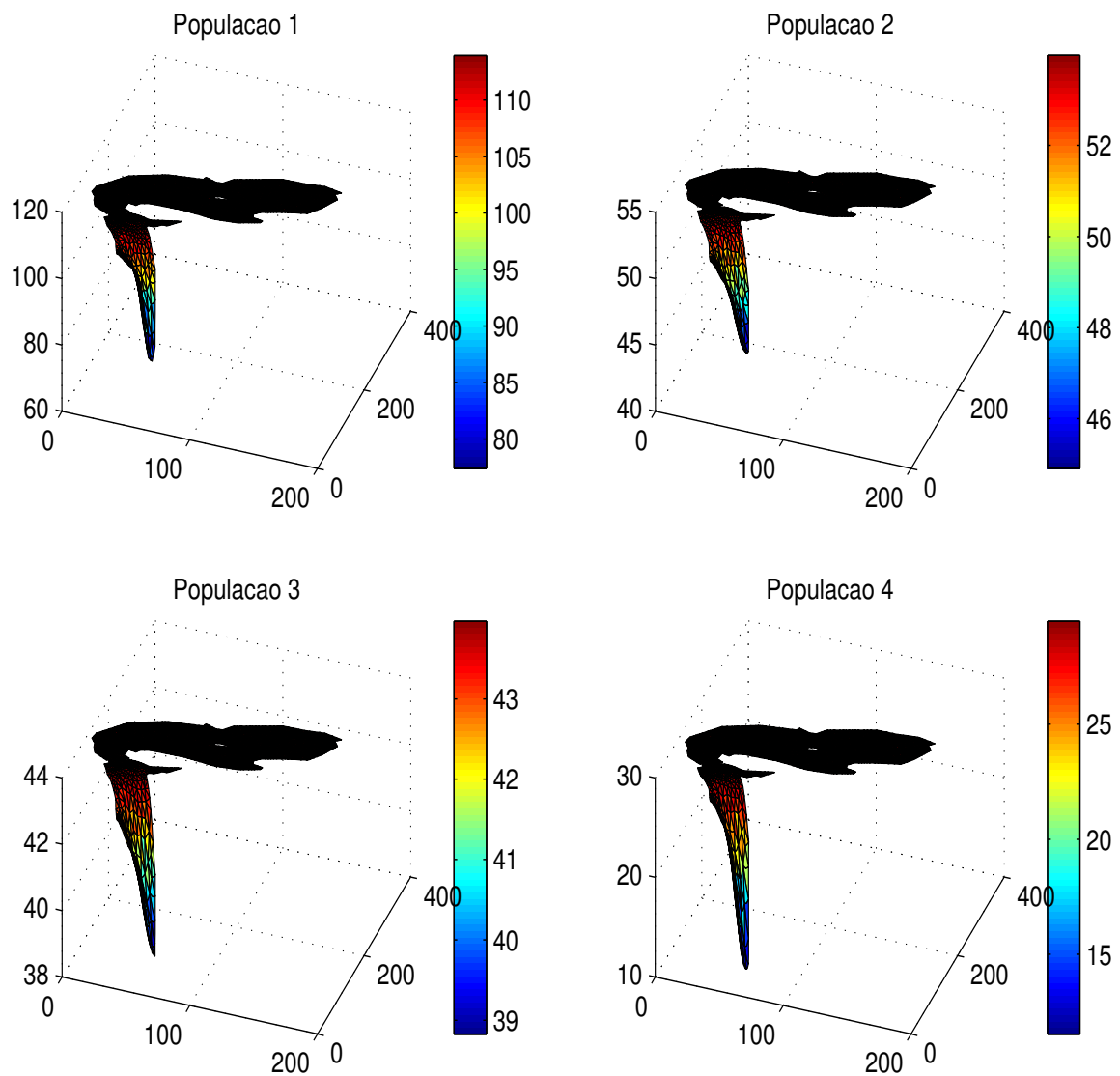


Figura 4.5: Mesmos níveis populacionais vistos por outro ângulo.

Vale ressaltar que na figura 4.5 as escalas são diferentes para as quatro populações, pois os níveis populacionais iniciais são diferentes.

Apresentamos ainda na figura 4.6 o comportamento evolutivo dos quatro níveis populacionais no nó #2424 fora da região com o contaminante, como observado anteriormente e, por isso, seu comportamento é análogo ao da figura 4.2.

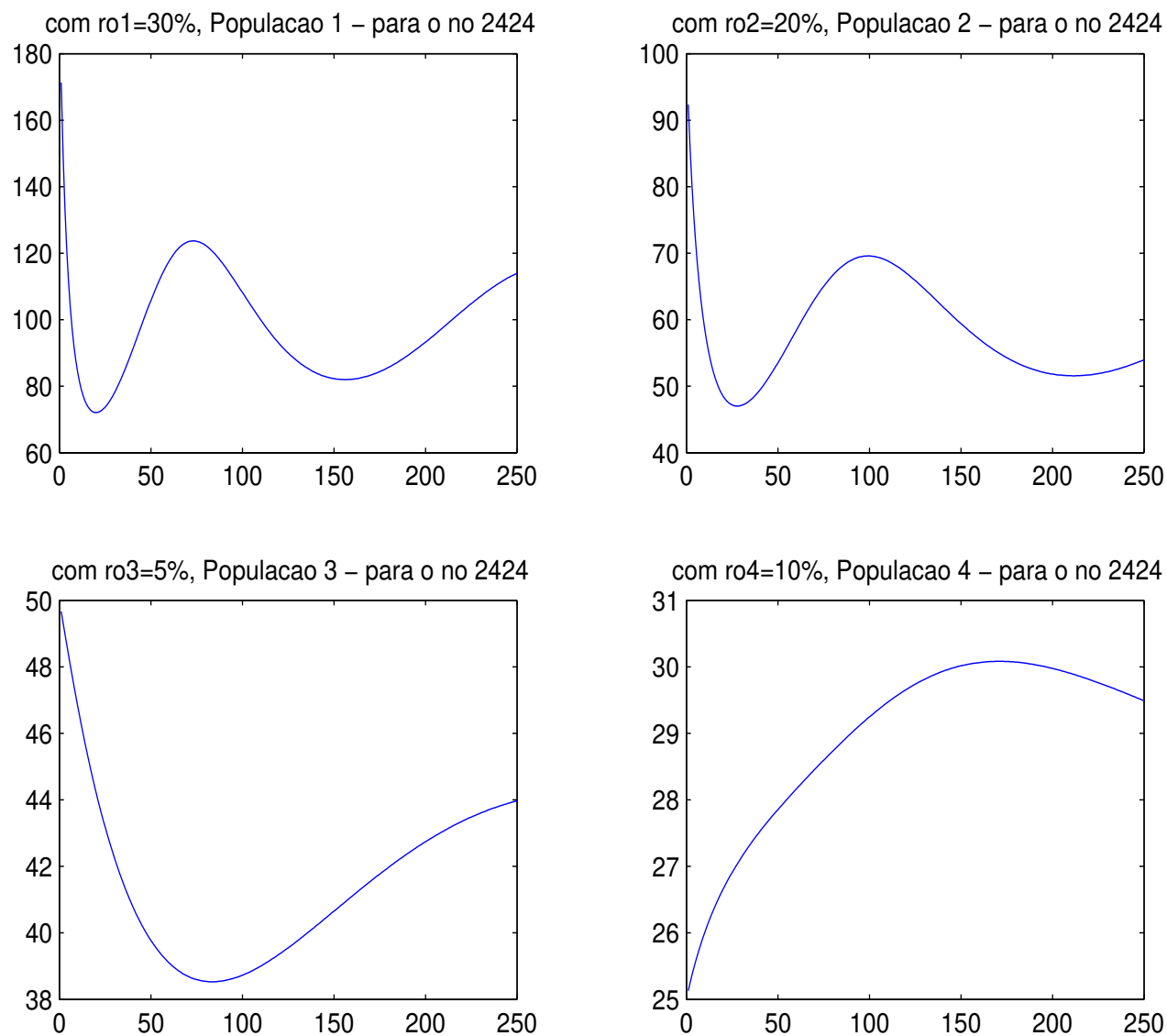


Figura 4.6: Comportamento evolutivo dos níveis populacionais no nó #2424.

Em outra simulação, apresentamos os mesmos conjuntos de gráficos no caso, agora, em que se tem a concentração inicial do material impactante na parte superior à direita. A figura 4.7 mostra como evolui a distribuição do material impactante, exibindo a superfície dos níveis de impacto sobre o domínio, após o período desejado de tempo (neste caso, para 250 iterações). A pequena distância coberta pelo poluente corresponde à nossa expectativa, em função da baixa circulação local determinada no programa via Equação de Stokes.

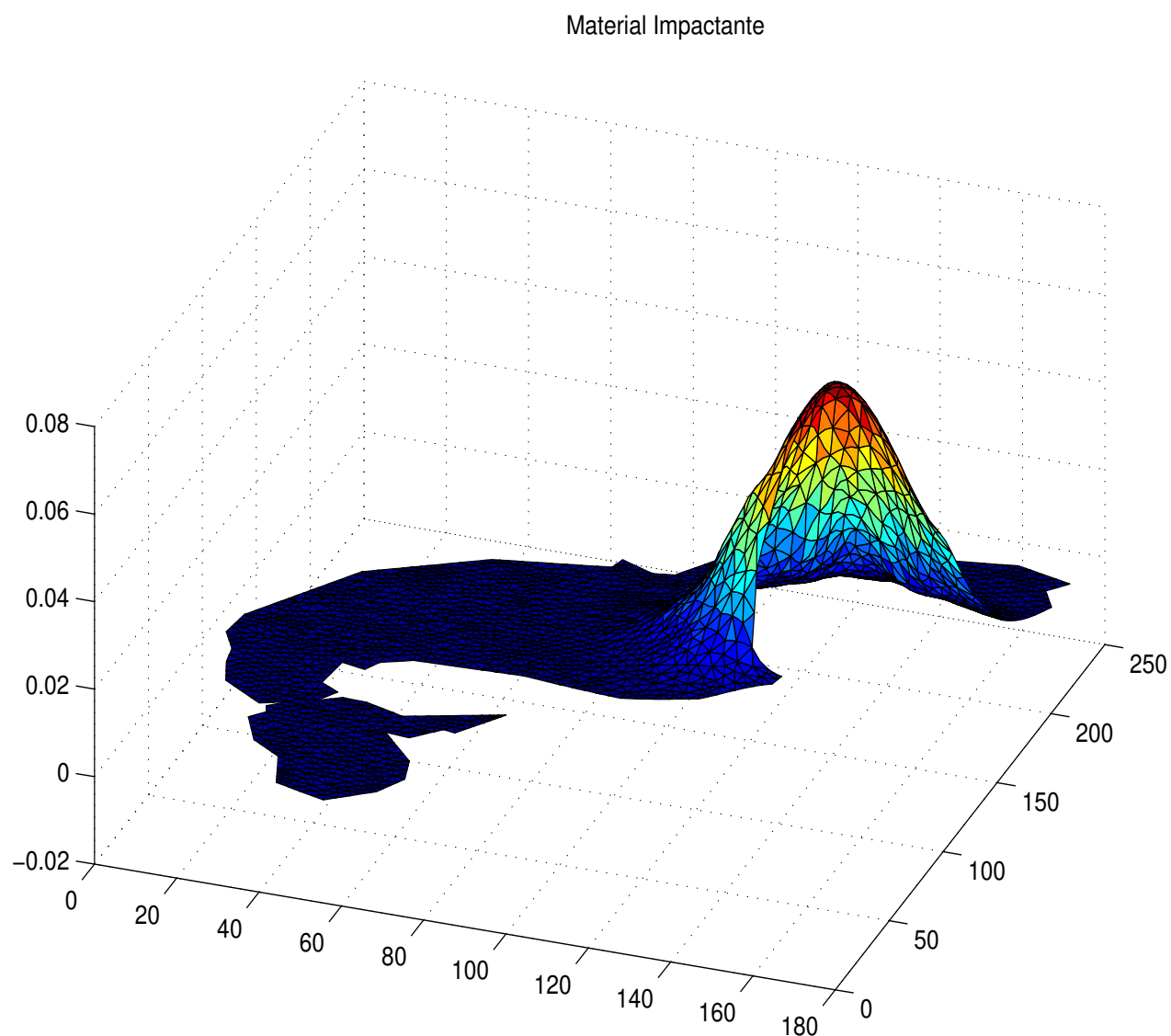


Figura 4.7: Evolução do material impactante.

Com o comportamento evolutivo da mancha de material impactante indo da condição inicial para a distribuição apresentada na figura 4.7, seria de se esperar uma queda nos níveis populacionais das espécies consideradas, queda esta que deveria acompanhar a presença do produto tóxico.

De fato, é esta a situação descrita pelas figuras 4.8 e 4.9, com o resultado final da simulação, lembrando que as populações 1 e 2 são as presas e as populações 3 e 4, os predadores.

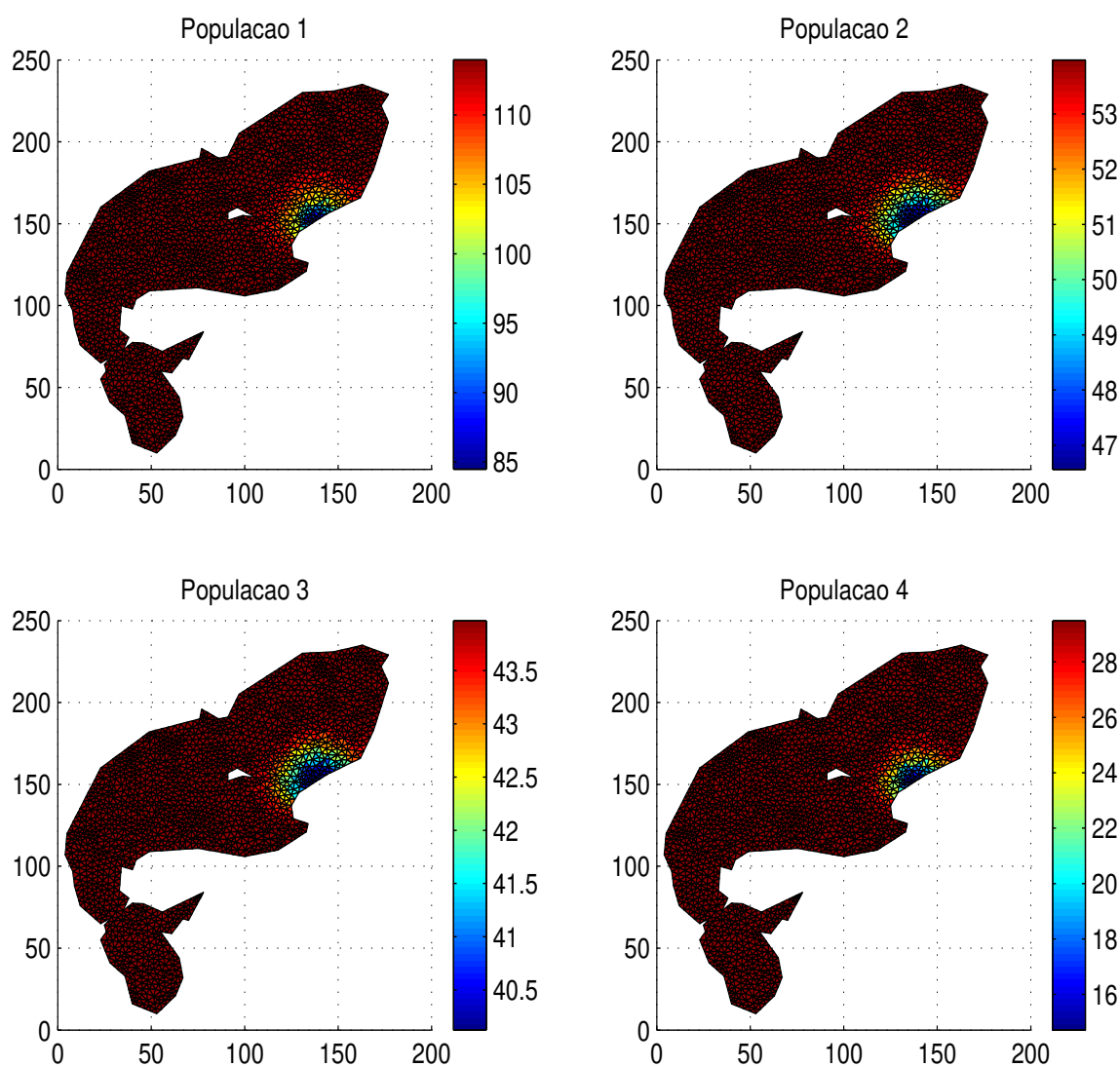


Figura 4.8: Níveis populacionais na presença do produto tóxico.

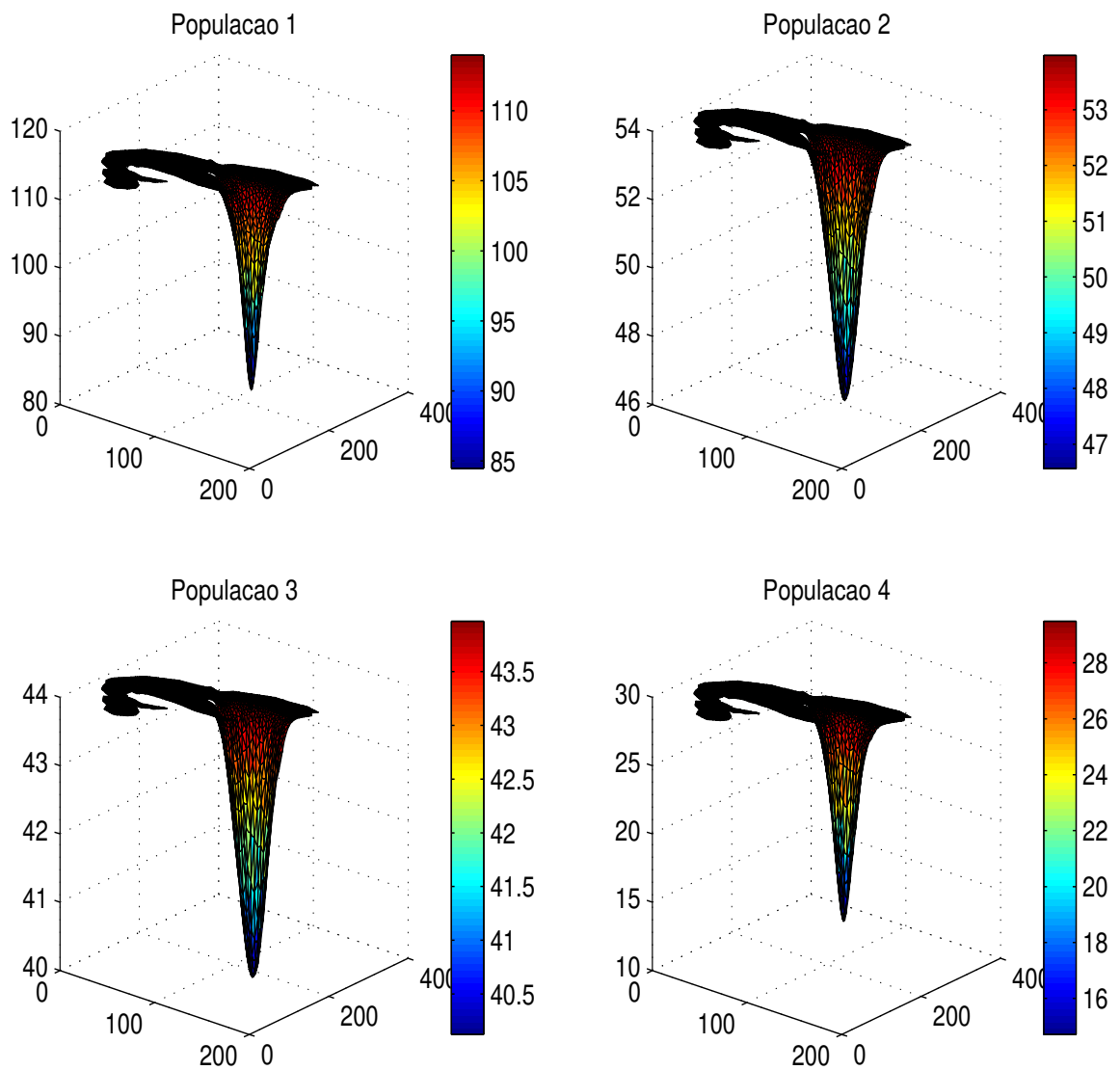


Figura 4.9: Outra visão dos níveis populacionais na presença do produto tóxico.

Como anteriormente, as escalas também não são iguais por termos condições iniciais diferentes nos quatro níveis populacionais.

Uma idéia de como as espécies chegaram aos níveis populacionais e às respectivas distribuições aí desenhadas é sugerida pela figura 4.10.

Acompanham-se os níveis populacionais para um único nó (#1302) escolhido justamente na região inicialmente afetada pelo contaminante: vemos os efeitos imediatos sentidos pelas duas presas (populações 1 e 2) e, com certo retardo, o efeito levado aos predadores (populações 3 e 4), além dos efeitos esperados em função de comportamentos clássicos de modelos do tipo presa-predador-competição.

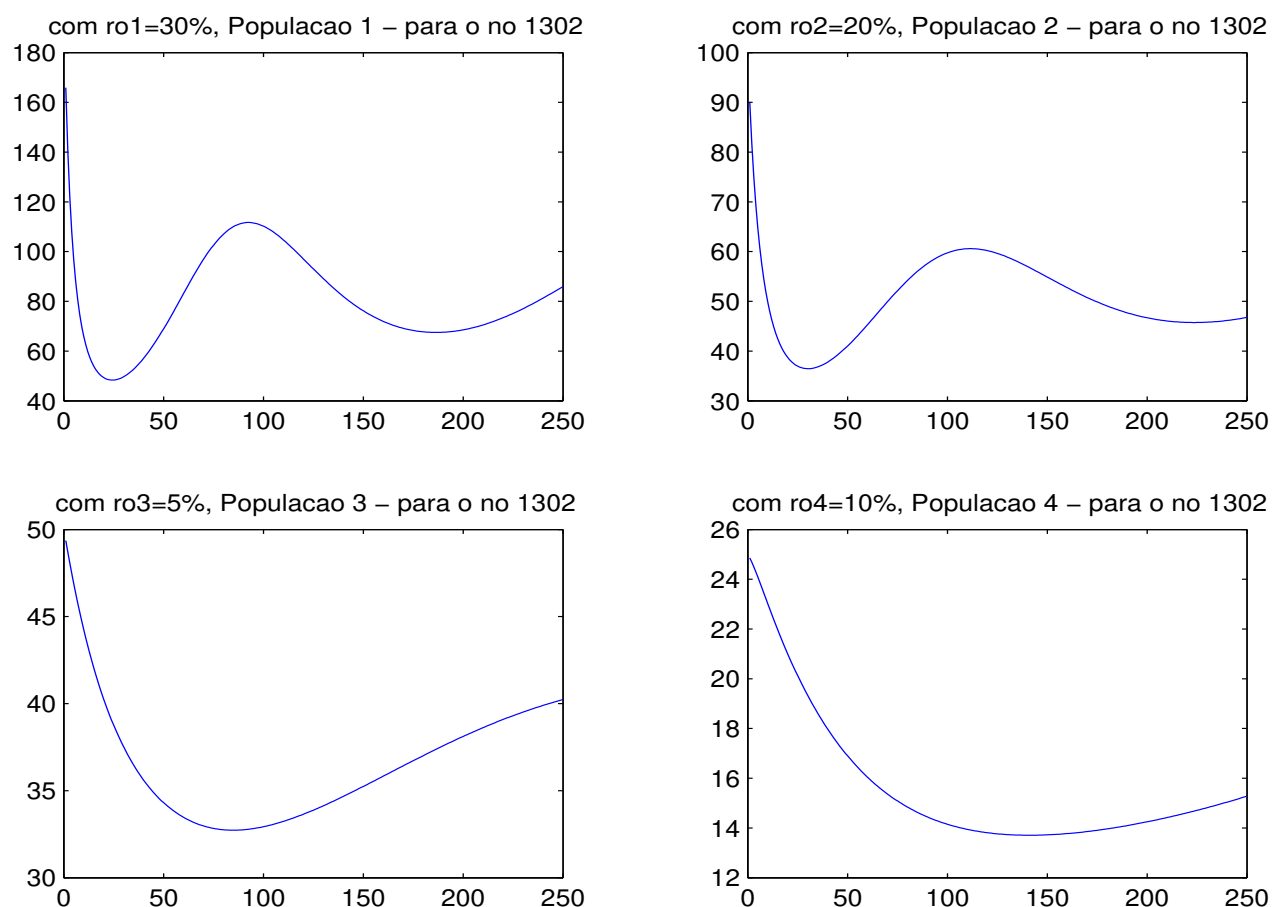


Figura 4.10: Efeito tóxico no nó #1302 na região afetada pelo contaminante.

Em comparação, a figura 4.11 acompanha outro nó (#2424) fora da região de efeito imediato do material impactante. Podemos observar comportamentos significativamente diferenciados: não só os níveis populacionais das presas (populações 1 e 2) são mais baixos, obviamente, onde há impacto, mas o comportamento de um dos predadores (população 4) é invertido: na presença do impacto, mesmo com certa abundância de presas, seu nível populacional cai, enquanto que na ausência do produto tóxico, o nível populacional começa aumentando vindo a diminuir posteriormente muito mais em função dos efeitos das competições, visto que, nestes ensaios realizados, o material impactante não chegou a afetar significativamente (ainda!) as populações tanto de presas quanto de predadores.

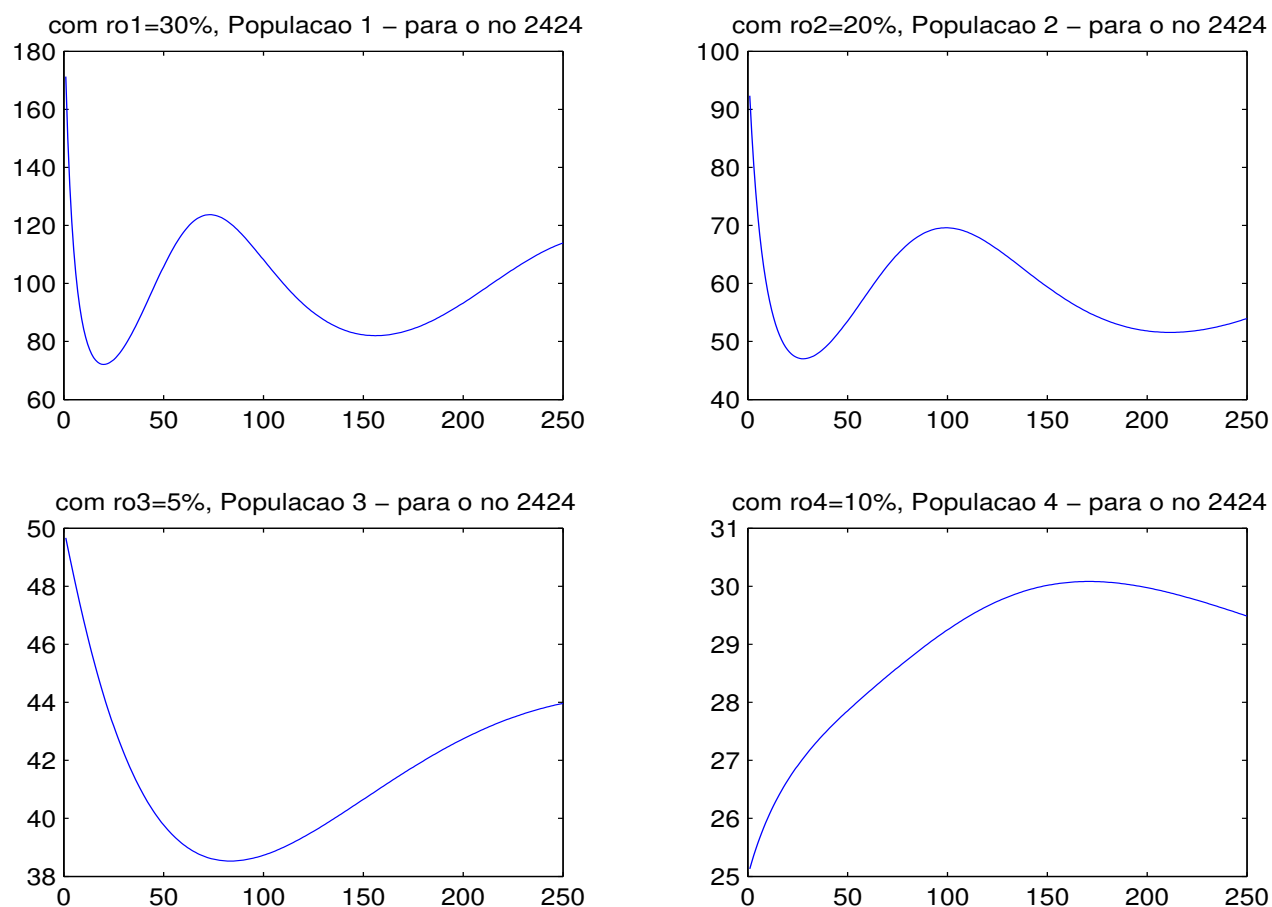


Figura 4.11: Evolução de um nó fora da região de efeito do material impactante.

Seguindo o roteiro anteriormente adotado, apresentamos a mesma simulação anterior, agora, com 400 iterações, correspondendo a um tempo final de 160.

A figura 4.12 mostra o comportamento evolutivo do material impactante na iteração 400. Observamos ainda a pequena área coberta pelo agente tóxico em função da baixa circulação local.

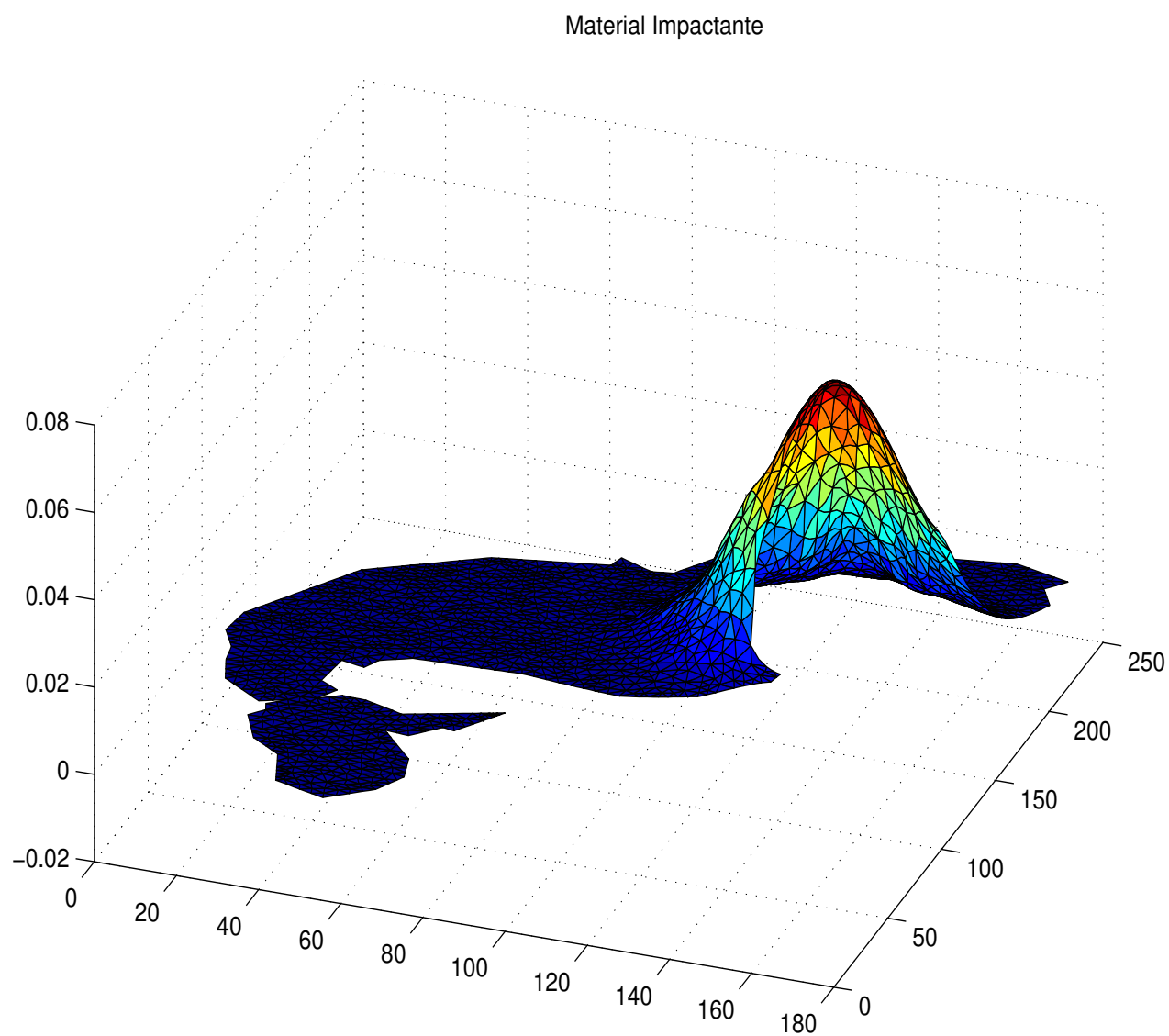


Figura 4.12: Evolução do material impactante – iteração 400.

As figuras 4.13, 4.14 e 4.15 mostram os níveis populacionais das presas e dos predadores na presença do agente tóxico, de diferentes pontos de vista.

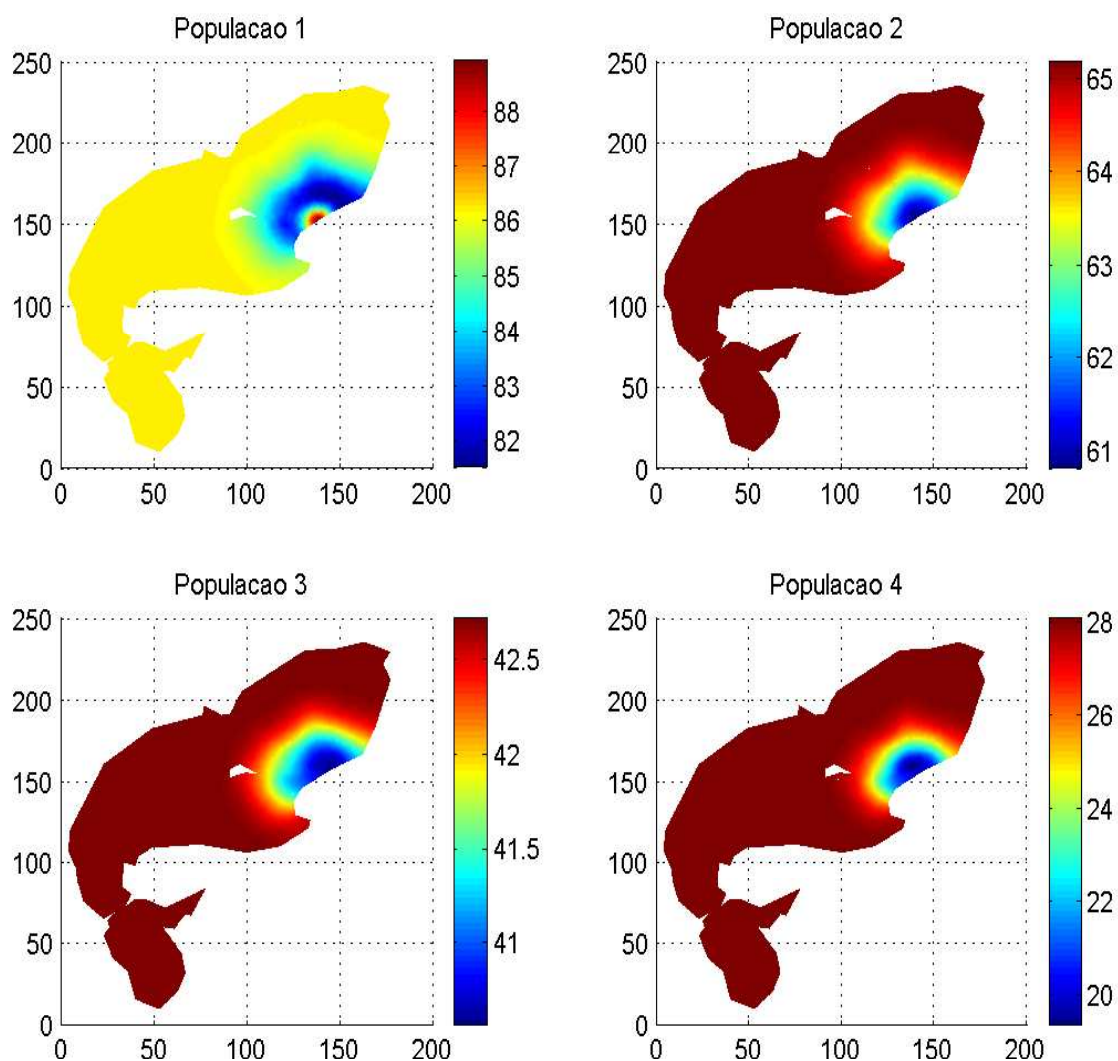


Figura 4.13: Níveis populacionais na presença do agente tóxico – iteração 400.

Para análise visual, a figura 4.14 mostra os níveis populacionais com escalas diferentes e, a título de comparação, a figura 4.15 mostra os mesmos níveis populacionais na mesma escala.

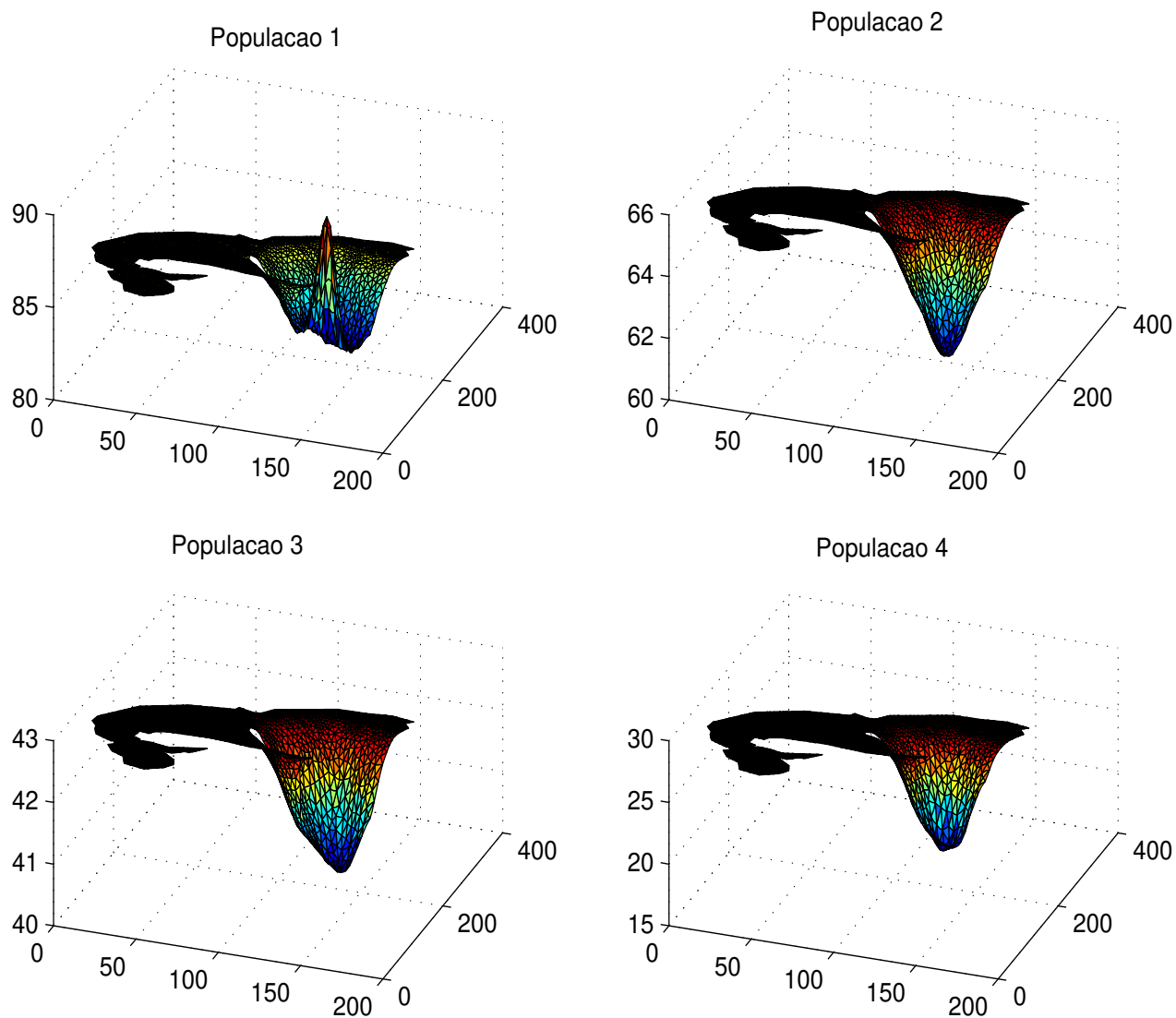


Figura 4.14: Outra visão dos níveis populacionais em escalas diferentes.

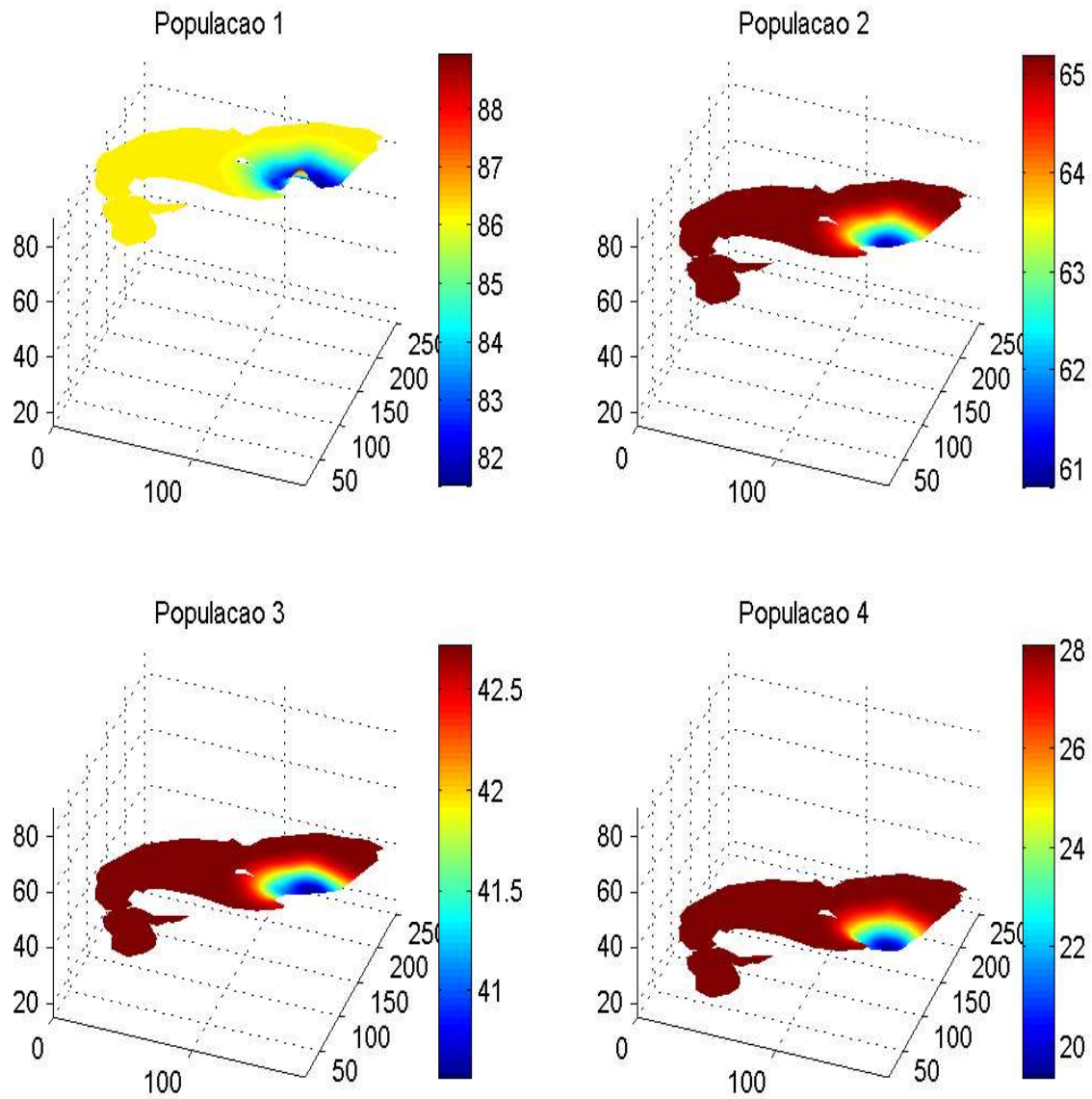


Figura 4.15: Níveis populacionais na mesma escala.

Na figura 4.16 podemos observar o efeito “viajante” do agente tóxico. Após as 400 iterações a população 1 (presa), inicialmente a mais afetada pelo poluente e pelo efeito da predação-competição, começa a se recuperar, atingindo um nível populacional significativamente maior do que aquele anterior ao poluente e seu efeito tóxico. Este comportamento, surpreendente do ponto de vista numérico não o é de uma perspectiva biológica: é como se a população de presas P_1 estivesse se aproveitando do fato de que seu competidor (P_2) ainda se recupera dos efeitos tóxicos, enquanto que as populações de predadores (P_3 e P_4) ainda estão debilitados não só pelo efeito tóxico do poluente, mas também pela redução de níveis populacionais das presas.

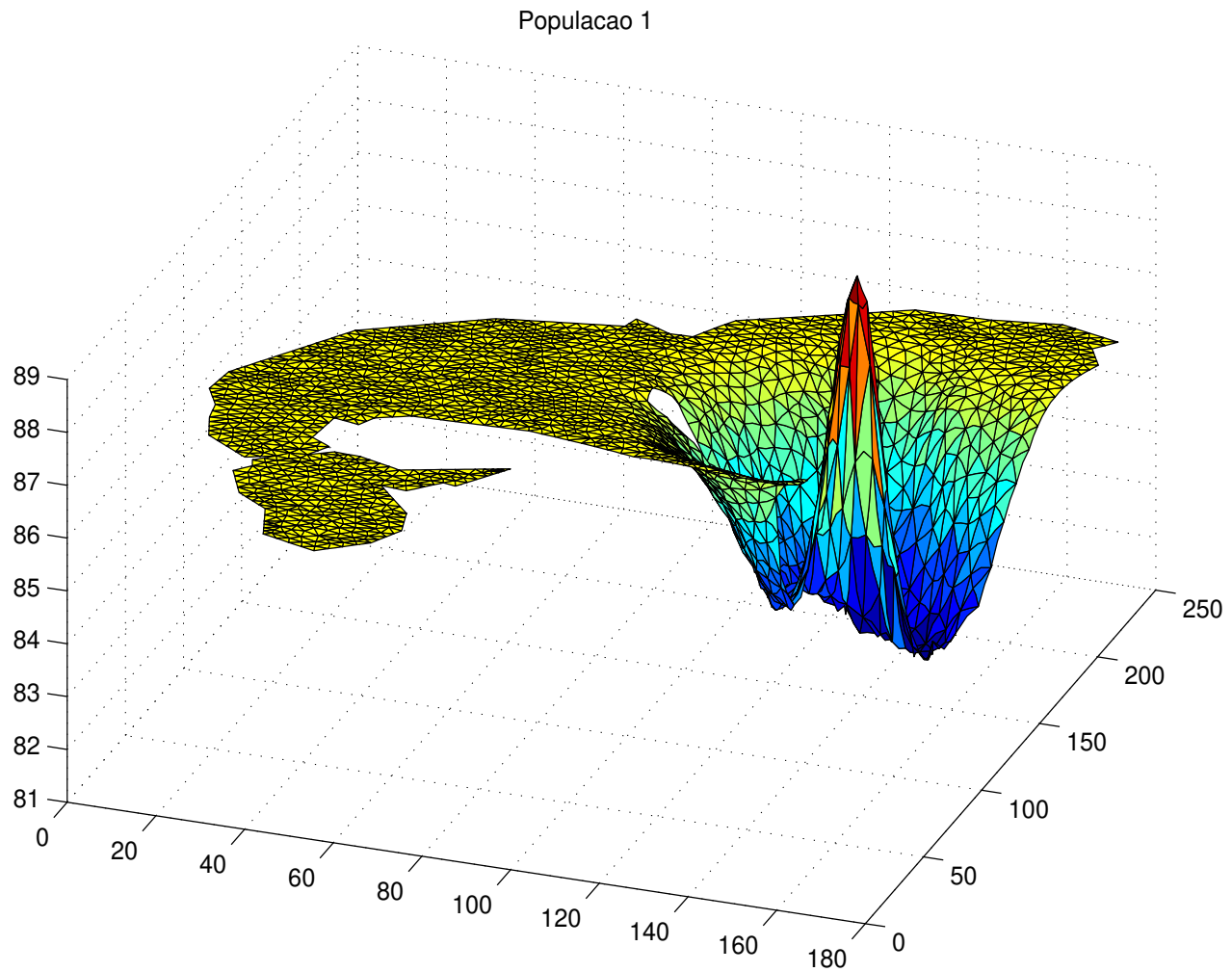


Figura 4.16: Comportamento da população 1 após 400 iterações.

As figuras 4.17 e 4.18 mostram o comportamento evolutivo dos quatro níveis populacionais nos nós #1302 e #2424, agora para 400 iterações. Observamos um comportamento análogo ao das figuras 4.10 e 4.11.

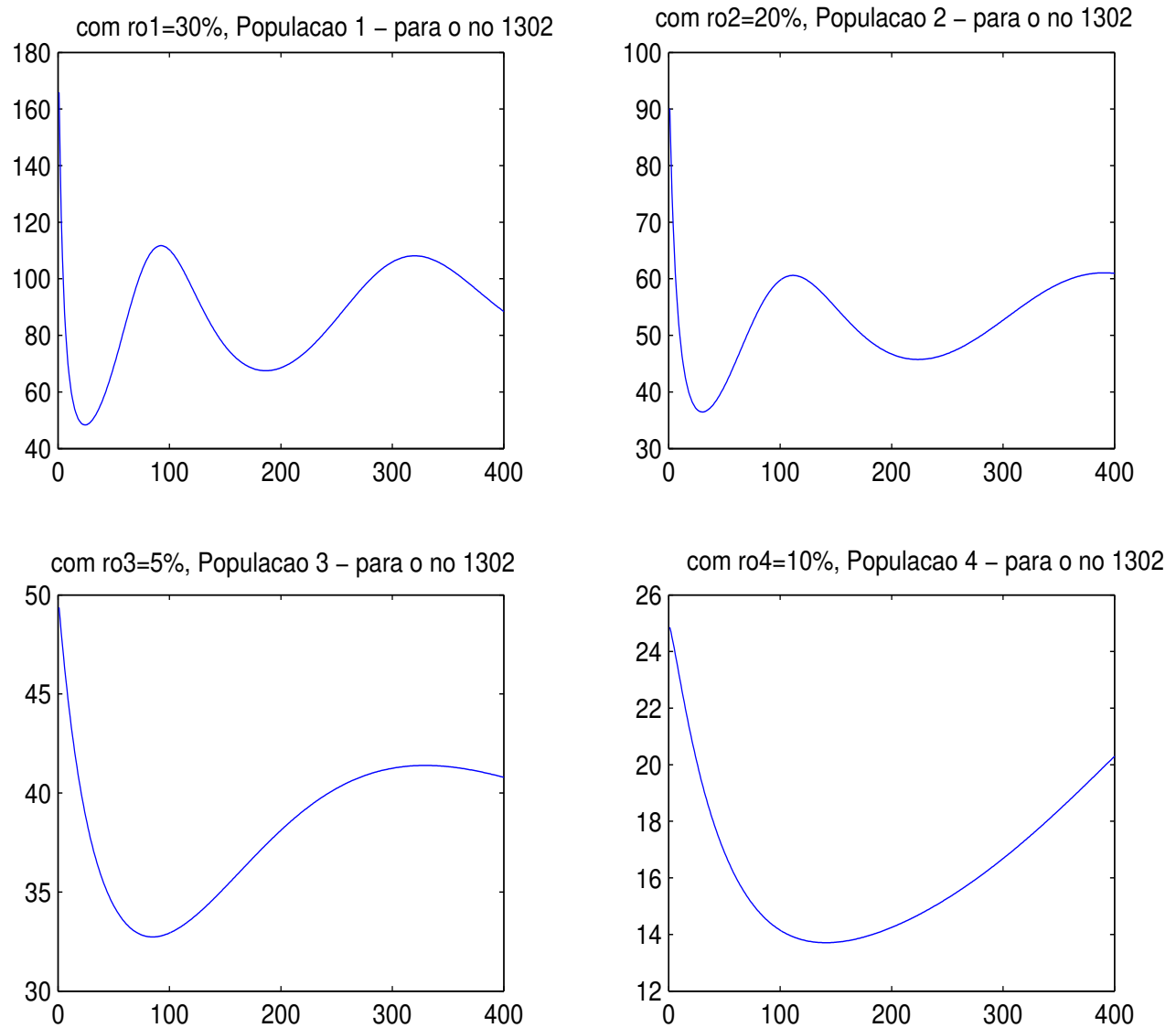


Figura 4.17: Comportamento evolutivo dos níveis populacionais para o nó #1302.

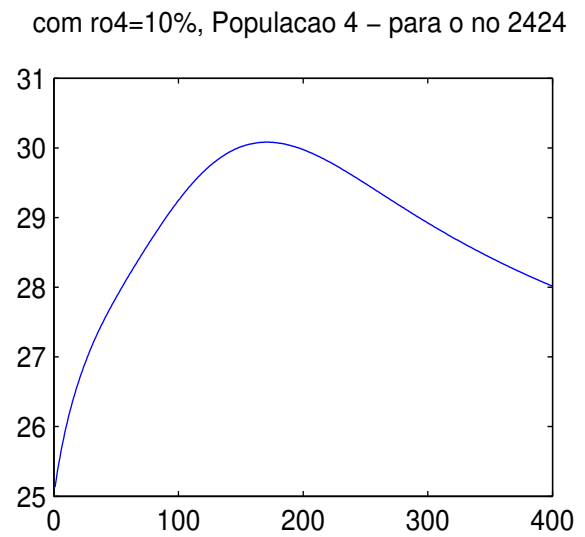
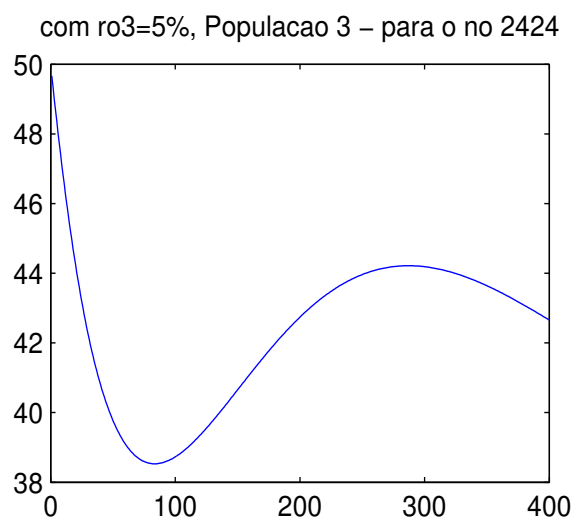
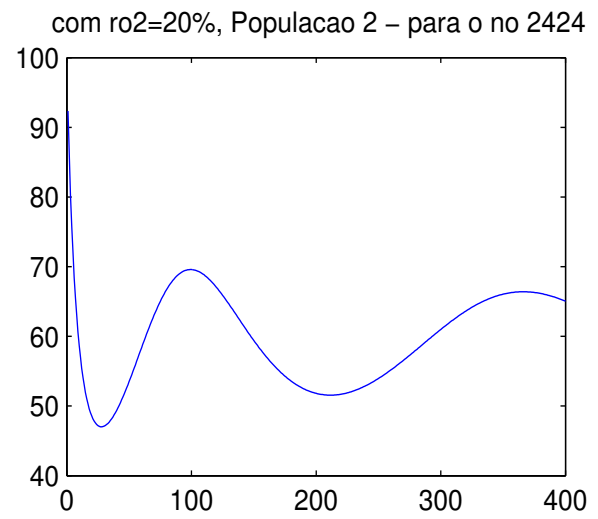
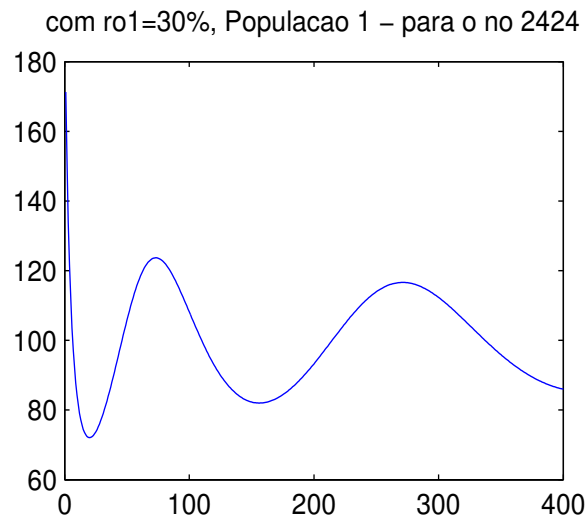


Figura 4.18: Comportamento evolutivo dos níveis populacionais para o nó #2424.

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho visou, em suma, um objetivo múltiplo: introduzir um instrumental a um tempo matemático, algorítmico e computacional que se preste a simulações que, na prática, pudessem contribuir para o estudo de efeitos de impacto ambiental em populações e comunidades que residem, ainda, em regiões menos afetadas de modo irreversível.

Uma primeira consequência pode ser a de fornecer a estudiosos de áreas correlatas um *software* que permita avaliar o efeito de decisões ou estratégias na região estudada ou de características afins, decisões ou estratégias essas que afetam sejam as regiões circunvizinhas agro-industriais, seja as próprias regiões analisadas. Cabe dizer que tanto a modelagem quanto as aproximações algorítmicas e esquemas numéricos transcendem as limitações daquela específica região onde se originou o presente estudo.

São características originais deste trabalho, em primeiro lugar, a combinação de diferentes recursos de modelagem, via sistemas de Equações Diferenciais Parciais. De fato, usamos na modelagem proposta:

- a Equação de Stokes,
- a Equação de Reação-Difusão com Transporte,
- conceitos de Migração-Dispersão e
- a clássica Modelagem de tipo Lotka-Volterra.

Em segundo lugar não temos registro, na literatura disponível de uma combinação que se revelou viável:

- (i) determinação de aproximação confiável de um campo vetorial descritivo do **mapa circulatório**;
- (ii) determinação de aproximação consistente do **transporte advectivo** de material impactante numa determinada região, obtendo, a cada ponto no domínio e a cada instante no tempo, os níveis de material impactante; e, finalmente,
- (iii) determinação de aproximações qualitativamente relevantes das **populações resultantes**, e suas respectivas distribuições no espaço e ao longo do tempo, bem como os efeitos diretos e indiretos do movimento do contaminante sobre as populações-chave que, ainda, interagem entre si.

O algoritmo adotado é descrito em aplicações relativamente mais simples tanto no tocante às dimensões do sistema abordado, quanto às ordens de aproximação. O esquema definido em (3.5.1)-(3.5.4) trabalha com elementos finitos de segunda ordem, produzindo, junto com o Método de Crank-Nicolson, aproximações locais de terceira ordem no espaço e de segunda ordem nas aproximações temporais.

Por um lado é verdade que, dadas suas características bastante pesadas em termos de exigências computacionais (tanto em cálculos efetivos quanto em armazenamentos de informações), os programas vêm exigindo longo tempo de processamento. No entanto, oportunidades de melhoria de desempenho apontam uma primeira direção de trabalho futuro.

Outra oportunidade de trabalho relevante no futuro pode ser a do uso do programa em situações de fato que permitam a calibração de parâmetros do modelo (numa linha de trabalho semelhante à de Kareiva, 1983).

Ainda, aquilo que se convencionou chamar de modo desnecessariamente anglicista de “customização”, ou seja, a adequação do *software* para outros domínios e outras ações interespecíficas, bem como outros efeitos de impacto, se constitui num desafio de certa forma

imediato e bastante viável.

Finalmente cabe-nos enfatizar o resultado numérico obtido que levou a figura 4.16. Em esforços de cooperação com outros grupos de trabalho, situações como aquela que a figura descreve surgem de modo natural como consequência de impacto por produto tóxico.

De fato, pesquisadores da CETESB (Poffo (2000)) descrevem um salto populacional de certas algas, ultrapassando níveis prévios de densidade populacional após a presença de manchas de óleo, níveis prévios estes, em que tais algas conviviam com competidores: cracas marinhas.

Os resultados (e sua expressão gráfica na figura 4.16) são de grande alento para aqueles que se dedicam ao uso deste tipo de instrumental na modelagem de fenômenos ambientais visando o conhecimento, a preservação e estratégia de recuperação para regiões suscetíveis de impacto por ações antrópicas.

Apêndice A

Esquema Computacional

Neste apêndice, é apresentado o esquema computacional utilizado na implementação do método numérico escolhido para as aproximações da solução do problema.

Os arquivos de leitura foram obtidos através de outros programas já citados no texto e os arquivos contendo as submatrizes de rigidez foram obtidos do programa utilizado na resolução do problema proposto no capítulo 1.

```
%  
% Aproximacao de um sistema nao-linear para simular a dispersao  
% de populacional na lagoa de Ibera, tentativa 3  
%  
clear all; t0=clock; format long;  
%  
% parmetros do modelo (carregado via arquivo)  
%  
%load('param.m');  
%      Coeficiente de Difusao de P1, alfa1  
alfa1 = 0.05;  
%      Coeficiente de Difusao de P2, alfa2  
alfa2 = 0.5;  
%      Coeficiente de Difusao de P3, alfa3  
alfa3 = 0.25;  
%      Coeficiente de Difusao de P4, alfa4  
alfa4 = 0.025;  
%      Coeficiente de Difusao do poluente, alfapo  
alfapo = 1;  
%      Decaimento do poluente, decpo  
decpo = 0.01;  
%      Migracao de P1 na direcao do eixo-x, V11
```

```

V11 = 0.0;
%      Migracao de P1 na direcao do eixo-y, V12
V12 = 0.0;
%      Migracao de P2 na direcao do eixo-x, V21
V21 = 0.0;
%      Migracao de P2 na direcao do eixo-y, V22
V22 = 0.0;
%      Migracao de P3 na direcao do eixo-x, V31
V31 = 0.0;
%      Migracao de P3 na direcao do eixo-y, V32
V32 = 0.0;
%      Migracao de P4 na direcao do eixo-x, V41
V41 = 0.0;
%      Migracao de P4 na direcao do eixo-y, V42
V42 = 0.0;
%      Termo de crescimento linear de P1, aa1
aa1 = 0.2;
%      Termo de crescimento linear de P2, aa2
aa2 = 0.15;
%      Termo de crescimento linear de P3, aa3
aa3 = 0.05;
%      Termo de crescimento linear de P4, aa4
aa4 = 0.025;
%      Termo logistico de P1, bb1
bb1 = 0.002;
%      Termo logistico de P2, bb2
bb2 = 0.0025;
%      Termo logistico de P3, bb3
bb3 = 0.00125;
%      Termo logistico de P4, bb4
bb4 = 0.001;
%      Termo de predacao de P3 em P1, c1
c1 = 1e-5;
%      Termo de predacao de P3 em P2, c2
c2 = 2e-5;
%      Termo de predacao de P3 em P1, c3
c3 = 15e-6;
%      Termo de predacao de P4 em P1, c4
c4 = 25e-6;
%      Termo de predacao de P4 em P1, dd1
dd1 = 1e-5;
%      Termo de predacao de P4 em P2, dd2
dd2 = 2e-5;
%      Termo de predacao de P3 em P2, dd3
dd3 = 15e-6;
%      Termo de predacao de P4 em P2, dd4

```

```

dd4 = 25e-6;
%      Termo de competicao de P1 e P2, ee1
ee1 = 5e-6;
%      Termo de competicao de P2 e P1, ee2
ee2 = 4e-6;
%      Termo de competicao de P3 e P4, ee3
ee3 = 3e-6;
%      Termo de competicao de P4 e P3, ee4
ee4 = 1e-5;
%
%  presas sofrendo mais com produto toxico
ro1 = 0.3;
ro2 = 0.2;
%
%  predadores sofrendo menos (aqui, o efeito
%  direto, o efeito indireto ocorre na predacao
ro3 = 0.05;
ro4 = 0.1;
%      Instante final
tmax = 100;
%      Numero maximo de iteracoes, it
itmax = 250;
%      Intervalo de tempo, dt
dt = tmax/itmax;
%      No. do no para arq. separado
nOP = 2424;
%      No. total de nos
ntn = 6853;
%      No. total de triangulos
ntt = 3297;
%      No. de nos por triangulo
nnt = 6;
%
% malha de elementos finitos (carregado via arquivo)
%
load malha.m
%
%  carregando o arquivo de Coordenadas dos nos
%
load coord.m
%
%  carregando o arquivo de Stokes
%
load rstok.m
%
load SMFI.m

```

```

load SMG1.m
load SMDx.m
load SMDy.m
load SMG2.m
load SMG3.m
load SMTRI1.m
load SMTRI2.m
load SMTRI3.m
load SMTRI4.m
load SMTRI5.m
load SMTRI6.m
load SMAT11.m
load SMAT12.m
load SMAT13.m
load SMAT14.m
load SMAT15.m
load SMAT16.m
load SMAT21.m
load SMAT22.m
load SMAT23.m
load SMAT24.m
load SMAT25.m
load SMAT26.m
%
% condio inicial
%
%u0 = zeros(ntn,1);

fprintf(1,'Dados iniciais\n');

U1 = 200.0 * ones( ntn, 1 );
U2 = 100.0 * ones( ntn, 1 );
U3 = 50.0*ones( ntn, 1 );
U4 = 25.0*ones( ntn, 1 );
U5 = 0.0*ones( ntn, 1 );
U5(899)=0.125; U5(900)=0.125; U5(1821)=0.125;
U5(1822)=0.125; U5(1823)=0.125; U5(478)=0.125;
%
U5(899)=0.125; U5(898)=0.125; U5(1851)=0.125;
U5(1852)=0.125; U5(1823)=0.125; U5(478)=0.125;
%
U5(1690)=0.125; U5(900)=0.125; U5(6762)=0.125;
U5(1822)=0.125; U5(5309)=0.125; U5(478)=0.125;
%
% preparacao dos parametros que independem das coordenadas
%
```

```

fprintf(1,'Parametros\n');

mdt = dt/2;
    dif1=alfa1*mdt;
    vmig11=mdt*V11;
    vmig12=mdt*V12;
    vlogis1=bb1*mdt;
    vpresa13=c1*mdt;
    vpresa14=dd1*mdt;
    vcomp12=ee1*mdt;
    dif2=alfa2*mdt;
    vmig21=mdt*V21;
    vmig22=mdt*V22;
    vlogis2=bb2*mdt;
    vpresa23=c2*mdt;
    vpresa24=dd2*mdt;
    vcomp21=ee2*mdt;
    dif3=alfa3*mdt;
    vmig31=mdt*V31;
    vmig32=mdt*V32;
    vlogis3=bb3*mdt;
    vpred31=-c3*mdt;
    vpred32=-dd3*mdt;
    vcomp34=ee3*mdt;
    dif4=alfa4*mdt;
    vmig41=mdt*V41;
    vmig42=mdt*V42;
    vlogis4=bb4*mdt;
    vpred41=-c4*mdt;
    vpred42=-dd4*mdt;
    vcomp43=ee4*mdt;

%
%   calculo do Jacobiano e das funcoes h1, h2 e h3
%

fprintf(1,'Jacobianas\n');

Jac = zeros(ntt,4);
p = zeros(ntt,6);
for ind=1:ntt
    for iel=1:nnnt
        iloc = malha(ind,iel);
        x(iel)= coord(iloc,1);
        y(iel)= coord(iloc,2);
    end;
end;

```

```

p(ind,:) = [x(3)-x(1), y(5)-y(1), x(5)-x(1), ...
            y(3)-y(1), x(2)-x(1), y(2)-y(1) ];

Jac(ind,:) = [ p(ind,1)*p(ind,2)-p(ind,3)*p(ind,4), ...
               p(ind,2)*p(ind,2)+p(ind,3)*p(ind,3), ...
               p(ind,4)*p(ind,4)+p(ind,1)*p(ind,1), ...
               p(ind,2)*p(ind,4)+p(ind,1)*p(ind,3)];

Jac(ind,2:4) = Jac(ind,2:4) / Jac(ind,1);
end;
%
% montagem das matrizes do sistema
%
A1 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
B1 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
A2 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
B2 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
A3 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
B3 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
A4 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
B4 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
A5 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
B5 = sparse([],[],[],ntn,ntn,ntn*15);
%
% abrindo as janelas para os graficos
%
for it = 1:itmax
    fprintf('Iteracao %d\n', it);
%
% Construcao do sigma = poluente --- Mateus
%

V51 = rstok(:,1);
V52 = rstok(:,2);

dec1=1+decpo*mdt;
dec2=1-decpo*mdt;
dif=alfapo*mdt;

for ind=1:ntt
    for i=1:nnt
        IGi=malha(ind,i);
        STR2= 0;
        STR3= 0;
        for j=1:nnt
            JGj=malha(ind,j);

```

```

        STR2 = (p(ind,2)*SMAT21(i,j)-p(ind,4)*SMAT11(i,j))*V51(malha(ind,1))+...
        (p(ind,2)*SMAT22(i,j)-p(ind,4)*SMAT12(i,j))*V51(malha(ind,2))+...
        (p(ind,2)*SMAT23(i,j)-p(ind,4)*SMAT13(i,j))*V51(malha(ind,3))+...
        (p(ind,2)*SMAT24(i,j)-p(ind,4)*SMAT14(i,j))*V51(malha(ind,4))+...
        (p(ind,2)*SMAT25(i,j)-p(ind,4)*SMAT15(i,j))*V51(malha(ind,5))+...
        (p(ind,2)*SMAT26(i,j)-p(ind,4)*SMAT16(i,j))*V51(malha(ind,6));

        STR3 = (p(ind,1)*SMAT11(i,j)-p(ind,3)*SMAT21(i,j))*V52(malha(ind,1))+...
        (p(ind,1)*SMAT12(i,j)-p(ind,3)*SMAT22(i,j))*V52(malha(ind,2))+...
        (p(ind,1)*SMAT13(i,j)-p(ind,3)*SMAT23(i,j))*V52(malha(ind,3))+...
        (p(ind,1)*SMAT14(i,j)-p(ind,3)*SMAT24(i,j))*V52(malha(ind,4))+...
        (p(ind,1)*SMAT15(i,j)-p(ind,3)*SMAT25(i,j))*V52(malha(ind,5))+...
        (p(ind,1)*SMAT16(i,j)-p(ind,3)*SMAT26(i,j))*V52(malha(ind,6));

        STR2 = STR2*mdt;
        STR3 = STR3*mdt;

        SME5=dec1*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)+dif*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
        Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))+ STR2 + STR3;
%
%   MATRIZ A5
%
        A5(IGi,JGj)= A5(IGi,JGj)+ SME5;

        SMD5=dec2*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)-dif*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
        Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))- STR2 - STR3;
%
%   MATRIZ B5
%
        B5(IGi,JGj)= B5(IGi,JGj)+ SMD5;

% fechar os loops ateh o ind;
        end;
        end;
        end;
%
%   Resolve o sistema p/ Populacao 5
%
% [lp up]=lu(A5);
%         inter=lp
%         S5 = lp\ (B5*U5);
%         U5 = up\S5;

        U5 = A5 \ ( B5 * U5 );
        U5 = U5 / norm(U5);

```

```

for ind=1:ntt
    sigg = (U5(malha(ind,1)) + U5(malha(ind,2)) + U5(malha(ind,3)) + ...
    U5(malha(ind,4)) + U5(malha(ind,5)) + U5(malha(ind,6)))/6;
    dpres1(ind) = 1+(ro1*sigg-aa1)*mdt;
    dprdi1(ind) = 1-(ro1*sigg-aa1)*mdt;
    dpres2(ind) = 1+(ro2*sigg-aa2)*mdt;
    dprdi2(ind) = 1-(ro2*sigg-aa2)*mdt;
    dpredes3(ind) = 1+(ro3*sigg-aa3)*mdt;
    dpredi3(ind) = 1-(ro3*sigg-aa3)*mdt;
    dpredes4(ind) = 1+(ro4*sigg-aa4)*mdt;
    dpredi4(ind) = 1-(ro4*sigg-aa4)*mdt;
end;

for itint=1:2
    for ind=1:ntt
        for i=1:nnt
            IGi=malha(ind,i);
            for j=1:nnt
                JGj=malha(ind,j);
                STR11 = SMTRI1(i,j)*U1(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U1(malha(ind,2))+...
                SMTRI3(i,j)*U1(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U1(malha(ind,4))+...
                SMTRI5(i,j)*U1(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U1(malha(ind,6));
                STR12 = SMTRI1(i,j)*U2(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U2(malha(ind,2))+...
                SMTRI3(i,j)*U2(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U2(malha(ind,4))+...
                SMTRI5(i,j)*U2(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U2(malha(ind,6));
                STR13 = SMTRI1(i,j)*U3(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U3(malha(ind,2))+...
                SMTRI3(i,j)*U3(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U3(malha(ind,4))+...
                SMTRI5(i,j)*U3(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U3(malha(ind,6));
                STR14 = SMTRI1(i,j)*U4(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U4(malha(ind,2))+...
                SMTRI3(i,j)*U4(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U4(malha(ind,4))+...
                SMTRI5(i,j)*U4(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U4(malha(ind,6));

                SME1=dpres1(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j) + dif1*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
                Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))+vmig11*(p(ind,2)*SMDx(i,j)-...
                p(ind,4)*SMDy(i,j))+ vmig12*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-p(ind,3)*SMDx(i,j))+ ...
                vlogis1*Jac(ind,1)*STR11+vpresa13*Jac(ind,1)*STR13+...
                vpresa14*Jac(ind,1)*STR14+vcomp12*Jac(ind,1)*STR12;

                %
                %   MATRIZ A1:
                %

                A1(IGi,JGj)= A1(IGi,JGj)+ SME1;

                SMD1=dprdi1(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)-dif1*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
                Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))-vmig11*(p(ind,2)*...
                SMDx(i,j)-p(ind,4)*SMDy(i,j))-vmig12*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-...
                p(ind,3)*SMDx(i,j))-vlogis1*Jac(ind,1)*STR11-vpresa13*...

```

```

        Jac(ind,1)*STR13-vpresa14*Jac(ind,1)*STR14-vcomp12*Jac(ind,1)*STR12;
%
%   MATRIZ B1:
%
        B1(IGi,JGj)= B1(IGi,JGj)+ SMD1;

% fechar os loops ateh o ind;
        end;
        end;
end;

%
%   Resolve o sistema p/ Populacao 1
%
%           [lp up]=lu(A1);
%           S1 = lp\(B1*U1);
%           U1 = up\S1;
%   U1 = A1 \ ( B1*U1 );
%
%   repete o loop do ind p/ A2
%
for ind=1:ntt
    for i=1:nnt
        IGi=malha(ind,i);
        for j=1:nnt
            JGj=malha(ind,j);
            STR11 = SMTRI1(i,j)*U1(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U1(malha(ind,2))+...
SMTRI3(i,j)*U1(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U1(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U1(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U1(malha(ind,6));
            STR12 = SMTRI1(i,j)*U2(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U2(malha(ind,2))+...
SMTRI3(i,j)*U2(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U2(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U2(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U2(malha(ind,6));
            STR13 = SMTRI1(i,j)*U3(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U3(malha(ind,2))+...
SMTRI3(i,j)*U3(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U3(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U3(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U3(malha(ind,6));
            STR14 = SMTRI1(i,j)*U4(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U4(malha(ind,2))+...
SMTRI3(i,j)*U4(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U4(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U4(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U4(malha(ind,6));

            SME2=dpres2(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)+dif2*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))+vmig21*(p(ind,2)*SMDx(i,j)-...
p(ind,4)*SMDy(i,j))+vmig22*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-p(ind,3)*SMDx(i,j))+...
vlogis2*Jac(ind,1)*STR12+vpresa23*Jac(ind,1)*STR13+vpresa24*...
Jac(ind,1)*STR14+vcomp21*Jac(ind,1)*STR11;
%
%   MATRIZ A2:

```

```

%
    A2(IGi,JGj)= A2(IGi,JGj)+ SME2;

    SMD2=dprdi2(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)-dif2*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
    Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))-vmig21*(p(ind,2)*SMDx(i,j)-...
    p(ind,4)*SMDy(i,j))-vmig22*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-p(ind,3)*SMDx(i,j))-...
    vlogis2*Jac(ind,1)*STR12-vpresa23*Jac(ind,1)*STR13-vpresa24*...
    Jac(ind,1)*STR14-vcomp21*Jac(ind,1)*STR11;
%
%   MATRIZ B2:
%
    B2(IGi,JGj)= B2(IGi,JGj)+ SMD2;

% fechar os loops ateh o ind;
    end;
    end;
end;
%
%   Resolve o sistema p/ Populacao 2
%
%       [lp up]=lu(A2);
%       S2 = lp\ (B2*U2);
%       U2 = up\S2;
U2 = A2 \ ( B2 * U2 );
%
%   repete o loop do ind p/ A3
%
for ind=1:ntt
    for i=1:nnt
        IGi=malha(ind,i);
        for j=1:nnt
            JGj=malha(ind,j);
            STR11 = SMTRI1(i,j)*U1(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U1(malha(ind,2))+...
            SMTRI3(i,j)*U1(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U1(malha(ind,4))+...
            SMTRI5(i,j)*U1(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U1(malha(ind,6));
            STR12 = SMTRI1(i,j)*U2(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U2(malha(ind,2))+...
            SMTRI3(i,j)*U2(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U2(malha(ind,4))+...
            SMTRI5(i,j)*U2(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U2(malha(ind,6));
            STR13 = SMTRI1(i,j)*U3(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U3(malha(ind,2))+...
            SMTRI3(i,j)*U3(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U3(malha(ind,4))+...
            SMTRI5(i,j)*U3(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U3(malha(ind,6));
            STR14 = SMTRI1(i,j)*U4(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U4(malha(ind,2))+...
            SMTRI3(i,j)*U4(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U4(malha(ind,4))+...
            SMTRI5(i,j)*U4(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U4(malha(ind,6));

```

```

        SME3 =dpredes3(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)+dif3*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))+vmig31*(p(ind,2)*SMDx(i,j)-...
p(ind,4)*SMDy(i,j))+vmig32*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-p(ind,3)*SMDx(i,j))+...
vlogis3*Jac(ind,1)*STR13+vpred31*Jac(ind,1)*STR11+vpred32*...
Jac(ind,1)*STR12+vcomp34*Jac(ind,1)*STR14;

%
%   MATRIZ A3:
%
        A3(IGi,JGj)= A3(IGi,JGj)+ SME3;

        SMD3=dpredi3(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)-dif3*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))-vmig31*(p(ind,2)*SMDx(i,j)-...
p(ind,4)*SMDy(i,j))-vmig32*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-p(ind,3)*SMDx(i,j))-...
vlogis3*Jac(ind,1)*STR13-vpred31*Jac(ind,1)*STR11-vpred32*...
Jac(ind,1)*STR12-vcomp34*Jac(ind,1)*STR14;

%
%   MATRIZ B3:
%
        B3(IGi,JGj)= B3(IGi,JGj)+ SMD3;

% fechar os loops ateh o ind;
        end;
        end;
    end;

%
%   Resolve o sistema p/ Populacao 3
%
        [lp up]=lu(A3);
        S3 = lp\(B3*U3);
        U3 = up\S3;
    U3 = A3 \ ( B3 * U3 );

%
%   repete o loop do ind p/ A4
%
    for ind=1:ntt
        for i=1:nnt
            IGi=malha(ind,i);
            for j=1:nnt
                JGj=malha(ind,j);
                STR11 = SMTRI1(i,j)*U1(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U1(malha(ind,2))+...
SMTRI3(i,j)*U1(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U1(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U1(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U1(malha(ind,6));
                STR12 = SMTRI1(i,j)*U2(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U2(malha(ind,2))+...
SMTRI3(i,j)*U2(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U2(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U2(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U2(malha(ind,6));
                STR13 = SMTRI1(i,j)*U3(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U3(malha(ind,2))+...

```

```

SMTRI3(i,j)*U3(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U3(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U3(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U3(malha(ind,6));
    STR14 = SMTRI1(i,j)*U4(malha(ind,1))+SMTRI2(i,j)*U4(malha(ind,2))+...
SMTRI3(i,j)*U4(malha(ind,3))+SMTRI4(i,j)*U4(malha(ind,4))+...
SMTRI5(i,j)*U4(malha(ind,5))+SMTRI6(i,j)*U4(malha(ind,6));

    SME4 =dpredes4(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)+dif4*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))+vmig41*(p(ind,2)*SMDx(i,j)-...
p(ind,4)*SMDy(i,j))+vmig42*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-p(ind,3)*SMDx(i,j))+...
vlogis4*Jac(ind,1)*STR14+vpred41*Jac(ind,1)*STR11+vpred42*...
Jac(ind,1)*STR12+vcomp43*Jac(ind,1)*STR13;

%
%   MATRIZ A4:
%
    A4(IGi,JGj)= A4(IGi,JGj)+ SME4;

    SMD4=dpredi4(ind)*Jac(ind,1)*SMFI(i,j)-dif4*(Jac(ind,2)*SMG1(i,j)+...
Jac(ind,3)*SMG2(i,j)-Jac(ind,4)*SMG3(i,j))-vmig41*(p(ind,2)*SMDx(i,j)-...
p(ind,4)*SMDy(i,j))-vmig42*(p(ind,1)*SMDy(i,j)-p(ind,3)*SMDx(i,j))-...
vlogis4*Jac(ind,1)*STR14-vpred41*Jac(ind,1)*STR11-vpred42*...
Jac(ind,1)*STR12-vcomp43*Jac(ind,1)*STR13;

%
%   MATRIZ B4:
%
    B4(IGi,JGj)= B4(IGi,JGj)+ SMD4;

% fechar os loops ateh o ind;
    end;
    end;
end;

%
%   Resolve o sistema p/ Populacao 4
%
    [lp up]=lu(A4);
    S4 = lp\(B4*U4);
    U4 = up\S4;
    U4 = A4 \ ( B4 * U4 );
end;
ver(it,1) = U1(nOP); ver(it,2) = U2(nOP); ver(it,3) = U3(nOP);
-ver(it,4) = U4(nOP);

%
%   montagem do grafico para a primeira iteracao
%
if it==50
figure(1);

```

```

subplot(2,2,1)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U1),title('Populacao 1'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,2)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U2),title('Populacao 2'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,3)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U3),title('Populacao 3'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,4)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U4),title('Populacao 4'),view(0,90),colorbar;
end;
%
%   montagem do grafico para as iteracoes seguintes
%
if it==125
figure(2);
subplot(2,2,1)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U1),title('Populacao 1'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,2)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U2),title('Populacao 2'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,3)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U3),title('Populacao 3'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,4)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U4),title('Populacao 4'),view(0,90),colorbar;
end;
if it==200
figure(3);
subplot(2,2,1)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U1),title('Populacao 1'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,2)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U2),title('Populacao 2'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,3)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U3),title('Populacao 3'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,4)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U4),title('Populacao 4'),view(0,90),colorbar;
end;
if it==250
figure(4);
subplot(2,2,1)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U1),title('Populacao 1'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,2)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U2),title('Populacao 2'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,3)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U3),title('Populacao 3'),view(0,90),colorbar;
subplot(2,2,4)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),U4),title('Populacao 4'),view(0,90),colorbar;
end;
end;

```

```
figure(5)
subplot(2,2,1)
plot(ver(:,1)),title('com ro1=30%, Populacao 1 - para o no 2424');
subplot(2,2,2)
plot(ver(:,2)),title('com ro2=20%, Populacao 2 - para o no 2424');
subplot(2,2,3)
plot(ver(:,3)),title('com ro3=5%, Populacao 3 - para o no 2424');
subplot(2,2,4)
plot(ver(:,4)),title('com ro4=10%, Populacao 4 - para o no 2424');

etime(clock,t0)
```

Bibliografia

- Allegretto, W., Xie, H., Yang, S., 1997. Properties of solutions for a chemotaxis system. *J. Math. Biology* 35, 949–966.
- Auger, C., Poggiale, J. C., 1996. Emergence of population growth models: Fast migration and slow growth. *J. Theor. Biology* 182, 99–108.
- Azar, C., 1995. Stability analisys of harvesting in a predador-prey model. *J. Theor. Biology* 174, 13–19.
- Bernardes, M., 1998. Poluição em corpos aquáticos de baixa circulação: Modelagem e simulação numérica. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Bozhkov, Y. D., 2003. Comunicação pessoal – a aparecer.
- Buffoni, G., Griffa, A., Li, Z., Mottoni, P., 1995. Spatially distributed communities: the resource-consumer system. *J. Math. Biology* 33, 723–743.
- Cantão, R. F., 1998. Modelagem e simulação numérica de derrames de óleo no canal de São Sebastião, SP. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Cantão, R. F., D’Afonseca, L. A., 1998. Produção interna do grupo de Biomatemática em Matlab, software em Matlab, IMECC – UNICAMP.
- Cantrell, R. S., Cosner, C., 1989. Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments. *Proceedings of Royal Society of Edinburgh* 112A, 293–318.
- Cantrell, R. S., Cosner, C., 1996a. Models for predator-prey systems at multiple scales. *SIAM Review, Society for Industrial and Applied Mathematics* 38 (2), 256–286.

- Cantrell, R. S., Cosner, C., 1996b. Pratical persistence in ecological models via comparison methods. *Proceedings of Royal Society of Edinburgh* 126A, 247–272.
- Cantrell, R. S., Cosner, C., 1996c. Spatially explicity models for the population dynamics of a species colonizing an island. *Math. Biosciences* 136, 65–107.
- Cantrell, R. S., Cosner, C., 1998. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. *J. Math. Biology* 37, 103–145.
- Cantrell, R. S., Ward Jr., J. R., 1997. On competition-mediated coexistence. *SIAM J. Appl. Math.* 57 (5), 1311–1327.
- Carl, E. A., 1971. Population control in arctic ground squirrels. *Ecology* 52, 395–413.
- Carnahan, B., Luther, H. A., Wilkes, J. O., 1969. *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, New York.
- Choudhury, S. R., 1994a. Turing instability in competion models with delay 1: linear theory. *SIAM J. Appl. Math.* 54 (5), 1425–1450.
- Choudhury, S. R., 1994b. Turing instability in competion models with delay 2: nonlinear theory. *SIAM J. Appl. Math.* 54 (5), 1451–1467.
- Commission of European Communities, 1991. Water pollution research report 27: Pesticides in ground and drinking water, lecture Notes of Directorate General for Science, Research and Development.
- Cosner, C., 1996. Variability, vagueness and comparison methods for ecological models. *Bull. of Math. Biology* 58 (2), 207–246.
- Ding, D.-F., 1992. Bifurcation analisys of a nonlinear field model of regeneration. *J. Math. Biology* 30, 355–377.
- Diniz, G. L., 1994. A mudança no habitat de populações de peixes: De rio a represa - o modelo matemático. *Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP*.
- Diniz, G. L., 2003. Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações. *Tese de Doutorado, FEEC – UNICAMP, Campinas/SP*.

- Douglas Jr., J., Dupont, T., Ewing, R. E., 1979. Incomplete iteration for time-stepping a galerkin method for a quasi-linear parabolic-problem. *SIAM J. Numerical Analysis* 16, 503–522.
- Dubey, B., 1997. Modelling the depletion and conservation of resources: effects of two interacting populations. *Ecological Modelling* 101, 123–136.
- Edelstein-Keshet, L., 1986. Mathematical theory of plant-herbivore systems. *J. Math. Biology* 24, 25–58.
- European Union INCO Project ERB3514PL97297, 2003. The sustainable management of wetland resources in Mercosur, CD-ROM.
- Gourley, S. A., Bartuccelli, M. V., 1997. Parameter domains for instability of uniform states in systems with many delays. *J. Math. Biology* 35, 843–867.
- Gourley, S. A., Britton, N. F., 1996. A predator-prey reaction-diffusion system with non-local effects. *J. Math. Biology* 34, 297–333.
- Gourley, S. A., Britton, N. F., Chaplain, M. A. J., Byrne, H. M., 1996. Mechanisms for stabilization of systems of reaction-diffusion equations. *J. Math. Biology* 34, 857–877.
- Gurney, W. S. C., Nisbet, R. M., 1975. The regulation of inhomogeneous populations. *J. Theor. Biol.* 52, 441–457.
- Gurtin, M. E., MacCamy, R., 1977. On the diffusion of biological populations. *Math. Biosciences* 33, 35–49.
- Hadler, K. P., Heiden, U. A. D., Roth, F., 1974. Nonhomogeneous distribution of populations. *J. Math. Biology* 1, 165–175.
- Hernández, G. E., 1998. Age-density dependent population dispersal in r^n . *Math. Biosciences* 149, 37–56.
- Hirano, N., Naito, K., 1983. On the asymptotic behavior of solutions of a reaction-diffusion system. *J. Math. Anal. Appl.* 95, 335–343.

- Ikeda, T., Mimura, M., 1993. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. *J. Math. Biology* 31, 215–240.
- Jensen, A. L., 1996. A process model for food competition. *Ecological Modelling* 87, 01–09.
- Johnson, C., 1987. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Cambridge University Press, New York.
- Kardestuncer, H., Norrie, D. H., 1987. Finite Element Handbook. McGraw-Hill, New York.
- Kareiva, P. M., 1983. Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecologia* 57, 332–327.
- Keitt, T. H., Johnson, R., 1995. Spatial heterogeneity and anomalous kinetics: emergent patterns in diffusion-limited predatory-prey interaction. *J. Theor. Biology* 172, 127–139.
- King, A. A., 1996. Weakly dissipative predator-prey systems. *Bull. of Math. Biology* 58 (5), 835–859.
- Kohlmeier, C., Edenhoh, W., 1995. The stabilizing role of cannibalism in a predator-prey system. *Bull. of Math. Biology* 57 (3), 401–411.
- Lacaz, T. M. V. S., 1998. Análises de problemas populacionais intraespecíficos e interespecíficos com difusão densidade-dependente. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP, Brasil.
- Meyer, J. F. C. A., 1988. Modelagem e simulação numérica do transiente térmico em meios compostos. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP, Brasil.
- Milner, F., Rabbiolo, G., 1992. Rapidly converging numerical algorithms for models of population dynamics. *J. Math. Biology* 30, 733–753.
- Momo, F., Sastre, P., 1999. Cadeia trófica, comunicação pessoal – a aparecer.
- Moreira, H. N., Yuquan, W., 1997. Global stability in a class of competitive cubic systems. *Ecological Modelling* 102, 273–285.
- Newson, R., 1995. A canonical model for production and distribution of root mass in space and time. *J. Math. Biology* 33, 477–488.

- Ngwa, G. A., Maini, P. K., 1995. Spatial-temporal patterns in a mechanical model for mesenchymal morphogenesis. *J. Math. Biology* 33, 489–520.
- Nisbet, R. M., Gurney, W. S. C., 1982. *Modelling Fluctuating Populations*. John Wiley and Sons Ltd.
- Oliveira, R. F. D., 2003. O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande/RJ: modelagem, análise numérica e simulações. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Peyret, R., Taylor, T. D., 1985. *Computacional Methods for Fluid Flow*. Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin.
- Poffo, I. R. F., 2000. Vazamentos de óleo no litoral norte do estado de São Paulo: análise histórica. Tese de Doutorado, USP, São Paulo/SP, Brasil.
- Pregolatto, S. A., 2002. Mal-das-cadeiras em capivaras: Estudo, modelagem e simulação de um caso. Tese de Doutorado, FEEC – UNICAMP, Campinas/SP, Brasil.
- Rachford, H. H., 1973. Two-level discrete-time galerkin approximations for second-order non-linear parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numerical Analysis* 06, 1010–1026.
- Rascle, M., Zitti, C., 1995. Finite time blow-up in some models of chemotaxis. *J. Math. Biology* 33, 388–414.
- Raychaudhuri, S., Sinha, D. K., J, C., 1996. Effect of tim-varying cross-diffusivity in a two-species Lotka-Volterra competitive system. *Ecological Modelling* 92, 55–64.
- Rothe, F., Mottoni, P., 1979. A simple system of reaction-diffusion equations describing morphogenesis: asymptotic behavior. *Annali di Matematica pura e applicata* 122, 141–152.
- Ruuth, S. J., 1995. Implicit-explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation. *J. Math. Biology* 34, 148–176.
- Shewchuck, J. R., 2002. Software triangle, versão 1.4, url: <http://www-2.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/project/quake/public/www/triangle.html>.
- Skellam, J. C., 1951. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* 38, 196–218.

- Sossae, R. C., 1995. Dinâmica populacional densidade-dependente em processos de dispersão e migração. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP, Brasil.
- Sossae, R. C., Meyer, J. F. C. A., Loiselle, S., Rossi, C., 1999. Mathematical modeling and numerical simulation of space-dependent multispecies interactions. *Annals of the New York Academy of Sciences* 879, 440–443.
- Tayasú, I., Shigesada, N., Mukai, H., Caswell, H., 1996. Predator-mediated coexistence of epiphytic grass shrimps that compete for refuges. *Ecological Modelling* 84, 01–10.
- Timm, U., Okubo, A., 1992. Diffusion-driven instability in a predator-prey system with time-varying diffusivities. *J. Math. Biology* 30, 307–320.
- Van den Bosch, F., Gabriel, W., 1997. Cannibalism in an age-structured predator-prey system. *Bull. of Math. Biology* 59, 551–567.
- Wilder, J. W., Christie, I., Colbert, J. J., 1995. Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of forest pests and their management. *Ecological Modelling* 82, 287–298.
- Wolkind, D. J., Collings, J. B., Barba, M. C. B., 1991. Diffusive instabilities in a one-dimensional temperature-dependent model system for a mite predator-prey interaction on fruit trees: dispersal motility and aggregative prey-taxis effects. *J. Math. Biology* 29, 339–362.
- Wu, H., Stoker, R. L., Gao, L., 1996. A modified Lotka-Volterra simulation model to study the interaction between arrow bamboo (*Sinarundinaria fangiana*) and giant panda (*Ailuropoda melanoleuca*). *Ecological Modelling* 84, 11–17.