

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Dissertação de Mestrado

Simulações de Modelos Epidemiológicos Utilizando os Sistemas P-Fuzzy

Por

Antonio Magno Barros

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr João de Deus Mendes da Silva

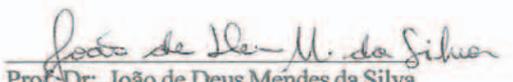
Campinas – SP

2009

SIMULAÇÕES DE MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS
UTILIZANDO OS SISTEMAS P-FUZZY

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Antonio Magno Barros** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de dezembro de 2009


Prof. Dr.: João de Deus Mendes da Silva
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr.: João de Deus Mendes da Silva.
Prof. Dr.: Rodney Carlos Bassanezi.
Prof. Dr.: Marcelo Oliveira Veloso.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Barros, Antonio Magno

B278s Simulações de modelos epidemiológicos utilizando os sistemas p-fuzzy/Antonio Magno Barros -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : João de Deus Mendes da Silva

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

I.Epidemiologia. 2.Lógica difusa. 3.Sistemas difusos. I. Silva, João de Deus Mendes da. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Epidemiological models simulation using p-fuzzy systems

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Epidemiology. 2. Fuzzy logic. 3. Fuzzy systems .

Área de concentração: Biomatemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva (UFMA)
Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (UF - ABC)
Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso (UFSJ)

Data da defesa: 17/12/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 17 de dezembro de 2009 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA



Prof. (a). Dr (a). MARCELO OLIVEIRA VELOSO



Prof. (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

À minha esposa Selma, minha bênção.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original. (Albert Einstein)

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva pela orientação de um tema tão interessante e pelo incentivo que vem de longas datas.

À minha amada esposa Selma pelo amor, carinho, compreensão e motivação em todas as horas e aos meus filhos Bruno e Thaylana, estes que são os grandes motivadores de minha vida.

À minha mãe Maria Barros que em suas possibilidades sempre me impulsionou a crescer como pessoa e como profissional.

Aos Professores do IMECC/UNICAMP, Prof.^a Dr.^a Sueli Irene Rodrigues Costa, Prof. Dr. Rodney C. Bassanezy, Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira e o Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos que deram um incentivo extremamente significativo aos participantes do Mestrado Profissional em Matemática.

Aos meus amigos e incentivadores Nildes é Napoleão que sempre torceram pelo meu sucesso profissional.

Aos Professores Axel Peter e José Antonio Marão, pelos importantes comentários e sugestões efetuadas durante a realização deste trabalho.

Ao amigo Agnaldo pelo indispensável apoio técnico.

Aos meus amigos professores do DEMATI/UEMA, onde não vou citar nomes para não ser injusto, pois todos, de alguma forma, contribuíram para o meu avanço acadêmico.

A Deus, acima de tudo, partindo da certeza que nunca me deixou andar sozinho.

Resumo

Os fenômenos epidemiológicos apresentam vários tipos de subjetividades, nas quais, em muitas ocasiões, são tratadas de maneira eficiente pelos modelos clássicos. Entretanto, a lógica fuzzy se apresenta de maneira adequada para tratar tais subjetividades. Neste trabalho, realizamos um estudo sobre os modelos epidemiológicos do tipo SI, SIS e SIR.

Em seguida apresentamos os principais conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy, controladores fuzzy e sistemas dinâmicos p-fuzzy. Fazemos, também um estudo dos modelos epidemiológicos fuzzy onde utilizamos o valor esperado fuzzy como defuzificador. Por fim, propomos uma comparação entre os modelos clássicos, p-fuzzy e valor esperado fuzzy .

Palavras-chave: Modelos Epidemiológicos, Lógica Fuzzy, Controladores Fuzzy, Sistemas P-Fuzzy, Valor Esperado Fuzzy.

Abstract

The epidemiological phenomena have several types of subjectivities, in which, on many occasions, are handled efficiently by classical models. However, fuzzy logic is presented properly to treat such subjectivities. We carried out a study on the epidemiological models of type SI, SIS and SIR.

The following are the main concepts of the theory of fuzzy sets, fuzzy controllers and p-fuzzy dynamic systems. We are also a study of epidemiological models where we use the fuzzy expected value as fuzzy defuzificador. Finally, we propose a comparison between the classical models, p-fuzzy and fuzzy expected value.

Keywords: Epidemiological Models, Fuzzy Logic, Fuzzy Controllers, P-Fuzzy Systems, Fuzzy Expected Value.

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
Introdução	3
1 Epidemiologia Matemática	5
1.1 Sobre as equações determinísticas	5
1.2 Modelos em epidemiologia matemática	6
1.3 Parâmetros importantes em epidemiologia matemática	9
1.4 Modelos SI com conservação da população	9
1.4.1 Formulação do modelo SI sem dinâmica vital	10
1.4.2 Formulação do modelo SI com dinâmica vital	11
1.5 Modelo SIS com conservação da população	13
1.5.1 Formulação do modelo SIS sem dinâmica vital	14
1.5.2 Formulação do modelo SIS com dinâmica vital	15
1.6 Modelo SIR com conservação da população	17
2 Teoria de Conjuntos Fuzzy	21
2.1 Conjuntos fuzzy	21

2.2	Lógica fuzzy	26
2.2.1	Operações com conjuntos fuzzy	26
2.2.2	Número fuzzy	28
2.2.3	Operações com números fuzzy	32
2.2.4	Variáveis linguísticas	33
2.2.5	Proposições fuzzy e os operadores max e min	34
2.3	Medidas fuzzy	36
2.3.1	Integral fuzzy e valor esperado fuzzy (esperança fuzzy)	36
2.4	Sistemas baseados em regras fuzzy	39
2.5	Sistemas p-fuzzy	42
2.5.1	Equações diferenciais e sistemas p-fuzzy	43
2.6	Sistemas p-fuzzy unidimensionais	46
3	Modelos de Epidemiologia Fuzzy	49
3.1	O modelo SI fuzzy	49
3.1.1	O modelo determinístico SI	49
3.1.2	O Modelo SI com parâmetro fuzzy	50
3.2	Esperança do número de infectados	52
3.3	Esperança fuzzy-FEV	54
3.4	O modelo SIS fuzzy	59
3.4.1	O modelo determinístico SIS	60
3.4.2	O Modelo SIS com parâmetro fuzzy	60
3.4.3	Comparação entre R_0 e R_0^f	65
4	Modelos Epidemiológicos P-Fuzzy	67
4.1	Base de regras de sistemas p-fuzzy unidimensionais inibidos	68
4.2	Sistemas interativos p-fuzzy	68
4.2.1	Modelo SI p-fuzzy	70
4.2.2	Modelo SIS p-fuzzy	73
4.2.3	Comparação entre os modelos clássicos, p-fuzzy e esperança fuzzy	74

Apendice I	79
Apendice II	83
Apendice III	85
Apendice IV	87
Bibliografia	89

Lista de Figuras

1.1	Diagrama do modelo compartimental SI sem dinâmica vital.	10
1.2	Representação do número de suscetíveis $S(t)$ de infectados $I(t)$ no modelo SI sem dinâmica vital com $\beta = 0.001$ e condições iniciais $I(0) = 0.05$ indivíduos e $S(0) =$ 0.95 indivíduos.	11
1.3	Diagrama do modelo SI com dinâmica vital.	12
1.4	Trajetória de $S(t)$ e de $I(t)$, em um sistema SI com dinâmica vital, com $R_0 > 1$. . .	13
1.5	Diagrama do modelo SIS sem dinâmica vital.	14
1.6	Trajetória de $S(t)$ e de $I(t)$, em um sistema SIS sem dinâmica vital, com $R_0 > 1$. . .	16
1.7	Diagrama do modelo SIS com dinâmica vital.	16
2.1	Representação do conjunto fuzzy A	24
2.2	Representação gráfica do exemplo 2.1.	25
2.3	Função de pertinência de jovens.	25
2.4	Função de pertinência do conjunto $A \cup B$	27
2.5	Função de pertinência do conjunto $A \cap B$	27
2.6	Função de pertinência do conjunto A'	28
2.7	Uma representação de α -nível.	29
2.8	O suporte de A é (a, b)	29
2.9	Número fuzzy dado geometricamente.	30
2.10	Número fuzzy triangular.	31
2.11	Número fuzzy trapezoidal.	32

2.12	Exemplo da Variável linguística febre.	34
2.13	Representação da função $H(\alpha)$	37
2.14	Estágios de um sistema baseado em regras fuzzy.	40
2.15	Esquema de um Controlador fuzzy de inferência tipo Mamdani com duas entradas e uma saída.	42
2.16	Estrutura de um sistema p-fuzzy.	43
2.17	Parábola usada para balizamento da base de regras da variação absoluta.	44
2.18	Variável de entrada: população.	45
2.19	Variável de saída: variação.	45
2.20	Gráficos: modelo logístico com $K = 234,71$ e $\alpha = 0,022$ e modelo p-fuzzy.	46
2.21	Família de subconjuntos fuzzy sucessivos.	47
2.22	Conjunto viável de Equilíbrio.	47
2.23	Centro de Massa.	48
3.1	Representação do conjunto fuzzy β	51
3.2	Distribuição da carga viral ν na população.	52
3.3	Classificação das cargas virais.	53
3.4	Função $H(\alpha)$	55
3.5	Carga viral fraca.	56
3.6	Carga viral forte.	57
3.7	Carga viral média.	57
3.8	Carga viral média detalhada.	58
3.9	$FEV[I(V, t)]$: esperança fuzzy. e $I(\nu, t)$: clássico.	60
3.10	Representação dos conjuntos fuzzy β e γ	61
3.11	Distribuição da carga viral ρ	62
3.12	Representação das cargas virais e dos conjuntos fuzzy β e γ	63
3.13	Carga viral forte.	64
4.1	Conjuntos fuzzy de entrada população.	69
4.2	Conjuntos fuzzy de saída variação.	69
4.3	Um software para modelagem de fenômenos biológicos.	70

4.4	Entrada I do modelo SI	71
4.5	Saída VI do modelo SI	72
4.6	Soluções do modelo SI determinístico e p -fuzzy.	72
4.7	Variável I do modelo SIS	74
4.8	Varição VI do modelo SIS	74
4.9	Soluções do modelo SIS p -fuzzy.	75
4.10	Curvas: p -fuzzy, FEV e clássica.	76
11	Representação do nível c	80

Introdução

Desde 1965, quando introduzida por Lotfi A. Zadeh [30], a Teoria dos Conjuntos Fuzzy vem se expandindo e sendo utilizada em inúmeros campos das diversas ciências, apresentando aplicações práticas ainda que tal ferramenta seja envolta de inúmeras críticas, dentre essas a de que suas soluções quando comparadas com às das teorias clássicas sejam menos exatas.

Todavia, ainda que a utilização de modelos clássicos cuja teoria já é bastante aprofundada e seus resultados são conhecidamente eficientes [34], a lógica fuzzy vem possibilitando a análise de modelos com base em informações relativamente vagas, demonstrando aplicação em diversas áreas, em especial em modelos de Biomatemática como nos trabalhos de [4], [6], [7], [13], [21], [28], [31], [35] dentre outros.

Nesse liame, a lógica fuzzy apresenta as verdades e negações absolutas como eventos particulares e não como possibilidades exclusivas, sendo considerada uma das ferramentas matemáticas mais poderosas para lidar com incertezas, imprecisões e verdades parciais, permitindo o tratamento de problemas do mundo-real muitas vezes com soluções de baixo custo.

Neste trabalho aplicamos a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, mais precisamente a metodologia de controladores fuzzy, do tipo Mamdani, para descrever a dinâmica de sistemas variacionais p-fuzzy. Tais controladores permitem expressar com maior exatidão os resultados alcançados através dos estudos e são largamente aplicados em modelagem matemática. Por sua vez, os sistemas dinâmicos p-fuzzy são sistemas onde a dinâmica não se baseia em conceitos formais de variações provenientes das derivadas ou de diferenças explícitas ou de inclusões diferenciais [24]. Desta maneira, nosso principal objetivo é, a partir das técnicas da teoria fuzzy, modelar os coeficientes apresentados em um sistema de equações diferenciais, que em fenômenos biológicos são parcialmente versadas,

conhecendo-se apenas qualitativamente o campo de direções. Nesse contexto, os controladores fuzzy permitirão que se obtenha de um determinado fenômeno suas principais informações ainda que estas apresentem certo grau de subjetividade.

A seguir dispomos da organização deste trabalho.

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos básicos em Epidemiologia Matemática como coeficiente de transmissão e número de reprodutibilidade basal, entre outros, assim como apresentamos os modelos determinísticos SI , SIS e SIR com e sem dinâmica vital, supondo que a população permanece constante.

No Capítulo 2, são expostos conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy, lógica fuzzy, controladores fuzzy do tipo Mamdani, sistemas p-fuzzy de ordem n e comparados o uso dos sistemas p-fuzzy ao uso das equações diferenciais ordinárias. Ainda no capítulo 2 apresentamos um resumo da teoria da medida e o conceito de medida fuzzy, introduzido por Sugeno (1974).

No Capítulo 3, por sua vez, fazemos um estudo dos modelos epidemiológicos SI e SIS com heterogeneidade na classe dos infectados, considerando a taxa de transmissão um conjunto fuzzy e para a defuzzificação do número de infectados utilizamos a esperança fuzzy.

Por fim, no Capítulo 4, realizamos um estudo comparativo entre o modelo determinístico, p-fuzzy e esperança fuzzy para os modelos básicos de epidemiologia.

EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA

Neste capítulo, o enfoque será apenas a descrição determinística dos modelos epidemiológicos SI , SIS e SIR sem e com dinâmica vital. As questões relacionadas a subjetividades intrínsecas nesses modelos serão abordadas nos capítulos posteriores.

1.1 Sobre as equações determinísticas

Sabe-se que os precursores no estudo das equações diferenciais foram Newton e Leibniz, ainda no final do século XVII, e tais estudos tiveram sua evolução alicerçada em problemas físicos, predominantes naquela época. O problema então, seria o de obter as soluções na forma explícita, e tal tentativa durou até meados do século XIX [11]. Inicialmente o objetivo do estudo das equações diferenciais era determinar soluções por meio de funções elementares, de forma a reduzir o problema de obtenção de solução ao cálculo de primitivas, e tal processo foi chamado de *quadratura*.

Entretanto, muitas equações diferenciais não podiam ser resolvidas em termos de funções elementares, mesmo que já existissem novas funções, como elípticas por exemplo, e outras que podiam ser representadas por integrais. O problema em questão fez surgir, no século XIX, um novo método de obtenção de soluções de equações diferenciais, com o uso agora de série de funções. Torna-se importante ressaltar que o método da série de funções surgiu no contexto das equações diferenciais parciais, que no decorrer de suas soluções apresentavam equações

diferenciais ordinárias, a ressaltar o método de Fourier.

No decorrer do século XIX, a Análise ganhou rigor, sugindo então contestações ao método das séries, por sua utilização bastante informal. Dois importantes resultados que impulsionaram os estudos das equações diferenciais na época, foram os teoremas de existência e o da unicidade vistos em [16], no final do século XIX, dando origem a uma fase mais rigorosa das equações diferenciais, que teve em Poincaré um de seus motivadores. A importância do teorema de unicidade vem do fato de, sabendo-se a priori, que tais soluções existem, a sua procura por outros meios é relevante, uma vez que a sua solução pode ser verificada posteriormente.

Os *sistemas dinâmicos* surgem na sequência histórica, motivados por ideias de Henri Poincaré, onde então foram iniciados estudos qualitativos da teoria das equações diferenciais, permitindo portanto um estudo das propriedades assintóticas das soluções de uma dada equação diferencial, estas propriedades no entanto referem-se à estabilidade e periodicidade, não necessitando a resolução explícita da equação diferencial.

A partir da necessidade de se extrair características pertinentes a determinados fenômenos (inclusive os biológicos), com a ajuda de hipóteses e aproximações, e representá-los em termos matemáticos - modelos matemáticos - surge, então, a modelagem matemática.

1.2 Modelos em epidemiologia matemática

Em se tratando de doenças de transmissão direta, a epidemiologia propõe medidas específicas de prevenção, de controle e erradicação. Para [27], Epidemiologia é uma ciência que estuda quantitativamente os fenômenos saúde-doença e seus fatores condicionantes nas populações humanas. Alguns autores também incluem na definição que a epidemiologia permite ainda a avaliação da eficácia das intervenções realizadas no âmbito da saúde pública.

A transcrição matemática que quantifica os fenômenos epidemiológicos, fundamenta a epidemiologia matemática que tem como um dos principais objetivos, segundo [28], a obtenção, através dos modelos matemáticos propostos, informações sobre como a doença se espalha numa população, visando, essencialmente, definir ações para prevenir e/ou conter tal propagação.

Os primeiros desenvolvimentos em Epidemiologia Matemática parecem ter sido realizados por Daniel Bernoulli na última metade do século XVIII. No entanto, somente a partir da segunda

metade do século XIX, com o avanço do conhecimento médico sobre as causas das doenças infecciosas, ocorreu o desenvolvimento de teorias matemáticas para fenômenos em larga escala, em oposição às descrições empíricas [13].

Dentre essas teorias, está o Princípio de Ação das Massas, postulado por W. H. Hamer em 1906 por meio de um modelo de tempo discreto e posteriormente, generalizado para tempo contínuo por Sir Ronald Ross, em 1908. Esse princípio, o mais importante conceito de epidemiologia matemática, se traduz na proporcionalidade da disseminação de uma epidemia em uma população ao produto da densidade de indivíduos suscetíveis pela densidade de indivíduos infecciosos. Este, em conjunto com o Princípio do Limiar - desenvolvido por W. O. Kermack e A. G. Mckendrick em 1927 se referindo a um valor crítico de indivíduos suscetíveis necessário para a ocorrência de um surto epidêmico - estabelece o fundamento da epidemiologia moderna.

No que se refere a dinâmica de transmissão de doenças infecciosas os modelos que aparecem frequentemente são aqueles do tipo compartimental. A população é dividida em compartimentos que descrevem o estado em que os indivíduos se encontram em relação a doença, como por exemplo, suscetíveis- S , infectados- I e removidos- R . Segundo [22], em uma população muito grande, a transferência de indivíduos entre compartimentos pode ser considerada um fenômeno contínuo e, portanto, podemos descrever matematicamente a variação do número de indivíduos dentro de cada compartimento, à medida que o tempo passa, através de sistemas de equações diferenciais.

Quanto aos estágios de estado de indivíduos em relação a uma doença, a classificação é feita da seguinte forma:

- Suscetíveis: indivíduos sadios, mas com possibilidade adquirir a doença se estiverem expostos a ela;
- Infectados ou infecciosos: indivíduos que, em algum momento podem transmitir a doença para um suscetível;
- Removidos: incluem os indivíduos que se recuperaram e adquiriram imunidade da doença ou morreram.

A escolha do modelo é determinada levando em consideração as características da doença. Assim, podemos considerar os seguintes grupos:

- *SI*: Modelo Suscetível-Infetado, indivíduos infectados em uma população não se recuperam e qualquer indivíduo que não tem a doença é considerado suscetível a ela;
- *SIS*: Modelo Suscetível-Infetado-Suscetível, relacionado com doenças que não confere imunidade, ou seja, indivíduos infectados podem passar para o grupo dos suscetíveis novamente;
- *SIR*: Modelo Suscetível-Infetado-Removido, utilizado em doenças em que os indivíduos infectados podem recuperar-se e adquirir imunidade permanente ou morrerem.

Os modelos matemáticos que descrevem a evolução temporal da dinâmica de transmissão direta de doenças, em geral, são dados por um sistema de equações diferenciais, ditos modelos determinísticos.

Por outro lado, nos modelos estocásticos, as soluções médias dos modelos são obtidas a posteriori quando se tem alguma distribuição estatística de dados referentes ao fenômeno analisado [4].

No entanto, incertezas oriundas de conhecimentos parciais, não necessariamente aleatórias, são bastante frequentes em fenômenos biológicos [7]. Nestes casos acreditamos que a lógica fuzzy seja uma ferramenta adequada, uma vez que pode representar, matematicamente, o fenômeno estudado sem o auxílio de “equações” para representar sua dinâmica. É necessário apenas um conjunto de regras coerentes baseadas no conhecimento de especialistas [32].

Neste trabalho, um de nossos interesses é mostrar que os sistemas p-fuzzy podem representar uma ferramenta alternativa de modelagem para esses modelos epidemiológicos, principalmente os modelos *SI* e *SIS*.

O objetivo deste capítulo é analisar o comportamento dos modelos *SI*, *SIS* e *SIR*, com e sem dinâmica vital levando em conta as seguintes hipóteses para a formulação desses modelos:

- a população total é considerada constante, isto é, não há migração, nem nascimentos e nem mortes e que a taxa de natalidade seja igual à taxa de mortalidade;
- todos os indivíduos nascem suscetíveis;
- o contágio se dá pelo contato dos indivíduos suscetíveis com os infectados a uma taxa proporcional a fração de infectados na população.

1.3 Parâmetros importantes em epidemiologia matemática

O curso de uma epidemia deve depender do número de suscetíveis, taxas de contato entre os indivíduos suscetíveis e infecciosos e do número de indivíduos infecciosos. Este conceito, denominado *Lei da ação das massas em epidemiologia* e básico para todas as teorias determinísticas, estocásticas [22] e até mesmo fuzzy.

Um importante resultado em epidemiologia foi o *teorema do limiar*, segundo o qual o número de suscetíveis deve superar o número mínimo, para que doença se estabeleça.

O valor limiar mais conhecido e usado em epidemiologia é o *número reprodutibilidade basal* da doença (razão de reprodução básica), R_0 , definido como número médio de infecções secundárias produzidas por um único indivíduo infeccioso, numa população inteiramente suscetível, na ausência de qualquer heterogeneidade e, também, de múltiplas infecções [36]. Se a população for tão grande que se possa desprezar as infecções que vão sendo produzidas, R_0 mede a velocidade inicial de crescimento da epidemia, pois cada indivíduo infectado ramifica-se em R_0 novos infectados estes, por sua vez, originam R_0 novos casos cada um, e assim sucessivamente. Quando $R_0 > 1$, a doença tem a capacidade para invadir um população totalmente suscetível, enquanto que, $R_0 < 1$ acaba por desaparecer.

O *número de contato* é o número médio de contatos adequados (em que haja a transmissão da doença), de um indivíduo infectivo (indivíduo que pode transmitir a doença) durante seu período infeccioso; quando temos esse número é descrito num certo intervalo de tempo é dito *taxa de contato*, que neste trabalho representaremos por β .

1.4 Modelos SI com conservação da população

Existem doenças como a AIDS, por exemplo, que ainda não tem cura, ou seja, indivíduos infectados em uma população não se recuperam e qualquer indivíduo que não tem a doença é considerado suscetível a ela. Um modelo em Biomatemática utilizado para descrever a evolução temporal dessa doença é o modelo compartimental simples SI , onde a população é dividida em dois grupos; suscetíveis (S) e infectados (I).

Lembrando que em nossa abordagem a população total (N) é considerada constante e estudare-

mos os modelos SI sem dinâmica vital e com dinâmica vital.

Como hipótese, os indivíduos infecciosos estão distribuídos homogeneamente em toda população e têm o mesmo poder de transmitir a doença. Esta é uma simplificação considerável para a epidemiologia, já que há muitas fontes de heterogeneidade que interferem na propagação de uma doença, como por exemplo a idade e/ou a classe social [6].

1.4.1 Formulação do modelo SI sem dinâmica vital

Modelo sem dinâmica vital significa que, considera-se que não ocorram nascimentos, mortes, nem qualquer tipo de migração, na população em estudo .

Consideremos $S(t)$ o número de suscetíveis e $I(t)$ o número de infectados em um certo instante t e, $S_0 = S(0)$ e $I_0 = I(0)$ suas populações iniciais, respectivamente. Assim:

$$S(t) + I(t) = S_0 + I_0 = N.$$

Normalizando a equação acima, temos:

$$S(t) + I(t) = S_0 + I_0 = 1.$$

O diagrama compartimental do modelo SI é dado na Figura 1.1, onde β é o coeficiente de transmissão da doença.



Figura 1.1: Diagrama do modelo compartimental SI sem dinâmica vital.

Este modelo é descrito, de modo determinístico, pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta S I \\ \frac{dI}{dt} = \beta S I \\ I(0) = I_0 \text{ e } S(0) = S_0 \text{ dados .} \end{array} \right.$$

Dada uma condição inicial (S_0, I_0) e sabendo que $S(t) + I(t) = 1$, a solução analítica deste modelo é:

$$\begin{cases} I(t) = \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}} \\ S(t) = \frac{S_0}{S_0 + I_0 e^{\beta t}} \end{cases} \quad (1.1)$$

A Figura 1.2 representa graficamente a solução (1.1).

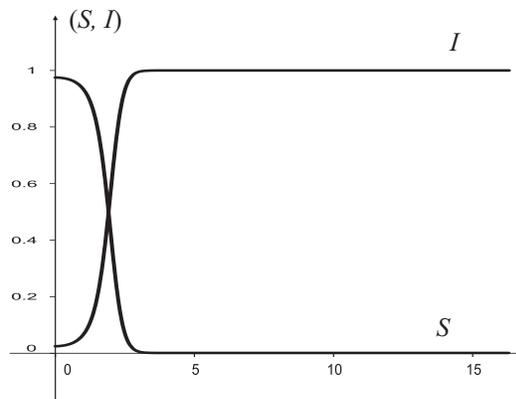


Figura 1.2: Representação do número de suscetíveis $S(t)$ de infectados $I(t)$ no modelo SI sem dinâmica vital com $\beta = 0.001$ e condições iniciais $I(0) = 0.05$ indivíduos e $S(0) = 0.95$ indivíduos.

Os pontos de equilíbrio deste modelo são $(S^*, I^*) = (1, 0)$ e $(S^*, I^*) = (0, 1)$, equilíbrios assintoticamente instável e estável, respectivamente [22].

Ou seja, quando $t \rightarrow \infty$ no sistema (1.1), obtém-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0.$$

1.4.2 Formulação do modelo SI com dinâmica vital

No modelo SI com dinâmica vital são considerados os nascimentos e as mortes na população. Neste caso, supõe-se que não haja migração e que a taxa de natalidade e mortalidade sejam a mesma. Supõe-se, também, que nascimentos e mortes (morte natural e de ambas as classes) ocorrem a uma taxa proporcional a N , com constante de proporcionalidade μ ($\mu > 0$).

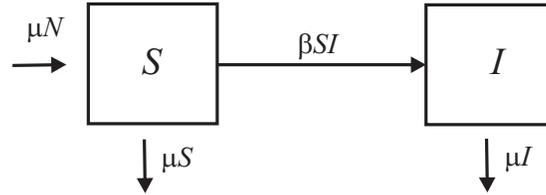


Figura 1.3: Diagrama do modelo SI com dinâmica vital.

O modelo SI com dinâmica vital, esquematizado na Figura 1.3, é modelado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I \\ I(0) = I_0 \quad e \quad S(0) = S_0 \text{ dados,} \end{array} \right.$$

cujas soluções analíticas deste modelo, levando em conta as condições iniciais $S(0) = S_0$ e $I(0) = I_0$ e que $S(t) + I(t) = 1$, são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} I(t) = \frac{I_0(\beta - \mu)}{\beta I_0 + (\beta - \mu - \beta I_0)e^{-t(\beta - \mu)}} \\ S(t) = \frac{\mu(1 - S_0) + (\beta S_0 - \mu)e^{-t(\beta - \mu)}}{\beta(1 - S_0) + (\beta S_0 - \mu)e^{-t(\beta - \mu)}}. \end{array} \right.$$

A Figura 1.4 apresenta a representação gráfica a solução acima.

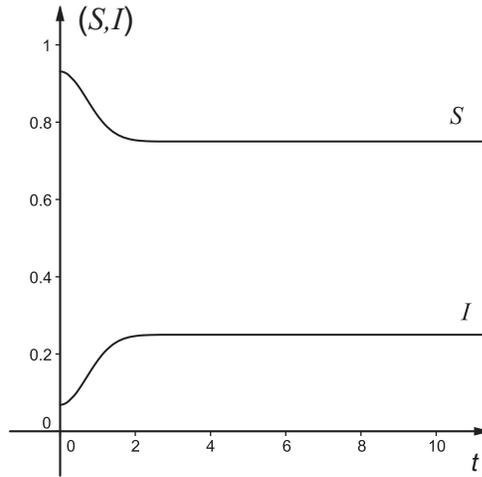


Figura 1.4: Trajetória de $S(t)$ e de $I(t)$, em um sistema SI com dinâmica vital, com $R_0 > 1$.

Observações:

1. se $\beta - \mu > 0$, isto é $\frac{\beta}{\mu} > 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 1 - \frac{\mu}{\beta} > 0$,
e temos, portanto, um estado assintótico endêmico;
2. se $\beta - \mu < 0$, isto é, $\frac{\beta}{\mu} < 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$,
o que significa que a doença se extingue.

Temos, então que número reprodutivo básico, definido na seção anterior, $R_0 = \frac{\beta}{\mu}$.

A partir dessas observações podemos obter os pontos de equilíbrio S^* e I^* , fazendo $\frac{dS}{dt} = 0$ e $\frac{dI}{dt} = 0$, assim temos:

- $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$ o equilíbrio livre da doença;
- $(S_2^*, I_2^*) = (\frac{\mu}{\beta}, 1 - \frac{\mu}{\beta})$, com $1 - \frac{\mu}{\beta}$, isto é, $R_0 = \frac{\beta}{\mu} > 1$ o equilíbrio endêmico.

1.5 Modelo SIS com conservação da população

Um simples resfriado pode ser responsável por uma epidemia. Uma pessoa é saudável, mas é suscetível a um resfriado. A pessoa doente tosse próximo a uma pessoa saudável, infectando-a. A pessoa infectada pode causar infecções nos possíveis suscetíveis. Depois de um período de tempo,

de cuidados e assistência médica, a pessoa infectada é novamente saudável e entra na classe de suscetíveis [22].

1.5.1 Formulação do modelo SIS sem dinâmica vital

Para este modelo, vamos supor que um indivíduo suscetível torna-se infectado a taxa de contato proporcional ao produto SI com uma constante de proporcionalidade β ($\beta > 0$), e que o indivíduo infectado recupera-se, tornando-se suscetível a uma taxa de recuperação proporcional a I com constante de proporcionalidade γ ($\gamma > 0$).

O diagrama do modelo compartimental apresentado na Figura 1.5 é correspondente ao modelo SIS sem dinâmica vital, onde βSI , é o número total de indivíduos infectados (infecciosos) por unidade de tempo e γI o número de indivíduos infectados que se recuperam e que volta a ser suscetíveis por unidade de tempo.

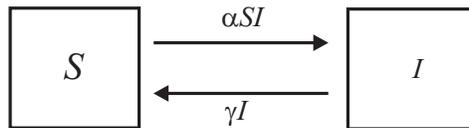


Figura 1.5: Diagrama do modelo SIS sem dinâmica vital.

Este modelo é descrito pelo sistema de equações diferenciais dado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \quad (1.a) \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (1.b) \\ I(0) = I_0 \quad \text{e} \quad S(0) = S_0 \quad \text{dados} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Onde

$$S + I = 1. \quad (1.3)$$

Para determinar a solução desse sistema vamos substituir (1.3) em (1.b) para obter

$$\frac{dI}{dt} = I(\beta - \beta I - \gamma)$$

cuja solução, levando em conta a condição inicial $I(0) = I_0$, é:

$$I(t) = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \left(\frac{\beta - \gamma}{I_0} - \beta\right)e^{-t(\beta - \gamma)}} \quad (1.4)$$

Do ponto de vista biológico, deve-se ter $\beta \geq \gamma$.

Da solução (1.4), podemos chegar as seguintes conclusões:

- se $\beta - \gamma > 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 1 - \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{\gamma}{\beta};$$

- se $\beta - \gamma < 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 1.$$

Satisfazendo a condição $1 - \frac{\gamma}{\beta} > 0$, isto é, $R_0 = \frac{\gamma}{\beta} > 1$. Portanto o sistema (1.2) possui os seguintes pontos de equilíbrio:

- $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$ equilíbrio instável (equilíbrio livre da doença);
- $(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)$ equilíbrio estável (equilíbrio endêmico).

Para valores de $R_0 > 1$, tem-se e o sistema aproxima-se do estado assintótico endêmico; para $R_0 < 1$ não ocorre epidemia, isto é, (o número de infectados $I(t)$ decresce com o tempo, aproximando-se de zero) [22]. Na Figura 1.6 visualiza-se os gráficos de $S(t)$ e de $I(t)$, em função do tempo.

1.5.2 Formulação do modelo *SIS* com dinâmica vital

Neste modelo, assim como no modelo *SI* com dinâmica vital, são considerados os nascimentos e as mortes na população. Supõe-se, ainda, que não haja migração e que a taxa de natalidade e mortalidade sejam a mesma, e que nascimentos e mortes (morte natural e de ambas as classes) ocorrem a uma taxa proporcional a N , com constante de proporcionalidade μ ($\mu > 0$).

O modelo *SIS* com dinâmica vital, representado pelo diagrama Figura 1.7, é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

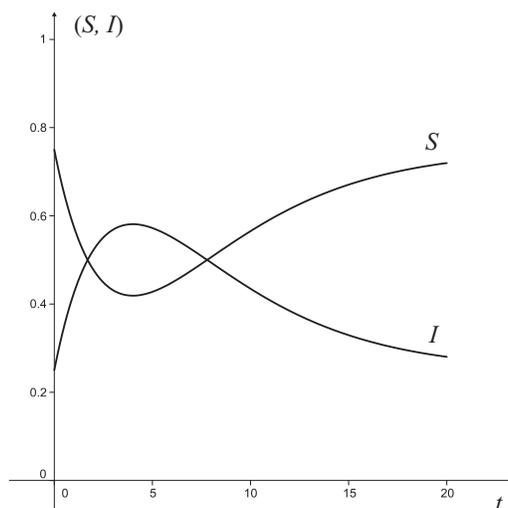


Figura 1.6: Trajetória de $S(t)$ e de $I(t)$, em um sistema SIS sem dinâmica vital, com $R_0 > 1$.

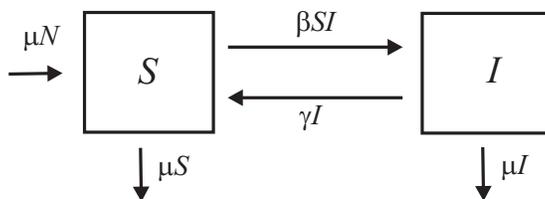


Figura 1.7: Diagrama do modelo SIS com dinâmica vital.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I \\ I(0) = I_0 \text{ e } S(0) = S_0 \text{ dados.} \end{array} \right.$$

A solução analítica $I(t)$ deste modelo, levando em conta as condições iniciais $S(0) = S_0$ e $I(0) = I_0$ e que $S(t) + I(t) = 1$, é dada por:

$$I(t) = \frac{I_0(\beta - \gamma - \mu)}{\beta I_0 + (\beta - \gamma - \mu - \beta I_0)e^{-t(\beta - \gamma - \mu)}}.$$

A partir da solução, vem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 1 - \frac{\gamma + \mu}{\beta} \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 1 - I(t) = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$$

sendo que $\beta - \gamma - \mu > 0$, ou seja,

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu} > 1.$$

Mas, se $\beta - \gamma - \mu < 0$, ou seja

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu} < 1.$$

Temos,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 1.$$

A partir dessas observações podemos obter os pontos de equilíbrio S^* e I^* :

$$(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$$

$$(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, 1 - \frac{\gamma + \mu}{\beta} \right),$$

sendo este último realístico desde que $\frac{\beta}{\gamma + \mu} < 1$.

1.6 Modelo *SIR* com conservação da população

O modelo *SIR* foi inicialmente proposto por W. O Kermack e A. G. Mc Kendrick no ano de 1927, onde estes propuseram um modelo epidemiológico que buscava estudar a propagação de uma doença em uma população. Nos dias de hoje esse modelo é usado para estimar, por exemplo, o nível de vacinação necessário para acabar determinada doença contagiosa.

No modelo *SIR* divide-se a população em três classes, como segue [18]:

1. A classe dos suscetíveis S , composta pelos indivíduos que podem contrair a doença através de contatos com infectados;
2. A classe dos infectados, composta pelos indivíduos que tem a doença e podem transmiti-la;
3. A classe dos removidos, ou seja, aqueles que passaram pela doença e não são mais nem suscetíveis nem infectados, de modo que ou morreram ou se recuperaram.

Sendo assim a cura confere imunidade. Sejam agora $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ o número de indivíduos de cada classe acima citada no instante t . Desta forma o modelo de Kermack e McKeendrick, ou seja SIR , é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I . \end{cases}$$

As componentes β e α , aqui caracterizam a propagação da doença. Aqui, assume-se que:

- O número de infectados aumenta a uma taxa proporcional ao produto entre o número de infectados e o de suscetíveis, dado por βSI , onde os suscetíveis perdidos estão na mesma faixa;
- A taxa de migração de infectados para removidos é proporcional ao número de infectados, ou seja, αI ;
- É desprezível o período de incubação, de modo que um suscetível que contrai a doença torna-se imediatamente infectado;
- Há uniformidade na distribuição das três classes no espaço. Deste modo as taxas de encontro independem da localização geográfica, permitindo modelar o sistema em questão através das equações diferenciais ordinárias. A mesma hipótese também foi feita no modelo de Lotka-Volterra.

Outro fato importante é que a população total permanece constante, uma vez que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{constante}.$$

Os modelos do tipo *SIR* dão uma noção de se a doença contagiosa vai se disseminar ou não, dados os valores dos parâmetros α e β e das condições iniciais $S(0) = S_o$, $I(0) = I_o$, $R(0) = R_o$. Recorrendo à segunda equação em $t = 0$ segue que:

$$\frac{dI}{dt} = I_o(\beta S_o - \alpha).$$

Assim, a doença se propaga quando $I_o(\beta S_o - \alpha) > 0$, isto é $\beta S_o > \alpha$, caso contrário $\beta S_o < \alpha$, a doença tende a desaparecer. Fazendo agora:

$$R_o = \frac{\beta S_o}{\alpha}.$$

Concluindo-se que há epidemia quando $R_o > 1$; e que não há epidemia quando $R_o < 1$. O parâmetro em questão é chamado de número de reprodutividade basal, e além disso:

S_o : população inicial de suscetíveis;

β : taxa de contágio;

α : taxa de remoção (pessoas que se recuperaram ou porventura morreram).

TEORIA DE CONJUNTOS FUZZY

Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos importantes como conjuntos fuzzy, lógica fuzzy e sistemas de inferência fuzzy, de modo a permitir um primeiro contato a este campo, que é extremamente vasto, e que nos dará suporte para uma melhor compreensão dos modelos matemáticos abordados nos capítulos posteriores. As primeiras aplicações bem sucedidas situam-se na área de controle, mas desde então, tem-se verificado uma utilização crescente de sistemas fuzzy em outros campos, como por exemplo, classificação, previsão de séries, mineração de dados, planejamento e otimização.

O uso conjunto da lógica fuzzy e outros sistemas classificados como inteligentes - redes neurais e programação evolutiva, por exemplo - tem propiciado a construção de sistemas híbridos, cuja capacidade de aprendizado tem ampliado o campo de aplicações [26].

2.1 Conjuntos fuzzy

Para compreendermos a Teoria “Fuzzy” devemos pensar em situações de incerteza, imprecisão, sentido vago, nebuloso, entre outras, onde não podemos responder simplesmente “Sim ou Não” ou ainda “Verdadeiro ou Falso”. Situações como, por exemplo, se um indivíduo é alto, baixo, médio, velho, saudável, rápido, fumante etc. A teoria dos conjuntos fuzzy pode ser utilizada para expressar, em termos matemáticos de maneira quantitativa, as imprecisões intrínsecas nas informações de determinados fenômenos a partir de regras linguísticas subjetivas.

Exemplo 2.1. *Suponhamos que temos que mapear os indivíduos jovens de uma cidade. Definiremos de 11 a 25 anos o intervalo em que os indivíduos são ditos jovens. Uma questão imediata que surge é: o que podemos dizer para os indivíduos, por exemplo, com 10 ou 26 anos? Para essa situação, o critério seria que, indivíduos não pertenceriam ao conjunto com a mesma intensidade, ou seja, haveria pessoas que pertenceriam mais ao conjunto dos jovens do que outros. Quanto mais distante desse intervalo estivesse a idade de um indivíduo, menor seria o seu grau de pertencimento ao grupo dos jovens.*

Situações como estas, podem ser solucionadas a partir da teoria dos conjuntos fuzzy introduzida pelo cientista Lotfi Asker Zadeh, professor da Universidade da Califórnia, em Berkley. O principal objetivo desta teoria é atribuir significado matemático a certos termos linguísticos subjetivos, qualitativos, probabilísticos como: aproximadamente, tais como, pouco, provável e muitos outros. Através de tais conjuntos, seria possível armazenar dados imprecisos ou incertos em computadores para gerar respostas análogas ao pensamento humano.

Intenção de Zadeh foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos criando a ideia de grau de pertinência. Dessa forma, um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto [21]. Esta sua ideia foi publicada em 1965, sendo este artigo considerado o marco do nascimento da teoria de conjuntos fuzzy.

Podemos dizer que a teoria dos conjuntos fuzzy é uma extensão da teoria dos conjuntos clássicos. Para qualquer conjunto clássico, pode-se definir uma função que chamamos de *função característica*.

Na teoria clássica dos conjuntos, um conjunto A é dito “crisp”, de modo que um elemento do universo U (domínio) pertence ou não pertence ao conjunto A . Um subconjunto não vazio A de U é caracterizado por sua função característica:

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Isto é, a função c_A tem domínio U e imagem o conjunto $\{0, 1\}$. Se x pertence a A , temos $c_A(x) = 1$, caso contrário, $c_A(x) = 0$.

Note que a função característica separa dentre todos os elementos de U os que pertencem ou não ao subconjunto A , dividindo o conjunto universo em duas partes com fronteiras bem definidas.

Na teoria dos conjuntos fuzzy, um conjunto é aquele em que um elemento passa a ter um grau de pertinência no intervalo fechado $[0, 1]$, ao contrário de pertencer ou não ao conjunto como na teoria de conjuntos tradicional.

Para cada conjunto é criada uma função que representa algum conceito impreciso (como: ser alto,...) chamada função de pertinência, que indica o grau de pertinência de seus elementos.

Definição 2.1. *Um subconjunto fuzzy A , definido no universo U , é caracterizado por uma função de pertinência*

$$\mu_A : U \longrightarrow [0, 1],$$

a qual atribui um grau de pertinência de um elemento x em relação ao conjunto A .

Definição 2.2. *Dizemos que um subconjunto fuzzy $A \subset U$ é normal se existe $x_o \in U$ tal que $\mu_A(x_o) = 1$.*

Portanto, a função de pertinência associa com cada elemento x de U um número real $\mu_A(x)$ do intervalo $[0, 1]$, que representa o grau com que o elemento x pertence ao conjunto A . Para simplificar a notação indicaremos por A a função de pertinência μ_A . Por exemplo, a população de animais predadores de uma determinada espécie pode ser considerada como um subconjunto fuzzy, se associarmos a cada predador seu grau de predação [8].

A representação do conjunto fuzzy (sendo ele discreto) é feita simplesmente enumerando os seus elementos juntamente com seus graus de pertinências, na seguinte notação (que não deve ser confundida como soma algébrica):

$$A = \sum_i \mu_A(x_i) / x_i,$$

onde $\mu_A(x_i) / x_i$ se refere ao elemento $x_i \in A$ com grau de pertinência $\mu(x_i)$ e a somatória se refere a união desses pares ordenados $(x_i, \mu_A(x_i))$.

Exemplo 2.2. *Considere a seguinte função de pertinência do conjunto fuzzy*

$$A = 0,3/2 + 0,5/3 + 0,6/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 0,6/8 + 0,5/9 + 0,3/10 .$$

A Figura 2.1 representa graficamente este conjunto.

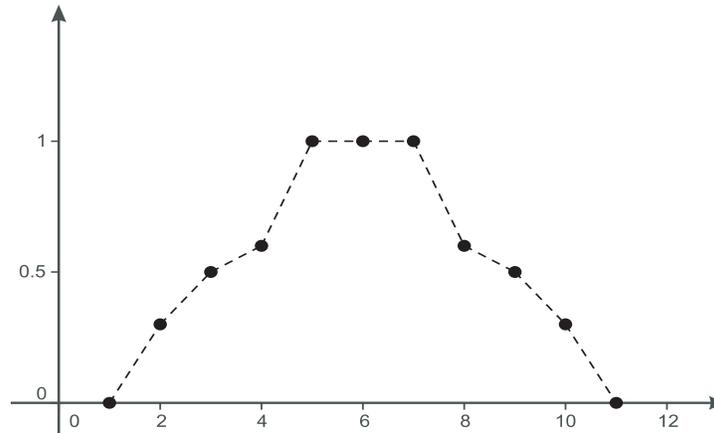


Figura 2.1: Representação do conjunto fuzzy A.

Quando os conjuntos fuzzy são contínuos sua representação é a própria função de pertinência, ou ainda, com notação (que, também, não deve ser interpretada como integral convencional):

$$\int_x \mu(x)/x .$$

As formas para as funções de pertinência são totalmente arbitrárias. Todavia as funções mais utilizadas são [21]:

Linear por partes (triangular ou trapezoidal);

Quadrática;

Gaussiana;

Ou alguma outra função especial.

As funções lineares por partes são as mais populares devido a simplicidade dessas funções e o fato de que o custo computacional adicional exigido pelos outros tipos de função não refletem, em geral, uma melhoria significativa na qualidade dos valores de saída dos sistema [29].

No caso do exemplo 2.1, podemos considerar a seguinte função de pertinência,

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-0}{10-0} & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 1 & \text{se } 10 \leq x \leq 25 \\ \frac{110-x}{85} & \text{se } 25 < x \leq 110 . \end{cases}$$

A representação gráfica dessa função pode ser observada na Figura 2.2 a seguir:

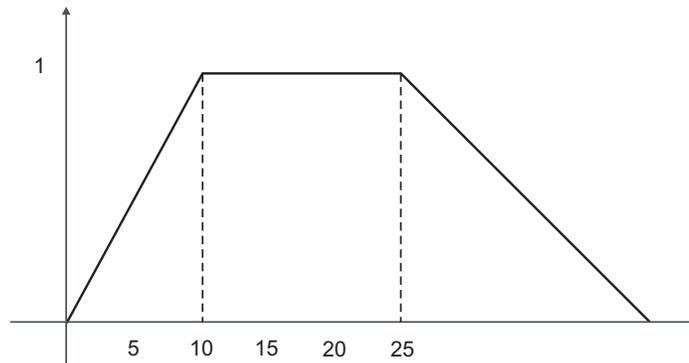


Figura 2.2: Representação gráfica do exemplo 2.1.

Note que a função A foi gerada a partir dos dados do exemplo 2.1 que conceitua indivíduos jovens, essa escolha foi feita totalmente arbitrária levando em conta as definições preestabelecidas. Existe uma infinidade de funções que podem modelar matematicamente de maneira significativa o conceito de ser *jovem*. Uma outra alternativa é a função representada pelo gráfico da Figura 2.3, a seguir:

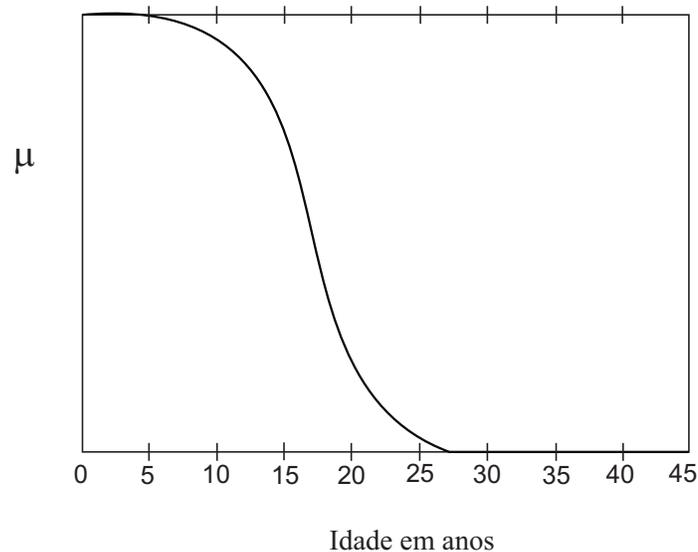


Figura 2.3: Função de pertinência de jovens.

Nesta fase, em que os conjuntos fuzzy estão sendo definidos, é de fundamental importância as informações fornecidas pelo especialista da área do fenômeno estudado [14].

2.2 Lógica fuzzy

A teoria dos conjuntos fuzzy [30] tem objetivo de fornecer um ferramental matemático para o tratamento de informações imprecisas ou vagas. A lógica fuzzy, criada baseada nessa teoria, foi inicialmente construída a partir dos conceitos já estabelecidos de lógica clássica; os conectivos e operadores foram definidos à semelhança dos tradicionalmente utilizados e outros foram introduzidos ao longo do tempo, muitas vezes por necessidades de caráter puramente prático.

Na lógica fuzzy, uma proposição do tipo “se - então” é verdadeira ou falsa com um certo grau. No mundo real existem situações onde a dicotomia verdadeiro ou falso não é suficiente para representar a realidade [24]. Responder sim ou não para determinadas questões, muitas vezes não transmite certeza ou exatidão. A lógica fuzzy tem por objetivo principal fazer com que as decisões tomadas pela máquina se aproximem cada vez mais das decisões humanas. Essa característica se acentua, principalmente ao se trabalhar com uma grande variedade de informações vagas, imprecisas e incertas. Ressalta-se que antes do surgimento da lógica fuzzy essas informações não tinham como ser processadas computacionalmente [19].

2.2.1 Operações com conjuntos fuzzy

Consideremos dois subconjuntos fuzzy A e B de U cujas funções de pertinências são A e B .

Observações:

1. Dizemos que A é um subconjunto de B ($A \subset B$) se $A(x) \leq B(x)$ para todo $x \in U$;
2. Para os conjuntos vazio ϕ e o universo U temos as funções de pertinências $\phi(x) = 0$ e $U(x) = 1$ para todo $x \in U$.

As operações básicas (União, intersecção e complementar) da teoria de conjuntos clássicos são idênticas para a teoria de conjuntos fuzzy, a generalização da função característica é que difere uma da outra.

Como na lógica clássica, os operadores de intersecção e união correspondem respectivamente aos operadores lógicos de conjunção (E) e disjunção (OU). O par de operadores mais amplamente utilizado nas técnicas fuzzy são o operador \min (mínimo) para a conjunção e o \max (máximo) para a disjunção fuzzy [21].

União, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy

A união de A e B é o conjunto fuzzy $A \cup B$ (Figura 2.4) com função de pertinência definida por:

$$(A \cup B)(x) = \max \{A(x), B(x)\} .$$

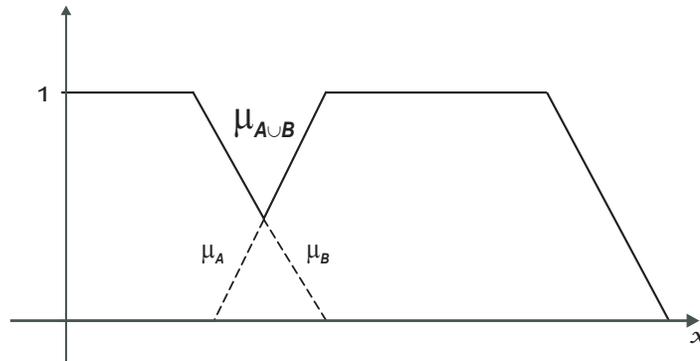


Figura 2.4: Função de pertinência do conjunto $A \cup B$.

A intersecção de A e B é o conjunto fuzzy $A \cap B$ (Figura 2.5) com função de pertinência definida por:

$$(A \cap B)(x) = \min \{A(x), B(x)\} .$$

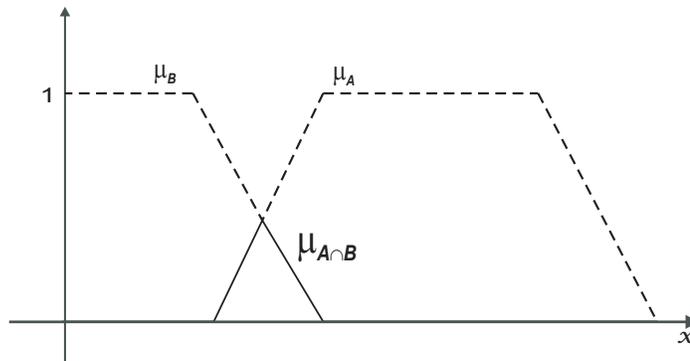


Figura 2.5: Função de pertinência do conjunto $A \cap B$.

O complementar de A é o conjunto fuzzy A' (ou \bar{A}) (Figura 2.6) cuja função de pertinência é definida por:

$$A'(x) = 1 - A(x), \quad x \in U.$$

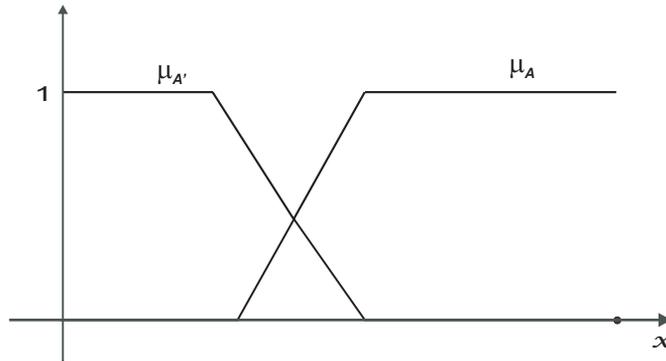


Figura 2.6: Função de pertinência do conjunto A' .

2.2.2 Número fuzzy

Quando se mede a altura de um indivíduo, o que se obtém é um valor numérico carregado de imprecisões. Tais imprecisões podem ter sido causadas pelos instrumentos de medida, pelos indivíduos que estão medindo, pelo indivíduo que está sendo medido etc. Finalmente opta-se por um valor preciso (um número real) a para indicar a altura. Neste caso, matematicamente, indica-se a expressão *em torno de a* por um conjunto fuzzy A cujo domínio é o conjunto dos números reais [4].

Definição 2.3. *Seja $\alpha \in [0, 1]$ e A um subconjunto fuzzy de U , chamamos α -nível do subconjunto fuzzy A , o subconjunto $[A]^\alpha \subset U$ definido por:*

$$[A]^\alpha = \{x \in U; A(x) \geq \alpha\}, \text{ paratodo } \alpha \in (0, 1].$$

A definição de α -nível fornece outra maneira de se considerar um conjunto fuzzy. Sendo que, a função de pertinência determina completamente um conjunto fuzzy, e que seus valores pertencem ao intervalo $[0, 1]$, então um conjunto fuzzy A pode ser descrito pela união de seus conjuntos α -níveis: $A = \bigcup_\alpha [A]^\alpha$. A visualização de α -nível é apresentada na Figura 2.7:

Definição 2.4. *O suporte, denota-se $\text{supp}(A)$, de um subconjunto fuzzy A é o conjunto clássico de todos os elementos $x \in U$ cuja função de pertinência é não-nula.*

$$\text{supp}(A) = \{x \in U; A(x) > 0\}.$$

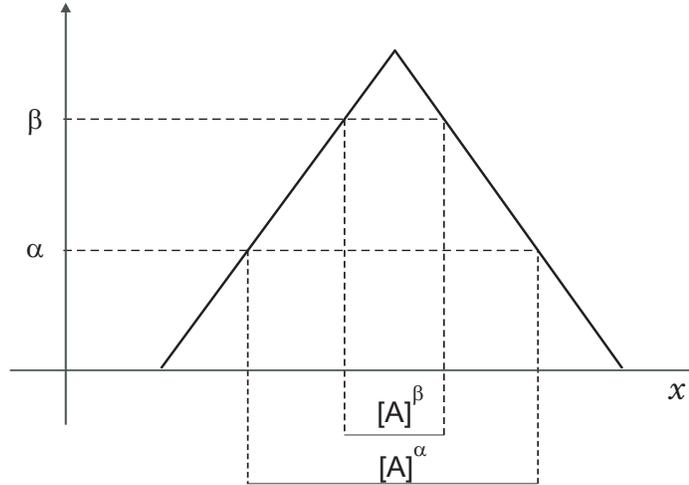


Figura 2.7: Uma representação de α -nível.

O nível zero de um subconjunto fuzzy A é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de U que contem o suporte de A (Figura 2.8). Numa linguagem matemática, $[A]^0$ é o fecho do suporte de A e é representado por $\overline{\text{supp}A}$. Note que o conjunto $\{x \in U; A(x) \geq 0\}$ não é necessariamente igual a $[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$ [6].

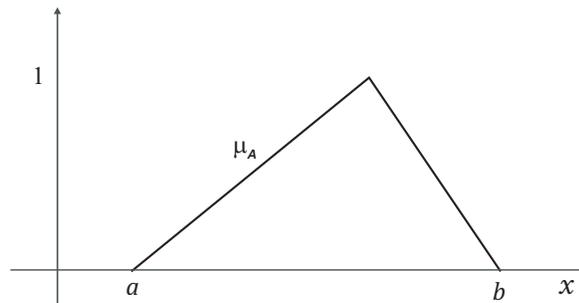


Figura 2.8: O suporte de A é (a, b) .

Definição 2.5. Um subconjunto fuzzy $A \in \mathbb{R}$ é chamado de número fuzzy se satisfaz às condições:

1. $[A]^\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in [0, 1]$;
2. $[A]^\alpha$ é um intervalo fechado, para todo $\alpha \in [0, 1]$;
3. o suporte de A é limitado.

Iremos denotar por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos, não-vazios.

A partir da Definição 2.5, qualquer número real r é um particular número fuzzy com função de pertinência dada pela função característica:

$$\hat{r}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases}.$$

O teorema seguinte mostra a caracterização de número fuzzy através de funções monótonas e contínuas [24].

Teorema 2.1. *A é um número fuzzy se, e somente se, existir um intervalo fechado $[b, c] \neq \emptyset$ e $a, d \in \mathbb{R}$ tais que,*

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [b, c] \\ f(x) & \text{se } x \in (-\infty, b) \\ g(x) & \text{se } x \in (c, \infty) \end{cases}.$$

Onde $f : (-\infty, b] \rightarrow [0, 1]$ é contínua à direita, crescente em $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$, para $x \in (-\infty, a)$; $g : [d, \infty) \rightarrow [0, 1]$ é contínua à esquerda, decrescente em $[c, d]$ e $g(x) = 0$ para $x \in [d, \infty)$.

Demonstração: Consultar [15].

A interpretação geométrica de um número fuzzy geral é dada na Figura 2.9.

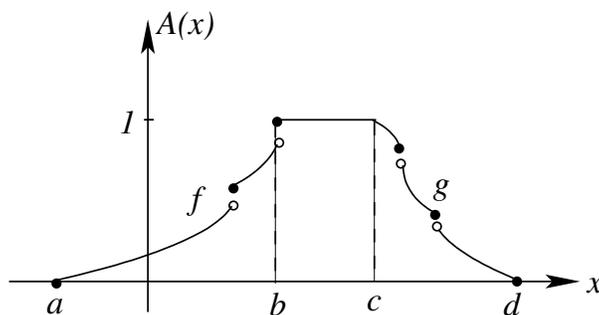


Figura 2.9: Número fuzzy dado geometricamente.

Neste trabalho supõe-se que as funções f e g são contínuas. Define-se a seguir, duas funções contínuas que são os números fuzzy triangulares e trapezoidais.

Definição 2.6. Dizemos que um número fuzzy A é triangular (representação geométrica na Figura 2.10) quando sua função de pertinência é tal que

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{se } b < x \leq c \\ 0, & \text{se } x > c \end{cases}$$

com $a < b < c$.

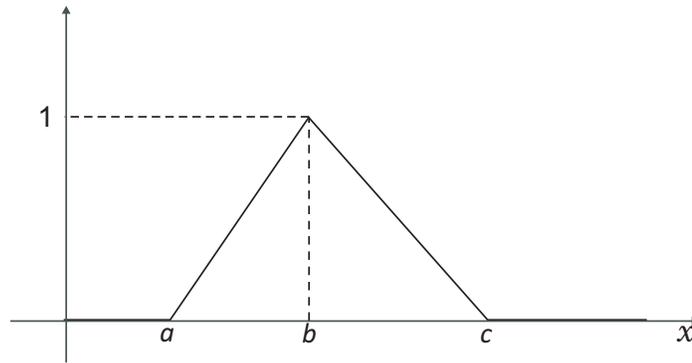


Figura 2.10: Número fuzzy triangular.

Definição 2.7. Dizemos que um número fuzzy A é trapezoidal (representação geométrica na Figura 2.11) quando sua função de pertinência é tal que

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } b < x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{se } x > d \end{cases}$$

com $a < b < c < d$.

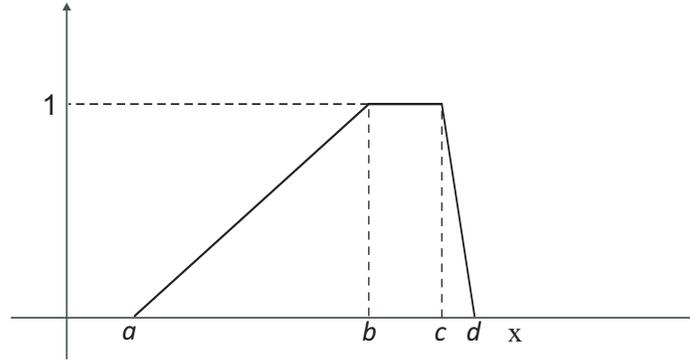


Figura 2.11: Número fuzzy trapezoidal.

2.2.3 Operações com números fuzzy

Definição 2.8. *Sejam A e B dois números fuzzy, e ζ um número real.*

1. *A soma de dois números fuzzy A e B é o número fuzzy $A + B$, cuja função de pertinência é*

$$(A + B)(x) = \sup_{x=y+z} \min[A(y); B(z)].$$

2. *A multiplicação de ζ por A é o número fuzzy ζA , cuja função de pertinência é*

$$(\zeta A)(x) = \begin{cases} A(\zeta^{-1}x) & \text{se } \zeta \neq 0 \\ \hat{0} & \text{se } \zeta = 0 \end{cases}.$$

O Teorema 2.2, cuja prova encontra-se em [15], fornece uma maneira prática para realizar essas operações utilizando os α -níveis dos números fuzzy em execução.

Teorema 2.2. *Se M e N são dois números fuzzy e ζ um número real, então para todo $\alpha \in [0; 1]$ tem-se*

$$[M + N]^\alpha = [M]^\alpha + [N]^\alpha = \{a + b; a \in [M]^\alpha \text{ e } b \in [N]^\alpha\}$$

e

$$[\zeta N]^\alpha = \zeta [N]^\alpha = \{\zeta a; a \in [N]^\alpha\}.$$

2.2.4 Variáveis linguísticas

Uma variável linguística fuzzy é um variável cujos valores subjetivos (termos linguísticos) são nomes que são expressos, quantitativamente, por conjuntos fuzzy.

Embora as palavras sejam inerentemente menos precisas que números, o uso delas é mais próximo da intuição humana. Representar o ambiente em termos próximos à linguagem natural, permite que a falta de precisão possa ser tratada de forma apropriada. Devido a estes aspectos, os sistemas nebulosos podem resolver problemas altamente imprecisos, sendo aplicados em vários sistemas de controle, de suporte à decisão e previsão [23].

Por exemplo, a febre (variando entre 36° e 40° C) pode ser considerada como variável linguística assumindo os termos: baixa, média e alta. Formalmente, uma variável linguística fuzzy é caracterizada pela quintupla $(x, T(x), U, G, M)$, onde:

- x : nome da variável;
- $T(x)$: conjunto de termos linguísticos de x ;
- U : universo em discurso;
- G : regra semântica para gerar nomes de valores de x ;
- M : regra semântica para associar cada valor a seu significado.

A Figura 2.12 mostra a variável linguística do exemplo acima. O nome (x) da variável é *Febre*. Os termos linguísticos $T(x)$ são: *baixa, média e alta*. O domínio X da variável é o intervalo fechado [36, 40].

Os termos linguísticos são usados para expressar conceitos e conhecimentos na comunicação humana, e em muitas áreas eles constituem a forma mais importante (quando não é única) de quantificar os dados/informações. O uso de termos linguísticos é frequente no nosso cotidiano, dizemos que o “Dia está muito quente”, “O ônibus estava lotado”, “Tal pessoa é alta, magra etc.”. Todos estes termos possuem um significado e transmite informação [21].

Sentenças em que aparecem variáveis linguísticas juntamente com seus valores subjetivos são comumente chamados de proposições fuzzy [6].

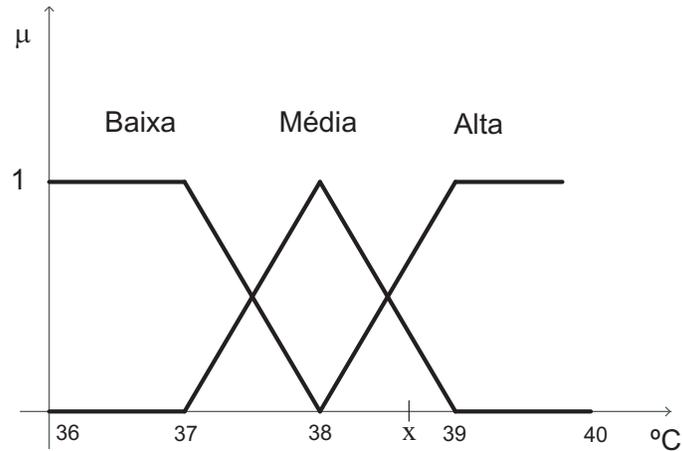


Figura 2.12: Exemplo da Variável linguística febre.

2.2.5 Proposições fuzzy e os operadores max e min

Um importante conceito em lógica fuzzy é a de proposição fuzzy. Uma proposição fuzzy é uma declaração que representa uma afirmação do tipo “Se x é A e y é B , Então z é C ou z é D ”. Para traduzir matematicamente uma proposição fuzzy é necessário traduzir os conectivos **e** e **ou**. Com o objetivo de generalização, são definidos operadores de base axiomática, baseados nos conceitos de t -norma e t -conorma os quais indicamos por \wedge e \vee e passamos a definir.

Definição 2.9. Dizemos que o operador binário $\wedge : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t -norma se satisfaz:

- i) *Comutatividade:* $x \wedge y = y \wedge x$;
- ii) *Associatividade:* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
- iii) *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $x \wedge w \leq y \wedge z$;
- iv) *Condições de fronteira:* $0 \wedge x = 0$ e $1 \wedge x = x$.

Exemplos:

- Intersecção padrão

$$\wedge : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{com} \quad x \wedge y = \min(x, y);$$

- Produto algébrico

$$\wedge : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{com} \quad x \wedge y = xy;$$

- Diferença limitada

$$\wedge : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{com} \quad x \wedge y = \max(0, x + y - 1).$$

Definição 2.10. Dizemos que o operador binário $\vee : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma *s-conorma* se satisfaz:

- i) *Comutatividade:* $x \vee y = y \vee x$;
- ii) *Associatividade:* $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
- iii) *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $x \vee w \leq y \vee z$;
- iv) *Condições de fronteira:* $0 \vee x = x$ e $1 \vee x = 1$.

Exemplos:

- União padrão

$$\vee : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{com} \quad x \vee y = \min(x, y);$$

- Soma algébrica

$$\vee : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{com} \quad x \vee y = x + y - xy;$$

- Soma limitada

$$\vee : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{com} \quad x \vee y = \min(0, x + y).$$

Proposição 2.1. Se A , B e C são subconjuntos fuzzy então os operadores *max* e *min* são associativos e comutativos, isto é:

- i) $\min\{\max\{A, B\}, \max\{A, C\}\} = \max\{A, \min\{B, C\}\}$;
- ii) $\max\{\min\{A, B\}, \min\{A, C\}\} = \min\{A, \max\{B, C\}\}$;

Demonstração: Consultar [30].

2.3 Medidas fuzzy

Um conceito importante na teoria fuzzy é o de medida fuzzy que foi introduzido por Sugeno em 1974 e que flexibilizou a propriedade aditiva exigida nos conjuntos clássicos [4]. A medida fuzzy avalia o grau de subjetividade intrínseca nos valores que estão sendo estudados como, por exemplo, o grau de infecciosidade existente em dois grupos, A e B , contaminados por uma determinada espécie de vírus.

Empiricamente há unanimidade em se concordar que, se um grupo A tiver mais indivíduos e quantidade média de vírus maior que o grupo B , então B está contido em A ; deste modo, deve se esperar que a medida subjetiva de B seja menor que a medida subjetiva de A , ou seja, $\mu(B) \leq \mu(A)$ sendo μ a medida subjetiva.

Definição 2.11. Se $\Omega \neq \phi$ e A, B são subconjuntos (clássicos) de Ω , então μ é uma medida fuzzy se:

- a) $\mu(\phi) = 0$ e $\mu(\Omega) = 1$;
- b) $\mu(A) \leq \mu(B)$, se $A \subseteq B$.

Observe que a medida de probabilidade P é uma particular medida fuzzy, já que satisfaz as condições a) e b) acima.

A medida fuzzy generaliza a medida σ -aditiva através da substituição da propriedade de σ -aditividade pela propriedade de monotonicidade [21].

2.3.1 Integral fuzzy e valor esperado fuzzy (esperança fuzzy)

Com o intuito de utilizar um método de defuzificação para obter um valor real (número real) que represente um conjunto fuzzy, conceituaremos a integral fuzzy introduzida por Sugeno [25].

Seja $(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy e A um subconjunto fuzzy de Ω .

Definição 2.12. A integral fuzzy ou valor esperado fuzzy de A , denota-se por $FEV(A)$, em relação a medida μ é definido por

$$FEV(A) = \int_{\Omega} A d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu\{A \geq \alpha\}]]$$

onde $\mu\{A \geq \alpha\} = \mu\{x \in \Omega : A(x) \geq \alpha\}$, com $\alpha \in [0, 1]$.

Teorema 2.3. Se $H(\alpha) = \mu\{A \geq \alpha\}$, então $H(\alpha)$ tem um único ponto fixo α^* tal que $FEV(A) = \alpha^*$.

Demonstração: Consultar [2].

A representação gráfica da função $H(\alpha)$ é pode ser visualizada na Figura 2.3.1.

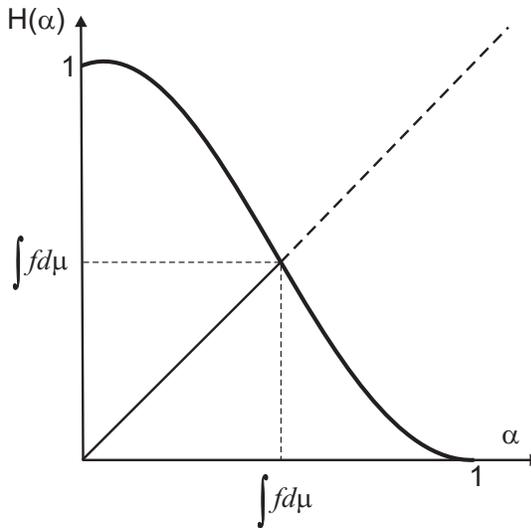


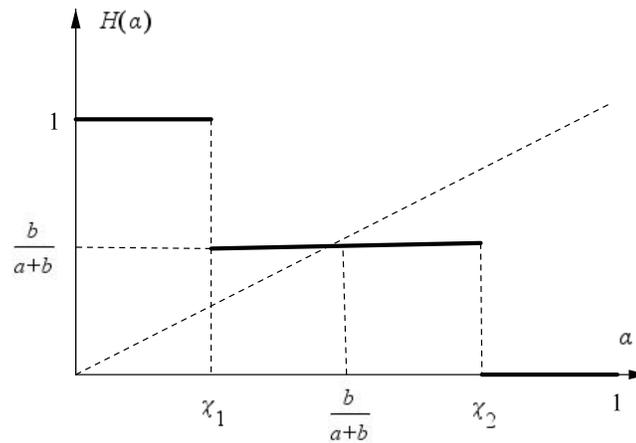
Figura 2.13: Representação da função $H(\alpha)$.

Exemplo 2.3. [2] Suponha que Ω é o conjunto das pessoas de uma determinada localidade e \mathbb{F} o conjunto fuzzy das “pessoas altas” de Ω dado pelos graus de pertinência χ_1 e χ_2 . Isto é, suponha que um número a de pessoas esteja associado com χ_1 , um número b de pessoas esteja associado com χ_2 e $\#\Omega = a + b$.

Se $\mu(S) = \frac{\#S}{\#\Omega}$, $\forall S \in P(\Omega)$ e se $0 \leq \chi_1 < \chi_2 \leq 1$, então

$$H(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \chi_1 \\ \frac{b}{a+b} & \text{se } \chi_1 < \alpha \leq \chi_2 \\ 0 & \text{se } \chi_2 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

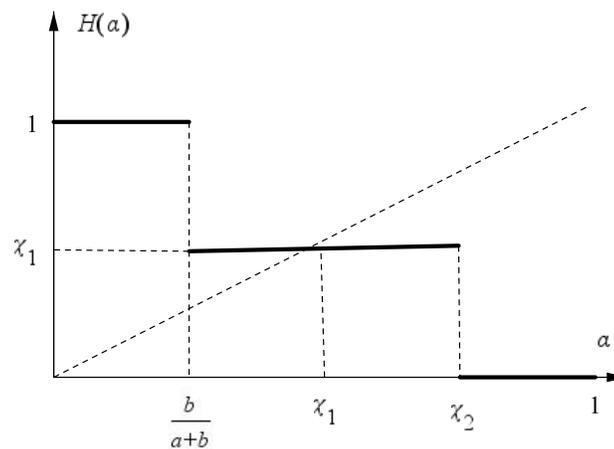
Se $\chi_1 \leq \frac{b}{a+b} \leq \chi_2$, então $H\left(\frac{b}{a+b}\right) = \frac{b}{a+b}$ e assim, pelo teorema 2.3, temos:



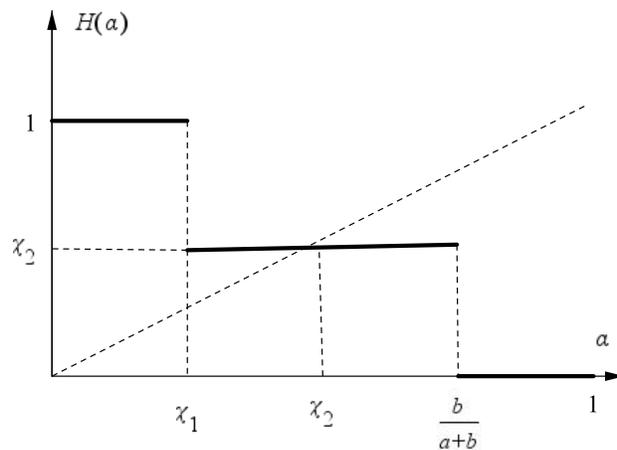
$$\int_{\Omega} \chi d\mu = \frac{b}{a+b}$$

Observe que

$$1. \int_{\Omega} \chi d\mu = \chi_1 \text{ se } \chi_1 \geq \frac{b}{a+b}$$



$$2. \int_{\Omega} \chi d\mu = \chi_2 \text{ se } \chi_2 \leq \frac{b}{a+b}$$



2.4 Sistemas baseados em regras fuzzy

Segundo [6], as ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meios de informações imprecisas. Cada indivíduo funciona como uma “caixa preta”: recebe informações que são interpretadas segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar. O controle e a execução de tarefas devem seguir a sequência de “ordens” linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras, capazes de serem decodificadas pelo controlador.

Em 1974 iniciou-se um importante capítulo no desenvolvimento na teoria dos conjuntos fuzzy com a apresentação do primeiro controlador fuzzy (sistema baseados em regras fuzzy) criado por E. Mamdani, no Reino Unido. A partir de então vários foram os pesquisadores que buscaram aplicar a teoria de lógica fuzzy para controlar sistemas em engenharia [21].

Os sistemas baseados em regras fuzzy tem uma estrutura bastante simples. Em essência, esses sistemas representam as informações semelhantes ao raciocínio humano, considerando o conhecimentos heurísticos e cruzando informações desconectadas a priori. Basicamente, tais sistemas possuem três estágios (Figura 2.14): uma entrada - fuzificador, um processador, composto por uma coleção de regras linguísticas, chamada base de regras fuzzy e um método de inferência e um estágio de saída-defuzificador.

Na etapa de fuzificação são realizadas análise do ambiente, pois é de extrema importância conhecer: o problema a ser manipulado; como o especialista trabalha e como ele entende sua

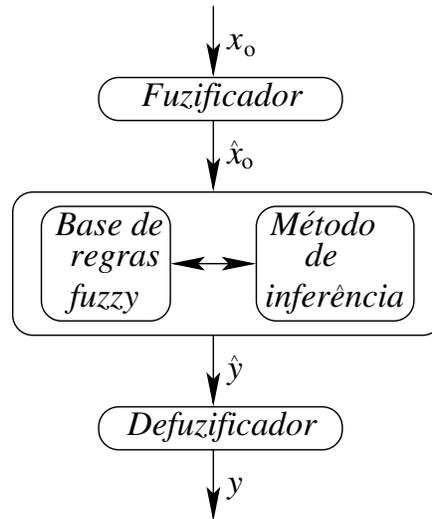


Figura 2.14: Estágios de um sistema baseado em regras fuzzy.

realidade; qual a linguagem usada pelo especialista para tratar os problemas; quais as decisões e quando elas são tomadas. A partir da aquisição deste conhecimento, pode-se saber em qual contexto o sistema baseado em regras fuzzy será aplicado [20]. Consideremos, então, entradas não-fuzzy (valores resultantes de medições ou observações), o fuzzificador transforma esses dados precisos em conjuntos fuzzy de entradas relevantes.

Para o valor clássico $x_o \in \mathbb{R}^n$, o fuzzificador transforma x_o em um conjunto fuzzy, $\hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Em muitos casos isto pode ser feito simplesmente tomando \hat{x}_o como imagem da função característica de x_o ,

$$\hat{x}_o(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a = x_o \\ 0 & \text{se } a \neq x_o . \end{cases}$$

O estágio de processamento é considerado o núcleo do controlador fuzzy [34], nele estão as proposições fuzzy que são fornecidas por especialistas. A regra fuzzy unidade capaz de capturar algum conhecimento específico, e um conjunto de regras é capaz descrever um sistema em suas várias possibilidades.

Cada regra fuzzy, da mesma forma que uma afirmação clássica (proposição), é composta por uma parte antecedente (*a parte Se*) e uma parte conseqüente (*a parte Então*) modelados por conjuntos fuzzy e o resultando uma estrutura do tipo:

Se “*antecedente*” Então “*consequente*”.

Após ser construído um conjunto de regras fuzzy é preciso que haja um método de inferência que relaciona as variáveis e que levam a conclusão final do sistema; nele os termos subjetivos são avaliados matematicamente.

O método de inferência determina uma forma operacional do modelo linguístico. Ele é um mapeamento que define uma transformação de um valor fuzzy de entrada em um valor de saída. Existem diversos tipos de métodos de inferência; devemos, portanto, escolher aquele que melhor se adapta ao sistema que estamos modelando. Um dos métodos mais divulgados, pela sua simplicidade e por se adaptar muito bem aos controladores fuzzy, é o método de Mamdani ou método *MAX-MIN* [21].

A defuzificação é a etapa final do controlador fuzzy que consiste em obter a melhor representação para o conjunto fuzzy de saída - obtido pelo processo de inferência das variáveis linguísticas. Essa representação é dada por uma informação precisa (um valor numérico representativo) entre as demais possibilidades.

Na teoria estocástica é comum indicar *esperança matemática* (ou média) como um número que melhor representa a variável aleatória (ou uma distribuição de dados). Outros valores como *moda* e a *mediana* também são utilizados para representar a centralização de tal distribuição [6].

Existem muitas técnicas de defuzificação, a mais utilizada e apropriada para este trabalho é o centro de gravidade ou centroide. Este método pode ser entendido como a média ponderada onde $\mu_A(x)$ funciona como peso do valor x .

No caso contínuo, a defuzificação pode ser dada pela fórmula [34]

$$\bar{z} = \frac{\int \mu_A(x)xdx}{\int \mu_A(x)dx}.$$

Visualiza-se na Figura 2.15 um sistema baseado em regras fuzzy com duas variáveis de entrada e uma variável de saída, usando o método de inferência tipo Mamdani e como defuzificador o método do *centro de massa*. Pode-se observar, também, que dado $x_o \in \text{supp}(A_1) \cap \text{supp}(A_2)$ e $y_o \in \text{supp}(B_1) \cap \text{supp}(B_2)$ para cada regra $i = 1, 2$ é obtida uma saída, $C_i'(z) = (A_i(x_o) \wedge B_i(y_o) \wedge C_i(z))$. Daí obtém-se o conjunto fuzzy $\hat{y}(z) = C_1'(z) \vee C_2'(z)$. E com a defuzificação de \hat{y} obtém-se

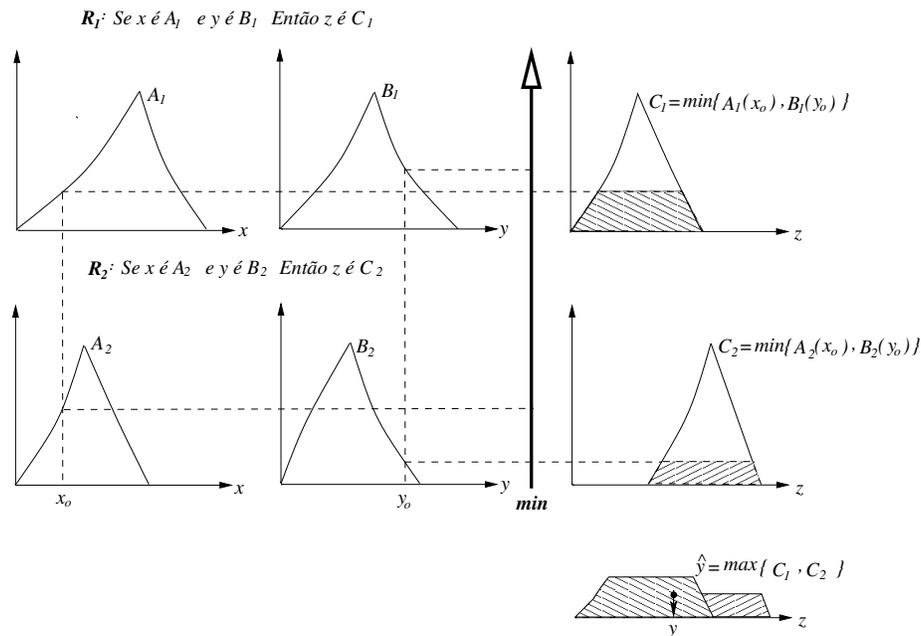


Figura 2.15: Esquema de um Controlador fuzzy de inferência tipo Mamdani com duas entradas e uma saída.

o número y , o qual é a abscissa do centro de massa da região limitada pela função de pertinência de \hat{y} [24].

2.5 Sistemas p-fuzzy

Nesta seção damos início a uma metodologia para estudar a evolução de sistemas dinâmicos levando em conta a subjetividade das variáveis de estados, que são os sistemas p-fuzzy. Um sistema p-fuzzy em \mathbb{R}^n é um sistema dinâmico discreto:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde F é dado por $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$ e a variação $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é obtida por um controlador fuzzy. Aqui utilizaremos no sistema baseado em regras fuzzy o método de inferência de Mamdani e o centro de massa como método de defuzzificação. A estrutura de um sistema p-fuzzy pode ser visto na Figura 2.16.

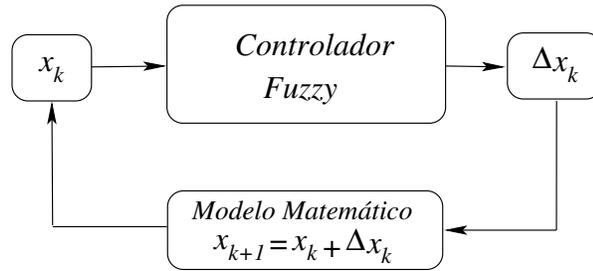


Figura 2.16: Estrutura de um sistema p-fuzzy.

Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas variações com as variáveis, sendo assim uma ferramenta útil para modelar fenômenos cujo comportamento é incerto [37]. Mais ainda, as *variáveis de estado* devem ser as entradas enquanto as saídas devem representar *variações de estado*. Essa é a particularidade dos controladores fuzzy aplicados a sistemas dinâmicos.

2.5.1 Equações diferenciais e sistemas p-fuzzy

Aqui, vamos descrever os procedimentos para formar as bases de regras de um sistema p-fuzzy para dinâmica populacional para espécies isoladas com crescimento inibido. Para comparação equações diferenciais e sistemas p-fuzzy usamos o modelo Verhulst:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde as constantes reais e positivas α e K são respectivamente, o índice de crescimento da população e a capacidade suporte.

A solução analítica para esse problema de valor inicial é obtida através da separação de variáveis e integração no intervalo $[0, t]$, encontrando-se, então, a função

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-\alpha t}}.$$

A variação da população x é menor quando o número de indivíduos se aproxima da capacidade suporte, ou seja, $x(t) \rightarrow K$ quando $t \rightarrow \infty$ e, atinge seu valor máximo para $x(t_i) = K/2$.

Para obter o sistema p-fuzzy utilizaremos as variáveis linguísticas: *população* e *variação* [24]. Adota-se para variável de entrada a variável população com os seguintes termos linguísticos: *Baixa* (*B*), *Média Baixa* (*MB*), *Média* (*M*), *Média Alta* (*MA*), *Alta* (*A*) e *Altíssima* (*AL*) e para saída, a variação que é dividida da seguinte forma: *Baixa Negativa* (*BN*), *Baixa Positiva* (*BP*), *Média Positiva* (*MP*) e *Alta positiva* (*AP*).

Na criação da base de regras da variação, deve-se observar que o gráfico de $\frac{dP}{dt}$ em função de P é uma parábola e portanto, a variação da população foi baseada no comportamento da parábola conforme a Figura 2.17 [37].

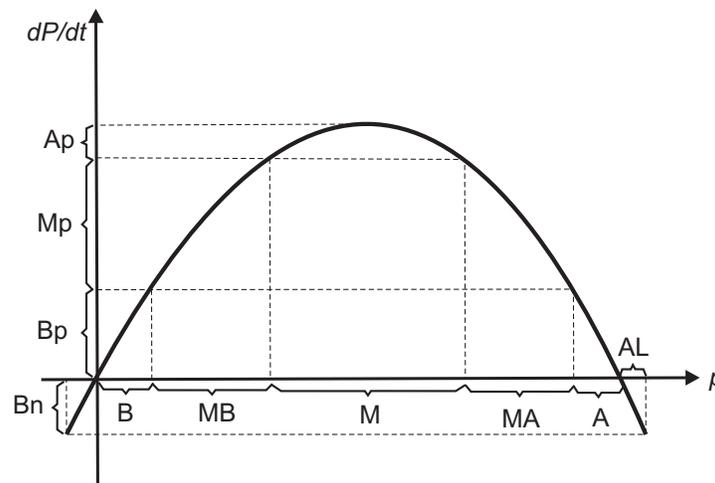


Figura 2.17: Parábola usada para balizamento da base de regras da variação absoluta.

Para base de regras utilizaremos:

1. Se população é *baixa* então variação é *baixa positiva*;
2. Se população é *média baixa* então variação é *média positiva*;
3. Se população é *média* então variação é *alta positiva*;
4. Se população é *média alta* então variação é *média positiva*;
5. Se população é *alta* então variação é *baixa positiva*;
6. Se população é *altíssima* então variação é *baixa negativa*;

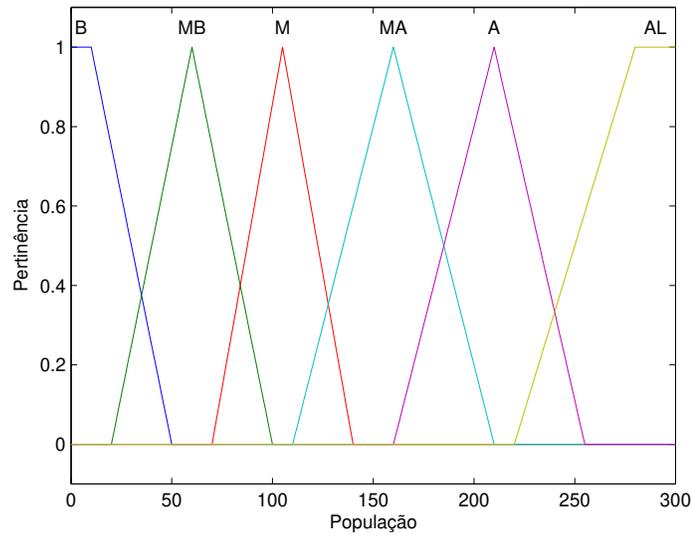


Figura 2.18: Variável de entrada: população.

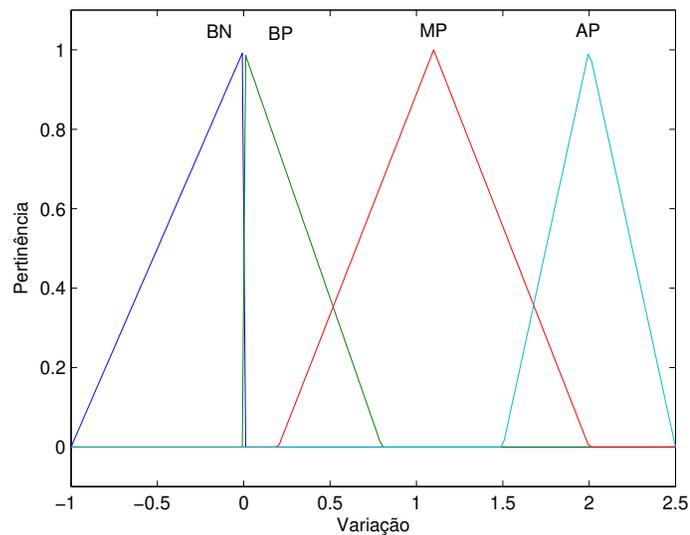


Figura 2.19: Variável de saída: variação.

A partir da base de regras citadas acima, utilizando o controlador de Mamdani e a defuzificação dada pelo centro de massa, o sistema p-fuzzy leva a Figura 2.20 visualizada a seguir.

As soluções clássica e p-fuzzy podem ser vistas na figura 2.5.1. Para solução clássica utilizamos $K = 234.714951$, $x_0 = 12.7945$ e $\alpha = 0.02232$ [24].

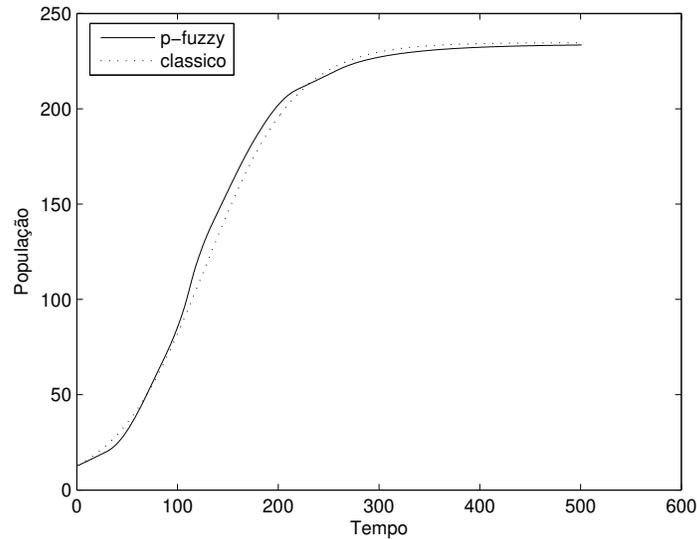


Figura 2.20: Gráficos: modelo logístico com $K = 234,71$ e $\alpha = 0,022$ e modelo p-fuzzy.

Uma observação interessante é que o método p-fuzzy generaliza o método clássico. Podemos utilizar o método p-fuzzy para obter os parâmetros para o modelo clássico, por exemplo através de um ajuste de curva [38].

De qualquer forma, a importância maior do modelo p-fuzzy é quando não se tem possibilidade de avaliar certos parâmetros ou quando as variáveis estão carregadas de subjetividades [24].

2.6 Sistemas p-fuzzy unidimensionais

Nesta seção, apresentaremos algumas definições que julgamos necessárias ao o bom entendimento deste trabalho. Para maiores informações consultar [24].

Definição 2.13. Dado um sistema p-fuzzy unidimensional,

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \\ x_0 \text{ dado e } x_k \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.2)$$

dizemos que x^* é um ponto de equilíbrio de (2.2) se $x^* = x_{k+1} = x_k \iff \Delta x_k = 0$.

Definição 2.14. Seja $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ uma família finita de subconjuntos fuzzy que definem uma variável linguística x . Dizemos que os subconjuntos A_i são sucessivos (Figura 2.21) se,

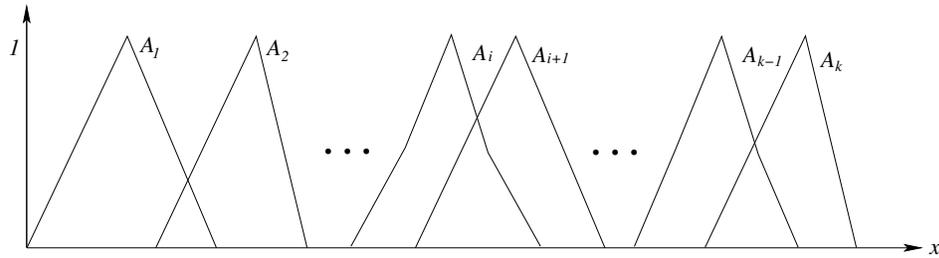


Figura 2.21: Família de subconjuntos fuzzy sucessivos.

i) $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$;

ii) Dados $x_1 \in \text{supp}(A_i)$ e $x_2 \in \text{supp}(A_{i+1})$, se $A_i(x_1) = 1$ e $A_{i+1}(x_2) = 1$ tem-se $x_1 < x_2$.

Definição 2.15. Consideremos o sistema p-fuzzy (2.2) e uma família de conjuntos fuzzy sucessivos $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$. Se para algum $i = 1, \dots, k$, $x_i \in \text{supp}(A_i)$ e $x_{i+1} \in \text{supp}(A_{i+1})$ são tais Δx_i e Δx_{i+1} , possuem sinais contrários, então o subconjunto fuzzy dado por: $A^* = \min\{A_i, A_{i+1}\}$ é denominado **conjunto de equilíbrio** do sistema p – fuzzy (2.2) (Figura 2.22).

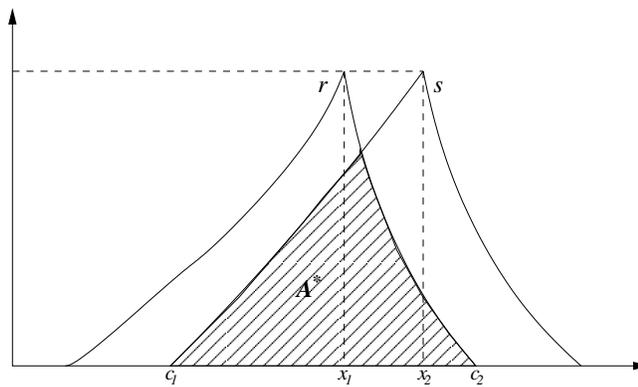


Figura 2.22: Conjunto viável de Equilíbrio.

Um sistema p-fuzzy depende do tipo de controlador associado a ele. Isto é, da base de regras, do método de inferência e do método de defuzificação utilizado. Na definição 2.15, variações com sinais contrários significa que o sistema está associado a um controlador cuja a base de regras é do tipo:

R_1 : Se x é A Então Δx é C ;

R_2 : Se x é B Então Δx é D .

onde $\text{supp}(C) \subset R^-$ e $\text{supp}(D) \subset R^+$ ou vice e versa.

Definição 2.16. Seja \mathcal{A} uma região limitada pela função contínua $y = f(x)$, as retas $y = a$ e $y = b$ e pelo eixo x (Figura 2.23). O centro de gravidade ou centroide de \mathcal{A} é ponto (\bar{x}, \bar{y}) onde,

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

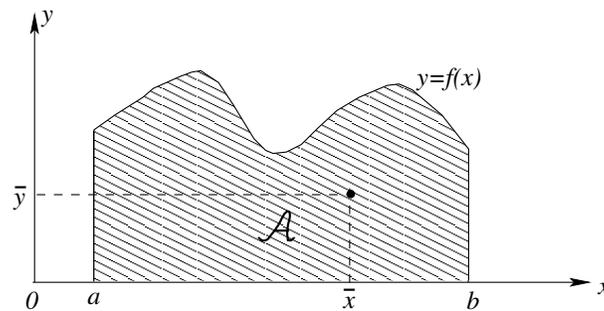


Figura 2.23: Centro de Massa.

Em teoria fuzzy centroide se refere a abscissa do ponto (\bar{x}, \bar{y}) . Portanto estamos particularmente interessado em \bar{x} .

MODELOS DE EPIDEMIOLOGIA FUZZY

Neste capítulo é proposto como hipótese principal a heterogeneidade dos indivíduos infectados a partir do pressuposto que a taxa de contato (coeficiente de transmissão) seja um conjunto fuzzy e que depende da carga viral, esta, por sua vez, é assumida ser limitada e tem possibilidades distintas de ocorrência.

3.1 O modelo SI fuzzy

Os conceitos de suscetível, bem como de infeccioso, são incertos no sentido que há diferentes graus, tanto de suscetibilidade como de infecciosidade [6].

3.1.1 O modelo determinístico SI

O modelo compartimental SI , visto no capítulo 1, descreve a dinâmica de transmissão direta de doenças, onde há contato de indivíduos suscetíveis e infectados, com ausência de recuperação e imunidade. Este modelo, visto de forma determinística, é descrito pelas equações diferenciais normalizadas com coeficiente de transmissão β , dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta S I \\ \frac{dI}{dt} = \beta S I \\ I(0) = I_0 \text{ e } S(0) = S_0 \text{ dados e } S + I = 1 . \end{array} \right.$$

cuja solução é obtida escrevendo-se na forma da equação logística

$$\frac{dI}{dt} = \beta(1 - I)I ,$$

o que resulta

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}} . \quad (3.1)$$

A função (3.1) fornece o número de infectados a cada instante t claramente, e o complementar $S(t) = 1 - I(t)$ fornece o número de suscetíveis a cada instante t .

Contudo, nos modelos clássicos não são agregados as subjetividades encontradas nos fenômenos biológicos. No que diz respeito a transmissão de doenças, muitas vezes um novo caso de infecção só ocorrerá se um número mínimo de vírus for transmitido pelo hospedeiro. Portanto, acredita-se que indivíduos com carga viral alta têm mais chance de transmitir a doença que aquele com carga baixa [4]. Desse modo, incluir aspectos de incerteza em modelos epidemiológicos e comparar os resultados da modelagem determinística e fuzzy desses modelos é o nosso objetivo neste capítulo.

3.1.2 O Modelo SI com parâmetro fuzzy

No modelo determinístico considera-se como hipótese principal, que a população em questão é homogênea, isto é, cada indivíduo transmite a doença com uma mesma chance β . Uma forma de incorporar a heterogeneidade de uma população é considerar β como um conjunto fuzzy [31] [35]. Assim, β será uma função da carga viral ν , $\beta = \beta(\nu)$, onde β mede a chance de uma transmissão ocorrer e ν é a carga viral.

Aqui, o conjunto β é representado pela Figura 3.1 e modelado pela função:

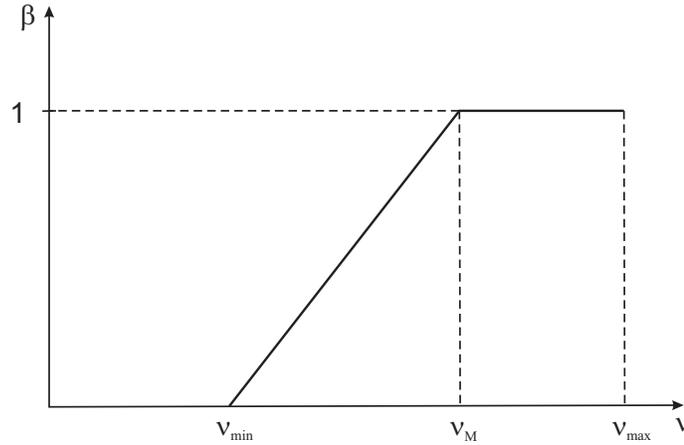


Figura 3.1: Representação do conjunto fuzzy β .

$$\beta(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se, } \nu < \nu_{min} \\ \frac{\nu - \nu_{min}}{\nu_M - \nu_{min}} & \text{se, } \nu_{min} \leq \nu \leq \nu_M \\ 1 & \text{se, } \nu_M < \nu \leq \nu_{max} . \end{cases}$$

Onde:

ν_{min} : quantidade mínima de vírus necessária para causar transmissão de doença;

ν_M : quantidade de vírus onde a transmissão é máxima;

ν_{max} : carga viral máxima que um indivíduo infectado assume.

Para tornar o modelo mais realista pode-se considerar que a quantidade de vírus no grupo estudado pode ser diferente para indivíduos diferentes. Assim, seja V a carga viral do grupo estudado, V pode ser visto como uma variável linguística, com classificação (Fracas (V_-), Média (V_+) e Forte (V^+)) dada por especialista. Vamos considerar que a carga viral distribui-se na população de acordo com o número fuzzy triangular $\rho(\nu)$ (Figura 3.2) dado a seguir:

$$\rho(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se, } \nu < \bar{\nu} - \delta \\ \frac{1}{\delta}(\nu - \bar{\nu} + \delta) & \text{se, } \bar{\nu} - \delta \leq \nu \leq \bar{\nu} \\ -\frac{1}{\delta}(\nu - \bar{\nu} - \delta) & \text{se, } \bar{\nu} < \nu \leq \bar{\nu} + \delta \\ 0 & \text{se, } \nu > \bar{\nu} + \delta \end{cases} ,$$

onde o parâmetro $\bar{\nu}$ é a carga viral média e δ é a dispersão de ν .

Com as considerações acima, a solução do modelo *SI* fuzzy é dada por:

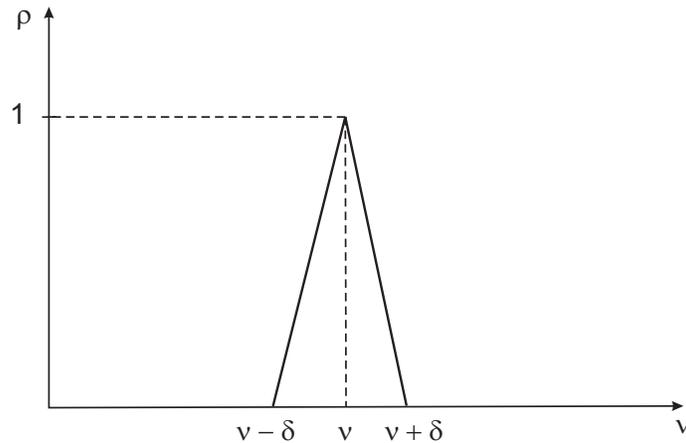


Figura 3.2: Distribuição da carga viral ν na população.

$$I(\nu, t) = \frac{I_0 e^{\beta(\nu)t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(\nu)t}}.$$

A função $I(\nu, t)$ pode ser vista com uma família de soluções do modelo determinístico para cada valor de ν fixo.

Observações:

- $I(\nu, t)$ representa o número de infectados no instante t produzido pelo contato entre um indivíduo suscetível e um infectado com a carga viral ν ;
- $I(\nu, t)$ é um número fuzzy para cada t fixo, visto que $0 \leq I(\nu, t) \leq 1$.
- Como $I(\nu, t)$ é um número fuzzy, pode-se usar um processo de defuzzificação para estimar um valor real para $I(\nu, t)$ em cada instante. Para isso pode-se usar: $FEV(I(\nu, t))$ ou $E(I(\nu, t))$, esperança fuzzy e esperança clássica, respectivamente, para encontrar um número médio de indivíduos infectados a cada instante t .

3.2 Esperança do número de infectados

A *esperança* do número de indivíduos infectados, $I(\nu, t)$, em relação ao parâmetro subjetivo β é dada por:

$$E(I(v, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} I(v, t)\rho(v)dv = \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} I(v, t)\rho(v)dv,$$

onde $I(v, t) = \frac{I_0 e^{\beta(v)t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(v)t}}$.

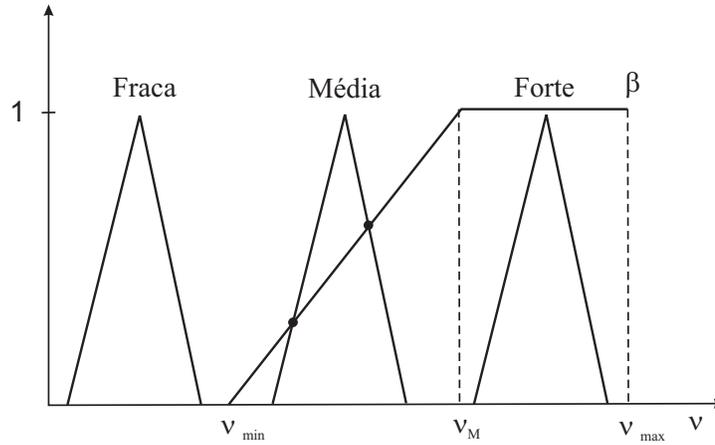


Figura 3.3: Classificação das cargas virais.

A seguir veremos três casos particulares (visualizados na Figura 3.3) das possibilidades do cálculo da esperança.

1. **Caso: Carga viral fraca** ($\bar{v} + \delta < v_{\min}$).

Neste caso, o coeficiente de transmissão $\beta(v)$ é nulo, daí temos

$$E(I(v, t)) = \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} I(v, t)\rho(v)dv = I_0$$

para todo $t > 0$.

Assim, conclui-se que a doença não propaga pois a quantidade de vírus nos indivíduos infectados é inferior a v_{\min} . Podemos interpretar essa situação como a de um grupo altamente resistente, o que faz a suscetibilidade muito baixa [4].

2. **Caso: Carga viral forte** ($\bar{v} - \delta > v_M$).

Nesta situação, a transmissão é máxima para os indivíduos suscetíveis, ou seja, o coeficiente de transmissão nos indivíduos infectados é igual a 1. Temos, então

$$E(I(v, t)) = \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} I(v, t)\rho(v)dv = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t},$$

para todo $t > 0$.

3. **Caso: Carga viral média** ($\bar{\nu} - \delta > \nu_{\min}$ e $\bar{\nu} + \delta < \nu_M$).

Para este caso, o coeficiente de transmissão é variável para todos os indivíduos infectados.

Toda distribuição de ν está na região onde $\beta(\nu) = \frac{\nu - \nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}}$ [4].

$$E(I(\nu, t)) = \int_{\bar{\nu}-\delta}^{\bar{\nu}+\delta} I(\nu, t) \rho(\nu) d\nu = \frac{1}{(a\beta)^2} \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a\bar{\nu})t} [-2 + 2\cosh(a\delta t) - \frac{1}{2} \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a\bar{\nu})t} (-1 + \cosh(2a\delta t))]$$

onde $a = \frac{1}{\nu_M - \nu_{\min}}$ e $b = \frac{-\nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}}$.

A expressão acima foi obtida a partir da integração por partes e considerando a série de Taylor até a segunda ordem da função $\ln x$ [4] [35].

3.3 Esperança fuzzy-FEV

A *esperança fuzzy* do conjunto fuzzy $I(\nu, t)$, que representa o número de infectados a cada instante t com carga viral ν , é definida por:

$$FEV(I(\nu, t)) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \min[\alpha, \mu\{I(\nu, t) \geq \alpha\}]$$

onde μ é uma medida fuzzy do conjunto $\{I(\nu, t) \geq \alpha\} = \{\nu; I(\nu, t) \geq \alpha\}$, ou seja, é a medida do conjunto clássico $[I(\nu, t)]^\alpha$.

Temos, ainda, que $H(\alpha) = \mu\{I(\nu, t) \geq \alpha\}$ tem um único ponto fixo α^* tal que $FEV(A) = \alpha^*$ Teorema 2.3 como foi visto no Capítulo 2.

Assim, $FEV(I(\nu, t)) = \sup_{0 < \alpha < 1} \min[\alpha, H(\alpha)]$. Após alguns cálculos (Apêndice I) chega-se a seguinte expressão para a função $H(\alpha)$:

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ \mu[a, \nu_{\max}] & \text{se } I_0 < \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0, & \text{se } \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde

$$a = v_{\min} + (v_M - v_{\min}) \ln \left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha} \right)^{1/t}.$$

O gráfico da função $H(\alpha)$ pode ser visto na Figura 3.4.

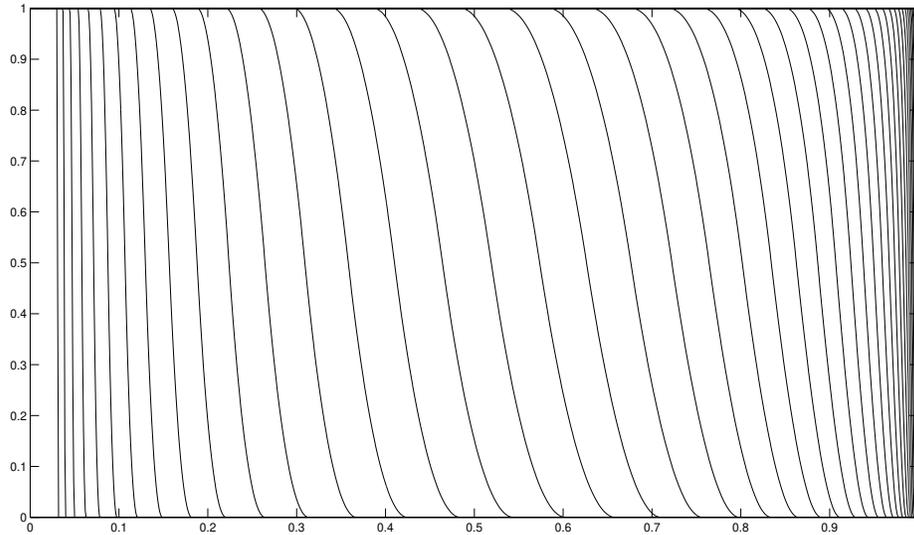


Figura 3.4: Função $H(\alpha)$.

Aqui, vamos utilizar a medida μ , dada por,

$$\mu(A) = \frac{1}{\delta} \int_A \rho(v) dv, \text{ onde } A \subset \mathbb{R}.$$

Para estudar a esperança fuzzy, $FEV(I(v, t))$, vamos considerar também os três casos como foi feito para a esperança clássica: carga viral fraca (V_-), média (V_+) e forte (V^+).

1. Caso: Carga viral fraca (V_-).

Neste caso, ρ é dada pelo número fuzzy visualizado na Figura 3.5, abaixo:

Com efeito, $v_{\min} > \bar{v} + \delta$. Como $a > v_{\min}$ tem-se $a > v_{\min} > \bar{v} + \delta \Rightarrow \rho(v) = 0$.

Para todo $v \in [a, v_{\max}]$ teremos $\mu[a, v_{\max}] = \frac{1}{\delta} \int_a^{v_{\max}} \rho(v) dv = 0$.

Dai, de (3.2) conclui-se que

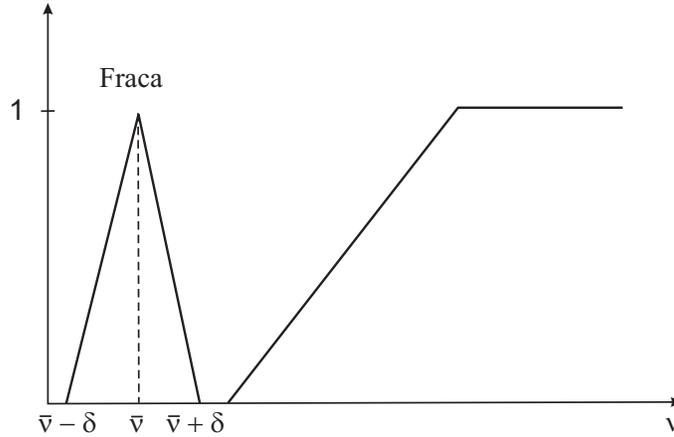


Figura 3.5: Carga viral fraca.

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ 0, & \text{se } I_0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} FEV(I(v, t)) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \min\{\alpha, H(\alpha)\} \\ &= \max\left\{ \sup_{0 \leq \alpha \leq I_0} \min\{\alpha, 1\}, \sup_{I_0 < \alpha \leq 1} \min\{\alpha, 0\} \right\} \\ &= \max\{I_0, 0\} = I_0. \end{aligned}$$

$FEV(I(v, t)) = I_0$, isto é, como todos os indivíduos infectados apresentam quantidade de vírus inferior a v_{\min} , a doença não se propaga. Logo a quantidade de infectados é sempre I_0 .

2. Caso: Carga viral forte (V^+).

Neste caso, ρ é dada pelo número fuzzy visualizado na Figura 3.6, abaixo:

Temos que $a \leq v_M \leq \bar{v} - \delta \leq \bar{v} + \delta \leq v_{\max}$.

Desta forma,

$$\mu[a, v_{\max}] = \frac{1}{\delta} \int_a^{v_{\max}} \rho(v) dv = 0 + \frac{1}{\delta} \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} \rho(v) dv = (\text{área do triângulo})/\delta = 1, \text{ logo, de (3.2),}$$

vem

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0, & \text{se } \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

o que implica

$$FEV(I(v, t)) = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}.$$

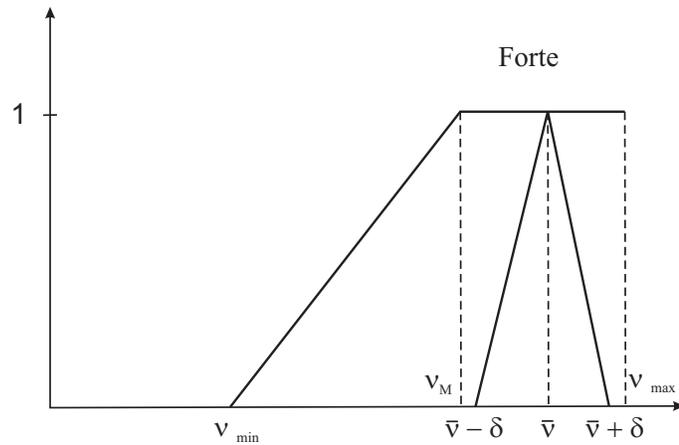


Figura 3.6: Carga viral forte.

3. Caso: Carga viral média (V_{-}^{+}).

Neste caso, ρ é visualizado na Figura 3.7.

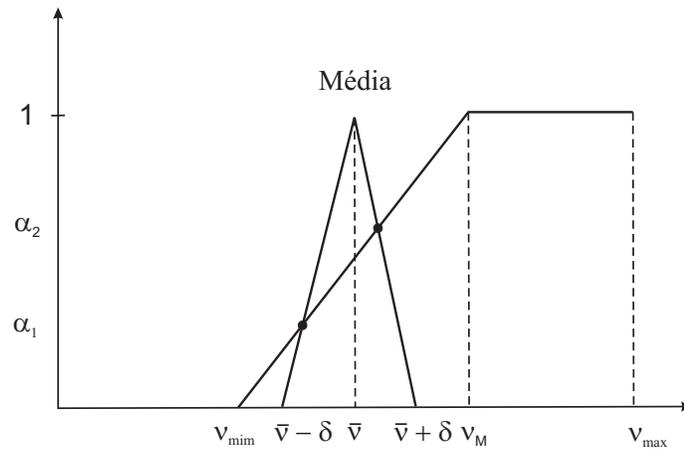


Figura 3.7: Carga viral média.

Nesta situação, tem-se $\bar{v} - \delta > v_{\min}$ e $\bar{v} + \delta < v_M$.

Temos, então:

1) Dado $0 \leq \alpha \leq I(\bar{v} - \delta, t)$, como I é uma função crescente com v , então $I(v, t) \geq \alpha$, para todo $v \in [\bar{v} - \delta, \bar{v} + \delta]$ o que implica

$$\mu\{I(v, t) \geq \alpha\} = \mu[\bar{v} - \delta, \bar{v} + \delta] = \frac{1}{\delta} (\text{área do triângulo}) = \frac{1}{\delta} \delta = 1.$$

2) Se $I(\bar{v} - \delta, t) < \alpha \leq I(v, t)$,

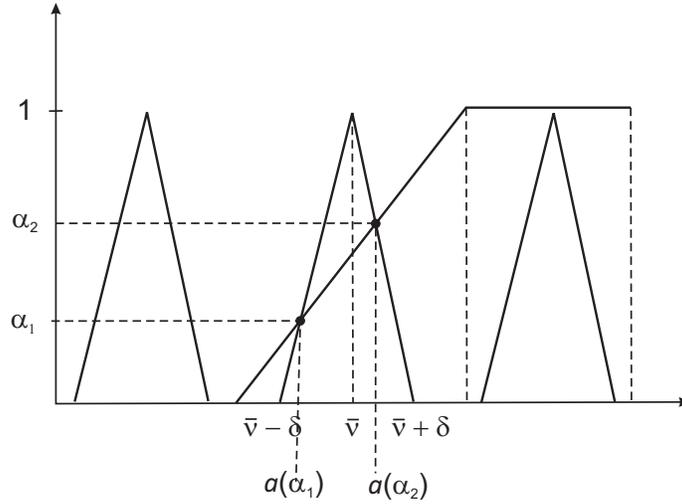


Figura 3.8: Carga viral média detalhada.

$$\begin{aligned} \text{temos } \mu\{I(v, t) \geq \alpha\} &= \mu[a, \bar{v} + \delta] = \frac{1}{\delta} \int_a^{\bar{v}} \rho(v) dv + \frac{1}{\delta} \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+\delta} \rho(v) dv \\ &= \frac{1}{\delta} \int_a^{\bar{v}} \frac{1}{\delta} (v - \bar{v} + \delta) dv + \frac{1}{\delta} \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+\delta} -\frac{1}{\delta} (v - \bar{v} - \delta) dv = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a - \bar{v} + 1}{\delta} \right)^2 \end{aligned}$$

3) Se $I(\bar{v}, t) < \alpha \leq I(\bar{v} + \delta, t)$

temos

$$\mu\{I(v, t) \geq \alpha\} = \mu[a, \bar{v} + \delta] = \frac{1}{\delta} \int_a^{\bar{v}+\delta} \rho(v) dv = \frac{1}{\delta} \int_a^{\bar{v}+\delta} -\frac{1}{\delta} (v - \bar{v} - \delta) dv = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v} - a}{\delta} + 1 \right)^2.$$

Os cálculos que auxiliam estes resultados estão no Apêndice II.

4) Se $I(\bar{v} + \delta, t) < \alpha \leq 1$ implica que $\mu\{I(v, t) \geq \alpha\} = \mu(\phi) = 0$

De (1), (2), (3) e (4) tem-se:

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I(\bar{v} - \delta, t) \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a - \bar{v}}{\delta} + 1 \right)^2, & \text{se } I(\bar{v} - \delta, t) < \alpha \leq I(\bar{v}, t) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v} - a}{\delta} + 1 \right)^2, & \text{se } I(\bar{v}, t) < \alpha \leq I(\bar{v} + \delta, t) \\ 0, & \text{se } I(\bar{v} + \delta, t) < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

De acordo com a expressão de H , acima, vemos que H é uma função contínua, decrescente com $H(0) = 1$ e $H(1) = 0$. Consequentemente, H possui um ponto fixo único (Teorema 2.3).

Uma observação importante é que para $\alpha = I(\bar{v}, t)$ tem-se $H(\alpha) = H(I(\bar{v}, t)) = 1/2$, para todo $t \geq 0$. De fato,

$$\alpha = I(\bar{v}, t) = \frac{I_0 e^{\beta(\bar{v})t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(\bar{v})t}} \Leftrightarrow \beta(\bar{v}) = \ln \left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha} \right),$$

logo,

$$a = v_{\min} + (v_M - v_{\min}) \ln \left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha} \right) \Rightarrow a = v_{\min} + (v_M - v_{\min}) \beta(\bar{v}). \quad (3.4)$$

Daí substituindo a em (3.3) obtém-se

$$H(\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\min} + (v_M - v_{\min}) \beta(\bar{v}) - \bar{v}}{\delta} + 1 \right)^2 \quad (3.5)$$

como,

$$\beta(v) = \frac{v - v_{\min}}{v_M - v_{\min}} \Rightarrow \beta(\bar{v}) = \frac{\bar{v} - v_{\min}}{v_M - v_{\min}}$$

tem-se, da equação (3.5),

$$H(\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\min} + (v_M - v_{\min}) \left(\frac{(\bar{v}) - v_{\min}}{v_M - v_{\min}} \right) - \bar{v}}{\delta} + 1 \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2},$$

isto é,

$$H(I(\bar{v}, t)) = 1/2, \text{ para todo } t.$$

Assim, $I(\bar{v}, t) = 1/2$, para algum t , o que implica $1/2$ é ponto fixo de H e, portanto,

$$FEV(I(v, t)) = \frac{1}{2} = I(\bar{v}, t) = H(I(\bar{v}, t)).$$

Observação 1: $I(\bar{v}, t) = 1/2$ quando $t = \bar{t} = \frac{v_M - v_{\min}}{v - v_{\min}} \ln \left(\frac{S_0}{I_0} \right)$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = I(\bar{v}, t) = \frac{I_0 e^{\beta(\bar{v})t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(\bar{v})t}} &\Leftrightarrow \beta(\bar{v}) = \ln \left(\frac{k \cdot 1/2}{1 - 1/2} \right)^{\frac{1}{\bar{t}}} &\Leftrightarrow \beta(\bar{v}) = \ln \left(\frac{S_0}{I_0} \right)^{\frac{1}{\bar{t}}} \\ &\Leftrightarrow t(\beta(\bar{v})) = \ln \left(\frac{S_0}{I_0} \right) &\Leftrightarrow t \left(\frac{\bar{v} - v_{\min}}{v_M - v_{\min}} \right) = \ln \left(\frac{S_0}{I_0} \right) \\ &\Leftrightarrow \bar{t} = \left(\frac{\bar{v} - v_{\min}}{v_M - v_{\min}} \right) \ln \left(\frac{S_0}{I_0} \right) \end{aligned}$$

Observação 2: $S_0 > I_0$

Observação 3: \bar{t} é exatamente o ponto de inflexão de I .

$$t > \bar{t} \Rightarrow I(\bar{v}, t) > FEV[I(\bar{v}, t)] \quad \text{e} \quad t < \bar{t} \Rightarrow I(\bar{v}, t) < FEV[I(\bar{v}, t)].$$

3.4 O modelo SIS fuzzy

Para este modelo, além do taxa de transmissão β , a taxa de recuperação γ é também considerada um conjunto fuzzy.

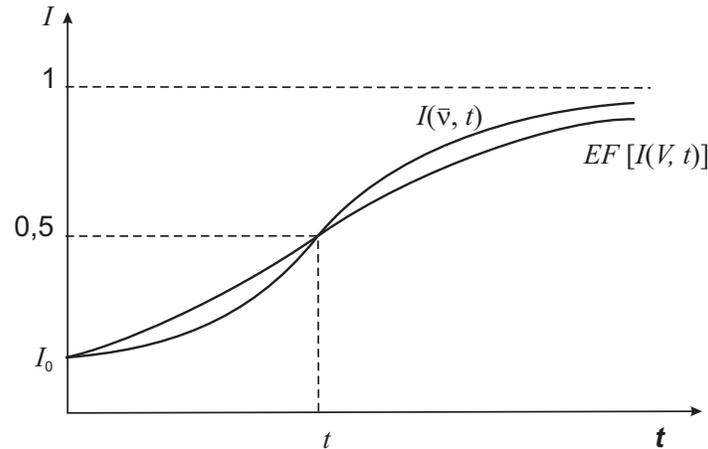


Figura 3.9: $FEV[I(V, t)]$: esperança fuzzy. e $I(\bar{v}, t)$: clássico.

3.4.1 O modelo determinístico SIS

O modelo SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível) é descrito pelo sistema de equações diferenciais dado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \quad (1.a) \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (1.b) \\ I(0) = I_0 \quad \text{e} \quad S(0) = S_0 \text{ dados.} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Onde β e γ são as taxas de contatos adequados e de recuperação, respectivamente, e $S + I = 1$.

A solução desse sistema é dado por:

$$I(t) = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \left(\frac{\beta - \gamma}{I_0} - \beta\right)e^{-t(\beta - \gamma)}}.$$

Do ponto de vista biológico, deve-se ter $\beta \geq \gamma$.

3.4.2 O Modelo SIS com parâmetro fuzzy

Semelhante ao que se fez para o modelo SI, supõe-se então que os parâmetros β e γ dependem da carga viral v e são conjuntos fuzzy. Assim, podemos considerar β e γ modelados pelas funções:

$$\beta(v) = \begin{cases} 0 & \text{se, } v < v_{min} \\ \frac{v - v_{min}}{v_M - v_{min}} & \text{se } v_{min} \leq v \leq v_M \\ 1 & \text{se, } v_M < v \leq v_{max} \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma(v) = \frac{\gamma_0 - 1}{v_{max}} + 1.$$

Estas funções são visualizadas na Figura 3.10, a seguir.

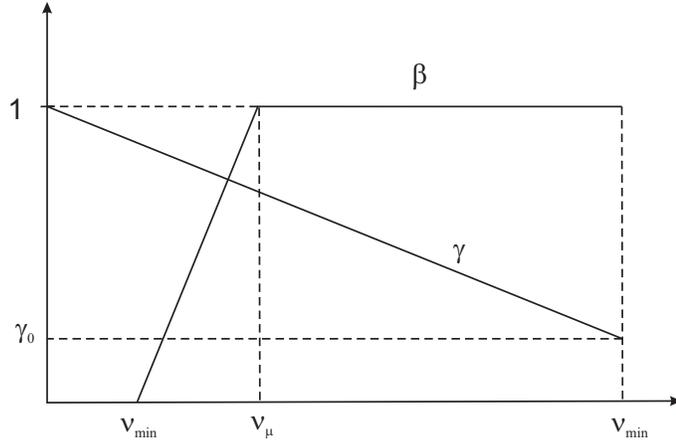


Figura 3.10: Representação dos conjuntos fuzzy β e γ .

Com essas considerações a solução analítica do modelo SIS fuzzy é dado a seguir:

$$I(v, t) = \frac{\beta(v) - \gamma(v)}{\beta(v) + \left[\frac{\beta(v) - \gamma(v)}{\gamma_0} - \beta(v) \right] e^{-[\beta(v) - \gamma(v)]t}}.$$

Sendo que $I(v, t)$ é a quantidade de indivíduos infectados no tempo t devido a carga viral v .

Observe que, semelhante ao que foi feito no capítulo 1, os pontos de equilíbrios são:

- $P_1 = (1, 0)$ é instável;
- $P_2 = \left(\frac{\gamma(v)}{\beta(v)}, 1 - \frac{\gamma(v)}{\beta(v)} \right)$ é estável se e somente se $\frac{\gamma(v)}{\beta(v)} < 1$.

Daí existe um ponto de bifurcação, a solução de $\frac{\gamma(v)}{\beta(v)} = 1$ se, e somente se,

$$v^* = \frac{v_M v_{max}}{v_{max} + (1 - \gamma_0)(v_M - v_{min})} \quad \text{e} \quad v_{min} \leq v^* \leq v_M.$$

O valor v^* é chamado de valor de bifurcação do modelo, pois se $v < v^*$ o modelo admite somente P_1 como equilíbrio e, se $v > v^*$ o modelo admite também o ponto P_2 como equilíbrio. Assim, v^* pode ser pensado como um parâmetro de controle da doença.

Para este modelo temos a taxa de reprodução básica $R_0 = \frac{\beta(v)}{\gamma(v)}$; a carga viral é dada pela função,

$$\rho(v) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}(v - \bar{v} + \delta) & \text{se } v \in (\bar{v} - \delta, \bar{v}] \\ \frac{1}{\delta}(v - \bar{v} - \delta) & \text{se } v \in (\bar{v}, \bar{v} + \delta] \\ 0 & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

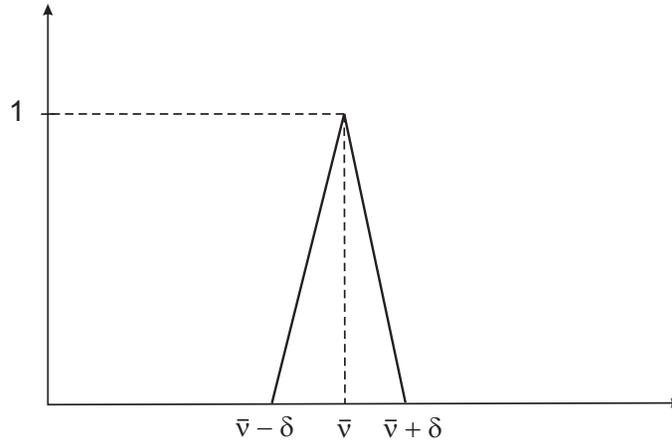


Figura 3.11: Distribuição da carga viral ρ .

Para obter um valor médio para R_0 , vamos definir taxa de reprodução básica fuzzy R_0^f ,

$$R_0^f = \frac{1}{\gamma_0} FEV[\gamma_0 R_0] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \min[\alpha, H(\alpha)],$$

onde

$$H(\alpha) = \mu\{v : \gamma_0 R_0(v) \geq \alpha\} \quad \text{e} \quad \mu(A) = \sup_{v \in A} \rho(v).$$

Observação 3.1. Não é possível utilizar a esperança clássica, pois $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v) dv$ pode ser diferente de 1 o que não faria sentido.

Observação 3.2. $R_0(v)$ pode ser maior do que 1, portanto não é um conjunto fuzzy. No entanto como $\max\{R_0(v)\} = \frac{1}{\gamma_0}$, então $\gamma_0 R_0 \leq 1$, e, portanto, FEV está bem definida.

$\gamma_0 R_0$ é uma função não decrescente (Ver Apêndice III), portanto $H(\alpha) = \mu[v', v_{max}]$, onde v' é a solução de $\gamma_0 R_0(v) = \alpha$.

Dividindo em dois casos (Ver Apêndice IV):

- 1) $0 < \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} \Leftrightarrow v_{min} \leq v' \leq v_M$, onde $v' = \frac{[\alpha(v_M - v_{min}) + \gamma_0 v_{min}]v_{max}}{\gamma_0 v_{max} - \alpha(\gamma_0 - 1)(v_M - v_{min})}$;
- 2) $\frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} \leq \alpha < 1 \Leftrightarrow v_M \leq v' \leq v_{max}$ onde $v' = \frac{v_{max}}{1 - \gamma_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\alpha}\right)$

Vamos considerar que uma população com carga viral V , esta é considerada uma variável linguística, com classificação (Fraca (V_-), Média (V_\pm) e Forte (V^+)), visualizado na Figura 3.12 a seguir:

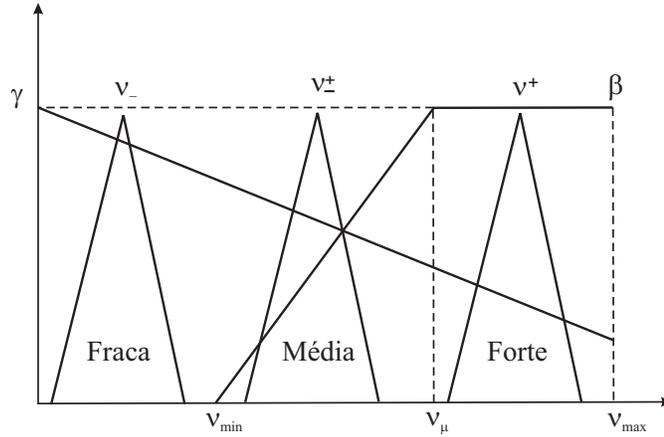


Figura 3.12: Representação das cargas virais e dos conjuntos fuzzy β e γ .

Caso (1): **Carga viral fraca** (V_-). Temos

$\bar{v} - \delta < v + \delta < v_{min}$ o que implica $\rho(v) = 0$, para todo $v \in [v', v_{max}]$ teremos $H(\alpha) = \sup_{v' \leq v \leq v_{max}} \rho(v) = 0$.

Daí, $FEV[\gamma_0 R_0] = 0 < \gamma_0$ o que conclui-se, $R_0^f = \frac{0}{\gamma_0} = 0 < 1$. Portanto a doença não se propaga.

Caso (2): **Carga viral forte** (V^+).

Aqui tem-se $v_M \leq \bar{v} - \delta < \bar{v} + \delta < v_{max}$. Temos que

$$\gamma_0 R_0(\bar{v}) = \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} = \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})}.$$

- 1) Se $0 < \alpha \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \Leftrightarrow v' \leq \bar{v} \Rightarrow \mu\{v', v_{max}\} = \sup_{v' \leq v \leq v_{max}} \rho(v) = 1$
- 2) Se $\frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} < \alpha \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \Leftrightarrow \bar{v} < v' \leq \bar{v} + \delta \Rightarrow \mu[v', v_{max}] = \sup_{v' \leq v \leq v_{max}} \rho(v) = \rho(v')$
- 3) Se $\frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)} < \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \bar{v} \leq v' < v_{max} \Rightarrow \rho(v) = 0, \forall v \in [v', v_{max}] \Rightarrow H(\alpha) = 0$.

De (1), (2) e (3) tem-se

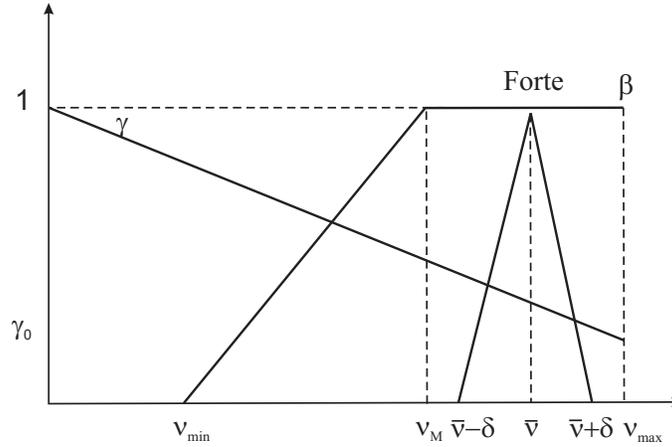


Figura 3.13: Carga viral forte.

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \\ \rho(v') & \text{se } \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \leq \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \\ 0 & \text{se } \gamma(\bar{v} + \delta) \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Observação 3.3. Para $\delta > 0$, se H é uma função contínua decrescente, $H(0) = 1$ e $H(1) = 0$. Portanto $FEV[\gamma_0 R_0] = \text{ponto fixo de } H$.

Como $H(\alpha^*) = \alpha^* \Leftrightarrow \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \leq \alpha^* \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)}$ então $\frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \leq FEV[\gamma_0 R_0] \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)}$
 $\Rightarrow \gamma < \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \leq FEV[\gamma_0 R_0] \leq \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \Rightarrow 1 < \frac{FEV[\gamma_0 R_0]}{\gamma_0} \Rightarrow R_0^f > 1$ o que significa que a doença é endêmica.

Para encontrar os pontos fixos faz-se, $H(\alpha) = \alpha \Rightarrow \rho(v') = \alpha \Leftrightarrow$ (pois para $v' \in [\bar{v} - \delta, \bar{v}] \Rightarrow \alpha 1 < \frac{\gamma_0}{\gamma(\bar{v})} \Rightarrow H$ não tem ponto fixo) $-\frac{1}{\delta}(v' - \bar{v} - \delta) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\bar{v} - v'}{\delta} + 1 = \alpha$. Substituindo $v' = \frac{v_{\max}}{1 - \gamma_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\alpha}\right)$ de (2) (pois, neste caso, $v_M < v' \leq v_{\max}$) tem-se, $(1 - \gamma_0)\delta\alpha^2 + [(\gamma_0 - 1)(\bar{v} + \delta) + v_{\max}]\alpha - \gamma_0\gamma_{\max} = 0$, $\exists! \delta > 0$ que satisfaz a equação acima.

Caso (3): **Carga viral é média** (V_{\pm}^+).

Aqui tem-se, $\bar{v} - \delta > v_{\min}$ e $\bar{v} + \delta \leq v_M$

- Se $0 \leq \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})}$. Como v' é a solução de $\gamma_0 R_0(v) \leq 0$ e $\gamma_0 R_0$ é não decrescente então $v' \leq \bar{v} \Rightarrow \mu[v', v_{\max}] = \sup_{v' \leq v \leq v_{\max}} \rho(v) = 1 \Rightarrow H(\alpha) = 1$

- Se $\gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} < \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)}$. Com argumento semelhante dos imediatamente acima tem-se, $\bar{v} < v' \leq \bar{v} + \delta \Rightarrow \mu[v', v_{\max}] = \rho(v') = H(\alpha)$.
- Se $\gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} < \alpha \leq 1 \Rightarrow \bar{v} + \delta < v' \leq v_{\max} \Rightarrow H(\alpha) = 0$ ou

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \alpha < \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \\ \rho(v'), & \text{se } \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} < \alpha \leq \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \\ 0, & \text{se } \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

De forma análoga ao caso (2) tem-se,

$$\frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq \frac{FEV[\gamma R_0]}{\gamma_0} \leq \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \Rightarrow \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq R_0^f \leq \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \quad (3.7)$$

- Se $\bar{v} > v^*$ (solução de $\beta(v) = \gamma(v)$) $\Rightarrow \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq \frac{\beta(v^*)}{\gamma(v^*)} = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} R_0^f > \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} > 1$ logo a doença será endêmica. Por outro lado, se $v + \gamma < v^* \Rightarrow R_0^f \leq \frac{\beta(v^*)}{\gamma(v^*)} < 1$ então a doença se extingue.

Observação 3.4. Neste caso, também é possível obter precisamente o ponto fixo de H .

Os pontos fixos de H estão em $\left[\gamma_0 \frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})}, \gamma_0 \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)} \right]$. Daí

$$H(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \rho(v') = \alpha \Leftrightarrow \rho(v') = \alpha \Leftrightarrow \frac{\bar{v} - v'}{\delta} + 1 = \alpha, \quad v_{\max} \leq \bar{v} \leq v \leq \bar{v} + \delta \leq v_M$$

substituindo v' por (1) tem-se

$$(\gamma_0 - 1)\delta\alpha^2 + \left[(1 - \gamma_0)(\bar{v} + \delta) - v_{\max} - \frac{\gamma_0\delta v_{\max}}{v_M - v_{\min}} \right] \alpha + \gamma_0 v_{\max} \beta(\bar{v} + \delta) = 0$$

que possui somente uma solução positiva.

3.4.3 Comparação entre R_0 e R_0^f

Nos três casos analisados tivemos:

$$\frac{\beta(\bar{v})}{\gamma(\bar{v})} \leq R_0^f \leq \frac{\beta(\bar{v} + \delta)}{\gamma(\bar{v} + \delta)},$$

como $R_0(\nu) = \frac{\beta(\nu)}{\gamma(\nu)}$ é contínua e crescente em $[\bar{\nu}, \bar{\nu} + \delta]$, então, pelo *T.M.V.* $\exists!$ $\hat{\nu} \in [\bar{\nu}, \bar{\nu} + \delta]$ tal que,

$$R_0^f = \rho_0(\hat{\nu}).$$

Assim, a análise feita em torno de R_0^f pode ser feita através de $R_0(\hat{\nu})$:

1. A carga viral é fraca (V_-)

$\hat{\nu} \leq \bar{\nu} + \delta < \nu_{\min} \Rightarrow R_0(\hat{\nu}) = 0$. A doença não se estabelecerá.

2. A carga viral é alta (V^+)

$\hat{\nu} \geq \bar{\nu} > \bar{\nu} - \delta \geq \nu_M \Rightarrow R_0(\hat{\nu}) = \frac{1}{\gamma(\hat{\nu})} > 1$. A doença será uma endemia.

3. A carga viral é média (V_-^+)

se $\nu^* > \nu' \Rightarrow R_0(\hat{\nu}) = \frac{\beta(\hat{\nu})}{\gamma(\hat{\nu})} < \frac{\beta(\nu^*)}{\gamma(\nu^*)} = 1$. A doença se extinguirá.

se $\nu^* < \nu' \Rightarrow R_0(\hat{\nu}) = \frac{\beta(\hat{\nu})}{\gamma(\hat{\nu})} < \frac{\beta(\nu^*)}{\gamma(\nu^*)} > 1$. A doença se estabelecerá.

MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS P-FUZZY

Os sistemas de equações diferenciais são utilizados na modelagem de diversos fenômenos, inclusive os biológicos. A característica essencial desses modelos está na precisão das soluções, pois a identificação e o diagnóstico de determinadas doenças, por exemplo, apresentam diversos tipos de subjetividades tanto nas variáveis de estado quanto nos parâmetros.

Em se tratando de subjetividades (fuzziness) nos modelos variacionais fuzzy, temos uma fuzziness demográfica quando a variável de estado é um subconjunto fuzzy, e fuzziness ambiental quando somente os parâmetros são considerados subconjuntos fuzzy. Em geral ambos os tipos de fuzziness estão presentes também nos fenômenos biológicos [14].

Segundo [21], podemos notar um interesse pela teoria dos conjuntos fuzzy cada vez mais crescente por profissionais e pesquisadores das mais diversas áreas dada a sua capacidade de explorar variáveis linguísticas, da possibilidade de desenvolver raciocínios mais próximos do humano, da sua diversidade de operações e da sua potencialidade em aplicações.

Afim de proporcionar métodos alternativos de modelagem matemática em epidemiologia principalmente na interação entre indivíduos infectados e suscetíveis faremos neste capítulo algumas comparações entre os modelos determinísticos, p-fuzzy e esperança fuzzy utilizando o software desenvolvido por João Silva em [38] em conjunto com software Matlab.

4.1 Base de regras de sistemas p-fuzzy unidimensionais inibidos

Como foi visto no capítulo 2 os sistemas p-fuzzy podem ser utilizados na modelagem de fenômenos onde o crescimento é exponencial e assintótico. Em epidemiologia, os modelos de crescimento inibido são aqueles que se pressupõe a existência de uma capacidade suporte k , geralmente determinada por fatores ambientais e intrínsecos à espécie [10]. Vamos considerar o sistema p-fuzzy em que a variável de entrada no controlador é a *população* (Figura 4.1) e a saída a *variação* (Figura 4.2). A base de regras geral de um sistemas p-fuzzy unidimensional com crescimento inibido é dado a seguir:

1. Se população é Baixa(B) então variação é Baixa positiva(Bp);
2. Se população é Média baixa(Mb) então variação é Média positiva(Mp);
3. Se população é Média(M) então variação é Alta positiva(Ap);
4. Se população é Média alta(Ma) então variação é Média positiva(Mp);
5. Se população é Alta(A) então variação é Baixa positiva(Bp);
6. Se população é Altíssima(AI) então variação é Baixa negativa(Bn).

Este sistema p-fuzzy pode ser utilizado para modelar situações que, na matemática clássica são descritas por modelos inibidos tais como: o de Gompertz, o de Verhulst, o de Von Bertalanffy, o Exponencial Assintótico etc. Além disso, a modelagem p-fuzzy pode ser utilizada também para estimar parâmetros destes modelos clássicos [24].

Em relação ao software [38] (Figura 4.3), este foi desenvolvido na linguagem C++, que pode ser utilizado para estimar parâmetros a partir de um conjunto de dados tabelados.

4.2 Sistemas interativos p-fuzzy

Sistemas epidemiológicos são essencialmente dinâmicos (em particular a epidemiologia das doenças transmissíveis) e, assim sendo, estudar a aplicação da lógica fuzzy a estes sistemas consiste em estudarmos os sistemas dinâmicos fuzzy. No entanto, sistemas dinâmicos fuzzy são uma

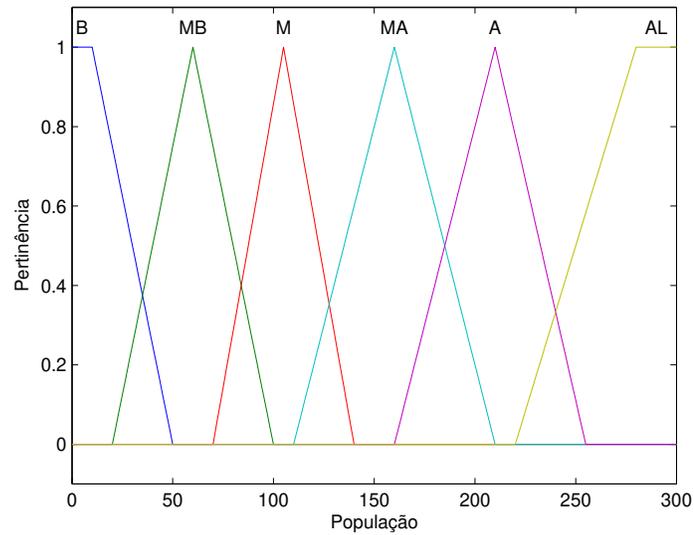


Figura 4.1: Conjuntos fuzzy de entrada população.

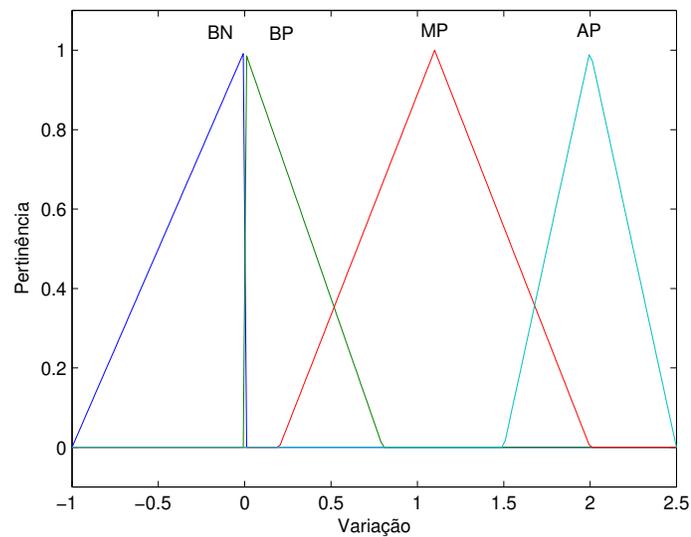


Figura 4.2: Conjuntos fuzzy de saída variação.

área relativamente recente de pesquisa, não havendo ainda tratamentos matemáticos completamente estabelecidos sobre esses sistemas, principalmente sistemas não lineares e acoplados, que é o caso dos sistemas epidemiológicos [21]. Um trabalho recente que trata da estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações a biomatemática é a tese de doutorado de Silva [24] que

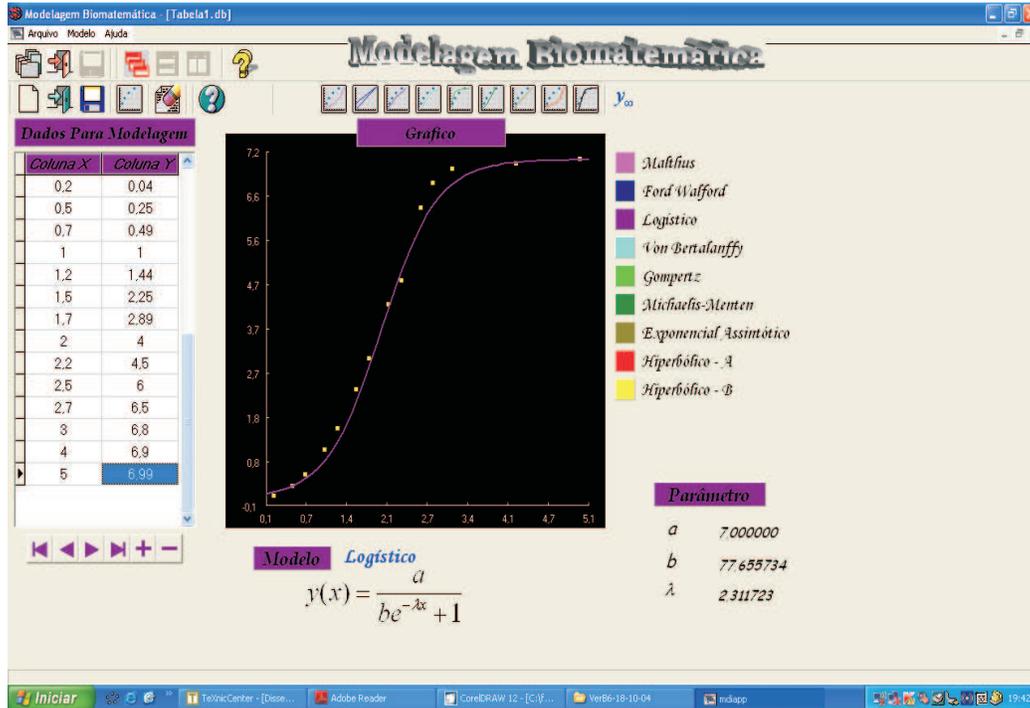


Figura 4.3: Um software para modelagem de fenômenos biológicos.

se tornou uma ferramenta importante na modelagem dos fenômenos epidemiológicos.

4.2.1 Modelo SI p-fuzzy

No Capítulo 1 foi feita uma abordagem determinística dos modelos compartimentais SI , SIS e SIR que são modelos epidemiológicos de transmissão direta onde há interações entre indivíduos suscetíveis e infectados. O modelo mais simples é o modelo SI (neste modelo os indivíduos infectados não se recuperam) e o sistema de equações diferenciais clássicas que o descreve é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI \end{cases}$$

com $S(t) + I(t) = 1$, onde S é a proporção de indivíduos suscetíveis, I é a proporção de indivíduos infectados e β é o coeficiente de transmissão. Dada a condição inicial (S_0, I_0) , a solução analítica

deste modelo é:

$$\begin{cases} S(t) = 1 - I(t) \\ I(t) = \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Notemos que num processo biológico o modelo SI desencadeia um processo de inibição da população tanto dos indivíduos suscetíveis (limiar) quanto dos indivíduos infectados (capacidade suporte), dando estabilidade depois de algum tempo. Para este modelo clássico propomos o modelo SI p-fuzzy com variável de entrada I (infectados) e variável de saída VI (variação de I) e base de regras típica de um sistema p -fuzzy unidimensional inibido:

1. Se I é baixo então VI é baixa;
2. Se I é médio Baixo então VI é média baixa;
3. Se I é médio alto então VI é média baixa;
4. Se I é média então VI é alta;
5. Se I é alto então VI é baixa.

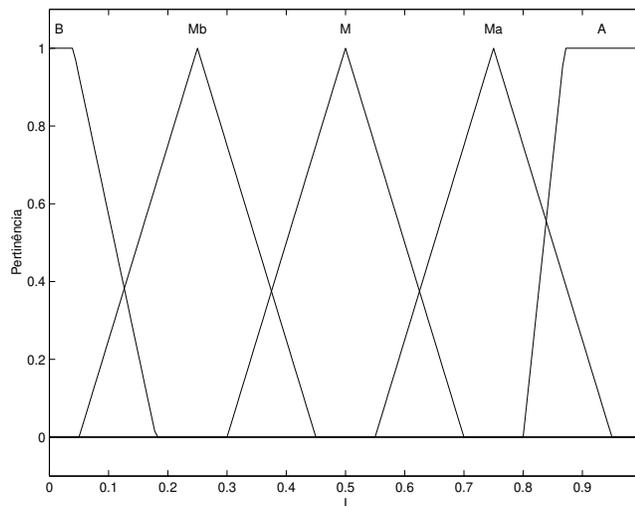


Figura 4.4: Entrada I do modelo SI .

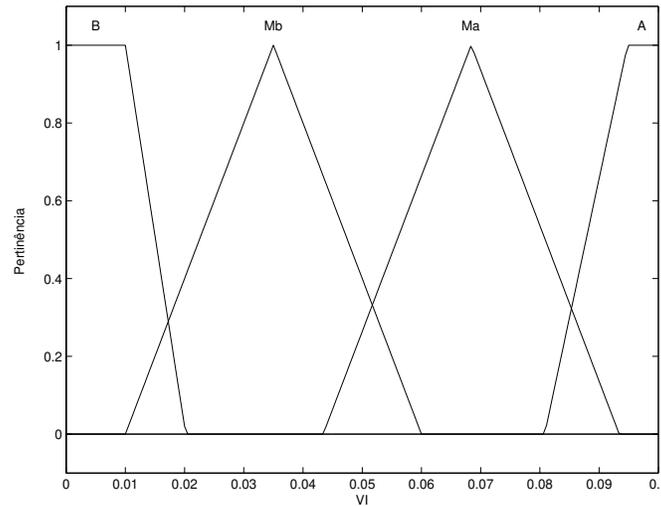


Figura 4.5: Saída VI do modelo SI .

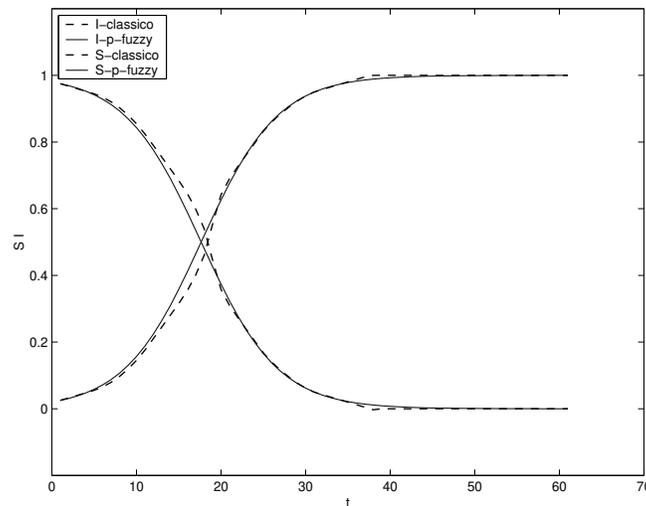


Figura 4.6: Soluções do modelo SI determinístico e p -fuzzy.

Para obter a Figura 4.6 foram utilizados os dados tabelados do sistema p -fuzzy do software [38], estimando assim o coeficiente de transmissão $\beta = 0.22$ para a equação (4.1) e também foi utilizado o software Matlab que mostra os gráficos das curvas S e I determinísticos (linha contínua) e os gráficos de S e I p -fuzzy (linha tracejada).

Segundo [24], como o modelo SI determinístico é estável em $(1; 0)$, não é possível utilizar um conjunto viável de equilíbrio (conforme a definição 2.18), cujo número 1 seja ponto de equilíbrio deste conjunto. Em situações extremas como esta, propomos as duas alternativas: aumentamos o

domínio da variável I e procedemos como nos casos anteriores ou, como a estabilidade é assintótica, fixamos $VI = 0$ quando tivermos $I > 1$, o que forçará a convergência para 1. Optou-se pela última alternativa como melhor forma de representação.

4.2.2 Modelo SIS p-fuzzy

Como foi visto no primeiro capítulo, no modelo compartimental SIS os indivíduos infectados voltam a ser suscetíveis depois de algum tempo. Este modelo é descrito pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I & (1.a) \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I & (1.b) \end{cases} \quad (4.2)$$

onde β é o coeficiente de transmissão e γ é o coeficiente de recuperação. Dada a condição inicial (S_0, I_0) e sabendo que a população se conserva, a solução analítica deste modelo é:

$$I(t) = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \left(\frac{\beta - \gamma}{I_0} - \beta\right)e^{-t(\beta - \gamma)}}$$

$$S(t) + I(t) = 1 .$$

Do ponto de vista biológico, deve-se ter $\beta \geq \gamma$.

Podemos considerar a base de regras para o modelo SIS p-fuzzy a mesma do modelo p-fuzzy SI . As funções de pertinência da variável de entrada I são dadas na Figura 4.7 e as funções de pertinência da variável de saída VI são dadas na Figura 4.8. Após a utilização do software [38] e do software Matlab chega-se as soluções do modelo p-fuzzy visualizadas na Figura 4.9, onde nota-se a curva contínua representando a solução I e a curva pontilhada representando a solução S . Podemos observar que as curvas são parecidas com as soluções do modelo SIS clássico comentadas no capítulo 1.

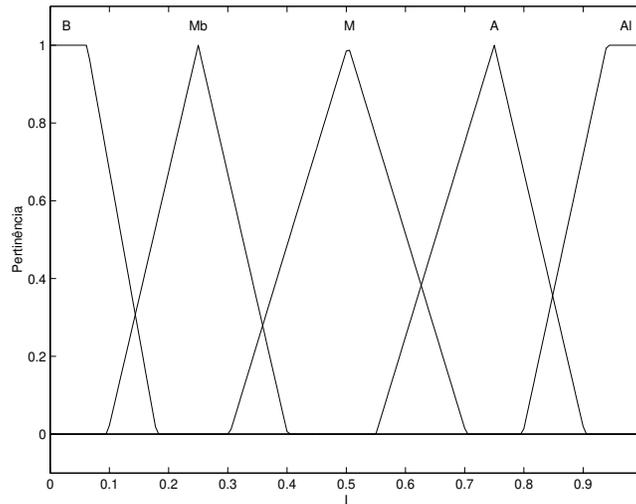


Figura 4.7: Variável I do modelo SIS .

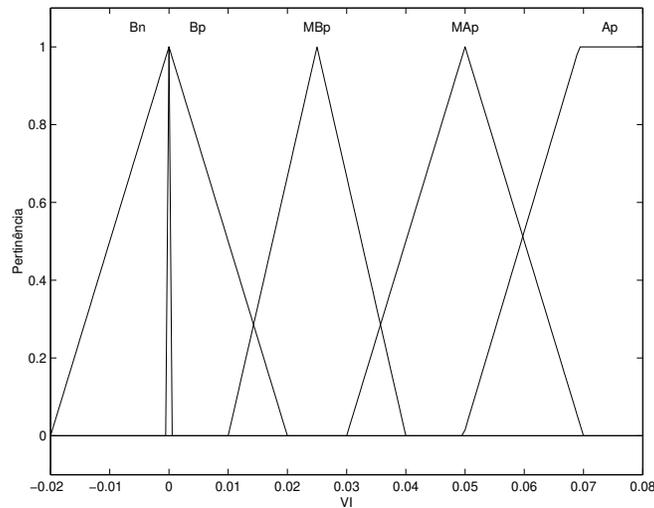


Figura 4.8: Variação VI do modelo SIS .

4.2.3 Comparação entre os modelos clássicos, p-fuzzy e esperança fuzzy

Os modelos clássicos de Dinâmica Populacional e/ou Epidemiologia, em geral, são dados por um sistema de equações diferenciais e tem por característica essencial, na modelagem matemática, a precisão obtida nas previsões do fenômeno. Neste caso, os parâmetros dos modelos são frequentemente tomados como valores médios obtidos a partir de um conjunto de dados, de tal maneira que o modelo passa a ser deterministicamente conhecido [33]. Por outro lado, nos mod-

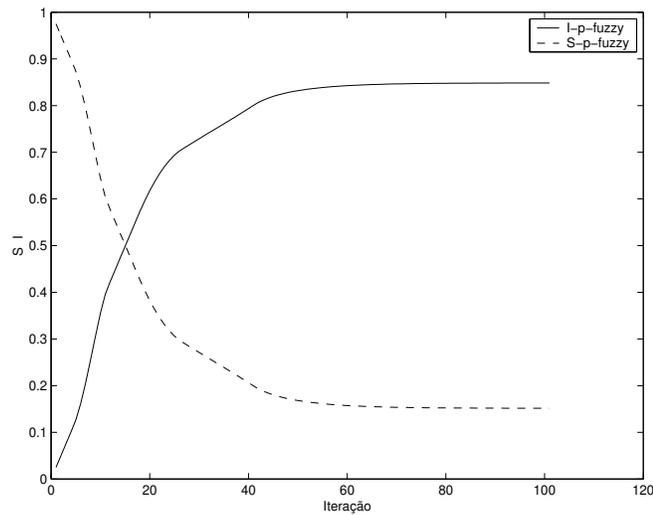


Figura 4.9: Soluções do modelo *SIS* p-fuzzy.

elos estocásticos, as soluções médias dos modelos são obtidas a posteriori quando se tem alguma distribuição estatística de dados referentes ao fenômeno analisado [4].

Entretanto, se pretendemos modelar alguma situação onde seus elementos ou variáveis são heterogêneos, relativamente a alguma característica, devemos considerar o comportamento desta característica no processo evolutivo [4].

Uma alternativa de modelagem para situações de incerteza de conhecimento parcial, comum em fenômenos epidemiológicos, é a utilização da esperança fuzzy. Essa metodologia, que requer cálculos complexos e trabalhosos (observados no capítulo 3 e no apêndice deste trabalho), trabalha com os valores médios dos indivíduos em uma população supostamente heterogênea.

Outra alternativa, estudada no capítulo 2, é a modelagem dos fenômenos epidemiológicos a partir de regras da forma “se-então”, que designarão os controladores fuzzy, os quais, neste contexto, são do tipo Mamdani e para o método de defuzzificação do centro de gravidade. Os controladores fuzzy dão a dinâmica aos sistemas p-fuzzy; as soluções obtidas nesses sistemas são aparentemente mais grosseiras em comparação com as determinísticas, mas são mais realistas, pois englobam toda a subjetividade descrita por um especialista do fenômeno estudado[24].

Para produzir uma trajetória (linha contínua na Figura 4.10) compatível com a trajetória do modelo logístico clássico (linha tracejada na Figura 4.10) usando os sistemas dinâmicos p-fuzzy foi necessário o uso dos software [38] e Matlab. Os resultados dos experimentos podem ser

visualizados na Figura 4.10 onde é feito fazemos uma comparação entre os modelos p-fuzzy, esperança fuzzy e clássica.

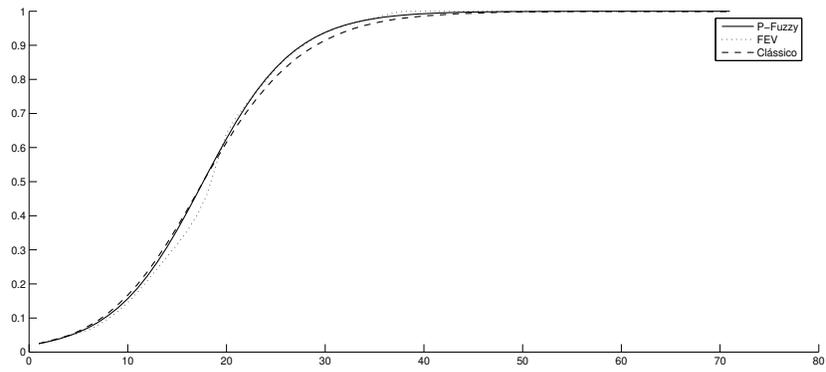


Figura 4.10: Curvas: p-fuzzy, FEV e clássica.

Conclusões

A proposta apresentada nesse trabalho aponta a utilização de uma metodologia que visa simular alguns modelos epidemiológicos por meio de sistemas baseados em regras fuzzy, a partir do pressuposto de que a incerteza incorporada em variáveis e/ou parâmetros é eficientemente tratada por estes sistemas.

Para tanto, inicialmente foram apresentadas soluções de modelos epidemiológicos determinísticos através de sistemas de equações diferenciais seguidos de uma análise comparativa com o modelo gerado a partir tanto da esperança fuzzy quanto dos sistemas p-fuzzy, que apresentaram soluções compatíveis com os resultados clássicos.

Identificamos que essas soluções dispuseram de um alto grau de confiabilidade a partir da possibilidade de tornar os fenômenos mais próximos da realidade ao permitir o aceite de todas as informações fornecidas pelos especialistas. E é a partir desse contexto, que consideramos a Teoria dos Conjuntos Fuzzy um avanço na constituição de modelos matemáticos.

Apêndice I

Cálculo da função $H(\alpha)$

$$H(\alpha) = \mu\{I(v, t) \geq \alpha\} = \{v; I(v, t) \geq \alpha\}$$

$$\begin{aligned} I(v, t) \geq \alpha &\Leftrightarrow \frac{I_0 e^{\beta(v)t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(v)t}} \geq \alpha \Leftrightarrow I_0 e^{\beta(v)t} \geq (s_0 + I_0 e^{\beta(v)t})\alpha \\ &\Leftrightarrow I_0 e^{\beta(v)t} \geq \frac{1}{I_0} (S_0 + I_0 e^{\beta(v)t})\alpha \Leftrightarrow \frac{S_0}{I_0} + e^{\beta(v)t} \alpha \\ &\Leftrightarrow e^{\beta(v)t} \geq k\alpha + \alpha e^{\beta(v)t} \Leftrightarrow (1 - \alpha)e^{\beta(v)t} \geq k\alpha \\ &\Leftrightarrow e^{\beta(v)t} \geq \frac{k\alpha}{1 - \alpha} \Leftrightarrow e^{\beta(v)} \geq \left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow \beta(v) \geq \ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

Logo,

$$H(\alpha) = \mu\left\{v : \beta(v) \geq \ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}}\right\}. \quad (3)$$

1. Suponhamos que $\ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}} \leq 0$, como $0 \leq \beta(v) \leq 1$, então $\beta(v) \geq \ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}}$, $k\alpha$. Daí

$$H(\alpha) = \mu\{[0, 1]\} = 1.$$

2. Suponhamos que, $0 \leq \ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}} \leq 1$

Para facilitar o entendimento façamos $c = \ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}}$, logo $\{v; \beta(v) \geq c\} = [v', v_{\max}]$ ou como em [35], $[a, v_{\max}]$ onde $a = v_{\min} + (v_M - v_{\min}) \ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}}$.

Graficamente (Figura 11):

$$c = \beta(v') = \frac{v' - v_{\min}}{v_M - v_{\min}} \Leftrightarrow v' = v_{\min} + (v_M - v_{\min})c$$

3. Suponhamos que, $\ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}} > 1$, claramente tem-se, $\{v : \beta(v) \geq \ln\left(\frac{k\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{t}}\} = \emptyset$

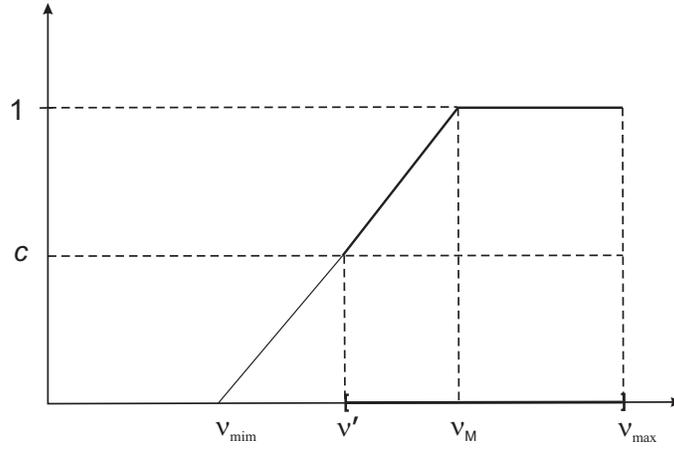


Figura 11: Representação do nível c .

$$\Rightarrow \mu \left\{ v : \beta(v) \geq \ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} = 0 \right\}.$$

Resumindo as condições 1., 2. e 3. tem-se, de (3),

$$H(\alpha) \begin{cases} 1, & \text{se } \ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} \leq 0 \\ \mu[a, v_{\max}], & \text{se } 0 < \ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} \leq 1 \\ 0, & \text{se } \ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Podemos arrumar a equação acima,

$$\begin{aligned} 1. \ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} \leq 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right) \leq 1 \Leftrightarrow k\alpha \leq 1-\alpha \Leftrightarrow \alpha(k-1) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\frac{S_0}{I_0} + 1} = \frac{1}{\frac{S_0+I_0}{I_0}} = \frac{1}{\frac{1}{I_0}} = I_0 \text{ como } \alpha \geq 0, \text{ tem-se} \end{aligned}$$

$$\ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq I_0 \quad (i)$$

$$\begin{aligned} 2. \ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} > 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} > e \Leftrightarrow \frac{k\alpha}{1-\alpha} > e^t \Leftrightarrow \alpha k > (1-\alpha)e^t \Leftrightarrow \alpha(k+e^t) > e^t \\ &\Leftrightarrow \alpha > \frac{e^t}{k+e^t} = \frac{e^t}{\frac{S_0}{I_0} + e^t} = \frac{e^t}{\frac{S_0+e^t I_0}{I_0}} = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}. \text{ Daí,} \end{aligned}$$

$$\ln \left(\frac{k\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{i}} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \quad (ii)$$

então

$$0 < \ln\left(\frac{k\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{r}} \leq 1 \stackrel{(i),(ii)}{\iff} I_0 < \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}$$

$$\ln\left(\frac{k\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{r}} > 1 \stackrel{(ii)}{\iff} \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} < \alpha \leq 1.$$

Portanto, (4) pode ser escrita como

$$H(\alpha) \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ \mu[a, v_{\max}], & \text{se } I_0 < \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0, & \text{se } \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Apêndice II

Se $I(\bar{v} - \delta, t) < \alpha \leq I(\bar{v}, t)$

$$\begin{aligned}
 \mu\{I(\bar{v}, t) \geq \alpha\} &= \mu[a, \bar{v} + \delta] = \frac{1}{\delta} \int_a^{\bar{v}} \rho(v) dv + \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+\delta} \rho(v) dv \text{ (I é crescente com } v) \\
 &= \frac{1}{\delta} \int_a^{\bar{v}} \frac{1}{\delta} (v - \bar{v} + \delta) dv + \frac{1}{\delta} \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+\delta} \frac{1}{\delta} (v - \bar{v} - \delta) dv \\
 &= \frac{1}{\delta^2} \left\{ \left[\frac{v^2}{2} - \bar{v}v + \delta v \right]_a^{\bar{v}} - \left[\frac{v^2}{2} - \bar{v}v - \delta v \right]_{\bar{v}}^{\bar{v}+\delta} \right\} \\
 &= \frac{1}{\delta^2} \left\{ \frac{v^2}{2} - \bar{v}^2 + \delta v - \frac{a^2}{2} + a\bar{v} - \delta a - \frac{(\bar{v}+\delta)^2}{2} + \bar{v}(\bar{v} + \delta) + \delta(\bar{v} + \delta) + \frac{\bar{v}^2}{2} - \bar{v}^2 - \delta\bar{v} \right\} \\
 &= \frac{1}{\delta^2} \left\{ -\bar{v}^2 - \frac{a^2}{2} + a\bar{v} - \delta a - \frac{\bar{v}^2}{2} - \delta\bar{v} - \frac{\delta^2}{2} + \bar{v}^2 + \delta\bar{v} + \delta\bar{v} + \delta^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\delta^2} \left\{ \frac{-a^2 + 2a\bar{v} - 2\delta a - \bar{v}^2 + \delta\bar{v} + \delta^2}{2} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2 - 2a\bar{v} + \bar{v}^2}{\delta^2} + \frac{2a\delta - 2\delta\bar{v} - \delta^2}{\delta^2} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{a + \bar{v}}{\delta} \right)^2 + 2 \frac{(a - \bar{v})}{\delta} - 1 \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{a + \bar{v}}{\delta} \right)^2 + 2 \left(\frac{a - \bar{v}}{\delta} \right) + 1 - 2 \right\} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a - \bar{v}}{\delta} + 1 \right)^2
 \end{aligned}$$

Se $I(\bar{v}, t) < \alpha \leq I(\bar{v} + \delta, t)$

$$\begin{aligned}
 \mu\{I(\bar{v}, t) \geq \alpha\} &= \mu[a, \bar{v} + \delta] = \frac{1}{\delta} \int_a^{\bar{v}+\delta} -\frac{1}{\delta} (v - \bar{v} + \delta) dv \\
 &= -\frac{1}{\delta^2} \left[\frac{v^2}{2} - \bar{v}v + \delta v \right]_a^{\bar{v}+\delta} = -\frac{1}{\delta^2} \left[\frac{(\bar{v}+\delta)^2}{2} - \bar{v}(\bar{v} + \delta) - \delta(\bar{v} + \delta) - \frac{a^2}{2} + a\bar{v} + \delta a \right] \\
 &= -\frac{1}{\delta^2} \left[\frac{v^2}{2} + \bar{v}\delta + \frac{\delta^2}{2} - \bar{v}^2 - \bar{v}\delta - \delta\bar{v} - \delta^2 - \frac{a^2}{2} + a\bar{v} + \delta a \right] \\
 &= -\frac{1}{\delta^2} \left[-\frac{v^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} - \delta\bar{v} - \frac{a^2}{2} + a\bar{v} + \delta a \right] = -\frac{1}{\delta^2} \left[\frac{-\bar{v}^2 - \delta^2 - 2\delta\bar{v} - a^2 + 2a\bar{v} + 2\delta a}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{v}^2 + 2a\bar{v} + a^2}{\delta^2} + 2 \left(\frac{\bar{v} - a}{2} \right) + 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v} - a}{\delta} + 1 \right)^2
 \end{aligned}$$

Apêndice III

$\gamma_0 R_0$ é uma função não decrescente. De fato, dada $v_1, v_2 \in [v_{min}, v_{max}]$

com $v_1 > v_2 \Rightarrow \beta(v_1) > \beta(v_2)$ (1)

e $\gamma(v_1) < \gamma(v_2) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma(v_1)} > \frac{1}{\gamma(v_2)} \Leftrightarrow \frac{\beta(v_1)}{\gamma(v_1)} > \frac{\beta(v_1)}{\gamma(v_2)} > \frac{\beta(v_2)}{\gamma(v_2)} \Leftrightarrow \gamma_0 R_0(v_1) > \gamma_0 R_0(v_2)$.

Dado $v \in [0, v_{min}]$ tem-se $\beta(v) = 0, \forall v$. (c.q.d.)

Apêndice IV

- $H(0) = \mu\{v; \gamma_0 R_0(v) \geq 0\} = \mu[0, v_{max}] = 1$
- $H(1) = \mu\{v; \gamma_0 R_0(v) \geq 1\} = \mu\{v_{max}\} = \rho(v_{max})$
- Dado $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} \\ \frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} < \alpha < 1 \end{cases}$

$0 < \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)}$ como $\gamma_0 R_0$ é uma função não decrescente, $\gamma_0 R_0(v_{min}) = 0$ e $\gamma_0 R_0(v_M) = \frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)}$ então, $0 < \alpha < \frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} \Leftrightarrow v_{min} \leq v' \leq v_M$, onde v' é solução da equação

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma_0 R_0(v) \Rightarrow \alpha = \gamma_0 \frac{\beta(v)}{\gamma(v)} = \gamma_0 \cdot \frac{\beta(v)}{\gamma(v)} = \gamma_0 \cdot \frac{\frac{v - v_{min}}{v_m - v_{max}}}{\frac{(\gamma_0 - 1)v + 1}{v_{max}}} \\ &\Rightarrow \frac{\gamma_0 - 1}{v_{max}} v \alpha + \alpha = \gamma_0 \left(\frac{v - v_{min}}{v_M - v_{min}} \right) \\ &\Rightarrow (\gamma_0 - 1)(v_M - v_{min}) \alpha v + \alpha v_{max} (v_M - v_{min}) = \gamma_0 (v - v_{min}) v_{max} \\ &\Rightarrow (\gamma_0 - 1)(v_M - v_{min}) \alpha v - \gamma_0 v_{max} v = -\alpha v_{max} (v_m - v_{min}) - \gamma_0 v_{min} v_{max} \\ &\Rightarrow v' = \frac{[\alpha(v_M - v_{min}) + \gamma_0 v_{min}] v_{max}}{\gamma_0 v_{max} - \alpha(\gamma_0 - 1)(v_M - v_{max})} \end{aligned}$$

$\frac{\gamma_0}{\gamma(v_M)} \leq \alpha < 1 \Rightarrow v_M \leq v' \leq v_{max}$ onde v' é solução de

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma_0 \frac{\beta(v)}{\gamma(v)} = \gamma_0 \frac{1}{\frac{(\gamma_0 - 1)}{v_{max}}v + 1} = \gamma_0 \frac{v_{max}}{(\gamma_0 - 1)v + v_{max}} \\ \Rightarrow (\gamma_0 - 1)\alpha v + \alpha v_{max} &= \gamma_0 v_{max} \\ \Rightarrow v' &= \frac{v_{max}(\gamma_0 - \alpha)}{(\gamma_0 - 1)\alpha} \\ \Rightarrow v' &= \frac{v_{max}}{\gamma_0 - 1} \left(\frac{\gamma_0}{\alpha} - 1 \right)\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Amendola, M.; Souza, A. L.; Barros, L.C. *Manual de Uso de Fuzzy no Matlab*. 2005.
- [2] Barros, L.C. *Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos*. Dissertação de Mestrado, Imecc - Unicamp, 1992.
- [3] Barros, L. C. Barros. *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy - Teoria e Aplicações*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, 1997.
- [4] Barros, L.C. *Teoria Fuzzy X Biomatemática*. IMECC - UNICAMP, 2001.
- [5] Barros, L.C.; Bassanezi, R.C. *Introdução à Teoria dos Conjuntos Fuzzy*. Minicurso - Imecc- Unicamp, 2001.
- [6] Barros, L.C.; Bassanezi, R.C. *Tópicos de Lógica Fuzzy com Aplicações em Biomatemática*. Campinas, São Paulo, 2006.
- [7] Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Oliveira, R. Z. G. (2004). *Fuzzy differential inclusion: An application to epidemiology*. *Soft Methodology and Random Information Systems*, 1:631-637.
- [8] Bassanezi, R. C. *Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto, 2002.
- [9] Bassanezi, R. C.; ferreira, W. C. J. *Equações Diferenciais com Aplicações*. Ed. Harba, S. Paulo, 1988

- [10] Ceconello, M. S. *Modelagem Alternativa para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. Dissertação de Mestrado, Imecc - Unicamp, 2006.
- [11] Figueiredo, D. G. de; Neves, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 2 ed., Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPAR, 2005.
- [12] Fuller, R. *Neural Fuzzy Systems*. Abo, 1995.
- [13] Galante, G. *Epidemiologia Matemática e Computacional*. UNIOESTE, Paraná. 2008.
- [14] Jafelice, R.S.M.; Barros, L.C. ; Bassanezi, R.C. *Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações*. SBMAC, Editora Plêiade, São Paulo, 2005.
- [15] Klir, G. and Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications* - Prentice-Hall PTR, New Jersey, EUA, 1995.
- [16] Kreider, D.; Kuller, R. C.; Ostberg, D. R.; Perkins, F. W. *Introdução à análise linear: equações diferenciais lineares*. Vol. 1. Rio de Janeiro: Ao livro técnico, 1988.
- [17] Mizukoshi, M. T. *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, 2004.
- [18] Monteiro, L. H. A.. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Ed. Livraria da Física, 2002.
- [19] Neto, N. B.; et al. *Minicurso de Sistema Especialista Nebuloso*. XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Goiânia-GO, 2006.
- [20] Noguchi, M. T. G. *Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy para Classificação Supervisionada de Imagens Multiespectrais de Alta Resolução*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná. 2004.
- [21] Ortega, Neli R. S. *Aplicação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy a problemas da Biomedicina*. PhD thesis, IF- USP, 2001.
- [22] Quartieri, M. T. *Estudo de modelos epidemiológico determinístico básico em doenças causadas por microparasitas*. Tese de Mestrado, PPGMAp-UERGS, Porto Alegre, 2004.

- [23] Shaw, I.S.; Simões, M. G. *Controle e Modelagem Fuzzy*. São Paulo, Edgard Blucher Ltda.
- [24] Silva, J. D. M. *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos p-Fuzzy com Aplicações a Biomatemática*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, 2005.
- [25] Sugeno, M. *Theory of fuzzy integral and its applications*. Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology (1974).
- [26] Tanscheit, R. *Sistemas Fuzzy*. VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Bauru, SP, 2003.
- [27] Waldman, E. A. *Vigilância em Saúde Pública*, v.7. São Paulo: Fundação Petrópolis, 1998.
- [28] Yang, H.M. *Epidemiologia Matemática: Estudo dos Efeitos da Vacinação em Doenças de Transmissão Direta*, Editora da Unicamp, 2001.
- [29] Yen J. ; Langari R. 1999. *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information*. Prentice Hall, EUA.
- [30] Zadeh, L. A. *Fuzzy sets*. Information and control 8 (1995), 338-353.
- [31] Barros, L.C. ; Bassanezi, R.C. Leite, M. B. F. *Modelos epidemiológicos com inclusão diferencial fuzzy*. Biomatemática 12, IMECC - Unicamp, Campinas/SP, 2002.
- [32] BARROS, L.C. ; et al. *Sobre Incertezas em Modelos Epidemiológicos do Tipo SIS*. Grupo de Biomatemática IMECC - UNICAMP.
- [33] BARROS, L.C. ; et al. *Estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy e a Função de Lyapunov*. Grupo de Biomatemática IMECC - UNICAMP.
- [34] Dias, M. R. B. ; BARROS, L.C. *O Uso de Controladores Fuzzy para Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMECC - UNICAMP.
- [35] Leite, M. B. F; BARROS, L.C. ; BASSANEZI, R.C. *Epidemiologia e Teoria Fuzzy*. IMECC - UNICAMP.

- [36] Raimundo, S.M.; YANG, H. M. *Dinâmica de Transmissão das Moléstias Infeciosas: múltiplas infecções e período de latência*. SBM. 2005.
- [37] Roveda, J. A. F.; Roveda, S. R. M. M. Martins A. C. G. *Dinâmica populacional com sistemas p-fuzzy: um estudo de caso para a cidade de Sorocaba*. Biomatemática 19, IMECC - Unicamp, Campinas/SP, 2009.
- [38] Silva, J. D. M.; Bassanezi, R. C. *Um Software para Modelagem de Fenômenos Biológicos*. Biomatemática XIV. 2004, 51-53.