



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Pavimentação Hiperbólica: Algoritmo e Fórmulas de Crescimento

por

Karine Bobadilha[†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr Marcelo Firer

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Pavimentação Hiperbólica:

Algoritmo e Fórmulas de Crescimento

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Karine Bobadilha** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de Novembro de 2003.

Prof. Dr. Marcelo Firer

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Firer

Prof. Dr. Nelo da Silva Allan

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	T/UNICAMP
	B63p
V	EX
TOMBO BC/	56857
PROC.	16/117104
C	☐
D	☒
PREÇO	11/100
DATA	
Nº CPD	

CM00193923-6

bil id 308413

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bobadilha, Karine

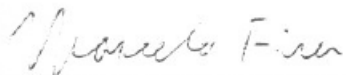
B63p Pavimentação hiperbólica: algoritmo e fórmulas de crescimento/
Karine Bobadilha -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : Marcelo Firer.

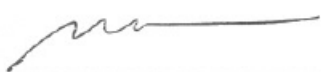
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1.Geometria hiperbólica. 2.Algoritmos de computador. 3.Grupos
hiperbólicos. I. Firer, Marcelo. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Computação. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 31 de outubro de 2003 e aprovada pela Banca
Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MARCELO FIRER



Prof (a). Dr (a). NELO DA SILVA ALLAN



Prof (a). Dr (a). MARCELO MUNIZ SILVA ALVES

Agradecimento

À Deus, que me ajudou sempre. A cada dia me dando serenidade para aceitar os obstáculos que apareciam e muita coragem para superá-los. Para isso usou de algumas pessoas muito especiais as quais devo muito para conseguir este título: minha mãe que sempre superou a saudade da “pequena” longe de casa e deu muito apoio para que eu pudesse continuar, entendendo a cada dia das mães que passei em Campinas e muito mais; meu pai que, mesmo não estando mais aqui, tenho certeza que sempre intercedeu por mim; ao meu irmão Silvio e minha tia Lourdes que também sempre ajudaram no que estava à seu alcance e a uma pessoa muito especial, Ci, que sempre esteve do meu lado em todos os momentos, presenciava minhas tensões, minhas alegrias e era capaz de ser minha paz a cada dia.

Na UNICAMP, encontrei verdadeiros amigos, desses que permanecem para sempre: Marcelo, chamam de orientador, mas o tenho como um grande amigo, às vezes até foi um grande pai, pois sempre fez questão de ser mais que um professor, foi um grande orientador ensinando matemática, me motivando a cada dia a me apaixonar mais ainda pelo gosto da pesquisa, pelo mundo mágico que é conseguir um resultado novo e, além disso, era capaz de arrumar tempo para conversar quando me desesperava com o curso ou com a dissertação conseguindo passar muito otimismo e confiança no meu trabalho.

Valeu: Paulinha e Marcelo (Romário), casal sempre auto-astral e responsável por muitos momentos de alegria e fortaleza; à Luciana e ao Fábio que demonstraram muita confiança em mim e, principalmente uma amizade sincera; ao Rogério que me ensinou praticamente tudo o que sei sobre o WinEdt e ainda achava tempo para me ajudar sempre que tinha dúvidas e de muito bom humor; ao Gleber, Mércio e Humberto que procuravam me ajudar a resolver as dúvidas do Mathematica; ao Marcelo Toppan que me ajudou com as idéias lógicas de programação; os amigos, que não tiveram participação direta, mas sempre diziam “Vá em frente, você é capaz” e que sempre rezaram por mim: Flávia, Elisandra, Sônia, Hernan, Poling, Weber, Lidermir, Ivanilde, Andréia, Tatiana, Lucy, Laércio, Ludmila, Mônica, Andréia Murayama, Claudio.... obrigada a cada um de vocês pela sincera amizade.

à D. Cida
ao carinho e compreensão dedicados
DEDICO

*“ Tu te tornas eternamente responsável
por aquilo que cativas ”*

Antoine de Saint-Exupery

Índice

Lista de figuras	viii
Introdução	xi
1 Preliminares	1
1.1 Grupos	1
1.2 Geometria Hiperbólica	7
1.2.1 O Grupo de Möebius	7
1.2.2 Modelos Euclidianos Bi-dimensionais para a Geometria Hiperbólica	10
1.2.3 Geodésicas e Distância em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$	11
1.2.4 Transformações Lineares Fracionárias	13
1.2.5 Trigonometria e Área Hiperbólica	15
1.2.6 Isometrias	17
1.2.7 Subgrupos Discretos e Grupos Fuchsianos	20
1.2.8 Domínios Fundamentais	21
1.2.9 Domínios de Dirichlet	22
1.2.10 Grupos Triângulos	27
2 Algoritmos para pavimentação do Plano Hiperbólico	29
2.1 Algoritmo de Palavras	30
2.2 Algoritmo de Blocos	31

2.2.1	Comandos Básicos	37
2.2.2	Construção do triângulo inicial Δ_0	41
2.2.3	Parte I: Rotações de triângulos	43
2.2.4	Parte II : Reflexão de Triângulos	50
2.2.5	Parte III : Rotação na origem	53
3	Análise do crescimento do Grupo $\Gamma_{3,q}$	56
3.1	Fórmulas recursivas para o crescimento	
	do Grupo $\Gamma_{(3,q)}, q = 2m$	68
3.2	Fórmulas recursivas para o crescimento	
	do Grupo $\Gamma_{(3,q)}, q = 2m + 1$	78
A	Rotina para o Algoritmo de Blocos	82
B	Crescimento	83
	Bibliografia	84

Lista de Figuras

1.1	Geodésicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$	12
1.2	Posição relativa das geodésicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$	12
1.3	Triângulo Geodésico com vértice ideal v_c em $\mathbb{H}^2$	15
1.4	Triângulo Geodésico sem vértice ideal em $\mathbb{D}^2$	16
2.1	Triângulo Δ_0 em $\mathbb{D}^2$	32
2.2	Rotação de Δ_0 com v_1 como centro de rotação	32
2.3	Rotação de $\frac{\pi}{5}$ em torno de v_3	34
2.4	Etapa 9	34
2.5	Reflexões	36
2.6	Rotação de $\frac{\pi}{5}$	36
2.7	Pavimentação de $\mathbb{D}^2$ por triângulos com ângulos $\frac{\pi}{5}$	37
2.8	Geodésica que passa pelos pontos P e Q	39
2.9	Segmento geodésico nos pontos P e Q	40
2.10	reflexao	52
2.11	novareflexao	52
2.12	Reflexões	52
2.13	Pavimentação de $\mathbb{D}^2$ por triângulos com ângulos $\frac{\pi}{5}$	55
3.1	Exemplo de um ciclo fechado com $q = 6$	59
3.2	Caminho de comprimento 6	61
3.3	Diagrama dos tipos de arestas da etapa k para a etapa $k + 1$	74

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos um algoritmo e um programa, implementado no software Mathematica, para a pavimentação do plano hiperbólico por triângulos equiláteros. Em seguida determinamos fórmulas recursivas para a função de crescimento dos grupos associados a tais ladrilhamentos.

Abstract

We developed an algorithm and a computer program, implemented within the software Mathematica, for tiling the hyperbolic plane with equilateral triangles and give recursive expressions for the growth function of groups associated to such tillings.

Introdução

Este trabalho contém três capítulos, dois dos quais, capítulos 2 e 3, contendo material original e de certo modo independente. A ligação entre estes dois capítulos repousa antes de tudo nas nossas intenções iniciais, que foram apenas parcialmente bem sucedidas.

No Capítulo 2 apresentamos um algoritmo e um programa, implementado na linguagem do software Mathematica, versão 4.1, para ladrilhar o plano hiperbólico com triângulos equiláteros e ângulos divisores inteiros de 2π . O ponto de partida e motivação inicial para este capítulo foi o programa desenvolvido por Allan com o mesmo propósito (sem restrições quanto aos lados dos triângulos). É fato conhecido que estes ladrilhamentos estão associados a grupos com crescimento exponencial, de modo que a busca por algoritmos eficientes é uma busca relevante, já tendo sido abordada por outros matemáticos, como por exemplo o programa *gm* desenvolvido por David Epstein e Steve Rumsby.

Considerando a utilização deste tipo de algoritmo como um instrumento ilustrativo, quase didático, não nos preocupamos em percorrer todas as palavras do grupo, mas adotamos uma estratégia distinta: agrupar em blocos número crescente de elementos e em seguida determinar suas imagens por certas isometrias hiperbólicas. Sob o ponto de vista de ilustração, o resultado obtido foi satisfatório e pudemos constatar, ao menos empiricamente, que este algoritmo permite ladrilhar o plano mais rapidamente que o algoritmo de Allan. Sabemos que este algoritmo contém diversas redundâncias (ladrilhos percorridos mais que uma vez), mas não conseguimos quantificar estas redundâncias. A posteriori, surgiram algumas idéias promissoras para novos algoritmos que de antemão eliminariam este problema de quantificação de redundâncias, mas estas são idéias para desenvolvimento futuro.

Ainda quanto a este capítulo, gostaríamos de esclarecer que muitas rotinas foram copiadas ou adaptadas do programa desenvolvido por Allan.

Já no Capítulo 3, tentamos retornar a análise do crescimento dos grupos em questão. É fato conhecido que estes grupos tem crescimento exponencial, ou seja, se definirmos b_n como a cardinalidade da bola de raio n (com a métrica de Cayley), então existem constantes $a, \lambda > 0$ e $B > 1$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot B^{\lambda n}}{b_n} = 1.$$

No entanto, não são conhecidos métodos para determinar estas constantes. O máximo que conhecemos são limitantes superiores e inferiores ([SiFiPa]). Assim, tentamos neste capítulo trabalhar esta questão, buscando uma fórmula explícita para o crescimento destas bolas.

Considerando grupos $\Gamma_{(3,q)}$, associados a ladrilhamentos com triângulos equiláteros com ângulos iguais a $2\pi/q$, conseguimos formulas recursivas genéricas, dependentes do parâmetro q , para o crescimento destes grupos. Fixando q nestas fórmulas, ou seja a q valor numérico, é possível determinar fórmulas explícitas a partir das recursivas.

Enfim, visando tornar a leitura deste trabalho o mais auto-contida possível, dedicamos o primeiro capítulo aos pré-requisitos: rudimentos de Teoria de Grupos e um pouco mais sobre Geometria Hiperbólica e Grupos Fuchsianos. Nos dois apêndices incluímos a íntegra dos programas elaborados.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contém alguns resultados sobre grupos e uma introdução à geometria hiperbólica, incluindo uma breve apresentação de conceitos sobre Grupos Fuchsianos e Grupos Triângulos, necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

1.1 Grupos

Esta seção contém conceitos e resultados básicos da teoria de grupos, mencionados apenas com o intuito de fixar a notação. As demonstrações destes resultados assim como explicações adicionais podem ser encontradas em [Ro], [GaLe] ou qualquer outro texto introdutório sobre Teoria de Grupos.

Definição 1 Um **grupo** é um par consistindo de um conjunto não vazio G e uma operação binária

$$* : G \times G \rightarrow G$$

que denotaremos por $*(a, b) = a * b$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- *Associatividade:* $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todos a, b, c em G ;
- *Existência de Elemento Neutro:* existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, para todo a em G ;

- *Existência do Elemento Inverso:* para cada elemento $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.

Denotaremos o grupo por $(G, *)$ ou, quando não houver risco de ambiguidade, simplesmente por G . Dependendo do contexto adotaremos para o grupo a operação aditiva onde denotamos e por 0 e seu inverso por $-a$ ou a operação multiplicativa com $e = 1$ e seu inverso a^{-1} . Diremos que um grupo é **comutativo** se satisfazer a seguinte propriedade:

- $a * b = b * a$ para todo a e b em G .

Definição 2 Um subconjunto S , não vazio, de um grupo G é um **subgrupo** de G se S é um grupo sob a operação de G . Denotamos $S \leq G$.

Definição 3 A **ordem** de G , denotada por $|G|$, é a cardinalidade de G .

Quando $S \leq G$ (S um subgrupo de G) e $a \in G$, os conjuntos $S * a = \{s * a \mid s \in G\}$ e $a * S = \{a * s \mid s \in G\}$ são denominados **classe lateral à direita** e **classe lateral à esquerda** de S em G , respectivamente. A cardinalidade das classes laterais (a direita ou a esquerda) é chamada de **índice de S em G** e denotada por $[G : S]$. Quando $a * S = S * a$ para todo $a \in G$, diremos que S é um **subgrupo normal de G** e denotamos $S \triangleleft G$. Caso S seja um subgrupo normal de G podemos definir o conjunto $G/S = \{a * S \mid a \in G\}$ munido da operação $(a * S) * (b * S) := (a * b) * S$, denominado o **grupo quociente de G por S** . Neste caso temos que $|G/H| = [G : H]$.

Exemplo 1.1.1 Seja X um conjunto não vazio, o **grupo simétrico** sobre X , denotado por S_X , é o conjunto das bijeções de X em X com a operação de composição de funções. Se $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, chamamos de S_n o grupo simétrico de grau n e temos que $|S_n| = n!$.

Exemplo 1.1.2 O grupo das simetrias do polígono regular de n lados, conhecido como **grupo diedral**, D_n , $n \geq 3$ é um grupo de ordem $2n$ gerado por dois elementos r e t onde r representa a rotação de ângulo $\frac{2\pi}{n}$ em torno da origem (centro do polígono) e t a reflexão em torno do eixo- x , que satisfazem as seguintes relações: $r^n = 1$, $t^2 = 1$ e $rsr = s^{-1}$.

Exemplo 1.1.3 *O conjunto*

$$GL(2, \mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com o produto usual de matrizes é um grupo denominado **Grupo Linear Geral** das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Um subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ é $SL(2, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes $A \in GL(2, \mathbb{R})$ com $\det(A) = 1$, chamado de **Grupo Linear Especial**. Podemos definir também o grupo quociente

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\},$$

conhecido como **Grupo das Projeções Lineares**.

Consideremos um grupo de permutações G de um conjunto $X \neq \emptyset$. Dado $x \in X$, chamamos de **estabilizador de x** o subgrupo

$$G_x = \{g \in G | g(x) = x\}.$$

Note que $G_{h(x)} = hG_xh^{-1}$, para todo $x \in X$ e $h \in G$. A **órbita** de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$G(x) = \{g(x) \in X | g \in G\}.$$

O conjunto de **pontos fixos** de um elemento $g \in G$ é definido por

$$F_g = \{x \in X | g(x) = x\}.$$

Denominamos de **normalizador** de H em G o subgrupo

$$N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\},$$

que é o maior subgrupo normal de G no qual H é normal.

Dados $g, h \in G$ denotaremos por $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ o **comutador** de g e h . O conjunto

$$C_G(g) = \{h \in G | [g, h] = e\}$$

é chamado de **centralizador** de g em G , isto é, os elementos de G que comutam com g . Podemos observar que um subgrupo $H \subset G$ é abeliano se, e só se, $H \subset C_G(h)$ para todo

$h \in H$. Assim dados um grupo G agindo em um espaço X , $g \in G$, F_g o conjunto de pontos fixos de g e se $h \in C_G(g)$ então $h(F_g) \subseteq F_g$. Pode-se verificar também que para quaisquer $g, h \in G$ temos

$$C_G(hgh^{-1}) = hC_Gg^{-1}h^{-1}.$$

Dados os grupos $(G, *)$ e $(H, \circ)$, diremos que $f : G \rightarrow H$ é um **homomorfismo** se para todo $a, b \in G$, $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$. Denominamos f um **isomorfismo** se f for um homomorfismo bijetor e neste caso diremos que G e H são **isomorfos** (denotamos $G \cong H$).

Dado um homomorfismo $f : G \rightarrow H$, definimos o **Núcleo de f** e a **Imagem de f** respectivamente por

$$\text{Kernel } f = \text{Ker } f = \{a \in G \mid f(a) = e_H\}.$$

e

$$\text{Im } f = \{b \in H \mid f(a) = b, \text{ para algum } a \in G\}.$$

Teorema 1.1.4 (Primeiro Teorema do Isomorfismo) *Seja $f : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Então $\text{Ker } f$ é um subgrupo normal de G e*

$$G/\text{Ker } f \cong \text{Im } f.$$

Definição 4 *Seja G um grupo e A um conjunto não vazio. Uma **ação de G em A** (ou **G -ação em A**) é uma função $\phi : G \times A \rightarrow A$, tal que $\phi(g, \phi(h, a)) = \phi(gh, a)$ e $\phi(e, a) = a$, para todo $g, h \in G$, $a \in A$.*

Considerando ϕ uma G -ação em A , é possível provar que, para todo $g \in G$, a função $\phi_g : A \rightarrow A$, tal que $\phi_g(a) = \phi(g, a)$ é uma permutação de A . Logo se considerarmos a função $\Phi : G \rightarrow S_A$, definida por $\Phi(g) = \phi_g$, teremos que Φ é um homomorfismo de G em S_A .

Exemplo 1.1.5 *Um grupo G age sobre si próprio no mínimo de três maneiras importantes:*

$$\begin{aligned} L_g(h) &:= gh && \text{translação à esquerda} \\ R_g(h) &:= hg && \text{translação à direita} \\ C_g(h) &:= ghg^{-1} && \text{conjugação.} \end{aligned}$$

Considere um grupo G , diremos que G é **gerado** por um subconjunto $S \subseteq G$, chamado **conjunto gerador**, se todo $a \in G$ puder ser expresso da forma $a = a_1 * a_2 * \dots * a_n$, com $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$ e usamos a notação $G = \langle S \rangle$.

Dado um grupo G gerado por um conjunto finito S , definimos a **norma de a** como

$$\|a\| = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a = a_1 * a_2 * \dots * a_n, \text{ com } a_1, \dots, a_n \in S\}$$

e, por definição, $\|e\| = 0$. Se S for simétrico, ou seja, $S = S^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in S\}$, então

$$d_C(a, b) = \|b^{-1}a\|$$

define uma métrica em G chamada de **métrica de Cayley de G relativa a S** .

Nesta situação, construímos o **Grafo de Cayley** (de G relativo a S) $\Gamma(G, S)$ do seguinte modo:

- O conjunto dos vértices de $\Gamma(G, S)$ é formado pelos elementos de G .
- Uma aresta liga os vértices a, b se e, somente se, estes diferem por um gerador, ou seja, $b^{-1}a \in S$.

O grafo de Cayley, com a métrica combinatória usual, realiza a distância $d_C(\cdot, \cdot)$.

Para definirmos apresentação de grupo é necessário definirmos o conceito de grupo livre. Começamos com um conjunto de símbolos $\mathcal{A} = \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n, \sigma_n^{-1}\}$, denominado de **alfabeto $\mathcal{A}$** . Uma **palavra** no alfabeto $\mathcal{A}$ é uma seqüência finita qualquer $w = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$, com $i_j = 1, \dots, n$; $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, \dots, k$. Frequentemente abreviamos σ_i^1 por σ_i . Diremos que $L(w) = k$ é o comprimento da palavra w e a única palavra de comprimento 0 daremos o nome de **palavra vazia** (ou palavra nula) que é denotada por e . Dadas duas palavras $u = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ e $w = \sigma_{j_1}^{\delta_1} \dots \sigma_{j_t}^{\delta_t}$, definimos o produto por justaposição chamado de **concatenação** das palavras u e w

$$uw = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \sigma_{j_1}^{\delta_1} \dots \sigma_{j_t}^{\delta_t}$$

e a palavra inversa formalmente por

$$w^{-1} = \sigma_{j_t}^{-\delta_t} \dots \sigma_{j_1}^{-\delta_1}.$$

Dados $\sigma_i^\varepsilon, \sigma_i^{-\varepsilon} \in \mathcal{A}$ definimos a operação $\sigma_i^\varepsilon \sigma_i^{-\varepsilon} = e$ a qual será denominada de **operação de cancelamento**.

Desta maneira podemos definir o conjunto

$$\mathbb{F}(A) = \{\text{todas as palavras escritas com o alfabeto } A\},$$

com o produto sendo a concatenação das palavras e a operação de cancelamento. Assim $\mathbb{F}(A)$ tem a estrutura de grupo, denominado **grupo livre gerado por n elementos**, com e o elemento neutro do grupo e o elemento inverso de w é a palavra w^{-1} . Como grupo, $\mathbb{F}(A)$ é gerado pelas palavras de comprimento 1, a saber, $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}$ e observamos que este grupo é não comutativo, pois $ab = ba$ se e somente se $a = b^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, um elemento comuta apenas com suas potências.

Dado um grupo G gerado por um conjunto $S' = \{g_1, \dots, g_n\}$, consideremos o grupo livre $\mathbb{F} = \mathbb{F}(S)$ gerado pelo conjunto $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. A função

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{F} &\longrightarrow G \\ \sigma_{i_1}^{\eta_{i_1}} \dots \sigma_{i_k}^{\eta_{i_k}} &\longmapsto g_{i_1}^{\eta_{i_1}} \dots g_{i_k}^{\eta_{i_k}} \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos, claramente sobrejetor. Seu núcleo é o conjunto

$$\text{Ker } \phi = \{\sigma_{i_1}^{\eta_{i_1}} \dots \sigma_{i_k}^{\eta_{i_k}} \in \mathbb{F} \mid g_{i_1}^{\eta_{i_1}} \dots g_{i_k}^{\eta_{i_k}} = e\}$$

e, pelo teorema do isomorfismo, G é isomorfo à $\mathbb{F}/\text{Ker}\phi$. Diremos que o par (S, R) é uma **apresentação** de G , usualmente $G = \langle S | R \rangle$ é um par onde S é um conjunto gerador de G e R um conjunto de relações que determinam G , ou seja, R é um conjunto de geradores do $\text{Ker}\phi$. Caso $\text{Ker}\phi$ seja finitamente gerado diremos que $G = \langle S | R \rangle$ é uma **apresentação finita** de G .

Exemplo 1.1.6 *Freqüentemente, abusamos da linguagem e ao invés de escrevermos os conjuntos S e R , omitimos os parênteses e simplesmente listamos os elementos destes conjuntos. Assim,*

$$\begin{aligned} K_2 &= \langle g, h \mid g^2 = h^2 = (gh)^2 = e \rangle && \text{Grupo de Klein} \\ S_3 &= \langle g, h \mid g^3 = h^2 = (gh)^2 = e \rangle. \end{aligned}$$

1.2 Geometria Hiperbólica

Nesta seção apresentaremos os conceitos e resultados básicos concernentes à geometria hiperbólica plana. Introduziremos ainda alguns resultados sobre isometrias deste espaço e grupos discretos de isometrias: Grupos Fuchsianos e Grupos Triângulos. Todos estes conceitos e resultados podem ser encontrados nos textos [Fi], [Ka] ou [Be].

Durante muito tempo suspeitou-se da independência do 5º postulado de Euclides ou, como é mais conhecido, o Postulado das Paralelas ("Dada uma reta e um ponto não pertencente a ela existe uma e apenas uma reta passando pelo ponto e paralela a reta dada.), ou seja, acreditava-se ser possível demonstrá-lo através dos outros quatro e por isso matemáticos como Karl Friedrich Gauss e Nicolai Lobatchevsky desenvolveram uma geometria que assumia a existência de mais de uma reta paralela (5º axioma), o que chamamos hoje de **Geometria Hiperbólica ou Geometria de Lobatchevsky**.

Por se tratar de uma nova teoria ainda existiam muitas dúvidas sobre a consistência desta nova geometria, até que matemáticos como Henri Poincaré, Eugenio Beltrami e Felix Klein criaram os modelos euclidianos para a geometria hiperbólica. Portanto qualquer contradição encontrada nessa nova geometria implicaria em alguma contradição na geometria euclidiana.

Como a geometria hiperbólica é categórica, trabalharemos exclusivamente com modelos e neste texto optamos pelos modelos do Semi-Plano de Lobatchevsky e do Disco de Poincaré, que apresentaremos mais adiante.

1.2.1 O Grupo de Möebius

Vamos trabalhar apenas com o caso bi-dimensional, mas a extensão para dimensões maiores é facilmente obtida. Também daremos as definições de Plano Euclidiano, isometrias, inversões, reflexões e transformações de Möebius, ressaltando alguns resultados relevantes para as próximas seções.

Definição 5 Um **Plano Euclidiano** $(\mathbb{E}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um par formado por um espaço vetorial real de dimensão finita, $\mathbb{E}^2$, e uma aplicação bilinear simétrica positiva definida $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Chamamos $\langle u, v \rangle$ de **produto interno** entre u e v e $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ de **norma** de u . A métrica euclidiana associada é definida por $d(u, v) = \|u - v\|$. Considerando $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$, diremos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **isometria** se T preserva o produto interno.

Uma aplicação diferenciável $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **conforme** se ϕ preserva ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis.

Temos que $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ é a compactificação de $\mathbb{R}^2$ por um ponto $\{\infty\}$, onde as vizinhanças de ∞ são os conjuntos da forma $(\mathbb{R}^2 \setminus A) \cup \{\infty\}$ e A é um conjunto compacto qualquer de $\mathbb{R}^2$.

Dada uma reta $R \subset \mathbb{R}^2$, denotaremos a reta compactificada por $R = R_t(a) \cup \{\infty\}$, onde $R_t(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, a \rangle = t\}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^2$ e por $S_r(a)$ o círculo de centro a e raio r . O interior e o exterior de $S_r(a)$ serão dados, respectivamente, pelos conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| > r\}$.

Definição 6 Dado o círculo $S_r(a)$ no plano euclidiano a **inversão** $i_S : \widehat{\mathbb{R}^2} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^2}$ em torno de S é a função tal que $i_S(a) = \infty$, $i_S(\infty) = a$ e $i_S(x)$ é o único ponto da reta $\overleftrightarrow{ax}$ tal que

$$\|a - x\| \cdot \|a - i_S(x)\| = r^2$$

para $x \neq \{a, \infty\}$.

Temos uma fórmula explícita para a inversão

$$i_S(x) = a + r^2 \frac{x - a}{\|x - a\|^2} \quad \text{para } x \neq a, \infty.$$

Definição 7 Dada a reta $R = R_t(a) \cup \{\infty\}$, a **reflexão** i_R em R é a função que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$ associa um ponto $i_R(x)$ tal que o segmento de reta por x e $i_R(x)$ é ortogonal a R e intercepta a reta R em seu ponto médio e, por definição, $i_R(\infty) = \infty$.

Da mesma maneira que para a inversão temos uma fórmula explícita para a reflexão,

$$i_R(x) = x - 2a \frac{\langle x, a \rangle - t}{\|a\|^2}.$$

Observe que i_R mantém fixos os pontos de R e i_S os pontos de $S_r(a)$.

Daqui em diante entenderemos por círculos tanto os círculos $S_r(a)$ como as retas compactificadas R e as denotaremos por Σ ; as notações $S = S_r(a)$ e R serão usadas quando a distinção for relevante. A proposição abaixo apresenta alguns resultados para as reflexões e inversões definidas acima.

Proposição 1.2.1 *Sejam o círculo S , a reta R , a inversão i_S no círculo S e i_R a reflexão na reta R . Então:*

1. *para todo círculo Σ , $i_S(\Sigma)$ e $i_R(\Sigma)$ são círculos;*
2. *$i_S(\Sigma) = \Sigma$ e $i_R(\Sigma) = \Sigma$ se e somente se Σ for círculo ortogonal a S ou a R respectivamente;*
3. *a reflexão i_R e a inversão i_S são aplicações conformes que reverterem a orientação em $\mathbb{R}^2$.*

Definição 8 *Uma **transformação de Möebius** de $\widehat{\mathbb{R}^2}$ é uma composição de um número finito de reflexões em retas e inversões em círculos.*

O conjunto de transformações de Möebius de $\widehat{\mathbb{R}^2}$ é um grupo denominado **Grupo Geral de Möebius** e denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$. Como as reflexões e as inversões são elementos que reverterem orientação de $\widehat{\mathbb{R}^2}$, temos que um elemento $\sigma \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ preservará orientação se, e só se, for composição de um número par de inversões e reflexões. Pode-se verificar que a inversa de um elemento que preserva orientação também preserva a orientação, assim temos a seguinte definição:

Definição 9 *O subgrupo $M(\widehat{\mathbb{R}^2}) \leq GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ formado pelas transformações que preservam orientação é denominado **Grupo de Möebius**.*

1.2.2 Modelos Euclidianos Bi-dimensionais para a Geometria Hiperbólica

Apresentamos agora a definição de dois modelos para a geometria hiperbólica e alguns resultados importantes, as demonstrações serão omitidas do presente texto mas podem ser encontradas em [Fi].

Definição 10 *Os conjuntos*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

onde $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, munidos das métricas riemannianas

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad \text{e} \quad ds = \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - (x^2 + y^2)}$$

respectivamente, são denominados **modelos euclidianos de semi-espço superior e do disco de Poincaré**.

Os conjuntos

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 0\} \cup \{\infty\} \quad \text{e} \quad \partial\mathbb{D}^2 = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, |z|^2 = 1\}$$

são denominados de **fronteira ideal** de $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, respectivamente. Usaremos quando conveniente a notação

$$\hat{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbb{D}}^2 = \mathbb{D}^2 \cup \partial\mathbb{D}^2.$$

Um ponto na fronteira ideal de um modelo é dito **ponto ideal**.

Como já comentamos no início da seção esses modelos são equivalentes e, portanto, todo trabalho feito do ponto de vista teórico independe da escolha do modelo.

1.2.3 Geodésicas e Distância em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$

Através da estrutura riemanniana obteremos fórmulas explícitas para o comprimento de curvas, curvas geodésicas e a distância entre pontos.

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes, onde $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Então o comprimento da curva $\gamma([a, b])$ é definido pela fórmula

$$\|\gamma\| := \int_a^b \frac{\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}}{x_2(t)} dt$$

e este será denominado o **comprimento hiperbólico** de γ em $\mathbb{H}^2$.

Analogamente, dados um intervalo fechado $[c, d] \subset \mathbb{R}$ e $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{D}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes tal que $\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t))$, o comprimento hiperbólico de σ em $\mathbb{D}^2$ será dado por

$$\|\sigma\| := \int_c^d \frac{2\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}}{1 - (x_1(t)^2 + x_2(t)^2)} dt$$

Assim podemos definir a distância hiperbólica entre dois pontos de $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2$, quando estes forem definidos com entradas reais e a métrica riemanniana respectiva.

Definição 11 *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$, a **distância** entre p e q é*

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|$$

com o ínfimo considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis por partes $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Definição 12 *Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é chamada de **geodésica** se para quaisquer pontos $r, s \in [a, b]$ tivermos,*

$$d(\gamma(r), \gamma(s)) = \int_r^s \frac{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}}{x_2(t)} dt,$$

isto é, se γ minimizar a distância entre os pontos de seu traçado.

Da mesma maneira podemos definir geodésicas em $\mathbb{D}^2$. O teorema abaixo nos mostra quem são as geodésicas dos modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$.

Teorema 1.2.2 *As geodésicas do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$ e de $\mathbb{D}^2$ são, respectivamente*

1. *as semi-retas e semi-circunferências ortogonais a $\partial\mathbb{H}^2$.*
2. *os diâmetros de $\mathbb{D}^2$ e os arcos de circunferências de $\mathbb{D}^2$ ortogonais a $\partial\mathbb{D}^2$.*

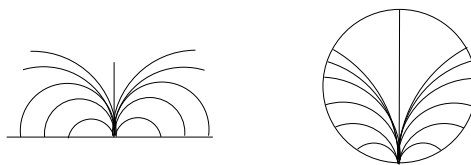


Figura 1.1: Geodésicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$

Uma consequência particular desse teorema é a unicidade de geodésicas contendo dois pontos distintos.

Dadas duas geodésicas do plano hiperbólico adotamos a seguinte terminologia:

- **geodésicas paralelas** são aquelas se encontram em um ponto ideal.
- **geodésicas hiperparalelas** são aquelas que não se cruzam em nenhum ponto, nem na fronteira ideal.
- **geodésicas concorrentes** são aquelas que se cruzam (não em um ponto ideal).

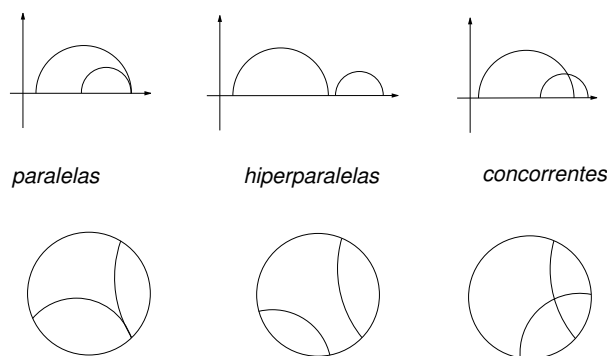


Figura 1.2: Posição relativa das geodésicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$

Tomando pontos z, w em $\mathbb{C}$ é possível provar as seguintes fórmulas equivalentes para o cálculo da distância entre dois pontos z, w de $\mathbb{H}^2$

$$\begin{aligned}
 d(z, w) &= \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \\
 \cosh(d(z, w)) &= 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \\
 \sinh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}} \\
 \cosh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - \bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}} \\
 \tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Analogamente para z, w em $\mathbb{D}^2$,

$$\begin{aligned}
 d(z, w) &= \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right) \\
 \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \\
 \cosh^2\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \\
 \tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2.4 Transformações Lineares Fracionárias

Consideremos o grupo

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc = 1 \right\}$$

das matrizes 2×2 com determinante 1. Para cada $A \in SL(2, \mathbb{R})$, definimos a **transformação linear fracionária**

$$\begin{aligned}
 T_A : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\
 z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}.
 \end{aligned}$$

Algumas observações importantes:

- Verifica-se que $\operatorname{Im}(T_A(z)) > 0$ se $\operatorname{Im}(z) > 0$;

- Consideremos o fecho

$$\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \hat{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}.$$

Note que a ação de T_A é contínua em $\mathbb{C}$ se $c = 0$ e em $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ se $c \neq 0$ de modo que podemos estender a ação de T_A definindo $T_A(\infty) = \infty$ se $c = 0$ e $T_A(-\frac{d}{c}) = \infty, T_A(\infty) = -\frac{d}{c}$ se $c \neq 0$.

Consideremos o grupo projetivo $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$ e sua ação em $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.2.3 *O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo $M(\hat{\mathbb{R}}^2)$. Ambos são isomorfos ao grupo das isometrias de $\mathbb{H}^2$ que preservam orientação.*

Similarmente ao que fizemos para $\mathbb{H}^2$, consideremos o grupo

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

das matrizes 2×2 com determinante 1. Para cada $A \in SL(2, \mathbb{C})$, definimos a **transformação linear fracionária**

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

Demonstra-se que $T_A(\mathbb{D}^2) = \mathbb{D}^2$ se e, só se, $b = \bar{c}$ e $d = \bar{a}$ e que a métrica hiperbólica de $\mathbb{D}^2$ é invariante por transformações da forma

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que $d(T_A(z), T_A(w)) = d(z, w)$ usando a definição de distância dada pela equação (1.2).

1.2.5 Trigonometria e Área Hiperbólica

Dados três pontos $v_a, v_b, v_c \in \overline{\mathbb{H}^2}$ (ou $\overline{\mathbb{D}^2}$), consideramos as geodésicas, raios ou segmentos geodésicos ligando estes pontos e obtemos assim um **triângulo geodésico** Δ . Note que os vértices podem pertencer à fronteira $\partial\mathbb{H}^2$ (ou $\partial\mathbb{D}^2$), por isso admitimos a possibilidade de termos arestas formadas por geodésicas completas ou raios geodésicos. Denotaremos as arestas de Δ por a, b, c e por α, β, γ os ângulos internos opostos as arestas.

Proposição 1.2.4 *Dado um triângulo geodésico com um vértice ideal v_c , isto é, com ângulos α, β e 0 , $\alpha, \beta \neq 0$ valem as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned} \cosh |c| &= \frac{1 + \cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} \\ \sinh |c| &= \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta}. \end{aligned}$$

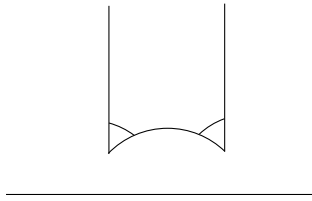


Figura 1.3: Triângulo Geodésico com vértice ideal v_c em $\mathbb{H}^2$

Teorema 1.2.5 *Seja Δ um triângulo geodésico com todos os ângulos estritamente positivos tal que $|a|, |b|, |c| < \infty$. Então valem as seguintes igualdades:*

1. *Lei do seno:*

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma};$$

2. *Lei do cosseno I:*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma;$$

3. *Lei do cosseno II:*

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

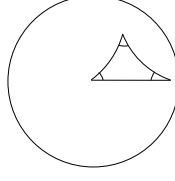


Figura 1.4: Triângulo Geodésico sem vértice ideal em $\mathbb{D}^2$

Observação 1.2.6 *Note que, a segunda lei dos cossenos não possui análogo na geometria euclidiana, pois implica que os ângulos de um triângulo determinam o comprimento de suas arestas. Como consequência temos que dados dois triângulos com os mesmos ângulos, existe isometria de $\mathbb{H}^2$ em que um triângulo é imagem do outro.*

Definição 13 *Seja $A \subset \mathbb{H}^2$. A **área** (hiperbólica) de A é dada por*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_A \frac{1}{y^2} dx dy,$$

caso a integral exista e seja finita.

Se $A \subset \mathbb{D}^2$, a área (hiperbólica) é dada por

$$\mu_{\mathbb{D}^2}(A) = \int_A \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2} dx dy.$$

Devemos observar que a área é invariante por isometrias de $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$. Agora podemos enunciar uma versão simplificada do teorema de Gauss-Bonnet:

Teorema 1.2.7 *Se Δ é um triângulo hiperbólico com ângulos internos α, β, γ e $A \subset \mathbb{H}^2$ (ou $\mathbb{D}^2$) então*

$$\mu(A) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Duas consequências importantes são que:

- A soma dos ângulos internos de Δ é sempre menor que π ;
- Quando todos os vértices de Δ forem vértices ideais então o triângulo terá área máxima igual a π .

1.2.6 Isometrias

Podemos classificar os elementos de $PLS(2, \mathbb{R})$ de acordo com o valor absoluto da função traço, isto é, $Tr(A) = |\text{traço}(A)|$ com

$$\text{traço} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

Definição 14 Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ e a transformação $T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Diremos que A e a transformação $T_A \in PLS(2, \mathbb{R})$ é:

1. *Elíptica* se $Tr(A) < 2$;
2. *Parabólica* se $Tr(A) = 2$;
3. *Hiperbólica* se $Tr(A) > 2$.

Note que a classificação acima é invariante por conjugação, pois $\text{traço}(BAB^{-1}) = \text{traço}(A)$ para toda matriz $A_{n \times n}$ e para toda matriz $B \in GL(n, \mathbb{R})$. O limitante 2 na definição acima vem do número de autovalores reais de A , caso A tenha dois autovalores reais a matriz é diagonalizável e podemos assumir que $b = c = 0$ e $d = \frac{1}{a}$ (com $a \neq \pm 1$) e então $Tr(A) > 2$; se A tiver apenas um autovalor real, $Tr(A) = 2$; e quando A não tiver autovalor real segue que $Tr(A) < 2$.

Isometrias Elípticas

Consideremos a matriz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, 0 < \theta < 2\pi.$$

Note que a transformação T_θ é de fato elíptica, pois para $\theta \neq k\pi$, $Tr(A_\theta) = |2\cos \theta| < 2$ e podemos verificar que o único ponto fixo de T_θ é i .

Consideremos também a esfera hiperbólica

$$S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, z_0) = r\}$$

de centro z_0 e raio r . Observemos que se i é invariante por T_θ então os círculos $S_r(i)$ serão invariantes por T_θ . Na verdade, podemos encarar o conjunto de todas as transformações $T_\theta(z)$ como sendo os círculos $S_r(i)$ tal que $r = d(z, i)$.

Desta maneira podemos considerar as transformações T_θ como sendo correspondente às rotações euclidianas. Neste caso podemos observar que

$$0 = d(i, T_\theta(i)) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_{T_\theta}(z).$$

Isometrias Parabólicas

Consideremos agora a família de matrizes

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \neq t \in \mathbb{R}.$$

Note que a transformação $T_t = T_{A_t}$ é, de fato, parabólica, pois $Tr(A_t) = 2$. Além disso, observando que

$$T_t(z) = \frac{z+t}{z+1} = z+t$$

verificamos que $T_t(z) \neq z$ exceto para $z = \infty$ (isto pode ser visto considerando a geodésica $\gamma(s) = e^s i$ com $\gamma(\infty) = \infty$ e calculando o limite de $T_t(\gamma(s))$ quando s tende para o infinito). Logo, T_t possui um único ponto fixo em $\mathbb{H}^2$.

Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} S_{s_0}(\infty) &= \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \lim_{s \rightarrow \infty} [d(z, \gamma(s_0 + s)) - s] = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Im(z) = Im(\gamma(s_0))\}. \end{aligned}$$

Como $Im(z) = Im(z+t)$ temos que $S_{s_0}(\infty)$ é invariante por T_t para todo $s_0 \in \mathbb{R}$. Além disso $T_t(\gamma(s_0)) = S_{s_0}(\infty)$. Observemos também que

$$\inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_{T_k}(z) = 0,$$

mas esse ínfimo não pode ser atingido pois teríamos a existência de ponto fixo em $\mathbb{H}^2$.

Isometrias Hiperbólicas

Consideremos a seguinte família de matrizes

$$A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix}, k \neq 0.$$

Como $Tr(A_k) = \sqrt{e^k} + \frac{1}{\sqrt{e^k}} > 2$ temos que a transformação $T_k = T_{A_k}$ é, de fato, isometria hiperbólica.

Notemos que $T_k(z)$ não possui pontos fixos em $\mathbb{H}^2$, somente deixa fixo os pontos $0, \infty \in \partial\mathbb{H}^2$, pois a geodésica $\gamma(t) = e^t i$ é invariante por T_k .

Além disso temos ainda que

$$k = d_{T_k}(\gamma(s)) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_{T_k}(z), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Já observamos no início desta seção que o traço de uma matriz é invariante por conjugação, ou seja,

$$Tr(BAB^{-1}) = |\text{traço}(BAB^{-1})| = |\text{traço}(A)| = Tr(A),$$

desta maneira as matrizes da forma $BA_\theta B^{-1}$ induzem isometrias elípticas, as da forma $BA_t B^{-1}$ induzem isometrias parabólicas e as da forma $BA_k B^{-1}$ isometrias hiperbólicas com $B \in GL(2, \mathbb{R})$.

O teorema seguinte prova que toda matriz $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ é conjugada a alguma das matrizes A_θ, A_k e A_t . Equivalentemente o resultado vale para as respectivas transformações T_θ, T_k e T_t .

Teorema 1.2.8 *Dada a transformação $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$, existe matriz $B \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$ é da forma T_θ, T_k ou T_t .*

Sua demonstração analisa os possíveis pontos fixos de $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$ e mostra que eles são conjugados somente com os pontos fixos das transformações T_θ, T_k ou T_t .

1.2.7 Subgrupos Discretos e Grupos Fuchsianos

Ao considerarmos o grupo $SL(2, \mathbb{R})$ como um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^4$, temos uma topologia induzida: dizemos que uma seqüência $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ converge para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tivermos que $\lim a_n = a, \lim b_n = b, \lim c_n = c$ e $\lim d_n = d$. Esta topologia induz uma topologia no quociente $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$. Um subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ é **discreto** se for um subconjunto discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ com a topologia acima:

Definição 15 Um **grupo fuchsiano** é um subgrupo discreto Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Definição 16 Uma família $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de subconjuntos de um espaço métrico X é **localmente finita** se para todo compacto $K \subseteq X$ o conjunto

$$\{\alpha \in A \mid X_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$$

for finito.

Uma outra definição que será usada adiante é sobre a ação de um grupo de homeomorfismos ser propriamente descontínua;

Definição 17 Seja Γ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X . A ação de Γ é **propriamente descontínua** se para todo $x \in X$ a família $\{\{g(x)\} \mid g \in \Gamma\}$ for localmente finita.

O próximo teorema é muito importante para entendermos melhor o conceito acima.

Teorema 1.2.9 Seja $\Gamma \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ subgrupo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Γ é grupo Fuchsiano;
2. A ação de Γ é propriamente descontínua.

Proposição 1.2.10 *Os subgrupos cíclicos de $PSL(2, \mathbb{R})$ gerados por elementos hiperbólicos ou parabólicos são discretos. Um subgrupo cíclico gerado por um elemento elíptico é discreto se, e só se, for finito.*

1.2.8 Domínios Fundamentais

Com os resultados e definições das seções anteriores podemos introduzir o conceito de domínio fundamental e domínio de Dirichlet os quais serão importantes para os capítulos seguintes. Iniciamos com a definição de domínio fundamental.

Definição 18 *Seja X espaço métrico e seja Γ grupo de homeomorfismos agindo em X de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$ é chamado de **domínio fundamental de Γ** se satisfazer as seguintes condições:*

1. $\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$;
2. $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = X$;
3. $\mathcal{D}^\circ \cap T(\mathcal{D}^\circ) = \emptyset$ para todo $Id \neq T \in \Gamma$.

onde usamos $^\circ$ para denotar o interior do conjunto em questão.

Denominaremos de **fronteira** de $\mathcal{D}$ o conjunto $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^\circ$ e de **ladrilhamento (ou pavimentação)** de X a família $\{T(\mathcal{D}) \mid T \in \Gamma\}$. Note que se $\mathcal{D}$ é domínio fundamental $T(\mathcal{D})$ também o será.

Um **polígono** $\mathcal{P}$ em $\mathbb{D}^2$ é um domínio fundamental limitado por um número finito de arcos geodésicos e cada um destes arcos é chamado de **aresta**. A intersecção de duas arestas é chamada de **vértice**. Um polígono é dito **regular** se todas as arestas e ângulos entre elas forem congruentes.

Uma (p, q) -**pavimentação regular** de $\mathbb{D}^2$ é uma família $\{D_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de polígonos regulares isométricos, cada um com p arestas e ângulos iguais a $2\pi/q$, de modo que cada vértice pertence à exatamente q polígonos.

Observe que a pavimentação por ladrilhos regulares pode ser estudada a partir de pavimentação por triângulos, bastando unir os vértices do ladrilho com o circuncentro (que é o centro da circunferência circunscrita) do polígono. Por esse motivo, vamos estudar a pavimentação regular por triângulos.

Teorema 1.2.11 *Sejam $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ domínios fundamentais de um grupo fuchsiano Γ , com $\mu(\mathcal{D}_1) < \infty$. Suponha que $\mu(\partial\mathcal{D}_1) = \mu(\partial\mathcal{D}_2) = 0$. Então $\mu(\mathcal{D}_1) = \mu(\mathcal{D}_2)$.*

Consideremos $\Gamma' \subset \Gamma$ subgrupo de Γ . O próximo teorema fornece uma relação entre domínios fundamentais e subgrupos de Γ :

Teorema 1.2.12 *Seja Γ grupo propriamente descontínuo de isometrias de um espaço métrico X e $\mathcal{D}$ domínio fundamental de Γ . Seja $\Gamma' \subset \Gamma$ subgrupo de índice finito n e sejam $T_1, \dots, T_n \in \Gamma$ tais que*

$$\Gamma = \Gamma'T_1 \cup \Gamma'T_2 \cup \dots \cup \Gamma'T_n$$

seja a decomposição de Γ em Γ' -classes laterais. Então

$$\mathcal{D}' = T_1\mathcal{D} \cup T_2\mathcal{D} \cup \dots \cup T_n\mathcal{D}$$

é domínio fundamental de Γ' .

Caso Γ seja um grupo fuchsiano com $\mu(\mathcal{D}) < \infty$ e $\mu(\partial\mathcal{D}) = 0$ temos que $\mu(\mathcal{D}') = n\mu(\mathcal{D})$.

1.2.9 Domínios de Dirichlet

Nesta seção vamos construir famílias de domínios fundamentais com propriedades bastante fortes e úteis para o nosso trabalho. Seja Γ grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(p) \neq p$ para todo $T \in \Gamma$. Pontos com esta propriedade sempre existem, pois o conjunto de pontos fixos por algum elemento de Γ é discreto. Denominamos o conjunto

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, T(p)), \text{ para todo } T \in \Gamma\}$$

de **Domínio de Dirichlet centrado em p** . Podemos entender melhor considerando a órbita $\Gamma(p)$ e escolhendo os pontos $z \in \mathbb{H}^2$ que estão mais próximos de p do que qualquer

outro ponto da órbita $\Gamma(p)$. Assim podemos obter um dos resultados mais importante desta seção:

Teorema 1.2.13 *Sejam Γ grupo fuchsiano e $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet centrado em p . Então $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é domínio fundamental da ação de Γ .*

A demonstração do teorema usa o fato de que dado $z \in \mathbb{H}^2$ a órbita $\Gamma(z)$ é discreta e com isso existe pelo menos um ponto $z_0 \in \Gamma(z)$ que está mais próximo de p . Assim o domínio de Dirichlet possui pelo menos um representante de cada órbita. Prova-se que $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ tem interior não vazio e que dois pontos de seu interior não podem pertencer a mesma órbita, logo $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é domínio fundamental da ação de Γ .

Uma consequência deste teorema é que todo domínio de Dirichlet de um grupo fuchsiano é **geodesicamente convexo**, ou seja, dados z_1 e $z_2 \in \mathcal{D}_p(\Gamma)$, o segmento geodésico $\overline{z_1 z_2} \subset \mathcal{D}_p(\Gamma)$.

Teorema 1.2.14 *Seja Γ grupo fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet. Então o ladrilhamento $\{T(\mathcal{D}) \mid T \in \Gamma\}$ é localmente finito.*

Esta característica de gerar um ladrilhamento localmente finito não é partilhada por domínios fundamentais quaisquer.

Lembremos que a fronteira de um domínio de Dirichlet é formada pela união de geodésicas, raios geodésicos ou segmentos geodésicos. Denominaremos de **aresta ordinária** a cada uma destas geodésicas (segmentos ou raios). Diremos que um ponto da fronteira de um domínio de Dirichlet é um **vértice ordinário** se este for a interseção de duas arestas ordinárias distintas de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$. Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 1.2.15 *Sejam $\mathcal{A}$ aresta de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ e $\mathcal{V}$ vértice de $\mathcal{D}_p$. Então:*

1. *Existe $Id \neq T \in \Gamma$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_p(\Gamma) \cap T(\mathcal{D}_p(\Gamma))$;*
2. *$\mathcal{V}$ é vértice ordinário se, e só se, existem elementos distintos $Id \neq T_1, T_2 \in \Gamma$ tais que*

$$\mathcal{V} = \mathcal{D}_p(\Gamma) \cap T_1(\mathcal{D}_p(\Gamma)) \cap T_2(\mathcal{D}_p(\Gamma)).$$

Vamos definir mais alguns termos que utilizaremos nos resultados seguintes. Diremos que dois pontos de $\mathbb{H}^2$ são **congruentes** se estes pertencerem à mesma Γ -órbita, que é claramente uma relação de equivalência. Além disso, podemos notar pela definição de domínio fundamental, que dois pontos congruentes de um domínio fundamental $\mathcal{D}$ devem pertencer a sua fronteira. A restrição da relação de congruência ao conjunto de arestas ou vértices de um domínio de Dirichlet também define uma relação de equivalência. Começamos estudando as classes de equivalência de arestas de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$.

Teorema 1.2.16 *Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ contém exatamente dois elementos.*

Como consequência se $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ possuir um número finito de arestas, necessariamente, este número é par. Além disso, se tivermos uma aresta $\mathcal{A}_1$ existe uma única outra aresta $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_1$ e um único elemento $T \in \Gamma$ tal que $T(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$. Neste caso, diremos que $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ é um **par de arestas congruentes** e que T **relaciona** ou **parelha** o par de arestas. Observe que se T relaciona o par $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ então T^{-1} também o relaciona.

Teorema 1.2.17 *Sejam $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet de Γ e $\{T_i \mid i \in I\}$ o conjunto de elementos de Γ que relacionam arestas distintas de $\mathcal{D}$. Então, $\{T_i \mid i \in I\}$ é um conjunto de geradores de Γ .*

Podemos associar a um domínio de Dirichlet $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ de um grupo fuchsiano um grafo $Gr(\Gamma)$ que pode ser imerso em $\mathbb{H}^2$. Os vértices do grafo serão os pontos da órbita $\Gamma(p)$. Note que, como p não é fixo por qualquer elemento de Γ temos uma relação bijetora entre os elementos de Γ e os vértices do $Gr(\Gamma)$.

Consideremos dois vértices $T(p)$ e $S(p)$, estes estarão ligados por uma aresta se, e só se, os ladrilhos $T(\mathcal{D})$ e $S(\mathcal{D})$ tiverem uma aresta em comum, ou equivalentemente $\mathcal{D}$ e $T^{-1}S(\mathcal{D})$ tem uma aresta $\mathcal{A}$ em comum. Mas $\mathcal{A}$ é uma aresta comum a $\mathcal{D}$ e $T^{-1}S(\mathcal{D})$ se, e só se, existe transformação de parelhamento $T_{\mathcal{A}}$ tal que $T_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) = T^{-1}S(\mathcal{D})$, ou seja, dois vértices $T(p)$ e $S(p)$ são unidos por uma aresta se, e só se, $T^{-1}S$ for transformação de parelhamento. Em

outras palavras, este é o grafo de Cayley de Γ relativo ao conjunto de geradores $\{T_i \mid i \in I\}$ obtido acima.

Diremos que uma classe de equivalência de vértices congruentes é um **ciclo**, isto é, um conjunto da forma

$$\{T(z) \mid T \in \Gamma, z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } \mathcal{D}_p(\Gamma)\}.$$

Notemos que se o ladrilhamento $\{T(\mathcal{D}_p(\Gamma)) \mid T \in \Gamma\}$ for localmente finito, temos que os ciclos serão finitos. O próximo resultado relaciona soma de ângulos de vértices de um ciclo com a ordem do estabilizador do vértice.

Teorema 1.2.18 *Sejam $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet de Γ , $v_1, \dots, v_r$ vértices de um ciclo e $\theta_1, \dots, \theta_r$ os ângulos internos nos vértices, respectivamente. Então, se denotarmos por m a ordem do estabilizador em Γ de um dos vértices do ciclo, temos que*

$$\theta_1 + \dots + \theta_r = \frac{2\pi}{m}.$$

Desejamos encontrar condições para podermos determinar um grupo discreto de isometrias a partir de um domínio dado. Para isso consideremos um polígono fechado convexo $\mathcal{P}$ em $\mathbb{H}^2$ e denotamos por $\mathbf{A}$ o conjunto de todas as arestas de $\mathcal{P}$. Um **parelhamento de arestas** de $\mathcal{P}$ é um conjunto $\Phi = \{T_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in \mathbf{A}\}$ de isometrias tal que, para toda aresta $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$:

1. Existe aresta $\mathcal{A}' \in \mathbf{A}$ com $T_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$;
2. As isometrias $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{A}'}$ satisfazem a relação $T_{\mathcal{A}'} = T_{\mathcal{A}}^{-1}$;
3. Se $\mathcal{A}$ for aresta de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{A}'$ for aresta de $\mathcal{P}'$ então $\mathcal{P} \cap T_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{A}$.

Podemos verificar que, com as condições acima, $\mathcal{A}'$ é unicamente determinado por $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}')'$ e $T_{\mathcal{A}} \neq Id$ para toda aresta $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$. Nestas condições diremos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são **parelhadas** por $T_{\mathcal{A}}$.

Diremos que dois pontos $x, x' \in \mathcal{P}$ são **parelhados** se existir $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$ tal que $T_{\mathcal{A}}(x') = x$ e denotamos por $x \cong x'$. A relação de parelhamento é simétrica mas não é transitiva nem

reflexiva, assim, para torná-la uma relação de equivalência diremos que dois pontos $x, y \in \mathcal{P}$ são **relacionados** se existir sequência finita $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{P}$ tal que

$$x = x_1 \cong \dots \cong x_m = y.$$

Vamos denotar essa relação de equivalência por $x \sim y$ e a classe de equivalência $[x]$ determinada por um ponto será chamada de **ciclo**.

Observe que, da terceira condição na definição de parelhamento segue que se x for ponto interior de $\mathcal{P}$, então $[x] = \{x\}$. Da segunda condição, segue que um ponto interior x a uma aresta $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$ é equivalente apenas àquele ao qual está relacionado, isto é $[x] = \{x, T_{\mathcal{A}}(x)\}$.

Caso x seja um vértice e determine um ciclo finito $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ de vértices, denotamos por θ_i os ângulos de $\mathcal{P}$ em x . Chamamos de **ângulo total** do ciclo $[x]$ a soma

$$\theta[x] = \theta_1 + \dots + \theta_m.$$

Consideremos em $\mathcal{P}$ a métrica induzida de $\mathbb{H}^2$ e com isso o conjunto de classes de equivalência $M = \mathcal{P} / \sim$ possui uma topologia associada à métrica induzida, a topologia quociente, isto é, a topologia mais fina que torna a projeção $p : \mathcal{P} \rightarrow M$ contínua: $U \subseteq M$ é aberto, se, e só se, $p^{-1}(U)$ for aberto em $\mathcal{P}$. Assim obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.19 *Considere um polígono fechado convexo $P \in \mathbb{H}^2$ e $\Phi = \{T_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in \mathbf{A}\}$ um parelhamento de arestas. Seja $\Gamma = \langle \Phi \rangle$ o grupo gerado pelas funções de parelhamento e $\tilde{p} : \cup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P})$ a extensão da projeção $p : \mathcal{P} \rightarrow M$. Então, se todo ciclo de vértices $[x]$ for finito e tiver ângulo total $\theta[x] = 2\pi$, o conjunto das classes de ciclos M é uma variedade Hausdorff, $\mathbb{H}^2 = \cup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P})$ e $\tilde{p} : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento.*

Teorema 1.2.20 (Teorema de Poincaré) *Seja $\mathcal{P}$ um polígono fechado convexo em $\mathbb{H}^2$ e $\Phi = \{T_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in \mathbf{A}\}$ um parelhamento arestas e $\Gamma = \langle \Phi \rangle$ o grupo gerado pelas funções de parelhamento. Então, se todo ciclo de vértices $[x]$ for finito e tiver ângulo total $\theta[x] = 2\pi$, o grupo Γ é discreto.*

1.2.10 Grupos Triângulos

Na segunda seção deste capítulo tratamos reflexões hiperbólicas. Vimos na seção 1.2 que tanto a inversão quanto a reflexão em círculos e retas perpendiculares ao eixo ($Im(z) = 0$) mantém o plano superior invariante e são isometrias do espaço hiperbólico. Daqui para frente não distinguiremos entre ambos os casos e trataremos ambos como **reflexão em geodésica**. Denotaremos por ρ_γ a reflexão na geodésica γ .

Dados θ_1, θ_2 e θ_3 reais não negativos tais que

$$0 \leq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \pi$$

podemos, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, construir triângulos hiperbólicos Δ com ângulos internos θ_1, θ_2 e θ_3 . Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ as geodésicas que contêm as arestas de Δ opostas aos respectivos vértices θ_1, θ_2 e θ_3 , denominadas de **geodésicas suportes** das arestas. Consideremos o grupo Γ gerado pelas reflexões $\rho_i = \rho_{\gamma_i}, i = 1, 2, 3$. Observe que Γ não é necessariamente discreto, mas depende essencialmente das constantes θ_i e não do triângulo Δ .

Definição 19 *Um grupo Γ (não necessariamente discreto) de isometrias de $\mathbb{H}^2$ é dito **grupo do tipo** $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ se for gerado pelas reflexões em geodésicas suportes de um triângulo com ângulos internos θ_1, θ_2 e θ_3 .*

Note que dois grupos do mesmo tipo são não apenas isomorfos, mas isomorfos por conjugação em $GM(\hat{R})$. Então a cada tipo $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ podemos associar apenas um único grupo, embora a recíproca não seja verdadeira.

Definição 20 *Um subgrupo $\Gamma_0 \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é chamado de um **grupo** (p, q, r) -**triângulo** se existir grupo Γ de tipo $(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r})$ tal que $\Gamma_0 = \Gamma \cap PSL(2, \mathbb{R})$. Diremos que Γ_0 é um **grupo triângulo** se for um grupo (p, q, r) -triângulo para p, q, r inteiros.*

Nestas condições, temos o seguinte:

Teorema 1.2.21 *Seja $\Gamma_0 = \Gamma \cap PSL(2, \mathbb{R})$ um grupo (p, q, r) -triângulo. Então:*

1. Γ é propriamente descontínuo;
2. Γ_0 é fuchsiano;
3. O triângulo definido pelas geodésicas γ_1, γ_2 e γ_3 é domínio fundamental de Γ .

Capítulo 2

Algoritmos para pavimentação do Plano Hiperbólico

Primeiramente estudamos o trabalho de Nelo Allan [Al] que apresenta um algoritmo e um programa, implementado no software Mathematica, que realiza a pavimentação do plano hiperbólico por triângulos. Nosso objetivo foi entender a estrutura deste algoritmo e em seguida criarmos um novo algoritmo que fosse mais eficiente em termos de crescimento do grupo.

Neste capítulo apresentaremos o algoritmo de Allan e também o nosso de maneira detalhada. Denominaremos o algoritmo de Allan de **Algoritmo de Palavras** e o nosso de **Algoritmo de Blocos**, sendo que a razão dessa terminologia será explicada quando da apresentação dos mesmos.

Seja $\Delta_0 \subset \mathbb{D}^2$ triângulo com arestas α, β e γ e ângulos internos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{r}$ e $\frac{\pi}{s}$. Consideremos o grupo Γ gerado pelas reflexões nas arestas de Δ_0 . Conforme vimos na seção 1.2.10, Γ é um grupo de tipo $(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{s})$ e $\Gamma_0 = \Gamma \cap PSL(2, \mathbb{R})$ um grupo (p, r, s) -triângulo.

Tanto o algoritmo de palavras quanto o de blocos foram feitos para o grupo Γ_0 conforme descrição acima, com a diferença de que no algoritmo de blocos trabalhamos com triângulos equiláteros.

2.1 Algoritmo de Palavras

A idéia do algoritmo de Allan é a seguinte: a partir de um triângulo inicial refleti-lo em suas arestas e depois refletir os triângulos resultantes por todas as suas arestas e assim, sucessivamente.

Sejamos mais precisos na descrição do algoritmo de palavras. Este inicia-se construindo um triângulo Δ_0 de ângulos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{s}$ onde p, r, s são inteiros maiores que 3. Consideremos o grupo triângulo Γ gerado pelas reflexões nas arestas de Δ_0 com a seguinte representação:

$$\Gamma = \langle \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma | (\rho_\alpha)^2 = (\rho_\beta)^2 = (\rho_\gamma)^2 = (\rho_\alpha \rho_\beta)^p = (\rho_\beta \rho_\gamma)^q = (\rho_\gamma \rho_\alpha)^r = e \rangle \quad (2.1)$$

onde α, β e γ são as geodésicas que definem as arestas de Δ_0 e a operação de Γ é a concatenação descrita na fim da seção 1.1. Consideremos o grupo Γ_0 descrito no início do capítulo.

Os geradores de Γ , ρ_α, ρ_β e ρ_γ são as letras do alfabeto $\mathcal{A}$, as palavras de comprimento 1. Para determinarmos as palavras de comprimento 2, acrescentamos a cada palavra de comprimento 1 uma nova letra, ou seja,

$$\begin{aligned} \rho_\alpha \text{ acrescenta } \rho_\alpha &\rightarrow \rho_\alpha \rho_\alpha \\ \rho_\alpha \text{ acrescenta } \rho_\beta &\rightarrow \rho_\alpha \rho_\beta \\ \rho_\alpha \text{ acrescenta } \rho_\gamma &\rightarrow \rho_\alpha \rho_\gamma \end{aligned}$$

e da mesma maneira para as palavras ρ_β e ρ_γ . Observando a apresentação 2.1 do grupo Γ temos que a palavra $\rho_\alpha \rho_\alpha = e$, a identidade de Γ . Assim eliminamos as palavras com letras repetidas, logo as palavras de comprimento 2 consideradas são:

$$\rho_\alpha \rho_\beta, \rho_\alpha \rho_\gamma, \rho_\beta \rho_\alpha, \rho_\beta \rho_\gamma, \rho_\gamma \rho_\alpha, \rho_\gamma \rho_\beta.$$

Procedendo de modo recursivo, a cada palavra de comprimento k obtida na listagem acrescentamos uma letra obtendo ou uma palavra de comprimento $(k + 1)$ ou uma palavra que ignoramos, caso a letra acrescida seja igual à última letra da palavra de comprimento k , pois esta representa um elemento do grupo de comprimento estritamente menor que k . Por

exemplo dada palavra $\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma \dots \rho_\beta \rho_\alpha$ de comprimento $k - 1$ e acrescentando a letra ρ_β temos a palavra de comprimento k :

$$\underbrace{\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma \dots \rho_\alpha \rho_\beta}_{k \text{ letras}}$$

Mas se acrescentarmos a letra ρ_α obtemos uma palavra que representa o mesmo elemento que a palavra de comprimento $k - 2$:

$$\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma \dots \rho_\beta \underbrace{\rho_\alpha \rho_\alpha}_{= e} = \underbrace{\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma \dots \rho_\beta}_{k-2 \text{ letras}}.$$

O algoritmo de Allan está trabalhando com palavras de comprimento k e eliminando as palavras com letras repetidas, sugerindo a terminologia usada: *algoritmo de palavras*.

Através da descrição do algoritmo podemos determinar sua complexidade. Note que iniciamos a pavimentação com 3 palavras de comprimento 1. Caso o algoritmo não identificasse as palavras com letras repetidas como sendo a identidade de Γ teríamos 3^2 palavras de comprimento 2, com esta identificação obtemos 6 palavras de comprimento 2.

Logo, o total de palavras no grupo após k reflexões seria 3^k caso não fossem eliminadas as palavras que tem duas letras iguais no final de sua concatenação, então na realidade temos $3 * 2^{k-1}$ palavras de comprimento k . Note que esta é uma diminuição bastante significativa da complexidade do algoritmo, mas ainda pode ser melhorada.

2.2 Algoritmo de Blocos

Nosso algoritmo está restrito ao caso de triângulos equiláteros, assim partimos de um triângulo inicial Δ_0 como no algoritmo de palavras, mas com ângulos $\frac{\pi}{p}$. Todas as funções e rotinas computacionais foram feitas mantendo a distinção dos ângulos tanto para possibilitar uma futura alteração que abranja triângulos (p, r, s) quaisquer como para melhorar o entendimento da estrutura do algoritmo. Logo, apesar de em algumas rotinas trabalharmos com um triângulo Δ_0 com ângulos $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{r}$ e $\frac{\pi}{s}$, em outras assumimos que $p = r = s$. Usamos tanto números complexos quanto pares ordenados para denotar os vértices de nossos triângulos conforme a conveniência. Todos os exemplos ilustrativos que daremos ao longo

deste capítulo será considerando $p = 5$. Iniciemos com a apresentação da idéia central do algoritmo de blocos.

Da mesma maneira como no algoritmo de palavras iniciamos com um triângulo inicial Δ_0 com seus vértices dispostos em $\mathbb{D}^2$ da seguinte maneira: $v_0 = 0$, v_1 tal que $\text{Im}(v_1) = 0$, $\text{Re}(v_1) > 0$ e v_2 tal que $\text{Im}(v_2) > 0$, ilustrado na figura abaixo:

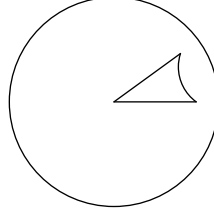


Figura 2.1: Triângulo Δ_0 em $\mathbb{D}^2$

Consideremos o ângulo $\widehat{v_1 v_0 v_2}$ com vértice v_0 , diremos que este é um **setor** de $\mathbb{D}^2$ e nosso objetivo é pavimentar este setor usando rotações em vértices de triângulos previamente determinados, reflexões em arestas específicas e através de rotações deste setor em torno de v_0 pavimentar $\mathbb{D}^2$ por completo.

Sendo mais precisos, iniciamos este processo escolhendo v_1 como centro de rotação (ou vértice fixo, como denominaremos mais adiante) e vamos chamar de ρ_{v_1} (e $\rho_{v_1}^{-1}$) a rotação de ângulo $\frac{\pi}{p}$ no sentido horário (no sentido anti-horário) em torno de v_1 . Rotacionamos o triângulo inicial $(p - 1)$ vezes em torno de v_1 no sentido horário, como no exemplo ilustrado na Figura 2.2.

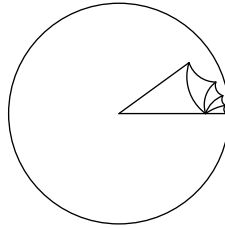


Figura 2.2: Rotação de Δ_0 com v_1 como centro de rotação

Note que não é necessário trabalharmos com a rotação de todos os vértices de Δ_0 : podemos considerar apenas a rotação no vértice v_2 , pois $\rho_{v_1}(v_0) = v_2$, $\rho_{v_1}^2(v_0) = \rho_{v_1}(v_2)$ e

assim sucessivamente. Diremos que os vértices v_i e v_j gerados na etapa k são **consecutivos** se $v_i = \rho_v(v_j)$ ou $v_j = \rho_v(v_i)$ onde v é o centro de rotação da etapa k .

Mais adiante neste algoritmo precisamos recuperar os dados obtidos em cada etapa por isso definimos uma tabela, denominada **Tabela Geral** que contém os vértices gerados na etapa, a distância destes até v_0 , os vértices consecutivos a ele e o triângulo formado com o fixo desta etapa, o vértice desta linha e seu antecessor. Estamos interessados em comparar as distâncias dos vértices ao vértice inicial $v_0 = 0$. Devido a particularidade desta escolha, podemos substituir $d(v_0, v_i)$ por $|v_i|$, pois $d(v_0, v_i) \leq d(v_0, v_j)$ se e somente se $|v_i| \leq |v_j|$. Considerando a etapa 1 quando $p = 5$ temos que a Tabela Geral contém os seguintes dados:

Etapa	Vértice	Distância	Fixo, Vértices Consecutivos	Triângulos
1	v_3	$ v_3 $	$\{v_1, v_2, v_4\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
1	v_4	$ v_4 $	$\{v_1, v_3, v_5\}$	$\{v_1, v_3, v_4\}$
1	v_5	$ v_5 $	$\{v_1, v_4, v_6\}$	$\{v_1, v_4, v_5\}$
1	v_6	$ v_6 $	$\{v_1, v_5\}$	$\{v_1, v_5, v_6\}$

Além disto, criamos uma outra tabela, Tabela de Reflexão, que relaciona à etapa uma aresta, determinada pelo centro de rotação e o último vértice gerado nesta etapa, conforme ilustrado na tabela abaixo:

Etapa	Aresta de Reflexão
1	$\{v_1, v_6\}$

Escolhemos como centro de rotação para a etapa 2 o vértice que tenha menor distância de v_0 , mas que seja maior que a distância de v_1 à v_0 . Em seguida escolhemos o triângulo que será rotacionado: o vértice que será escolhido pela rotina será o que estiver na posição imediatamente anterior à do centro de rotação quando k for ímpar ou na posição posterior quando k for par. O sentido da rotação dependerá então da paridade da etapa em questão: sentido horário se k for ímpar ou anti-horário se k for par. No caso apresentado na tabela acima, podemos verificar a partir da Figura 2.2, que o centro de rotação da segunda etapa será o vértice v_3 e o vértice a ser rotacionado é o vértice v_4 . O resultado desta segunda etapa é ilustrado na Figura 2.3.

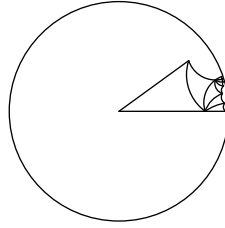


Figura 2.3: Rotação de $\frac{\pi}{5}$ em torno de v_3

E assim sucessivamente até a etapa k escolhida no início do algoritmo. Ilustrando até a etapa 9 temos:

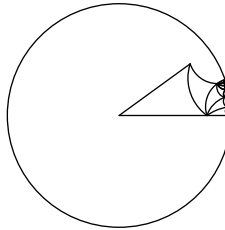


Figura 2.4: Etapa 9

A tabela geral armazena todos os dados que são necessários para realizarmos a pavimentação de $\mathbb{D}^2$, mas precisamos recuperá-los de uma maneira mais conveniente, por isso definimos novas tabelas que apenas armazenam os dados da Tabela Geral de outras formas. Uma destas tabelas é a que chamamos de **blocos da etapa k** que está definida da seguinte maneira: bloco1 armazenará os triângulos novos gerados na etapa k , o bloco2 armazenará os triângulos novos da etapa k e $k - 1$, e assim sucessivamente, até o bloco k armazenar os triângulos novos de todas as etapas. Por exemplo, para $p = 5$ e $k = 3$, temos a seguinte Tabela Geral e Tabela de Reflexão:

Etapa	Vértice	Distância	Fixo, Vértices Consecutivos	Triângulos
1	v_3	$ v_3 $	$\{v_1, v_2, v_4\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
1	v_4	$ v_4 $	$\{v_1, v_3, v_5\}$	$\{v_1, v_3, v_4\}$
1	v_5	$ v_5 $	$\{v_1, v_4, v_6\}$	$\{v_1, v_4, v_5\}$
1	v_6	$ v_6 $	$\{v_1, v_5\}$	$\{v_1, v_5, v_6\}$
2	v_7	$ v_7 $	$\{v_3, v_4, v_8\}$	$\{v_3, v_4, v_7\}$
2	v_8	$ v_8 $	$\{v_3, v_7, v_9\}$	$\{v_3, v_7, v_8\}$
2	v_9	$ v_9 $	$\{v_3, v_8, v_{10}\}$	$\{v_3, v_8, v_9\}$
2	v_{10}	$ v_{10} $	$\{v_3, v_9\}$	$\{v_3, v_9, v_{10}\}$
3	v_{11}	$ v_{11} $	$\{v_4, v_7, v_{12}\}$	$\{v_4, v_7, v_{11}\}$
3	v_{12}	$ v_{12} $	$\{v_4, v_{11}, v_{13}\}$	$\{v_4, v_{11}, v_{12}\}$
3	v_{13}	$ v_{13} $	$\{v_4, v_{12}, v_{14}\}$	$\{v_4, v_{12}, v_{13}\}$
3	v_{14}	$ v_{14} $	$\{v_4, v_{13}\}$	$\{v_4, v_{13}, v_{14}\}$

Etapa da Aresta	Aresta de Reflexão
1	$\{v_4, v_{14}\}$
2	$\{v_3, v_{10}\}$
3	$\{v_1, v_6\}$

e obtemos assim os seguintes blocos:

Etapa do Bloco	Bloco
1	$\{\{v_4, v_7, v_{11}\}, \{v_4, v_{11}, v_{12}\}, \{v_4, v_{12}, v_{13}\}, \{v_4, v_{13}, v_{14}\}\}$
2	$\{\{v_3, v_4, v_7\}, \{v_3, v_7, v_8\}, \{v_3, v_8, v_9\}, \{v_3, v_9, v_{10}\},$ $\{v_4, v_7, v_{11}\}, \{v_4, v_{11}, v_{12}\}, \{v_4, v_{12}, v_{13}\}, \{v_4, v_{13}, v_{14}\}\}$
3	$\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_1, v_5, v_6\},$ $\{v_3, v_4, v_7\}, \{v_3, v_7, v_8\}, \{v_3, v_8, v_9\}, \{v_3, v_9, v_{10}\},$ $\{v_4, v_7, v_{11}\}, \{v_4, v_{11}, v_{12}\}, \{v_4, v_{12}, v_{13}\}, \{v_4, v_{13}, v_{14}\}\}$

Na segunda parte do algoritmo, denominada no programa de parte II, fazemos as reflexões dos blocos acima determinados pelas arestas de reflexão da seguinte maneira: re-

fletimos o bloco k na aresta de reflexão da etapa 1, definida na Tabela de Reflexão. Na segunda etapa desta parte, refletimos o bloco $k - 1$ na aresta de reflexão da etapa 2, e assim sucessivamente, na etapa final desta parte refletiremos o bloco 1 na aresta de reflexão da etapa k . Para finalizar esta parte do algoritmo, refletimos na aresta definida pelos vértices $\{v_0, v_1\}$ todos os triângulos resultantes da reflexão dos blocos assim como aqueles gerados na primeira parte. Na figura 2.5, estão ilustradas as duas reflexões:

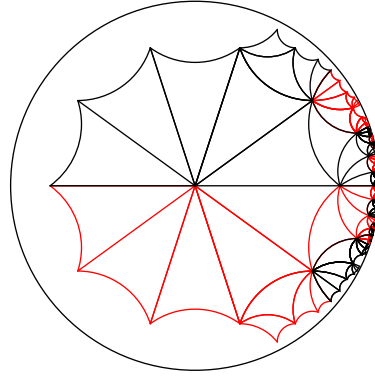


Figura 2.5: Reflexões

Trabalhamos apenas com reflexão dos blocos descritos acima para pavimentar um setor de $\mathbb{D}^2$ e por isso o nome de *Algoritmo de Blocos*.

Concluimos o algoritmo com o que denominamos de Parte III: consideramos ρ a rotação de $\frac{\pi}{p}$ ao redor de v_0 e rotacionamos todos os triângulos já obtidos por $\rho, \rho^2, \dots, \rho^{2p-1}$:

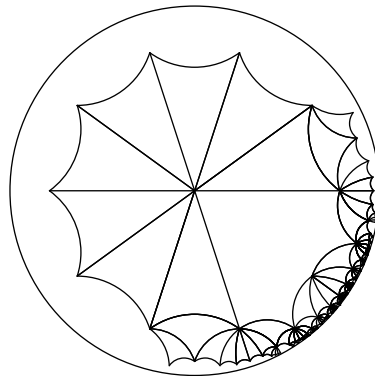


Figura 2.6: Rotação de $\frac{\pi}{5}$

Agora basta fazer a sobreposição de todas as rotações feitas na parte III e portanto concluímos a pavimentação:

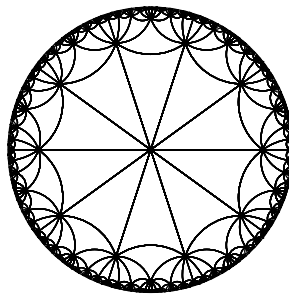


Figura 2.7: Pavimentação de $\mathbb{D}^2$ por triângulos com ângulos $\frac{\pi}{5}$

Gostaríamos de ter preenchido apenas um setor de $\mathbb{D}^2$, mas geramos redundâncias que fazem com que o programa seja menos eficiente do que o possível. Apesar disso ainda é mais eficiente que o algoritmo de palavras *.

2.2.1 Comandos Básicos

Grande parte das funções, rotinas e comandos dessa seção foram aproveitadas do algoritmo de palavras, apenas traduzindo-as diretamente para a notação de variáveis complexas. Começamos introduzindo as funções que calculam distância entre dois pontos no plano (notação complexa e real). Mais precisamente sejam dois pontos $z, w \in \mathbb{C}$ (na notação real consideremos dois pontos $A = (A[[1]], A[[2]])$ e $B = (B[[1]], B[[2]])$) então a distância entre z e w (entre A e B) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{dist}[z_ , w_] &:= N[\sqrt{(\text{Re}[z - w])^2 + (\text{Im}[z - w])^2}] \\ \text{Distancia}[A_ , B_] &:= N[\sqrt{(A[[1]] - B[[1]])^2 + (A[[2]] - B[[2]])^2}]. \end{aligned}$$

Usamos os comandos `Re` e `Im`, do próprio Mathematica, que identificam a parte real e imaginária, respectivamente, de um número complexo, como também `A[[n]]` que seleciona a n -

*Executando o algoritmo de palavras e o de blocos em um mesmo computador quando $p = 5$ e realizando 9 etapas tivemos os seguintes resultados: o algoritmo de palavras concluiu a pavimentação em 56.2 segundos e o de Blocos em 45.9 segundos. Quando fizemos a pavimentação com $p = 7$ e realizando 13 etapas o algoritmo de palavras concluiu a pavimentação em 812.4 segundos e o de Blocos em 246.4 segundos.

ésima entrada do vetor A , por exemplo, se $A = \{x, y, z\}$ então $A[[1]] = x$, $A[[3]] = z$; o comando $N[]$, também do próprio Mathematica, que retorna o valor numérico da distância.

Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos as funções R_1 e R_{-1} que rotacionam z de ângulo θ em torno da origem de $\mathbb{D}^2$ no sentido horário e no sentido anti-horário, respectivamente:

$$\begin{aligned} R_1[z_-] &:= (\text{Cos}[\theta] + \text{Sen}[\theta])z; \\ R_{-1}[z_-] &:= (\text{Cos}[\theta] - \text{Sen}[\theta])z; \end{aligned}$$

Em termos de coordenadas reais, temos a rotação do ponto (a, b) de ângulo m em torno da origem dada por:

$$\text{rotacao}[m_-, \{a_-, b_-\}] := \{\{\text{Cos}[m], \text{Sen}[m]\}, \{-\text{Sen}[m], \text{Cos}[m]\}\} \cdot \{a, b\}.$$

Vamos fazer a pavimentação de $\mathbb{D}^2$ com triângulos hiperbólicos, assim precisamos construir geodésicas que suportam as arestas destes triângulos e também identificar os vértices dos triângulos.

Dados dois pontos P e Q a geodésica que passa por estes é uma circunferência ortogonal a fronteira $\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Assim, se consideramos a inversão na circunferência $\partial\mathbb{D}^2$, a geodésica em questão contém também a imagem de P por esta inversão. De modo geral, dada circunferência G de centro (c, d) e raio ra , então conforme vimos na seção 1.2.1, o inverso do ponto (a, b) com relação à G é dado por:

$$\text{inversao}[\{\{c_-, d_-\}, ra_-\}][\{a_-, b_-\}] := \{c, d\} + ra^2 \left(\frac{\{a, b\} - \{c, d\}}{\text{Distancia}[\{a, b\} - \{c, d\}, \{0, 0\}]^2} \right)$$

Para o caso particular em que o centro é o ponto $(0,0)$ e o raio 1, podemos simplificar a expressão para inversão de um ponto (a, b) :

$$\text{invers}[\{a_-, b_-\}] := \frac{\{a, b\}}{\text{Distancia}[\{0, 0\}, \{a, b\}]^2}.$$

Assim, consideraremos a circunferência passando pelos pontos P, Q e $\text{invers}[\{P[[1]], P[[2]]\}]$. Dados três pontos A, B, C no plano determinamos o centro da circunferência que passa por

estes três pontos encontrando o seu circuncentro (x, y) :

$$\begin{aligned} \text{Circuncentro}[\{A_-, B_-, C_-\}] &:= \text{Flatten}[\{x, y\} /. \text{Solve}[\{A[[1]]^2 + A[[2]]^2 - B[[1]]^2 - \\ &\quad - B[[2]]^2 - 2A[[1]]x + 2B[[1]]x - 2A[[2]]y + 2B[[2]]y == 0, \\ &\quad A[[1]]^2 + A[[2]]^2 - C[[1]]^2 - C[[2]]^2 - 2A[[1]]x + \\ &\quad + 2C[[1]]x - 2A[[2]]y + 2C[[2]]y == 0\}, \{x, y\}]] \end{aligned}$$

sendo `Solve[ ]` um comando do Mathematica que fornece a solução de uma equação nas variáveis (x, y) . Ainda temos que determinar o raio desta circunferência, mas como já temos o seu centro e sabemos que passa por A, B e C basta calcular a distância do circuncentro até um dos pontos A, B ou C , logo:

$$\text{Circunraio}[\{A_-, B_-, C_-\}] := \text{Distancia}[\text{Circuncentro}[\{A, B, C\}], A].$$

Logo a geodésica que passa por dois pontos P e Q de $\mathbb{D}^2$, que não são colineares com a origem (caso P e Q sejam colineares com a origem temos uma reta euclidiana) é definida como:

$$\begin{aligned} \text{retaHip}[P_-, Q_-] &:= \{\text{circunH}[P, Q], \text{raioH}[P, Q]\}, \text{ com} \\ \text{circunH}[P_-, Q_-] &:= \text{Circuncentro}[\{P, Q, \text{invers}[P]\}]; \text{ e} \\ \text{raioH}[P_-, Q_-] &:= \text{Circunraio}[\{P, Q, \text{invers}[P]\}]. \end{aligned}$$

Note que da maneira como definimos a geodésica que passa por dois pontos P e Q , não traçamos apenas o trecho da geodésica entre estes pontos mas sim toda a geodésica que contém estes pontos, logo precisamos determinar outras funções que mostrem apenas o trecho entre os pontos P e Q .

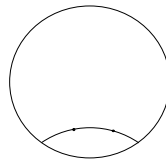


Figura 2.8: Geodésica que passa pelos pontos P e Q

Temos a geodésica que passa por P e Q com centro no circuncentro dos pontos P, Q e inverso de P então para obter o trecho desta circunferência que está entre P e Q basta

calcular a variação angular deste trecho, logo definimos:

$$\begin{aligned}
 \text{unitario}[\{a_ , b_ \}, \{c_ , d_ \}] &:= \frac{\{c, d\} - \{a, b\}}{N[\text{Distancia}[\{c, d\} - \{a, b\}, \{0, 0\}]]} \\
 \text{myarg}[P_] &:= N[\text{Arg}[P[[1]] + iP[[2]]]] \\
 \text{argBiss}[A_ , Q_ , B_] &:= \text{myarg}[\text{unitario}[Q, A] + \text{unitario}[Q, B]] \\
 \text{valorAngAgudo}[A_ , Q_ , B_] &:= \text{ArcCos}[\text{Abs}[\text{unitario}[Q, A] \cdot \text{unitario}[Q, B]]] \\
 \text{variacaoAngular}[A_ , Q_ , B_] &:= \{\text{argBiss}[A, Q, B] - .5\text{valorAngAgudo}[A, Q, B], \\
 &\quad \text{argBiss}[A, Q, B] + .5\text{valorAngAgudo}[A, Q, B]\}
 \end{aligned}$$

onde **myarg** calcula o argumento do ponto P , **argBiss** calcula o argumento da soma dos vetores unitários, **valorAngAgudo** nos dá o valor do ângulo do produto vetorial dos vetores unitários e **variacaoAngular** calcula a variação angular da geodésica.

Finalmente, dados três pontos A, Q, B em $\mathbb{D}^2$ e o raio k da circunferência que passa por A e B definimos a função **Angulo** que traça, através do comando **Circle** o trecho da circunferência de centro Q , raio k e com a variação angular igual à medida do ângulo $\widehat{AQB}$:

$$\text{Angulo}[\{A_ , Q_ , B_ \}, k_] := \text{Circle}[Q, k, \text{variacaoAngular}[A, Q, B]].$$

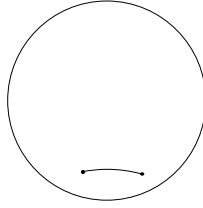


Figura 2.9: Segmento geodésico nos pontos P e Q

Então consideremos dois pontos P e Q em $\mathbb{D}^2$, definimos a função **Hline** que traça o segmento geodésico entre eles:

$$\begin{aligned}
 \text{Hline}[\{P_ , Q_ \}] &:= \text{If}[\text{myround}[\text{Det}[\{P, Q\}]] == 0, \text{Line}[\{P, Q\}], \\
 &\quad \text{Angulo}[\{P, \text{Circuncentro}[\{P, Q, \text{invers}[P]\}], Q\}, \\
 &\quad \text{Circunraio}[\{P, Q, \text{invers}[P]\}]]
 \end{aligned}$$

sendo **Line** comando que traça uma reta euclidiana caso os pontos sejam colineares com a origem de $\mathbb{D}^2$ (isto é verificado facilmente verificando se o determinante entre P e Q é

nulo). A aproximação numérica dos valores é feita multiplicando z por 10^3 , utilizando-se do comando `Round` que corresponde a função "maior inteiro menor ou igual à" e posteriormente dividindo novamente por 10^3 :

$$\text{myround}[z_] := \text{N}[\text{Round}[1000 * z]/10^3].$$

Já temos a função que traça o segmento geodésico entre dois pontos de $\mathbb{D}^2$. Agora dados três pontos A, B, C definimos a função `Htriang` que traça o triângulo hiperbólico com vértices A, B, C , e também a função `Htriangulo` que traça apenas as arestas AC e CB do triângulo ABC , do seguinte modo:

$$\text{Htriang}[\{A_ , B_ , C_ \}] := \{\text{Hline}[\{A, B\}], \text{Hline}[\{B, C\}], \text{Hline}[\{C, A\}]\}$$

$$\text{Htriangulo}[\{A_ , B_ , C_ \}] := \{\text{Hline}[\{A, C\}], \text{Hline}[\{C, B\}]\},$$

Precisamos definir os comandos para a reflexão de segmentos geodésicos. Seja (a, b) um ponto em $\mathbb{D}^2$ colinear com a origem, então a reflexão em (a, b) é simplesmente a reflexão no eixo real do plano (basta olhar a definição de reflexão vista no capítulo 1):

$$\text{refl}[\{a_ , b_ \}] := \{a, -b\}.$$

Agora consideremos os pontos P, Q, S de $\mathbb{D}^2$. Definimos a reflexão do ponto S na geodésica que passa por P e Q como sendo a inversão na circunferência com centro no circuncentro de $P, Q, \text{invers}[P]$ e raio igual à distância de P até o circuncentro descrito anteriormente, logo:

$$\text{reflHip}[\{P_ , Q_ \}][S_] := \text{inversao}[\text{Circun}[\{P, Q, \text{invers}[P]\}]] [S].$$

2.2.2 Construção do triângulo inicial Δ_0

Na seção anterior já definimos todos os comandos básicos para fazermos a pavimentação de $\mathbb{D}^2$. Iniciamos com a construção de Δ_0 e esta será a etapa 0.

Lembre que a rotina se inicia com o usuário determinando o ângulo de Δ_0 (os comandos terão as variáveis distintas para os ângulos de Δ_0), então através deste dado precisamos traçar Δ_0 em $\mathbb{D}^2$.

Utilizando a segunda Lei dos Cossenos (Teorema 1.2.5) podemos encontrar a medida dos lados de um triângulo conhecendo apenas a medida de seus ângulos. Assim dadas as constantes p, r, s tal que os ângulos de Δ_0 são $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{s}$ temos que a medida das arestas A, B, C de Δ_0 é determinada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{ladoA}[p_-, r_-, s_-] &:= N[\text{ArcCosh}[\text{Cos}[\frac{\pi}{r}] * \text{Cos}[\frac{\pi}{s}] + \frac{\text{Cos}[\frac{\pi}{p}]}{\text{Sen}[\frac{\pi}{s}] * \text{Sen}[\frac{\pi}{r}]}]]; \\ \text{ladoB}[p_-, r_-, s_-] &:= N[\text{ArcCosh}[\text{Cos}[\frac{\pi}{p}] * \text{Cos}[\frac{\pi}{s}] + \frac{\text{Cos}[\frac{\pi}{r}]}{\text{Sen}[\frac{\pi}{s}] * \text{Sen}[\frac{\pi}{p}]}]]; \\ \text{ladoC}[p_-, r_-, s_-] &:= N[\text{ArcCosh}[\text{Cos}[\frac{\pi}{p}] * \text{Cos}[\frac{\pi}{r}] + \frac{\text{Cos}[\frac{\pi}{s}]}{\text{Sen}[\frac{\pi}{p}] * \text{Sen}[\frac{\pi}{r}]}]]. \end{aligned}$$

Já temos a medida das arestas de Δ_0 e agora lembrando a convenção feita no início do capítulo para os vértices de Δ_0 temos que um dos vértices está na origem de $\mathbb{D}^2$, então duas das arestas de Δ_0 se iniciam na origem de $\mathbb{D}^2$; dado ângulo m de Δ_0 e a medida d de suas arestas podemos definir a função ponto da reta (denominamos **ptda reta**) que determina a posição dos vértices v_1 e v_2 :

$$\text{ptdaReta}[m_-, d_-] := \frac{\text{Tanh}[d]}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{m * \text{Tanh}[d]}{\sqrt{1+m^2}}i.$$

Desta maneira os vértices de Δ_0 são dados por:

$$\begin{aligned} v[0, p_-, r_-, s_-] &:= 0 + 0i; \\ v[1, p_-, r_-, s_-] &:= \text{ptdaReta}[0, .5\text{ladoB}[p, r, s]]; \\ v[2, p_-, r_-, s_-] &:= \text{ptdaReta}[\text{Tan}[\frac{\pi}{s}], .5\text{ladoA}[p, r, s]]; \end{aligned}$$

lembrando que convencionamos $\text{Im}(v_1) = 0$ e a função **Tanh**, definida em 1.2 fornece a tangente hiperbólica de metade da distância entre os pontos dados.

Definimos uma lista denominada de **verticesTriangulo** contendo os vértices de Δ_0 armazenados como pares ordenados,

$$\text{verticesTriangulo}[1, p_-, r_-, s_-] := \{\{\text{Re}[v[0, p, r, s]], \text{Im}[v[0, p, r, s]]\}, \{\text{Re}[v[1, p, r, s]], \text{Im}[v[1, p, r, s]]\}, \{\text{Re}[v[2, p, r, s]], \text{Im}[v[2, p, r, s]]\}\}.$$

Então através da função **Htriang** aplicada na lista acima podemos traçar Δ_0 :

$$g1 = \{\text{Htriang}[\text{verticesTriangulo}[1, p, r, s]]\};$$

2.2.3 Parte I: Rotações de triângulos

Na etapa 1 escolhemos como centro de rotação o vértice v_1 de Δ_0 e rotacionamos este no sentido horário $(p - 1)$ vezes conforme figura 2.2.

No início do capítulo explicamos como este algoritmo armazena os dados encontrados em cada etapa, agora vamos detalhar estes passos. Na etapa 1 geramos $(p - 1)$ novos vértices, onde cada vértice v_i , $i \in \{3, 4, \dots, (p-1)\}$ está ligado com o centro de rotação v_1 , com $\rho_{v_1}^{-1}(v_i)$ e com $\rho_{v_1}(v_i)$. O caso do vértice v_{p-1} é excepcional, pois está ligado apenas com v_1 e com $\rho_{v_1}^{-1}(v_{p-1})$. Assim, para gerarmos nossa Tabela Geral, distinguimos estas situações, definindo uma tabela inicial chamada **Lista** que contém todos os vértices da etapa 1 exceto o vértice v_{p-1} . Considerando o exemplo das seções anteriores, em que $p = 5$, temos que Lista contém os seguintes dados:

Lista da Etapa	Vértice	Distância	Fixo, Vértices Consecutivos
1	v_3	$ v_3 $	$\{v_1, v_2, v_4\}$
1	v_4	$ v_4 $	$\{v_1, v_3, v_5\}$
1	v_5	$ v_5 $	$\{v_1, v_4, v_6\}$

Vamos acrescentar o último vértice gerado nesta etapa definindo uma nova lista denominada de **Tabela**, a qual contém apenas os dados referentes ao último vértice:

Lista da Etapa	Vértice	Distância	Fixo, Vértice Consecutivo
1	v_6	$ v_6 $	$\{v_1, v_5\}$

Então definimos a tabela geral descrita no início do capítulo e denominada de **TabelaGeral** da rotina que é a junção das listas T0 (Tabela da etapa 0), **Lista** e **Tabela**. Logo **TabelaGeral**

contém:

Etapa	Vértice	Distância	Fixo, Vértices Consecutivos	Triângulos
0	v_0	$ v_0 $	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_0, v_1, v_2\}$
0	v_1	$ v_1 $	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_0, v_1, v_2\}$
0	v_2	$ v_2 $	$\{v_0, v_1\}$	$\{v_0, v_1, v_2\}$
1	v_3	$ v_3 $	$\{v_1, v_2, v_4\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
1	v_4	$ v_4 $	$\{v_1, v_3, v_5\}$	$\{v_1, v_3, v_4\}$
1	v_5	$ v_5 $	$\{v_1, v_4, v_6\}$	$\{v_1, v_4, v_5\}$
1	v_6	$ v_6 $	$\{v_1, v_5\}$	$\{v_1, v_5, v_6\}$

e assim sucessivamente até a etapa k . Quando for necessário recuperar os dados da Tabela Geral denotaremos esta função apenas por **TG**. Em comandos temos que Lista, Tabela e Tabela Geral dependem da etapa e da posição na etapa anterior do último vértice na Tabela Geral, por exemplo quando $p = 5$ na etapa 0 temos os vértices v_0, v_1 e v_2 , quando passamos para a etapa 1, armazenamos os vértices novos da seguinte maneira: v_3, v_4, v_5 e v_6 , então:

```

Lista[k_] := Table[{v[M[k] + j, p, r, s], Abs[v[M[k] + j, p, r, s]], {fixo[k, p, r, s],
v[M[k] + j - 1, p, r, s], v[M[k] + j + 1, p, r, s]}}, {j, 1, p - 2}];

Tabela[k_] := AppendTo[Lista[k], {v[M[k] + p - 1, p, r, s], Abs[v[M[k] + p - 1, p, r, s]],
{fixo[k, p, r, s], v[M[k] + p - 2, p, r, s]}]];

Tk := If[k == 1, Join[T0, Tabela[k]], Join[<< c : /users/Karine/TabelaGeral,
Tabela[k]]];

Put[Tk, \c : /users/Karine/TabelaGeral"];

```

onde $M[k_] = \text{If}[k == 1, k + 1, M[k - 1] + (p - 1)]$ é a posição dos vértices em Tabela Geral, o comando **AppendTo** adiciona no final da Lista os elementos de Tabela e o comando **Join** faz a junção das tabelas anteriores. O comando **Put** salva a tabela Tk com nome de Tabela Geral no caminho indicado e para recuperarmos esta tabela quando necessário usamos o comando **Get**(<<).

Daqui em diante vamos recuperar os dados da Tabela Geral da maneira que for mais conveniente para um melhor aproveitamento do algoritmo, por isso definimos novas tabelas.

Definimos a tabela denominada de **Candidatos** da etapa k que compreenderá apenas as linhas da Tabela Geral cujos vértices tiverem módulo maiores que o módulo do centro de rotação da etapa anterior. Por exemplo na etapa 1 o vértice de rotação é v_1 , sabemos que $|v_0|$ é claramente menor que $|v_1|$ e que $|v_1| = |v_2|$ (pois Δ_0 é equilátero), logo a tabela Candidatos contém:

Lista da Etapa	Vértice	Distância	Fixo,Vértices Consecutivos
1	v_3	$ v_3 $	$\{v_1, v_2, v_4\}$
1	v_4	$ v_4 $	$\{v_1, v_3, v_5\}$
1	v_5	$ v_5 $	$\{v_1, v_4, v_6\}$
1	v_6	$ v_6 $	$\{v_1, v_5\}$

Dentre estes escolheremos o vértice que tiver menor módulo para ser o centro de rotação na etapa 2:

$$\text{Candidatos}[k_] := \text{Select}[<< c : /users/Karine/TabelaGeral, \\ (\#[[2]] > \text{Abs}[\text{fixo}[k, p, q, r]] \&)];$$

sendo que o comando **Select**, pré-definido no Mathematica, seleciona as linhas de Tabela Geral que satisfazem a condição de terem módulos maiores que o do centro de rotação da etapa anterior.

Para definirmos o centro de rotação utilizamos de um comando do próprio Mathematica (versão 4.1) denominado de **ORDERING**, que tem a seguinte função: dada uma lista $L = \{30, 74, 62, 27, 95\}$ temos que a lista $L_1 = \{27, 30, 62, 74, 75\}$ é a lista L com seus elementos ordenados de modo crescente e o comando **Ordering**[L] resulta em uma lista das posições dos elementos de L na lista ordenada L_1 . No nosso caso consideremos a lista L como sendo a coluna 3 da tabela Candidatos e **Ordering**[L] fornece a linha (na lista Candidatos) do que estiver em primeiro na lista L ordenada. Assim o centro de rotação (ou vértice fixo) da etapa k será determinado através dos elementos da tabela Candidatos até a etapa $k - 1$:

$$\text{fixo}[k_ , p_ , r_ , s_] := \text{If}[k == 1, v[1, p, r, s], \text{Extract}[\text{Candidatos}[k - 1] \\ [[\text{First}[\text{Ordering}[\text{Candidatos}[k - 1][[All, 2]]]]], 1]];]$$

tal que o comando **Extract** seleciona da lista **Candidatos** o vértice que estiver na coluna **Vértices** da linha determinada pelo comando **Ordering**. Por exemplo suponha que o vértice de menor distância (de v_0) na etapa 2 seja v_4 , o comando **Ordering[Candidatos[1]]** mostra a linha 2 na lista **Candidatos** e **Extract** fornece o vértice que está na coluna **Vértices**, linha 2 da lista **Candidatos**.

Nosso objetivo no momento é definirmos a rotação de um ângulo θ em torno de um ponto z . Na seção anterior definimos os comandos básicos $R_{\pm 1}$ que efetuam a rotação em torno da origem. Para rotacionar em torno de um ponto arbitrário z , transladamos este ao ponto 0 através do comando $T[z_-]$, aplicamos a rotação $R_{\pm 1}$ e transladamos novamente através de $S[z_-]$, a isometria inversa de $T[z_-]$:

$$\begin{aligned} T[z_-] &:= \frac{1 * z - \text{fixo}[k, p, q, r]}{(-\text{Conjugate}[\text{fixo}[k, p, q, r]] * z) + (1 + 0i)}; \\ S[z_-] &:= \frac{1 * z + \text{fixo}[k, p, q, r]}{(\text{Conjugate}[\text{fixo}[k, p, q, r]] * z) + (1 + 0i)}; \\ \text{Rot}_\theta[z_-] &:= \text{Composition}[S, R_1, T][z]; \\ \text{Rot}_{-\theta}[z_-] &:= \text{Composition}[S, R_{-1}, T][z]. \end{aligned}$$

Os comandos **Composition** e **Conjugate** (ambos do próprio Mathematica) realizam respectivamente a composição de funções e a conjugação de um número complexo.

Na etapa 1 rotacionamos Δ_0 em torno de v_1 e apenas as rotações aplicadas no vértice v_2 é que geram vértices novos para a etapa 2 conforme explicação na seção 2.2. Então definimos apenas o vértice de rotação que chamaremos de $u[k, p, r, s]$ e denotaremos apenas por $u[k]$ durante o texto onde k é a etapa que está sendo gerado e p, r, s os parâmetros referentes aos ângulos do triângulo, conforme apresentado no início do capítulo. Para definir $u[k]$, determinamos a posição do centro de rotação da etapa k na Tabela Geral (TG) de modo que o vértice de rotação é aquele que está na posição (na Tabela Geral) anterior ou posterior (dependendo se k é par ou ímpar) da posição do centro de rotação:

$$\begin{aligned} \text{Posicao} &:= \text{If}[k == 1, \text{Null}, \text{Position}[\text{TG}[[\text{All}, 1]], \text{fixo}[k, p, r, s]]]; \\ u[k_-, p_-, r_-, s_-] &:= \text{If}[k == 1, v[2, p, r, s], \text{Extract}[\text{TG}[[\text{All}, 1]], \\ &\quad \text{Posicao} + (-1)^k /. \{x_- \} :> x]]. \end{aligned}$$

Fazemos $(p - 1)$ rotações em cada etapa k , então definimos as $(p - 1)$ rotações no vértice $u[k]$:

```
For[i = 1, i < p, i ++, Print[MapAll[myround, v[M[k] + i, p, q, r] =
  NestList[Rot(-1)kθ, u[k, p, q, r], p - 1][[i + 1]]]]];
```

tal que o comando `Print` imprime os vértices gerados pelas rotações na tela e o comando `NestList` aplica $(p - 1)$ vezes a função $\text{Rot}_{(-1)^k\theta}$ no vértice de rotação $u[k]$.

Nas explicações acima definimos todas as funções necessárias para fazermos a rotação dos triângulos com um vértice fixo, agora vamos definir funções para podermos realizar a Parte II do algoritmo.

Quando descrevemos a função `TabelaGeral` nem todos os vértices tinham três vértices associados à ele, o último vértice de cada etapa tinha apenas o centro de rotação da etapa. Definimos uma nova tabela, denominada `Vk` que contém o centro de rotação da etapa k e o último vértice desta etapa, em comandos:

```
Vk := If[k == 1, {{Re[fixo[k, p, r, s]], Im[fixo[k, p, r, s]]},
  {Re[v[M[k] + p - 1, p, r, s]], Im[v[M[k] + p - 1, p, r, s]]}},
  Join[<< c : /users/Karine/arestasrefl, {{Re[fixo[k, p, r, s]], Im[fixo[k, p, r, s]]},
  {Re[v[M[k] + p - 1, p, r, s]], Im[v[M[k] + p - 1, p, r, s]]}}]]];
```

com o comando `Put[Vk, "c : /users/Karine/arestasrefl"]` salvando a lista `Vk` no diretório indicado com o nome `arestasrefl`, o comando `<< (Get)` chamando o arquivo `arestasrefl` e o comando `Join` fazendo a junção da lista `arestasrefl` da etapa anterior com os da nova etapa. No exemplo quando $p = 5$ temos que a lista `arestasrefl` na etapa 2 contém:

$$\text{arestasrefl} := \{v_1, v_6, v_3, v_{10}\}$$

Definimos o comando `Arestas` apenas para dividir de dois em dois os vértices acima, ou seja definimos uma aresta:

$$\text{Arestas} = \text{Partition}[\text{Ar}, 2];$$

no nosso exemplo:

$$\text{Arestas} := \{\{v_1, v_6\}, \{v_3, v_{10}\}\}$$

Como descrevemos no início da seção queremos fazer reflexões dos triângulos gerados no início do algoritmo pelas arestas acima, mas começaremos as reflexões pelas últimas arestas, ou seja, a reflexão 1 será feita na aresta k e assim sucessivamente, até a reflexão k ser feita na aresta 1, logo as Arestas de Reflexão serão dadas pelo função:

$$\begin{aligned} \text{For } [\text{ArestasdeReflexao}[1] &= \text{Arestas}[[\text{Length}[\text{Arestas}]]]; \\ i &= 1, i < \text{Length}[\text{Arestas}], \text{ArestasdeReflexao}[i] = & (2.2) \\ \text{Arestas}[[i], i + 1]; \end{aligned}$$

tal que o comando `Length` resulta o comprimento da lista `Arestas` e denominamos de `ArestadeReflexao[1]` a aresta que está na última posição da lista `Arestas`, `ArestadeReflexao[2]` a que está na penúltima posição e assim por diante.

Vamos dividir a Tabela Geral em diversos k blocos da seguinte maneira: definimos o `Bloco1` como o que contém todos os vértices formados na etapa k , o `Bloco2` contendo todos os vértices da etapa $k - 1$ e os da etapa k , e assim por diante, até que o `Bloco k` tenha todos os vértices das etapas $1, \dots, k$.

A rotina é feita da etapa 1 para a etapa k e como queremos armazenar na função `Bloco` os dados de k para 1 definimos funções auxiliares como a função `B1[k]` que armazena os triângulos novos de cada etapa k , assim `B1[1]` no nosso exemplo é formado por:

Etapa	Triângulos
1	$\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_1, v_5, v_6\}\}$

e definimos a função `Bloquinho[k]` que faz apenas a junção de `B1[k - 1]` e de `B1[k]`. Assim temos que:

$$\begin{aligned} \text{B1}[k] &= \text{Table}[\text{If}[i == \text{M}[k], \{\{\text{Re}[\text{fixo}[k, p, r, s]], \text{Im}[\text{fixo}[k, p, r, s]]\}, \\ &\quad \{\text{Re}[\text{u}[k, p, r, s]], \text{Im}[\text{u}[k, p, r, s]]\}, \\ &\quad \{\text{Re}[\text{v}[\text{M}[k] + 1, p, r, s]], \text{Im}[\text{v}[\text{M}[k] + 1, p, r, s]]\}\}, \\ &\quad \{\{\text{Re}[\text{fixo}[k, p, r, s]], \text{Im}[\text{fixo}[k, p, r, s]]\}, \{\text{Re}[\text{v}[i, p, r, s]], \text{Im}[\text{v}[i, p, r, s]]\}, \\ &\quad \{\text{Re}[\text{v}[i + 1, p, r, s]], \text{Im}[\text{v}[i + 1, p, r, s]]\}\}], \{i, \text{M}[k], \text{M}[k] + p - 2\}; \\ \text{Bloquinho}[k] &= \text{If}[k == 1, \text{B1}[k], \text{Join}[\text{Bloquinho}[k - 1], \text{B1}[k]]]; \end{aligned}$$

Assim a função $\text{Bloco}[k]$ é determinada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{For}[\text{Bloco}[1] &= \text{Drop}[\text{Bloquinho}[k-1], \text{Length}[\text{Bloquinho}[k-1]] - (p-1)]; \\ & i = 1, i < k-1, \text{Bloco}[i] = \\ & \text{Take}[\text{Bloquinho}[k-1], -i * (p-1), i++] \end{aligned} \quad (2.3)$$

tal que o comando **Drop** elimina da lista **Bloquinho** todos os triângulos exceto os $p-1$ últimos e o comando **Take** toma os elementos até a posição escolhida que depende do comprimento da lista **Arestas**.

Determinados os vértices, precisamos definir os triângulos e traçar suas arestas. Dado triângulo Δ em $\mathbb{D}^2$ com vértices z, w, t definimos a função $g[z, w, t]$ que traça os lados zt e tw de Δ :

$$\begin{aligned} \text{For}[& i = \text{If}[k == 1, 1, M[k]], i \leq M[k] + 3, \\ & \text{Do}[g_i[z_-, w_-, t_-] = \text{Htriangulo}[\{\{\text{Re}[z], \text{Im}[z]\}, \{\text{Re}[w], \text{Im}[w]\}, \\ & \{\text{Re}[t], \text{Im}[t]\}\}], \{i, M[k] - 1, M[k] + p - 2\}, i++]; \end{aligned}$$

e definimos a tabela $\text{Tri}[k]$ para cada etapa k como sendo a função g_i definida acima aplicada nos triângulos da etapa k , logo:

$$\begin{aligned} \text{Tri}[k] &= \text{Table}[\{\text{If}[i == M[k], g_i[\text{fixo}[k, p, r, s], u[k, p, r, s], v[M[k] + 1, p, r, s]], \\ & g_i[\text{fixo}[k, p, r, s], v[i, p, r, s], v[i + 1, p, r, s]]\}], \{i, M[k], M[k] + (p - 2)\}]; \end{aligned}$$

Apenas fazendo a união de $\text{Tri}[k]$ para todo k , definimos:

$$\text{Triangulos}[k] = \text{Table}[\text{Tri}[j], \{j, 1, k\}];$$

A tabela $\text{Triangulos}[k]$ tem todas as coordenadas dos triângulos determinados até a etapa k , mas não os traça e nem os exibe na tela, o mesmo ocorrendo com a função $g1$ (definida na seção 2.2.2). Vamos definir funções que exibem estes objetos na tela como também o bordo do disco de Poincaré. Iniciamos exibindo o disco de Poincaré, ou seja, o círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1 da seguinte maneira:

$$\text{disco} = \text{Show}[\text{Graphics}[\{\text{Circle}[\{0, 0\}, 1]\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{AspectRatio} \rightarrow 1];$$

tal que o comando **Circle** representa o círculo centrado em $(0,0)$ e raio 1, o comando **Graphics** traça o círculo de tal forma que os comandos **AspectRatio** e **PlotRange** são do próprio Mathematica e tem como função, respectivamente, especificar o raio do disco e que pontos você quer incluir no seu gráfico e finalmente o comando **Show** que exibe na tela o objeto traçado.

Da mesma maneira exibimos Δ_0 e todas as rotações feitas até a etapa k com o comando:

```
Show[disco, Graphics[{g1, Triangulos[k]}, PlotRange → All, AspectRatio → 1]].
```

2.2.4 Parte II : Reflexão de Triângulos

Nesta seção apresentamos os comandos para refletir os blocos definidos na tabela Blocos (2.3) nas arestas de reflexão determinadas na Tabela de Reflexão (2.2). Note que se alguma aresta de **ArestadeReflexão** tiver seus vértices colineares com v_0 então a reflexão hiperbólica é uma reflexão euclidiana neste segmento de reta.

Definimos a função **reflet**[k] que a cada etapa k aplica a função **refl** (reflexão euclidiana) nos Blocos definidos na seção anterior e também a função **reflexaoHiperbolica** que aplica a **reflHip** (inversão euclidiana) nos mesmos elementos acima. Logo dada etapa k e os blocos[k] temos que:

```
For[reflet[1] = Table[Map[refl, Bloco[1][[t]]], {t, 1, Length[Bloco[1]]}];
1 = 1, 1 < k - 1, reflet[1] = Table[Map[refl, Bloco[1][[t]]],
{t, 1, Length[Bloco[1]]}], 1 ++
reflexaoHiperbolica[s_] := Table[g[t] = Table[h[i] =
reflHip[ArestasdeReflexao[s]][Bloco[s][[t]][[i]]],
{i, 1, Length[Bloco[s][[t]]]}], {t, 1, Length[Bloco[s]]}]
```

Como podemos ter tanto reflexões como inversões euclidianas, precisamos de mecanismo para distinguir entre estes dois casos. Consideremos uma aresta h em **ArestasdeReflexao** e sejam $h[[1]]$ e $h[[2]]$ os vértices de h , então basta verificar se estes tem o mesmo argumento. Se tiverem o mesmo argumento usaremos o comando **reflet** e caso contrário

`reflexaohiperbolica`. Logo podemos definir os TriângulosRefletidos da etapa h :

```
TriangulosRefletidos[h_] := If[myround[myarg[ArestasdeReflexao[h][[1]]]] ==
    myround[myarg[ArestasdeReflexao[h][[2]]]],
    reflet[h], reflexaoHiperbolica[h]]
```

O número de reflexões feitas nessa parte depende do comprimento da lista `Arestas`. Assim determinamos a tabela de todos os triângulos refletidos definindo a função `TriangRefle`:

```
TriangRefle = Table[TriangulosRefletidos[i], {i, 1, Length[Arestas]}];
```

Agora vamos definir a reflexão de todos os triângulos obtidos acima na reta que passa pela origem e por v_1 :

```
novoTriangRefle = Table[f[i] = Table[Map[refl, TriangRefle[[i]][[t]]],
    {t, 1, Length[TriangRefle[[i]]}], {i, 1, Length[TriangRefle]}];
```

Basta traçar os triângulos refletidos com o comando `Htriangulo` aplicado na tabela `TriangulosRefletidos` e para isso definimos a tabela `Refletidos[h]` com h variando de 1 até o comprimento da tabela `Arestas`:

```
For [Refletidos[1] = Table[g[t] = Htriangulo[TriangulosRefletidos[1][[t]]],
    {t, 1, Length[TriangulosRefletidos[1]}];
    i < Length[Arestas], Refletidos[i] = Table[h[1] =
    Htriangulo[TriangulosRefletidos[i][[1]]],
    {1, 1, Length[TriangulosRefletidos[i]}], i ++]
```

Finalmente definimos a tabela reflexão que contém todos os triângulos refletidos e a tabela `novareflexao` que contém a reflexão dos elementos da lista `novosTriangRefle`:

```
reflexao = Table[Refletidos[i], {i, 1, Length[Arestas]}];
novareflexao = Table[h[i] = Table[g[t] = Htriangulo[novoTriangRefle[[i]][[t]]],
    {t, 1, Length[novoTriangRefle[[i]]}],
    {i, 1, Length[novoTriangRefle]}];
```

Na Parte I exibimos as rotações através dos comandos `Graphics` e `Show`, e da mesma maneira exibimos os triângulos definidos nas tabelas `reflexao` e `novareflexao`:

```
Show[disco, Graphics[{reflexao, novareflexao}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]]
```

Exemplificando as tabela reflexão e novareflexao quando $p = 5$ temos:

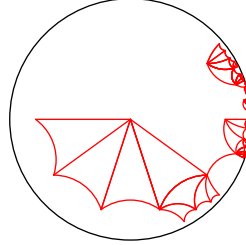


Figura 2.10: reflexao

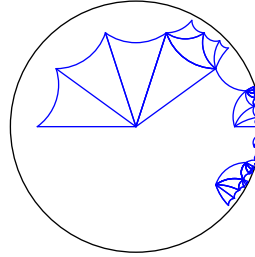


Figura 2.11: novareflexao

Logo a Parte II resulta em um setor de $\mathbb{D}^2$ formado por: Δ_0 , Parte I e as duas reflexões acima; portanto no exemplo $p = 5$ temos que a parte II resulta no setor:

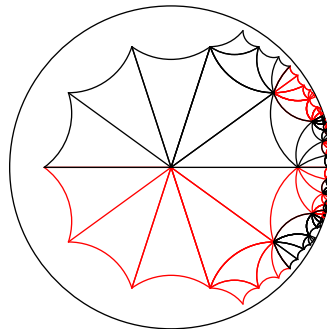


Figura 2.12: Reflexões

2.2.5 Parte III : Rotação na origem

Na parte II pavimentamos um setor de $\mathbb{D}^2$ conforme figura 2.12. Para pavimentarmos todo o disco vamos rotacionar este setor $2 * p$ vezes (pois o ângulo de Δ_0 é $\frac{\pi}{p}$) em torno de v_0 e sobrepor todas estas rotações para concluir a pavimentação.

Observe que o setor acima definido não está agrupado, assim precisamos aplicar a função `rotacao` (vista na seção 2.2.1) em cada uma das tabelas que definem o setor pavimentado. Então definimos a tabela `rotat` que contém as $2 * p$ rotações de ângulo $\theta = \frac{\pi}{p}$ em torno de v_0 dos vértices contidos nas tabelas `Bloco[k]`:

```
For [l = 0, l < (2 * p) * 0, l += 0, rotat = Table[h[i] = Table[g[t] =
    rotacao[l, Bloco[k - 1]][[t]][[i]], {i, 1, Length[Bloco[k - 1]][[t]]}],
    {t, 1, Length[Bloco[k - 1]]}];
```

Definimos também as tabelas `rotat1` e `rotat2` que rotacionam, respectivamente, os triângulos da tabela `TriangRefle` e `novoTriangRefle` $2 * p$ vezes de ângulo $\theta = \frac{\pi}{p}$ em torno de v_0 :

```
rotat1 = Table[f[j] = Table[g[t] = Table[h[i] = rotacao[l, TriangRefle[[j]][[t]][[i]],
    {i, 1, Length[TriangRefle[[j]][[t]]}], {t, 1, Length[TriangRefle[[j]]}],
    {j, 1, k - 1}];
rotat2 = Table[g[s] = Table[f[i] = Table[h[t] =
    rotacao[l, novoTriangRefle[[s]][[i]][[t]],
    {t, 1, Length[novoTriangRefle[[s]][[i]]}], {i, 1, Length[novoTriangRefle[[s]]}],
    {s, 1, Length[novoTriangRefle]}];
```

Agora basta aplicarmos a função `HTriangulo` em `rotat`, `rotat1` e `rotat2`, e assim definimos as tabelas `reflet[l]`, `reflet1[l]` e `reflet2[l]` com $l \in \{\theta, 2\theta, 3\theta, \dots, 2p\theta\}$:

```
reflet[l] = Map[Htriangulo, rotat];
reflet1[l] = Table[h[i] = Map[Htriangulo, rotat1[[i]]], {i, 1, Length[rotat1]};
reflet2[l] = Table[h[i] = Table[g[t] =
    Htriangulo[rotat2[[i]][[t]], {t, 1, Length[rotat2[[i]]}],
    {i, 1, Length[rotat1]}];
```

Exibimos cada uma das tabelas anteriores através do comando:

```
Show[disco, Graphics[reflet[1], reflet1[1], reflet2[1]], PlotRange → All,
AspectRatio → 1]]].
```

Observe que as tabelas `reflet[1]`, `reflet1[1]` e `reflet2[1]` não contém todas as $2 * p$ rotações ao mesmo tempo, ou seja, `reflet[1]` contém as rotações de ângulo θ , `reflet[2]` as rotações de ângulos 2θ e assim sucessivamente, por isso precisamos definir mais três tabelas formadas com todas as $2 * p$ rotações do setor determinado na parte II, então definimos as tabelas `rot`, `rot1` e `rot2` que apenas agrupam todas as rotações das tabelas acima:

```
rot    = Table[reflet[1 - i *  $\theta$ ], {i, 1, 2 * p - 1}];
rot1   = Table[reflet1[1 - i *  $\theta$ ], {i, 1, 2 * p - 1}];
rot2   = Table[reflet2[1 - i *  $\theta$ ], {i, 1, 2 * p - 1}];
```

Finalmente exibimos todas as rotações feitas nesta fase, o setor obtido na parte II, e portanto concluímos a pavimentação de $\mathbb{D}^2$ por triângulos equiláteros:

```
Show[disco, Graphics[{Triangulos[k - 1], reflexao, novareflexao, rot, rot1, rot2},
PlotRange → All, AspectRatio → 1]].
```

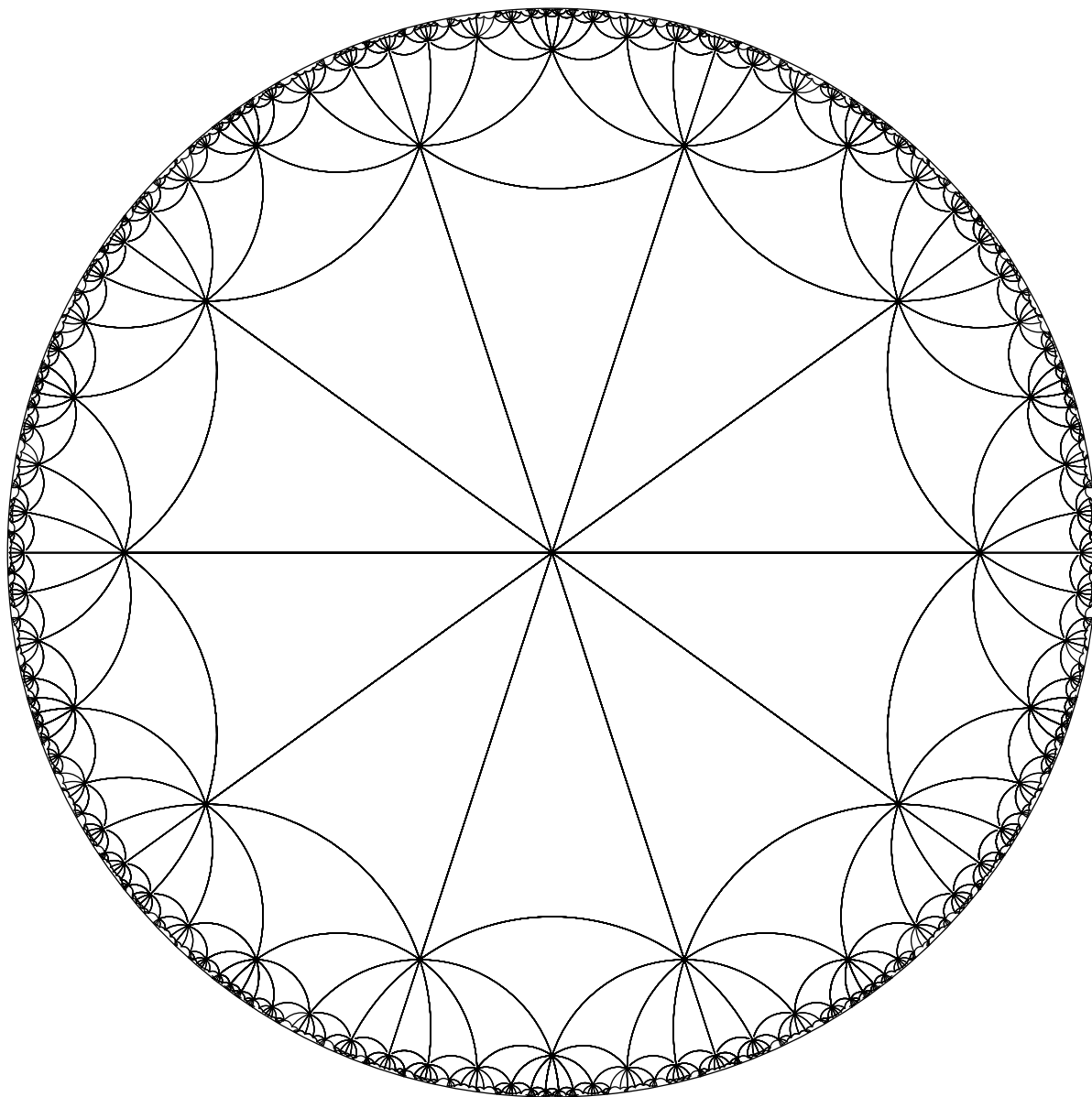


Figura 2.13: Pavimentação de $\mathbb{D}^2$ por triângulos com ângulos $\frac{\pi}{5}$

Capítulo 3

Análise do crescimento do Grupo $\Gamma_{3,q}$

Neste capítulo faremos a análise do crescimento do grupo $\Gamma_{3,q}$. A idéia original era estudar a eficiência dos algoritmos apresentados no capítulo anterior, comparando o número de passos gastos pelos algoritmos para desenhar os ladrilhos (triângulos) correspondentes a uma bola em $\Gamma_{3,q}$, comparado com a cardinalidade destas bolas.

O primeiro passo para realizar este intento é determinar uma fórmula para o crescimento dos grupos. É fato conhecido que estes grupos, assim como qualquer grupo de isometrias de um espaço hiperbólico com domínio fundamental compacto é um grupo bi-automático [Ep]. Assim, segue de imediato que o crescimento destes grupos é exponencial. Para se tentar definir os parâmetros exatos que definem este crescimento, seria necessário obter uma fórmula explícita para tal. Conseguimos uma fórmula recursiva, dependente apenas do parâmetro q , para expressar este crescimento que é apresentada na seção 3.1. Infelizmente, não conseguimos a partir desta obter uma fórmula explícita, mesmo com o auxílio do programa Mathematica. Assim, a análise de eficiência dos algoritmos ficou comprometida, restando como projeto futuro.

Começamos recordando alguns conceitos e definições. O grupo $\Gamma_{3,q}$ é gerado pelas reflexões nas arestas do triângulo Δ_0 com ângulos iguais a $\frac{2\pi}{q}$. De modo geral, diremos que uma geodésica δ é **geodésica suporte da pavimentação** se alguma aresta de algum triângulo da pavimentação estiver contida em δ . Denotaremos por S o conjunto das geodésicas suportes. Observamos que $\delta \in S$ se e somente se $\rho_\delta \in \Gamma_{(3,q)}$. Denominamos as geodésicas

que suportam os lados de Δ_0 de α, β e γ e as reflexões nestas geodésicas respectivamente de ρ_α, ρ_β e ρ_γ . Temos que

$$\langle \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma \mid \rho_\alpha^2 = \rho_\beta^2 = \rho_\gamma^2 = (\rho_\alpha \rho_\beta)^q = (\rho_\alpha \rho_\gamma)^q = (\rho_\beta \rho_\gamma)^q = e \rangle$$

é uma representação de $\Gamma_{3,q}$ (com $p = \frac{q}{2}$) e o triângulo inicial Δ_0 é domínio de Dirichlet do grupo. Cada triângulo Δ_i da pavimentação é imagem de Δ_0 por um único elemento $g \in \Gamma_{(3,q)}$. Assim, dados ladrilhos (ou triângulos) $g(\Delta)$ e $h(\Delta)$ definimos a **distância entre ladrilhos** do seguinte modo:

Definição 21 *Sejam $g, h \in \Gamma_{(3,q)}$. A distância entre dois ladrilhos $g(\Delta_0)$ e $h(\Delta_0)$ é induzida pela distância de Cayley em $\Gamma_{(3,q)}$, ou seja,*

$$d(g\Delta_0, h\Delta_0) = d_C(g, h) = d_C(h^{-1}g, e).$$

onde d_C é a distância de Cayley.

Denotaremos por B_k a bola (fechada) em $\Gamma_{3,q}$, centrada na identidade com raio k , e por $C_k := B_k \setminus B_{k-1}$ a circunferência de raio k , que denominaremos de **etapa k da pavimentação**.

Devido a esta correspondência entre elementos do grupo e ladrilhos da pavimentação, vamos denotar por P_k a família de ladrilhos na pavimentação correspondentes a bola B_k no grupo e por $NP_k := P_k \setminus P_{k-1}$ os correspondentes à circunferência C_k , onde o prefixo N significa *novos*. Esclarecidas as notações, como estamos trabalhando apenas com pavimentações por triângulos nos restringiremos, daqui em diante, a falar em triângulos ou ladrilhos.

Nosso objetivo agora é encontrar uma fórmula para a cardinalidade de P_k , que denotaremos por $|P_k|$ e, para isso vamos determinar o crescimento de vértices e arestas desses triângulos. Diremos que V_k é o conjunto dos vértices de triângulos contidos em P_k , A_k é o conjunto de arestas de triângulos contidos em P_k e de modo similar ao caso dos polígonos denotamos as arestas e vértices novos na pavimentação respectivamente por $NA_k := A_k \setminus A_{k-1}$ e por $NV_k := V_k \setminus V_{k-1}$, assim, podemos afirmar que:

$$|V_k| = \sum_{i=0}^k |NV_i|, \quad |A_k| = \sum_{i=0}^k |NA_i| \quad \text{e} \quad |P_k| = \sum_{i=0}^k |NP_i|$$

Logo basta conhecermos $|NP_k|$ para determinarmos a cardinalidade das bolas no grupo $\Gamma_{(3,q)}$.

Considerando os triângulos em P_{k-1} , temos, por definição, um único instrumento para gerar novos triângulos na etapa k : a reflexão nas arestas de triângulos pertencentes a P_{k-1} . Note que $\varepsilon \in A_{k-1}$ é bordo de um ou dois triângulos em P_{k-1} : caso ε seja aresta de um único triângulo $\Delta \in P_{k-1}$, segue que $\rho_\varepsilon(\Delta)$ (a reflexão do triângulo Δ na aresta ε) é um triângulo novo em NP_k ; caso ε seja bordo de dois triângulos em P_{k-1} estes são apenas permutados pela reflexão, não contribuindo com novos elementos em P_{k-1} . Além disso se uma aresta ε em A_{k-1} for aresta de um único triângulo então $\varepsilon \in NA_{k-1}$.

De qualquer modo para determinarmos $|NP_k|$ basta determinar a cardinalidade das arestas de A_{k-1} que são bordo de um único triângulo em P_{k-1} .

Definamos a função $t_k : V_k \rightarrow \{2, \dots, q\}$ a qual a cada vértice $v \in V_k$ associa o número de arestas de A_k que tem v como vértice. Diremos que $t_k(v)$ é o **k -tipo** do vértice v . Incorporamos o tipo ao vértice usando a notação v_k^w onde $w = t_k(v)$. Ainda usaremos estas notações:

$$V_k = \{v_{k,1}^{w_1}, v_{k,2}^{w_2}, \dots, v_{k,|V_k|}^{w_{|V_k|}}\} \text{ e } NV_k = \{v_{k,1}^{w_1}, v_{k,2}^{w_2}, \dots, v_{k,|NV_k|}^{w_{|NV_k|}}\}.$$

com k sendo a etapa da pavimentação e $w_i = t_k(v_{k,i})$ com $i = 1, \dots, |V_k|$ para V_k e $i = 1, \dots, |NV_k|$ para NV_k .

Considerando aresta $\varepsilon \in A_k$, vamos caracterizá-la pelo k -tipo de seus vértices: diremos que ε tem k -tipo $(t_k(\iota(\varepsilon)), t_k(\tau(\varepsilon)))$, onde $\iota(\varepsilon)$ e $\tau(\varepsilon)$ são os vértices inicial e final, respectivamente, que determinam ε . Assumiremos que $t_k(\iota(\varepsilon)) \leq t_k(\tau(\varepsilon))$ e, sem ambiguidades, podemos assumir a notação $\varepsilon_k^{\iota_j, w_j}$ onde $\iota_j = t_k(\iota(\varepsilon))$ e $w_j = t_k(\tau(\varepsilon))$ com $j = 1, \dots, |A_k|$ para A_k e $j = 1, \dots, |NA_k|$ para NA_k . Como fizemos para os vértices, também teremos as seguintes notações:

$$A_k = \{\varepsilon_{k,1}^{\iota_1, w_1}, \varepsilon_{k,2}^{\iota_2, w_2}, \dots, \varepsilon_{k,|A_k|}^{\iota_{|A_k|}, w_{|A_k|}}\} \text{ e } NA_k = \{\varepsilon_{k,1}^{\iota_1, w_1}, \varepsilon_{k,2}^{\iota_2, w_2}, \dots, \varepsilon_{k,|NA_k|}^{\iota_{|NA_k|}, w_{|NA_k|}}\}.$$

A notação adotada é pesada e avisamos de antemão que, sempre que possível, omitiremos índices desnecessários. Note que definimos os vértices e arestas da pavimentação de acordo

com seus k -tipos, informação que será necessária para sabermos quais vértices são novos na etapa k e quais não serão.

Assim, queremos determinar quais tipos de vértices e arestas geram triângulos novos para a etapa seguinte e quais os tipos destes vértices e arestas.

Diremos que uma aresta é **k -exterior** se for aresta de um único triângulo na etapa k , e diremos que é **interior** caso contrário. A reflexão na aresta $\varepsilon_{k,j}^{\ell_j, \tau_j}$ **fecha o ciclo de arestas** se $\tau_j = q$, pois o número máximo de ladrilhos com um vértice em comum é q . Observe que fechar o ciclo de arestas não significa que temos o número máximo de triângulos com um vértice em comum, ou seja, ainda pode ser necessário uma terceira aresta que ligue os dois vértices das últimas arestas do ciclo. Na figura 3.1 a aresta pontilhada é a aresta que ainda falta para termos o número máximo de triângulos com um vértice em comum:

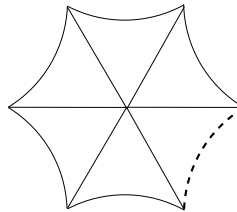


Figura 3.1: Exemplo de um ciclo fechado com $q = 6$.

Seja $v_{k,t}^j \in V_k$ e $\mathcal{A} = \{\varepsilon_{k,1}^{\ell_1, \tau_1}, \dots, \varepsilon_{k,j}^{\ell_j, \tau_j}\}$ o conjunto das arestas de A_k que tem $v_{k,t}^j$ como vértice, enumeradas sempre no sentido anti-horário. Observe que temos uma arbitrariedade na ordenação destas arestas: a escolha da aresta inicial. Como estamos interessados apenas no caso de vértices que na etapa em questão tenham alguma aresta exterior (pois do contrário todos os triângulos da pavimentação que o tem como vértice já foram computados), podemos assumir que $\mathcal{A}$ possui uma, e conseqüentemente ao menos duas, arestas exteriores. Assim, vamos assumir que a ordenação feita das arestas de $\mathcal{A}$ é tal que $\varepsilon_{k,1}^{\ell_1, \tau_1}, \varepsilon_{k,j}^{\ell_j, \tau_j}$, primeira e última aresta, sejam as arestas k -exteriores. Mostraremos mais adiante que esta escolha remove qualquer ambigüidade possível na ordenação de $\mathcal{A}$.

Começamos então com algumas definições. Diremos que $\varepsilon_{k,i}^{\ell_i, \tau_i}$ e $\varepsilon_{k,i+1}^{\ell_{i+1}, \tau_{i+1}}$ com $i = 1, \dots, j$ são **consecutivas** se o ângulo entre elas for $\frac{2\pi}{q}$. Caso $\varepsilon_{k,i}^{\ell_i, \tau_i}$ for consecutiva com $\varepsilon_{k,i-1}^{\ell_{i-1}, \tau_{i-1}}$ e

com $\varepsilon_{k,i+1}^{\ell_{i+1},\tau_{i+1}}$, para todo $i = 2, \dots, j$, diremos que o conjunto formado por todas as arestas de $v_{k,t}^j$ é um **conjunto de arestas consecutivas**. Caso contrário, diremos que temos uma descontinuidade ou buraco das arestas que contém $v_{k,t}^j$.

Observe que dado $\mathcal{A} = \{\varepsilon_{k,1}^{\ell_1,\tau_1}, \varepsilon_{k,2}^{\ell_2,\tau_2}, \dots, \varepsilon_{k,j}^{\ell_j,\tau_j}\}$ um conjunto de arestas consecutivas do vértice $v_{k,t}^j$ as únicas arestas k -exteriores de $\mathcal{A}$ são $\varepsilon_{k,1}^{\ell_1,\tau_1}$ e $\varepsilon_{k,j}^{\ell_j,\tau_j}$, pois as arestas $\varepsilon_{k,2}^{\ell_2,\tau_2}, \dots, \varepsilon_{k,j-1}^{\ell_{j-1},\tau_{j-1}}$ são arestas de dois ou mais triângulos.

Mostraremos na Proposição 3.0.4 que todo vértice da pavimentação possui conjunto de arestas consecutivas, conforme definição anterior e para tanto citaremos alguns resultados conhecidos da teoria de Grupos de Coxeter. Para evitar a necessidade de introduzir novo vocabulário, vamos enunciar os resultados apenas no contexto em questão (ou seja, Grupos $\Gamma_{3,q}$) bastando, à grosso modo, substituir o termo triângulo por "câmaras" e arestas por "paredes", embora estas realizações geométricas sejam válidas para grupos de Coxeter em geral. Todos estes conceitos, assim como os resultados apresentados, podem ser encontrados em [Hu].

Sejam α, β e γ as geodésicas que suportam as arestas do triângulo inicial Δ_0 da pavimentação. Lembramos que as reflexões ρ_α, ρ_β e ρ_γ são as reflexões nas arestas α, β e γ respectivamente e o grupo $\Gamma_{(3,q)} = \langle \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma \rangle$ é gerado por estas reflexões.

Definição 22 *Seja $c : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ caminho contínuo com $c(0) \in (g(\Delta_0))^\circ$ e $c(1) \in (h(\Delta_0))^\circ$, com $g, h \in \Gamma_{3,q}$. Suponha que $c(t) \notin V = \cup_{k=0}^n V_k$, $\forall t \in I$. Definimos o comprimento simplicial do caminho como*

$$\begin{aligned} |c|_{g,h} &= \#\{t \in I; c(t) \in \text{alguma aresta}\} = \\ &= \#\{\text{arestas cruzadas por } c(t), \text{ contadas com multiplicidades}\}. \end{aligned}$$

Seja δ geodésica em $\mathbb{H}^2$ tal que $\rho_\delta \in \Gamma_{(3,q)}$. Diremos que δ **separa** dois triângulos $g(\Delta)$ e $h(\Delta)$ se todo caminho contínuo ligando estes triângulos intercepta δ .

Proposição 3.0.1 *Sejam $g, h \in \Gamma_{(3,q)}$, Δ triângulo da pavimentação. Então*

$$d(g\Delta, h\Delta) = \inf\{|c|_{g,h}\},$$

onde o ínfimo percorre o conjunto de todos os caminhos c tais que $c(0) \in \text{interior}(g(\Delta))$ e $c(1) \in \text{interior}(h\Delta)$.

Proposição 3.0.2 *Sejam $g\Delta$ e $h\Delta$ dois triângulos (ou ladrilhos) da pavimentação com $g, h \in \Gamma_{3,q}$. Então*

$$\begin{aligned} d(g\Delta, h\Delta) &= \inf\{|c|_{g,h}\} \\ &= \#\{\delta \mid \rho_\delta \in \Gamma_{(3,q)} \text{ e } \delta \text{ separa } g\Delta \text{ e } h\Delta\}, \end{aligned}$$

onde δ é geodésica suporte da pavimentação.

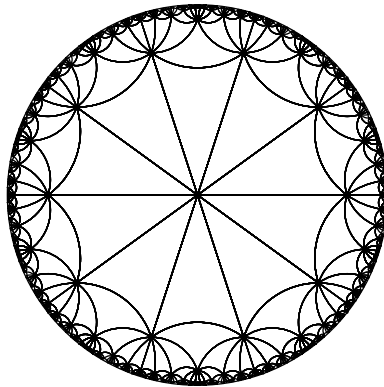


Figura 3.2: Caminho de comprimento 6

Notemos que uma geodésica δ determina dois semi-espacos abertos e disjuntos, $\mathbb{H}_\delta^+$ e $\mathbb{H}_\delta^-$ tais que $\delta = \overline{\mathbb{H}_\delta^+} \cap \overline{\mathbb{H}_\delta^-}$ assim, uma geodésica suporte pode ser caracterizada também pela existência de dois triângulos Δ_1 e Δ_2 contidos em semi-espacos distintos determinados por δ e tais que $\overline{\Delta_1} \cap \overline{\Delta_2}$ é uma aresta contida em δ e, neste caso, diremos que δ **suporta os triângulos** Δ_1, Δ_2 , assim como a aresta $\overline{\Delta_1} \cap \overline{\Delta_2}$.

Sejam ε aresta da pavimentação com vértice inicial v e δ sua geodésica suporte. Denotamos por δ_i^+ o raio geodésico com ponto inicial em v e contendo ε e δ_i^- seu oposto. Lembremos que S denota o conjunto das geodésicas suportes.

Dados $\delta \in S$ (**geodésica suporte da pavimentação**) e $\Delta_i, \Delta_j \in P_k$ consideremos a seguinte notação:

$$\Delta_i \mid_\delta \Delta_j := \delta \text{ separa os triângulos } \Delta_i \text{ e } \Delta_j,$$

$$\Delta_i \nmid_{\delta} \Delta_j := \delta \text{ não separa os triângulos } \Delta_i \text{ e } \Delta_j;$$

e definimos os conjuntos:

$$\mathcal{S}_i = \{\delta \in S | v \in \delta \text{ e } \Delta_0 \mid_{\delta} \Delta_i\}$$

$$\mathcal{S}_{i,j} = \{\delta \in S | v \in \delta \text{ e } \Delta_i \mid_{\delta} \Delta_j\}.$$

Desta maneira podemos definir os conjuntos

$$\mathcal{G}_{i,j} = \{\delta \in S | v \in \delta, \Delta_0 \mid_{\delta} \Delta_i \text{ e } \Delta_0 \nmid_{\delta} \Delta_j\} \text{ e } \mathcal{G}_{j,i} = \{\delta \in S | v \in \delta, \Delta_0 \mid_{\delta} \Delta_j \text{ e } \Delta_0 \nmid_{\delta} \Delta_i\}$$

e também

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{i,j} \cup \mathcal{G}_{j,i}.$$

Lema 3.0.3 *Seja $v \in V_k$ e considere os triângulos $\Delta_i, \Delta_j \in P_k$ que tem v como vértice comum, então*

$$\mathcal{S}_{i,j} = \mathcal{G}.$$

Demonstração:

Provemos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}_{i,j}$.

Dada geodésica $\delta \in \mathcal{G}$, suponhamos sem perda de generalidade que $\delta \in \mathcal{G}_{i,j}$. Temos então que $\delta \in S$ com $v \in \delta$, $\Delta_0 \mid_{\delta} \Delta_i$ e $\Delta_0 \nmid_{\delta} \Delta_j$, assim $\Delta_0, \Delta_j \in \mathbb{H}_{\delta}^+$ e $\Delta_i \in \mathbb{H}_{\delta}^-$. Logo $\Delta_i \mid_{\delta} \Delta_j$ e $\delta \in \mathcal{S}_{i,j}$. Procedemos de modo análogo supondo $\delta \in \mathcal{G}_{j,i}$ e temos então que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}_{i,j}$.

Suponha geodésica $\delta \in \mathcal{S}_{i,j}$, então temos que $\Delta_i \mid_{\delta} \Delta_j$, isto é, $\Delta_i \in \mathbb{H}_{\delta}^+$ e $\Delta_j \in \mathbb{H}_{\delta}^-$, logo $\Delta_0 \in \mathbb{H}_{\delta}^+$ ou $\Delta_0 \in \mathbb{H}_{\delta}^-$. Portanto

$$\Delta_0 \mid_{\delta} \Delta_i \text{ e } \Delta_0 \nmid_{\delta} \Delta_j \quad \text{ou} \quad \Delta_0 \mid_{\delta} \Delta_j \text{ e } \Delta_0 \nmid_{\delta} \Delta_i$$

e $\delta \in \mathcal{G}$, ou seja, $\mathcal{S}_{i,j} \subseteq \mathcal{G}$ e segue que $\mathcal{S}_{i,j} = \mathcal{G}$. ■

Notemos que se o ângulo θ_i formado pelas arestas k -exteriores de Δ_i e Δ_j tiver medida $|\theta_i| > \pi$, irá existir geodésica γ tal que $v \in \gamma$, $\Delta_0 \mid_{\gamma} \Delta_i$ e $\Delta_0 \mid_{\gamma} \Delta_j$ mas $\Delta_i \nmid_{\gamma} \Delta_j$, assim $\gamma \notin \mathcal{S}_{i,j}$ e $\gamma \notin \mathcal{G}$.

Podemos então demonstrar que a $(3, q)$ -pavimentação não gera, em qualquer etapa, conjunto de descontinuidade de arestas com um vértice em comum.

Proposição 3.0.4 *Seja vértice $v_{k,l}^l \in V_k$ então o conjunto de arestas terminadas em $v_{k,l}^l$ é um conjunto de arestas consecutivas.*

Demonstração: *A demonstração será feita por absurdo, supondo que algum vértice não possua um conjunto consecutivo de arestas e assim contradizer a minimalidade da distância em alguma etapa da pavimentação.*

Manteremos a notação adotada anteriormente para o grupo $\Gamma_{3,q}$ e para o triângulo Δ_0 . Consideramos a etapa k da pavimentação de modo que as arestas e triângulos que indicarmos abaixo pertencerão a esta etapa, salvo comentário contrário, nos permitindo omitir índices desnecessários. Consideremos vértice v de k -tipo l , com $l < q$ (no caso $l = q$ é claro que as arestas são consecutivas pois o ciclo de arestas está fechado), e o número de arestas sendo contado módulo q (pois o ângulo entre duas arestas consecutivas é $\frac{2\pi}{q}$).

Suponhamos, por absurdo, que as arestas de v estejam divididas em dois conjuntos disjuntos de arestas consecutivas tal que a união não seja um conjunto de arestas consecutivas. Ordenemos estas arestas no sentido anti-horário:

$$\mathcal{A}_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s\} \quad e \quad \mathcal{A}_2 = \{\varepsilon_{s+r}, \dots, \varepsilon_l\}$$

com $r > 1$ e consideremos os raios geodésicos δ_i^+ terminados em v e que suportam as arestas de ε_i com $i \in \{1, 2, \dots, s, s+r, \dots, l\}$ e δ_i^- os seus opostos. Consideramos também os triângulos com arestas pertencentes a $\mathcal{A}_1$ e a $\mathcal{A}_2$,

$$\mathcal{P}_1 = \{\Delta_1, \dots, \Delta_{s-1}\} \quad e \quad \mathcal{P}_2 = \{\Delta_{s+r}, \dots, \Delta_{l-1}\}$$

ordenados também no sentido anti-horário e de tal modo que ε_i e ε_{i+1} sejam as duas arestas consecutivas de Δ_i que tem v como vértice em comum. Como, por hipótese, este é um conjunto de descontinuidade de arestas segue que ε_1 não é consecutiva com ε_l e ε_s não é consecutiva com ε_{s+r} , ou seja, o ângulo θ_1 formado pelos raios geodésicos δ_1^+ e δ_l^+ que contém ε_1 e ε_l respectivamente tem medida $|\theta_1| > \frac{2\pi}{q}$. Da mesma maneira o ângulo θ_2 formado pelos raios geodésicos δ_s^+ e δ_{s+r}^+ que contém ε_s e ε_{s+r} respectivamente tem medida $|\theta_2| > \frac{2\pi}{q}$.

Consideremos ainda o ângulo θ_3 compreendido entre os raios geodésicos δ_1^+ e δ_s^+ e θ_4 o ângulo entre os raios geodésicos δ_{s+r}^+ e δ_l^+ .

Demonstraremos antes de tudo que Δ_0 está compreendido nos ângulos θ_1 ou θ_2 .

De fato, suponhamos que Δ_0 esteja compreendido no ângulo θ_3 . Então existe geodésica η passando por v tal que $\Delta_{s-1}|_\eta\Delta_{s+r}$, ou seja, $\Delta_{s+r} \in \mathbb{H}_\eta^+$ e $\Delta_0, \Delta_{s-1} \in \mathbb{H}_\eta^-$, assim

$$d(\Delta_0, \Delta_{s+r}) = d(\Delta_0, \Delta_{s-1}) + 1 > d(\Delta_0, \Delta_{s-1}),$$

o que contradiz a proposição 3.0.2, pois triângulos gerados na etapa k tem distância k de Δ_0 e, como estamos assumindo que Δ_{s+r} tem aresta exterior, este foi gerado precisamente na etapa k . Analogamente se supormos Δ_0 compreendido no ângulo θ_4 .

Sem perda de generalidade, suponhamos agora que Δ_0 esteja compreendido no ângulo θ_2 .

Sabemos que $\Delta_{s-1}, \Delta_{s+r} \in NP_k$, ou seja, são triângulos novos na etapa k , assim pela Proposição 3.0.2 temos que $|\mathcal{S}_{s-1}| = |\mathcal{S}_{s+r}| = k$. Em particular, se $\eta \in \mathcal{S}_{s-1}$ e tal que $\eta \notin \mathcal{G}$ então $\eta \in \mathcal{S}_{s+r}$ (basta observar a definição destes conjuntos). Logo,

$$|\mathcal{S}_{s-1}| = |\mathcal{S}_{s-1} \setminus \mathcal{G}| + |\mathcal{G}_{s-1,s+r}|, \quad |\mathcal{S}_{s+r}| = |\mathcal{S}_{s+r} \setminus \mathcal{G}| + |\mathcal{G}_{s+r,s-1}|$$

e como pelo lema anterior $\mathcal{G} = \mathcal{S}_{s-1,s+r}$ temos que $|\mathcal{G}_{s-1,s+r}| = |\mathcal{G}_{s+r,s-1}|$.

Note que $|\mathcal{G}_{s-1,s+r}| = |\mathcal{G}_{s+r,s-1}| > 1$, pois se a cardinalidade deles fosse 1 eles obrigatoriamente seriam iguais o que é um absurdo pois os conjuntos são claramente disjuntos.

Como os conjuntos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são conjuntos de arestas consecutivas segue que as únicas arestas k -exteriores contidas em $\mathcal{A}_1$ são ε_1 e ε_s e as arestas k -exteriores contidas em $\mathcal{A}_2$ são ε_{s+r} e ε_l , as quais pertencem respectivamente aos triângulos $\Delta_1, \Delta_{s-1}, \Delta_{s+r}$ e Δ_{l-1} .

Para concluir a demonstração basta mostrar que existe um triângulo Δ_s pertencente à NP_{k+1} , ou seja, um triângulo novo na etapa $(k+1)$, tal que $d(\Delta_0, \Delta_s) < k+1$.

Seja então δ_{s+1} geodésica que suporta aresta ε_{s+1} do triângulo $\Delta_s = \rho_{\varepsilon_s}(\Delta_{s-1})$. Segue que, $\Delta_0|_{\delta_{s+1}}\Delta_s$ (pois $|\mathcal{G}_{s-1,s+r}| = |\mathcal{G}_{s+r,s-1}|$) e δ_s (geodésica que suporta a aresta ε_s) é a única geodésica que separa Δ_{s-1} de Δ_s , isto é, $\Delta_{s-1}|_{\delta_s}\Delta_s$. Logo

$$k = d(\Delta_0, \Delta_{s-1}) = d(\Delta_0, \Delta_s) + 1 \implies d(\Delta_0, \Delta_s) = k - 1$$

o que é um absurdo pois Δ_s foi gerado na etapa $k+1$ e portanto pela Proposição 3.0.2 $d(\Delta_0, \Delta_s) = k+1$.

Portanto, dado um vértice da pavimentação, o conjunto de arestas que contém este vértice é um conjunto consecutivo de arestas em cada uma das etapas. ■

Podemos reescrever a proposição acima dizendo que a reflexão por arestas k -exteriores não gera conjuntos de arestas descontínuas com um vértice em comum ao passarmos para a próxima etapa. Então existem exatamente duas (ou nenhuma quando o número de triângulos com um vértice em comum for q) arestas k -exteriores para cada vértice da pavimentação.

Em todas as demonstrações a seguir vamos considerar o triângulo inicial Δ_0 com arestas $\varepsilon_{0,1}^{2,2}, \varepsilon_{0,2}^{2,2}$ e $\varepsilon_{0,3}^{2,2}$ e tal que o grupo $\Gamma_{(3,q)} = \langle \rho_{\varepsilon_{0,1}^{2,2}}, \rho_{\varepsilon_{0,2}^{2,2}}, \rho_{\varepsilon_{0,3}^{2,2}} \rangle$ é gerado pelas reflexões nestas arestas. Além disso, todas as proposições abaixo necessitam da hipótese $q = 2m$, ou seja, q par; os resultados quando q for ímpar estão indicados na seção 3.2.

Proposição 1 *Supondo q par, o k -tipo de um vértice (ou de uma aresta) é sempre par.*

Demonstração: *A demonstração será feita por indução sobre a etapa k da pavimentação, lembrando que o número máximo de arestas com um vértice em comum é $q = 2m$.*

Consideremos Δ_0 como definido acima e com vértices $v_{0,1}^2, v_{0,2}^2$ e $v_{0,3}^2$, que, claramente tem seu 0-tipo par e igual a 2.

Suponhamos que na etapa k todos os vértices tenham k -tipo par. Provemos que os vértices da etapa $(k+1)$ tem $(k+1)$ -tipo par.

Para obter os triângulos da etapa $(k+1)$, fazemos reflexão nas arestas k -exteriores da pavimentação. Como consequência da proposição 3.0.4, cada vértice onde o ciclo não foi completado possui exatamente duas arestas k -exteriores. Cada uma destas arestas contribuirá na etapa seguinte com uma nova aresta adjacente a este vértice (poderá ser nenhuma caso o ciclo de arestas já esteja completo na etapa k). Sendo q par, as duas arestas geradas pelas arestas exteriores da etapa anterior não poderão coincidir.

Logo, por hipótese de indução, o $(k+1)$ -tipo dos vértices de NV_{k+1} é par. O mesmo raciocínio pode ser feito para τ . Portanto ι e τ são pares em qualquer etapa k . ■

Precisamos identificar quais os tipos de vértices novos da pavimentação a reflexão gera em cada etapa. O próximo lema garante quando q é par que um vértice só será novo na

etapa k se ele for de k -tipo 2.

Lema 3.0.5 *Seja $v_{k,l}^\iota \in V_k$ e suponha $q = 2m, m \in \mathbb{N}$. Então $v_{k,l}^\iota \in NV_k$ se e só se, $\iota = 2$.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) *Seja $v_{k,l}^\iota \in V_k$, tal que $\iota = 2$. Suponhamos que $v_{k,l}^\iota \notin NV_k$, ou seja, $v_{k,l}^\iota \in NV_t$ para algum $t < k$. Pela proposição anterior temos que o k -tipo de um vértice é sempre par então o t -tipo de $v_{k,l}^\iota$ visto na etapa t é no mínimo $\iota = 2$, logo na etapa k deveria ser de tipo $\min\{2 + 2 * (k - t), q\} \geq 2$, um absurdo.*

($\Rightarrow$) *Novamente a demonstração será feita por indução sobre a etapa k . Como já observamos na demonstração anterior a reflexão nas arestas de Δ_0 gera apenas vértices novos de 1-tipo 2. Suponhamos a afirmação verdadeira para $v \in NV_k$. Provemos que a afirmação é verdadeira para $(k + 1)$.*

Consideremos $v_{k+1,l}^\iota \in NV_{k+1}$. Suponhamos que $\iota \neq 2$ e como pela proposição anterior ι é par temos $\iota \geq 4$. Ordenemos no sentido anti-horário as arestas de $v_{k+1,l}^\iota$, lembrando que este é um conjunto de arestas consecutivas, $\varepsilon_{k+1,1}^{\iota,\tau}, \varepsilon_{k+1,2}^{\iota,\tau}, \dots, \varepsilon_{k+1,\iota}^{\iota,\tau}$ e as únicas arestas $(k + 1)$ -exteriores são $\varepsilon_{k+1,1}^{\iota,\tau}$ e $\varepsilon_{k+1,\iota}^{\iota,\tau}$.

Ordenemos, também no sentido anti-horário, os triângulos que contém as arestas acima, como $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\iota-1}$ tal que Δ_i contenha as arestas $\varepsilon_{k+1,i}^{\iota,\tau}$ e $\varepsilon_{k+1,i+1}^{\iota,\tau}$, com $i = 1, \dots, \iota$.

Assim temos que $\rho_{\varepsilon_{k+1,2}^{\iota,\tau}}(\Delta_2) = \Delta_1$ e $\rho_{\varepsilon_{k+1,2}^{\iota,\tau}}(\Delta_{\iota-2}) = \Delta_{\iota-1}$ então $v_{k+1,l}^\iota \in V_k$, o que é uma contradição, pois $v_{k+1,l}^\iota \in NV_{k+1}$.

Logo se $v \in NV_k$ então $t_k(v) = 2$. ■

Como consequência imediata deste resultado temos que uma aresta $\varepsilon \in NA_k$ se tiver k -tipo 2 (incorporado na notação da aresta temos $\varepsilon_{k+1,l}^{2,\tau}$) e o triângulo que contém $\varepsilon_{k+1,l}^{2,\tau}$ como aresta também será novo na pavimentação. Assim, cada aresta de k -tipo 2 contribuirá com um novo triângulo na etapa $(k + 1)$.

Será que toda reflexão em aresta de k -tipo $(2, \tau)$ contribui com exatamente 1 triângulo novo? Além disso, somente as arestas com esse k -tipo contribuem com triângulos novos?

As respostas para essas perguntas serão dadas pela proposição a seguir, e podemos adiantar que nenhuma delas é verdadeira.

Lembremos que dada aresta $\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau} \in A_k$ denotamos por $\iota(\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau})$ e $\tau(\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau})$ os vértices inicial e final de $\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau}$, respectivamente. Com isso podemos definir o seguinte conjunto:

$$n_k(\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau}) = \#\{\Delta \in P_k \mid \iota(\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau}) \in \Delta\}, \quad (3.1)$$

ou seja, $n_k(\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau})$ é a cardinalidade dos triângulos da pavimentação que tem em comum o vértice inicial da aresta $\varepsilon_{k,l}^{\iota,\tau}$.

Assim podemos contar os triângulos novos da pavimentação da seguinte maneira:

Proposição 3.0.6 *Seja $\varepsilon = \varepsilon_{k,l}^{2,\tau} \in NA_k$ e suponha q par. Então*

1. $n_{k+1}(\varepsilon) = n_k(\varepsilon) + 1$ se $\tau = q$ ou ;
2. $n_{k+1}(\varepsilon) = n_k(\varepsilon) + 2$ se $\tau < q$.

Demonstração: *Seja $\varepsilon = \varepsilon_{k,l}^{2,\tau} \in NA_k$ tal que $v = \tau(\varepsilon)$ seja seu vértice final.*

1. *Suponhamos que $\tau = q$, isto é, v é vértice de q arestas, ordenadas no sentido anti-horário, $\varepsilon_{k,1}^{\iota,q} = \varepsilon, \varepsilon_{k,2}^{\iota,q}, \dots, \varepsilon_{k,q-1}^{\iota,q}, \varepsilon_{k,q}^{2,q}$, com triângulos $\Delta_i, i = 1, \dots, q-1$, também ordenados no sentido anti-horário e tal que $\varepsilon_{k,i}^{\iota,q}$ e $\varepsilon_{k,i+1}^{\iota,q}$ sejam as arestas de Δ_i . Observe que as únicas arestas k -exteriores são $\varepsilon_{k,1}^{2,q}$ e $\varepsilon_{k,q}^{2,q}$.*

Então, se $\tau = q$, $\rho_{\varepsilon_{k,1}^{2,q}}(\Delta_1) = \Delta = \rho_{\varepsilon_{k,q}^{2,q}}(\Delta_{q-1})$ pois caso contrário teríamos $\tau \geq q+2$, o que não pode acontecer pelo fato do k -tipo de um vértice ser no máximo q para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, como estas são as únicas arestas com vértice final v temos que a única aresta nova nessas duas reflexões será a aresta que tem como vértices inicial e final os vértices de k -tipo 2. Portanto

$$n_{k+1}(\varepsilon) = n_k(\varepsilon) + 1.$$

2. *Suponhamos que $\tau < q$. Como convenciamos que $\iota \leq \tau$ segue que $\iota < q$. Considerando as mesmas notações do item anterior temos que, $\rho_\varepsilon(\Delta_1) \neq \rho_{\varepsilon_{k,\tau}^{2,\tau}}(\Delta_{q-1})$, pois se elas coincidissem estaríamos no caso anterior. Logo obtemos uma aresta nova para cada reflexão e portanto*

$$n_{k+1}(\varepsilon) = n_k(\varepsilon) + 2.$$

■

Uma consequência deste resultado é sobre a contagem de triângulos novos na pavimentação. Se $\varepsilon_{k,l}^{2,\tau}$ é aresta k -exterior então esta contribuirá com um triângulo novo na etapa $k+1$ com a seguinte observação: se $\tau = q$ então este triângulo será contado $\frac{1}{2}$ vez pois outra aresta k -exterior gerará este mesmo triângulo e se $\tau < q$ cada reflexão contribuirá com um (1) triângulo novo, sem qualquer redundâncias.

Corolário 3.0.7 *Seja ρ reflexão na aresta $\varepsilon_{k,i}^{2,l}$ com $l < q$. Então $\rho_{\varepsilon_{k,i}^{2,l}}$ gera um vértice novo de k -tipo 2. Quando $l = q$ não obtemos nenhum vértice novo apenas uma aresta nova de $(k+1)$ -tipo $(4,4)$.*

Demonstração: *Segue imediatamente da proposição anterior.*

■

3.1 Fórmulas recursivas para o crescimento do Grupo $\Gamma_{(3,q)}$, $q = 2m$

Vamos considerar grupo $\Gamma_{(3,q)}$ gerado pelas reflexões nas geodésicas suportes das arestas do triângulo equilátero Δ_0 com ângulos $\frac{2\pi}{q}$, $q > 6$, $q = 2m$. Lembramos que o único instrumento para fazer a pavimentação de $\mathbb{D}^2$ é a reflexão nas arestas k -exteriores dos triângulos pertencentes a etapa k .

Em termos da pavimentação iniciamos na etapa 0 com o triângulo inicial Δ_0 . A etapa 1 é obtida refletindo Δ_0 em cada uma de suas arestas, obtendo três novos triângulos tal que junto com Δ_0 formam um novo polígono triangularizado. Considerando as arestas de um

único triângulo deste polígono, a etapa 2 é obtida refletindo nessas arestas o triângulo que as contém.

Procedendo sucessivamente desta maneira obtemos na etapa k apenas triângulos que são imagens de Δ_0 por algum elemento do grupo com norma $\leq k$, ou seja, qualquer triângulo da pavimentação é da forma $g(\Delta_0)$ com $g \in \Gamma_{3,q}$ tal que

$$|g|_C = d_C(e, g) \leq k.$$

Logo, temos que

$$|B_k| = |P_k| \quad e \quad |C_k| = |NP_k|,$$

onde B_k é a bola fechada de raio k centrada na identidade e $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$ é a circunferência de raio k também centrada na identidade de acordo com a notação indicada no início do capítulo.

Nosso objetivo é determinar uma fórmula recursiva para o crescimento do grupo. Desta maneira basta determinar $|P_k|$ em termos de $|P_{k-1}|$, $|A_{k-1}|$ e $|V_{k-1}|$.

Acrescentamos mais uma notação que facilitará a contagem dos triângulos: NV_k^l é o conjunto dos vértices novos da etapa k com k -tipo l e $NA_k^{i,l}$ o conjunto das arestas novas da etapa k que têm k -tipo (i, l) .

De acordo com os resultados da seção anterior temos que o conjunto NV_k só contém vértices de k -tipo 2, já o conjunto NA_k contém arestas com k -tipos $(2, \tau)$ e $(4, 4)$. Assim arestas de k -tipo (i, τ) tais que $4 \leq i \leq q$ e $6 < \tau \leq q$ serão sempre arestas interiores e não contribuirão com nenhum triângulo novo nas etapas seguintes. Logo a existência de triângulos novos da pavimentação depende da existência de arestas com k -tipos $(2, \tau)$ e $(4, 4)$.

Iniciemos determinando o número de vértices da pavimentação, ou melhor, o número de vértices novos em cada etapa da pavimentação.

Na etapa 0 temos, claramente, 3 vértices de 0-tipo 2. Através de reflexões de Δ_0 nas suas arestas passamos para a etapa 1 inserindo duas arestas novas em cada vértice de Δ_0 obtendo $2 * 3$ novos vértices na etapa 1. Note que duas a duas estas arestas tem um vértice em comum (pois são reflexões do triângulo inicial) que foi contado duas vezes, logo na etapa

1 temos $2 * 3 - 3$ novos vértices. Como consequência da proposição 3.0.6 temos $2 * 3 - 3$ triângulos em NP_1 .

Observemos que estes novos vértices são todos de 1-tipo 2 e que os vértices da etapa 0 tornam-se de 1-tipo 4 na etapa 1, pois eles eram de 0-tipo 2 e acrescentamos duas novas arestas em cada um deles. Pelo Lema 3.0.5 um vértice não será contado mais na pavimentação quando ele tiver k -tipo q . Logo,

$$|NV_1| = |NV_1^2| = 2 * 3 - 3 \quad \text{e} \quad |V_1| = |NV_1| + |V_0|$$

Agora façamos reflexões nas arestas 1-exteiores dos triângulos de NP_1 . Na etapa 1 cada uma das $2*3$ arestas tem 1-tipo $(2, 4)$, assim pela Proposição 3.0.6 todas elas geram triângulos novos para a etapa 2. Então, passando para a etapa 2 novamente acrescentamos duas novas arestas em cada vértice, ou seja, $2 * (2 * 3)$ novos vértices, mas como na etapa 1 as arestas tem duas a duas vértice em comum contado duas vezes temos que $|NV_2| = |NA_1^{2,4}| = 2 * 3$. Como consequência novamente da Proposição 3.0.6 temos que $|NP_2| = 2 * 3$. Logo,

$$|NV_2| = |NA_1^{2,4}| \quad \text{e} \quad |V_2| = |NV_2| + |NV_1| + |V_0|.$$

Podemos então generalizar nossa expressão para vértices novos do tipo 2 como

$$|NV_k^2| = \sum_{l=4}^{q-2} |NA_{k-1}^{2,l}| + |NA_{k-1}^{4,4}|.$$

Já para k -tipo $l+2 \geq 4$, é evidente que estes podem provir apenas de vértices de $(k-1)$ -tipo l . Com isso temos as fórmulas recursivas para os vértices da pavimentação da seguinte maneira:

Proposição 3.1.1 *Dada uma $(3, q)$ -pavimentação com $q > 6$, $q = 2m$, então o número de vértices na etapa k é dado pela fórmula recursiva:*

$$\begin{aligned}
 |V_0| &= 3 \\
 |NV_1| &= |NV_1^2| = 3 \\
 |V_1| &= |NV_1| + |V_0| \\
 |NV_k^2| &= \sum_{l=4}^{q-2} |NA_{k-1}^{2,l}| + |NA_{k-1}^{4,4}| \\
 |V_k^4| &= |V_{k-1}^2| \\
 |V_k^6| &= |V_{k-1}^4| \\
 &\vdots \\
 |V_k^q| &= |V_{k-1}^{q-2}|.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Precisamos definir fórmulas recursivas para as arestas da pavimentação. Na etapa 0 temos apenas 3 arestas pertencentes à Δ_0 , então

$$|NA_0^{2,2}| = 3.$$

Observe que a etapa 0 é a única que contém arestas de k -tipo $(2, 2)$ pois possui um único triângulo.

Já comentamos no início desta seção que as únicas arestas novas na etapa 1 são de 1-tipo $(2, 4)$ e $|NA_1^{2,4}| = 2 * 3 = 6$.

Lembremos que uma aresta só será nova na etapa k caso tenha k -tipo $(2, l)$ com $l < q$ ou $(4, 4)$ (Corolário 3.0.7). Seja aresta $\varepsilon_k^{2,l} = (v_k^2, v_k^l) \in NA_k$ com $l < q$. Pela proposição 3.0.4 podemos garantir que ao passarmos para a etapa $(k + 1)$ acrescentamos duas novas arestas ao vértice inicial e duas novas arestas ao vértice final de $\varepsilon_k^{2,l}$.

Então $\varepsilon_k^{2,l} = \varepsilon_{k+1}^{4,l+2}$, na etapa $(k+1)$. Exceto quando $l = q$, onde não acrescentamos mais nenhuma aresta neste vértice, assim uma aresta de k -tipo $(2, l)$, com $l < q$ passa a ter $(k+1)$ -tipo $(4, l+2)$. Segue então que:

$$\begin{aligned} |NA_k^{2,6}| &= |NA_{k-1}^{2,4}| \\ |NA_k^{2,8}| &= |NA_{k-1}^{2,6}| \\ &\vdots \\ |NA_k^{2,q-2}| &= |NA_{k-1}^{2,q-4}| \\ |NA_k^{2,q}| &= |NA_{k-1}^{2,q-2}| = 2|V_{k-1}^{q-2}| \\ |NA_k^{4,4}| &= \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q}|. \end{aligned}$$

Ainda precisamos encontrar uma fórmula recursiva para as arestas de k -tipo $(2, 4)$. Notemos que elas não poderiam ser apenas reflexões de arestas de $(k-1)$ -tipo $(2, 2)$, pois como já foi dito, estas existem apenas na etapa 0.

Se $\varepsilon_{k,l}^{2,4} \in NA_k$ então o k -tipo de seu vértice inicial $\iota(\varepsilon_{k,l}^{2,4})$ é 2, ou seja, este é um vértice novo da pavimentação. Como a cada vértice, em cada nova etapa, acrescentamos um número par de arestas, segue que o vértice final $\tau(\varepsilon_{k,l}^{2,4})$ tinha na etapa anterior, $(k-1)$ -tipo 2. Mas a aresta que o contém pode ter vértice inicial de todos os tipos, exceto q , pois neste caso já fechamos o ciclo de arestas e não acrescentamos nenhum vértice novo.

Em outras palavras, sejam as arestas $\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}$ e $\varepsilon_{k-1,l+1}^{2,4}$ tais que $\iota(\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}) = \iota(\varepsilon_{k-1,l+1}^{2,4})$ (vértices iniciais coincidentes). Seja ainda Δ triângulo formado pelas arestas $\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}, \varepsilon_{k-1,l+1}^{2,4}, \varepsilon$. Denotemos por: η_l a imagem da aresta $\varepsilon_{k-1,l+1}^{2,4}$ pela reflexão na geodésica suporte da aresta $\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}$ e similarmente η_{l+1} a imagem da aresta $\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}$ pela reflexão na geodésica suporte de $\varepsilon_{k-1,l+1}^{2,4}$. Temos que os vértices finais de η_l e η_{l+1} são

$$\tau(\eta_l) = \iota(\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}) = \iota(\varepsilon_{k-1,l+1}^{2,4}) = \tau(\eta_{l+1}).$$

Então o k -tipo destes vértices é dado por

$$t_k(\tau(\eta_l)) = \underbrace{t_{k-1}(\iota(\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}))}_{=2} + \underbrace{1}_{\text{aresta } \eta_l} + \underbrace{1}_{\text{aresta } \eta_{l+1}} = 4.$$

Desta maneira arestas de $(k-1)$ -tipo $(2, 4)$ geram novas arestas de k -tipo $(2, 4)$, pois toda aresta nova gera vértice de k -tipo 2.

Notemos que nos comentários acima não usamos em nenhum momento o fato do $(k-1)$ -tipo de $\tau(\varepsilon_{k-1,l}^{2,4})$ (o vértice final de $\varepsilon_{k-1,l}^{2,4}$) ser 4, ou seja, o mesmo raciocínio é válido para qualquer outro $(k-1)$ -tipo de um vértice, exceto se este for q pois, neste caso, já fechamos o ciclo de arestas e não acrescentamos nenhum vértice novo, apenas uma aresta que liga os vértices de $(k-1)$ -tipo 2 das arestas $(k-1)$ -exteriores deste ciclo.

Resumindo a cardinalidade das arestas de k -tipo $(2,4)$ é dada pela fórmula recursiva:

$$|NA_k^{2,4}| = |NA_{k-1}^{2,q-2}| + |NA_{k-1}^{2,q-4}| + \dots + |NA_{k-1}^{2,4}|$$

com $k \in \mathbb{N}^*$.

Logo, as arestas novas para a etapa k serão determinadas pelas seguintes fórmulas recursivas:

Proposição 3.1.2 *Dada uma $(3,q)$ -pavimentação com $q > 6$, $q = 2m$, então a cardinalidade dos conjuntos de arestas na etapa k é dada pela fórmula recursiva:*

$$\begin{aligned} |NA_0^{2,2}| &= 3 \quad e \quad |A_0| = |NA_0^{2,2}| = 3 \\ |NA_1^{2,4}| &= 6 \quad e \quad |A_1| = |NA_1^{2,4}| + |A_0| = 9 \\ |NA_k^{2,4}| &= |NA_{k-1}^{2,q-2}| + |NA_{k-1}^{2,q-4}| + \dots + |NA_{k-1}^{2,4}| \\ |NA_k^{2,6}| &= |NA_{k-1}^{2,4}| + 2 * |NA_{k-1}^{4,4}| \\ |NA_k^{2,8}| &= |NA_{k-1}^{2,6}| \\ &\vdots \\ |NA_k^{2,q-2}| &= |NA_{k-1}^{2,q-4}| \\ |NA_k^{2,q}| &= |NA_{k-1}^{2,q-2}| = 2|V_{k-1}^{q-2}| \\ |NA_k^{4,4}| &= \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q}| \\ |NA_k| &= |NA_k^{2,2}| + |NA_k^{2,4}| + |NA_k^{2,6}| + \dots + |NA_k^{2,q}| + |NA_k^{4,4}| \\ |A_k| &= |NA_k| + |A_{k-1}|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Podemos verificar o crescimento dos tipos de arestas através do diagrama abaixo que mostra que tipo de arestas na etapa k determinou os tipos das arestas na etapa $(k + 1)$:

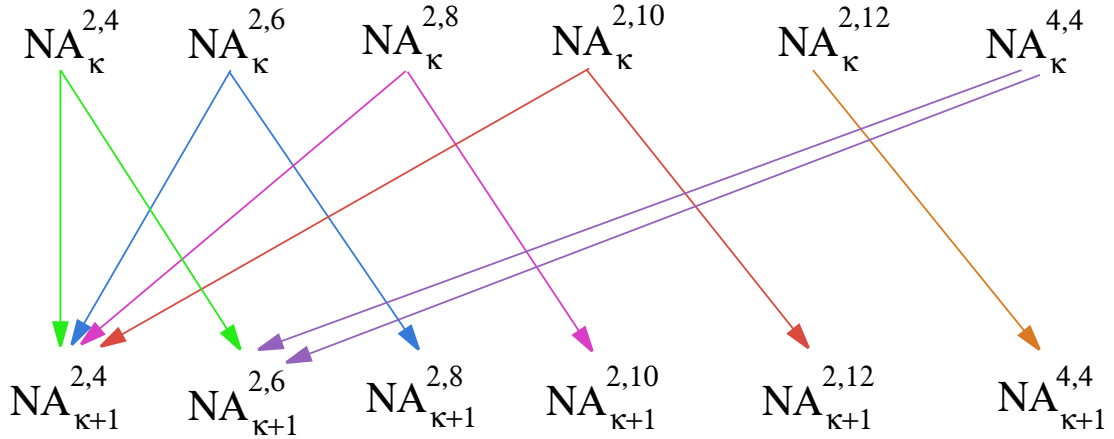


Figura 3.3: Diagrama dos tipos de arestas da etapa k para a etapa $k + 1$

Falta determinar uma fórmula recursiva para os triângulos da pavimentação. Na etapa 0 temos que $|NP_0| = |P_0| = 1$ e já observamos, quando calculamos os vértices da etapa 1, que $|NP_1| = |NV_0^2| = 2 * 3 - 3 = 3$.

Vimos na seção anterior que as únicas arestas $(k - 1)$ -exteriores que geram triângulos novos para a etapa k são as arestas de $(k - 1)$ -tipo $(2, l)$ e $(4, 4)$, com $l < q$, ressaltando que se $l = q$ este triângulo novo será computado $\frac{1}{2}$ vez (pois o mesmo triângulo foi gerado a partir de duas reflexões distintas, conforme visto na Proposição 3.0.6) e caso contrário cada reflexão gerará um triângulo novo.

Portanto conseguimos determinar o crescimento dos triângulos em qualquer etapa da pavimentação através do crescimento de suas arestas e vértices, ou seja, determinamos recursivamente a cardinalidade da bola B_k (a bola de centro na identidade e raio k) do grupo $\Gamma_{(3,q)}$, obtendo o seguinte teorema:

Teorema 3.1.3 *Dado triângulo Δ_0 com arestas α, β, γ , considere o grupo $\Gamma_{(3,q)} = \langle \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma \rangle$ gerado pelas reflexões nas suas arestas com $q = 2m$. Considerando a métrica de Cayley definida em $\Gamma_{3,q}$, a cardinalidade de P_k e de NP_k é dada pelas fórmulas recursivas:*

$$\begin{aligned} |NP_0| &= |P_0| &= 1 \\ |NP_1| &= 3, |P_1| &= 4 \\ |P_k| &= \sum_{i=0}^k |NP_i| &= |P_{k-1}| + |NP_k| \\ |NP_k| &= \sum_{l=4}^{q-2} |NA_{k-1}^{2,l}| + |NA_{k-1}^{4,4}| + \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q}| \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo as fórmulas para os vértices e arestas dos triângulos da etapa k dadas por (3.2) e (3.3).

Observando o Diagrama 3.3, podemos constatar que, ao passarmos da etapa $k-1$ para a etapa k , teríamos o dobro de arestas na etapa k , pois cada tipo de aresta contribuirá com o dobro na etapa subsequente, com exceção das arestas que tenham $(k-1)$ -tipo $(2, q)$, quando fecha-se o ciclo de arestas em um de seus vértices. Neste caso temos que existem duas arestas $(k-1)$ -exteriores, ε e ε' de $(k-1)$ -tipo $(2, q)$ com o mesmo vértice final, digamos v . A reflexão nestas duas arestas poderiam gerar dois triângulos novos, com até quatro novas arestas. No entanto, como ε e ε' são consecutivas estes dois triângulos coincidem e acabam apenas gerando a aresta que une os vértices iniciais de ε e ε' : uma aresta de k -tipo $(4, 4)$ e conseqüentemente um triângulo novo. Assim, a cardinalidade das arestas novas da etapa k é o dobro da cardinalidade das arestas da etapa $k-1$ menos $\frac{3}{2}$ a quantidade de arestas de $(k-1)$ -tipo $(2, q)$:

$$\begin{aligned} |NA_0| &= 3 \\ |NA_1| &= 2|NA_0| = 6 \\ |NA_k| &= 2|NA_{k-1}| - \frac{3}{2}|NA_{k-1}^{2,q}|. \end{aligned}$$

Como consequência imediata da descrição dada no parágrafo anterior, determinamos uma nova fórmula para a cardinalidade dos triângulos novos da pavimentação:

$$\begin{aligned} |NP_0| &= 1 \\ |NP_1| &= 3 \\ |NP_k| &= |NA_{k-1}| - \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q}|. \end{aligned}$$

Lembremos que $q = 2m$, assim podemos observar a seguinte relação entre as arestas da pavimentação: consideramos as etapas de 0 à $m - 1$ e formamos o bloco 0 da pavimentação, o bloco 1 é formado pelas etapas de m à $2m - 1$ e assim sucessivamente; observamos que a cardinalidade de todos os tipos de arestas da pavimentação podem ser escritas como combinação linear da cardinalidade das arestas da etapa $(\lambda * m - 1)$ com $\lambda \geq 1$. Vamos exemplificar esta relação de simetria com a seguinte tabela para o caso onde $q = 12$ e conseqüentemente $m = 6$:

Aresta tipo $(2, 4)$	$NA_5^{2,4}$	$NA_5^{2,6}$	$NA_5^{2,8}$	$NA_5^{2,10}$	$NA_5^{2,12}$	$NA_5^{4,4}$
Etapa $m = 6$	1	1	1	1	0	0
Etapa 7	2	2	2	1	0	2
Etapa 8	4	4	3	2	1	4
Etapa 9	8	7	6	5	2	8
Etapa 10	15	14	13	10	4	14
Etapa 11	29	28	25	19	7	28

Aresta tipo $(2, 4)$	$NA_{11}^{2,4}$	$NA_{11}^{2,6}$	$NA_{11}^{2,8}$	$NA_{11}^{2,10}$	$NA_{11}^{2,12}$	$NA_{11}^{4,4}$
Etapa 12	1	1	1	1	0	0
Etapa 13	2	2	2	1	0	2
Etapa 14	4	4	3	2	1	4
Etapa 15	8	7	6	5	2	8
Etapa 16	15	14	13	10	4	14
Etapa 17	29	28	25	19	7	28

Aresta tipo (2, 6)	$\text{NA}_5^{2,4}$	$\text{NA}_5^{2,6}$	$\text{NA}_5^{2,8}$	$\text{NA}_5^{2,10}$	$\text{NA}_5^{2,12}$	$\text{NA}_5^{4,4}$
Etapa $m = 6$	1	0	0	0	0	2
Etapa 7	1	1	1	1	1	0
Etapa 8	2	2	2	2	0	2
Etapa 9	4	4	4	2	1	4
Etapa 10	8	8	6	5	2	8
Etapa 11	16	14	13	10	4	16

Aresta tipo (2, 6)	$\text{NA}_5^{2,4}$	$\text{NA}_5^{2,6}$	$\text{NA}_5^{2,8}$	$\text{NA}_5^{2,10}$	$\text{NA}_5^{2,12}$	$\text{NA}_5^{4,4}$
Etapa 12	1	0	0	0	0	2
Etapa 13	1	1	1	1	1	0
Etapa 14	2	2	2	2	0	2
Etapa 15	4	4	4	2	1	4
Etapa 16	8	8	6	5	2	8
Etapa 17	16	14	13	10	4	16

Da mesma maneira temos as tabelas para as arestas de tipo (2, 8), (2, 10), (2, 12) e (4, 4). Podemos observar nas tabelas apresentadas que as arestas crescem de maneira constante de bloco em bloco com relação a etapa ($\lambda * m - 1$).

Note que se fixarmos o parâmetro q , podemos efetivamente computar as constantes em um, e portanto em todos, os blocos acima e assim obter explicitamente valores para

$$C_0 := \sum_{k=0}^{q-1} |NP_k| \quad \text{e} \quad C_1 := \sum_{k=q}^{2q-1} |NP_k|.$$

A partir destes dados, temos que

$$C_n := \sum_{k=nq}^{(n+1)q-1} |NP_k| = (C_1)^n$$

de modo que podemos obter uma fórmula explícita para o crescimento (assintótico) do grupo $\Gamma_{3,q}$. Observamos que o cálculo efetivo de C_1 é relativamente pesado: implementamos algo-

ritmo em Mathematica para efetuar o cálculo no caso $q = 10$, e este, apesar de não entrar em looping, foi incapaz de concluir as contas após rodar durante mais de meia hora. Provavelmente o algoritmo implementado contém algum erro que deverá ser oportunamente corrigido*.

3.2 Fórmulas recursivas para o crescimento do Grupo $\Gamma_{(3,q)}$, $q = 2m + 1$

A partir da Proposição 1, assim como na seção 3.1 deste capítulo, obtivemos diversos resultados considerando sempre q par. Nesta seção apresentaremos os resultados equivalentes para o caso $q = 2m + 1 > 6$. As demonstrações são bastante similares, de modo que omitiremos os detalhes e apenas esboçaremos as adaptações necessárias para abranger o caso ímpar.

Podemos observar que na demonstração da Proposição 3.0.4 não utilizamos o fato de q ser par, logo todo vértice na $(3, q)$ -pavimentação de $\mathbb{D}^2$ possui conjunto consecutivo de arestas. Conseqüentemente geramos exatamente duas novas arestas a cada etapa da pavimentação, exceto quando fechamos o ciclo de triângulos em determinado vértice da pavimentação onde uma única aresta é gerada por duas reflexões distintas.

Neste caso (q ímpar) os k -tipos das arestas e vértices da pavimentação nem sempre serão pares, e mais, os vértices novos (conseqüentemente as arestas) da etapa k terão k -tipos 2 e 3: os vértices novos de k -tipo 2 surgem do mesmo modo como na demonstração da Proposição 3.0.6. Assim, em cada vértice v de uma etapa k , temos sempre duas arestas k -exteriores, que de modo geral contribuirão com um total de quatro novas arestas na etapa subsequente, duas delas adjacentes ao vértice v . Quando v tiver k -tipo $q - 1 = 2m$, estas duas novas arestas coincidirão e estamos na realidade gerando apenas 3 novas arestas. Mais ainda, o vértice terminal desta aresta terá $(k + 1)$ -tipo igual a 3, pois todas estas 3 arestas se interceptarão neste novo vértice. Segue então a seguinte:

*Este algoritmo pode ser visto no apêndice B.

Proposição 3.2.1 *Dada uma $(3, q)$ -pavimentação com $q > 6$, $q = 2m + 1$, então a cardinalidade dos vértices na etapa k é dada pela fórmula recursiva:*

$$\begin{aligned}
 |V_0| &= 3; & |NV_1| &= |NV_1^2| = 3 & e & |V_1| &= |NV_1| + |V_0| \\
 |NV_k^2| &= |NA_{k-1}^{2,4}| + |NA_{k-1}^{2,5}| + \dots + |NA_{k-1}^{2,q-2}| + |NA_{k-1}^{3,4}| + |NA_{k-1}^{4,4}| \\
 |NV_k^3| &= \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q-1}| \\
 |V_k^4| &= |NV_{k-1}^2| \\
 |V_k^5| &= |NV_{k-1}^3| \\
 |V_k^6| &= |V_{k-1}^4| \\
 |V_k^7| &= |V_{k-1}^5| \\
 &\vdots \\
 |V_k^{q-1}| &= |V_{k-1}^{(q-1)-2}| \\
 |V_k^q| &= |V_{k-1}^{q-2}|.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como observamos para os vértices novos desta pavimentação, também temos que as arestas novas terão seus k -tipos alterados: quando q é ímpar temos que uma aresta é nova na etapa k se e somente se tiver k -tipo $(2, l)$, $(3, 4)$, $(3, q)$ ou $(4, 4)$ com $l < q$. Logo,

Proposição 3.2.2 *Dada uma $(3, q)$ -pavimentação com $q = 2m + 1$ e $q > 6$, então a cardinalidade dos conjuntos de arestas novas na etapa k é dada pelas fórmulas recursivas:*

$$\begin{aligned}
|NA_0^{2,2}| &= 3 \quad e \quad |A_0| = |NA_0^{2,2}| = 3 \\
|NA_1^{2,4}| &= 6 \quad e \quad |A_1| = |NA_1^{2,4}| + |A_0| = 9 \\
|NA_k^{2,4}| &= |NA_{k-1}^{2,q-2}| + |NA_{k-1}^{2,q-3}| + |NA_{k-1}^{2,q-4}| + \dots + |NA_{k-1}^{2,4}| \\
|NA_k^{2,5}| &= |NA_{k-1}^{3,4}| \\
|NA_k^{2,6}| &= |NA_{k-1}^{2,4}| + |NA_{k-1}^{3,4}| + |NA_{k-1}^{4,4}| \\
|NA_k^{2,7}| &= |NA_{k-1}^{2,5}| \\
|NA_k^{2,8}| &= |NA_{k-1}^{2,6}| \\
&\vdots \\
|NA_k^{2,q-2}| &= |NA_{k-1}^{2,(q-2)-2}| \\
|NA_k^{2,q-1}| &= |NA_{k-1}^{2,(q-1)-2}| \\
|NA_k^{2,q}| &= |NA_{k-1}^{2,q-2}| \\
|NA_k^{4,4}| &= \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q}| \\
|NA_k^{3,4}| &= |NA_{k-1}^{2,q-1}| \\
|NA_k^{3,q}| &= \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q-1}| \\
|NA_k| &= |NA_k^{2,4}| + |NA_k^{2,5}| + \dots + |NA_k^{2,q-1}| + |NA_k^{2,q}| + \\
&\quad + |NA_k^{3,4}| + |NA_k^{3,q}| + |NA_k^{4,4}| \\
|A_k| &= |NA_k| + |A_{k-1}|.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Observe que arestas de k -tipo $(2, 3)$ não aparecem na pavimentação, pois se isso acontecesse teríamos dois vértices novos na etapa $(k + 1)$ pertencentes a mesma aresta e como o mecanismo para gerar novos triângulos é a reflexão nas arestas k -exteriores isso não pode ocorrer.

Basta apenas exibirmos a fórmula recursiva para os triângulos no caso $q = 2m + 1$. Já temos da proposição anterior que as únicas arestas novas na pavimentação são as de k -tipo $(2, l)$, $l < q$, $(3, 4)$, $(4, 4)$, $(3, q)$. Notemos que as arestas de k -tipo $(3, q)$ não geram triângulos novos para a etapa $(k + 1)$, ou seja, elas não são arestas k -exteriores da pavimentação, pois o ciclo de triângulos já foi fechado na etapa k , de modo que este tipo de aresta é comum a dois triângulos da pavimentação, não podendo ser k -exterior.

Consideremos n_k definido como em 3.1, a Proposição 3.0.6 é válida tanto para $q = 2m$ quanto para $q = 2m + 1$, com uma ligeira mudança:

Proposição 3.2.3 *Seja $k-1$ a etapa da pavimentação e consideremos as arestas desta etapa com $(k-1)$ -tipos $\varepsilon^{2,\tau}, \varepsilon^{3,4} \in NA_{k-1}$. Então*

1. $n_k(\varepsilon^{2,\tau}) = n_{k-1}(\varepsilon^{2,\tau}) + 1$ se $\tau = q$;
2. $n_k(\varepsilon^{2,\tau}) = n_{k-1}(\varepsilon^{2,\tau}) + 2$ se $\tau < q$;
3. $n_k(\varepsilon^{3,4}) = n_{k-1}(\varepsilon^{3,4}) + 2$;

A demonstração dos itens 1. e 2. é similar à da proposição 3.0.6 e do item 3 pode ser feita de modo similar à demonstração do item 2. Então a cardinalidade dos triângulos novos em qualquer etapa da pavimentação é dada pelo teorema:

Teorema 3.2.4 *Dado triângulo Δ_0 com arestas α, β, γ , considere o grupo $\Gamma_{(3,q)} = \langle \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma \rangle$ gerado pelas reflexões nas suas arestas e $q = 2m + 1$. Consideremos a métrica de Cayley definida em $\Gamma_{3,q}$ então a cardinalidade de P_k e de NP_k é dada pelas fórmulas recursivas:*

$$\begin{aligned}
 |NP_0| &= |P_0| = 1 \\
 |NP_1| &= |NV_0^2| = 3 \\
 |NP_k| &= |NA_{k-1}^{2,4}| + |NA_{k-1}^{2,5}| + \dots + |NA_{k-1}^{2,q-1}| + \frac{1}{2}|NA_{k-1}^{2,q}| + |NA_{k-1}^{3,4}| + |NA_{k-1}^{4,4}| \\
 |P_1| &= |NP_1| + |P_0| = 4 \\
 |P_k| &= |NP_k| + |P_{k-1}|
 \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{N}$ e tal que as fórmulas para os vértices e arestas dos triângulos da etapa k são dadas pelas fórmulas (3.5) e (3.6).

Apêndice A

Rotina para o Algoritmo de Blocos

COMANDOS BÁSICOS

```

dist[z_, w_] := N[ $\sqrt{(\text{Re}[z - w])^2 + (\text{Im}[z - w])^2}$ ]

R1[z_] := (Cos[ $\theta$ ] + Sin[ $\theta$ ] i) * (z)

R-1[z_] := (Cos[ $\theta$ ] - Sin[ $\theta$ ] i) * (z)

rotacao[m_, {a_, b_}] := {{Cos[m], Sin[m]}, {-Sin[m], Cos[m]}}.{a, b};

Distancia[A_, B_] := N[ $\sqrt{(B[[1]] - A[[1]])^2 + (B[[2]] - A[[2]])^2}$ ]

Circuncentro[{A_, B_, C_}] :=
  Flatten[{x, y} /. Solve[{A[[1]]^2 + A[[2]]^2 - B[[1]]^2 - B[[2]]^2 - 2 A[[1]] x +
    2 B[[1]] x - 2 A[[2]] y + 2 B[[2]] y = 0, A[[1]]^2 + A[[2]]^2 - C[[1]]^2 -
    C[[2]]^2 - 2 A[[1]] x + 2 C[[1]] x - 2 A[[2]] y + 2 C[[2]] y = 0}, {x, y}]];

Circunraio[{A_, B_, C_}] := Distancia[Circuncentro[{A, B, C}], A]

Circun[{A_, B_, C_}] := {Circuncentro[{A, B, C}], Circunraio[{A, B, C}]}}

inversao[{{c_, d_}, ra_}][{a_, b_}] := {c, d} + ra^2 * ( $\frac{\{a, b\} - \{c, d\}}{\text{Distancia}[\{a, b\} - \{c, d\}, \{0, 0\}]^2}$ )

invers[{a_, b_}] :=  $\frac{\{a, b\}}{\text{Distancia}[\{0, 0\}, \{a, b\}]^2}$ 

circunH[P_, Q_] := Circuncentro[{P, Q, invers[P]}]

raioH[P_, Q_] := Circunraio[{P, Q, invers[P]}]

retaHip[P_, Q_] := {circunH[P, Q], raioH[P, Q]}

refl[{a_, b_}] := {a, -b}

reflHip[{P_, Q_}][S_] := inversao[Circun[{P, Q, invers[P]}]][S]

ptsInfinito[P_, Q_] := {x, y} /. Solve[{x^2 + y^2 - 1 = 0,
  circunH[P, Q][[1]]^2 + circunH[P, Q][[2]]^2 - raioH[P, Q]^2 = 0}, {x, y}]

unitario[{a_, b_}, {c_, d_}] :=  $\frac{\{c, d\} - \{a, b\}}{N[\text{Distancia}[\{c, d\} - \{a, b\}, \{0, 0\}]}$ 

myarg[P_] := N[Arg[P[[1]] + I * P[[2]]]]

argBiss[A_, Q_, B_] := myarg[unitario[Q, A] + unitario[Q, B]]

valorAngAgudo[A_, Q_, B_] := ArcCos[Abs[unitario[Q, A].unitario[Q, B]]]

variacaoAngular[A_, Q_, B_] := {argBiss[A, Q, B] - .5 valorAngAgudo[A, Q, B],
  argBiss[A, Q, B] + .5 valorAngAgudo[A, Q, B]}

Angulo[{A_, Q_, B_}, k_] := Circle[Q, k, variacaoAngular[A, Q, B]]

```

```

myround[z_] := N[Round[1000*z] / 10^3]

Hline[{P_, Q_}] := If[myround[Det[{P, Q}]] == 0, Line[{P, Q}],
  Angulo[{P, Circuncentro[{P, Q, invers[P]}], Q}, Circunraio[{P, Q, invers[P]}]]]

Htriang[{A_, B_, C_}] := {Hline[{A, B}], Hline[{B, C}], Hline[{C, A}]}

Htriangulo[{A_, B_, C_}] := {Hline[{A, C}], Hline[{C, B}]}

ptdaReta[m_, d_] :=  $\frac{\text{Tanh}[d]}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{m * \text{Tanh}[d]}{\sqrt{1+m^2}} i$ 

disco = Graphics[{Circle[{0, 0}, 1]}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1];
(*Disco de Poincaré *)

p = q = r = 5;

θ := Pi / p

Off[General::"spell"]

Off[General::"spell1"]

```

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO INICIAL

```

ladoA[p_, q_, r_] =
  N[ArcCosh[(Cos[Pi / q] * Cos[Pi / r] + Cos[Pi / p]) / (Sin[Pi / r] * Sin[Pi / q])]];

ladoB[p_, q_, r_] =
  N[ArcCosh[(Cos[Pi / p] * Cos[Pi / r] + Cos[Pi / q]) / (Sin[Pi / r] * Sin[Pi / p])]];

ladoC[p_, q_, r_] =
  N[ArcCosh[(Cos[Pi / q] * Cos[Pi / p] + Cos[Pi / r]) / (Sin[Pi / p] * Sin[Pi / q])]];

v[0, p_, q_, r_] = 0 + 0 i;

v[1, p_, q_, r_] = ptdaReta[0, .5 ladoB[p, q, r]];

v[2, p_, q_, r_] = ptdaReta[Tan[Pi / r], .5 ladoA[p, q, r]];

verticesTriangulo[1, p_, q_, r_] = {{Re[v[0, p, q, r]], Im[v[0, p, q, r]]},
  {Re[v[1, p, q, r]], Im[v[1, p, q, r]]}, {Re[v[2, p, q, r]], Im[v[2, p, q, r]]}};

T0 = {{v[0, p, q, r], Abs[v[0, p, q, r]], {v[1, p, q, r], v[2, p, q, r]}},
  {v[1, p, q, r], Abs[v[1, p, q, r]], {v[0, p, q, r], v[2, p, q, r]}},
  {v[2, p, q, r], Abs[v[2, p, q, r]], {v[0, p, q, r], v[1, p, q, r]}}};

g1 = {Htriang[verticesTriangulo[1, p, q, r]]};

```

```
g2 = Htriangulo[Table[refl[verticesTriangulo[1, p, q, r][[i]]], {i, 1, 3}]];
```

PARTE I : Rotações de Triângulos

```
For[k = 1, k ≤ p + 4, k++, fixo[k_, p_, q_, r_] = If[k == 1, v[1, p, q, r],
  Extract[Candidatos[k - 1][First[Ordering[Candidatos[k - 1][[All, 2]]]]], 1]];

Posicao = If[k == 1, Null, Position[TG[[All, 1]], fixo[k, p, q, r]]];

u[k_, p_, q_, r_] =
  If[k == 1, v[2, p, q, r], Extract[TG[[All, 1]], Posicao + (-1)^k /. {x_} -> x]];
Print[Posicao, u[k, p, q, r]];

T[z_] := 
$$\frac{1 + z - \text{fixo}[k, p, q, r]}{(-\text{Conjugate}[\text{fixo}[k, p, q, r]] * z) + (1 + 0 i)}$$
;

S[z_] := 
$$\frac{1 + z + \text{fixo}[k, p, q, r]}{(\text{Conjugate}[\text{fixo}[k, p, q, r]] * z) + (1 + 0 i)}$$
;

Rot_θ[z_] = Composition[S, R_1, T][z];

Rot_θ[z_] = Composition[S, R_{-1}, T][z];

M[k_] = If[k == 1, k + 1, M[k - 1] + (p - 1)];

For[i = 1, i < p, i++, Print[MapAll[myround,
  v[M[k] + i, p, q, r] = NestList[Rot_{(-1)^k θ}, u[k, p, q, r], p - 1][[i + 1]]]];

Lista[k_] = Table[{v[M[k] + j, p, q, r], Abs[v[M[k] + j, p, q, r]]},
  {fixo[k, p, q, r], v[M[k] + j - 1, p, q, r], v[M[k] + j + 1, p, q, r]}}, {j, 1, p - 2}];

Tabela[k_] = AppendTo[Lista[k], {v[M[k] + p - 1, p, q, r],
  Abs[v[M[k] + p - 1, p, q, r]], {fixo[k, p, q, r], v[M[k] + p - 2, p, q, r]}}];

Vk = If[k == 1, {{Re[fixo[k, p, q, r]], Im[fixo[k, p, q, r]]},
  {Re[v[M[k] + p - 1, p, q, r]], Im[v[M[k] + p - 1, p, q, r]]}},
  Join[<< c:/users/Karine/arestasrefl, {{Re[fixo[k, p, q, r]], Im[fixo[k, p, q, r]]},
    {Re[v[M[k] + p - 1, p, q, r]], Im[v[M[k] + p - 1, p, q, r]]}}]];

Put[Vk, "c:/users/Karine/arestasrefl"];

Tk = If[k == 1, Join[T0, Tabela[k]], Join[<< c:/users/Karine/TabelaGeral, Tabela[k]]];
Put[Tk, "c:/users/Karine/TabelaGeral"];

Candidatos[k_] =
  Select[<< c:/users/Karine/TabelaGeral, (#[[2]] > Abs[fixo[k, p, q, r]] &)];

For[i = If[k == 1, 1, M[k]], i ≤ M[k] + 3,
  Do[g_i[z_, w_, t_] = Htriangulo[{{Re[z], Im[z]}, {Re[w], Im[w]}, {Re[t], Im[t]}}],
```

```

{i, M[k] - 1, M[k] + p - 2}}, i++];

Tri[k] = Table[{If[i = M[k], gi[fixo[k, p, q, r], u[k, p, q, r], v[M[k] + 1, p, q, r]],
gi[fixo[k, p, q, r], v[i, p, q, r], v[i + 1, p, q, r]]}], {i, M[k], M[k] + p - 2}];
Triangulos[k] = Table[Tri[j], {j, 1, k}];
Bl[k] =
Table[If[i = M[k], {{Re[fixo[k, p, q, r]], Im[fixo[k, p, q, r]]}, {Re[u[k, p, q, r]],
Im[u[k, p, q, r]]}, {Re[v[M[k] + 1, p, q, r]], Im[v[M[k] + 1, p, q, r]]}},
{{Re[fixo[k, p, q, r]], Im[fixo[k, p, q, r]]}, {Re[v[i, p, q, r]], Im[v[i, p, q, r]]},
{Re[v[i + 1, p, q, r]], Im[v[i + 1, p, q, r]]}], {i, M[k], M[k] + p - 2}];

Bloquinho[k] = If[k = 1, Bl[k], Join[Bloquinho[k - 1], Bl[k]]];
TG = << c:/users/Karine/TabelaGeral;
Show[disco, Graphics[{gl, Triangulos[k]}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]]]

```

Parte II : Reflexões de Triângulos

```

Ar = << c:/users/Karine/arestasrefl;
Arestas = Partition[Ar, 2];
For[ArestasdeReflexao[1] = Arestas[[Length[Arestas]]];
i = 1, i < Length[Arestas], ArestasdeReflexao[i] = Arestas[[-i]], i++];

For[Bloco[1] = Drop[Bloquinho[k - 1], Length[Bloquinho[k - 1]] - (p - 1)];
i = 1, i < k - 1, Bloco[i] = Take[Bloquinho[k - 1], -i * (p - 1)], i++];

For[reflet[1] = Table[Map[refl, Bloco[1][[t]], {t, 1, Length[Bloco[1]]}]; 1 = 1, 1 < k - 1,
reflet[1] = Table[Map[refl, Bloco[1][[t]], {t, 1, Length[Bloco[1]]}], 1++];

reflexaoHiperbolica[s_] :=
Table[g[t] = Table[h[i] = reflHip[ArestasdeReflexao[s]][Bloco[s][[t]][[i]]],
{i, 1, Length[Bloco[s][[t]]}], {t, 1, Length[Bloco[s]]}];

TriangulosRefletidos[h_] := If[myround[myarg[ArestasdeReflexao[h][[1]]]] =
myround[myarg[ArestasdeReflexao[h][[2]]]], reflet[h], reflexaoHiperbolica[h]]

TriangRefle = Table[TriangulosRefletidos[i], {i, 1, Length[Arestas]}];

novoTriangRefle = Table[
f[i] = Table[Map[refl, TriangRefle[[i]][[t]], {t, 1, Length[TriangRefle[[i]]]}],
{i, 1, Length[TriangRefle]}];

For[Refletidos[1] = Table[g[t] = Htriangulo[TriangulosRefletidos[1][[t]]],
{t, 1, Length[TriangulosRefletidos[1]]}; i = 1, i < Length[Arestas],
Refletidos[i] = Table[h[1] = Htriangulo[TriangulosRefletidos[i][[1]]],
{1, 1, Length[TriangulosRefletidos[i]]}], i++];

reflexao = Table[Refletidos[i], {i, 1, Length[Arestas]}];

novareflexao = Table[h[i] = Table[g[t] = Htriangulo[novoTriangRefle[[i]][[t]]],
{t, 1, Length[novoTriangRefle[[i]]}], {i, 1, Length[novoTriangRefle]}];

```

```
Show[disco, Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], reflexao}, PlotRange → All, AspectRatio → 1],
Graphics[{{*g1,g2,Tri[k-1],*}novareflexao}, PlotRange → All, AspectRatio → 1]]
```

PARTE III : Rotações na Origem

```
For[l = 0, l < (2 * p) * θ, l += θ,
rotat = Table[h[i] = Table[g[t] = rotacao[l, Bloco[k - 1][[t]][[i]]],
{i, 1, Length[Bloco[k - 1][[t]]}], {t, 1, Length[Bloco[k - 1]]}];
rotat1 = Table[f[j] = Table[g[t] = Table[h[i] = rotacao[l, TriangRefle[[j]][[t]][[i]]],
{i, 1, Length[TriangRefle[[j]][[t]]}],
{t, 1, Length[TriangRefle[[j]]}], {j, 1, k - 1}];
rotat2 = Table[g[s] = Table[f[i] = Table[h[t] = rotacao[l,
novoTriangRefle[[s]][[i]][[t]]], {t, 1, Length[novoTriangRefle[[s]][[i]]}],
{i, 1, Length[novoTriangRefle[[s]]}], {s, 1, Length[novoTriangRefle]}];
reflet[l] = Map[Htriangulo, rotat];
reflet1[l] = Table[h[i] = Map[Htriangulo, rotat1[[i]]], {i, 1, Length[rotat1]}];
reflet2[l] =
Table[h[i] = Table[g[t] = Htriangulo[rotat2[[i]][[t]]], {t, 1, Length[rotat2[[i]]}],
{i, 1, Length[rotat1]}];
Show[disco, Graphics[{{*g1,g2,Tri[k-1],*}reflet[l], reflet1[l], reflet2[l]},
PlotRange → All, AspectRatio → 1]]

rot = Table[reflet[l - i * θ], {i, 1, 2 * p - 1}];
rot1 = Table[reflet1[l - i * θ], {i, 1, 2 * p - 1}];
rot2 = Table[reflet2[l - i * θ], {i, 1, 2 * p - 1}];

TimeUsed[Show[disco,
Graphics[{g1, g2, Triangulos[k - 1], reflexao, novareflexao, rot, rot1, rot2},
PlotRange → All, AspectRatio → 1]]]
```

Apêndice B

Crescimento

p = 3

3

na[2, t_, 0, q_] = If[t == 2, p, 0];

na[2, 2, 0, 10];

na[2, t_, 1, q_] = If[t == 4, 2*p, 0];

na[4, 4, k_, q_] = $\frac{1}{2}$ na[2, q, k-1, q];

na[2, t_, k_, q_] = If[t == 4, Sum[na[2, i, k-1, q], {i, 4, q-2, 2}],
If[t == 6, na[2, 4, k-1, q] + 2*na[4, 4, k-1, q], na[2, t-2, k-1, q]]];

NovasAr[0, q_] = p;

NovasAr[1, q_] = 2*NovasAr[0, q];

NovasAr[k_, q_] :=

If[k ≤ $\frac{q}{2} - 1$, 2*NovasAr[k-1, q], 2*NovasAr[k-1, q] - $\frac{3}{2}$ na[2, q, k-1, q]];

A[k_, q_] = If[k ≤ $\frac{q}{2} - 1$, Sum[na[i, q], {i, 0, k}],

Sum[na[i, q], {i, 0, k - ($\frac{q}{2} - 1$)}]] +

Sum[na[i, q], {i, k - ($\frac{q}{2} - 1$) + 1, k}]]];

NP[0, q_] = 1;

NP[1, q_] = p*NP[0, q];

NP[k_, q_] = NovasAr[k-1, q] - $\frac{1}{2}$ na[2, q, k-1, q];

NPBloco[0, q_] = Sum[NP[i, q], {i, 0, ($\frac{q}{2}$) - 1}];

NPBloco[1, q_] = Sum[NP[i, q], {i, $\frac{q}{2}$, (2* $\frac{q}{2}$) - 1}];

NPBloco[1_, q_] = Sum[NovasAr[1* ($\frac{q}{2}$) + i, q], {i, 0, ($\frac{q}{2}$) - 2}];

B[0, q_] = NPBloco[0, q];

B[1, q_] = NPBloco[0, q] + NPBloco[1, q];

B[k_, q_] = Sum[NPBloco[i, q], {i, 0, k}];

q = 10

Solve[{Limit[$\frac{A * C^{\lambda * s}}{B[s, q]}$, s → Infinity] = 1}, {A, C, λ}]

Bibliografia

- [Al] ALLAN, N. D., *Pavimentações Hiperbólicas*, série: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA), vol. 2, 2000, p13-22.
- [Be] BEARDON, Alan F., *The Geometry of Discrete Groups*, Springer Verlag, 1982.
- [Ep] EPSTEIN, D. B. A.; CANNON, J. W.; HOLT, D. F.; LEVY, S. F.; PATERSON, M. S.; THURSTON, W. P., *Word Processing in Groups*, Jones and Bartlett Publishers, Inc., 1992.
- [Fi] FIRER, M., *Notas de aula do curso Grupos Fuchsianos*, IMECC-UNICAMP, 1º Sem. de 1998.
- [GaLe] GARCIA, A. ; LEQUAIN, Y., *Álgebra: um curso de introdução*, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.
- [Hu] HUMPHREYS, J. E., *Reflection Groups and Coxeter Groups* , Cambridge University Press, 1990.
- [Ka] KATOK, S., *Fuchsian Groups*, Chicago lectures in mathematics series, 1992.
- [Ro] ROTMAN, J., J., *The Theory of Groups: An Introduction*, Allyn and Bacon series in advanced mathematics, 2ª edição, 1973.
- [SiFiPa] SILVA, E. B.; FIRER, M.; PALAZZO JR., R., *Counting Domains in (p, q) Tessellations*, Applied Mathematics Letters nº 16, (2003), p323-328.
- [Wo] WOLFRAM, S., *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Redwood city, Col. : Addison-Wesley, 2ª edição, 1991.