# Reconstrução de Torneios Normais

Marcela Luciano Vilela de Souza

09 de agosto de 1999

# Reconstrução de Torneios Normais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Marcela Luciano Vilela de Souza, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 9 de agosto de 1999

Claudina Izepe Rodrigues

Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues
Orientadora

Banca Examinadora:
1. Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues
2. Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
3. Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Souza, Marcela Luciano Vilela de

S89r Reconstrução de torneios normais / Marcela Luciano Vilela de Souza -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientadora: Claudina Izepe Rodrigues

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Torneios. 2. Teoria dos grafos hamiltonianos. I. Rodrigues, Claudina Izepe. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 09 de agosto de 1999 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Claudina Izepe Rodrigues

**Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES**

Caio José C. Negreiros

**Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS**

**Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KÜHL**

## A VIDA É UM ETERNO CAMINHAR

e a natureza, a todo instante, com sua grandiosidade, está a nos ensinar a ordem natural das coisas, as condutas e posturas que nos possibilita alcançar resultados positivos e gratificantes em nossa caminhada.

Lançar a semente, plantar em solo adequado; investir em nossa memória cultural as bases do conhecimento que pretendemos adquirir; alimentar, continuadamente, esse conhecimento em nossa vida profissional, familiar, esportiva e social, de maneira que a cada período de tempo que passarmos, essas bases se tornem mais sólidas e estaremos assim, mais preparados para enfrentar as adversidades e obstáculos que nos dão maiores oportunidades de crescimento e nos tornam mais fortes perante a vida.

Cabe, a cada um de nós, desbravar o nosso caminho e realizar os nossos sonhos. E é nos sonhos e objetivos onde devemos manter o foco e caminhar na sua direção com garra, competência, disciplina, determinação, justiça, vontade e amor. Nessa caminhada, pessoas nos darão as mãos para nos alçar a estágios mais elevados. Posteriormente, faremos o mesmo, contribuindo, assim, com o crescimento contínuo de cada um.

É preciso lembrar que sempre alguém está compartilhando sua sabedoria, sua competência, seu carinho. E nós também, como retribuição ao apoio recebido, devemos compartilhar todo conhecimento que adquirirmos em nossa caminhada; porque se atingimos um determinado objetivo, com certeza fomos apoiados por pessoas que nos possibilitaram fazê-lo, nos transmitindo parte de sua sabedoria.

E, sempre haverão milhares de oportunidades para as pessoas que sabem para onde caminham e, para estas, as portas do sucesso se abrirão com generosidade,

**POIS A VIDA É UM ETERNO CAMINHAR.**

Lázaro Lima de Souza
Uberlândia(MG) - 09.08.99

*Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos e sobrinhos.*

# Agradecimentos

Agradeço

• à minha orientadora Prof. Claudina Izepe Rodrigues, pela dedicação, paciência, profissionalismo e pela arte de orientar.

• aos professores da banca examinadora Prof. Caio José Colletti Negreiros, Prof. José Carlos de Souza Kiihll e Prof. Irwen Guadalupe.

• aos professores Claudina Izepe, Paulo Brumatti, Jaime Angulo, Irwen Guadalupe, Márcia Scialom, Maria Sueli Roversi, Fernando Torres, que compartilharam suas experiências no processo de minha formação.

• ao Professor Gilli, pela simpatia, acolhimento e interesse pelo meu bem estar.

• à minha "irmã" Juliana Chioca, pelo espírito alegre e carinhoso, pela grande amizade e companheirismo, com quem compartilhei momentos de alegrias.

• a Edimilson, pelo carinho e compreensão nos momentos de dedicação aos meus estudos e por sempre estar ao meu lado.

• às minhas amigas "irmãs" Daniela, Letícia e Luciana, pelo envolvimento afetivo, que mesmo à distância sempre me incentivaram.

• aos amigos Kátia, Elis, Sérgio, Marcelo, Ângela e Vaston (UFU), pela amizade, companheirismo, horas de descontração que deixaram lembranças felizes no período da graduação.

• a Leonardo, pelo espírito solidário e humano, pela presença e apoio na busca de meu objetivo.

• à minha prima Lídia e à minha amiga Ximena pela presença carinhosa na apresentação da tese e apoio.

• aos amigos Professor Paulo Ruffino, Marcelo Dantas, Leduíno, Jones, José, Yuri, Gil, Adilson e Luiz, também pela presença e apoio.

• ao amigo Augusto, pelo apoio na digitação da tese.

• aos amigos Jaqueline, Luciana e Alessandro, pelas horas de estudos e experiências comuns.

• aos amigos do Predinho, pelo companheirismo compartilhado nesses anos.

• aos funcionários da Unicamp, pela contribuição e disponibilidade.

• ao CNPQ, pelo apoio financeiro, suporte indispensável para realização do meu trabalho.

• a meus irmãos Paulo Rogério, Sérgio Augusto e Renata, sobrinhos Filipe e Rebeca, pelo amor, carinho e apoio que fortalecem a minha alma em todos os momentos.

• a meus pais, a minha gratidão por me prepararem para a vida com muito amor e batalha, depositando em minha alma a semente da arte de conquistar objetivos, através da perseverança, determinação, disciplina e humildade.

• A Deus, por ter segurado em minhas mãos, mostrando-me o mais perfeito caminho, com sua luz e proteção divinas, pois sem Ele, este momento não estaria sendo vivido.

# Resumo

Nesta dissertação, o objetivo foi estudar o problema da reconstrução de torneios normais. Para isso, introduzimos primeiro algumas noções preliminares sobre a teoria de grafos orientados e torneios. Depois, vimos alguns resultados envolvendo torneios hamiltonianos e bineutros, diferença cíclica e característica cíclica de um torneio para posteriormente serem aplicados no resultado principal. Finalmente, mostramos os resultados essenciais para o nosso objetivo que estudam a normalidade de torneios hipomorfos e a Composição Canônica do subtorneio $P_{n-k}$.

# Conteúdo

# Introdução

Um dos maiores problemas não resolvidos da teoria de grafos é saber se um grafo pode ser reconstruído a menos de isomorfismo se conhecemos todos seus subgrafos de vértice deletado a menos de isomorfismo. Mais precisamente, questiona se a seguinte conjectura é verdade:

**A Conjectura da Reconstrução**

(Primeira versão): Se $G$ e $H$ são grafos com pelo menos 3 vértices, e se existe uma bijeção $\sigma : V(G) \longrightarrow V(H)$ tal que $G - v \simeq H - \sigma(v)$ para todo $v \in V(G)$, então $G \simeq H$.

(Segunda versão): Todo grafo com pelo menos 3 vértices é reconstrutível.

A primeira versão da conjectura acima foi formulada por P.J.Kelly e S.M.Ulam em 1942, e o primeiro trabalho publicado sobre sua prova foi feito por Kelly provando que a conjectura é verdade para árvores. E a segunda versão foi formulada por Harary em 1964.

Podendo obviamente formular uma conjectura envolvendo grafos orientados que é análoga à conjectura da reconstrução, Stockmeyer descobriu que esta conjectura é falsa (ou seja, os digrafos não são todos reconstrutíveis), não somente para alguns digrafos de ordem pequena, mas para alguns digrafos arbitrariamente grandes.

Sendo assim, o problema da reconstrução não foi resolvido para grafos ordinários, enquanto a conjectura da reconstrução é falsa para grafos orientados. Em particular, para todo inteiro positivo n existem torneios não reconstrutíveis com mais de n vértices. Já os grafos desconexos são reconstrutíveis.

Agora, o problema da reconstrução para torneios foi formulado por F.Harary em 1966, sendo o primeiro quem usou a palavra **carta**, perguntando:

"É possível reconstruir qualquer torneio $T_n$ a partir de suas cartas para $n$ suficientemente grande ?"

A resposta é não. Entretanto, algumas classes de torneios reconstrutíveis foram encontradas.

Em 1967, Harary F. e Palmer E. provaram que todo torneio não hamiltoniano com pelo menos 5 vértices é reconstrutível. Provaram também que todo torneio redutível $T_n$ é reconstrutível pelas suas cartas se $n \geq 5$.

Em 1970, Beineke e Parker acharam torneios não reconstrutíveis de ordem 5,6.

Em 1977, Stockmeyer construiu uma série de torneios não reconstrutíveis sendo os mesmos de ordens

$$2^n + 1, \quad 2^n + 2 \qquad \textit{com } n = 1, 2, 3, ...$$

e, então, afirmou definitivamente a falsidade da conjectura da reconstrução para torneios. Além disso, verificou pelo auxílio de um computador que todos os torneios de ordem 7 são reconstrutíveis.

Nenhuma nova classe de torneios reconstrutíveis foi exibida até 1990, se excluirmos as seguintes:

- torneios transitivos
- torneios altamente regulares
- torneios bineutros

Em 1990, usando a estrutura de torneios normais, Demaria e Guido provaram que todo torneio normal $H_n$ ($n \geq 5$) pode ser reconstruído pelas suas cartas. O objetivo deste trabalho é desenvolver este resultado.

Depois disso, houve novas descobertas de classes de torneios reconstrutíveis, como a de Vitolo, que em 1992 descobriu que todo torneio simplesmente desconexo é reconstrutível.

Para chegar ao nosso objetivo, introduzimos primeiro definições e noções básicas sobre grafos orientados e torneios, assim como resultados importantes envolvendo torneios quocientes.

Logo depois, iniciamos um estudo sobre torneios hamiltonianos dando definições de torneio bineutro, característica cíclica, diferença cíclica e ciclo característico, possibilitando o estudo do Teorema da Classificação, onde obtemos as partições dos torneios hamiltonianos.

O estudo dessas classes e suas relações é feito considerando como um invariante, a diferença cíclica (diferença entre a ordem n do torneio e a característica cíclica), já que ela não aumenta para os subtorneios hamiltonianos.

Em seguida, consideramos os torneios cuja diferença cíclica é igual a 2, possibilitando então a caracterização estrutural dos mesmos.

Em particular, segue que, para $n \geq 7$, a classe de diferença cíclica 2 é unitária e contém o único torneio bineutro $A_n$. Ou seja, usando as notações deste texto, $\mathcal{H}_{n,2} = \{H_n : \text{torneios com } cd(H_n) = 2\} = \{A_n\}$, para $n \geq 7$.

Considerando as relações entre a diferença cíclica de um torneio e de seus subtorneios, uma propriedade do torneio bineutro $A_n$ é determinada. Então, podemos imediatamente caracterizar o $A_n$ como os torneios com o menor número de subtorneios hamiltonianos.

Finalmente, daremos a definição de torneios normais e pólos e desenvolvemos resultados essenciais para chegarmos ao resultado principal, dentre eles a caracterização estrutural dos torneios normais e a proposição que determina o ciclo característico de um torneio normal $H_n$ com $n \geq 5$ (o torneio bineutro).

Além disso, veremos o conceito de carta de um torneio, hipomorfismo e torneios reconstrutíveis.

Agora, considerando as classes de torneios normais, provaremos os seguintes resultados.

Se $H_n$ é um torneio normal com pelo menos 5 vértices e com ciclo característico $k$ e se $H'_n$ é qualquer torneio com n vértices que é hipomorfo a $H_n$ (isto é, $H_n$ e $H'_n$ tem as mesmas cartas) então:

i) $H'_n$ é normal;

ii) o ciclo característico de $H'_n$ é k;

iii) $H'_n$ é isomorfo a $H_n$.

Então, todo torneio normal diferente do 3-ciclo $H_3$ é reconstrutível.

# Capítulo 1

# Grafos orientados e torneios

## 1.1 Grafos orientados

**Definição 1.1.1** *Sejam $I$ um conjunto finito não vazio e $\mathcal{A}$ um conjunto de pares ordenados formados com elementos distintos de $I$. Chamamos $I$ de suporte.*

*Denominamos* **grafo orientado** *ou* **digrafo** *ao par $G = \{I, \mathcal{A}\}$.*

*Os* **vértices de G** *são os elementos de $I$.*

*A* **ordem de G** *é a cardinalidade de $I$.*

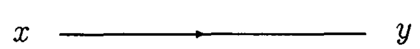
*Os* **arcos de G** *são os pares de $\mathcal{A}$.*

**Notação:** Para indicar um **arco orientado** (x,y) usamos a notação $x \longrightarrow y$. Usaremos a notação $x \not\longrightarrow y$ para denotar que (x,y) não é um arco de G, ou seja,$(x, y) \notin \mathcal{A}$.

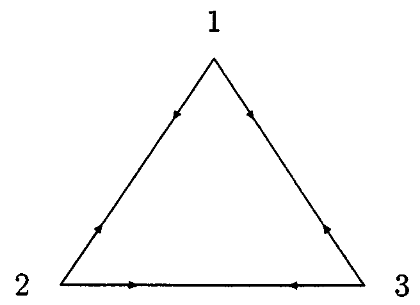
**Observação 1.1.2** *Se $x \longrightarrow y$ dizemos que $x$ é um* **predecessor** *de $y$ e que $y$ é um* **sucessor** *de $x$.*

**Exemplo 1.1.3** *Alguns exemplos de grafos orientados:*

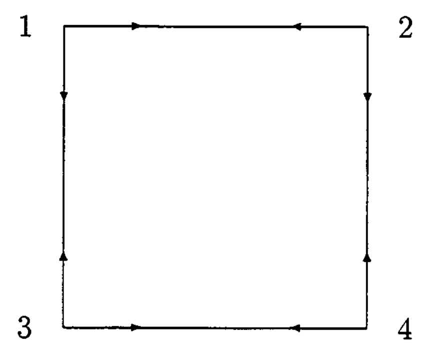
*(1)* $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\qquad$ $I = \{x, y\}$ $\qquad$ $\mathcal{A} = \{(x, y)\}$



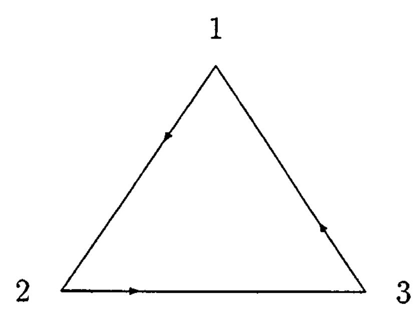
(2) $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\qquad I = \{1, 2, 3\}$ $\qquad \mathcal{A} = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$




(3) $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\qquad I = \{1, 2, 3, 4\}$
$\mathcal{A} = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4), (4,2), (4,3)\}$

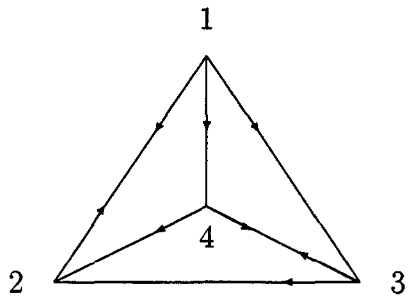



(4) $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\qquad I = \{1, 2, 3\}$ $\qquad \mathcal{A} = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$



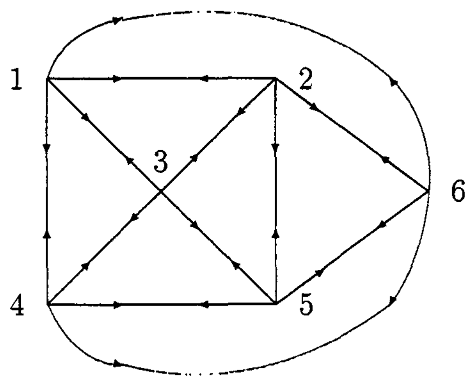
(5) $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\qquad I = \{1,2,3,4\}$

$\mathcal{A} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,4),(1,4),(4,2),(4,3)\}$




(6) $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\qquad I = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathcal{A} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),$
$(4,1),(4,3),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,4),(6,5)\}$




## 1.2 Torneios

**Definição 1.2.1** *Um* **torneio** *$T$ é um grafo orientado no qual todo par de vértices é ligado por exatamente 1 arco.*

O conjunto de vértices é denotado por $V(T)$ e o conjunto de arcos por $E(T)$. Se a cardinalidade $|V(T)| = n$, T tem ordem n e T é denotado por $T_n$. Mas usualmente identificaremos $T_n$ com o conjunto de seus vértices por $V(T_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Identificaremos um torneio trivial com seu único vértice por $V(T_1) = \{v_1\}$.

Se $v$ é qualquer vértice de T, denotamos por $T - v$ ou $T - \{v\}$ o subtorneio de vértice deletado.

**Definição 1.2.2** *Um torneio $T$ é* **transitivo** *se ele induz uma relação transitiva entre seus vértices colocando $v < w \Longleftrightarrow v \longrightarrow w$ (isto é, se, para cada $u \in T$, para cada $v \in T$ e para cada $w \in T$, $v \longrightarrow w$ e $w \longrightarrow u$ implica $v \longrightarrow u$). Ou equivalentemente, $T$ é transitivo se $T$ não possuir nenhum ciclo passando por um subconjunto de seus vértices.*

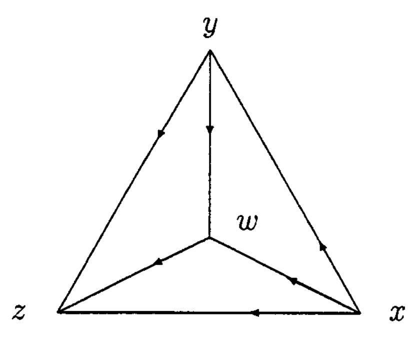
**Observação 1.2.3** *Para todo inteiro $n > 0$ existe somente 1, a menos de isomorfismos, torneio transitivo com $n$ vértices.*

Denotamos tal torneio por:

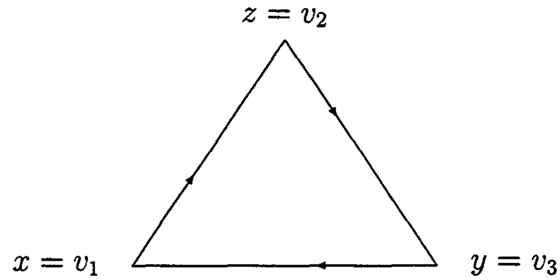
- $T_{r_n}$ se seus vértices $v_1, ..., v_n$ são tais que $v_h \longrightarrow v_k \Longleftrightarrow h < k$
- $T^*_{r_n}$ se seus vértices $v_1, ..., v_n$ são tais que $v_h \longrightarrow v_k \Longleftrightarrow k < h$

**Definição 1.2.4** *Um torneio $T$ é dito* **regular** *se, para cada $x \in T$, o número dos predecessores de $x$ é igual ao número de seus sucessores (e como consequência a ordem de $T$ é ímpar). Um torneio $T$ é dito* **altamente regular** *se existe uma ordenação cíclica $v_1, v_2, ..., v_{2m+1}, v_1$ dos vértices de $T$ tais que $v_i \longrightarrow v_j$ se, e somente se $v_j$ é um dos primeiros $m$ sucessores de $v_i$ na ordenação cíclica dos vértices de $T$.*

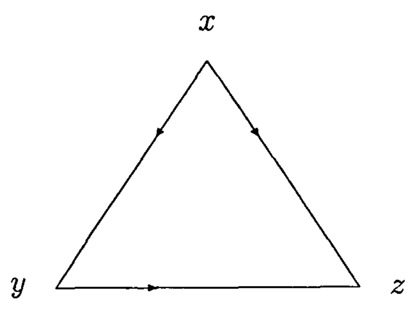
**Exemplo 1.2.5** *(I) Seja $G$ o grafo da figura abaixo. Vê-se que $G$ é um torneio:*
*(1) Transitivo*
*(2) Não regular*



*(II) Seja G como na figura abaixo. Então G é um torneio:*
*(1) Não transitivo, pois* $x \longrightarrow z$, $z \longrightarrow y$ *e* $x \not\longrightarrow y$
*(2) G é altamente regular, pois G admite a seguinte ordenação:*
$v_1 = x,\ v_2 = z,\ v_3 = y$



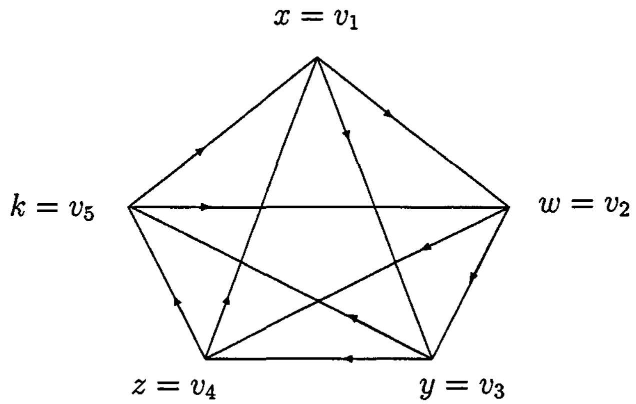

*(III) Considere G como abaixo. Temos que:*
*(1) G é transitivo*
*(2) G não é regular, pois x possui 2 sucessores e nenhum predecessor*




*(IV) Considere o torneio* $G = H_5$.
*(1) G não é transitivo, pois* $z \longrightarrow x$, $x \longrightarrow y$ *e* $z \not\longrightarrow y$
*(2) G é altamente regular onde a ordenação é dada por:*
$x = v_1, w = v_2, y = v_3, z = v_4, k = v_5, x = v_1$ *e vemos que:*

$v_1 \longrightarrow v_2 \qquad v_1 \longrightarrow v_3$
$v_2 \longrightarrow v_3 \qquad v_2 \longrightarrow v_4$
$v_3 \longrightarrow v_4 \qquad v_3 \longrightarrow v_5$
$v_4 \longrightarrow v_5 \qquad v_4 \longrightarrow v_1$
$v_5 \longrightarrow v_1 \qquad v_5 \longrightarrow v_2$

*onde* $m = 2 \Longrightarrow 2m + 1 = 5$




**Definição 1.2.6** *Sejam $T$ um torneio, $A$ e $B$ subtorneios de $T$. Se cada vértice de $A$ é um predecessor de cada vértice de $B$, escrevemos $A \longrightarrow B$. Os vértices de um subtorneio $A$ são chamados* **equivalentes** *se, para qualquer $q \in T - A$, ou $q \longrightarrow A$ ou $A \longrightarrow q$.*

**Definição 1.2.7** *Um* **homomorfismo** *entre dois torneios $T_n$ e $T_m$ é uma função $f : V(T_n) \longrightarrow V(T_m)$ tal que se $v \longrightarrow w \Longrightarrow f(v) \longrightarrow f(w)$ ou $f(v) = f(w)$.*

*Dois torneios $T_n$ e $T_m$ são* **epimorfos** *se existe um homomorfismo sobrejetor $f : V(T_n) \longrightarrow V(T_m)$.*

*Dois torneios são* **isomorfos**, *isto é $T_n \simeq R_n$ se existe um homomorfismo bijetor $f : V(T_n) \longrightarrow V(R_n)$.*

## 1.3 Torneios quocientes

**Definição 1.3.1** *Seja $R_m$ um torneio com os seguintes vértices $v_1, ..., v_m$ e seja $S^{(1)}, ..., S^{(m)}$ torneios disjuntos 2 a 2. Denotamos por $R_m(S^{(1)}, ..., S^{(m)})$ a* **composição das componentes** $S^{(i)}$ **com o quociente** $R_m$, *isto é, o torneio cujos vértices formam o conjunto $V(S^{(1)}) \cup ... \cup V(S^{(m)})$ e cujos arcos são definidos pela relação:*

$$\begin{cases} a \longrightarrow b \Longleftrightarrow (a,b) \in S^{(j)} \text{ para algum } 1 \leq j \leq m \text{ ou} \\ a \in S^{(h)}, b \in S^{(k)} \text{ e } v_h \longrightarrow v_k. \end{cases}$$

**Definição 1.3.2** *Um torneio $T_n$ com $n > 1$ é dito* **simples** *quando seus únicos quocientes são ele próprio e o torneio trivial $T_1$ formado por um único vértice.*
*Ou seja: se $T_n = R_m(S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(m)}) \Longrightarrow m = 1$ ou $m = n$.*

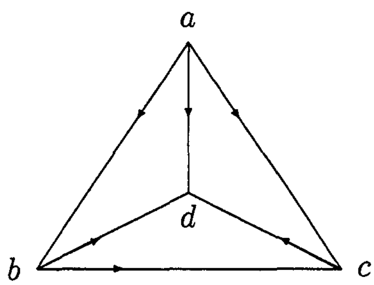
**Definição 1.3.3** *Dado um torneio $T_n$, definimos a sua* **condensação** *como um quociente transitivo de $T_n$ da forma $T_n = T^*_{r_k}(S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(K)})$, onde cada componente $S^{(i)}$ é forte, ou seja, hamiltoniano ou trivial ($T_1$, torneio formado por 1 só vértice). A condensação de $T_n$ é o maior quociente transitivo de $T_n$. Para $k > 1$, $T_{r_k}$ é sempre epimorfo a $T_2$, e portanto, a condensação de um torneio hamiltoniano é sempre o torneio trivial $T_1$.*

Para os torneios quocientes as seguintes propriedades são válidas:

**Proposição 1.3.4** *$R_m$ é isomorfo a um subtorneio de $T_n$.*

**Proposição 1.3.5** *Para todo $T_n$, existe exatamente 1 torneio quociente não simples.*

**Exemplo 1.3.6** *Considere o torneio $G = T_4$:*




$G = \{\{a,b,c,d\}, \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}\}$ *é um torneio.*
$A = \{\{a,b\}, \{(a,b)\}\}$ *é um subtorneio de $G$.*
$B = \{\{c,d\}, \{(c,d)\}\}$ *é um subtorneio de $G$.*

- *$A$ e $B$ são subtorneios tais que $A \longrightarrow B$.*
- *Os vértices do subtorneio $A$ são equivalentes, pois $\forall q \in G - A = \{c,d\}$ temos que $A \longrightarrow q$.*
- *Os vértices do subtorneio $B$ são equivalentes, pois $\forall q \in G - B = \{a,b\}$ temos que $q \longrightarrow B$.*
- *Composição:*

*Seja $T_4 = G$, isto é, $T_4$ é um torneio tal que $o(T_4) = 4$.*

*Podemos particioná-lo em subtorneios disjuntos $S^{(1)} = A$ e $S^{(2)} = B$ de vértices equivalentes.*

*Seja $R_2 = \{\{A,B\}, A \longrightarrow B\}$ o torneio constituído por 2 elementos $w_1 = A, w_2 = B$ tal que $w_i \longrightarrow w_j \Longleftrightarrow S^{(i)} \longrightarrow S^{(j)}$, para $i = 1,2$, pois $w_1 \longrightarrow w_2 \Longleftrightarrow S^{(1)} \longrightarrow S^{(2)}$.*

*Então: $T_4 = R_2(S^{(1)}, S^{(2)})$*

*Pela proposição 1.3.4, temos que existe pelo menos um subtorneio de $T_4$ isomorfo a $R_2$. Neste exemplo, temos 4 subtorneios isomorfos a $R_2$:*

*1)* $T' = \{\{a,c\}, \{(a,c)\}\}$, $f : T' \longrightarrow R_2$ *é um isomorfismo, onde* $a \longrightarrow c$ *e*

$$a \longrightarrow A$$
$$c \longrightarrow B$$

$f(a) = A \longrightarrow f(c) = B$.

*2)* $T'' = \{\{b,d\},\{(b,d)\}\}, f : T'' \longrightarrow R_2$ *é um isomorfismo, onde* $b \longrightarrow d$ *e*

$$b \longrightarrow A$$
$$d \longrightarrow B$$

$f(b) = A \longrightarrow f(d) = B$.

*3)* $T''' = \{\{a,d\},\{(a,d)\}\}, f : T''' \longrightarrow R_2$ *é um isomorfismo, onde* $a \longrightarrow d$ *e*

$$a \longrightarrow A$$
$$d \longrightarrow B$$

$f(a) = A \longrightarrow f(d) = B$.

*4)* $T'''' = \{\{b,c\},\{(b,c)\}\}, f : T'''' \longrightarrow R_2$ *é um isomorfismo, onde* $b \longrightarrow c$ *e*

$$b \longrightarrow A$$
$$c \longrightarrow B$$

$f(b) = A \longrightarrow f(c) = B$.

# Capítulo 2

# Torneios hamiltonianos

## 2.1 Algumas notações e noções preliminares

$\langle V(C) \rangle$ é o subtorneio formado pelos vértices de um ciclo C de T. Mais geralmente, se $G_1, G_2, ..., G_p$ são subgrafos orientados de Tn, denotamos por $\langle G_1 \cup ... \cup G_p \rangle$ o subtorneio cujos vértices formam o conjunto $V(G_1) \cup ... \cup V(G_p)$.

**Definição 2.1.1** *Um torneio é* **hamiltoniano** *se ele tem um ciclo passante, isto é, se existe um ciclo que passa (uma só volta) atravessando todos os vértices do torneio.*
$H_n$ *denotará um torneio hamiltoniano com n vértices.*

Podemos relembrar que:

**Proposição 2.1.2** $T_n$ *é não hamiltoniano* $\Longleftrightarrow$ *seu quociente simples é* $T_2$.

Seja $v \in T_n$, então:
$ind(v)$ =número de predecessores de $v$ (denota o **in-valency** de $v$ em $T_n$)
$outd(v)$ =número de sucessores de $v$ (denota o **out-valency** de $v$ em $T_n$)
$(ind(v), outd(v))$ é o **valency-par** de $v$.
$(ind(v_1), outd(v_1)), ..., (ind(v_n), outd(v_n))$ com a ordem lexicográfica é a **sequência de valency-par** de $T_n = \{v_1, ..., v_n\}$.

**Observação 2.1.3** *Torneios isomorfos tem a mesma sequência de valency-par.*

Um vértice $v'$ de um subtorneio $T'_m$ é chamado de:
•**transmissor** de $T'_m$ se $v'$ tem como valency-par $(0, m-1)$ em $T'_m$ (isto é: $v'$ não tem predecessor, e todos os outros vértices de $T'_m$ são sucessores pois $ind(v') = 0$ e $outd(v') = m - 1$).
•**receptor** de $T'_m$ se $v'$ tem como valency-par $(m-1, 0)$ em $T'_m$ (isto é: $v'$ não tem sucessor, e todos os outros vértices de $T'_m$ são predecessores pois $ind(v') = m - 1$ e $outd(v') = 0$).

## 2.2 Diferença cíclica de um torneio

**Definição 2.2.1** *Um vértice $v \in H_n$ é* **neutro** *para o torneio hamiltoniano $H_n$ se $H_n - v$ é hamiltoniano.*

Notação : $\nu(H_n)$ =número de vértices neutros de $H_n$.

**Observação 2.2.2** *Como $\nu(H_n)$ é também o número dos subtorneios hamiltonianos de ordem $n-1$ e em $H_n (n \geq 4)$ existe pelo menos 2 e no máximo $n$ subtorneios hamiltonianos de ordem $n-1$, segue que*

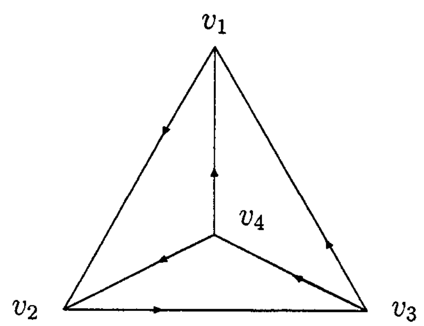
$$2 \leq \nu(H_n) \leq n, \quad para \quad n \geq 4.$$

**De fato:**

•para $n = 3$, não existe vértice neutro de $H_n$.
•para $n = 4$, temos $\nu(H_4) = 2$.
•para $n \geq 5$, temos que $2 \leq \nu(H_n)$ pelo corolario 2.4.3 e teorema 2.4.14 que veremos mais adiante.

**Exemplo 2.2.3** • $\nu(H_n) = 2$ *quando $H_n$ é o torneio de ordem $n = 4$*

*O torneio bineutro $A_4$ (veja próxima definição)*




*Temos que $v_1$ e $v_4$ são os únicos vértices neutros de $A_4$.*
*Portanto: $\nu(A_4) = 2$*

• $\nu(H_n) = n$ *para os torneios que são as composições de componentes não singulares com um quociente hamiltoniano .*

*Por exemplo:*

*Considere o torneio altamente regular $H_5$ do exemplo 1.2.5.*
*$H_5$ tem 5 subtorneios hamiltonianos:*
*$H_5'$, onde $V(H_5') = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$*
*$H_5''$, onde $V(H_5'') = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$*
*$H_5'''$, onde $V(H_5''') = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$*
*$H_5''''$, onde $V(H_5'''') = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$*
*$H_5'''''$, onde $V(H_5''''') = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*
*Portanto: $\nu(H_5) = 5$*

**Definição 2.2.4** *O torneio $A_n$ ($n \geq 4$) com o conjunto de vértices $V(A_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e conjunto de arcos $E(A_n) = \{(x_i, x_j)/j < i-1 \text{ ou } j = i+1\}$ contém somente 2 vértices neutros $x_1$ e $x_n$ e é chamado de* **torneio bineutro** *de ordem $n$.*

**Observação 2.2.5** *A menos de isomorfismo, existe apenas 1 torneio bineutro.*

**Observação 2.2.6** *Las Vergnas provou em [11] que o torneio bineutro $A_n$ é o único torneio com apenas 2 vértices neutros para cada $n \geq 4$.*

**Definição 2.2.7** *Um subtorneio $T'$ de um torneio $T$ é dito* **conado***(ou* **projetado***) por um vértice $v$ (isto é, $v$ cona $T'$) se existe um vértice $v$ de $T - T'$ tal que $v \longrightarrow T'$ ou $T' \longrightarrow v$. Se nenhum vértice de $T - T'$ cona $T'$, $T'$ é dito* **não conado** *(ou* **não projetado***), ou seja, se $\forall\ v \in T - T'$ temos que $v \not\longrightarrow T'$ e $T' \not\longrightarrow v$ então $T'$ é não conado.*

*Se $C$ é um ciclo de $T$, $C$ é dito conado por $v$ (respectivamente não conado) se $\langle V(C) \rangle$ é conado por $v$ (respectivamente não conado).*

**Proposição 2.2.8** *Um torneio $T_n$ ($n \geq 5$) é hamiltoniano $\Longleftrightarrow$ existe um m-ciclo não conado $C$, onde $3 \leq m \leq n-2$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Seja $H_n$ um torneio hamiltoniano.

Sejam $v$ um vértice neutro de $H_n$ e $w_1, w_2$ dois vértices neutros de $H_n - v$, então os subtorneios $H_n - v, H_n - \{v, w_1\}$ e $H_n - \{v, w_2\}$ são hamiltonianos. Sabemos que estes vértices existem, pois já vimos que $2 \leq \nu(H_n) \leq n$, para um torneio hamiltoniano $H_n$. Suponha que os dois torneios hamiltonianos $H_n - \{v, w_1\}$ e $H_n - \{v, w_2\}$ são conados. Temos que:

- $w_1$ não pode conar $H_n - \{v, w_1\}$ , pois caso contrário $H_n - \{v, w_2\}$ é não hamiltoniano.
- $w_2$ não pode conar $H_n - \{v, w_2\}$, pois caso contrário $H_n - \{v, w_1\}$ é não hamiltoniano.

Daí ambos $H_n - \{v, w_1\}$ e $H_n - \{v, w_2\}$ são conados por $v$.
Então $v$ cona $H_n - v$.
Mas isso é uma contradição , pois $H_n$ é hamiltoniano.

Então , pelo menos 1 dos dois torneios $H_n - \{v, w_1\}$ e $H_n - \{v, w_2\}$ é não conado, isto é, em $H_n$ existe pelo menos 1 $(n-2)$-ciclo não conado (já que $o(H_n - \{v, w_i\}) = n - 2$, para $i = 1, 2$).

Portanto, existe um m-ciclo não conado C, onde $3 \leq m \leq n - 2$.

($\Leftarrow$) Se $T_n$ é não hamiltoniano, então pela proposição 2.1.2 seu quociente simples é $T_2$. Logo, cada ciclo de $T_n$ está em uma componente e, então , é conado. □

**Aplicação da proposição anterior** : $n = 5$

Considere o torneio $H_5$ do exemplo 1.2.5

($\Rightarrow$) $H_5$ é hamiltoniano $\Longrightarrow$ existe um m-ciclo não conado C, onde $3 \leq m \leq n-2 = 3$, isto é, existe um 3-ciclo:

$C : v_1v_3v_4v_1$

ou $C' : v_2v_3v_5v_2$

ou $C'' : v_2v_4v_5v_2$

O 3-ciclo C é não conado, pois $\forall v \in H_5 - \langle V(C)\rangle$ temos que $v \not\longmapsto \langle V(C)\rangle$ e $\langle V(C)\rangle \not\longmapsto v$.

De fato:

$v_5 \not\longmapsto \langle V(C)\rangle$ e $\langle V(C)\rangle \not\longmapsto v_5$.

$v_2 \not\longmapsto \langle V(C)\rangle$ e $\langle V(C)\rangle \not\longmapsto v_2$.

Analogamente verificamos que os 3-ciclos C' e C" são não conados.

($\Leftarrow$) existe um 3-ciclo não conado C (na verdade existe mais de 1 ciclo não conado) $\Longrightarrow$ $H_5$ é hamiltoniano.

**Observação 2.2.9** *Os torneios hamiltonianos $H_3$ e $H_4$ também contém m-ciclos não conados, mas agora a condição $m \leq n - 2$ não é satisfeita.*

**Exemplo 2.2.10** *1) $n = 3$*

*Considere o torneio $G = H_3$ do ítem (II) do exemplo 1.2.5.*

*$H_3$ é um torneio hamiltoniano, pois existe o ciclo passante $C : v_1v_2v_3v_1$.*

*Temos que $H_3$ contém 1 ciclo não conado, que é ele mesmo. Então $m = 3 > n-2 = 1$, não satisfazendo a condição $m \leq n - 2$.*

*2) $n = 4$*

*Considere o torneio $H_4$ do exemplo 2.2.3.*

*$H_4$ é um torneio hamiltoniano, pois existe o ciclo passante $C : v_1v_2v_3v_4v_1$.*

*Temos que $H_4$ contém 3-ciclos não conados, onde $m = 3 > n - 2 = 2$, também não satisfazendo a condição $m \leq n - 2$.*

*De fato:*

*$C_1 : v_2v_3v_4v_2$ é um 3-ciclo não conado*

*$C_2 : v_1v_3v_4v_1$ é um 3-ciclo não conado*

*$C_i$ é um 3-ciclo não conado, para $i = 1, 2$, pois $\forall v \in H_4 - \langle V(C_i)\rangle$ tem-se $v \not\mapsto \langle V(C_i)\rangle$ e $\langle V(C_i)\rangle \not\mapsto v$.*

Dado um ciclo não conado C de $H_n$ e um vértice $v \notin V(C)$ é possível estender C a um ciclo através de todos os vértices de $H_n - v$.

Então podemos dar as seguintes definições :

**Definição 2.2.11** *Se C é um ciclo não conado de $H_n$, o conjunto $P_C = V(H_n) - V(C)$ consiste de vértices neutros de $H_n$, que são chamados* **pólos** *de C.*

**Definição 2.2.12** *Um ciclo não conado C de $H_n$ é dito* **minimal** *se cada ciclo C', tal que $V(C') \subsetneq V(C)$, é conado por pelo menos 1 vértice de $H_n$.*

*Ou equivalentemente, um ciclo C de $H_n$ é minimal $\Longleftrightarrow$ o subtorneio hamiltoniano $\langle V(C)\rangle$ é não conado mas todos seus subtorneios hamiltonianos próprios são conados.*

*Um ciclo minimal é dito* **característico** *se ele possui o menor comprimento dos ciclos minimais, isto é, se ele é o ciclo minimal com o menor número de vértices em $H_n$.*

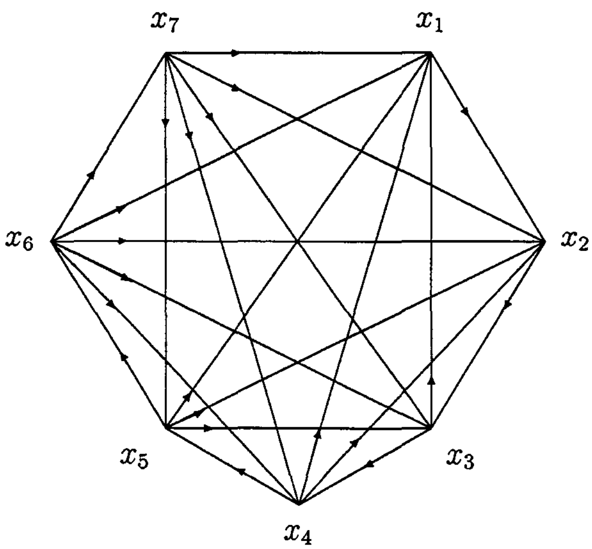
**Definição 2.2.13** *O comprimento de um ciclo característico em $H_n$ é chamado de* **característica cíclica de** *$H_n$ e é denotado por $cc(H_n)$.*

*O inteiro positivo $n - cc(H_n)$ é chamado de* **diferença cíclica de** *$H_n$ e é denotado por $cd(Hn)$.*

**Observação 2.2.14** *Se C é um ciclo característico em $H_n$, então $cd(H_n) = |P_C|$.*

## 2.3 Exemplos

1) O torneio bineutro $A_7$ de ordem 7:



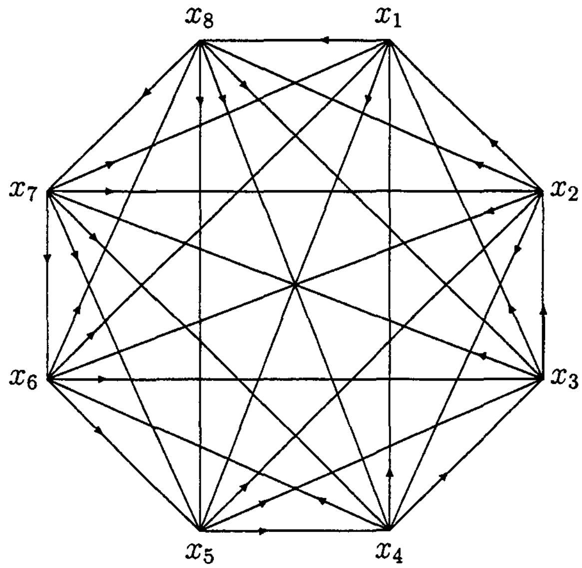

$A_7$ é bineutro, pois:
$V(A_7) = \{x_1, x_2, ..., x_7\}$ e $E(A_7) = \{(x_i, x_j)$, se $j \leq i-1$ ou $j = i+1\}$.
$x_1$ e $x_7$ são os únicos vértices neutros de $A_7$, já que $A_7 - x_1$ e $A_7 - x_7$ são hamiltonianos.
O ciclo $C : x_2x_3x_4x_5x_6x_2$ é característico, pois:

i) C é minimal
De fato:
• o subtorneio hamiltoniano $\langle V(C)\rangle$ é não conado, já que $\forall\ v \in V(A_7) - V(C) = \{x_1, x_7\}$ temos que $v \not\mapsto V(C)$ e $V(C) \not\mapsto v$, isto é:
$x_1 \not\mapsto V(C)$ e $V(C) \not\mapsto x_1$
$x_7 \not\mapsto V(C)$ e $V(C) \not\mapsto x_7$
• mas todos seus subtorneios hamiltonianos próprios são conados:
$H'; V(H') = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ é conado em $A_7$ por $x_1$
$H''; V(H'') = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ é conado em $A_7$ por $x_7$
$H'''; V(H''') = \{x_4, x_5, x_6\}$ é conado em $A_7$ por $x_1$
$H''''; V(H'''') = \{x_2, x_3, x_4\}$ é conado em $A_7$ por $x_7$
$\vdots$

ii) C é um ciclo minimal de comprimento mínimo
Basta verificar que qualquer ciclo de ordem menor que 5 não é minimal.

Daí:
$cc(A_7)$ = comprimento de um ciclo característico em $A_7 = o(C) = 5$
$cd(A_7) = 7 - cc(A_7) = 7 - 5 = 2$
E ainda, como C é um ciclo não conado de $A_7$, então $P_C = V(A_7) - V(C) = \{x_1, x_7\}$. Daí, $|P_C| = o(P_C) = 2$.
Logo: $cd(A_7) = |P_C|$

2) O torneio $H_8$ que contém o subtorneio $H_7$.




Observe que $x_1$, $x_7$ e $x_8$ são vértices neutros de $H_8$.
De fato:
- $H_8 - x_1$ é hamiltoniano, pois existe o ciclo: $x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_8$
- $H_8 - x_7$ é hamiltoniano, pois existe o ciclo: $x_6, x_8, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_6$
- $H_8 - x_8$ é hamiltoniano, pois existe o ciclo: $x_7, x_1, x_5, x_2, x_4, x_6, x_3, x_7$

Temos que $C : x_1, x_8, x_7, x_1$ é um ciclo característico de $H_8$, enquanto $C' : x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_2$ é um ciclo minimal.

E não existe ciclo característico $C$ tal que $x_1 \in P_C = V(H_n) - V(C)$.

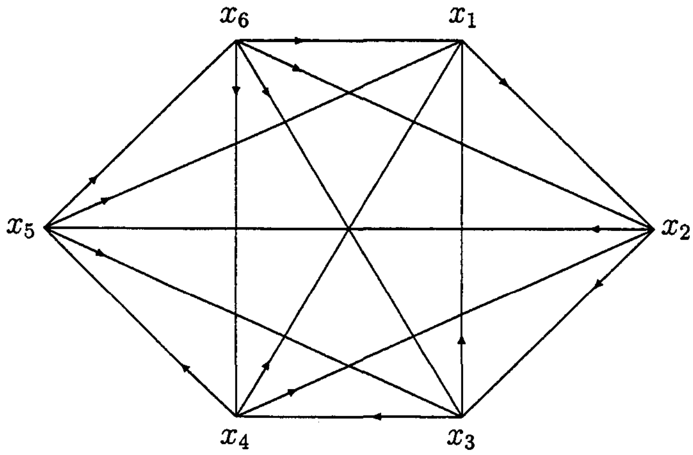
De fato, $C$ é um ciclo minimal com comprimento mínimo e $C'$ é um ciclo não conado tal que todo ciclo contido propriamente em $C'$ é conado por pelo menos 1 vértice de $H_8 - C'$.

Daí, $cc(H_8) = 3$ e $cd(H_8) = 8 - cc(H_8) = 5$.

E ainda, $P_C = V(H_8) - V(C) = \{x_1, ..., x_8\} - \{x_1, x_8, x_7\} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Então: $|P_C| = o(P_C) = 5$.

Logo: $cd(H_8) = |P_C|$.

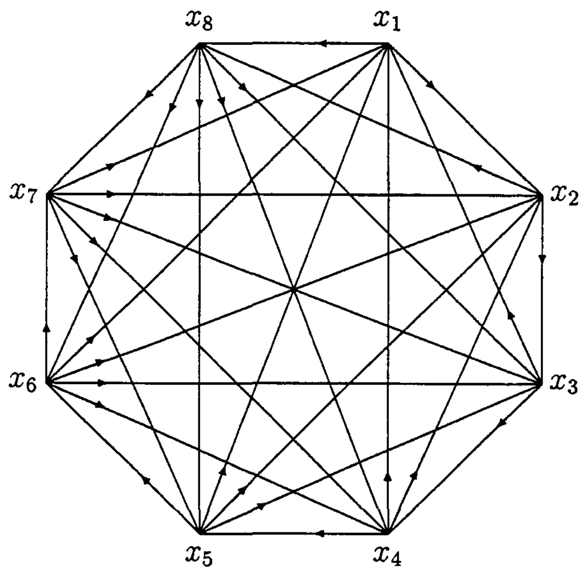
3)Um torneio $H'_6$ com 4 ciclos característicos.




Temos que $\nu(H'_6) = 4$, pois $x_1, x_3, x_4$ e $x_6$ são vértices neutros de $H'_6$.

E ainda, $C_1 : x_1, x_2, x_5, x_3, x_1$, $C_2 : x_1, x_2, x_5, x_6, x_1$, $C_3 : x_2, x_5, x_3, x_4, x_2$ e $C_4 : x_2, x_5, x_6, x_4, x_2$ são os quatro ciclos característicos de $H'_6$, isto é, são ciclos minimais com comprimento mínimo em $H'_6$. Logo, $cc(H'_6) = 4$ e $cd(H'_6) = 6 - cc(H'_6) = 2$.

4)O torneio $H_8$ com $cd(H_8) = 3$, cujos subtorneios $H_7$ tem todos as mesmas diferenças cíclicas $cd(H_7) = 3$.




O ciclo $C$ dado por $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_4$ é um ciclo característico de $H_8$, já que ele é minimal e de comprimento mínimo. Daí, $cc(H_8) = 5$ e $cd(H_8) = 8 - cc(H_8) = 3$.

## 2.4 As partições dos torneios hamiltonianos

**Proposição 2.4.1** *Um vértice $v$ de $H_n$ é neutro $\Longleftrightarrow$ em $H_n$ existe um ciclo minimal $C$ tal que $v \in P_C$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Se $v$ é um vértice neutro de $H_n \Longrightarrow H_n - v$ é hamiltoniano (e não conado, pois como $H_n$ é hamiltoniano, então $v \not\mapsto H_n - v$ e $H_n - v \not\mapsto v$) $\Longrightarrow$ existe um m-ciclo não conado C' em $H_n - v$ tal que $3 \leq m \leq n - 3$(pela proposição 2.2.8) $\Longrightarrow$ existe um ciclo minimal C contido em $H_n - v$ e $v \in P_C = V(H_n) - V(C)$ (se C' é o único ciclo não conado em $H_n - v$, então C=C') $\Longrightarrow$ existe um ciclo minimal C em $H_n$ e $v \in P_C$.

($\Leftarrow$) Se $v \in P_C = V(H_n) - V(C) \Longrightarrow v$ é um vértice neutro de $H_n$ (pela definição de pólo). □

**Observação 2.4.2** *Se $v$ é um vértice neutro de $H_n$, em geral não existe ciclo característico $C$ tal que $v \in P_C$ (veja exemplo 2 da seção 2.3).*

**Corolário 2.4.3** *O conjunto dos vértices neutros de $H_n$ é a união dos conjuntos dos pólos dos ciclos minimais de $H_n$. Logo, segue que $cd(H_n) \leq \nu(H_n)$ (ou então: $n - cc(H_n) \leq \nu(H_n)$).*

**Demonstração:**

Seja $\eta$ =conjunto dos vértices neutros de $H_n$.
Então $\eta = \cup P_{C_i}$; $C_i$ é ciclo minimal de $H_n$ (pela proposição 2.4.1).
Daí $\eta = \cup(V(H_n) - V(C_i)); C_i$ é ciclo minimal de $H_n$
Logo:
$cd(H_n) \leq \nu(H_n)$, pois $cd(H_n) = n - cc(H_n) = |V(H_n) - V(C)|; C$ é ciclo característico de $H_n$ e $V(H_n) - V(C) \subseteq \eta$ . □

**Proposição 2.4.4** *$cd(H_n) = \nu(H_n) \Longleftrightarrow$ em $H_n$ existe somente 1 ciclo minimal (o ciclo característico)*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Suponha que em $H_n$ existe exatamente $m(m > 1)$ ciclos minimais. Então pelo menos 1, digamos C, é característico (basta tomar o ciclo minimal C de menor comprimento).

Além disso, se C' é um ciclo minimal diferente de C, existe um vértice neutro $v \in P_{C'} = V(H_n) - V(C')$ que não é um elemento de $P_C = V(H_n) - V(C)$, isto é, $|P_C| < \nu(H_n) \Longrightarrow cd(H_n) < \nu(H_n)$.

Portanto: se existe exatamente $m(m > 1)$ ciclos minimais em $H_n \Longrightarrow cd(H_n) < \nu(H_n)$

Ou melhor: se $cd(H_n) = \nu(H_n) \Longrightarrow$ existe somente 1 ciclo minimal em $H_n$.

($\Leftarrow$) Suponha que $cd(H_n) \neq \nu(H_n)$, isto é, $cd(H_n) < \nu(H_n)$ (pois $cd(H_n) \leq \nu(H_n)$ pelo corolário 2.4.3).

Se C é um ciclo característico e $cd(H_n) < \nu(H_n) \Longrightarrow$ existe um vértice neutro $v$ tal que $v \notin P_C = V(H_n) - V(C)$.

Então um novo ciclo minimal C' diferente de C pode ser achado pela proposição 2.4.1 ( pois como $v$ é um vértice neutro de $H_n \Longrightarrow$ existe um ciclo minimal C' em $H_n$ tal que $v \in P_{C'}$).

Logo, existe mais de 1 ciclo minimal em $H_n$.

Portanto: se $cd(H_n) \neq \nu(H_n) \Longrightarrow$ existe mais de 1 ciclo minimal em $H_n$.

Ou seja: se existe somente 1 ciclo minimal em $H_n \Longrightarrow cd(H_n) = \nu(H_n)$. □

**Proposição 2.4.5** *Se $H_n$ é a composição $H_n = H'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(m)})$ de $m$ torneios $S^{(i)}$ com o torneio quociente $H'_m$, então $cc(H_n) = cc(H'_m)$.*

**Demonstração:**

*i)* $\vdash cc(H_n) \leq cc(H'_m)$

Se $C$ é um r-ciclo não conado em $H_n$, os r vértices de $C$ são elementos de r componentes diferentes, isto é, $p(C)$ é um r-ciclo não conado em $H'_m$, onde $p : V(H_n) \longrightarrow V(H'_m)$ é a projeção canônica.

*ii)* $\vdash cc(H'_m) \leq cc(H_n)$

Reciprocamente, seja $H''_m$ um subtorneio de $H_n$ isomorfo a $H'_m$ (sabemos que existe $H''_m$ pela proposição 1.3.4).

A imagem em $H''_m$ de um m-ciclo não conado de $H'_m$ é um m-ciclo não conado de $H_n$. □

**Proposição 2.4.6** *Seja $H_n = H'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(m)})$, então $v$ é um vértice neutro de $H_n \Longleftrightarrow v$ está numa componente não singular ou $p(v)$ é um vértice neutro de $H'_m$, onde $p : V(H_n) \longrightarrow V(H'_m)$ é a projeção canônica.*

**Proposição 2.4.7** *Seja $H_m$ um subtorneio hamiltoniano de $H_n$.*

*Então : $cd(H_m) \leq cd(H_n)$.*

*Em particular, para todo $H_{n-1} \subseteq H_n$ temos que $cd(H_n) - 1 \leq cd(H_{n-1})$.*

**Demonstração:**

Devemos provar similarmente que $cc(H_m) \geq cc(H_n) - n + m$, já que:
$cd(H_m) \leq cd(H_n) \iff m - cc(H_m) \leq n - cc(H_n) \iff cc(H_n) - n + m \leq cc(H_m)$

(i)Primeiramente, podemos ver que a última desigualdade é verdadeira para $m = n-1$, isto é, $cc(H_{n-1}) \geq cc(H_n) - 1$.

**De fato**:
Seja $cc(H_{n-1}) = h$ e considere um ciclo característico $C_h$ em $H_{n-1} = H_n - v$.
• Se $v$ não cona $C_h \Longrightarrow C_h$ é um ciclo não conado em $H_n$, pois como $C_h$ é um ciclo característico em $H_{n-1} = H_n - v$, então $C_h$ é um ciclo minimal de comprimento mínimo de $H_{n-1}$ e como $v$ não cona $C_h$ e $H_{n-1} \cup \{v\} = H_n$, então $C_h$ é um ciclo não conado em $H_n$.
Segue daí que $cc(H_{n-1}) \geq cc(H_n)$, pois sendo $C_h$ um ciclo não conado em $H_n$, ainda pode existir um ciclo não conado menor que o $C_h$.
Portanto:

$$cc(H_{n-1}) > cc(H_n) - 1$$

• Se $v$ cona $C_h$, $\exists\ w \in V(H_{n-1}) - V(C_h)$ tal que $v$ não cona $\langle V(C_h)\rangle \cup \{w\}$, já que $H_n$ é hamiltoniano, pois se $\forall\ w \in V(H_{n-1}) - V(C_h)$ tivermos que $v$ cona $\langle V(C_h)\rangle \cup \{w\}$, então $H_n$ não seria hamiltoniano.
Como $w$ não cona $C_h$ (pois $C_h$ é não conado em $H_{n-1}$), podemos construir um ciclo $C_{h+1}$, cujo conjunto de vértices é $V(C_h) \cup \{w\}$, que é não conado em $H_n$.
Então :

$$cc(H_{n-1}) \geq cc(H_n) - 1$$

pois como $C_{h+1}$ é um ciclo não conado em $H_n$ ; $o(C_{h+1}) = h + 1$ e $cc(H_n)$ = comprimento de um ciclo característico de $H_n$, então $cc(H_n) \leq h + 1 = cc(H_{n-1}) + 1$, e daí:

$$cc(H_{n-1}) \geq cc(H_n) - 1$$

.

(ii)Agora, consideremos o caso geral com $3 \leq m \leq n - 1$

Consideremos duas possibilidades diferentes:

1ª) Existe uma cadeia de subtorneios hamiltonianos $H_{m+1}, H_{m+2}, ..., H_{n-1}$ tal que $V(H_m) \subset V(H_{m+1}) \subset ... \subset V(H_{n-1}) \subset V(H_n)$.

Então , passo por passo, de (i) obtemos que $cc(H_m) \geq cc(H_n) - n + m$, pois por (i) temos:

$cc(H_{n-1}) \geq cc(H_n) - 1$

$cc(H_{n-2}) \geq cc(H_{n-1}) - 1 \geq cc(H_n) - 2$
$cc(H_{n-3}) \geq cc(H_{n-2}) - 1 \geq cc(H_n) - 3$
$\vdots$
$cc(H_m) \geq cc(H_{m-1}) - 1 \geq cc(H_n) - (n-m) = cc(H_n) - n + m$

Portanto:

$$cc(H_m) \geq cc(H_n) - n + m$$

2ª) Existe um torneio hamiltoniano $H_s$ ($m \leq s < n$), tal que entre $H_m$ e $H_s$ existe uma cadeia de torneios hamiltonianos como na 1ª possibilidade, uma vez que, para cada torneio $T_{s+1}$ tal que $V(H_s) \subset V(T_{s+1})$, $T_{s+1}$ não é hamiltoniano, isto é, $H_s$ é conado por todos os vértices de $V(H_n) - V(H_s) = \{v_1, v_2, ..., v_{n-s}\}$.

Então $H_n$ é a composição $H_n = H_{n-s+1}(\{v_1\}, \{v_2\}, ..., \{v_{n-s}\}, H_s)$ e daí segue que $cc(H_n) = cc(H_{n-s+1}) < n - s$ (pelas proposições 2.4.5 e 2.4.6).

Então obtemos $cc(H_n) - n + m < cc(H_s) - s + m \leq cc(H_m)$

Portanto:

$$cc(H_m) \geq cc(H_n) - n + m$$

□

**Observação 2.4.8** *Poderíamos ter definido uma característica cíclica como um ciclo minimal com comprimento máximo. Mas neste caso somente uma propriedade similar à proposição 2.4.5 valeria, ao passo que uma propriedade similar à proposição 2.4.7 falharia.*

**De fato:**

No exemplo 2 da seção 2.3 temos que:

• em $H_8$ o 5-ciclo $x_2x_3...x_6x_2$ é minimal com comprimento máximo $k = 5 \Longrightarrow cd(H_8) = 8 - cc(H_8) = 8 - k = 8 - 5 = 3$
Logo: $cd(H_8) = 3$

ao passo que:

• em $H_8 - x_4$ cada 3-ciclo minimal tem comprimento máximo $k_1 = 3 \Longrightarrow cd(H_8 - x_4) = 7 - cc(H_8 - x_4) = 7 - k_1 = 7 - 3 = 4$
Logo: $cd(H_8 - x_4) = 4$

• em $H_8 - x_1$ o 4-ciclo $x_2x_3x_4x_5x_2$ é minimal com comprimento máximo $k_2 = 4$ $\Longrightarrow cd(H_8 - x_1) = 7 - cc(H_8 - x_1) = 7 - k_2 = 7 - 4 = 3$
Logo: $cd(H_8 - x_1) = 3$

• em $H_8 - x_8$ o 5-ciclo $x_2x_3...x_6x_2$ é minimal com comprimento máximo $k_3 = 5$ $\Longrightarrow cd(H_8 - x_8) = 7 - cc(H_8 - x_8) = 7 - k_3 = 7 - 5 = 2$
Logo: $cd(H_8 - x_8) = 2$

Portanto: $cd(H_8 - x_4) = 4 > cd(H_8) = 3$, isto é, não satisfaz a proposição 2.4.7, já que $H_8 - x_4$ é subtorneio de $H_8$.

**Corolário 2.4.9** *Se $C$ é um ciclo característico de $H_n$ e $v \in P_C$ é um pólo de $C \Longrightarrow cd(H_n) \geq cd(H_n - v) \geq cd(H_n) - 1$.*

**Demonstração:**

i) Como $v \in P_C = V(H_n) - V(C)$, C é também um ciclo não conado de $H_n - v$, pois como $v \in P_C \Longrightarrow v$ é um vértice neutro de $H_n \Longrightarrow H_n - v$ é hamiltoniano $\Longrightarrow$ $\forall\ v' \in V(H_n - v) - V(C)$ tem-se $v' \not\longrightarrow H_n - v$ e $H_n - v \not\longrightarrow v'$.

Como $C$ é um ciclo característico de $H_n \Longrightarrow cc(H_n) = o(C)$ e sendo C um ciclo não conado de $H_n - v \Longrightarrow$ pode existir um ciclo não conado $C'$ em $H_n - v$ tal que $o(C') < o(C)$.

Daí: $cc(H_n - v) \leq cc(H_n)$

Então :

como $cc(H_n - v) \leq cc(H_n) \Longrightarrow n - 1 - cc(H_n) \leq n - 1 - cc(H_n - v) \Longrightarrow$ $n - 1 - cc(H_n) \leq cd(H_n - v) \Longrightarrow cd(H_n) - 1 \leq cd(H_n - v)$

Logo:

$$(I) \qquad cd(H_n) - 1 \leq cd(H_n - v)$$

ii) Temos também que:

sendo $H_n - v$ um subtorneio hamiltoniano de $H_n$, pois $v$ é um vértice neutro de $H_n$, já que $v \in P_C$, então pela proposição 2.4.7 obtemos:

$$(II) \qquad cd(H_n - v) \leq cd(H_n)$$

Portanto, de (I) e (II) temos que:

$$cd(H_n) \geq cd(H_n - v) \geq cd(H_n) - 1$$

□

**Observação 2.4.10** *Depois, veremos quando valerá a igualdade: $cd(H_n) = cd(H_n - v)$.*

**Proposição 2.4.11** *Seja $H'_m$ um subtorneio hamiltoniano de $H_n$, então:* $\nu(H'_m) \leq \nu(H_n)$.

**Demonstração:**

i)Primeiramente provaremos a desigualdade para m=n-1, isto é,
$\vdash \nu(H'_m) \leq \nu(H_n)$

Suponha que $u$ é um vértice neutro de $H_{n-1} = H_n - v$ e $u$ não é um vértice neutro de $H_n$. Então $H_{n-1} - \{u\} = H_n - \{u,v\}$ é hamiltoniano e $H_n - u$ não é hamiltoniano. Logo, o quociente simples de $H_n - u$ é $T_2$ (pela proposição 2.1.2), ou seja:

$H_n - u = T_2(S^{(1)}, S^{(2)})$, tal que $T_2 = \{w_1, w_2\}$ e $V(H_n - u) = V(S^{(1)} \cup S^{(2)})$,onde $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ são as componentes disjuntas de $H_n - u$ e $w_1 \longrightarrow w_2 \Longleftrightarrow S^{(1)} \longrightarrow S^{(2)}$.

Temos que uma das componentes é necessariamente $\{v\}$, digamos $S^{(1)} = \{v\}$, pois $S^{(1)} = \{v\} \longrightarrow S^{(2)} = H_n - \{u,v\}$ ou $S^{(2)} = H_n - \{u,v\} \longrightarrow S^{(1)} = \{v\}$ (conforme $w_1 \longrightarrow w_2$ ou $w_2 \longrightarrow w_1$), caso contrário também $H_n - \{u,v\}$ é não hamiltoniano, pois se $S^{(1)} = \{v, v_1\}$ e como $S^{(1)} \longrightarrow S^{(2)}$ ou $S^{(2)} \longrightarrow S^{(1)}$ e $v_1 \in H_n - \{u,v\} \Longrightarrow H_n - \{u,v\}$ não seria hamiltoniano. Absurdo!

Daí:
$u \longrightarrow v \longrightarrow H_n - \{u,v\}$ ou $H_n - \{u,v\} \longrightarrow v \longrightarrow u$

Agora, se $u'$ é um vértice neutro de $H_{n-1} = H_n - \{v\}$ tal que $u' \neq u$, como $v$ não pode conar $H_n - \{u',v\}$ (pelo mesmo raciocínio acima, trocando $u'$ por $u$), isto é, $v \not\longrightarrow H_n - \{u',v\}$ e $H_n - \{u',v\} \not\longrightarrow v \Longrightarrow u'$ é também um vértice neutro de $H_n$, ou seja, $H_n - \{u'\}$ é hamiltoniano.

Então existe no máximo 1 vértice neutro de $H_{n-1}$ que não é um vértice neutro de $H_n$.

Como $v$ é um vértice neutro de $H_n$, já que $H_{n-1} = H_n - \{v\}$ é hamiltoniano, e não é de $H_{n-1}$, segue que $\nu(H_{n-1}) \leq \nu(H_n)$, pois pode existir outros vértices neutros de $H_n$ que não são de $H_{n-1} = H_n - \{v\}$.

ii)No caso geral, se existe uma cadeia de subtorneios hamiltonianos $H'_{m+1}, ..., H'_{n-1}$ tal que $V(H'_m) \subset V(H'_{m+1}) \subset ... \subset V(H'_{n-1}) \subset V(H_n)$, então $\nu(H'_m) \leq \nu(H'_{m+1}) \leq ... \leq \nu(H_n)$.

Caso contrário, existe $H'_s$ como na 2ª possibilidade da proposição 2.4.7.

Então $\nu(H'_m) \leq \nu(H'_s)$ e também $\nu(H'_s) \leq \nu(H_n)$ pela proposição 2.4.6, já que $H'_s$ é uma componente de $H_n$, ou seja:

$H_n = H'_{n-s+1}(\{v_1\}, \{v_2\}, ..., \{v_{n-s}\}, H'_s)$

(de fato, pela proposição 2.4.6 temos: $v$ é um vértice neutro de $H_n \Longleftrightarrow v$ está numa componente não singular de $H_n \Longleftrightarrow v \in H'_s$, pois as outras componentes são todas singulares). □

**Proposição 2.4.12** *Para cada $n \geq 5$, o torneio bineutro $A_n$ tem sua diferença cíclica igual a 2 e ele contém o único ciclo minimal $x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_2$.*

**Demonstração:**

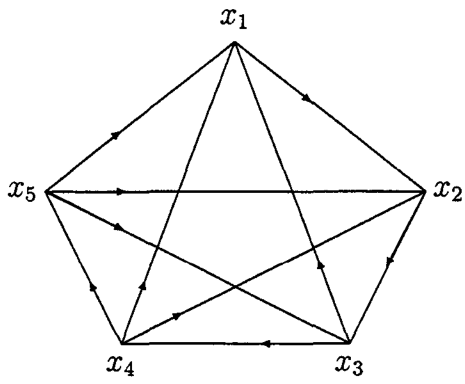
Faremos por indução sobre n.

i) Para $n = 5$: $x_2, x_3, x_4, x_2$ é o único ciclo minimal de $A_5$ e $cd(A_5) = 2$, já que $cd(A_5) = 5 - cc(A_5) = 5 - 3 = 2$.
(veja no próximo exemplo, o torneio bineutro $A_5$)

ii) Hipótese de Indução: Suponha que $cd(A_{n-1}) = 2$ e que $A_{n-1}$ contém somente o ciclo minimal $x_2, x_3, ..., x_{n-2}, x_2$.

iii) Mostremos que vale para n.
Considere $A_n$ obtido de $A_{n-1}$ acrescentando o vértice $x_n$ sucessor de $x_{n-1}$ e predecessor de todos os outros vértices de $A_{n-1}$, pois daí $A_n$ é ainda um torneio bineutro, isto é:
$E(A_n) = \{(x_{n-1}, x_n), (x_n, x_{n-2}), (x_n, x_{n-3}), ..., (x_n, x_1), ...\}$
Em $A_n$ todos os $(n-3)-$ciclos são conados:
de fato, o ciclo $x_2, x_3, ..., x_{n-2}, x_2$ é não conado em $A_{n-1}$, pois pela hipótese de indução temos que esse ciclo é minimal em $A_{n-1}$, e é conado por $x_n$ em $A_n$, já que $E(A_n) = \{(x_{n-1}, x_n), (x_n, x_{n-2}), (x_n, x_{n-3}), ..., (x_n, x_1), ...\}$.
E o único $(n-3)-$ciclo incluindo $x_n$ é $x_4, x_5, ..., x_n, x_4$, que é conado por $x_1$ em $A_n$, pois como $A_n$ é bineutro, temos que $(x_4, x_1), (x_5, x_1), ..., (x_{n-1}, x_1), (x_n, x_1) \in E(A_n)$.
Além disso, o $(n-2)-$ciclo $C_1 : x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_2$ é o único $(n-2)-$ciclo não conado de $A_n$, já que $\forall\ v \in V(A_n) - V(C_1) = \{x_1, x_n\}$ temos que $v \not\longmapsto C_1$ e $C_1 \not\longmapsto v$, pois como $(x_{n-1}, x_n)$, $(x_n, x_{n-2}) \in E(A_n) \Longrightarrow x_n \not\longmapsto C_1$ e $C_1 \not\longmapsto x_n$, e como $(x_3, x_1), (x_1, x_2) \in E(A_n) \Longrightarrow x_1 \not\longmapsto C_1$ e $C_1 \not\longmapsto x_1$.
E esse $(n-2)-$ciclo é minimal, pois cada ciclo $C_2$ contido propriamente em $C_1$ é conado por $x_n$ em $A_n$.
Logo: $cd(A_n) = n - cc(A_n) = n - (n-2) = n - n + 2 = 2$ □

**Exemplo 2.4.13** *Torneio bineutro $A_5$*




*Queremos verificar que o único ciclo minimal do torneio bineutro $A_5$ é $C : x_2x_3x_4x_2$.*

*i)3-ciclos:*

$C_1 : x_1x_2x_3x_1$ *é conado por* $x_5 \Longrightarrow C_1$ *não é minimal.*

$C_2 : x_2x_3x_4x_2$ *é não conado em $A_5$ e todo ciclo $C'$ contido propriamente em $C_2$ é conado por pelo menos 1 vértice, já que $C_2$ é um 3-ciclo, isto é, não existe ciclos propriamente contido em $C_2$. Logo: $C_2$ é minimal.*

$C_3 : x_3x_4x_5x_3$ *é conado por* $x_1 \Longrightarrow C_3$ *não é minimal.*

*As outras possibilidades não formam 3-ciclos.*

*ii)4-ciclos:*

$C_4 : x_1x_2x_3x_4x_1$ *é não conado em $A_5$, mas existe ciclo $C' : x_1x_2x_3x_1$ contido propriamente em $C_4$ e não conado em $A_5$.*

*Logo: $C_4$ não é minimal.*

$C_5 : x_2x_3x_4x_5x_2$ *é não conado em $A_5$, mas existe ciclo $C' : x_3x_4x_5x_3$ contido propriamente em $C_5$ e não conado em $A_5$.*

*Logo: $C_5$ não é minimal.*

*As outras possibilidades não formam 4-ciclos.*

**Teorema 2.4.14** *(***Teorema da Classificação***)*

*i)Seja $H_n (n \geq 5)$ um torneio hamiltoniano de ordem n, então:*

$$2 \leq cd(H_n) \leq n - 3 \quad (ou \;\; 3 \leq cc(H_n) \leq n - 2)$$

*ii)Reciprocamente, para cada $n \geq 5$ e para cada $h$ tal que $2 \leq h \leq n - 3$, existem torneios hamiltonianos $H_n$ com $cd(H_n) = h$.*

**Demonstração:**

i)Seja $H_n$ $(n \geq 5)$ um torneio hamiltoniano de ordem n. Então pela proposição 2.2.8, existe um m-ciclo não conado $C$ tal que $3 \leq m \leq n-2$. Daí, como $cc(H_n)$ =comprimento de um ciclo característico de $H_n$, temos que:

$3 \leq cc(H_n) \leq n-2 \Longrightarrow n-3 \geq n - cc(H_n) \geq n-(n-2)$.

Logo: $2 \leq cd(H_n) \leq n-3$

ii)• para cada $n \geq 5$ e $h = 2$, o torneio bineutro $A_n$ satisfaz a condição $cd(A_n) = 2$, pela proposição 2.4.12.

Portanto, existe torneio hamiltoniano $A_n$ (que é bineutro) com $cd(A_n) = h = 2$.

• Provemos agora para $2 < h \leq n-3$

Seja $V(A_{n-h+2}) = \{x_1, x_2, ..., x_{n-h+2}\}$, onde $A_{n-h+2}$ é o torneio bineutro de ordem $n-h+2$ e $H_n = A_{n-h+2}(T_{h-1}, \{x_2\}, ..., \{x_{n-h+2}\})$ a composição obtida de $A_{n-h+2}$ trocando o unitário $\{x_1\}$ com qualquer torneio $T_{h-1}$.

Daí: $cd(A_{n-h+2}) = 2$, pois $A_{n-h+2}$ é bineutro e $n-h+2 \geq 5$, já que $2 \leq h \leq n-3$ e $n \geq 5$.

Então $cc(A_{n-h+2}) = n-h+2-cd(A_{n-h+2}) = n-h+2-2 = n-h$.

E como $cc(H_n) = cc(A_{n-h+2})$ pela proposição 2.4.5, então $cc(H_n) = n-h$.

Logo: $cd(H_n) = h$, já que $cc(H_n) = n - cd(H_n) = n-h$

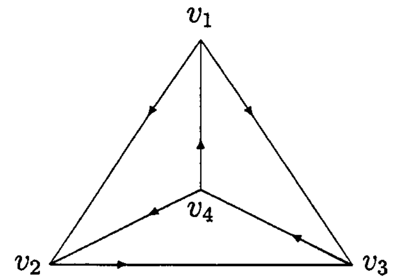
Portanto, existe torneio hamiltoniano $H_n$ com $cd(H_n) = h$. □

**Observação 2.4.15** *O Teorema da Classificação não vale para $n = 3$ e $n = 4$.*

**De fato:**

*i)Para $n = 4$ temos que $cd(H_4) = 1$ e $cc(H_4) = 3$*

*Exemplo:*




*$H_4$ é um torneio hamiltoniano, pois existe o ciclo passante: $C : v_1v_2v_3v_4v_1$. E é fácil ver que $H_4 \simeq A_4$, onde o isomorfismo é dado por $f : V(A_4) \longrightarrow V(H_4)$ tal que $f(a_1) = v_2$, $f(a_2) = v_3$, $f(a_3) = v_4$ e $f(a_4) = v_1$.*

*Temos que $H_4$ contém os 3-ciclos não conados:*

$C_1 : v_2v_3v_4v_2$

$C_2 : v_1v_3v_4v_1$

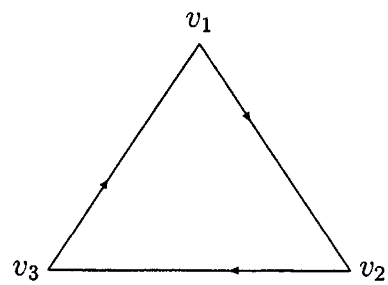
*Temos ainda que $C_1$ e $C_2$ são ciclos característicos, pois eles são ciclos minimais de comprimento mínimo, já que não existe 2-ciclo.*

*Portanto:* $cc(H_4) = 3$

*Logo:* $cd(H_4) = 4 - cc(H_4) = 4 - 3 = 1$

*ii)Para* $n = 3$ *temos que* $cd(H_3) = 0$ *e* $cc(H_3) = 3$

*Exemplo:*




*$H_3$ é um torneio hamiltoniano, pois existe o ciclo passante: $C : v_1v_2v_3v_1$*

*Temos que $C$ é um ciclo minimal de comprimento mínimo, já que não existe 2-ciclo.*

*Portanto:* $cc(H_3) = 3$

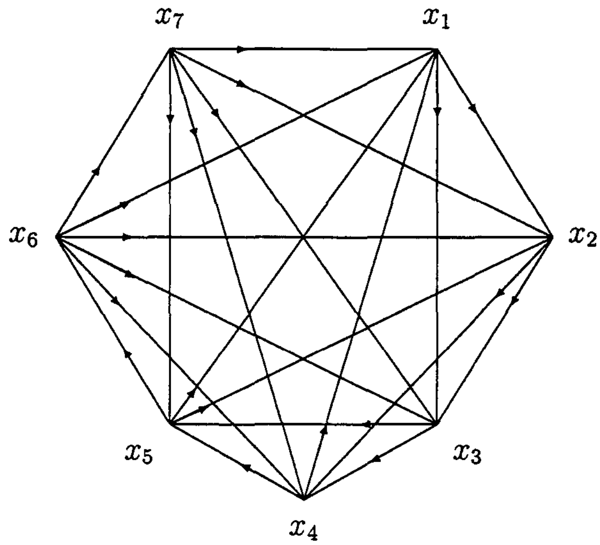
*Logo:* $cd(H_3) = 3 - cc(H_3) = 3 - 3 = 0$

**Observação 2.4.16** *Um torneio simples $H_n$ com $n > 5$ e $cd(H_n) = h$ pode ser obtido de um torneio bineutro $A_n$ pela inverção do arco $(x_i, x_{i+h-1})$ para cada $i \geq 3$ e $h \geq 3$ tal que $i + h \leq n - 1$.*

*Então, para cada $h$ admissível, existe também torneios simples $H_n$ com $cd(H_n) = h \geq 3$.*

*Além disso, é fácil construir torneios simples $H_n$ com $cd(H_n) = 3$.*

**Exemplo 2.4.17** *Aplicação da observação anterior para $n = 7$ e $h = 3$.*




*Seja $H_7$ o torneio simples com $cd(H_7) = 3$ obtido do torneio bineutro $A_7$ pela inverção do arco $(x_i, x_{i+2})$ para cada $i \geq 3$ e $h \geq 3$ tal que $i + 3 \leq 6$.*

*Como $i \geq 3$ e $i + 3 \leq 6 \Longrightarrow i = 1$ ou $i = 2$ ou $i = 3$ (pois se $i \geq 4$ então $i + 3 \geq 4 + 3 = 7 > 6$).*

*Portanto: $H_7$ possui $(x_1, x_3)$ no lugar de $(x_3, x_1)$, $(x_2, x_4)$ no lugar de $(x_4, x_2)$ e $(x_3, x_5)$ no lugar de $(x_5, x_3)$.*

*Logo, pela observação anterior $H_7$ é um torneio simples com $cd(H_7) = 3$, pois obtemos $H_7$ a partir da inverção do arco $(x_3, x_5)$ do torneio bineutro $A_7$.*

**Observação 2.4.18** *Os torneios simples desconexos tem característica cíclica igual a 3 (veja [4]).*

**Corolário 2.4.19** *A coleção $\mathcal{H}_{n,h} = \{H_n$ :torneios com $cd(H_n) = h\}$, para cada $n \geq 5$ e para cada $h$ tal que $2 \leq h \leq n - 3$, é a partição do conjunto dos torneios hamiltonianos de ordem $n \geq 5$.*

**Observação 2.4.20** *Se acrescentamos as classes $\mathcal{H}_{3,0} = \{H_3 : 3 - ciclo\}$ e $\mathcal{H}_{4,1} = \{H_4$ :o torneio hamiltoniano de ordem $4\}$, obtemos uma partição de todos torneios hamiltonianos.*

## 2.5 Torneios cuja diferença cíclica é igual a 2

**Proposição 2.5.1** *Cada $H_n$ $(n \geq 6)$ com $cd(H_n) = 2$ é simples.*

**Demonstração:**

Suponha que $H_n$ não é simples e considere a composição $H_n = H_m(S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(m)})$, onde $H_m$ é o quociente simples relatado por $H_n$. Agora, seja $C$ um $(m-2)$−ciclo não conado de $H_m$, que existe pela proposição 2.2.8, já que $H_m$ é hamiltoniano com $m \geq 5$.

Como $H_m$ pode ser identificado com um subtorneio de $H_n$, pela proposição 1.3.4, $C$ também pode ser considerado como um ciclo não conado de $H_n$, o que produz a contradição $cd(H_n) > 2$, pois como $cc(H_n) = m - 2$ então:

$cd(H_n) = n - (m - 2) = n - m + 2 > 2$, sendo $m < n$ e $n \geq 6$. □

Agora é possível obter a caracterização estrutural dos torneios $H_n$ com $cd(H_n) = 2$.

**De fato:**

• para $n = 5$:

para cada $H_5$ segue que $cd(H_5) = 2$, pois como $H_5$ é hamiltoniano $\Longrightarrow$ existe um m-ciclo não conado $C$, onde $3 \leq m \leq n - 2 = 5 - 2 = 3$, ou seja, existe um 3-ciclo não conado $C$.

Logo: $cc(H_5) = 3$, já que não existe 1-ciclo ou 2-ciclo.

Daí: $cd(H_5) = 5 - cc(H_5) = 5 - 3 = 2$.

• para $n = 6$:

é fácil checar que existe somente dois torneios $H_6$ com $cd(H_6) = 2$

i) o torneio bineutro $A_6$, onde $cd(A_6) = 2$ (pela proposição 2.4.12).

ii) o torneio $H'_6$ obtido de $A_6$ pela inverção do arco $(x_2, x_5)$ (veja o exemplo 3 da seção 2.3 e o exemplo 2.5.3).

No exemplo 3 da seção 2.3, já vimos que $cd(H'_6) = 2$.

Além disso, no caso geral, temos:

**Proposição 2.5.2** *Para $n \geq 7$, os torneios bineutros $A_n$ são os únicos torneios com diferença cíclica igual a 2.*

**Demonstração:**

Faremos por indução sobre n.

i) Para $n = 7$, o torneio bineutro $A_7$ é o único torneio com diferença cíclica igual a 2. De fato:

para $n = 7$, como $A_6$ e $H'_6$ são os únicos subtorneios de ordem 6 com diferença cíclica igual a 2, $H_7$ com $cd(H_7) = 2$ pode somente ser obtido acrescentando um vértice $v$ no ciclo característico $C$ de $A_6$ ou $H'_6$, pois pela proposição 2.4.7 temos:

$$2 = cd(A_6) = 6 - cc(A_6) = 6 - 4 \leq cd(H_7) = 7 - cc(H_7) = 7 - 5 = 2$$
$$2 = cd(H'_6) = 6 - cc(H'_6) = 6 - 4 \leq cd(H_7) = 7 - cc(H_7) = 7 - 5 = 2$$

i-1) se consideramos $A_6$:

$v$ tem que conar o ciclo característico de $A_6$, pois temos que acrescentar $v$ no seu ciclo característico, digamos $C$, daí $C' = C \cup \{v\}$ tem que ser um ciclo característico de $H_7$, isto é, minimal e de comprimento mínimo em $H_7$, logo todo subtorneio hamiltoniano próprio de $C'$ tem que ser conado em $H_7$ e como $C$ é um subtorneio hamiltoniano próprio de $C'$ e é não conado em $A_6$, então $v$ tem que conar o ciclo característico $C$ de $A_6$. Daí, obtemos 8 possibilidades distintas com relação às posições de $v$, mas é fácil de checar que só para $H_7 = A_7$, a condição $cd(H_7) = 2$ é satisfeita, já que nos outros casos ou $H_7$ contém um subtorneio hamiltoniano com diferença cíclica igual a 3 ou ele não é hamiltoniano (veja exemplo 2.5.4).

i-2) se consideramos $H'_6$:

como $v$ deve conar os 4 ciclos característicos de $H'_6$, $v$ deve necessariamente conar $H'_6$. Então, começando de $H'_6$, um torneio $H_7$ com $cd(H_7) = 2$ não pode ser construído, pois daí $H_7$ não seria hamiltoniano, já que $v$ deve conar $H'_6$.

Portanto, para $n = 7$ o torneio bineutro $A_7$ é o único torneio com diferença cíclica igual a 2.

ii) Hipótese de indução: Suponha que vale para $n > 7$, isto é:

para $n > 7$, o torneio bineutro $A_n$ é o único torneio com diferença cíclica igual a 2.

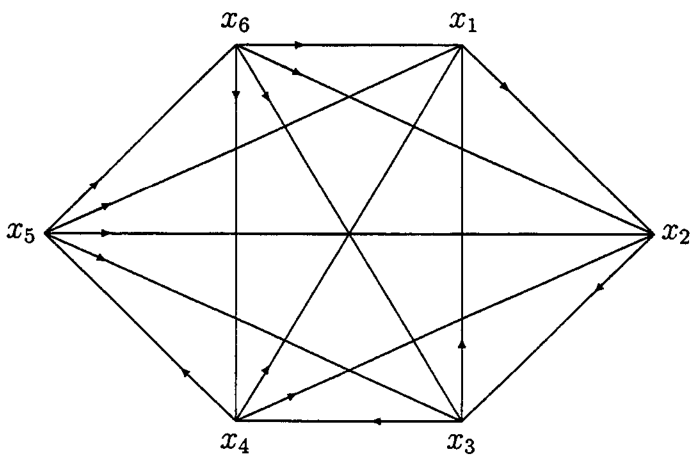
iii) Mostremos que vale para $n + 1$.

Considere $H_{n+1}$.

Como $cd(H_{n+1})$ deve ser igual a 2 e $H_{n+1}$ não pode conter um subtorneio $H_n$ com $cd(H_n) > 2$, pois senão $cd(H_{n+1})$ seria maior que 2 pela proposição 2.4.7, $H_{n+1}$ pode somente ser obtido acrescentando um vértice $v$ a $A_n$, pois para n, por hipótese de indução temos que $A_n$ é o único torneio com diferença cíclica igual a 2, e como já vimos que $2 \leq cd(H_n) \leq n - 3$ para $n \geq 5$, então não existe torneio hamiltoniano $H_n$ com $n \geq 5$ tal que $cd(H_n) < 2$.

Analogamente como antes, obtemos 8 casos distintos, mas a condição $cd(H_{n+1}) = 2$ é satisfeita somente quando $H_{n+1} = A_{n+1}$. $\square$

**Exemplo 2.5.3** *Torneio bineutro $A_6$*




*O torneio bineutro $A_6$ tem o conjunto de vértices $V(A_6) = \{x_1, ..., x_6\}$ e o conjunto de arcos $E(A_6) = \{(x_i, x_j)/j < i - 1$ ou $j = i + 1\}$.*

**Exemplo 2.5.4** *a) O torneio bineutro $A_7$ tem $cd(A_7) = 2$ (veja exemplo 1 da seção 2.3).*

*b) Seja $H_7 = A_6 \cup \{v\}$, onde $v = x_7$*

*Temos que $C : x_2, x_3, x_4, x_5, x_2$ é o único ciclo característico do torneio bineutro $A_6$ (pela proposição 2.4.12).*

*Logo $cc(A_6) = 4$ e $cd(A_6) = 6 - 4 = 2$.*

*Temos que $v = x_7$ cona $C$, pois $x_7 \longrightarrow C$.*

*Como vimos na demonstração da proposição 2.5.2, podemos ter 2 casos distintos.*

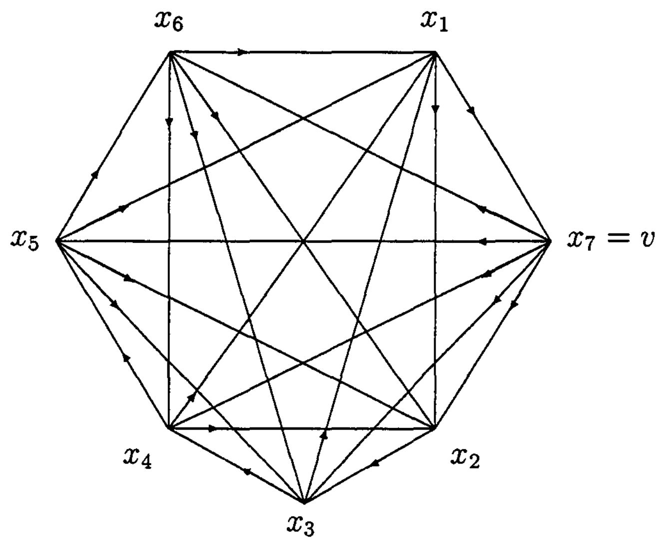
*Caso 1) $H_7$ contém um subtorneio hamiltoniano com diferença cíclica igual a 3.*

*De fato:*

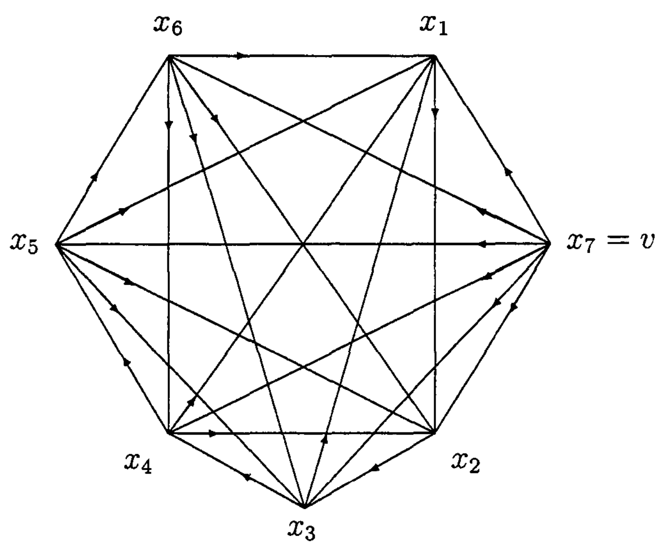
*$H_6 : x_1, x_7, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1$ é hamiltoniano e $H_6 \subseteq H_7$*

*$C' : x_1, x_7, x_3, x_1$ é um ciclo característico de $H_6$, pois é minimal e de comprimento mínimo em $H_6$.*

*Portanto: $cc(H_6) = 3$ e $cd(H_6) = 6 - 3 = 3$*



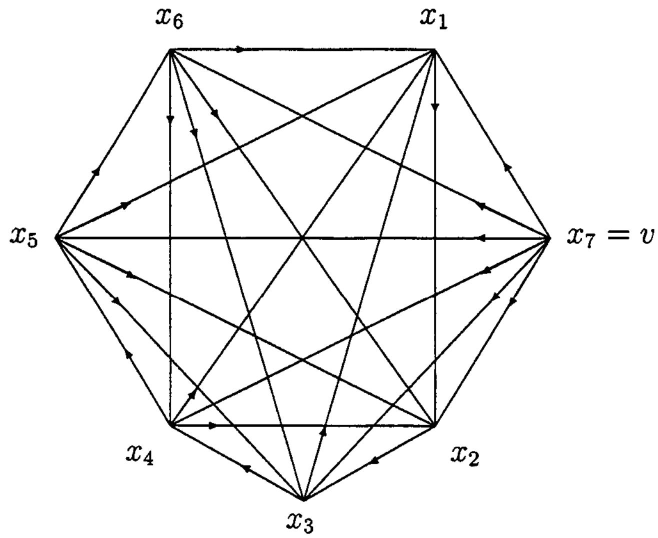

*Caso 2) $H_7$ não é hamiltoniano.*




**Observação 2.5.5** *Esboço das 8 possibilidades distintas que obtemos na proposição anterior. Observe que em cada um dos casos, $x_7 = v$ tem que conar o único ciclo característico $C$ de $A_6$ que é: $C : x_2, x_3, x_4, x_5, x_2$.*

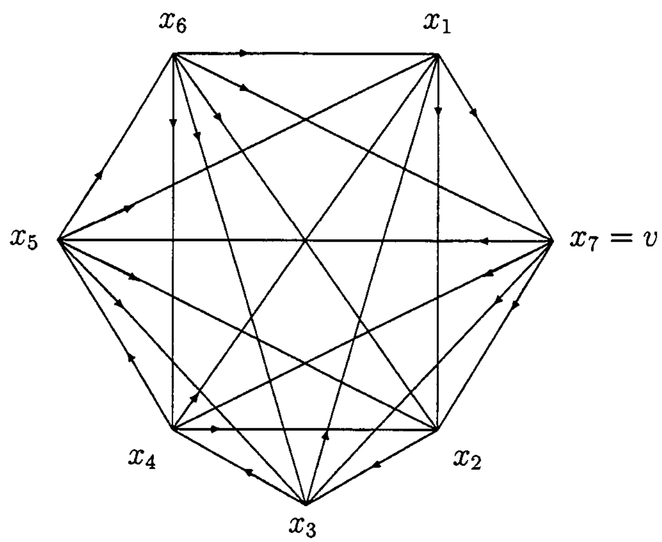
1ª) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$

$v = x_7 \longrightarrow C$



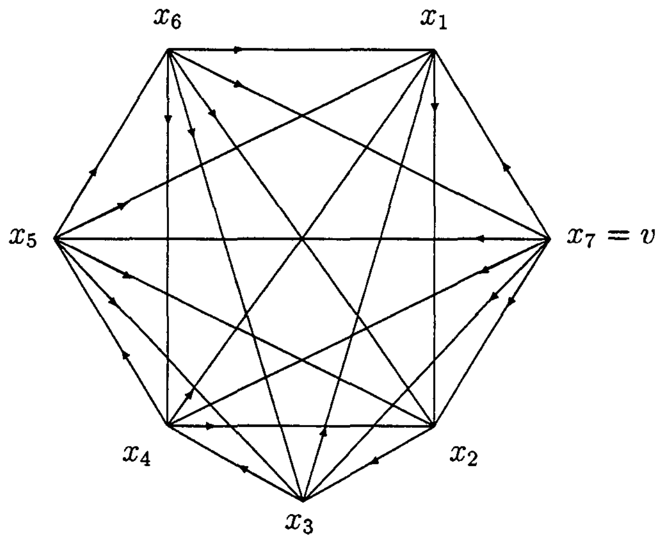

2ª) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$

$v = x_7 \longrightarrow C$



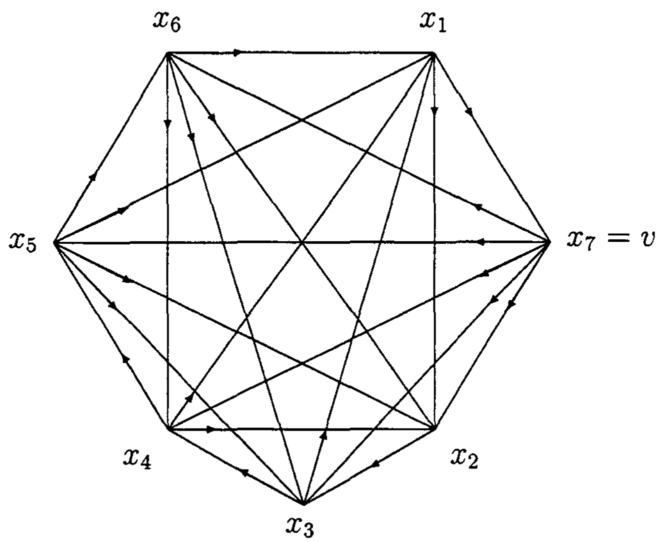
3ª) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$

$v = x_7 \longrightarrow C$



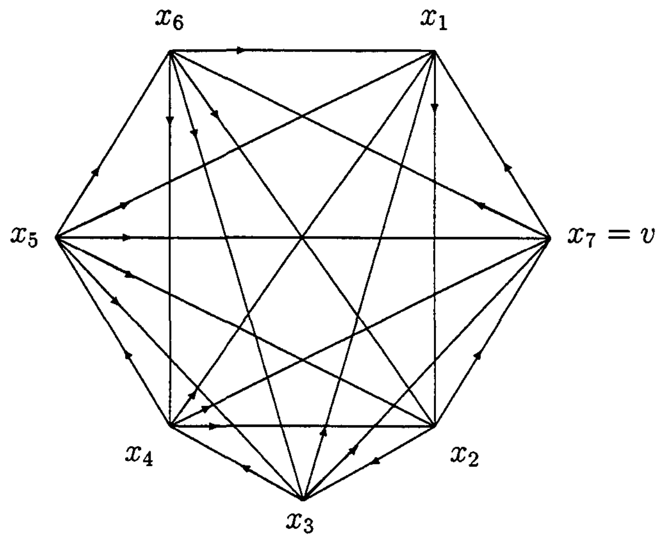

4ª) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$

$v = x_7 \longrightarrow C$



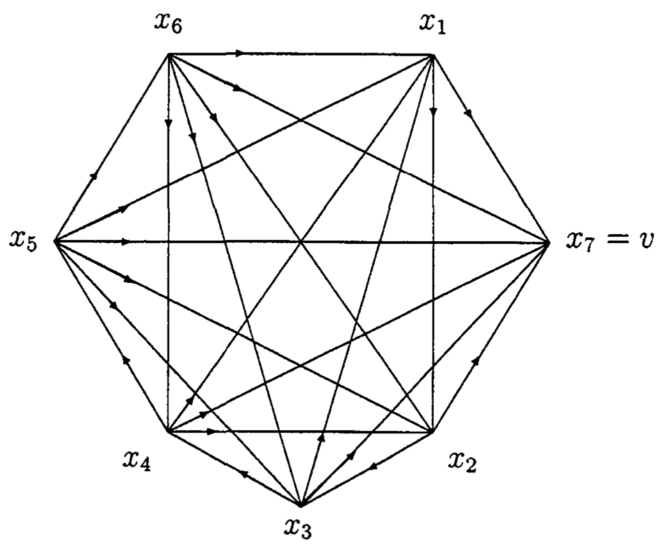
5ª) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$

$C \longrightarrow v = x_7$

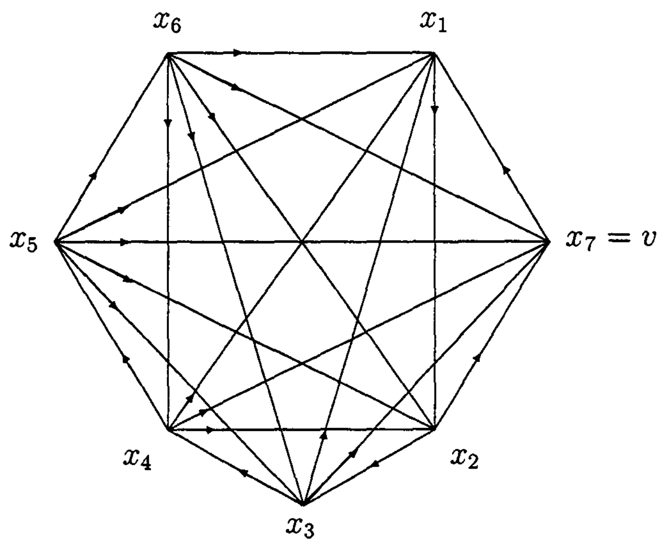



6ª) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$

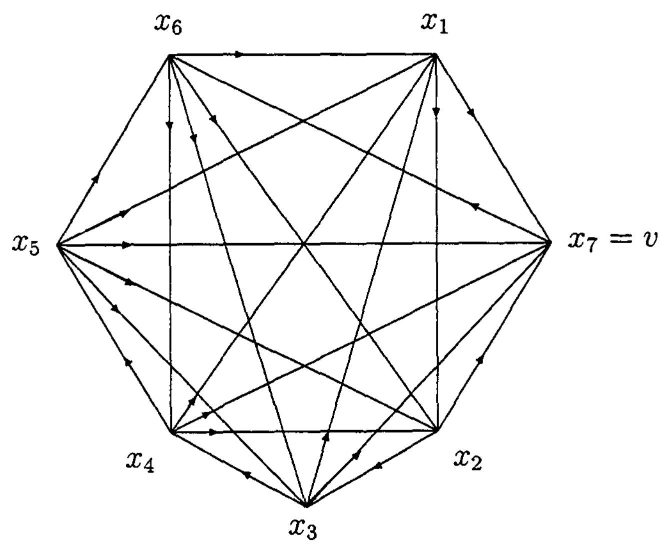
$C \longrightarrow v = x_7$



$7^{\underline{a}}$) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$
$C \longrightarrow v = x_7$




$8^{\underline{a}}$) $H_7 = A_6 \cup \{v\}$
$C \longrightarrow v = x_7$



**Observação 2.5.6** *Pelo corolário 2.4.3 e proposição 2.5.2 segue novamente que o torneio bineutro $A_n$ é o único torneio com 2 vértices neutros para cada $n \geq 4$.*

*Para $n \geq 7$:*

*Temos que $\nu(A_n) = 2$, para todo torneio bineutro $A_n$, pela definição de bineutro.*
*Seja $H_n$ um torneio que não é bineutro e $n \geq 7$.*
*Sabemos que:*
*$cd(H_n) \leq \nu(H_n)$ (pelo corolário 2.4.3)*
*$2 < cd(H_n) \leq n - 3$ (pelo teorema da classificação e proposição anterior).*
*Logo:*

*$\nu(H_n) > 2$, para todo torneio $H_n$ que não é bineutro com $n \geq 7$.*

*Portanto, $A_n$ é o único torneio com 2 vértices neutros para cada $n \geq 7$.*

## 2.6 Diferença cíclica de subtorneios

**Lema 2.6.1** *Seja $C$ um $k$-ciclo minimal de $H_n$ ($k > 3$), $P_C = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ o conjunto dos pólos de $C$ e $W = \{w_1, w_2, ..., w_r\}$ o conjunto dos vértices neutros de $\langle V(C) \rangle$. Então a coleção de subconjuntos de $P_C$:*

$$P_C^i = \{v \in P_C / v \text{ cona } \langle V(C) - w_i \rangle\}, \text{ para cada } w_i \in W,$$

*é a partição de $P_C - P_C^*$, onde $P_C^* = \{v \in P_C /\ v \text{ não cona } \langle V(C) - w_i \rangle, \forall i = 1, 2, ..., r\}$. Então $|P_C| = p \geq r = |W|$.*

*Além disso, se $C$ é um ciclo característico e $\{v\} = P_C^i$ (isto é, $P_C^i$ é um conjunto unitário) então $cd(H_n - v) = cd(H_n)$.*

**Demonstração:**

• $W \neq \emptyset$
Como $2 \leq cd(\langle V(C) \rangle) \leq k - 3$ com $k > 3$ e $cd(\langle V(C) \rangle) \leq \nu(\langle V(C) \rangle) \Longrightarrow \nu(\langle V(C) \rangle) \geq 2 \Longrightarrow |W| = r \geq 2 \Longrightarrow W \neq \emptyset$.

• $P_C^i \neq \emptyset$, $\forall\ i = 1, ..., r$
Sendo C minimal, pelo menos 1 vértice $v_i \in P_C = V(H_n) - V(C)$ deve conar $\langle V(C) - w_i \rangle$, isto é, $P_C^i \neq \emptyset$, $\forall\ i = 1, 2, ..., r$, pois como $C$ é minimal e $\langle V(C) - w_i \rangle$ é subtorneio hamiltoniano próprio de $\langle V(C) \rangle$, já que $w_i$ é vértice neutro de $\langle V(C) \rangle$, então $\langle V(C) - w_i \rangle$ é conado por pelo menos 1 vértice $v_i$ de $P_C$.

i) $P_C^i \cap P_C^j = \emptyset$, $\forall\ i, j = 1, ..., r$ tal que $i \neq j$.

Finalmente, $P_C^i \cap P_C^j = \emptyset$, $\forall\ i,j = 1,...,r$ tal que $i \neq j$, pois caso contrário, se $P_C^i \cap P_C^j \neq \emptyset$, ou seja, $\exists\ v \in P_C^i \cap P_C^j$, então $v \in P_C^i$ e $v \in P_C^j$, logo $v \in P_C$ tal que $v$ cona $\langle V(C) - w_i \rangle$ e $v$ cona $\langle V(C) - w_j \rangle$. Daí $v$ cona $C$. Absurdo, pois $C$ é minimal, o que implica que $C$ é não conado em $H_n$.

ii) $P_C - P_C^* = \cup_{i=1}^r P_C^i$
de fato:

($\subseteq$) Se $v \in P_C - P_C^* \Longrightarrow v \in P_C$ e $v \notin P_C^* \Longrightarrow v \in P_C$ e $v$ cona $\langle V(C) - w_i \rangle$ para algum i $\Longrightarrow v \in P_C^i$, para algum i $\Longrightarrow v \in \cup_{i=1}^r P_C^i$
($\supseteq$) Se $v \in \cup_{i=1}^r P_C^i \Longrightarrow v \in P_C^i$ para algum i $\Longrightarrow v \in P_C$ tal que $v$ cona $\langle V(C) - w_i \rangle$, para algum i $\Longrightarrow v \notin P_C^* \Longrightarrow v \in P_C - P_C^*$.

• $\vdash p \geq r$
Como $P_C - P_C^* = P_C^1 \cup ... \cup P_C^r$ tal que $P_C^i \neq \emptyset$, $\forall\ i = 1,...,r$, então $o(P_C - P_C^*) \geq r$.
Por outro lado, $o(P_C - P_C^*) \leq o(P_C) = p$.
Daí: $r \leq o(P_C - P_C^*) \leq p$. Logo, $r \leq p$

Agora, se C é um ciclo característico de $H_n$ e $P_C^i = \{v\}$ é unitário, então $\langle V(C) - w_i \rangle$ é não conado em $H_n - v$, já que $v$ é o único vértice que cona $\langle V(C) - w_i \rangle$ pela definição de $P_C^i = \{v\}$.
Daí, $cc(H_n - v) \leq k-1$, pois como $cc(H_n - v)$ =comprimento de um ciclo característico em $H_n - v$ e $\langle V(C) - w_i \rangle$ é não conado em $H_n - v$, então $cc(H_n - v) \leq o(\langle V(C) - w_i \rangle) = k - 1$.
Logo, $cc(H_n - v) \leq k - 1 = cc(H_n) - 1$, já que $C$ é ciclo característico de $H_n$ e $o(C) = k$.
Portanto: $cd(H_n - v) = cd(H_n)$
de fato:

• $cd(H_n - v) \leq cd(H_n)$, já que $H_n - v$ é um subtorneio hamiltoniano de $H_n$.
• $\vdash cd(H_n - v) \geq cd(H_n)$
Como vimos acima que $cc(H_n - v) \leq cc(H_n) - 1 \Longrightarrow -cc(H_n - v) \geq -cc(H_n) + 1 \Longrightarrow n - cc(H_n - v) \geq n - cc(H_n) + 1 \Longrightarrow (n-1) - cc(H_n - v) \geq n - cc(H_n) \Longrightarrow cd(H_n - v) \geq cd(H_n)$. □

**Proposição 2.6.2** *Para cada $H_n$ ($n \geq 7$) com $cd(H_n) \geq 3$ e para $k$ tal que $6 \leq k \leq n$, existe um subtorneio $H_k$ de $H_n$ com $cd(H_k) \geq 3$. Em particular, existe um subtorneio $H_6$ com $cd(H_6) = 3$.*

**Demonstração:**

i) Se $cd(H_n) = 3 \Longrightarrow$ como $cd(H_n) = n - cc(H_n) = 3$, temos que $cc(H_n) = n - 3$.

Então, seja $C$ um $(n-3)$-ciclo característico de $H_n$ e $P_C = V(H_n) - V(C) = \{v_1, v_2, v_3\}$ o conjunto dos pólos de $C$, já que $o(V(H_n) - V(C)) = n - n + 3 = 3$.

Como $cd(\langle V(C)\rangle) \leq \nu(\langle V(C)\rangle)$ e $2 \leq cd(\langle V(C)\rangle) \leq (n-3)-3$, então $2 \leq \nu(\langle V(C)\rangle)$. Daí, em $\langle V(C)\rangle$ existe pelo menos 2 vértices neutros $w_1, w_2$. Logo, a partição de $P_C - P_C^* \subseteq \{v_1, v_2, v_3\}$ contém pelo menos 2 conjuntos e 1 pelo menos é unitário.

De fato:

• já que $P_C - P_C^* = \cup_{i=1}^{r} P_C^i$ tal que $r \geq 2$ e $P_C^i \neq \emptyset$, $\forall\ i = 1, ..., r$, então $P_C - P_C^*$ contém pelo menos 2 conjuntos.

• já que $P_C = \{v_1, v_2, v_3\}$ e pelo lema anterior temos que $3 = p = |P_C| \geq r = |W| \geq 2$, então $r = 2$ ou $r = 3$. Daí, temos as possibilidades:

para $r = 2$:

$P_C^1 = \{v_1, v_2\}$ $\quad P_C^2 = \{v_3\}$

$P_C^1 = \{v_1, v_3\}$ $\quad P_C^2 = \{v_2\}$

$P_C^1 = \{v_2, v_3\}$ $\quad P_C^2 = \{v_1\}$

$P_C^1 = \{v_1\}$ $\quad P_C^2 = \{v_2\}$

$P_C^1 = \{v_1\}$ $\quad P_C^2 = \{v_3\}$

$P_C^1 = \{v_2\}$ $\quad P_C^2 = \{v_3\}$

para $r = 3$: $P_C^1 = \{v_1\}$ $\quad P_C^2 = \{v_2\}$ $\quad P_C^3 = \{v_3\}$

Então em $H_n$, existe um subtorneio $H_{n-1}$ com $cd(H_{n-1}) = 3$.

De fato, como $C$ é um ciclo característico e $\{v_k\} = P_C^i$, pois já vimos que pelo menos um dos conjuntos é unitário, então pelo lema anterior temos que $cd(H_n - \{v_k\}) = cd(H_n) = 3$. Então, basta tomar $H_{n-1} = H_n - \{v_k\}$.

ii) Se $cd(H_n) = h > 3 \Longrightarrow$ como $cd(H_n) = n - cc(H_n) = h$, temos que $cc(H_n) = n - h$.

Então, seja $C$ um $(n-h)$-ciclo característico de $H_n$ e $v \in P_C$ um pólo de $C$.

Como $h \geq 4$, segue que $cd(H_n - v) \geq cd(H_n) - 1 = h - 1 \geq 3$.

Daí, chamando $H_n - v$ de $H_{n-1}$, temos que para $k = n-1$, existe um subtorneio $H_k$ de $H_n$ com $cd(H_k) \geq 3$.

Por recorrência, a afirmação segue para cada k tal que $6 \leq k \leq n$, em particular a igualdade segue para $k = 6$ como temos em geral que $cd(H_n) \leq 3$.

De fato:

Seja $H_n$ $(n \geq 7)$ tal que $cd(H_n) \geq 3$. Daí:

• para $k = n - 1$:

$1^o$ caso) Se $cd(H_n) = 3$, então por i) temos que existe $H_{n-1}$ com $cd(H_{n-1}) = 3$.

$2^o$ caso) Se $cd(H_n) > 3$, então por ii) temos que existe subtorneio $H_{n-1}$ com $cd(H_{n-1}) \geq 3$.

• para $k = n - 2$:

$1^o$ caso) Se $cd(H_{n-1}) = 3$, então por i) temos que existe subtorneio $H_{n-2}$ com $cd(H_{n-2}) = 3$.

$2^o$ caso) Se $cd(H_n) > 3$, então por ii) temos que existe subtorneio $H_{n-2}$ com $cd(H_{n-2}) \geq 3$.

$\vdots$

• para $k = 6$:

$1^o$ caso) Se $cd(H_7) = 3$, então por i) temos que existe subtorneio $H_6$ com $cd(H_6) = 3$.

$2^o$ caso) Se $cd(H_7) > 3$, ou seja, $cd(H_7) = 4$ já que $2 \leq cd(H_7) \leq 7 - 3 = 4$, então por ii) temos que existe subtorneio $H_6$ com $cd(H_6) \geq 3$. Mas $2 \leq cd(H_6) \leq 6 - 3 = 3$. Logo: $cd(H_6) = 3$.

Portanto a proposição segue para cada $k$ tal que $6 \leq k \leq n$.

E em particular, para $k = 6$ temos que existe subtorneio $H_6$ com $cd(H_6) = 3$, pois como $2 \leq cd(H_6) \leq 6 - 3 = 3$ e $cd(H_6) \geq 3$, então $cd(H_6) = 3$. □

**Observação 2.6.3** *O resultado anterior não vale para $k = 3$, $k = 4$ e $k = 5$.*

• *para $k = 5$, não existe subtorneio $H_5$ tal que $cd(H_5) \geq 3$.*

*De fato, já vimos que $cd(H_5) = 2$, para todo torneio hamiltoniano $H_5$ de ordem 5.*

• *para $k = 4$, já vimos que $cd(H_4) = 1$, para todo torneio hamiltoniano $H_4$ de ordem 4.*

• *para $k = 3$, já vimos que $cd(H_3) = 0$, para todo torneio hamiltoniano $H_3$ de ordem 3.*

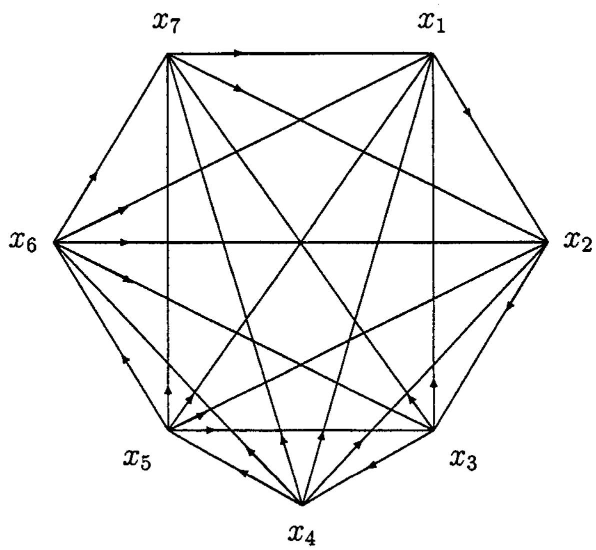
**Observação 2.6.4** *Em geral, não é verdade que:*

*1) em cada $H_n$ com $cd(H_n) = h \geq 3$, existe um subtorneio $H_{n-1}$ com $cd(H_{n-1}) = h-1$.*

*Veja o exemplo 4 na seção 2.3 do torneio hamiltoniano $H_8$. Temos que $cd(H_8) = 3$, mas todos subtorneios $H_7$ de $H_8$ tem todos as mesmas diferenças cíclicas $cd(H_7) = 3$.*

*2) em cada $H_n$ com $cd(H_n) = h' \geq 4$, existe um subtorneio $H_{n-1}$ com $cd(H_{n-1}) = h'$.*

*Por exemplo:*




*considere $H_7 = A_5\{T_2, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, T_2'\}$ obtido de $A_5$ trocando os 2 vértices neutros $x_1, x_5$ de $A_5$ com $T_2$, onde as componentes da composição são dadas por:*

*$S^{(1)} = T_2$ com $V(T_2) = \{x_1, x_7\}$, $S^{(2)} = \{x_2\}$, $S^{(3)} = \{x_3\}$, $S^{(4)} = \{x_4\}$ e $S^{(5)} = T_2'$ com $V(T_2') = \{x_5, x_6\}$.*

*Temos que $cd(H_7) = 4$, pois como $C : x_2, x_3, x_4, x_2$ é ciclo característico de $H_7$, então $cc(H_7) = 3$. Mas não existe subtorneio $H_6$ tal que $cd(H_6) = cd(H_7) = 4$, pois como $2 \leq cd(H_6) \leq 6 - 3 = 3$, então $cd(H_6) = 2$ ou 3.*

## 2.7 Algumas propriedades dos torneios bineutros

**Teorema 2.7.1** *Um torneio $H_n$ $(n \geq 5)$ é isomorfo ao torneio bineutro $A_n \Longleftrightarrow$ existe $k$ $(5 \leq k \leq n)$ tal que cada subtorneio $H_k$ é isomorfo a $A_k$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Se $H_n \simeq A_n$, para algum $n \geq 5$, então para cada $k$ a condição vale, isto é, cada subtorneio $H_k$ é isomorfo a $A_k$.

($\Leftarrow$) i) Para $n = 5$, se existe $k = 5$ tal que cada $H_5 \simeq A_5$, então $H_5 \simeq A_5$ (óbvio).

ii) Para $n = 6$ e $k = 5$

Suponha que existe $k = 5$ tal que cada subtorneio $H_5 \simeq A_5$.

$\vdash$ um torneio $H_6 \simeq A_6$.

• em $H_6' \not\simeq A_6$ com $cd(H_6') = 2$ (veja exemplo 3 da seção 2.3) existe, por exemplo $\langle x_1, ..., x_5, x_1\rangle \not\simeq A_5$, já que não existe um homomorfismo bijetor $f : V(\langle x_1, ..., x_5, x_1\rangle) \longrightarrow V(A_5)$, isto é, não existe uma função bijetora $f : V(\langle x_1, ..., x_5, x_1\rangle) \longrightarrow V(A_5)$ tal que se $v \longrightarrow w \Longrightarrow f(v) \longrightarrow f(w)$ ou $f(v) = f(w)$.

Portanto para $k = 5$ e $k = 6$ não vale.

• em $H_6$ com $cd(H_6) > 2$, se $V(H_6) = \{x_1, ..., x_6\}$ e $C : x_1, x_2, x_3, x_1$ é um 3-ciclo característico de $H_6$, os 3 subtorneios $\langle x_1, ..., x_5, x_1\rangle$, $\langle x_1, ..., x_4, x_6, x_1\rangle$ e $\langle x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_1\rangle$ não podem ao mesmo tempo ser isomorfo a $A_5$.

Então, somente o $A_6$ contém todos os subtorneios $H_5$ isomorfo a $A_5$.

iii) Para $n \geq 7$

Agora suponha que existe k ($5 \leq k \leq n$)tal que $H_k \simeq A_k$ para cada subtorneio $H_k$ e suponha por absurdo que $H_n \not\simeq A_n$ para $n \geq 7$.

Então $cd(H_n) \geq 3$ pela proposição 2.5.2, o que leva a uma contradição com a hipótese, pois pela proposição 2.6.2, se $k \geq 6$, existe subtorneio $H_k$ de $H_n$ com $cd(H_k) \geq 3$, isto é, existe $H_k \not\simeq A_k$, já que $cd(A_k) = 2$ pela proposição 2.4.12, e se $k = 5$, existe um $H_6$ com $cd(H_6) = 3$, que contém um $H_5 \not\simeq A_5$, como visto anteriormente.

Logo: $H_n \simeq A_n$, para $n \geq 7$. □

**Proposição 2.7.2** *Se $H_n$ ($n \geq 5$) não é isomorfo ao torneio bineutro $A_n$, então ele contém pelo menos $n - k + 2$ subtorneios hamiltonianos $H_k$ com $4 \leq k \leq n - 1$.*

**Demonstração:**

Faremos por indução sobre $n$.

i) Para $n = 5$, como $H_5$ não é isomorfo a $A_5$, ele contém 3 vértices neutros (veja [11]), isto é, 3 subtorneios hamiltonianos de ordem $k = 4$.

ii) Para $n = 6$, como $H_6 \not\simeq A_6$, pelo teorema 2.7.1 podemos considerar um subtorneio $H_5 \not\simeq A_5$, pois como $H_6 \not\simeq A_6$, então para todo $k$ tal que $5 \leq k \leq 6$, existe subtorneio $H_k$ tal que $H_k \not\simeq A_k$. Então em $H_6$, existem 3 subtorneios $H_4$ contidos em $H_5$ (por i) e mais 1, incluindo o vértice $v$ tal que $H_5 = H_6 - v$, já que cada vértice está contido em um k-ciclo ($3 \leq k \leq n$)(veja [12]). Daí, existem $n - k + 2 = 6 - 4 + 2 = 4$ subtorneios hamiltonianos de ordem $k = 4$.

Além disso, se $cd(H_6) = 3$, em $H_6$ existe pelo menos 3 vértices neutros, isto é, pelo menos 3 subtorneios $H_5$. Daí, existem n-k+2=6-5+2=3 subtorneios hamiltonianos de ordem $k = 5$.

Caso contrário, $H_6$ é o $H'_6$ do exemplo 3 da seção 2.3, ou seja, $cd(H_6) = cd(H'_6) = 2$ e ele contém 4 subtorneios $H_5$.

Daí, existem 4 subtorneios hamiltonianos de ordem $k = 5$, isto é, existem pelo menos $n - k + 2 = 6 - 5 + 2 = 3$ subtorneios hamiltonianos de ordem 5.

Portanto, a propriedade vale para $n = 5, 6$.

iii) Hipótese de Indução: Suponha que cada $H_{n-1}$ ($n-1 \geq 7$, pois para $n=5$ e $n=6$ já vimos que vale), tal que $H_{n-1} \not\simeq A_{n-1}$, contém pelo menos $(n-1)-k+2 = n-k+1$ subtorneios hamiltonianos $H_k$ com $4 \leq k \leq (n-1)-1 = n-2$.

iv) Mostremos que vale para n ($n \geq 7$).

Considere $H_n$ tal que $H_n \not\simeq A_n$. Então $cd(H_n) \geq 3$, já que $2 \leq cd(H_n) \leq n-3$ e $cd(A_n) = 2$. Considere um subtorneio $H_{n-1}$ com $cd(H_{n-1}) \geq 3$ (sabemos que existe $H_{n-1}$ pela proposição 2.6.2 ).

Daí $H_{n-1} \not\simeq A_{n-1}$, já que $cd(A_{n-1}) = 2$ e pela Hipótese de Indução temos que $H_{n-1}$ contém pelo menos $n-k+1$ subtorneios hamiltonianos $H_k$ (com $4 \leq k \leq n-2$). Então $H_n$ contém $n-k+2$ subtorneios hamiltonianos $H_k$, tal que $n-k+1$ estão contidos em $H_{n-1}$ e 1 inclui o vértice $v$ tal que $H_{n-1} = H_n - v$, já que cada vértice está contido em um k-ciclo.

Agora, falta mostrar que a proposição também é válida para $k = n-1$, pois provamos anteriormente que vale para $4 \leq k \leq n-2$.

Finalmente, considere os 3 subtorneios hamiltonianos $H_{n-1} - w_1$, $H_{n-1} - w_2$, $H_{n-1} - w_3$ de $H_{n-1}$, onde $w_1, w_2, w_3$ são vértices neutros de $H_{n-1}$, pois $cd(H_{n-1}) \geq 3$ e como $cd(H_{n-1}) \leq \nu(H_{n-1})$, então pelo corolário 2.4.3 temos que $3 \leq \nu(H_{n-1})$.

O vértice $v$ cona no máximo 1 dos subtorneios $H_{n-1} - w_i$ tal que $i = 1, 2, 3$, já que $H_n$ é hamiltoniano, pois $H_{n-1} = H_n - v$ e se $v$ cona $H_{n-1} - w_1, H_{n-1} - w_2$ e $H_{n-1} - w_3$, $H_n = H_{n-1} \cup \{v\}$ não seria hamiltoniano, o que é um absurdo.

Suponha s.p.g. que $v$ cona $H_{n-1} - w_1$. Daí, $H_n - w_2, H_n - w_3, H_{n-1}$ são subtorneios hamiltonianos de $H_n$ de ordem $n-1$. Então, existe pelo menos $n-k+2 = n-(n-1)+2 = 3$ subtorneios hamiltonianos de ordem $k = n-1$.

Portanto, a proposição vale para cada $k = 4, 5, ..., n-1$. □

**Observação 2.7.3** *Como uma consequência, obtemos novamente a seguinte propriedade, provada por Las Vergnas em [11]:*

*Se $H_n \not\simeq A_n$, então $H_n$ contém pelo menos $n-k+2$ k-ciclos para $4 \leq k \leq n-1$.*

# Capítulo 3

# Reconstrução de torneios normais

## 3.1 Torneios normais

**Definição 3.1.1** *O torneio hamiltoniano $H_n$ é* **normal** *se, e somente se ele tem somente 1 ciclo minimal, a saber o característico.*

**Observação 3.1.2** *Os pólos do ciclo característico de um torneio normal $H_n$ são chamados pólos de $H_n$ e eles são exatamente os vértices neutros de $H_n$, isto é, o conjunto dos vértices neutros de um torneio normal é também o conjunto dos pólos associados com seu ciclo característico.*

*De fato, pelo corolário 2.4.3 temos que $\nu(H_n) = \#(\cup P_{C_i})$, tal que $C_i$ é ciclo minimal de $H_n$. Mas como $H_n$ é normal, então $\nu(H_n) = \#P_C$ tal que $C$ é o ciclo característico de $H_n$. Daí: $\nu(H_n) = P_C$.*

**Proposição 3.1.3** *Um torneio hamiltoniano $H_n$ é normal $\Longleftrightarrow cd(H_n) = \nu(H_n)$.*

**Demonstração:**

Sai direto pela proposição 2.4.4 e definição 3.1.1. □

**Observação 3.1.4** *O torneio bineutro $A_k$ é um torneio normal $\Longleftrightarrow k \geq 5$.*

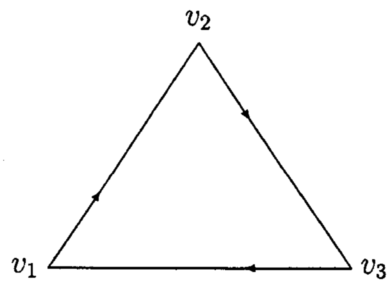
**De fato:**

• *o torneio bineutro $A_4$ não é normal, já que $\nu(A_4) = 2$ mas $cd(A_4) = 1$, ou seja, $\nu(A_4) \neq cd(A_4)$.*

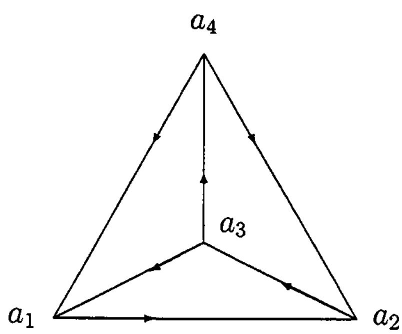
• *pela proposição 2.4.12 temos que todo torneio bineutro $A_n$ com ordem $n \geq 5$ tem somente o ciclo minimal $x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_2$. Logo, todo bineutro $A_n$ tal que $n \geq 5$ é normal.*

**Exemplo 3.1.5** *Alguns exemplos de torneios normais:*

*1) O torneio $H_3$ (3-ciclo) é normal pois não existe vértices neutros, isto é: $\nu(H_3) = 0$. E como $cd(H_3) = 0$, já que $cc(H_3) = 3$, então $cd(H_3) = \nu(H_3)$. Ou então porque $H_3$ contém apenas 1 ciclo minimal, que é ele mesmo.*




*2) O bineutro $A_4$ não é normal já que ele tem 2 vértices neutros e $cd(A_4) = 1$. Daí, $\nu(A_4) = 2 \neq cd(A_4) = 1$.*




**De fato:**

*i)* $\vdash \nu(A_4) = 2$

*Temos que $a_1$ e $a_4$ são os vértices neutros de $A_4$, pois $A_4 - a_1$ e $A_4 - a_4$ são hamiltonianos. Já $A_4 - a_2$ e $A_4 - a_3$ não são hamiltonianos.*

*Logo:* $\nu(H_4) = 2$

*ii)* $\vdash cd(A_4) = 1$

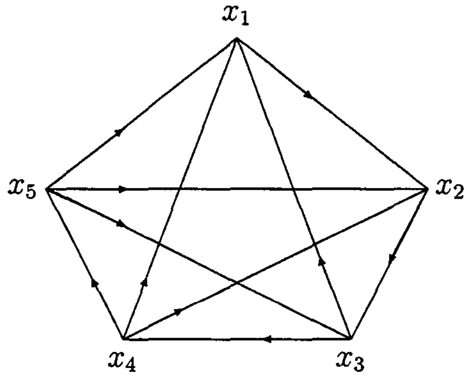
*Temos que $A_4$ contém os 3-ciclos não conados:*

$C_1 : a_1, a_2, a_3, a_1$

$C_2 : a_4, a_2, a_3, a_4$

*Temos ainda que $C_1$ e $C_2$ são ciclos característicos, pois $C_1$ e $C_2$ são ciclos minimais de comprimento mínimo em $A_4$. Logo, $cc(A_4) = 3$ e $cd(A_4) = 4 - cc(A_4) = 4 - 3 = 1$.*

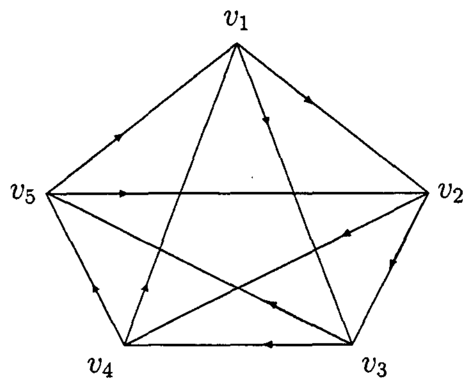
*3) O torneio bineutro $A_5$ é o único normal entre os 6 torneios hamiltonianos de ordem 5.*




**De fato:**

*i) Temos que o único ciclo minimal do torneio bineutro $A_5$ é $C : x_2, x_3, x_4, x_2$. Logo, $A_5$ é normal (veja exemplo 2.4.13).*

*ii) Temos que os outros 5 torneios hamiltonianos não são normais.*
*Por exemplo:*




*ii-1)* $\nu(H_5) = 5$
*de fato,* $v_1, v_2, v_3, v_4$ *e* $v_5$ *são vértices neutros de* $H_5$*, já que* $H_5 - v_i$ *é hamiltoniano, para todo* $i$.
*ii-2)* $cd(H_5) = 2$
*Temos que,* $C_1 : v_2, v_4, v_5, v_2$*,* $C_2 : v_2, v_3, v_5, v_2$*,* $C_3 : v_2, v_4, v_1, v_2$ *e* $C_4 : v_3, v_4, v_1, v_3$ *são ciclos característicos de* $H_5$*, pois são minimais e de comprimento mínimo.*
*Portanto,* $cc(H_5) = 3$ *e* $cd(H_5) = 5 - cc(H_5) = 2$.
*Logo,* $cd(H_5) \neq \nu(H_5)$ *e* $H_5$ *não é normal.*

Antes de apresentarmos um resultado importante, vejamos o seguinte lema:

**Lema 3.1.6** *Sejam $T$ um torneio, $C$ um ciclo em $T$ e $L : v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_h$ caminho em $T$, com $v_1$ e $v_h \in V(C)$.*
*Então: $J = \langle C \cup L \rangle$ é hamiltoniano.*

**Demonstração:**

Suponha por absurdo que J é não hamiltoniano, então seu quociente simples é $T_2$ pela proposição 2.1.2.

Considere um homomorfismo genérico $f : J \longrightarrow T_2$. Se $T_2 = T_2(a, b)$, com $a \longrightarrow b$, e sendo $C$ ciclo, deve ser $f(C) = a$ ou $b$.

De fato:

Seja C o seguinte ciclo: $C : x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 \longrightarrow x_1$. Como $f : J = \langle C \cup L \rangle \longrightarrow T_2$ tal que $T_2 = T_2(a, b)$ com $a \longrightarrow b \Longrightarrow f(x_i) = a$ ou $b$, para todo $i$.

Como $x_1 \longrightarrow x_2$, então $f(x_1) = f(x_2)$ ou $f(x_1) \longrightarrow f(x_2)$, pois $f$ é homomorfismo. Suponha que $f(x_1) \neq f(x_2)$, isto é, $f(x_1) \longrightarrow f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) = a$ e $f(x_2) = b$.

Como $x_2 \longrightarrow x_3 \Longrightarrow f(x_2) = f(x_3)$ ou $f(x_2) \longrightarrow f(x_3) \Longrightarrow f(x_2) = f(x_3) = b$, já que $b \not\longrightarrow a$.

Como $x_3 \longrightarrow x_4 \Longrightarrow f(x_3) = f(x_4)$ ou $f(x_3) \longrightarrow f(x_4) \Longrightarrow f(x_3) = f(x_4) = b$.

Como $x_4 \longrightarrow x_1 \Longrightarrow f(x_4) = f(x_1)$ ou $f(x_4) \longrightarrow f(x_1) \Longrightarrow f(x_4) = f(x_1) = b$.

Absurdo, pois $f(x_1) = a$. Portanto, $f(x_1) = f(x_2)$. E consequentemente, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = a$ ou $b$. Logo: $f(C) = a$ ou $b$.

Analogamente, podemos provar para um ciclo genérico $C : x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_{h-1} \longrightarrow x_h \longrightarrow x_1$.

• Suponha que $f(C) = a$.

Em particular, $f(v_h) = a$ ( pois $v_h \in V(C)$). Como $v_{h-1} \longrightarrow v_h$, já que $L : v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_{h-1} \longrightarrow v_h$, deve ser $f(v_{h-1}) = a$ também.

De fato, como $v_{h-1}, v_h \in J = \langle C \cup L \rangle$ e $v_{h-1} \longrightarrow v_h \Longrightarrow f(v_{h-1}) = f(v_h)$ ou $f(v_{h-1}) \longrightarrow f(v_h) = a$. Como só temos que $a \longrightarrow b$ então a segunda possibilidade não podemos ter, isto é, não podemos ter a como sucessor. Daí: $f(v_{h-1}) = f(v_h) = a$.

E repetindo indutivamente, obtemos que se $f(v_i) = a \Longrightarrow f(v_{i-1}) = a$, para $2 < i < h$, já que $f(v_1) = f(v_h) = a$. Donde se conclui que $f(L) = a$ e como $f(C) = a \Longrightarrow f(J) = \langle C \cup L \rangle = a$.

Portanto, se $f(C) = a \Longrightarrow f(J) = a$.

• Analogamente, se $f(C) = b \Longrightarrow f(J) = b$.

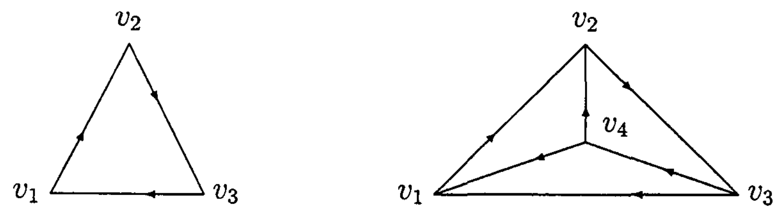
Ou seja, não existe epimorfismo de $J$ em $T_2$.

Daí, $J$ é hamiltoniano. □

**Proposição 3.1.7** *Seja $H_n$ normal, $cc(H_n) = k \geq 3$ e $cd(H_n) = h \geq 2$ (e é claro $h + k = n \geq 5$); então o ciclo característico $H'_k$ de $H_n$ é o 3-ciclo $H_3$ se $k = 3$ ou ele é o torneio bineutro $A_k$ se $k \geq 4$.*

**Demonstração:**

i) se $k = 3$ ou $k = 4$
$H'_k$ será respectivamente $H_3$ ou $A_4 = H_4$, pois são os únicos dessas ordens.




ii) se $k > 4$ (isto é, $n = h + k \geq 7$, logo $h = n - k$)
Suponhamos por absurdo que $\nu(H'_k) \geq 3$.
Seja $P_{n-k} = \{x_1, ..., x_{n-k}\} = V(H_n) - V(H'_k) =$ pólos de $H'_k$ e considere $L : x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow ... \longrightarrow x_{n-k}$ um caminho hamiltoniano por $P_{n-k}$, ou seja, um caminho hamiltoniano do subtorneio formado pelos pólos associados a $H'_k$.

Como $H'_k$ é minimal, logo não conado, então $x_1$ e $x_{n-k}$ não conam $H'_k$. Daí, existem $a, a' \in V(H'_k)$ satisfazendo $a' \longrightarrow x_1$ e $x_{n-k} \longrightarrow a$. Logo, $a$ e $a'$ são vértices neutros de $H'_k$. Como por hipótese $\nu(H'_k) \geq 3$, então $\exists\ a^* \in V(H'_k) - \{a, a'\}$, com $a^*$ neutro de $H'_k$, ou seja, $H^* = H'_k - a^*$ é hamiltoniano.

Então, assumindo $C : a' \longrightarrow L \longrightarrow a$, o torneio $\langle H^* \cup C \rangle = H_n - a^*$ é hamiltoniano, pelo lema 3.1.6.

Isso permite obter um subtorneio minimal $H''_s \subset H_n - a^*$; $H''_s \neq H'_k$, pois como $H_n - a^*$ é hamiltoniano, então existe um ciclo minimal pela proposição 2.2.8 e como $a^* \in V(H'_k)$ mas $a^* \notin V(H''_s)$, temos $H''_s \neq H'_k$.

Absurdo, pois $H_n$ tem um único subtorneio minimal, que é o $H'_k$.

Portanto, $H'_k$ só poderá ter 2 vértices neutros que serão $a$ e $a'$. Então, $a \neq a'$.

Logo, $H'_k = A_k$, pois já vimos que para cada ordem $n \geq 5$, o único torneio hamiltoniano $H_n$ que possui somente 2 vértices neutros é o bineutro $A_n$. □

**Definição 3.1.8** *Seja $H_n$ um torneio normal com o ciclo característico $A_k = \{a_1, ..., a_k\}$, se $k \geq 4$ ou o 3-ciclo $H_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, se $k = 3$. Dizemos que:*

*1) $z \in H_n - A_k$ (ou $z \in H_n - H_3$) é um* **pólo do tipo i e classe 1** *ou* **pólo do tipo $x_i$**, *$1 \leq i \leq k-1$, se e somente se*

$$z \longrightarrow a_j \Longleftrightarrow 1 \leq j \leq i \quad ,ou \quad seja:$$

$$(a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_k) \longrightarrow z \longrightarrow (a_1, a_2, ..., a_i); \quad i = 1, 2, ..., k-1$$

*2) $z \in H_n - A_k$ (ou $z \in H_n - H_3$) é um* **pólo do tipo i e classe 2** *ou* **pólo do tipo $y_i$**, *$1 \leq i \leq k-1$, se e somente se*

$$z \longrightarrow a_j \Longleftrightarrow 1 \leq j \leq i-1 \quad ou \quad j = i+1 \quad ,ou \quad seja:$$

$$(a_i, a_{i+2}, a_{i+3}, ..., a_k) \longrightarrow z \longrightarrow (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}); \quad i = 1, 2, ..., k-1.$$

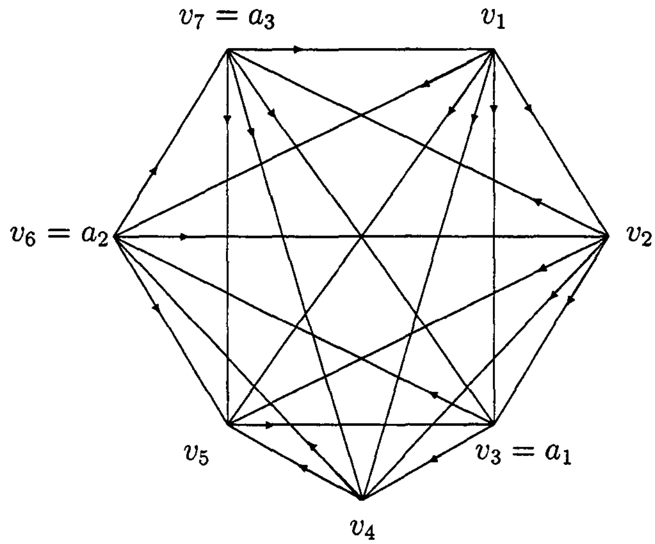
Em detalhe, temos:

| z é pólo do tipo $x_1$: | z é pólo do tipo $x_2$: | z é pólo do tipo $x_i$: | z é pólo do tipo $x_{k-1}$: |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} x_1 \longrightarrow a_1 \\ a_2 \longrightarrow x_1 \\ a_3 \longrightarrow x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_k \longrightarrow x_1 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_2 \longrightarrow a_1 \\ x_2 \longrightarrow a_2 \\ a_3 \longrightarrow x_2 \\ a_4 \longrightarrow x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_k \longrightarrow x_2 \end{cases}$ | $\cdots \begin{cases} x_i \longrightarrow a_1 \\ \cdots \\ x_i \longrightarrow a_{i-1} \\ x_i \longrightarrow a_i \\ a_{i+1} \longrightarrow x_i \\ \cdots \\ a_k \longrightarrow x_i \end{cases}$ | $\cdots \begin{cases} x_{k-1} \longrightarrow a_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{k-1} \longrightarrow a_{k-2} \\ x_{k-1} \longrightarrow a_{k-1} \\ a_k \longrightarrow x_{k-1} \end{cases}$ |

| z é pólo do tipo $y_1$: | z é pólo do tipo $y_2$: | z é pólo do tipo $y_i$: | z é pólo do tipo $y_{k-1}$: |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} a_1 \longrightarrow y_1 \\ y_1 \longrightarrow a_2 \\ a_3 \longrightarrow y_1 \\ a_4 \longrightarrow y_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_k \longrightarrow y_1 \end{cases}$ | $\begin{cases} y_2 \longrightarrow a_1 \\ a_2 \longrightarrow y_2 \\ y_2 \longrightarrow a_3 \\ a_4 \longrightarrow y_2 \\ a_5 \longrightarrow y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_k \longrightarrow y_2 \end{cases}$ | $\cdots \begin{cases} y_i \longrightarrow a_1 \\ \cdots \\ y_i \longrightarrow a_{i-1} \\ a_i \longrightarrow y_i \\ y_i \longrightarrow a_{i+1} \\ a_{i+2} \longrightarrow y_i \\ a_{i+3} \longrightarrow y_i \\ \cdots \\ a_k \longrightarrow y_i \end{cases}$ | $\cdots \begin{cases} y_{k-1} \longrightarrow a_1 \\ y_{k-1} \longrightarrow a_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ y_{k-1} \longrightarrow a_{k-2} \\ a_{k-1} \longrightarrow y_{k-1} \\ y_{k-1} \longrightarrow a_k \end{cases}$ |

**Observação 3.1.9** *Desta forma, existem $2k-2$ tipos diferentes de pólos, e precisamente 2 classes, ambas de $k-1$ tipos diferentes.*

**Exemplo 3.1.10** *Considere o seguinte torneio de ordem 7:*




*Temos que:*

• $cc(H_7) = 3$, *pois* $C : v_3, v_6, v_7, v_3$ *é ciclo característico de* $H_7$ *(e é seu único ciclo minimal) e* $C$ *é um 3-ciclo.*

• $cd(H_7) = 7 - cc(H_7) = 7 - 3 = 4$

• $\nu(H_7) = 4$, *onde* $v_1, v_2, v_4$ *e* $v_5$ *são seus vértices neutros.*

*Como* $cd(H_7) = \nu(H_7) = 4$, *então* $H_7$ *é normal. Ou então porque* $C$ *é seu único ciclo minimal.*

*Sendo* $H_7$ *normal, temos que* $P_C = V(H_7) - V(C) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$*=pólos de* $H_7$ *é também o conjunto dos vértices neutros de* $H_7$.

*Vamos verificar quais são os tipos desses pólos.*

*Temos que* $H_7$ *é um torneio normal com o ciclo característico* $C = H_3 = \{v_3, v_6, v_7\}$. *Renomeando os vértices de* $C$, *temos:*

$v_3 = a_1$, $v_6 = a_2$ *e* $v_7 = a_3$.

*Como* $k = 3$, *então os pólos de* $H_7$ *podem ser dos tipos* $x_1$, $x_2$, $y_1$ *ou* $y_2$, *ou equivalentemente do tipo 1 e classe1, tipo 2 e classe 1, tipo 1 e classe 2, ou tipo 2 e classe 2.*

*Sabemos que* $z \in H_7 - C$ *é um pólo do tipo* $x_i$, $1 \leq i \leq k - 1 = 2$, *isto é, do tipo* $x_1$ *ou* $x_2$, *se e somente se:* $v_1 \longrightarrow a_j \Longleftrightarrow 1 \leq j \leq i$. *Ou do tipo* $y_i$, $1 \leq i \leq k - 1 = 2$, *isto é, do tipo* $y_1$ *ou* $y_2$, *se e somente se:* $v_2 \longrightarrow a_j \Longleftrightarrow 1 \leq j \leq i - 1$ *ou* $j = i + 1$. *Daí:*

*i)* $v_1 \in H_7 - C$ *é um pólo do tipo* $x_2$, *pois:*

$$\begin{cases} v_1 \longrightarrow a_1 \\ v_1 \longrightarrow a_2 \\ a_3 \longrightarrow v_1 \end{cases}$$

*ii)* $v_2 \in H_7 - C$ *é um pólo do tipo* $y_2$, *pois:*

$$\begin{cases} v_2 \longrightarrow a_1 \\ a_2 \longrightarrow v_2 \\ v_2 \longrightarrow a_3 \end{cases}$$

*iii)* $v_4 \in H_7 - C$ *é um pólo do tipo* $y_1$, *pois:*

$$\begin{cases} a_1 \longrightarrow v_4 \\ v_4 \longrightarrow a_2 \\ a_3 \longrightarrow v_4 \end{cases}$$

*iv)* $v_5 \in H_7 - C$ *é um pólo do tipo* $x_1$, *pois:*

$$\begin{cases} v_5 \longrightarrow a_1 \\ a_2 \longrightarrow v_5 \\ a_3 \longrightarrow v_5 \end{cases}$$

**Proposição 3.1.11** *(***Caracterização Estrutural dos torneios normais***)*
*Um torneio hamiltoniano* $H_n$, $n \geq 5$, *é normal se, e somente se as seguintes condições são verdadeiras:*

*a) seu ciclo característico (que é único) coincide com o torneio bineutro* $A_k (k \geq 4)$ *ou com o 3-ciclo* $H_3 = A_3$;

*b) os pólos associados a* $A_k$ *são dos* $k-1$ *tipos de classe 1* $(x_1, x_2, ..., x_{k-1})$ *e dos* $k-1$ *tipos de classe 2* $(y_1, y_2, ..., y_{k-1})$, *considerados na definição 3.1.8;*

*c) o subtorneio* $P_{n-k} = V(H_n) - V(A_k)$ *dos pólos associados a* $A_k$ *é não hamiltoniano;*

*d)* $P_{n-k}$ *tem uma composição transitiva* $P_{n-k} = T^*_{r_{k+1}}(T^{(0)}, T^{(1)}, ...T^{(k)})$, *cujas componentes verificam as seguintes condições:*

$T^{(0)} \neq \emptyset$ *contém somente pólos do tipo* $x_1$;
$T^{(1)}$ *pode conter pólos dos tipos* $x_1, x_2; y_1$;
$T^{(2)}$ *pode conter pólos dos tipos* $x_1, x_2, x_3; y_2$;
................
$T^{(i)}$ *pode conter pólos dos tipos* $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; y_i$;
................
$T^{(k-2)}$ *pode conter pólos dos tipos* $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}; y_{k-2}$;
$T^{(k-1)}$ *pode conter pólos dos tipos* $x_{k-2}, x_{k-1}; y_{k-1}$;
$T^{(k)} \neq \emptyset$ *contém somente pólos do tipo* $x_{k-1}$,
*e cada componente diferente de* $T^{(0)}$ *e* $T^{(k)}$ *pode ser vazia ou não.*

**Observação 3.1.12** *Para* $k = 3$, *o subtorneio minimal* $H_3$ *pode ser considerado, neste caso, como um torneio bineutro de ordem 3, pois os vértices* $a_1$ *e* $a_3$ *de* $A_3$ *tem as mesmas propriedades dos vértices neutros* $a_1$ *e* $a_k$ *do subtorneio característico* $A_k$. *De fato,* $a_1$ *é o sucessor de todos os pólos de* $T^{(0)}$ *e* $a_3$ *é o predecessor de todos os pólos de* $T^{(3)}$. *Então podemos considerar* $H_3$ *como um torneio bineutro* $A_3$.

**Observação 3.1.13** *A proposição 3.1.11 não define univocamente as componentes $T^{(i)}$ do subtorneio $P_{n-k}$ dos pólos. Por exemplo, seja $H_7$ o torneio normal com $cc(H_7) = 4$ e com os 3 pólos $u, v, w$ dos tipos $x_1$,$x_2$ e $x_3$, respectivamente. Então $\{u\}$ e $\{w\}$ são as componentes $T^{(0)}$ e $T^{(4)}$ respectivamente, enquanto $\{v\}$ pode ser considerado indiferentemente como as componentes $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ ou $T^{(3)}$.*

Agora, veremos alguns resultados que podem ser encontrados em [7].

Considerando os torneios normais tais que as componentes $P^{(1)}$ e $P^{(j)}$ de suas condensações são unitárias, temos o seguinte:

**Proposição 3.1.14** *Seja $H_n$ um torneio normal de ordem $n$ e seja $T^*_{r_j}(P^{(1)}, P^{(2)}, ..., P^{(j)})$ a condensação dos pólos de seu ciclo característico $A_k$.*

*Se tiramos um vértice $x$ de $H_n$, tal que $x \in P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(j-1)}$, sempre obtemos um torneio normal.*

**Corolário 3.1.15** *Sob as condições da proposição anterior, se, do torneio normal $H_n$, tiramos todos os pólos contidos em $P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(j-1)}$, obtemos um torneio normal que é isomorfo a $A_{k+2}$, onde $k = cc(H_n)$.*

Voltando aos torneios normais em geral, temos:

**Teorema 3.1.16** *Um subtorneio de um torneio normal $H_n$ que contém o ciclo característico de $H_n$ e cujos pólos são respectivamente pelo menos um vértice de $P^{(1)}$, pelo menos um vértice de $P^{(j)}$ e alguns vértices de $P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(j-1)}$, é normal.*

De agora em diante, consideraremos apenas composições dos subtorneios $P_{n-k}$ tais que $T^{(0)}$ e $T^{(k)}$ são maximais, isto é, $T^{(0)}$ $(T^{(k)})$ contém todos os pólos do tipo $x_1(x_{k-1})$ que pode conter de acordo com a proposição 3.1.11 .

A menos que especificado de outra forma, $x_i$ $(y_i)$ denotará um pólo do tipo $x_i$ $(y_i)$ em $H_n$.

**Definição 3.1.17** *Se $v$ é um vértice do torneio $T_n$, então o subtorneio $T_n - v$ é dito uma* **carta** *de $T_n$.*

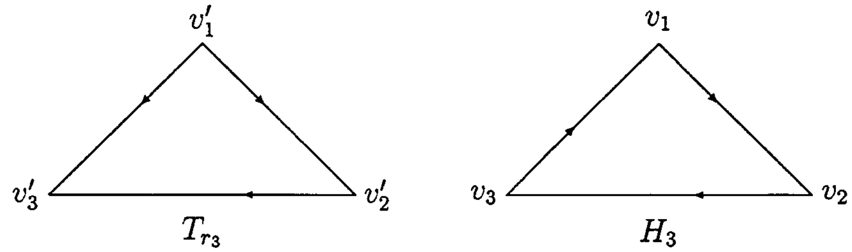
**Definição 3.1.18** *Um* **hipomorfismo** *entre dois torneios $T_n$ e $S_n$ é uma bijeção $f : V(T_n) \longrightarrow V(S_n)$ tal que a carta $T_n - v$ é isomorfa à carta $S_n - f(v)$ sempre que $v \in V(T_n)$ (isto é, $T_n$ e $S_n$ tem as mesmas cartas).*

*$T_n$ e $S_n$ são ditos* **hipomorfos** *um ao outro se existe um hipomorfismo entre eles.*

**Definição 3.1.19** *Chamamos de* **propriedade hipomórfica** *toda propriedade de um torneio que é preservada por hipomorfismos.*

**Definição 3.1.20** *Um torneio $T_n$ é* **reconstrutível** *se, e somente se, $T_n$ é isomorfo a $S_n$ sempre que $T_n$ e $S_n$ são hipomorfos (isto é, o torneio $T_n$ é determinado pelo conjunto de suas cartas).*

**Exemplo 3.1.21** *$T_{r_3}$ e $H_3$ são hipomorfos*




*Seja $f : V(H_3) \longrightarrow V(T_{r_3})$ uma bijeção.*

$$v_1 \longrightarrow v_1'$$
$$v_2 \longrightarrow v_2'$$
$$v_3 \longrightarrow v_3'$$

*Temos que a carta $H_3 - v \simeq T_{r_3} - f(v)$, $\forall\ v \in H_3$.*

**De fato:**

*i) $H_3 - v_1 \simeq T_{r_3} - f(v_1)$*
*Seja $g_1 : V(H_3 - v_1) \longrightarrow V(T_{r_3} - f(v_1))$, isto é, $g_1(v_2) = v_2'$ e $g_1(v_3) = v_3'$.*

$$v_2 \longrightarrow v_2'$$
$$v_3 \longrightarrow v_3'$$

*Temos que $g_1$ é isomorfismo, isto é, homomorfismo bijetor, pois:*
- *$g_1$ é bijeção (é óbvio)*
- *$g_1$ é homomorfismo, pois: se $v_2 \longrightarrow v_3 \Longrightarrow g_1(v_2) = v_2' \longrightarrow g_1(v_3) = v_3'$.*

*ii) $H_3 - v_2 \simeq T_{r_3} - f(v_2)$*
*Seja $g_2 : V(H_3 - v_2) \longrightarrow V(T_{r_3} - f(v_2))$, isto é, $g_2(v_1) = v_3'$ e $g_2(v_3) = v_1'$.*

$$v_1 \longrightarrow v_3'$$
$$v_3 \longrightarrow v_1'$$

*Temos que $g_2$ é isomorfismo, isto é, homomorfismo bijetor, pois:*
- *$g_2$ é bijeção (é óbvio)*
- *$g_2$ é homomorfismo, pois: se $v_3 \longrightarrow v_1 \Longrightarrow g_2(v_3) = v_1' \longrightarrow g_2(v_1) = v_3'$.*

*iii) $H_3 - v_3 \simeq T_{r_3} - f(v_3)$*
*Seja $g_3 : V(H_3 - v_3) \longrightarrow V(T_{r_3} - f(v_3))$, isto é, $g_3(v_1) = v_1'$ e $g_3(v_2) = v_2'$.*

$$v_1 \longrightarrow v_1'$$
$$v_2 \longrightarrow v_2'$$

*Temos que $g_3$ é isomorfismo, isto é, homomorfismo bijetor, pois:*

- *$g_3$ é bijeção (é óbvio)*
- *$g_3$ é homomorfismo, pois: se $v_1 \longrightarrow v_2 \Longrightarrow g_3(v_1) = v_1' \longrightarrow g_3(v_2) = v_2'$.*

**Observação 3.1.22** *A existência de um ciclo hamiltoniano em um torneio $T_n$ é uma propriedade hipomórfica $\Longleftrightarrow n \geq 4$, ou seja:*

*se existe um ciclo hamiltoniano em $T_n$ e $T_n$ é hipomorfo a $S_n$, então existe um ciclo hamiltoniano em $S_n \Longleftrightarrow n \geq 4$.*

**De fato:**

($\Leftarrow$) Seja $n \geq 4$

$1^o$ caso) $T_n$ é hamiltoniano

Suponha que $T_n$ é hipomorfo a $S_n$ e $T_n$ é hamiltoniano, então $S_n$ é hamiltoniano (pela definição de hipomorfismo). Daí, existe um ciclo hamiltoniano, já que $2 \leq \nu(H_n) \leq n$, para todo torneio hamiltoniano de ordem $n \geq 4$.

$2^o$ caso) $T_n$ não é hamiltoniano, logo $T_n$ tem no máximo 1 carta hamiltoniana.

Suponha que $T_n$ é hipomorfo a $S_n$ e que existe um ciclo hamiltoniano em $T_n$, então existe um ciclo hamiltoniano em $S_n$.

($\Rightarrow$) (Faremos pela negação)

Suponha que $n = 3$ (ou seja $n < 4$).

Temos que $T_{r_3}$ e $H_3$ são hipomorfos pelo exemplo anterior, existe um ciclo hamiltoniano em $H_3$(que é ele mesmo), mas não existe um ciclo hamiltoniano em $T_{r_3}$.

Portanto, se existe um ciclo hamiltoniano em $T_n$ e $T_n$ é hipomorfo a $S_n$, implica que existe um ciclo hamiltoniano em $S_n$, então: $n \geq 4$.

**Observação 3.1.23** *Segue imediatamente das definições de vértices neutros e hipomorfismo que o número de vértices neutros $\nu(H_n)$ de um torneio hamiltoniano, é um invariante hipomórfico, já que ele é o número das cartas hamiltonianas de $H_n$. Isto é, se $T_n$ é hipomorfo a $S_n$ tal que $T_n$ e $S_n$ são hamiltonianos, então $\nu(T_n) = \nu(S_n)$.*

**De fato:**

Suponha que $T_n$ é hipomorfo a $S_n$, então existe bijeção $f : V(T_n) \longrightarrow V(S_n)$ tal que a carta $T_n - v$ é isomorfa à carta $S_n - f(v)$, $\forall\ v \in V(T_n)$. Temos pelas definições de vértices neutros e hipomorfismo que:

$v$ é um vértice neutro de $T_n \Longleftrightarrow$ a carta $T_n - v$ é hamiltoniana $\Longleftrightarrow$ a carta $S_n - f(v)$ é hamiltoniana $\Longleftrightarrow f(v)$ é um vértice neutro de $S_n$.

Logo: $\nu(T_n) = \nu(S_n)$

Relembremos que os digrafos não são todos reconstrutíveis e a mesma coisa acontece para os torneios(veja [13]).

Entretanto, algumas classes de torneios reconstrutíveis tem sido encontradas.

Em particular todo torneio não-hamiltoniano é reconstrutível(veja [9]) e todos os torneios de ordem 7 são reconstrutíveis também.

Além disso, observamos que todo torneio bineutro $A_k$, $k \geq 4$, pode ser reconstruído pelas suas cartas já que $A_k$ é o único torneio de ordem $k$ que tem exatamente duas cartas hamiltonianas.

## 3.2 A normalidade de torneios hipomorfos

Seja $H_n$ um torneio normal com $cc(H_n) = k \geq 3$ e $cd(H_n) = h \geq 2$ $(n = k + h \geq 5)$.

Vamos denotar por $H_{n-1}^{(i)} = H_n - z_i$, $i = 1, ..., h$, as cartas hamiltonianas de $H_n$ com relação aos vértices neutros (ou pólos) $z_1, ..., z_h$ de $H_n$, pois sendo $H_n$ normal então $cd(H_n) = \nu(H_n)$.

Usaremos as notações e as condições estabelecidas na seção anterior sobre a estrutura de $H_n$.

Mais adiante, vamos precisar do seguinte resultado que pode ser encontrado em [6].

**Proposição 3.2.1** *Um torneio normal $H_n$ não tem mais que duas cartas hamiltonianas não-normais.*

*Além disso, se $k \geq 4$, então $h - 2$ é um limite superior para o número de cartas hamiltonianas não-normais.*

*Finalmente, de $k \geq 4$, $min\{|T^{(0)}|, |T^k|\} = 1$ e $cd(H_{n-1}) = h - 1$ para cada carta hamiltoniana $H_{n-1}$ de $H_n$ segue que pelo menos uma das condições a)e b) valem:*

*a) $T^{(1)} \cup T^{(2)}$ contém um pólo do tipo $x_1$.*

*b) $T^{(k-1)} \cup T^{(k-2)}$ contém um pólo do tipo $x_{k-1}$.*

**Proposição 3.2.2** *Seja $H_n$ um torneio normal com $cc(H_n) = k \geq 3$ e $cd(H_n) = h \geq 5$ (ou seja, $n = k + h \geq 8$) e suponha que toda carta hamiltoniana $H_{n-1}$ de $H_n$ tem $cd(H_{n-1}) = h - 1$. Então todo torneio hamiltoniano $H'_n$ que é hipomorfo a $H_n$ tem que ser normal.*

**Demonstração:**

$H'_n$ tem que ser um torneio hamiltoniano, pois sendo $H_n$ hamiltoniano e $H_n$ hipomorfo a $H'_n$, então pela observação 3.1.23, temos que $\nu(H_n) = \nu(H'_n)$. Logo, $H'_n$ é hamiltoniano.

$\vdash$ $H'_n$ é normal

Suponha agora que $H'_n$ não é normal, logo $cd(H'_n) \neq \nu(H'_n)$ e consequentemente $cc(H'_n) = k + 1$, $cd(H'_n) = h - 1$, $\nu(H'_n) = h$. De fato, como $H_n$ é normal, então $\nu(H_n) = cd(H_n) = h$. Assim, $\nu(H'_n) = \nu(H_n) = h$.

Daí, como $cd(H'_n) \neq \nu(H'_n) = h$ e $cd(H'_n) \leq \nu(H'_n)$, então $cd(H'_n) < \nu(H'_n) = h$. Mas como $H_{n-1} \subset H'_n$ e $cd(H_{n-1}) = h - 1$ por hipótese, então $h - 1 = cd(H_{n-1}) \leq cd(H'_n)$. Logo, $h - 1 \leq cd(H'_n) < h$. Portanto: $cd(H'_n) = h - 1$.

Finalmente, como $cd(H'_n) = n - cc(H'_n) \Longrightarrow cc(H'_n) = n - cd(H'_n) = n - (h-1) = n - h + 1 \Longrightarrow n = cc(H'_n) + h - 1$. Além disso, sabemos que $n = k + h$, já que $n = cd(H_n) + cc(H_n)$.

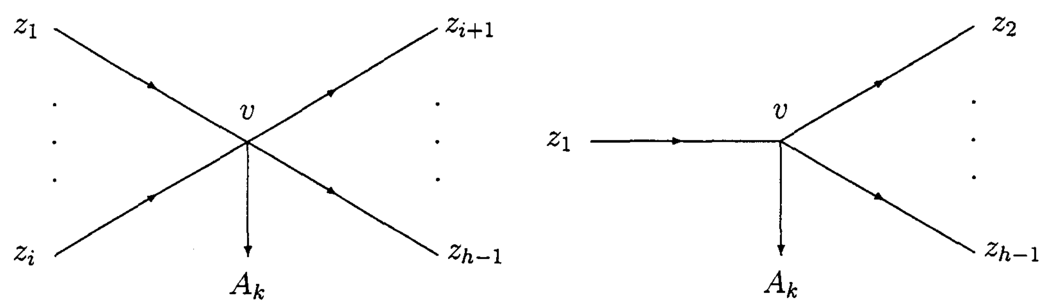
Logo: $cc(H'_n) + h - 1 = k + h$. Portanto: $cc(H'_n) = k + 1$.

Seja $H_{n-1} = H'_n - v$ uma carta normal de $H'_n$ tendo ciclo característico $A_k = \langle a_1, ..., a_k \rangle$, já que $cc(H_{n-1}) = k$ (pelo mesmo raciocínio acima) e pólos $z_1, ..., z_{h-1}$, pois toda carta hamiltoniana $H_{n-1}$ de $H_n$ tem $cd(H_{n-1}) = h - 1$ por hipótese e como $H_{n-1}$ é normal, então $\nu(H_{n-1}) = cd(H_{n-1}) = h - 1$. Daí, sendo $H_{n-1}$ normal, os pólos de $H_{n-1}$ são seus vértices neutros, ou seja, $H_{n-1}$ tem $h - 1$ pólos.

Como $cc(H'_n) = k + 1$, temos que $A_k$ é conado por $v$, digamos $v \longrightarrow A_k$, em $H'_n$, pois como $A_k$ é ciclo característico de $H_{n-1} = H'_n - v$, então ele é não conado em $H_{n-1} = H'_n - v$ e sendo $cc(H'_n) = k + 1$, temos que ele tem que ser conado em $H'_n$ por $v$.

Mas um vértice neutro, digamos $z_1$, precede $v$, já que $H'_n$ é hamiltoniano.

Agora, podemos considerar as duas situações possíveis na figura seguinte:

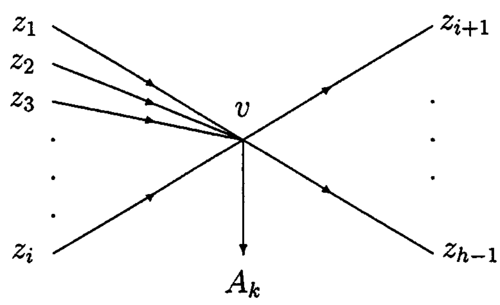



**Caso1** **Caso2**

**Caso 1:** Todo pólo $z_i$, $1 \leq i \leq h - 1$, de $H_{n-1}$ é um vértice neutro de $H'_n$, então $z_1$ não é o único vértice neutro de $H_{n-1}$ que precede $v$ (veja figura acima). Assim podemos supor que os pólos $z_1, ..., z_{h-1}$ são tais que

$$z_i \longrightarrow v \quad e \quad j \leq i \Longrightarrow z_j \longrightarrow v$$

- Suponha que $z_3 \longrightarrow v$ (logo $z_1 \longrightarrow v$ e $z_2 \longrightarrow v$ também).



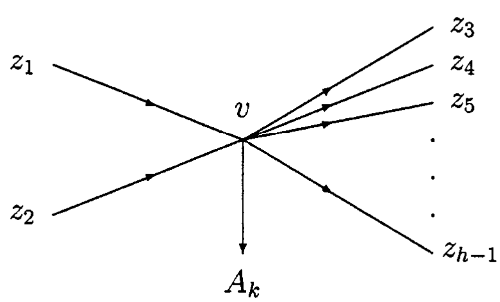

Então $H'_n - z_i$; $i = 1, 2, 3$, são cartas hamiltonianas de $H_n$ com *c.d.* $h-1$ (por hipótese), mas eles não são normais.

**De fato:**

Temos que $\{v\} \cup \{z_j / j \neq i\}$ é um conjunto de vértices neutros de $H'_n - z_i$, cujo complemento $A_k$ é conado por $v$ e então $A_k$ não pode ser um ciclo característico de $H'_n - z_i$, $\forall\ i = 1, 2, 3$. Logo, o conjunto de vértices neutros de $H'_n - z_i$ não coincide com seus pólos, pois coincidindo, $A_k$ teria que ser minimal, ou ciclo característico, sendo $H_n$ normal.

Daí, $H'_n - z_i$ não é normal, $\forall\ i = 1, 2, 3$.

- Suponha agora que $v \longrightarrow z_3$




Temos que $H^1_{n-1} = H'_n - z_1$ é uma carta hamiltoniana (já que $z_i$ é vértice neutro de $H'_n$, $\forall\ i = 1, ..., h-1$) e $H^1_{n-1}$ tem pelo menos $h-1$ vértices neutros (pois por hipótese, $cd(H^1_{n-1}) = h - 1$ e como $cd(H^1_{n-1}) \leq \nu(H^1_{n-1})$, então $\nu(H^1_{n-1}) \geq h-1$). Então existe um vértice $a_i \in A_k$ que é neutro em $H^1_{n-1}$, já que $z_2$ não é neutro, pois como $v \longrightarrow A_k$ e $v \longrightarrow z_j; j = 3, ..., h-1$ então $H^1_{n-1} - \{z_2\} = A_k \cup \{z_j; j = 3, ..., h-1\}$ não é hamiltoniano (veja figura).

O complemento $\{z_2\} \cup A_k - \{a_i\}$ do conjunto de vértices neutros $\{z_j; j = 1, 2\} \cup \{a_i\}$ em $H^1_{n-1} = H'_n - z_1$ gera um subtorneio $G^1$ no qual não pode ser um ciclo característico em $H^1_{n-1}$. Daí, o conjunto de vértices neutros de $H^1_{n-1}$ não coincide com seus pólos. Logo, $H^1_{n-1}$ não é normal.

**De fato:**

• A menos que $a_i \in \{a_1, a_k\}$, $A_k - a_i$ não pode conter um caminho de $a_{i-1}$ a $a_{i+1}$, pois:

$$A_k - a_i : a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_{i-1} \longrightarrow a_{i+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_{k-1} \longrightarrow a_k$$

Entretanto, se tal caminho $a_{i-1}...a_r z_2 a_s...a_{i+1}$ estivesse contido em $G^1$, ou seja, se $G^1$ fosse hamiltoniano, então $r \leq i-1$ e $s \geq i+1$ valeria, pois como $A_k$ é bineutro e existe o caminho $a_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_r \longrightarrow z_2 \longrightarrow a_s \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_{i+1}$ em $G^1$, então:
i) $r \leq i-1$ ou $r = (i-1)+1 = i \Longrightarrow r \leq i-1$.
ii) $i+1 \leq s-1$ ou $i+1 = s+1 \Longrightarrow i+1 \leq s-1 \Longrightarrow s \geq i+2 \geq i+1$.
Daí resulta que $s - r \geq 2$, já que:
$i-1 \geq r$ e $s \geq i+1 \Longrightarrow s+i-1 \geq r+i+1 \Longrightarrow s-r \geq i+1-i+1 \Longrightarrow s-r \geq 2$.
Mas, pela caracterização estrutural de torneios normais, sendo $z_2$ pólo de $H_{n-1}$ que é normal, $z_2$ pode ser dos tipos $x_1, ..., x_{k-1}$, ou $y_1, ..., y_{k-1}$.
Daí, $a_4 \longrightarrow z_2 \longrightarrow a_s \Longrightarrow$ ou $s-r=1$ ou $s-r<0$. Absurdo, já que $s-r \geq 2$.
Então $G^1$ não é hamiltoniano.
Logo, $G^1$ não pode ser um ciclo minimal, ou então, ciclo característico em $H^1_{n-1}$.

• Quando $a_i = a_1$ ($a_i = a_k$) e $z_2$ é um pólo do tipo $x_1$, isto é: $z_2 \longrightarrow a_1$, $a_2 \longrightarrow z_2$, ..., $a_k \longrightarrow z_2$ ($x_{k-1}$,isto é: $z_2 \longrightarrow a_1$, ..., $z_2 \longrightarrow a_{k-1}$, $a_k \longrightarrow z_2$) em $H^1_{n-1} = H'_n - z_1$, é claro que $G^1 - z_2 = A_k - \{a_1\}$ ($A_k - \{a_k\}$) é conado por $z_2$ e $G^1$ não é hamiltoniano (pois como $z_2$ cona $G^1 - z_2$, ou todos os vértices de $G^1$ precedem $z_2$ no caso em que $z_2$ é pólo do tipo $x_1$, ou todos os vértices de $G^1$ sucedem $z_2$ no caso em que $z_2$ é pólo do tipo $x_{k-1}$).

• Quando $a_i = a_1$ ($a_i = a_k$) e $z_2$ não é do tipo $x_1$ ($x_{k-1}$) em $H^1_{n-1}$, então um pólo $u$, $u \neq a_1$ ($u \neq a_k$), do tipo $x_1$ ($x_{k-1}$) existe em $H^1_{n-1} = H'_n - z_1$ (pois $T^{(0)} \neq \emptyset$ e $T^{(k)} \neq \emptyset$ pela proposição 3.1.11) tal que $z_2 \longrightarrow u$, pois daí $z_2$ pode ser pólo do tipo $x_2$,...,$x_{k-1}$ ou $y_1$,...,$y_{k-1}$ ($u \longrightarrow z_2$, pois daí $z_2$ pode ser pólo do tipo $x_1$,...,$x_{k-2}$ ou $y_1, ..., y_{k-1}$) e $a_j \longrightarrow u$, $2 \leq j \leq k$ ($u \longrightarrow a_j$, $1 \leq j \leq k-1$) então $G^1 = \{z_2\} \cup A_k - a_i$ é conado em $H^1_{n-1}$.
Logo, $G_1$ não é ciclo característico em $H^1_{n-1}$.
Conclusão: em qualquer um dos casos $G^1$ não é um ciclo característico, daí os vértices neutros de $H^1_{n-1}$ não coincidem com seus pólos e então $H^1_{n-1}$ não é normal.

Similarmente, pode ser provado que $H_{n-1}^2 = H_n' - z_2$ é uma carta hamiltoniana não-normal.

Se consideramos ainda a carta $H_{n-1}^3 = H_n' - z_3$ e o conjunto de vértices neutros $\{v\} \cup \{z_j/j \neq 3\}$, então o complemento $A_k$ deste último conjunto é conado por $v$ em $H_{n-1}^3$ e não pode ser um ciclo característico (já que ciclo característico tem que ser conado). Daí o conjunto de vértices neutros de $H_{n-1}^3$ não coincide com seus pólos, logo $H_{n-1}^3$ não pode ser normal.

Então, $H_{n-1}^3$ é uma carta hamiltoniana não-normal também.

Daí, sempre que o caso 1 ocorre, $H_n'$ tem pelo menos 3 cartas hamiltonianas não-normais, o que contradiz a proposição 3.2.1.

Logo, $H_n'$ é normal.

**Caso 2:** Algum dos pólos $z_1, ..., z_{h-1}$ não é neutro em $H_n'$, já que $z_1 \longrightarrow v$ e $v \longrightarrow z_i$, $2 \leq i \leq h-1$ (veja figura).

Considere $H_{n-1}^i = H_n' - z_i$, $2 \leq i \leq h-1$. Temos que para todo i, $H_{n-1}^i$ tem pelo menos $h-1$ vértices neutros. Daí, é fácil de verificar que para todo i, existe um vértice $a_{p_i} \in A_k$ tal que $\{v, a_{p_i}\} \cup \{z_j/j \notin \{1, i\}\}$ é o conjunto dos vértices neutros de $H_{n-1}^i$ (já que $\{v\} \cup \{z_j/j \notin \{1, i\}\}$ tem apenas $h-2$ elementos), cujo complemento em $H_{n-1}^i$ não é um ciclo característico. Logo, o conjunto dos vértices neutros de $H_{n-1}^i$ não coincide com seus pólos. Portanto, $H_{n-1}^i$ não é normal.

Então, todo $H_{n-1}^i$; $2 \leq i \leq h-1$ é uma carta hamiltoniana não-normal de $H_n'$. Logo, sendo $h \geq 5$, $H_n'$ tem pelo menos 3 cartas hamiltonianas não-normais. Daí, é claro, de novo contradiz a proposição 3.2.1. □

**Observação 3.2.3** *Precisamos da hipótese $h \geq 5$ somente no caso 2 na prova da proposição anterior. A condição $h \geq 4$ é suficiente no caso 1.*

**De fato:**

• $h \geq 5$

Todo $H_{n-1}^i = H_n' - z_i$; $2 \leq i \leq h-1$ é uma carta hamiltoniana não-normal de $H_n'$.

Como queremos uma contradição para a proposição 3.2.1, então devemos ter $h \geq 5$, pois daí temos pelo menos 3 cartas hamiltonianas não-normais de $H_n'$, no caso em que $h = 5$, que são:

$H_{n-1}^2 = H_n' - z_2$
$H_{n-1}^3 = H_n' - z_3$
$H_{n-1}^4 = H_n' - z_4$

• $h \geq 4$

Temos que $H_{n-1}^i = H_n' - z_i$; $i = 1, 2, 3$ é uma carta hamiltoniana não-normal de $H_n'$ (tanto quando $z_3 \longrightarrow v$ como quando $v \longrightarrow z_3$).

Como queremos uma contradição para a proposição 3.2.1, então devemos ter $h \geq 4$, pois daí temos os pólos $z_1$,$z_2$ e $z_3 = z_{h-1}$ onde temos pelo menos 3 cartas hamiltonianas não-normais de $H'_n$, no caso em que $h = 4$, que são:
$H^1_{n-1} = H'_n - z_1$
$H^2_{n-1} = H'_n - z_2$
$H^3_{n-1} = H'_n - z_3$

**Proposição 3.2.4** *A condição de normalidade é uma propriedade hipomórfica para torneios de ordem $n \geq 5$.*

**Demonstração:**

Seja $H_n$ um torneio normal, $cc(H_n) = k \geq 3$ e $cd(H_n) = h \geq 2$ (isto é, $n = k+h \geq 5$).
Considere um torneio hamiltoniano $H'_n$ que é hipomorfo a $H_n$ e suponha que $V(H_n) = V(H'_n)$ e a aplicação identidade seja um hipomorfismo. Podemos considerar a identidade pois $V(H_n) = V(H'_n)$.
$\vdash$ $H'_n$ também é normal.

i) Se $H_n$ tem uma carta hamiltoniana com diferença cíclica $h$, então $H'_n$ tem que ser normal pelas proposições 2.4.7 e 2.4.3 e observação 3.1.23.
**De fato:**
Como $H_n$ é normal e $cd(H_n) = h$, então $\nu(H_n) = h$, pois sendo $H_n$ normal, $cd(H_n) = \nu(H_n)$.
Como $H_n$ é hipomorfo a $H'_n$ e o número de vértices neutros de um torneio hamiltoniano é um invariante hipomórfico (pela observação 3.1.23), então $\nu(H_n) = \nu(H'_n) = h$.
Se $H_n$ tem uma carta hamiltoniana $H_{n-1}$ com $cd(H_{n-1}) = h$, como $H_{n-1} \subset H'_n$ (já que $V(H_n) = V(H'_n)$), então $cd(H_{n-1}) = h \leq cd(H'_n)$ (pela proposição 2.4.7) e como $cd(H'_n) \leq \nu(H'_n) = h$ (pela proposição 2.4.3) $\Longrightarrow h \leq cd(H'_n) \leq h \Longrightarrow cd(H'_n) = h$.
Daí, $cd(H'_n) = \nu(H'_n) = h$.
Então, $H'_n$ é normal.

ii) Então, suponha que toda carta hamiltoniana de $H_n$ tem diferença cíclica $h-1$.
Consideremos os casos:

1º **caso)** $k \geq 3$ e $h \geq 5$
Segue trivialmente pela proposição 3.2.2.

2º **caso)** $h = 4$ e $k \geq 4$
Pela observação anterior, temos que para $h = 4$ e $k \geq 4$ a demonstração segue trivialmente para o caso 1 da proposição 3.2.2. Então consideremos apenas o caso 2 da proposição 3.2.2.

Usando as notações da proposição 3.1.11 deduzimos da análise das cartas hamiltonianas que $T^{(0)} = \{x_1\}$ (isto é, $T^{(0)}$ é unitário) $\Longleftrightarrow$ $H_n$ tem outro pólo do tipo $x_1$, digamos $\bar{x}_1$, no qual precede um pólo de um tipo diferente. Argumentos similares podem ser dados para $T^{(k)}$.

Concluímos que ou $h_0 = h_k = 2$, ou o subtorneio dos pólos de $H_n$ é dado por $P_4 = T_{r_4}(x_{k-1}, \bar{x}_1, \bar{x}_{k-1}, x_1)$.

• Quando $h_0 = h_k = 2$, toda carta hamiltoniana de $H'_n$ é normal.

De fato:

Quando $h_0 = h_k = 2$, isto é $|T^{(0)}| = |T^{(k)}| = 2$, então $T^{(0)} = \{x_1, \bar{x}_1\}$ e $T^{(k)} = \{x_{k-1}, \bar{x}_{k-1}\}$. Como $H_n$ tem somente $h = 4$ pólos, então $T^{(i)} = \emptyset$, $\forall\ 1 \leq i \leq k-1$.

Neste caso, temos que toda carta de $H_n$ é normal, isto é, $H_n - x_1$, $H_n - \bar{x}_1$, $H_n - x_{k-1}$ e $H_n - \bar{x}_{k-1}$ são cartas hamiltonianas de $H_n$.

Por exemplo:

• $H_n - x_1$ é normal

de fato, $A_k$ continua sendo ciclo característico de $H_n - x_1$, daí $cc(H_n - x_1) = k$ e $cd(H_n - x_1) = 3$, já que $n = k + 4$, pois daí $n - 1 = cc(H_n - x_1) + cd(H_n - x_1) \Longleftrightarrow n - 1 = k + cd(H_n - x_1) \Longleftrightarrow n = k + cd(H_n - x_1) + 1 \Longleftrightarrow cd(H_n - x_1) + 1 = 4 \Longleftrightarrow cd(H_n - x_1) = 3$.

E como $H_n - x_1$ tem 3 vértices neutros, que são, $\bar{x}_1$, $x_{k-1}$ e $\bar{x}_{k-1}$, então $\nu(H_n - x_1) = cd(H_n - x_1)$.

Portanto, $H_n - x_1$ é normal.

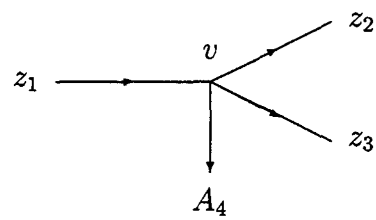
Da mesma forma, se prova que $H_n - x_{k-1}$, $H_n - \bar{x}_{k-1}$ e $H_n - \bar{x}_1$ são normais.

Daí, como $H'_n$ é hipomorfo a $H_n$, então existe uma bijeção $f : V(H_n) \longrightarrow V(H'_n)$ tal que a carta $H_n - v$ é isomorfa à carta $H'_n - f(v)$, $\forall\ v \in V(H_n)$, então toda carta hamiltoniana de $H'_n$ também é normal.

Agora, se assumimos que $H'_n$ não é normal, podemos considerar uma carta normal, digamos $H_{n-1} = H'_n - v$, com ciclo característico $A_k$ (pela proposição 3.1.7) e pólos $z_1$, $z_2$, $z_3$, pois toda carta hamiltoniana de $H_n$ tem diferença cíclica $h - 1 = 4 - 1 = 3$, logo, $cd(H_{n-1}) = 3$ e como $H_{n-1}$ é normal, então $cd(H_{n-1}) = \nu(H_{n-1})$ =pólos de $H_{n-1} = |P_{A_k}| = 3$. E, assumindo $v \longrightarrow A_k$ e $z_1 \longrightarrow v \longrightarrow \{z_2, z_3\}$ em $H'_n$, podemos obter uma carta hamiltoniana não-normal de $H'_n$ deletando $z_2$ como na proposição 3.2.2, isto é, considerando $H^2_{n-1} = H'_n - z_2$, existe um vértice $a_{p_2} \in A_k$ tal que $\{v, a_{p_2}\} \cup \{z_j / j \notin \{1, 2\}\}$ é o conjunto dos vértices neutros de $H^2_{n-1}$, cujo complemento em $H^2_{n-1}$ não é um ciclo característico. Logo, $H^2_{n-1} = H'_n - z_2$ é uma carta hamiltoniana não normal.

Absurdo, pois já vimos que neste caso, toda carta hamiltoniana de $H'_n$ é normal.

• No outro caso, note que $k \leq 4$, já que $\bar{x}_1 \longrightarrow \bar{x}_{k-1}$, e como $k \geq 4$ também, então $k = 4$, $n = 8$ e os pólos de $H_8$ formam o caminho $x_3 \longrightarrow \bar{x}_1 \longrightarrow \bar{x}_3 \longrightarrow x_1$.




Escolha uma carta normal $H_7 = H_8' - v$; $v \in \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$, cujo ciclo característico é $A_4$. Então: $h - 1 = cd(H_7) + cc(H_7) \iff 7 = cd(H_7) + 4 \iff cd(H_7) = 3$. Como $H_7$ é normal, $\nu(H_7) = cd(H_7) = 3$. Logo, $H_7$ tem 3 vértices neutros (ou pólos).

Supondo $H_8'$ não normal e que $v \longrightarrow A_4$ (ou seja, $A_4$ não é um ciclo característico de $H_8'$), então somente 1 dos vértices neutros $x_3, z, x_1$ em $H_7$ precederia $v$.

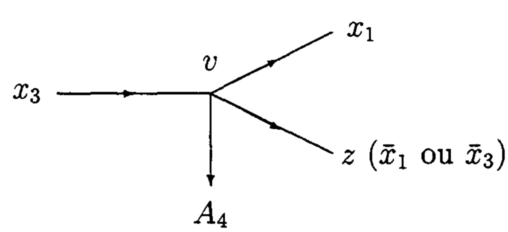
**De fato:**

Estamos considerando o caso 2 da proposição 3.2.2, então sabemos pela figura anterior que somente 1 vértice neutro, $z_1$, precede $v$. Logo, $z_1$ é um dos vértices neutros $x_3, z, x_1$ de $H_7$.

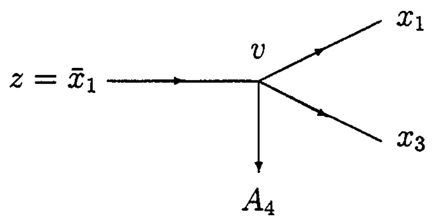
Temos que $x_3, z, x_1$ são os vértices neutros de $H_7$, pois como $H_7$ é normal, então vértices neutros de $H_7$ = pólos de $H_7$. Daí, $H_7$ tem 3 pólos e como $T^{(0)}(H_7) \neq \emptyset$ e $T^{(4)}(H_7) \neq \emptyset$, então existe pelo menos 1 pólo do tipo $x_1$ e pelo menos 1 pólo do tipo $x_3$. Logo, falta um outro pólo $z$, que ou é $\bar{x}_1$ ou é $\bar{x}_3$, pois são os outros pólos de $H_8$.

Os vértices neutros de $H_8'$ seriam:

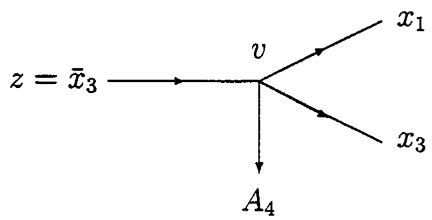
1º) $v, z, x_1$, quando $x_3$ precede $v$.



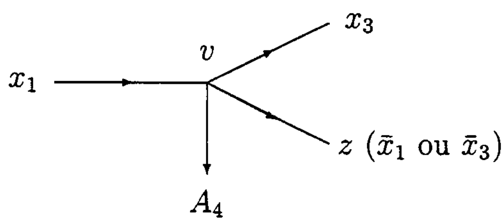
2º) $v, x_3, x_1, a_3, a_4$, quando $z = \bar{x}_1$ precede $v$.




3º) $v, x_3, x_1$, quando $z = \bar{x}_3$ precede $v$.




4º) $v, x_3, z, a_1, a_4$, quando $x_1$ precede $v$.




Em qualquer caso teríamos $\nu(H_8') \neq 4$, o que é uma contradição, pois como $H_8'$ é hipomorfo a $H_8$, então $\nu(H_8') = \nu(H_8) = h = 4$.

Portanto, $H_8'$ é normal.

3º **caso)** $h = 4$ e $k = 3$

Neste caso, temos que $n = k + h = 7$. Então $H_7$ é um torneio normal com $cc(H_7) = k = 3$ e $cd(H_7) = h = 4$, onde $H_7$ é hipomorfo a $H_7'$.

Seja $H_6 = H_7 - v$ uma carta normal em $H_7$.

Temos que $cd(H_6) = \nu(H_6) = h - 1 = 3$ (pois por hipótese, toda carta hamiltoniana de $H_7$ tem diferença cíclica $h - 1$) e é claro que $H_6$ tem o mesmo ciclo característico $A_3$ (ou $H_3$) que $H_7$, pois tirando $v$ de $H_7$, $A_3$ continua sendo não-conado em $H_6 = H_7 - v$, e como sua ordem é 3, então $A_3$ continua sendo minimal e de comprimento mínimo em $H_6 = H_7 - v$. E o subtorneio dos vértices neutros de $H_6$ (ou pólos, já que $H_6$ é normal) $P_{n-k} = P_3 = \{x_1, z, x_{k-1} = x_2\}$ tem um transmissor $x_2$ e um receptor $x_1$, que são pólos do tipo $x_2 = x_{k-1}$ e $x_1$ respectivamente em $H_7$, já que $T^{(0)} \neq \emptyset$, $T^{(3)} \neq \emptyset$ e $T^{(3)} \longrightarrow T^{(2)} \longrightarrow T^{(1)} \longrightarrow T^{(0)}$.

Agora, suponha que $H'_7$ não é normal e somente 1 dos pólos $x_2$,z,$x_1$ precede $v$ em $H'_7$, pois estamos considerando somente o caso 2 da proposição 3.2.2. Então temos os seguintes casos:

i) $x_2 \longrightarrow v$ em $H'_7$ (os únicos vértices neutros de $H'_7$ são $v, z, x_1$)

ii) $x_1 \longrightarrow v$ em $H'_7$ ($v, x_2, z, a_1, a_3$ são vértices neutros de $H'_7$)

iii) $z \longrightarrow v$ e $z$ é do tipo $x_2$ em $H_6$ (os únicos vértices neutros de $H'_7$ são $v, x_1, x_2$)

iv) $z \longrightarrow v$ e $z$ é do tipo $y_1$ em $H_6$ ($v, x_1, x_2, a_2, a_3$ são vértices neutros de $H'_7$)

v) $z$ precede $v$ em $H'_7$ e ele é um pólo do tipo $x_1$, enquanto é um pólo do tipo $y_2$ em $H_6$

Nos casos i), ii), iii) e iv) chegamos que $\nu(H'_7) \neq 4$, o que é um absurdo, pois sendo $H_7$ hipomorfo a $H'_7$, temos que $\nu(H'_7) = \nu(H_7) = 4$.

Já no caso v), temos que $H'_7$ tem 4 vértices neutros, mas é fácil ver que $H'_7$ tem uma carta normal, que é o subtorneio $H'_7 - a_3$, com *c.c.* 4, no qual é claro que não pode ser uma carta de $H_7$. Isto contradiz a hipótese que $H_7$ e $H'_7$ são hipomorfos.

Portanto, $H'_7$ é normal.

4º **caso)** $h = 3$ e $k \geq 4$ ($n = k + h \geq 7$)

Neste caso, não pode ocorrer que toda carta hamiltoniana tem c.d. $h - 1$.

De fato:

como $H_n$ é normal, então $cd(H_n) = \nu(H_n) = h = 3$ =pólos de $H_n$, logo $H_n$ tem exatamente 1 pólo do tipo $x_1$ ou tem exatamente 1 pólo do tipo $x_{k-1}$ (pois $T^{(0)} \neq \emptyset$, $T^{(k)} \neq \emptyset$, $T^{(0)}$ contém somente pólos do tipo $x_1$ e $T^{(k)}$ contém somente pólos do tipo $x_{k-1}$).

Em qualquer caso, $H_n$ tem uma carta hamiltoniana com c.d. $h = 3$.

De fato:

- Se $H_n$ tem exatamente 1 pólo $z$ do tipo $x_1$, isto é,

$$\begin{cases} z \longrightarrow a_1 \\ a_2 \longrightarrow z \\ \dots \\ a_k \longrightarrow z \end{cases}$$

então $H_n$ tem um carta hamiltoniana $H_n - z$ tal que $A_k - a_1$ é não conado em $H_n - z$ (mas $A_k - a_1$ é conado por $z$ em $H_n$, já que $z$ é pólo do tipo $x_1$). Logo, $cc(H_n - z) = k - 1$. Daí, $cd(H_n - z) = (n-1) - (k-1) \Longrightarrow n = cd(H_n - z) + k \Longrightarrow cd(H_n - z) = h = 3$, já que $n = k + h$.

Portanto, $H_n$ tem uma carta hamiltoniana $H_n - z$ com $cd(H_n - z) = h = 3$.

- Se $H_n$ tem exatamente 1 pólo $z'$ do tipo $x_{k-1}$, isto é,

$$\begin{cases} z' \longrightarrow a_1 \\ \ldots \\ z' \longrightarrow a_{k-1} \\ a_k \longrightarrow z' \end{cases}$$

então $H_n$ tem uma carta hamiltoniana $H_n - z'$ tal que $A_k - a_k$ é não conado em $H_n - z'$ (mas $A_k - a_k$ é conado por $z'$ em $H_n$, já que $z'$ é pólo do tipo $x_{k-1}$). Logo, $cc(H_n - z') = k - 1$. Daí, $cd(H_n - z') = h = 3$ (é análogo).

Portanto, $H_n$ tem uma carta hamiltoniana $H_n - z'$ com $cd(H_n - z') = h = 3$.

Consequentemente $H'_n$ tem que ser normal (pois satisfaz a condição i).

5º **caso)** $h = 3$ e $k = 3$

Neste caso, $n = k + h = 6$, $cd(H_6) = 3$ e $cc(H_6) = 3$.

Seja $H'_6$ hipomorfo a $H_6$, onde $H_6$ é normal. Então $\nu(H'_6) = \nu(H_6) = cd(H_6) = h = 3$, pela observação 3.1.23.

$\vdash$ $H'_6$ é normal

Suponha que $H'_6$ não é normal. Então $cd(H'_6) \neq \nu(H'_6) = 3$, e como $cd(H'_6) = 2$ ou 3, já que $cd(H'_6) \leq \nu(H'_6)$, então $cd(H'_6) = 2$.

Daí, ou $H'_6$ é o torneio bineutro $A_6$, ou $H'_6$ é o torneio obtido de $A_6$ pela inverção do arco $(a_2, a_5)$ (pela caracterização estrutural dos torneios $H_n$ com $cd(H_n) = 2$ na seção 2.5). Isto contradiz a hipótese $\nu(H'_6) = 3$, já que $\nu(A_6) = 2$ (por definição de bineutro) e $\nu(H'_6) = 4$ pelo exemplo 3 da seção 2.3.

Logo, $H'_6$ é normal.

6º **caso)** $h = 2$ e $k \geq 3$

Agora, $n = k + h \geq 5$, $cd(H_n) = h = 2$ e $cc(H_n) = k \geq 3$

Como $cd(H_n) = 2$ e $n \geq 5$, então $H_n$ é o torneio bineutro $A_n$.

Seja $H'_n$ hipomorfo a $H_n = A_n$, onde $H_n$ é normal. Como todo torneio bineutro $A_k$; $k \geq 4$ pode ser reconstrutível, pela observação 3.1.23, temos que $H'_n$ é isomorfo a $H_n = A_n$. Daí, como $A_n$ é normal e $H'_n \simeq A_n$, então $H'_n$ é normal.

Logo, todo torneio $H'_n$ que é hipomorfo a $A_n$ deve ser normal. □

**Observação 3.2.5** *A afirmação da proposição 3.2.4 é trivialmente verdade se $n = 4$ e é falsa se $n = 3$.*

**De fato:**

i) $n = 4$: não existem torneios normais de ordem 4, pelo ítem 2 do exemplo 3.1.5.

ii) $n = 3$: o 3-ciclo $H_3$ é normal (pelo ítem 1 do exemplo 3.1.5), $H_3$ é hipomorfo a $T_{r_3}$ (pelo exemplo 3.1.21) e $T_{r_3}$ é o torneio transitivo não normal, sendo $T_{r_3}$ não hamiltoniano.

## 3.3 Composição Canônica do subtorneio $P_{n-k}$

Infelizmente, a proposição 3.1.11 não estabelece as componentes $T^{(i)}$ univocamente. Então, precisamos escolher uma composição razoável do subtorneio $P_{n-k}$ dos pólos, tais que os dois torneios normais $H_n$ e $H'_n$ são isomorfos se, e somente se, eles tem a mesma característica cíclica e a mesma composição também. Para este propósito, damos a seguinte definição:

**Definição 3.3.1** *Seja $H_n$ um torneio normal e $T^*_{r_j}(P^{(1)}, P^{(2)}, ..., P^{(j)})$ a condensação do subtorneio $P_{n-k}$ dos pólos. Construímos uma composição de $P_{n-k}$ desta forma:*

- *Primeiramente colocamos:*

*$U^{(1)} = P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(r_1)}$, a união máxima das componentes consecutivas formadas pelos pólos dos tipos $x_1, x_2, y_1$;*

*$U^{(2)} = P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(r_2)}$, a união máxima das componentes consecutivas formadas pelos pólos dos tipos $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$;*

..........

*$U^{(i)} = P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(r_i)}$, a união máxima das componentes consecutivas formadas pelos pólos dos tipos $x_1, x_2, ..., x_{i+1}, y_1, y_2, ..., y_i$;*

..........

*$U^{(k-2)} = P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(r_{k-2})}$, a união máxima das componentes consecutivas formadas pelos pólos dos tipos $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, y_1, y_2, ..., y_{k-2}$;*

$U^{(k-1)} = P^{(2)} \cup P^{(3)} \cup ... \cup P^{(j-1)}$

- *Finalmente, colocamos:*

$\tilde{T}^{(0)} = P^{(1)}$;

$\tilde{T}^{(1)} = U^{(1)}$;

$\tilde{T}^{(2)} = U^{(2)} - U^{(1)}$;

..........

$\tilde{T}^{(i)} = U^{(i)} - U^{(i-1)}$;

..........

$\tilde{T}^{(k-1)} = U^{(k-1)} - U^{(k-2)}$;

$\tilde{T}^{(k)} = P^{(j)}$;

*e chamamos $T^*_{r_{k+1}}(\tilde{T}^{(0)}, \tilde{T}^{(1)}, ..., \tilde{T}^{(k)})$ a* **composição canônica de** $P_{n-k}$.

**Observação 3.3.2** *Esta composição é única, pois as uniões*

$$\tilde{T}^{(1)} \cup \tilde{T}^{(2)} = U^{(2)}, ..., \tilde{T}^{(1)} \cup \tilde{T}^{(2)} \cup ... \cup \tilde{T}^{(i)} = U^{(i)}, ..., \tilde{T}^{(1)} \cup ... \cup \tilde{T}^{(k-2)} = U^{(k-2)}$$

*são definidas de um modo máximo.*

Se $H_m$ é um torneio normal qualquer, denotaremos por $T^{(i)}(H_m)$ a i-ésima componente da composição do subtorneio dos pólos e por $h_i(H_m) = |T^{(i)}(H_m)|$ sua ordem.

Em particular, escreveremos $T^{(i)} = T^{(i)}(H_n)$ e $h_i = |T^{(i)}|$.

**Proposição 3.3.3** *Dois torneios normais $H_n$ e $H'_n$ são isomorfos se, e somente se:*
*a) eles tem a mesma característica cíclica;*
*b) eles tem a mesma composição canônica, isto é:*
*1) se $0 \leq i \leq k$, suas i-ésimas componentes $T^{(i)}$ e $T'^{(i)}$ são isomorfas;*
*2) os vértices correspondentes das i-ésimas componentes são do mesmo tipo.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Se os torneios $H_n$ e $H'_n$ são isomorfos, as condições a) e b) são óbvias.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, sejam $A_k$ e $A'_k$ os subtorneios bineutros característicos de $H_n$ e $H'_n$ respectivamente, já que $H_n$ e $H'_n$ são normais e tem a mesma característica cíclica $k$.

$\vdash$ $H_n$ e $H'_n$ são isomorfos

Existe um isomorfismo único entre $A_k$ e $A'_k$, quando $k \geq 4$, pois a menos de isomorfismo, existe apenas 1 torneio bineutro.

Analogamente, se $k = 3$, o isomorfismo entre $A_3$ e $A'_3$ é único também, pois os pólos $a'_1$ e $a'_3$ de $A'_3$ devem corresponder aos pólos $a_1$ e $a_3$ de $A_3$ (pelas observações da proposição 3.1.11).

Finalmente, este isomorfismo pode ser estendido a um isomorfismo entre $H_n$ e $H'_n$, pelas condições a) e b). □

**Observação 3.3.4** *Consequentemente o isomorfismo entre $H_n$ e $H'_n$ é único a menos de isomorfismos de suas componentes.*

## 3.4 A reconstrução de torneios normais

Nesta seção provaremos que todo torneio normal de ordem $n \geq 5$ é reconstrutível.

$H_n$ denotará sempre um torneio normal e h(k) será sua diferença cíclica (característica cíclica). É claro que assumimos $k \geq 3$ e $n \geq 5$ (logo, $h \geq 2$).

De agora em diante vamos referir à composição

$$P_h = T^*_{r_{k+1}}(T^{(0)}, ..., T^{(k)})$$

do subtorneio dos pólos de $H_n$ que verifica as condições dadas na proposição 3.1.11 e satisfaz as seguintes condições:

a) $T^{(0)}$ ($T^{(k)}$) contém todos pólos do tipo $x_1$ ($x_{k-1}$) que pode conter de acordo com a proposição 3.1.11, isto é, $T^{(0)}$ ($T^{(k)}$) contém todos os pólos do tipo $x_1$ (do tipo $x_{k-1}$) que não precede (sucede) nenhum pólo dos outros tipos.

b) para todo $1 \leq i \leq k-1$, $V^{(i)} = \cup_{j=0}^{i} T^{(j)}$ tem ordem máxima, isto é, $V^{(i)}$ é a união de todas as componentes fortes consecutivas de $P_h$ que contém somente pólos dos tipos $x_j$; $1 \leq j \leq min\{k-1, i+1\}$, e $y_l$; $1 \leq l \leq i$.

**Observação 3.4.1** *Pela condição a), todos os resultados dados na seção 3.2 com relação às cartas hamiltonianas de $H_n$ estarão disponíveis nesta seção também.*

**Lema 3.4.2** *Se $H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$, $cc(H_{n-1}) = k$ e se $h_j(H_{n-1}) = h_j - 1$ para algum $0 \leq j \leq k$, então, para todo $i \neq j$, existe um isomorfismo de $T^{(i)}(H_{n-1})$ em $T^{(i)}(H_n)$ que preserva o tipo dos pólos.*

**Demonstração:**

Como $H_{n-1}$ é normal e $cc(H_{n-1}) = k$, então $cd(H_{n-1}) = h - 1$, já que $n = k + h$. Logo, consideremos a composição:

$$P_{h-1} = T^*_{r_{k+1}}(T^{(0)}(H_{n-1}), T^{(1)}(H_{n-1}), ..., T^{(k)}(H_{n-1}))$$

Como $H_n$ é normal, $cc(H_n) = k$ e $cd(H_n) = h$, então consideremos a composição:

$$P_h = T^*_{r_{k+1}}(T^{(0)}, T^{(1)}, ..., T^{(j')}, ..., T^{(k)})$$

Seja $v$ um pólo de $H_n$, então $v \in T^{(j')}(H_n)$, para algum $j'; 0 \leq j' \leq k$ e seja $\phi : H_{n-1} \longrightarrow H_n - v$ um isomorfismo que preserva a composição dos dois torneios, isto é, $T^{(i)}(H_{n-1}) \longrightarrow T^{(j)}(H_{n-1}) \Longleftrightarrow \phi(T^{(i)}(H_{n-1})) \longrightarrow \phi(T^{(j)}(H_{n-1}))$.

Temos que $H_n - v$ é normal, já que $H_n - v$ é isomorfo a $H_{n-1}$ e $H_{n-1}$ é normal. Então, consideremos a composição:

$$P_{h-1} = T^*_{r_{k+1}}(T^{(0)}(H_n - v), T^{(1)}(H_n - v), ..., T^{(k)}(H_n - v))$$

Segue de $v \in T^{(j')}(H_n)$ que $h_i(H_{n-1}) = h_i(H_n - v) \geq h_i$, $\forall\ i \geq j'$.

Já que $h_j(H_{n-1}) = h_j - 1$ por hipótese, isto é, $|T^{(j)}(H_{n-1})| = |T^{(j)}(H_n)| - 1$, temos que $v \in T^{(j)}(H_n)$ e a inclusão de $H_n - v$ em $H_n$ induz um isomorfismo $\psi_i : T^{(i)}(H_n - v) \longrightarrow T^{(i)}(H_n)$, $\forall\ i \neq j$, que, é claro, preserva os tipos dos pólos.

Se considerarmos o isomorfismo $\phi_i : T^{(i)}(H_{n-1}) \longrightarrow T^{(i)}(H_n - v)$ induzido por $\phi$, então $\psi_i \bullet \phi_i$, $i \neq j$, são os isomorfismos que queremos.

$$\psi_i \bullet \phi_i : T^{(i)}(H_{n-1}) \longrightarrow T^{(i)}(H_n - v) \longrightarrow T^{(i)}(H_n)$$

□

**Lema 3.4.3** *Se $H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$ e $cc(H_{n-1}) = k - 1$ então necessariamente $k \geq 4$ e $v \in T^{(0)}(H_n) \cup T^{(K)}(H_n)$ deve existir tal que $H_{n-1} \simeq H_n - v$.*

*Além disso, temos o seguinte:*

*i) se $v \in T^{(K)}(H_n)$, então $\forall\ j = 0, ..., k-2$ existe um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j)}(H_{n-1})$ que preserva o tipo dos pólos;*

*ii) se $v \in T^{(0)}(H_n)$, então $\forall\ j = 2, ..., k$ existe um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j-1)}(H_{n-1})$ que leva pólos dos tipos $x_i$ e $y_i$ em pólos dos tipos $x_{i-1}$ e $y_{i-1}$ respectivamente.*

**Demonstração:**

Como $H_n$ é normal com $cc(H_n) = k$ e $cd(H_n) = h$, então $n = k+h$. Assim, sendo $H_{n-1}$ uma carta normal de $H_n$ com $cc(H_{n-1}) = k-1$, temos que $cd(H_{n-1}) = \nu(H_{n-1}) = h$.

Daí, já que $cc(H_{n-1}) = k - 1 \geq 3$, então $k \geq 4$.

Além disso, $v \in T^{(0)}(H_n) \cup T^{(k)}(H_n)$ deve existir tal que $H_{n-1} \simeq H_n - v$.

De fato, como $cc(H_{n-1}) = k - 1$ e $cc(H_n) = k$, então $H_{n-1} = H_n - v'$, onde $v'$ cona o ciclo característico $A_{k-1}$ de $H_{n-1}$, isto é, $v' \longrightarrow a_1, v' \longrightarrow a_2, ..., v' \longrightarrow a_{k-1}$ ou $a_2 \longrightarrow v', a_3 \longrightarrow v', ..., a_k \longrightarrow v'$. Temos que no primeiro caso, $a_k \longrightarrow v'$ e no segundo caso, $v' \longrightarrow a_1$, pois $A_k$ é não conado em $H_n$, já que $A_k$ é ciclo característico de $H_n$. Logo, $v' \in V(H_n) - V(A_k)$ é um pólo de $H_n$ do tipo $x_1$ (no segundo caso) ou $x_{k-1}$ (no primeiro caso). Assim, existe um pólo $v$ de $H_n$ do tipo $x_1$ ou $x_{k-1}$ tal que $H_n - v' \simeq H_n - v$, ou seja, $\exists\ v \in T^{(0)}(H_n) \cup T^{(k)}(H_n)$ tal que $H_{n-1} \simeq H_n - v$. Daí, existe $\phi : H_{n-1} \longrightarrow H_n - v$ homomorfismo bijetor.

Agora, vamos demonstrar as partes i) e ii) do lema.

i) Assuma $T^{(k)} = \{v_1\}$, isto é, $v_1$ é um pólo de $H_n$ do tipo $x_{k-1}$ ($v_1 \longrightarrow a_1, ..., v_1 \longrightarrow a_{k-1}, a_k \longrightarrow v_1$) e seja $\phi : H_n - v_1 \longrightarrow H_{n-1}$ um isomorfismo que preserva a composição dos torneios, ou seja, $T^{(i)}(H_n - v_1) \longrightarrow T^{(j)}(H_n - v_1) \Longleftrightarrow \phi(T^{(i)}(H_n - v_1)) \longrightarrow \phi(T^{(j)}(H_n - v_1))$.

Temos as seguintes composições para $H_{n-1}$ e $H_n - v_1$:

$$P_h = T_{r_k}(T^{(0)}(H_{n-1}), T^{(1)}(H_{n-1}), ..., T^{(k-1)}(H_{n-1}))$$

$$P_h = T_{r_k}(T^{(0)}(H_n - v_1), T^{(1)}(H_n - v_1), ..., T^{(k-1)}(H_n - v_1))$$

Temos que $a_k$ e qualquer pólo possível do tipo $y_{k-1}$ em $H_n$ são pólos do tipo $x_{k-2}$ em $H_n - v_1$ e o tipo dos outros pólos continua o mesmo em $H_n - v_1$ como em $H_n$.

De fato, como $cc(H_n - v_1) = k - 1$, então $A_{k-1}$ é o ciclo característico de $H_n - v_1$ e os pólos de $H_n - v_1$ podem ser dos tipos $x_1, ..., x_{k-2}$ ou $y_1, ..., y_{k-2}$. Logo, $a_k$ passa a ser um pólo do tipo $x_{k-2}$ em $H_n - v_1$, já que $a_k \longrightarrow a_1, a_k \longrightarrow a_2, ..., a_k \longrightarrow a_{k-2}, a_{k-1} \longrightarrow a_k$, por definição de bineutro. Além disso, os pólos do tipo $y_{k-1}$ em $H_n(y_{k-1} \longrightarrow a_1, ..., y_{k-1} \longrightarrow a_{k-2}, a_{k-1} \longrightarrow y_{k-1}, y_{k-1} \longrightarrow a_k)$ passam a ser do tipo $x_{k-2}$ em $H_n - v_1$ ($x_{k-2} \longrightarrow a_1, ..., x_{k-2} \longrightarrow a_{k-2}, a_{k-1} \longrightarrow x_{k-2}$).

Então, $T^{(i)}(H_n) = T^{(i)}(H_n - v_1)$, $0 \leq i \leq k-2$, e $T^{(k-1)}(H_n - v_1) = T^{(k-1)}(H_n) \cup \{a_k\}$, pois como $T^{(k-1)}(H_n - v_1)$ tem que ser não vazio, então $a_k$ vai para $T^{(k-1)}(H_n - v_1)$, já que $T^{(k-1)}(H_n)$ pode ser vazio.

Logo, para todo $0 \leq j \leq k-2$ $\phi$ induz um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j)}(H_{n-1})$ que preserva o tipo dos pólos, já que o isomorfismo $\phi$ preserva a composição dos torneios $H_n - v_1$ e $H_{n-1}$.

ii) Vamos assumir agora $T^{(0)}(H_n) = \{v_2\}$, isto é, $v_2$ é um pólo do tipo $x_1$ ($v_2 \longrightarrow a_1, a_2 \longrightarrow v_2, a_3 \longrightarrow v_2, ..., a_k \longrightarrow v_2$) e seja $\psi : H_n - v_2 \longrightarrow H_{n-1}$ um isomorfismo que preserva a composição dos torneios, ou seja, $T^{(i)}(H_n - v_2) \longrightarrow T^{(j)}(H_n - v_2) \Longleftrightarrow \psi(T^{(i)}(H_n - v_2)) \longrightarrow \psi(T^{(j)}(H_n - v_2))$.

Um vértice $v$ de $H_n - v_2$ é um pólo do tipo $x_1$ em $H_n - v_2$ se ele é um pólo do tipo $y_1$ em $H_n$ ou se ele coincide com $a_1$, enquanto $v$ é um pólo do tipo $x_i(y_i)$, $1 \leq i \leq k-2$, em $H_n - v_2$ se ele é um pólo do tipo $x_{i+1}(y_{i+1})$ em $H_n$.

De fato:

$v \in H_n - v_2$ é um pólo do tipo $x_1$ em $H_n - v_2$, isto é

$$\begin{cases} v \longrightarrow a_1' = a_2 \\ a_2' = a_3 \longrightarrow v \\ a_3' = a_4 \longrightarrow v \\ \dots \\ a_{k-1}' = a_k \longrightarrow v \end{cases}$$

se ele é um pólo do tipo $y_1$ em $H_n$, ou seja

$$\begin{cases} a_1 \longrightarrow v \\ v \longrightarrow a_2 \\ a_3 \longrightarrow v \\ a_4 \longrightarrow v \\ \dots \\ a_k \longrightarrow v \end{cases}$$

ou ele coincide com $a_1$, pois

$$\begin{cases} a_1 \longrightarrow a_2 = a_1' \\ a_3 = a_2' \longrightarrow a_1 \\ a_4 = a_3' \longrightarrow a_1 \\ \dots \\ a_k = a_{k-1}' \longrightarrow a_1 \end{cases}$$

onde $A_{k-1}$ tal que $V(A_{k-1}) = \{a_1', a_2', a_3', ..., a_{k-1}'\}$ é o ciclo característico de $H_n - v_2$ e assim os pólos de $H_n - v_2$ podem ser dos tipos $x_1, ..., x_{k-2}$ ou $y_1, ..., y_{k-2}$. E $A_k$ tal que $V(A_k) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ é ciclo característico de $H_n$ e $a_1$ passa a ser pólo do tipo $x_1$ em $H_n - v_2$, pela relação anterior.

Enquanto $v$ é um pólo do tipo $x_i(y_i)$, $1 \leq i \leq k-2$, em $H_n - v_2$, isto é

$$(x_i)\begin{cases} v \longrightarrow a'_1 = a_2 \\ \dots \\ v \longrightarrow a'_{i-1} = a_i \\ v \longrightarrow a'_i = a_{i+1} \\ a_{i+2} = a'_{i+1} \longrightarrow v \\ \dots \\ a_k = a'_{k-1} \longrightarrow v \end{cases} \qquad (y_i)\begin{cases} v \longrightarrow a'_1 = a_2 \\ \dots \\ v \longrightarrow a'_{i-1} = a_i \\ a_{i+1} = a'_i \longrightarrow v \\ v \longrightarrow a'_{i+1} = a_{i+2} \\ a_{i+3} = a'_{i+2} \longrightarrow v \\ a_{i+4} = a'_{i+3} \longrightarrow v \\ \dots \\ a_k = a'_{k-1} \longrightarrow v \end{cases}$$

se ele é um pólo do tipo $x_{i+1}$ ($y_{i+1}$) em $H_n$, isto é

$$(x_{i+1})\begin{cases} v \longrightarrow a_1 \\ \dots \\ v \longrightarrow a_i \\ v \longrightarrow a_{i+1} \\ a_{i+2} \longrightarrow v \\ \dots \\ a_k \longrightarrow v \end{cases} \qquad (y_{i+1})\begin{cases} v \longrightarrow a_1 \\ \dots \\ v \longrightarrow a_i \\ a_{i+1} \longrightarrow v \\ v \longrightarrow a_{i+2} \\ a_{i+3} \longrightarrow v \\ a_{i+4} \longrightarrow v \\ \dots \\ a_k \longrightarrow v \end{cases}$$

Então, $T^{(0)}(H_n - v_2) = T^{(1)}(H_n) \cup \{a_1\}$, pois como $T^{(0)}(H_n - v_2)$ tem que ser não vazio, então $a_1$ vai para $T^{(0)}(H_n - v_2)$, já que $T^{(1)}(H_n)$ pode ser vazio. E ainda $T^{(i-1)}(H_n - v_2) = T^{(i)}(H_n)$, para todo $2 \leq i \leq k$, isto é:

- para $i = 2$: $T^{(1)}(H_n - v_2) = T^{(2)}(H_n)$
- para $i = 3$: $T^{(2)}(H_n - v_2) = T^{(3)}(H_n)$

$\vdots$

- para $i = k$: $T^{(k-1)}(H_n - v_2) = T^{(k)}(H_n)$

Daí, para todo $2 \leq j \leq k$, $\psi$ induz um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j-1)}(H_{n-1})$ que leva pólos do tipo $x_i(y_i)$ em pólos do tipo $x_{i-1}(y_{i-1})$, já que o isomorfismo $\psi$ preserva a composição dos torneios $H_n - v_2$ e $H_{n-1}$. □

**Lema 3.4.4** *Seja $p_i = h_i$, $1 \leq i \leq k-1$, e $p_i = h_i - 1$ se $i \in \{0, k\}$.*

*Então para todo $j \neq k-1$, $0 \leq j \leq k$, tal que $p_j \neq 0$ e tal que $j = k-2 \Rightarrow h_{k-1} > 0$ existe uma carta normal $H^{(j)}_{n-1}$ com $cc(H^{(j)}_{n-1}) = k$ e $h_j(H^{(j)}_{n-1}) = h_j - 1$.*

*Além disso, se $j \in \{k-2, k-1\}$ e $h_j \geq j - k + 3$, então existe uma carta normal $H^{(j)}_{n-1}$ tal que $h_i(H^{(j)}_{n-1}) = h_i$, $i = 0, ..., j-1$ e $h_j(H^{(j)}_{n-1}) < h_j$.*

**Demonstração:**

Seja $H_n$ normal com $cc(H_n) = k$ e $cd(H_n) = h$.

Trivialmente segue de $p_j \neq 0$ que obtemos uma carta normal com *c.c.* $k$, deletando qualquer vértice de $T^{(j)}$.

De fato, como $j \neq k-1$, $0 \leq j \leq k$ tal que $p_j \neq 0$, então $|T^{(0)}| \geq 2$, $|T^{(k)}| \geq 2$ e $|T^{(1)}| = |T^{(2)}| = ... = |T^{(k-2)}| \geq 1$, já que $p_i = h_i$ se $1 \leq i \leq k-1$, e $p_i = h_i - 1$ se $i \in \{0, k\}$. Dessa forma, obtemos uma carta normal $H_{n-1}^{(j)} = H_n - v_j$ com *c.c.* $k$, deletando qualquer vértice $v_j$ de $T^{(j)}(H_n)$, pois daí $\nu(H_{n-1}^{(j)}) = h-1$, sendo $v_j$ um vértice neutro de $H_n$ e então de $H_{n-1}^{(j)}$. E como $n = k+h$, temos que $cd(H_{n-1}^{(j)}) = h-1$. Logo, $cd(H_{n-1}^{(j)}) = \nu(H_{n-1}^{(j)})$ e então $H_{n-1}^{(j)}$ é normal. E ainda $A_k$ continua sendo o ciclo característico de $H_{n-1}^{(j)}$, ou seja, $cc(H_{n-1}^{(j)}) = k$.

Tal carta preserva o tipo dos pólos de $H_n$. Agora, falta ver que $h_j(H_{n-1}^{(j)}) = h_j - 1$.

• $j = 0$ e $j = k$

Se $p_0 = h_0 - 1 = |T^{(0)}| - 1 \neq 0$ ($p_k = h_k - 1 = |T^{(k)}| - 1 \neq 0$), isto é, $|T^{(0)}| \geq 2$ ($|T^{(k)}| \geq 2$) e $v$ é qualquer vértice de $T^{(0)}$ (de $T^{(k)}$) então $T^{(i)}(H_n - v) = T^{(i)}(H_n)$ sempre que $i \neq 0$ ($i \neq k$) e $h_0(H_n - v) = h_0 - 1$ ($h_k(H_n - v) = h_k - 1$).

• $1 \leq j \leq k-1$

Um resultado similar pode não valer se deletarmos um vértice $v$ de $T^{(j)}$ quando $1 \leq j \leq k-1$ e $p_j \neq 0$.

Entretanto, se $p_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k-1$, então a última componente forte (isto é, trivial ou hamiltonina) de $T^{(j)}$ é um torneio hamiltoniano $H^{(j)}$ que contém pelo menos 1 pólo, digamos $\bar{u}$, ou do tipo $y_j$ ou do tipo $x_{j+1}$, já que $p_j = |T^{(j)}| \neq 0$ e $T^{(j)}$; $1 \leq j \leq k-1$ contém pólos dos tipos $y_j$ e $x_{j+1}$.

Fixe um vértice $\bar{v} \in T^{(j)} - H^{(j)}$ se existir algum; caso contrário seja $\bar{v}$ ou o sucessor de $\bar{u}$ em um ciclo hamiltoniano de $H^{(j)}$, se $|H_j| > 1$, ou $\bar{v} = \bar{u}$, se $|H^{(j)}| = 1$.

De qualquer forma a carta $H_{n-1}^{(j)} = H_n - \bar{v}$ satisfaz as condições pedidas, ou seja, $cc(H_{n-1}^{(j)}) = k$ e $h_j(H_{n-1}^{(j)}) = h_j - 1$, já que $\bar{v} \in T^{(j)}(H_n)$.

Além disso, se $j \in \{k-2, k-1\}$ e $h_j \geq j - k + 3$, então existe uma carta normal $H_{n-1}^{(j)}$ tal que $h_i(H_{n-1}^{(j)}) = h_i$, $i = 0, ..., j-1$ e $h_j(H_{n-1}^{(j)}) < h_j$.

De fato:

• para $j = k-2$

seja $j = k-2$ e $h_{k-2} \geq k-2-k+3 = 1$, isto é, $|T^{(k-2)}(H_n)| \geq 1$. Então, existe uma carta $H_{n-1}^{(k-2)} = H_n - v_{k-2}$ tal que $v_{k-2} \in T^{(k-2)}(H_n)$ que é normal (pois temos que $\nu(H_{n-1}^{(k-2)}) = cd(H_{n-1}^{(k-2)}) = h-1$ analisando da mesma forma que anteriormente) e satisfaz $h_i(H_{n-1}^{(k-2)}) = h_i$, para $i = 0, ..., k-3$ e $h_{k-2}(H_{n-1}^{(k-2)}) < h_{k-2}$, uma vez que $|T^{(k-2)}(H_{n-1}^{(k-2)})| = |T^{(k-2)}(H_n)| - 1$, pois $v_{k-2} \in T^{(k-2)}(H_n)$.

• para $j = k-1$

Analogamente, provamos para $j = k-1$ e $h_{k-1} \geq k-1-k+3 = 2$. □

**Lema 3.4.5** *Se $h_1 + ... + h_{k-1} > 0$ então existem em $H_n$ duas cartas normais $H^0_{n-1}$ e $H^k_{n-1}$ tais que $h_0(H^0_{n-1}) = h_0$ e $h_k(H^k_{n-1}) = h_k$.*

**Demonstração:**

Sabemos que $H_n$ é normal, $cc(H_n) = k$ e $cd(H_n) = h$.
Suponha que $h_1 + ... + h_{k-1} > 0$, isto é, $|T^{(1)}(H_n)| + ... + |T^{(k-1)}(H_n)| > 0$.
Segue dos lemas 3.4.2 e 3.4.4 que $H_n$ tem uma carta normal $H_{n-1}$ com $h_i(H_{n-1}) = h_i$, $i = 0, k$, se ou a condição $h_1 + ... + h_{k-3} > 0$ ou $h_{k-1}.h_{k-2} > 0$.
De fato:
• se $h_1 + ... + h_{k-3} > 0$, então $h_j > 0$, pelo menos para algum j; $1 \leq j \leq k-3$, isto é, usando a notação do lema 3.4.4, $p_j = h_j = |T^{(j)}| \neq 0$, para algum j; $1 \leq j \leq k-3$. Fixe tal j. Daí, pelo lema 3.4.4, existe uma carta normal $H^{(j)}_{n-1}$ de $H_n$ com $cc(H^{(j)}_{n-1}) = k$ e $h_j(H^{(j)}_{n-1}) = h_j - 1$. E então, pelo lema 3.4.2, para todo $i \neq j$, existe um isomorfismo de $T^{(i)}(H^{(j)}_{n-1})$ em $T^{(i)}(H_n)$ que preserva o tipo dos pólos. Como $i = 0 \neq j$ e $i = k \neq j$, então existe um isomorfismo de $T^{(0)}(H^{(j)}_{n-1})$ em $T^{(0)}(H_n)$ e existe um isomorfismo de $T^{(k)}(H^{(j)}_{n-1})$ em $T^{(k)}(H_n)$, ou seja, $|T^{(0)}(H^{(j)}_{n-1})| = |T^{(0)}(H_n)|$ e $|T^{(k)}(H^{(j)}_{n-1})| = |T^{(k)}(H_n)|$.
Portanto, existe uma carta normal $H^{(j)}_{n-1}$ em $H_n$ tal que $h_0(H^{(j)}_{n-1}) = h_0$ e $h_k(H^{(j)}_{n-1}) = h_k$.
• se $h_{k-1}.h_{k-2} > 0 \Longrightarrow h_{k-1} > 0$ e $h_{k-2} > 0$, já que $h_j = |T^{(j)}(H_n)| \geq 0$, para todo $j$ $\Longrightarrow h_{k-1} \geq 1$ e $h_{k-2} \geq 1$.
Daí, pelo lema 3.4.4, existe uma carta normal $H^{(k-2)}_{n-1}$ tal que $h_i(H^{(k-2)}_{n-1}) = h_i$ com $i = 0, ..., k-3$ e $h_{k-2}(H^{(k-2)}_{n-1}) < h_{k-2}$, isto é, $|T^{(i)}(H^{(k-2)}_{n-1})| = |T^{(i)}(H_n)|$; $i = 0, ..., k-3$ e $|T^{(k-2)}(H^{(k-2)}_{n-1})| < |T^{(k-2)}(H_n)|$. Na verdade, $h_{k-2}(H^{(k-2)}_{n-1}) = h_{k-2} - 1$, pois $H^{(k-2)}_{n-1} = H_n - v$; $v \in T^{(k-2)}(H_n)$. Daí, como $cc(H^{(k-2)}_{n-1}) = k$, já que $cd(H^{(k-2)}_{n-1}) = h - 1$ e $n = k + h$, temos pelo lema 3.4.2 que para todo $i \neq k-2$, existe um isomorfismo de $T^{(i)}(H^{(k-2)}_{n-1})$ em $T^{(i)}(H_n)$ que preserva o tipo dos pólos. Então, existe uma carta normal $H^{(k-2)}_{n-1}$ em $H_n$ tal que $|T^{(0)}(H^{(k-2)}_{n-1})| = |T^{(0)}(H_n)|$ e $|T^{(k)}(H^{(k-2)}_{n-1})| = |T^{(k)}(H_n)|$, ou seja, $h_0(H^{(k-2)}_{n-1}) = h_0$ e $h_k(H^{(k-2)}_{n-1}) = h_k$.
Caso contrário, seja $h_j > 0$; $j \in \{k-1, k-2\}$. Então, $h_j \geq 1$; $j \in \{k-1, k-2\}$, isto é, $h_{k-1} \geq 1$ ou $h_{k-2} \geq 1$.
Na última componente forte $H^{(j)}$ de $T^{(j)}$ escolha um pólo $\bar{u}$ ou do tipo $y_j$ ou do tipo $x_{j+1}$, já que $h_j = |T^{(j)}| \neq 0$ e $T^{(j)}$; $j \in \{k-1, k-2\}$ tem pólos dos tipos $y_j$ e $x_{j+1}$. Se $\bar{u}$ é um pólo do tipo $x_{j+1}$ escolha outro pólo $u'$ de um tipo diferente se existir algum em $H^{(j)}$, caso contrário coloque $u' = \bar{u}$.
Considere um pólo $\bar{v}$ em $T^{(j)}$ como na prova do lema 3.4.4 com relação a $\bar{u}$, ou seja, fixe um vértice $\bar{v} \in T^{(j)} - H^{(j)}$ se existir algum; caso contrário seja $\bar{v}$ ou o sucessor de $\bar{u}$ em um ciclo hamiltoniano de $H^{(j)}$, se $|H^{(j)}| > 1$, ou $\bar{v} = \bar{u}$, se $|H^{(j)}| = 1$.

Seja $\bar{w} = u'$ se $|H^{(j)}| = 1$ ou seja $\bar{w}$ o predecessor de $u'$ num ciclo hamiltoniano escolhido de $H^{(j)}$ se $|H^{(j)}| > 1$.

Então $H_{n-1}^0 = H_n - \bar{v}$ e $H_{n-1}^k = H_n - \bar{w}$ são as cartas pedidas, isto é, são cartas normais tais que $h_0(H_{n-1}^0) = h_0$ e $h_k(H_{n-1}^k) = h_k$. □

**Proposição 3.4.6** *Todo torneio normal com pelo menos 5 vértices pode ser reconstruído.*

**Demonstração:**

Considere as cartas de um torneio normal $H_n$; $n \geq 5$.

A diferença cíclica $h = \sum_{i=0}^{k} h_i$ é preservada sob hipomorfismo, pois já vimos pela observação 3.1.23 que se $H_n$ e $H'_n$ são torneios normais e hipomorfos, então $\nu(H_n) = \nu(H'_n)$. Daí, $h = cd(H_n) = \nu(H_n) = \nu(H'_n) = cd(H'_n)$. E $min\{h_0, h_k\} \geq 1$, pois $h_0 = |T^{(0)}| \geq 1$ e $h^{(k)} = |T^{(k)}| \geq 1$, sendo $T^{(0)}(H_n) \neq \emptyset$ e $T^{(k)}(H_n) \neq \emptyset$; então a proposição é verdadeira se $h = 2$.

De fato:

Seja $H_n$ normal tal que $cd(H_n) = h = 2$, $cc(H_n) = k \geq 3$ e $H'_n$ um torneio normal qualquer; $n \geq 5$.

Suponha que $H_n$ é hipomorfo a $H'_n$. Daí $H'_n$ também é normal pela proposição 3.2.4.

$\vdash$ $H_n$ é isomorfo a $H'_n$

Como $H_n$ é hipomorfo a $H'_n$, então $2 = h = cd(H_n) = cd(H'_n)$ como demonstrado acima, então $cc(H_n) = cc(H'_n) = n - 2$, já que $n = k + h$. Portanto, $H_n$ e $H'_n$ tem a mesma característica cíclica.

Além disso, $H_n$ e $H'_n$ tem a mesma composição canônica, pois:

• $T^{(0)}(H_n)$ é isomorfo a $T^{(0)}(H'_n)$ e $T^{(k)}(H_n)$ é isomorfo a $T^{(k)}(H'_n)$, já que $h = \sum_{i=0}^{k} h_i = 2$, ou seja, $h_0 = 1$, $h_k = 1$ e $h_i = 0$ para $0 < i < k$. E o mesmo vale para $T^{(i)}(H'_n)$.

• os vértices correspondentes das i-ésimas componentes são do mesmo tipo, já que $T^{(0)}(H_n)$, $T^{(0)}(H'_n)$ só tem pólos do tipo $x_1$ e $T^{(k)}(H_n)$, $T^{(k)}(H'_n)$ só tem pólos do tipo $x_{k-1}$.

Logo, pela proposição 3.3.3, temos que $H_n$ é isomorfo a $H'_n$.

Portanto, $H_n$ é reconstrutível.

Então, suponha $h \geq 3$. Se referirmos ao conjunto $\{H_{n-z}/\ z \in P_h\}$ das $h$ cartas hamiltonianas de $H_n$ (já que $\nu(H_n) = h$), então pela proposição 3.2.1, pelo menos $h - 2$ delas são torneios normais com *c.c.* $k$.

As outras 2 cartas, digamos $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$, podem ser como segue.

1) $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ são torneios normais e $cc(R_{n-1}) = cc(S_{n-1}) = k$.

($\Longleftrightarrow$ $min\{h_0, h_k\} \geq 2$)

2) $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ são torneios normais e $cc(R_{n-1}) = k$, $cc(S_{n-1}) = k-1$.
($\Longleftrightarrow min\{h_0, h_k\} = 1 < max\{h_0, h_k\}$, $k \geq 4$ e $H_n$ tem somente 1 pólo do tipo $x_1(x_{k-1})$ se $h_0 = 1(h_k = 1)$).

3) $R_{n-1}$ é normal, $cc(R_{n-1}) = k$ e $S_{n-1}$ não é normal.
($\Longleftrightarrow min\{h_0, h_k\} = 1 < max\{h_0, h_k\}$ e ou $k = 3$ ou $k \geq 4$ e $H_n$ tem pelo menos 2 pólos do tipo $x_1$ e 2 pólos do tipo $x_{k-1}$).

4) $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ são normais e $cc(R_{n-1}) = cc(S_{n-1}) = k-1$.
($\Longleftrightarrow h_0 = h_k = 1$, $k \geq 4$ e $H_n$ tem somente 1 pólo do tipo $x_1$ e 1 pólo do tipo $x_{k-1}$).

5) $R_{n-1}$ é normal, $cc(R_{n-1}) = k-1$ e $S_{n-1}$ não é normal.
($\Longleftrightarrow h_0 = h_k = 1$, $k \geq 4$ e $H_n$ tem somente 1 pólo do tipo $x_1(x_{k-1})$ sempre que ele tem pelo menos 2 pólos do tipo $x_{k-1}(x_1)$).

6) $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ não são normais.
($\Longleftrightarrow h_0 = h_k = 1$ e ou $k = 3$ ou $k \geq 4$ e $H_n$ tem pelo menos 2 pólos do tipo $x_1$ e 2 pólos do tipo $x_{k-1}$).

**Caso 1:** $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ são torneios normais e $cc(R_{n-1}) = cc(S_{n-1}) = k$.

Para todo $j \in \{0, k\}$, devemos ter $h_j = min\{h_j(H_{n-1})/\ H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n\}+1$ e existe uma carta normal $H^j_{n-1}$ tal que $h_j(H^j_{n-1}) = h_j - 1$.

De fato:

• para $j = 0$: como $T^{(0)}$ contém todos os pólos do tipo $x_1$ que pode conter de acordo com a proposição 3.1.11 (pelas condições a) e b) no começo dessa seção), então:

$h_0 = min\{h_0(H_{n-1})/\ H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n\}+1$, isto é, $|T^{(0)}(H_n)| = min\{|T^{(0)}(H_{n-1})|/\ H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n\}+1 = |T^{(0)}(H_n - z_j)|+1$; $z_j \in T^{(0)}(H_n) \neq \emptyset$, ou seja, $z_j$ é um pólo do tipo $x_1$.

Como toda carta normal $H_{n-1}$ de $H_n$ tem *c.c.* $k$, logo *c.d.* $h-1$ (já que $n = k+h$), então $H_{n-1} = H_n - z_i$; $1 \leq i \leq h$, para toda carta normal $H_{n-1}$ de $H_n$. Portanto, existe uma carta normal $H^0_{n-1} = H_n - z_1$; $z_1 \in T^{(0)}(H_n)$, ou seja, $h_0(H^0_{n-1}) = h_0 - 1$.

• para $j = k$: como $T^{(k)}$ contém todos os pólos do tipo $x_{k-1}$ que pode conter de acordo com a proposição 3.1.11 (pelas condições a) e b) no começo dessa seção), então:

$h_k = min\{h_k(H_{n-1})/\ H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n\}+1$, isto é, $|T^{(k)}(H_n)| = min\{|T^{(k)}(H_{n-1})|/\ H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n\}+1= |T^{(k)}(H_n - z_i)|+1$; $z_i \in T^{(k)}(H_n) \neq \emptyset$, ou seja, $z_i$ é um pólo do tipo $x_{k-1}$.

No mesmo raciocínio acima, temos que existe uma carta normal $H^k_{n-1} = H_n - z_h$; $z_h \in T^{(k)}(H_n)$, ou seja, $h_k(H^k_{n-1}) = h_k - 1$.

Daí, segue pelo lema 3.4.2 que as componentes do subtorneio dos pólos de $H_n$ podem ser determinadas por $H^0_{n-1}$ ou $H^k_{n-1}$, então $H_n$ pode ser reconstruído trocando $T^{(0)}(H^0_{n-1})$ por $T^{(0)}(H^k_{n-1})$.

De fato, pelo lema 3.4.2 temos que:

- existe um isomorfismo de $T^{(i)}(H^0_{n-1})$ em $T^{(i)}(H_n)$, para todo $i \neq 0$, então:

$$\begin{cases} T^{(1)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H_n) \\ T^{(2)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(2)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H_n) \end{cases}$$

- existe um isomorfismo de $T^{(i)}(H^k_{n-1})$ em $T^{(i)}(H_n)$, para todo $i \neq k$, então:

$$\begin{cases} T^{(0)}(H^k_{n-1}) \simeq T^{(0)}(H_n) \\ T^{(1)}(H^k_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k-1)}(H^k_{n-1}) \simeq T^{(k-1)}(H_n) \end{cases}$$

Portanto, as componentes do subtorneio dos pólos de $H_n$ podem ser determinadas por $H^0_{n-1}$ ou $H^k_{n-1}$.

Logo, temos que $H_n$ pode ser reconstruído trocando $T^{(0)}(H^0_{n-1})$ por $T^{(0)}(H^k_{n-1})$, pois daí teremos:

$$(I)\begin{cases} T^{(0)}(H^k_{n-1}) \simeq T^{(0)}(H_n) \\ T^{(1)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H_n) \end{cases}$$

$\vdash$ $H_n$ é reconstrutível

Suponha $H_n$ normal tal que $H_n$ é hipomorfo a $H'_n$. Vejamos que $H_n \simeq H'_n$.

Como $H_n$ é hipomorfo a $H'_n$, então $H'_n$ também é normal e existe uma bijeção $f : H_n \longrightarrow H'_n$; $H_n - v \simeq H'_n - f(v)$, $\forall\ v \in H_n$. Além disso, $\nu(H_n) = \nu(H'_n) = h$ pela observação 3.1.23, ou seja, $H_n$ e $H'_n$ tem o mesmo número de cartas hamiltonianas. Como toda carta hamiltoniana $H_{n-1}$ de $H_n$ é normal, por hipótese do caso 1, então toda carta hamiltoniana $H'_{n-1}$ de $H'_n$ também é normal, já que $H_n - v \simeq H'_n - f(v)$, $\forall\ v \in H_n$. Logo, da mesma forma que analisamos as cartas de $H_n$, podemos analisar as cartas de $H'_n$ e então aplicar o lema 3.4.2 e, analogamente a $H_n$, chegar ao resultado:

$$(II)\begin{cases} T^{(0)}(H'^k_{n-1}) \simeq T^{(0)}(H'_n) \\ T^{(1)}(H'^0_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H'_n) \\ \vdots \\ T^{(k)}(H'^0_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H'_n) \end{cases}$$

Como $H_n - v \simeq H'_n - f(v)$, $\forall\ v \in H_n$, então:

$$\begin{cases} H'^k_{n-1} = H'_n - f(z_i) \simeq H_n - z_i = H^k_{n-1} \\ H'^0_{n-1} = H'_n - f(z_j) \simeq H_n - z_j = H^0_{n-1} \end{cases}$$

onde $z_i$ e $z_j$ são pólos de $H_n$ com $1 \leq i, j \leq h$.
Assim:

$$(III)\begin{cases} T^{(0)}(H'^k_{n-1}) \simeq T^{(0)}(H^k_{n-1}) \\ T^{(1)}(H'^0_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H^0_{n-1}) \\ \vdots \\ T^{(k)}(H'^0_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H^0_{n-1}) \end{cases}$$

Finalmente, de (I),(II) e (III) temos que:

$$\begin{cases} T^{(0)}(H_n) \simeq T^{(0)}(H'_n) \\ T^{(1)}(H_n) \simeq T^{(1)}(H'_n) \\ \vdots \\ T^{(k)}(H_n) \simeq T^{(k)}(H'_n) \end{cases}$$

Portanto, $H_n$ e $H'_n$ tem a mesma característica cíclica e a mesma composição. Então, $H_n \simeq H'_n$ pela proposição 3.3.3.

Daí, $H_n$ é reconstrutível.

**Caso 2:** $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ são torneios normais e $cc(R_{n-1}) = k$, $cc(S_{n-1}) = k-1$.

i) Se existe uma carta normal $H'_{n-1}$ que tem *c.c.* $k$ e $h_0(H'_{n-1}) = |T^{(0)}(H'_{n-1})| \geq 2$, então $h_0 = |T^{(0)}(H_n)| \geq 2$.

De fato, segue de $h_0 = |T^{(0)}(H_n)| = 1$ que $H_n$ teria exatamente 1 pólo do tipo $x_1$ (por hipótese, pois $H_n$ tem só 1 pólo do tipo $x_1$ se $h_0 = 1$) e consequentemente $h_0(H_{n-1}) = |T^{(0)}(H_{n-1})| = 1$, para toda carta normal $H_{n-1}$ com *c.c.* $k$, já que $A_k$ continua sendo o ciclo característico de $H_{n-1}$ e $T^{(0)}(H_{n-1}) \neq \emptyset$.

Agora os inteiros $h_0, ..., h_k$ podem ser determinados como no caso 1 considerando uma carta normal $H^0_{n-1}$ tal que $cc(H^0_{n-1}) = k$ e $h_0(H^0_{n-1}) \leq h_0(H_{n-1})$, para toda carta normal $H_{n-1}$ com *c.c.* $k$, isto é:

$h_0(H^0_{n-1}) = min\{h_0(H_{n-1})/\ H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$ com *c.c.* $k\}$. Então $h_0 = h_0(H^0_{n-1}) + 1$.

Daí, pelo lema 3.4.2, $H^0_{n-1}$ determina todas as componentes da composição de $H_n$ menos $T^{(0)}(H_n)$.

De fato, como $H^0_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$, $cc(H^0_{n-1}) = k$ e $h_0(H^0_{n-1}) = h_0 - 1$, então pelo lema 3.4.2, existe um isomorfismo de $T^{(i)}(H^0_{n-1})$ em $T^{(i)}(H_n)$ que preserva o tipo dos pólos, para todo $i \neq 0$ (onde $H^0_{n-1} = H_n - z_i$; $z_i$ é pólo do tipo $x_1$). Então:

$$\begin{cases} T^{(1)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H_n) \\ T^{(2)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(2)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H_n) \end{cases}$$

Agora, pelo lema 3.4.3, $T^{(0)}(H_n)$ pode ser determinada considerando a única carta normal, digamos $H^k_{n-1}$ (ou $S_{n-1}$), com *c.c.* $k-1$ e, em particular, $T^{(0)}(H^k_{n-1})$.

De fato, pelo lema 3.4.3, temos que existe $v \in T^{(k)}(H_n)$ tal que $H_n - v \simeq H^k_{n-1}$ e além disso, existe um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j)}(H^k_{n-1})$ que preserva o tipo dos pólos, para todo $j = 0, ..., k-2$. Então para $j = 0$ temos que $T^{(0)}(H_n) \simeq T^{(0)}(H^k_{n-1})$. Daí temos:

$$\begin{cases} T^{(0)}(H^k_{n-1}) \simeq T^{(0)}(H_n) \\ T^{(1)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H_n) \\ T^{(2)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(2)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k)}(H^0_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H_n) \end{cases}$$

Logo, $H_n$ pode ser reconstruído exatamente como no caso 1.

ii) $H_n$ pode ser reconstruído de uma maneira similar se existe uma carta normal $H'_{n-1}$ tal que $cc(H'_{n-1}) = k$ e $h_k(H'_{n-1}) \geq 2$.

iii) Finalmente, se $h_0(H_{n-1}) = h_k(H_{n-1}) = 1$, para toda carta normal $H_{n-1}$ de $H_n$ com *c.c.* $k$, então $h_1 = ... = h_{k-1} = 0$ e $max\{h_0, h_k\} = 2$.

De fato, como $min\{h_0, h_k\} = 1$ e $h_0(H_{n-1}) = h_k(H_{n-1}) = 1$, para toda carta normal $H_{n-1}$ de $H_n$ com *c.c.* $k$, então $max\{h_0, h_k\} = 2$, pois caso contrário, digamos $h_0 = 3$, teríamos $h_0(H_{n-1}) = 2 \neq 1$ para algumas cartas normais $H_{n-1} = H_n - v$; $v \in T^{(0)}(H_n)$. E como $min\{h_0, h_k\} = 1$ e $max\{h_0, h_k\} = 2$, então $h_1 = ... = h_{k-1} = 0$. Suponha que não, isto é, $h_i \neq \emptyset$, para algum i; $1 \leq i \leq k-1$. Daí, sendo $h_0 = 2$ ou $h_k = 2$, então suponha que $h_0 = 2$. Logo, para a carta normal $H_{n-1} = H_n - v$; $v \in T^{(i)}(H_n) \neq \emptyset$ temos que $h_0(H_{n-1}) = 2 \neq 1$, o que é um absurdo. Assim, $h_1 = ... = h_{k-1} = 0$.

Se $S_{n-1}$ é a carta normal com *c.c.* $k-1$, então $h_0 = h_0(S_{n-1})$ e $h_k = h_k(S_{n-1})$ que é suficiente para reconstruir $H_n$ neste caso.

De fato:

• $\vdash$ se $S_{n-1}$ é a carta normal com *c.c.* $k-1$, então $h_0 = h_0(S_{n-1})$ e $h_k = h_k(S_{n-1})$

Como $cc(S_{n-1}) = k-1$ e $S_{n-1} = H_n - v$; $v \in T^{(0)}(H_n)$ (ou $v \in T^{(k)}(H_n)$), então o vértice $a_1$ de $A_k$ vai para $T^{(0)}(S_{n-1})$, já que $a_1$ é do tipo $x_1$ em $S_{n-1}$ (ou o vértice $a_k$ de $A_k$ vai para $T^{(k)}(S_{n-1})$, já que $a_k$ é do tipo $x_{k-2}$ em $S_{n-1}$).

• $\vdash$ $H_n$ é reconstrutível

Como $h_0 = h_0(S_{n-1})$, $h_k = h_k(S_{n-1})$ e $h_1 = ... = h_{k-1} = 0$, então:

$$\begin{cases} T^{(0)}(S_{n-1}) \simeq T^{(0)}(H_n), \textit{ onde } h_0 = h_0(S_{n-1}) = 1 \textit{ ou } 2 \\ T^{(1)}(H_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H_n), \textit{ pois } T^{(1)}(H_n) = T^{(1)}(H_{n-1}) = \emptyset \\ \vdots \\ T^{(k-1)}(H_{n-1}) \simeq T^{(k-1)}(H_n), \textit{ pois } T^{(k-1)}(H_n) = T^{(k-1)}(H_{n-1}) = \emptyset \\ T^{(k)}(S_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H_n), \textit{ onde } h_k = h_k(S_{n-1}) = 1 \textit{ ou } 2 \end{cases}$$

Daí, $H_n$ pode ser reconstruído como no caso 1.

**Caso 3:** $R_{n-1}$ é normal, $cc(R_{n-1}) = k$ e $S_{n-1}$ não é normal.

Toda carta normal $\bar{H}_{n-1}$ com um valor máximo da soma $h_1(\bar{H}_{n-1}) + ... + h_{k-1}(\bar{H}_{n-1})$, isto é, $h_1(\bar{H}_{n-1}) + ... + h_{k-1}(\bar{H}_{n-1}) = h_1 + ... + h_{k-1}$ determina evidentemente $T^{(1)}, ..., T^{(k-1)}$.

Agora, falta analisar $h_0$ e $h_k$.

i) Assuma $h_1 + ... + h_{k-1} > 0$ e considere a família $\mathcal{A}$ das cartas normais $H_{n-1}$ que tem $h_1(H_{n-1}) + ... + h_{k-1}(H_{n-1}) < h_1 + ... + h_{k-1}$, ou seja:

$\mathcal{A} = \{H_{n-1} / \ H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$ e $h_1(H_{n-1}) + ... + h_{k-1}(H_{n-1}) < h_1 + ... + h_{k-1}\}$

Pelo lema 3.4.5, toda carta $H^j_{n-1}$ tal que $h_j(H^j_{n-1}) \leq h_j(H_{n-1})$, $\forall\ H_{n-1} \in \mathcal{A}$, determina $T^{(j)}$, $j \in \{0, k\}$. Então, $H_n$ pode ser reconstruído de $\bar{H}_{n-1}$ trocando $T^{(j)}(\bar{H}_{n-1})$ por $T^{(j)}(H^j_{n-1})$, $j \in \{0, k\}$.

ii) Assuma agora $h_1 + ... + h_{k-1} = 0$ ou, equivalentemente, $k = 3$ (pois se $k \geq 4$, temos que $A_k$ não pode ser minimal, já que nem todo ciclo contido propriamente em $A_k$ é conado).

• Se $h \geq 4$, então $h_0$ e $h_3$ podem ser facilmente determinados já que necessariamente $h_0(H_{n-1}) = max\{1, h_0 - 1\}$ e $h_3(H_{n-1}) = max\{1, h_3 - 1\}$ sempre que $H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$.

De fato, como $min\{h_0, h_3\} = 1$, então $h_0 = 1$ ou $h_3 = 1$ e como $1 < max\{h_0, h_3\}$ e $h_1 + h_2 = 0$, então $h_0 = h - 1 \geq 3$ ou $h_3 = h - 1 \geq 3$. Daí, se $H_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$, como toda carta normal de $H_n$ neste caso tem *c.c.* $k$, então $cd(H_{n-1}) = h - 1$. Logo, $H_{n-1} = H_n - v$; $v$ é pólo de $H_n$, isto é, $v \in T^{(0)}(H_n)$ (se $h_3 = 1$) ou $v \in T^{(k)}(H_n)$ (se $h_0 = 1$). Assim, $h_0(H_{n-1}) = max\{1, h_0 - 1\} = 1$ (se $h_0 = 1$) ou $h_0 - 1$ (se $h_0 = h - 1$) e $h_3(H_{n-1}) = max\{1, h_3 - 1\} = 1$ (se $h_3 = 1$) ou $h_3 - 1$ ( se $h_3 = h - 1$).

Portanto, $h_0$ e $h_3$ podem ser determinados.

Pelo princípio da dualidade direcional podemos supor que $h_3 = 1$ e $h_0 = h - 1$.

A carta hamiltoniana não normal $S_{n-1}$ tem exatamente 2 vértices $a$, $b$ com in-valency 1 (isto é, com apenas 1 predecessor) e, se $a \longrightarrow b$, $H_n$ pode ser reconstruído colocando em $S_{n-1}$ um novo vértice v que segue b e precede todos os outros vértices de $S_{n-1}$.

• Seja $h = k = 3$, ou seja, $n = k + h = 6$

É fácil checar que os únicos torneios normais não isomorfos $H_6$ e $H'_6$ verificando as condições dadas não tem as mesmas cartas, isto é, eles não são hipomorfos.

De fato, os únicos torneios normais não isomorfos verificando as condições dadas são:

$H_6 = T^*_{r4}(T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)})$, onde $T^{(0)} = \{x_1\}$, $T^{(1)} = T^{(2)} = \emptyset$ e $T^{(3)} = \{x_{k-1}, x'_{k-1}\}$
$H'_6 = T^*_{r4}(T^{(0)}(H'_6), T^{(1)}(H'_6), T^{(2)}(H'_6), T^{(3)}(H'_6))$, onde $T^{(0)}(H'_6) = \{x'_1, x''_1\}$, $T^{(1)}(H'_6) = T^{(2)}(H'_6) = \emptyset$ e $T^{(3)}(H'_6) = \{x''_{k-1}\}$

Temos que $H_6$ e $H'_6$ não são hipomorfos, pois por exemplo, $H_6 - x_1 \not\simeq H'_6 - f(x_1)$, para qualquer bijeção $f : H_6 \longrightarrow H'_6$.

Mais precisamente, $h_0 = 1$ e $h_3 = 2 \Longleftrightarrow H_n$ tem uma carta não hamiltoniana $T_5$ com exatamente 1 transmissor a, nenhum receptor e tal que $T_5 - a$ tem somente 1 transmissor.

**Caso 4:** $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ são normais e $cc(R_{n-1}) = cc(S_{n-1}) = k - 1$

$H_n$ pode ser reconstruído desde que é possível distinguir as cartas normais $R_{n-1}$, $S_{n-1}$ com *c.c.* $k - 1$ no sentido do lema 3.4.3.

• Se $h_0(R_{n-1}) \geq 2$ ($h_0(S_{n-1}) \geq 2$), então $R_{n-1}$ ($S_{n-1}$) deve ser isomorfo a $H_n - x_1$ e $S_{n-1}$ ($R_{n-1}$) é isomorfo a $H_n - x_{k-1}$, onde $T^{(0)} = \{x_1\}$ e $T^{(k)} = \{x_{k-1}\}$.

De fato, se $h_0(R_{n-1}) \geq 2$, então $|T^{(0)}(R_{n-1})| \geq 2$ e daí, $R_{n-1} \simeq H_n - x_1$ e $a_1$ vai para $T^{(0)}(R_{n-1})$ e $S_{n-1} \simeq H_n - x_{k-1}$ e $a_k$ vai para $T^{(k-1)}(S_{n-1})$.

Daí, pelo lema 3.4.3, como $R_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$ com $cc(R_{n-1}) = k - 1$ e $R_{n-1} \simeq H_n - x_1$ tal que $x_1 \in T^{(0)}(H_n)$, temos que para todo $j = 2, ..., k$ existe um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j-1)}(R_{n-1})$ que leva pólos dos tipos $x_i$ e $y_i$ em pólos dos tipos $x_{i-1}$, $y_{i-1}$ respectivamente, isto é:

$$\begin{cases} T^{(1)}(R_{n-1}) \simeq T^{(2)}(H_n) \\ T^{(2)}(R_{n-1}) \simeq T^{(3)}(H_n) \\ T^{(3)}(R_{n-1}) \simeq T^{(4)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k-1)}(R_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H_n) \end{cases}$$

E ainda, como $S_{n-1}$ é uma carta normal de $H_n$ com *c.c.* $k - 1$ e $S_{n-1} \simeq H_n - x_{k-1}$ tal que $x_{k-1} \in T^{(k)}(H_n)$, temos que para todo $j = 0, ..., k - 2$ existe um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j)}(S_{n-1})$ que preserva o tipo dos pólos, isto é:

$$\begin{cases} T^{(0)}(S_{n-1}) \simeq T^{(0)}(H_n) \\ T^{(1)}(S_{n-1}) \simeq T^{(1)}(H_n) \\ T^{(2)}(S_{n-1}) \simeq T^{(2)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k-2)}(S_{n-1}) \simeq T^{(k-2)}(H_n) \end{cases}$$

Da mesma forma, se $h_0(S_{n-1}) \geq 2$, então $S_{n-1} \simeq H_n - x_1$ e $a_1$ vai para $T^{(0)}(S_{n-1})$ e $R_{n-1} \simeq H_n - x_{k-1}$ e $a_k$ vai para $T^{(k-1)}(R_{n-1})$. Daí, basta aplicar o lema 3.4.3 como anteriormente.

Os mesmos resultados valem se $h_{k-1}(S_{n-1}) \geq 2$ ($h_{k-1}(R_{n-1}) \geq 2$).

Logo, em qualquer um dos casos acima, podemos reconstruir $H_n$ com $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ (usando a mesma idéia do caso 1).

• Assuma agora que $h_i(R_{n-1}) = h_i(S_{n-1}) = 1$, $\forall\ i = 0, k-1$.

Segue dos argumentos dados na prova do lema 3.4.3 que $T^{(k-1)} = \emptyset$. Se: $min\{j \in \{1, ..., k-1\} / \ h_i(R_{n-1}) = 0, \forall\ i \geq j\} < min\{j \in \{1, ..., k-1\} / \ h_i(S_{n-1}) = 0, \forall\ i \geq j\}$, então $a_1$ vai para $T^{(0)}(R_{n-1})$ e $a_k$ vai para $T^{(k-1)}(S_{n-1})$. Assim, $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ são isomorfos a $H_n - x_1$ e $H_n - x_{k-1}$ respectivamente. Daí, basta aplicar o lema 3.4.3 como anteriormente. Logo, novamente $H_n$ é reconstrutível por $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$.

**Caso 5:** $R_{n-1}$ é normal, $cc(R_{n-1}) = k-1$ e $S_{n-1}$ não é normal.

O número $r_j$ dos pólos do tipo $x_j$, $j \in \{1, k-1\}$ é o número maximal dos pólos do tipo $x_j$ nas cartas normais de $H_n$ com *c.c.* $k$, já que existe pelo menos 1 pólo de um tipo diferente.

Como por hipótese $h_0 = h_k = 1$, e $H_n$ tem somente 1 pólo do tipo $x_1$ ($x_{k-1}$) sempre que $H_n$ tem pelo menos 2 pólos do tipo $x_{k-1}$ ($x_1$), então $r_1 = 1$ ou $r_{k-1} = 1$.

Assuma $r_1 = 1$ e seja $H'_{n-1}$ a carta normal com *c.c.* $k-1$.

Como $r_1 = 1$, então todas as cartas normais de $H_n$ com *c.c.* $k$ tem 1 só pólo do tipo $x_1$ e consequentemente, $H_n$ também. Como $cc(H'_{n-1}) = k-1$, então $H'_{n-1} = H_n - v$; $v \in T^{(0)}(H_n)$, ou seja, $v$ é o pólo do tipo $x_1$ de $H_n$. Daí, pelo lema 3.4.3, temos que para todo $j = 2, ..., k$ existe um isomorfismo de $T^{(j)}(H_n)$ em $T^{(j-1)}(H'_{n-1})$ que leva pólos dos tipos $x_i$ e $y_i$ em pólos dos tipos $x_{i-1}$, $y_{i-1}$ respectivamente, isto é:

$$\begin{cases} T^{(1)}(H'_{n-1}) \simeq T^{(2)}(H_n) \\ T^{(2)}(H'_{n-1}) \simeq T^{(3)}(H_n) \\ T^{(3)}(H'_{n-1}) \simeq T^{(4)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k-1)}(H'_{n-1}) \simeq T^{(k)}(H_n) \end{cases}$$

Portanto, $H'_{n-1}$ determina $T^{(2)}, ..., T^{(k)}$ e, em particular, $h_{k-1}$ e $h_{k-2}$ são determinados e eles verificam a relação $h_{k-1} + h_{k-2} \geq 2$.

De fato, como $r_1 = 1$, temos que todas as cartas normais de $H_n$ com *c.c.* $k$ tem 1 só pólo do tipo $x_1$, e então $H_n$ também tem 1 só pólo do tipo $x_1$. Logo, por hipótese, $H_n$ tem pelo menos 2 pólos do tipo $x_{k-1}$, digamos $x'_{k-1}$ e $x''_{k-1}$. Sendo $h_k = 1$, temos que $T^{(k)} = \{x'_{k-1}\}$ e: ou $x''_{k-1} \in T^{(k-1)}$ ou $x''_{k-1} \in T^{(k-2)}$. Suponha sem perda de generalidade que $x''_{k-1} \in T^{(k-1)}$. Daí, deve existir um outro pólo $z \in T^{(k-1)}$ tal que $z \longrightarrow x''_{k-1}$, pois caso contrário, isto é, $T^{(k-1)} = \{x''_{k-1}\}$, não teríamos o fato de que $T^{(k)}$ contém todos os pólos do tipo $x_{k-1}$ que pode conter de acordo com a proposição 3.1.11. Portanto, se $x''_{k-1} \in T^{(k-1)}$, então $T^{(k-1)}$ possui pelo menos 2 pólos. Da mesma forma se conclui que se $x''_{k-1} \in T^{(k-2)}$, implica que $T^{(k-2)}$ possui pelo menos 2 pólos. Assim, $h_{k-1} + h_{k-2} \geq 2$.

Considere $t \in \{k-2, k-1\}$ tal que $h_t \geq t - k + 3$ e seja $H''_{n-1}$ uma carta normal de $H_n$, $cc(H''_{n-1}) = k$ e $h_t(H''_{n-1}) < h_t$ de acordo com o lema 3.4.4. Tal carta determina $T^{(1)}$ e isto nos permite reconstruir $H_n$ juntamente com $H'_{n-1}$.

De fato:

• se $t = k-2$ tal que $h_{k-2} \geq k-2-k+3 = 1$, isto é, $|T^{(k-2)}(H_n)| \geq 1$, então pelo lema 3.4.4 existe uma carta normal $H''_{n-1}$ tal que $h_i(H''_{n-1}) = h_i$, $i = 0,...,k-3$ e $h_{k-2}(H''_{n-1}) < h_{k-2}$. Daí, $|T^{(1)}(H''_{n-1})| = |T^{(1)}(H_n)|$ e portanto, $H''_{n-1}$ determina $T^{(1)}$.

• se $t = k-1$ tal que $h_{k-1} \geq k-1-k+3 = 2$, isto é, $|T^{(k-1)}(H_n)| \geq 2$, então pelo lema 3.4.4 existe uma carta normal $H''_{n-1}$ tal que $h_i(H''_{n-1}) = h_i$, $i = 0,...,k-2$ e $h_{k-1}(H''_{n-1}) < h_{k-1}$. Daí, $|T^{(1)}(H''_{n-1})| = |T^{(1)}(H_n)|$ e então $H''_{n-1}$ determina $T^{(1)}$.

Logo, como $h_0 = 1$ então $T^{(0)}$ já está determinado e assim podemos reconstruir $H_n$ com $H'_{n-1}$ e $H''_{n-1}$.

$H_n$ pode ser reconstruído de uma maneira similar se $r_{k-1} = 1$.

**Caso 6:** $R_{n-1}$ e $S_{n-1}$ não são normais

i) Primeiro assuma $k \geq 4$

$H_n$ tem pólos do tipo $y_{k-1} \Longleftrightarrow T^{(k-1)} \neq \emptyset \Longleftrightarrow$ existe pólos do tipo $y_{k-1}$ em alguma carta normal de $H_n$.

Além disso, segue de $T^{(1)} \cup ... \cup T^{(k-2)}$ $T^{(1)} \cup T^{(2)} \neq \emptyset$ (já que $h \geq 3$ e $h_0 = h_k = 1$) que $h_{k-1}$ pode ser determinado da seguinte maneira

$$h_{k-1} = max\{h_{k-1}(H_{n-1})/\ H_{n-1}\ uma\ carta\ normal\ de\ H_n\}.$$

• Se $h_{k-1} \geq 2$, seja $\bar{H}_{n-1}$ uma carta normal com $h_{k-1}(\bar{H}_{n-1}) < h_{k-1}$ tal que a soma $h_0(\bar{H}_{n-1}) + ... + h_{k-2}(\bar{H}_{n-1})$ toma um valor mínimo.

Pelo lema 3.4.4, tal carta determina $T^{(1)},...,T^{(k-2)}$ e, em particular, $h_1$ e $h_2$.

De fato, como $h_{k-1} \geq 2$, então pelo lema 3.4.4 existe uma carta normal $\bar{H}_{n-1}$ tal que $h_i(\bar{H}_{n-1}) = h_i$, $i = 0,...,k-2$ e $h_{k-1}(\bar{H}_{n-1}) < h_{k-1}$. Daí, $|T^{(0)}(\bar{H}_{n-1})| = |T^{(0)}(H_n)|$,..., $|T^{(k-2)}(\bar{H}_{n-1})| = |T^{(k-2)}(H_n)|$.

E como $h_0 = h_k = 1$, então $T^{(0)}$ e $T^{(k)}$ já estão determinados.

É claro que $h_j \neq 0$ para algum $j \in \{1,2\}$ e uma carta normal $H^j_{n-1}$ pode ser encontrada com $h_j(H^j_{n-1}) = h_j - 1$, pelo lema 3.4.4, já que se $j \in \{1,2\}$, então $j \neq k-1$ sendo $k \geq 4$ e $h_j \neq 0$, satisfazendo assim as hipóteses do lema 3.4.4. Daí, $H^j_{n-1}$ determina $T^{(k-1)}$ pelo lema 3.4.2 e consequentemente $H_n$ pode ser reconstruído.

• Se $h_{k-1} = 1$, seja $H_{n-1}$ a única carta normal sem nenhum pólo do tipo $y_{k-1}$, isto é, $H_{n-1} = H_n - y_{k-1}$; $y_{k-1} \in T^{(k-1)}(H_n)$ e seja $x$ o transmissor de $T^{(k)}(H_{n-1})$.

$H_n$ pode ser reconstruído colocando em $H_{n-1}$ um novo vértice $y$ que segue $x$ e $a_{k-1}$ enquanto $y$ precede os outros vértices mantidos de $H_{n-1}$. Daí, sendo $y$ um vértice do tipo $y_{k-1}$ em $H_{n-1} \cup \{y\}$, temos que:

$$\begin{cases} T^{(0)}(H_{n-1} \cup \{y\}) \simeq T^{(0)}(H_n) \\ T^{(1)}(H_{n-1} \cup \{y\}) \simeq T^{(1)}(H_n) \\ \vdots \\ T^{(k-1)}(H_{n-1} \cup \{y\}) \simeq T^{(k-1)}(H_n) \\ T^{(k)}(H_{n-1} \cup \{y\}) \simeq T^{(k)}(H_n) \end{cases}$$

• Se $h_{k-1} = 0$, exatamente uma das cartas hamiltonianas não normais $R_{n-1}$, $S_{n-1}$ tem um único vértice a com in-valency 1 (ou seja, com apenas 1 predecessor).

$H_n$ pode ser obtido de tal carta acrescentando a ela um novo vértice v que segue a e precede os vértices mantidos.

ii) Assuma agora $k = 3$ e seja $h \geq 4$

Analisamos se $T^{(k-1)} = T^{(2)}$ é vazio ou não como no caso $k \geq 4$.

• Se $T^{(2)} = \emptyset$, $H_n$ pode ser reconstruído pela única carta hamiltoniana não normal que tem somente um vértice com in-valency 1 (isto é, com apenas 1 predecessor), como no caso $k \geq 4$.

• Se $T^{(2)} \neq \emptyset$, isto é, $H_n$ tem pólos do tipo $y_2$, é possível deduzir das cartas normais se $H_n$ tem pólos do tipo $y_1$ também.

Se este é o caso, ou seja, $H_n$ tem pólos do tipo $y_1$ também, então $T^{(1)} \neq \emptyset$ e consequentemente $h_2 = max\{h_2(H_{n-1})/\ H_{n-1}$ é uma carta de $H_n\}$ e $h_1 = h - h_2 - 2$, pois $h_0 + h_3 = 2$ e $h = h_0 + h_1 + h_2 + h_3$, sendo $k = 3$.

$H_n$ pode ser reconstruído como no caso $k \geq 4$ quando ou $h_2 \geq 2$ ou $h_2 = 1$.

Se, caso contrário, $H_n$ não tem nenhum pólo do tipo $y_1$, então somente uma, digamos $S_{n-1}$, das cartas hamiltonianas não normais tem um único vértice b que tem out-valency igual a 1 (ou seja, somente 1 sucessor).

$H_n$ pode ser reconstruído de $S_{n-1}$ acrescentando um vértice $v$ que precede somente b.

iii) Assuma finalmente $k = h = 3$

Se denotarmos por x o único vértice em $T^{(1)} \cup T^{(2)}$, então x pode ser um pólo do tipo $y_1$ ou do tipo $y_2$.

Os únicos torneios normais não isomorfos que podemos considerar neste caso tem cartas não hamiltonianas diferentes e consequentemente elas não são hipomorfas.

De fato, os únicos torneios normais não isomorfos neste caso são:

$H_6 = T^*_{r_4}(T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)})$; $T^{(0)} = \{x_1\}$, $T^{(1)} = \{x\}$, $T^{(2)} = \emptyset$ e $T^{(3)} = \{x_2\}$ e

$H'_6 = T^*_{r_4}(T^{(0)}(H'_6), T^{(1)}(H'_6), T^{(2)}(H'_6), T^{(3)}(H'_6))$; $T^{(0)}(H'_6) = \{x'_1\}$, $T^{(1)}(H'_6) = \emptyset$, $T^{(2)}(H'_6) = \{x'\}$ e $T^{(3)}(H'_6) = \{x'_2\}$, pois não existe isomorfismo $f : H_6 \longrightarrow H'_6$, já que para toda bijeção $g : H_6 \longrightarrow H'_6$, $\exists\ v, w \in V(H_6)$ tais que $v \longrightarrow w$ mas $g(v) \not\longrightarrow g(w)$. E como $H_6$ e $H'_6$ não tem as mesmas cartas, então não são hipomorfos, pois para toda bijeção $g : H_6 \longrightarrow H'_6$, $\exists\ v \in H_6$ tal que $H_6 - v \not\simeq H'_6 - g(v)$.

Então $H_n$ é reconstrutível neste caso também. □

Agora, temos uma consequência trivial da proposição anterior e observação 3.2.5.

**Proposição 3.4.7** *Os torneios normais diferente do 3-ciclo $H_3$ constituem uma classe de torneios reconstrutíveis.*

# Bibliografia


[1] Beineke L. W. and Reid K. B., *Tournaments*, Select topics in graph theory. Edited by Beineke L. W. and Wilson R. J., Academic Press, New York (1979).

[2] Burzio M. and Demaria D. C., *On a classification of hamiltonian tournaments*, Acta Univ. Carolin.-Math. Phys. vol.29 No 2 (1988), 3–14.

[3] Burzio M. and Demaria D. C., *Hamiltonian tournaments with the least number of 3-cycles*, to appear in J. Graph Theory.

[4] Burzio M. and Demaria D. C., *On simply disconnected tournaments*, to appear in Ars Combin. (Waterloo, Ont.).

[5] Burzio M. and Demaria D. C., *Characterization of Tournaments by Coned 3-cycles*, Acta Univ. Carolin.-Math. Phys., Prague, vol.28 No 2 (1987), 25–30.

[6] Demaria D. C. and Guido C., *On the reconstruction of normal tournaments*, Journal of Combinatorics Information and System Sciences, vol.15 (1990), 301–323.

[7] Demaria D. C. and Gianella G. M., *On normal tournaments*, Conf. Semin. Matem. Univ. Bari. No 232 (1989).

[8] Douglas R. J., *Tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit*, Proc. London Math. Soc. 21 (1970), 716–730.

[9] Harary F. and Palmer E., *On the problem of reconstructing a tournament from subtournaments*, Monatsh. Math. 71 (1967), 14–23.

[10] Harary F., Norman R.Z. and Cartwright D., *Structural models, An Introduction to the Theory of Directed Graphs.* Wiley, New York (1965).

[11] Las Vergnas M., *Sur le nombre de circuit dans un tournoi fortement connexe*, Cahiers du CERO Bruuxelles 17 (1975), 261–265.

[12] Moon J. W., *On subtournaments of a tournament*, Canad. Math. Bull. vol.9 No 3 (1966), 297–301.

[13] Nash-Williams C. St. J. A., *The reconstruction problem*, Selected topics in graph theory. Edited by Beineke L. W. and Wilson R. J., Academic Press, New York (1979).

[14] Stockmeyer P. K., *The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments*, J. Graph Theory 1 (1977), 19–25.

[15] Stockmeyer P. K., *New counterexamples to the digraph reconstruction conjecture*, Notices Amer. Math. Soc. 23 (1976), Abstract A–654.