

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

---

Dissertação de Mestrado

**Regularização e Análise Qualitativa de  
Modelos da Teoria do Controle**

por

**Marcos Cesar Vergès<sup>†</sup>**

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira**

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

# Regularização e Análise Qualitativa de Modelos da Teoria do Controle

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Marcos Cesar Vergès** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de Outubro de 2003.

---

**Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ketty Abaroa de Resende.

Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi.

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

*Ao meu avô  
Altino Bernett (in memoriam)*

---

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Lenita e Sérgio por todo o incentivo e credibilidade que depositaram em mim, e sem os quais jamais teria conseguido concluir este trabalho. Agradeço também à Norma Einsiedel por todo o carinho e ensinamentos musicais. Também sou grato ao prof. Marco Antonio Teixeira pela orientação e por todas as coisas que fez por mim durante o mestrado. Finalmente, quero agradecer aos meus colegas de curso pelos momentos felizes e pela solidariedade durante os momentos difíceis, e de um modo especial aos companheiros Lidermir S. Arruda, Elder Jesus V. Roa, Rogério Casagrande, Maurício F. Lima, Germano Abud de Rezende, Bianca Rodolfo Calsavara, Laércio dos Santos, Paula Takatsuka, Karine Bobadilha e tantos outros que permanecerão na minha memória.

---

# ABSTRACT

The objective of this work is to present some applications of the regularization of discontinuous vector fields algorithm introduced in [11]. Chapter 1 is the mathematical formulation of this algorithm, where criteria of structural stability for the regularized fields is given. In chapter 2 we use mathematical modelling techniques to formulate some problems in control theory. Finally, in the chapter 3, we applied the regularization algorithm in the mathematical models, presenting a geometric focus of the results stated in this work.

---

# RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma série de aplicações do algoritmo de regularização de campos vetoriais descontínuos introduzidos em [11]. No capítulo 1 procedemos com a formulação matemática deste algoritmo, onde são dados critérios de estabilidade estrutural para os campos regularizados. No capítulo 2 utilizamos técnicas de modelagem matemática para formular alguns problemas de teoria do controle, analisando qualitativamente as equações obtidas. Finalmente, no capítulo 3, aplicamos o algoritmo de regularização nos modelos matemáticos, apresentando um enfoque geométrico dos resultados produzidos.

---

# LISTA DE SÍMBOLOS

- $M$  Esfera  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$
- $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Função  $C^\infty$  tendo 0 como valor regular
- $S$   $f^{-1}(0)$
- $M^+$   $f^{-1}(0, \infty)$
- $M^-$   $f^{-1}(-\infty, 0)$
- $\chi^r$  Espaço dos Campos Vetoriais  $C^r$  sobre  $M$
- $\Omega = \Omega(M, f)$  Espaço dos Campos Vetoriais  $Z$  sobre  $M$
- $Z$   $(X, Y)$ , onde  $X, Y \in \chi^r$
- $Xf$   $X \cdot \nabla f$
- $X^2 f$   $X \cdot \nabla Xf$
- $F^+ = F^+(X, Y)$  Campo Vetorial Deslizante associado a  $Z = (X, Y)$
- $F^- = F^-(X, Y)$   $-F^+(-X, -Y)$
- $F(Z)$   $F^+$  ou  $F^-$
- $N$  Subvariedade Diferenciável de  $M$
- $\Sigma^r(N)$  Campos Vetoriais estruturalmente estáveis em  $N$
- $\pi_S^{X, Y}$  Projecção em  $S$  sob o sistema de coordenadas  $X, Y$

---

# LISTA DE FIGURAS

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Regiões de Costura . . . . .                                    | 5  |
| 2.2  | Região de Escape . . . . .                                      | 5  |
| 2.3  | Região de Deslizamento . . . . .                                | 6  |
| 2.4  | Função de Transição . . . . .                                   | 6  |
| 2.5  | Exemplo 1.6 (Região de Costura) . . . . .                       | 7  |
| 2.6  | Pontos Críticos do tipo sela . . . . .                          | 8  |
| 2.7  | Ponto de Dobra . . . . .  | 9  |
| 2.8  | Pontos S-Regulares . . . . .                                    | 9  |
| 2.9  | Pontos S-Singulares Elementares . . . . .                       | 10 |
| 2.10 | Pontos S-Regulares e suas Regularizações . . . . .              | 11 |
| 2.11 | Pontos S-Singulares Elementares e suas Regularizações . . . . . | 12 |
| 2.12 | Exemplo 1.15 . . . . .  | 15 |
| 2.13 | Exemplo 1.15 Regularizado . . . . .                             | 16 |
| 2.14 | Exemplo 1.15 Perturbado . . . . .                               | 19 |
| 2.15 | Ponto S-Singular Hiperbólico e sua Regularização . . . . .      | 22 |
| 2.16 | Gráfico Singular com RD e sua Regularização . . . . .           | 29 |
| 3.1  | Ângulo de Desvio de um Barco . . . . .                          | 34 |
| 3.2  | Diagrama de Blocos para o Piloto Automático . . . . .           | 35 |
| 3.3  | Função de Chaveamento para o Piloto Automático . . . . .        | 36 |
| 3.4  | Retratos de Fase para o Modelo de Piloto Automático . . . . .   | 41 |
| 3.5  | Geradores Elétricos Valvulados . . . . .                        | 41 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.6  | Curva Característica da Válvula . . . . .                                      | 42 |
| 3.7  | Retratos de Fase para o Modelo de Gerador Elétrico Valvulado . . . . .         | 46 |
| 3.8  | Máquina à Vapor . . . . .  | 46 |
| 3.9  | Gráficos de $M = M(\varphi)$ e $f = f(\varphi)$ . . . . .                      | 48 |
| 3.10 | Regiões do Plano de Fase do Modelo de Máquina a Vapor . . . . .                | 50 |
| 3.11 | Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões I e II) . . . . .                   | 53 |
| 3.12 | Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões II e III) . . . . .                 | 55 |
| 3.13 | Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões III e IV) . . . . .                 | 58 |
| 3.14 | Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões IV e I) . . . . .                   | 60 |
| 3.15 | Retrato de Fase Global - Máquina a Vapor . . . . .                             | 60 |
| 3.16 | Modelo Gráfico para o Estudo dos Efeitos de um Terremoto . . . . .             | 61 |
| 3.17 | Retrato de Fase para o Modelo de Efeito de Oscilações Sísmicas . . . . .       | 66 |
| 4.1  | Retrato de Fase Regularizado do Modelo de Piloto Automático . . . . .          | 69 |
| 4.2  | Retrato de Fase Regularizado do Modelo de Gerador Elétrico Valvulado . . . . . | 70 |
| 4.3  | Retrato de Fase Cilíndrico Regularizado do Modelo de Máquina a Vapor . . . . . | 73 |
| 4.4  | Retrato de Fase Regularizado do Modelo de Oscilações Sísmicas . . . . .        | 75 |

---

# CONTEÚDO

|   |           |
|---|-----------|
| Agradecimentos . . . . .                                | i         |
| Abstract . . . . .                                      | ii        |
| Resumo . . . . .  | iii       |
| Lista de Símbolos . . . . .                             | iv        |
| Lista de Figuras . . . . .                              | vi        |
| <b>1 Introdução</b>                                     | <b>1</b>  |
| 1.1 Objetivo . . . . .                                  | 1         |
| 1.2 Dados Históricos . . . . .                          | 2         |
| 1.3 Estrutura dos Tópicos Apresentados . . . . .        | 2         |
| 1.4 Fontes Bibliográficas . . . . .                     | 3         |
| <b>2 Regularização de Campos Vetoriais Descontínuos</b> | <b>4</b>  |
| 2.1 Introdução . . . . .                                | 4         |
| 2.2 Considerações locais . . . . .                      | 8         |
| 2.2.1 Pontos Regulares . . . . .                        | 10        |
| 2.2.2 Pontos Singulares . . . . .                       | 11        |
| 2.2.3 Órbitas S-Periódicas . . . . .                    | 22        |
| 2.2.4 Gráficos . . . . .                                | 23        |
| <b>3 Modelos de Controle Automático</b>                 | <b>32</b> |
| 3.1 Noções de Teoria do Controle . . . . .              | 32        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.2      | Modelos . . . . .  | 33        |
| 3.2.1    | Piloto Automático de Duas Posições para Barcos . . . . . | 33        |
| 3.2.2    | Gerador Elétrico Valvulado . . . . .                     | 41        |
| 3.2.3    | Máquina à Vapor . . . . .                                | 46        |
| 3.2.4    | Oscilações Sísmicas . . . . .                            | 61        |
| <b>4</b> | <b>Regularização dos Modelos</b>                         | <b>67</b> |
| 4.1      | Piloto Automático de Duas Posições para Barcos . . . . . | 67        |
| 4.1.1    | Construindo uma Regularização . . . . .                  | 67        |
| 4.1.2    | Retrato de Fase Regularizado . . . . .                   | 68        |
| 4.2      | Gerador Elétrico Valvulado . . . . .                     | 69        |
| 4.2.1    | Construindo uma Regularização . . . . .                  | 69        |
| 4.2.2    | Retrato de Fase Regularizado . . . . .                   | 70        |
| 4.3      | Máquina a Vapor . . . . .                                | 71        |
| 4.3.1    | Construindo uma Regularização . . . . .                  | 71        |
| 4.3.2    | Retrato de Fase Regularizado . . . . .                   | 72        |
| 4.4      | Oscilações Sísmicas . . . . .                            | 74        |
| 4.4.1    | Construindo uma Regularização . . . . .                  | 74        |
| 4.4.2    | Retrato de Fase Regularizado . . . . .                   | 74        |
|          | <b>Bibliografia</b> . . . . .                            | <b>76</b> |
|          | <b>Índice Remissivo</b> . . . . .                        | <b>78</b> |

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

O estudo qualitativo das equações diferenciais tem sido, desde princípios do último século, uma fonte permanente de processos e algoritmos para aplicação em problemas provenientes de outras ciências, como a astronomia e a física. Este capítulo introdutório descreve a motivação para o presente trabalho, bem como a estrutura na qual foram desenvolvidos os demais capítulos, com o intuito de facilitar a compreensão da teoria aqui exposta.

---

### 1.1 Objetivo

---

Nosso principal objetivo neste trabalho é a aplicação de um algoritmo introduzido por Sotomayor e Teixeira em [11] para regularizar campos descontínuos, ou seja, criar um campo contínuo que é uma aproximação do campo original. Fazendo isto, temos a oportunidade de estudar qualitativamente um problema com o benefício de se trabalhar em ambientes sem discontinuidades. Surgem aí também as questões sobre a validade das principais propriedades topológicas do campo original, como estabilidade estrutural e hiperbolicidade quando consideramos o campo regularizado. Todos estes aspectos são estudados aqui e exemplificados no decorrer do texto. Feito isso, consideraremos alguns problemas emergentes da teoria do controle, estabelecendo uma modelagem matemática para cada um deles, produzindo então campos vetoriais descontínuos, que serão regularizados pelo método descrito acima. Priorizando um enfoque geométrico, classificaremos as singularidades do campo regularizado e ofereceremos um esboço de seu retrato de fase.

---

## 1.2 Dados Históricos

---

Dentro do vasto universo das equações diferenciais, o estudo de campos descontínuos é bastante recente, apesar de vários problemas clássicos de engenharia, física e economia produzirem tais campos. O pioneirismo deste estudo se deve a Koslova ([6]) e principalmente a Filippov, com a publicação de *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides* em 1988, estabelecendo a terminologia e fornecendo uma fundamentação teórica para o estudo de campos descontínuos. Mais recentemente, Sotomayor e Teixeira introduziram o método de regularização ([11]) que será apresentado mais adiante. A vantagem deste método reside no fato de que o campo regularizado é um campo contínuo, para o qual pode-se aplicar toda a teoria clássica desenvolvida, possibilitando assim uma conexão com os campos genéricos de Peixoto.

Motivado principalmente em problemas reais na teoria geométrica do controle, Teixeira também publicou diversos trabalhos na área de campos de vetores descontínuos (em dimensões 2 e 3), nos quais se destacam resultados envolvendo estabilidade assintótica local, classificação genérica e estabilidade de singularidades típicas de codimensão 0, 1 e 2. Formas normais e diagramas de bifurcações também foram estudados, bem como um fenômeno bastante interessante chamado “Sliding Mode” que é muito frequente em teoria do controle e que está ligado à existência de um campo que desliza sobre a superfície de descontinuidade. Tais campos foram igualmente classificados.

---

## 1.3 Estrutura dos Tópicos Apresentados

---

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 2 apresentamos em detalhes o método de regularização de campos vetoriais descontínuos que foi publicado por Sotomayor e Teixeira em 1995. No decorrer do texto são vistos exemplos de aplicação em campos descontínuos simples, fornecendo uma visão geométrica e intuitiva do processo de regularização.
- O capítulo 3 é inteiramente dedicado à modelagem de 4 problemas da teoria do controle. Nele veremos a formulação matemática de um piloto automático para barcos, de um gerador elétrico valvulado, de uma máquina a vapor e de um estudo sobre o efeito de

terremotos em um bloco de concreto (oscilações sísmicas). Logo após a modelagem destes problemas faremos um estudo qualitativo das equações obtidas.

- No capítulo 4 aplicaremos o algoritmo de regularização nos campos vetoriais descontínuos obtidos a partir da modelagem matemática para os problemas apresentados no capítulo 3. Também classificaremos todas as singularidades e esboçaremos os retratos de fase regularizados, adotando um ponto de vista geométrico na análise dos mesmos.

---

## 1.4 Fontes Bibliográficas

---

Indiscutivelmente, a obra mestra para o estudo de campos descontínuos é o livro de Filippov ([3]). Nele encontramos a fundamentação teórica e o desenvolvimento das regras que descrevem o comportamento das órbitas num campo descontínuo. Igualmente importante é a obra de Andronov, Vitt e Khaikin ([1]) que trata essencialmente de situações particulares provenientes de problemas com sistemas mecânicos e elétricos, mostrando a necessidade de uma formulação matemática para este tipo de sistemas e de uma teoria qualitativa que seja aplicável em processos da teoria de oscilações. Deste trabalho, extraímos três dos quatro modelos que serão apresentados. O já citado artigo de Sotomayor e Teixeira proporcionou um avanço considerável no desenvolvimento de sistemas descontínuos, bem como outras publicações de Koslova, Borisov e de vários membros da escola russa. Entre os trabalhos mais recentes na área, podemos destacar a tese de doutorado de Ana Lucia Fernandes Machado, sob orientação de Sotomayor, que trata sobre estabilidade estrutural e bifurcações de campos vetoriais descontínuos.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Regularização de Campos Vetoriais Descontínuos

Neste capítulo estudamos o processo de regularização de campos vetoriais definidos em variedades descontínuas de dimensão 2, sendo que tais discontinuidades ocorrem sobre uma subvariedade de codimensão 1. Este processo consiste em definir um novo campo suave que é uma aproximação do campo descontínuo. A seguir analisaremos os aspectos de estabilidade estrutural para estes campos, fazendo conexão com os resultados obtidos por Filippov, Kozlova e Peixoto.

---

### 2.1 Introdução

---

Consideramos  $M$  a esfera  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$  tendo 0 como valor regular. Assumiremos por simplicidade que  $S = \{f^{-1}(0)\}$  possui uma só componente conexa, de modo que  $M \setminus S$  tem duas componentes conexas que são dois discos denotados por  $M^+ = f^{-1}(0, \infty)$  e  $M^- = f^{-1}(-\infty, 0)$ .

Denotamos por  $\chi^r$  o espaço dos campos vetoriais  $C^r$  sobre  $M$  ( $r > 1$ ).

Seja  $\Omega = \Omega(M, f)$  o espaço dos campos vetoriais  $Z$  sobre  $M$  definidos por:

$$Z(q) = \begin{cases} X(q) & \text{se } f(q) > 0 \\ Y(q) & \text{se } f(q) < 0 \end{cases}, \text{ onde } X, Y \in \chi^r$$

No restante do capítulo, utilizamos a notação  $Z = (X, Y)$  para ressaltar a dependência sobre  $X$  e  $Y$ .

**Observação 2.1.** *Se olharmos para as soluções de  $\dot{q} = Z(q)$ , observamos que pode não haver unicidade sobre pontos de  $S$ . Assim, podem surgir singularidades típicas de equações diferenciais com segundo membro descontínuo, cujas órbitas podem ser somente um ponto (sem ser ponto de equilíbrio) ou uma curva não regular.*

**Observação 2.2.** *Sobre  $S$  as soluções de  $\dot{q} = Z(q)$  obedecem à formulação de Filippov, a ser descrita abaixo.*

Nestas condições, dado qualquer  $Z = (X, Y) \in \Omega$ , seguindo a terminologia estabelecida por Filippov, distinguimos as seguintes regiões em  $S$ :

- **Região de Costura (RC):** caracterizada por  $(Xf)(Yf) > 0$ .

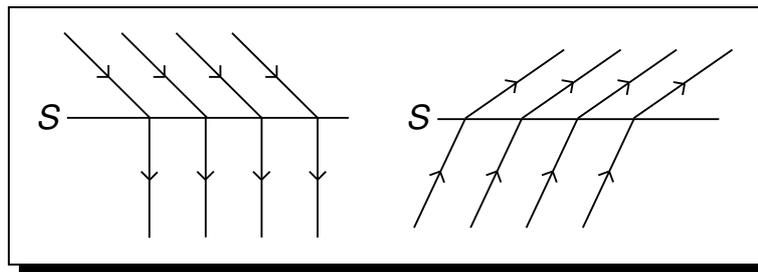


Figura 2.1: Regiões de Costura

- **Região de Escape (RE):** dada pelas desigualdades  $Xf > 0$  e  $Yf < 0$ .

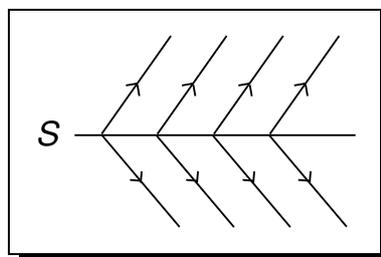


Figura 2.2: Região de Escape

- **Região de Deslizamento (RD):** dada pelas desigualdades  $Xf < 0$  e  $Yf > 0$ . Nesta região definimos um campo vetorial  $F^+ = F^+(X, Y)$  (chamado campo vetorial deslizante associado a  $Z = (X, Y)$ ) da seguinte maneira: Se  $p \in \mathbf{RD}$ , então  $F^+(p)$  denota o vetor no cone gerado por  $X(p)$  e  $Y(p)$  tangente a  $S$ .

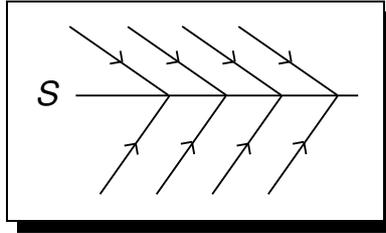


Figura 2.3: Região de Deslizamento

**Observação 2.3.** Na região de escape definimos outro campo vetorial  $F^-$  por  $F^-(p) = (-F^+(-X, -Y))(p)$ . Usaremos a mesma notação  $F(Z)$  para indicar  $F^+$  e  $F^-$ .

**Definição 2.4.** Dizemos que uma função  $C^\infty$   $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **Função de Transição** quando  $\varphi(t) = 0$  se  $t \leq -1$ ,  $\varphi(t) = 1$  se  $t \geq 1$  e  $\varphi'(t) > 0$  se  $t \in (-1, 1)$ . Graficamente:

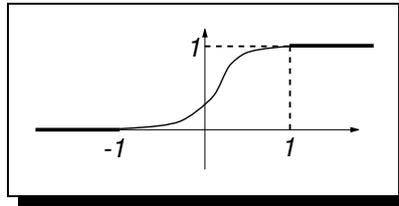


Figura 2.4: Função de Transição

**Definição 2.5.** Uma  $\varphi_\varepsilon$ -**Regularização** de  $Z = (X, Y) \in \Omega$  é a família a um parâmetro de campos vetoriais  $Z_\varepsilon$  em  $\chi^r$  dada por

$$Z_\varepsilon(q) = (1 - \varphi_\varepsilon(f(q)))Y(q) + \varphi_\varepsilon(f(q))X(q) \text{ onde } \varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

**Exemplo 2.6.** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2 + \operatorname{sgn}(y) \end{cases} \text{ em } \mathbb{R}^2$$

então,

$$y > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow X(x, y) = (1, 3)$$

$$y < 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow Y(x, y) = (1, 1)$$

Graficamente, temos uma região de costura

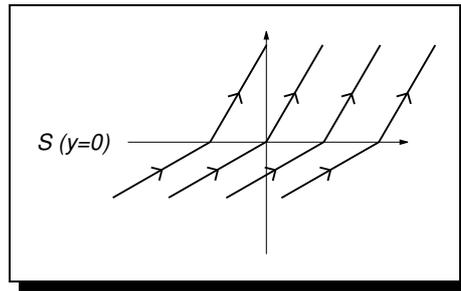


Figura 2.5: Exemplo 1.6 (Região de Costura)

Definimos  $f(x, y) = y$  e  $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$  onde  $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq -1 \\ 1, & \text{se } t \geq 1 \\ \varphi'(t) > 0, & \text{se } t \in (-1, 1) \end{cases}$

Assim,

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(y))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(y)X(x, y) = \\ &= (1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right))(1, 1) + \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)(1, 3) = \\ &= (1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), 1 - \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)) + (\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), 3\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)) = \\ &= (1, 1 + 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)) \end{aligned}$$

é uma  $\varphi_\varepsilon$ -Regularização para este campo.

Neste capítulo, vamos impor condições sobre  $Z(X, Y)$  que determinam o seu retrato de fase global e garantem a estabilidade estrutural de  $Z_\varepsilon$  para qualquer função de transição e  $\varepsilon > 0$  pequeno. Isto será feito usando a seguinte caracterização da classe  $\Sigma^r$  dos campos de vetores estruturalmente estáveis sobre subvariedades diferenciáveis de  $M$ , enunciada por Andronov-Pontryagin e Peixoto:

Consideremos  $N$  como sendo uma subvariedade bidimensional de  $M$ , com fronteira  $\partial N$  e  $X'$  a restrição de um campo vetorial  $X$  em  $\chi^r$  a  $N$ .

**Definição 2.7.** Chamaremos  $\Sigma^r(N)$  a classe de todos os campos de vetores  $X \in \chi^r$  que satisfazem as seguintes condições:

1. Todos os pontos singulares e órbitas periódicas de  $X'$  são hiperbólicos e estão contidos no interior de  $N$ .
2. Qualquer tangência entre uma trajetória de  $X$  e  $\partial N$  é quadrática.
3.  $X'$  não tem selas nem separatrizes de tangência.

Devemos mencionar aqui que a estabilidade estrutural de sistemas descontínuos foi estudada por Kozlova sem a utilização de métodos para regularização.

Na próxima seção faremos um estudo local de singularidades e analisaremos o comportamento de separatrizes resultantes do processo de regularização. As seções 3 e 4 estudam a hiperbolicidade de órbitas periódicas obtidas por regularização. Finalmente, a seção 5 contém o enunciado e a demonstração do principal resultado deste capítulo.

## 2.2 Considerações locais

Seja  $p \in S$  e  $Z = (X, Y)$ .

**Definição 2.8.** Seja  $p \in \mathbf{RD}$  (resp.  $p \in \mathbf{RE}$ ) um ponto crítico de  $F(Z)$ . Dizemos que  $p$  é do **Tipo Sela** se  $p$  é uma singularidade repulsora (resp. atratora) de  $F(Z)$  sobre  $S$ .

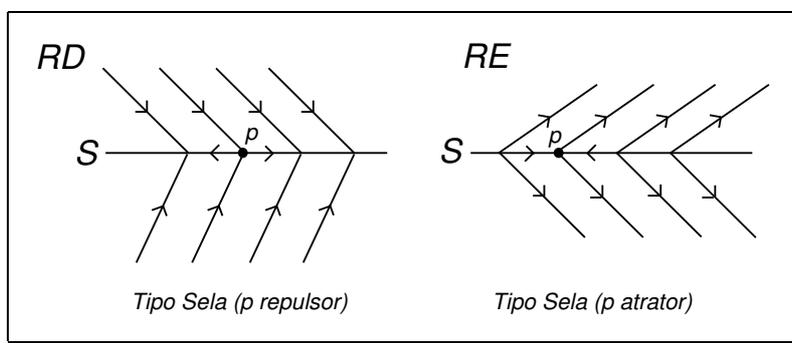


Figura 2.6: Pontos Críticos do tipo sela

**Definição 2.9.** Dizemos que um ponto  $p \in S$  é um **Ponto de Dobra** de  $X \in \chi^r$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$ . Isto significa que o contato entre a órbita de  $X$  e  $S$  é quadrático.

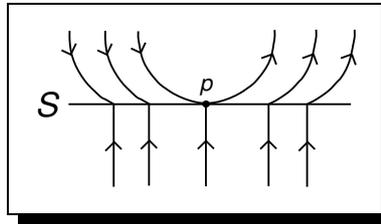


Figura 2.7: Ponto de Dobra

**Definição 2.10.** Um ponto  $p \in S$  é um **Ponto S-Regular** de  $Z$  se pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita:

1.  $Xf(p) \cdot Yf(p) > 0$  (neste caso temos  $p \in \mathbf{RC}$ ).
2.  $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$  mas  $\det[X, Y](p) = \begin{vmatrix} X_1(p) & X_2(p) \\ Y_1(p) & Y_2(p) \end{vmatrix} \neq 0$  (neste caso  $p \in \mathbf{RD}$  ou  $p \in \mathbf{RE}$  e não é um ponto crítico de  $F(Z)$ ).

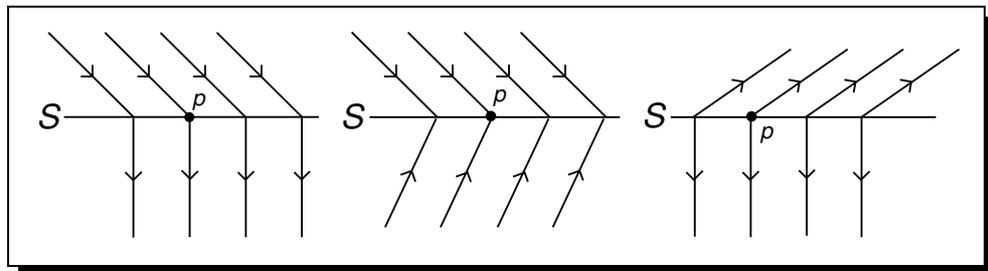


Figura 2.8: Pontos S-Regulares

**Definição 2.11.**  $p \in S$  é um **Ponto S-Singular Elementar** de  $Z = (X, Y)$  se uma das seguintes condições é satisfeita:

1.  $p$  é um ponto de dobra de  $Z = (X, Y)$ . Isto significa que: ou  $p$  é um ponto de dobra de  $Y$  (e aí teríamos  $Xf(p) \neq 0, Yf(p) = 0$  e  $Y^2f(p) \neq 0$ ), ou  $p$  é um ponto de dobra de  $X$  (e aí teríamos  $Yf(p) \neq 0, Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$ ).

2.  $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$ ,  $\det[X, Y](p) = 0$  mas  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y]_{|_S})(p) \neq 0$ . Um simples cálculo mostra que esta condição é equivalente a  $p$  ser um ponto crítico hiperbólico de  $F(Z)$ .

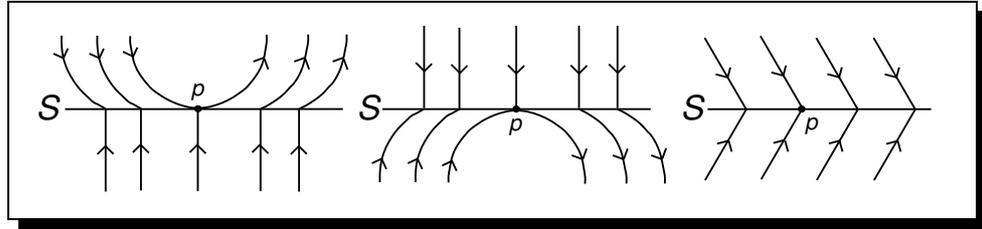


Figura 2.9: Pontos S-Singulares Elementares

### 2.2.1 Pontos Regulares

**Lema 2.12.** *Seja  $p \in M$  um ponto S-Regular de  $Z = (X, Y)$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$  e  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  não possui pontos críticos em  $V$ .*

**Demonstração:**

Tomemos  $p \in M$  um ponto S-Regular de  $Z$ . Por definição,  $p \in \mathbf{RC}$  ou  $p \in \mathbf{RE}$  ou ainda  $p \in \mathbf{RD}$ , mas não é uma singularidade de  $F(Z)$ . Temos então dois casos a considerar:

**caso1:**  $p \in \mathbf{RC}$  ( $Xf(p) \cdot Yf(p) > 0$ ).

Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $Xf(p) > 0$  e  $Yf(p) > 0$ . Deste modo, dada uma carta local  $(x, y)$  em torno de  $p$  escrevemos  $S = \{y = 0\}$ ,  $X = (0, 1)$  e  $Y = (f, g)$  com  $g(0) = b > 0$ . Nestas condições:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))(f(x, y), g(x, y)) + \varphi_\varepsilon(y)(0, 1) = \\ &= ((1 - \varphi_\varepsilon(y))f(x, y), (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y)) + (0, \varphi_\varepsilon(y)) = \\ &= ((1 - \varphi_\varepsilon(y))f(x, y), (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) + \varphi_\varepsilon(y)). \end{aligned}$$

Observemos que  $Z_\varepsilon^2(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) + \varphi_\varepsilon(y) > 0$ , logo  $Z_\varepsilon(x, y)$  é sempre transversal às curvas  $\{y = \alpha\}$  onde  $0 \leq |\alpha| \leq \varepsilon$ . Note que nós podemos encontrar vizinhanças  $N_\varepsilon^+$  de 0 em  $y = \{+\varepsilon\}$  e  $N_\varepsilon^-$  de 0 em  $y = \{-\varepsilon\}$  e um fluxo tubular  $h_\varepsilon : N_\varepsilon^+ \rightarrow N_\varepsilon^-$  com  $h'_\varepsilon(0) \neq 0$ . Assim, esta função é  $C^0$  próxima da identidade.

**caso2:**  $p \in \mathbf{RE}$  ou  $p \in \mathbf{RD}$  mas não é um ponto crítico de  $F(Z)$  ( $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$  com  $\det[X, Y](p) \neq 0$ ).

Neste caso podemos escolher coordenadas em torno de 0 em  $M$  tal que  $X(x, y) = (0, -1)$ ,  $Y = (f, g)$  com  $g(0) = b > 0$  e  $Z_\varepsilon = (Z_\varepsilon^1, Z_\varepsilon^2)$ . Um cálculo direto mostra que  $Z_\varepsilon(x, y) = (0, 0)$  se, e só se

$$\varphi_\varepsilon(y)(\det [X, Y](x, y)) = 0$$

e

$$\varphi_\varepsilon(y)(1 + g(x, y)) = g(x, y)$$

como estas equações não tem solução para  $x$  e  $y$  suficientemente pequenos, então nós deduzimos imediatamente que o campo vetorial  $Z_\varepsilon$  não tem pontos críticos em torno de  $p$ .

■

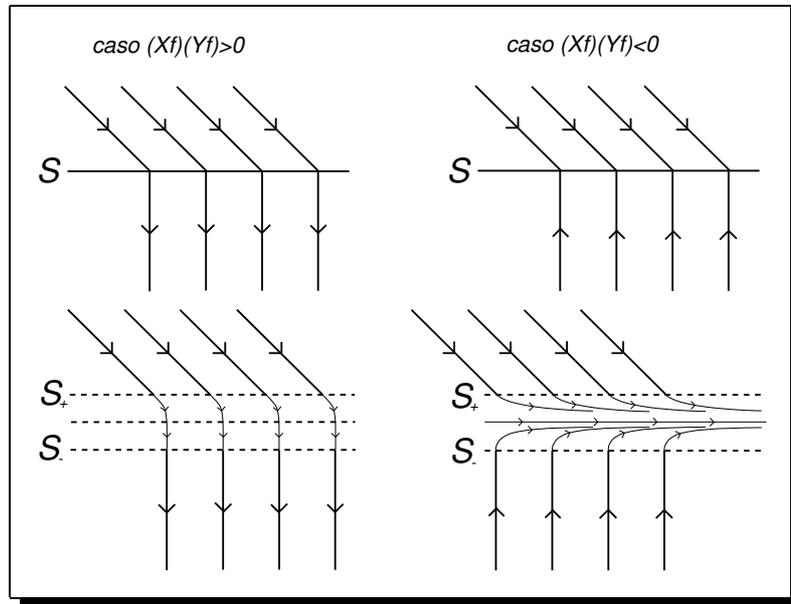


Figura 2.10: Pontos S-Regulares e suas Regularizações

### 2.2.2 Pontos Singulares

**Lema 2.13.** *Seja  $p$  um ponto de dobra de  $Z = (X, Y)$ . Então existe  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  temos que: se  $p$  é um ponto de dobra de  $X$  (resp.  $Y$ ) então*

1. *O contato entre as curvas  $\{Xf = 0\}$  (resp.  $\{Yf = 0\}$ ) e  $\{Z_\varepsilon f = 0\}$  no nível  $\{f = \varepsilon\}$  (resp.  $\{f = -\varepsilon\}$ ) é quadrático.*

2. Qualquer trajetória de  $Z_\varepsilon$  passando através de qualquer ponto  $q$ , próximo de  $p$  em  $M$  com  $f(q) = -\varepsilon$  (resp.  $f(q) = \varepsilon$ ) encontra o nível  $\{f = \varepsilon_0\}$  (resp.  $\{f = -\varepsilon_0\}$ ).
3. Sobre a curva  $\{Z_\varepsilon f = 0\}$  o contato entre  $Z_\varepsilon$  e a curva  $\{f = \varepsilon\}$  é quadrático.
4.  $Z_\varepsilon$  não possui pontos críticos numa vizinhança de  $p$ .

**Demonstração:**

Vamos assumir por um momento que  $p \in S$ ,  $Xf(p) = 0$ ,  $X^2f(p) > 0$  e  $Yf(p) > 0$ . Os outros casos são similares. Vamos escolher coordenadas ([14]) em  $|y| < \varepsilon$  e  $|x| < 2\varepsilon$  em torno de  $p = (0,0)$ , tal que  $f(x,y) = 0$ ,  $X(x,y) = (1,x)$  e  $Y(x,y) = (g(x,y), l(x,y))$  com  $l(0,0) > 0$ . O campo vetorial  $Z_\varepsilon$  é escrito na forma

$$Z_\varepsilon = (Z_1, Z_2) = ((1 - \varphi_\varepsilon)g + \varphi_\varepsilon, (1 - \varphi_\varepsilon)l + x\varphi_\varepsilon).$$

Deste modo  $Z_\varepsilon f = Z_2$  e a curva  $\xi_\varepsilon = \{Z_\varepsilon = 0\}$  é expressa pelas soluções da equação

$$\varphi_\varepsilon(y) = \frac{l(x,y)}{l(x,y) - x}.$$

Isto significa que o ponto  $p_0 = (0, \varepsilon)$  está em  $\xi_\varepsilon$  e para cada  $x < 0$  existe um ponto  $y_\varepsilon(x)$  que é a solução da equação acima de modo que a aplicação  $x \rightarrow y_\varepsilon(x)$  é suave e o valor  $-\varepsilon$  nunca é atingido por esta função. A demonstração da primeira parte do lema está agora completa. O restante da demonstração segue por argumentos de continuidade e usando as formas normais de  $X$  ou  $Y$  ([14]). ■

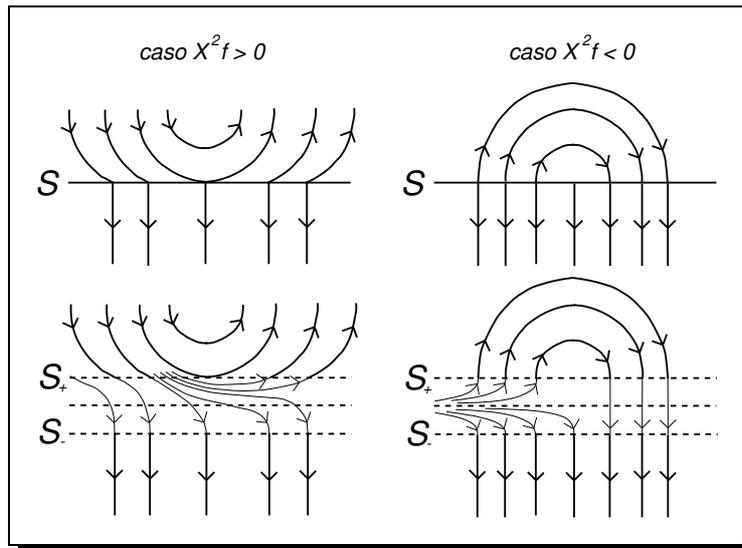


Figura 2.11: Pontos S-Singulares Elementares e suas Regularizações

**Observação 2.14.** *Assuma as hipóteses e notações do lema acima. Se  $Xf(p) = 0$ ,  $Yf(p) \neq 0$  e  $X^2f(p) > 0$  consideremos sobre a curva  $\gamma_\varepsilon = \{f = \varepsilon\}$  os conjuntos abertos  $\gamma_\varepsilon^+ = \{Z_\varepsilon f > 0\}$  e  $\gamma_\varepsilon^- = \{Z_\varepsilon f < 0\}$ . Definimos uma aplicação  $C^r$*

$$h_\varepsilon : \gamma_\varepsilon^- \rightarrow \gamma_\varepsilon^+$$

*tal que os pontos  $u$  e  $h_\varepsilon(u)$  estejam na mesma trajetória de  $Z_\varepsilon$  ([12]). Esta aplicação é  $C^r$  próxima da identidade.*

**Exemplo 2.15.** *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \operatorname{sgn}(x) \end{cases}$$

*Temos então*

$$x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 \end{cases} \quad e \quad x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$$

*Claramente este sistema é descontínuo e seu Retrato de Fase está dividido em duas regiões (I) e (II), separadas pela Reta de Descontinuidade  $S = \{x = 0\}$ . Denotamos os Campos nas regiões (I) ( $x < 0$ ) e (II) ( $x > 0$ ) por  $X$  e  $Y$ , respectivamente, mantendo a notação estabelecida até aqui.*

*Tomemos  $f(x, y) = x$ . Assim*

1.  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1, 0)$ .
2.  $Xf = X \cdot \nabla f = (y, -1) \cdot (1, 0) = y$ .
3.  $Yf = Y \cdot \nabla f = (y, 1) \cdot (1, 0) = y$ .
4.  $X^2f = X \cdot \nabla Xf = (y, -1) \cdot (0, 1) = -1$ .
5.  $Y^2f = Y \cdot \nabla Yf = (y, 1) \cdot (0, 1) = 1$ .
6.  $\det [X, Y] = \begin{vmatrix} y & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = y + y = 2y$ .

*Feito isto, vamos identificar as possíveis regiões da Reta de Descontinuidade e investigar a ocorrência de Pontos Singulares.*

- **Região de Costura:**

$$(Xf)(Yf) > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y \neq 0.$$

Logo, qualquer ponto de  $S$ , com exceção da origem, é Ponto de Costura.

- **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} Xf > 0 \\ Yf < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y > 0 \text{ e } y < 0.$$

Contradição, logo não há Região de Escape.

- **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} Xf < 0 \\ Yf > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y < 0 \text{ e } y > 0.$$

Contradição, logo não há Região de Deslizamento.

- **Pontos Singulares para o Campo  $X$ :**

Não há Singularidades para o Campo  $X$ .

- **Pontos Singulares para o Campo  $Y$ :**

Não há singularidades para o Campo  $Y$ .

- **Pontos Singulares para a Reta de Descontinuidade  $S$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $X$ :**

$$Xf(P_X) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Logo a origem  $P_X = (0,0)$  é um Ponto de Dobra para o Campo  $X$  (note que  $X^2f(P_X) = -1 \neq 0$ ).

2. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $Y$ :**

$$Yf(P_Y) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Logo a origem  $P_Y = P_X = (0,0)$  é também um Ponto de Dobra para o Campo  $Y$  (veja observação 2.16 mais adiante).

3. *Pontos Críticos:*

$$Xf(P_c)Yf(P_c) < 0 \Rightarrow y^2 < 0.$$

*Contradição, logo não há Pontos Críticos.*

*Agora*

$$X = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -t \\ \dot{y} = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{(t^2)}{2} \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y^2}{2}$$

*donde as órbitas em X são parábolas com a concavidade voltada para o semi-eixo negativo x.*

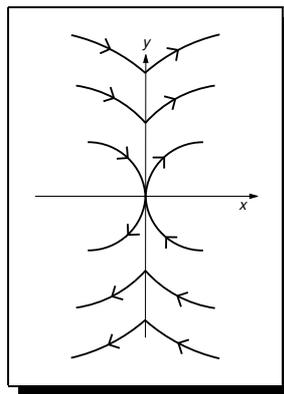
*Do mesmo modo*

$$Y = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = t \\ \dot{y} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}.$$

*donde as órbitas em Y são parábolas com a concavidade voltada para o semi-eixo positivo de x.*

*Além disto, temos em X que  $y = -t$ , logo se  $t \rightarrow \infty$  então  $y \rightarrow -\infty$ . Já em Y temos  $y = t$ , logo fazendo  $t \rightarrow \infty$ , teremos  $y \rightarrow \infty$ .*

*Assim, concluímos que o Retrato de Fase deste exemplo tem a forma aproximada da figura abaixo:*



*Figura 2.12: Exemplo 1.15*

*Vamos agora apresentar uma  $\varphi_\varepsilon$ -Regularização para este exemplo:*

$$\text{Seja } \varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \text{ onde } \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \\ \varphi'(t) > 0 & \text{se } t \in (-1, 1) \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(x))(y, -1) + \varphi_\varepsilon(x)(y, 1) = \\ &= \left(y - y\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), -1 + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + \left(y\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \\ &= \left(y, -1 + 2\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

é uma  $\varphi_\varepsilon$ -Regularização para este exemplo. Com isso, o Campo Regularizado tem o aspecto aproximado da figura abaixo:

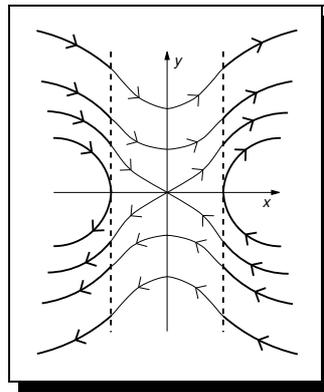


Figura 2.13: Exemplo 1.15 Regularizado

**Observação 2.16.** No exemplo acima a origem não é um ponto singular elementar, pois  $X(0) = Y(0) = 0$ . Assim, um campo arbitrariamente próximo de  $Z_0 = (X, Y)$  não terá seu retrato de fase topologicamente equivalente a  $Z_0$ . Tomemos por exemplo o campo

$$Z_n = \left(y + \frac{\text{sgn}(x)}{n}, \text{sgn}(x) + \frac{\text{sgn}(x)}{n}\right)$$

que converge para  $Z_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então temos

$$x < 0 \Rightarrow X_n = \begin{cases} \dot{x} = y - \frac{1}{n} \\ \dot{y} = -1 - \frac{1}{n} \end{cases} \quad e \quad x > 0 \Rightarrow Y_n = \begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{n} \\ \dot{y} = 1 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Definimos  $f(x, y) = x$ . Logo

1.  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1, 0)$
2.  $X_n f = X_n \cdot \nabla f = \left( y - \frac{1}{n}, -1 - \frac{1}{n} \right) \cdot (1, 0) = y - \frac{1}{n}$ .
3.  $Y_n f = Y_n \cdot \nabla f = \left( y + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) \cdot (1, 0) = y + \frac{1}{n}$ .
4.  $X_n^2 f = X_n \cdot \nabla X_n f = \left( y - \frac{1}{n}, -1 - \frac{1}{n} \right) \cdot (0, 1) = -1 - \frac{1}{n}$ .
5.  $Y_n^2 f = Y_n \cdot \nabla Y_n f = \left( y + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) \cdot (0, 1) = 1 + \frac{1}{n}$ .
6.  $\det [X, Y] = \begin{vmatrix} y - \frac{1}{n} & -1 - \frac{1}{n} \\ y + \frac{1}{n} & 1 + \frac{1}{n} \end{vmatrix} = \left( y - \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \left( y + \frac{1}{n} \right) \left( y + \frac{1}{n} \right) = 2y \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ .

• **Região de Costura:**

$$\begin{aligned} (X_n f) \cdot (Y_n f) > 0 &\Rightarrow \left( y - \frac{1}{n} \right) \left( y + \frac{1}{n} \right) > 0 \Rightarrow y^2 - \frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 > \frac{1}{n^2} \Rightarrow y > \frac{1}{n} \text{ ou } y < -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

• **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} X_n f > 0 \\ Y_n f < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{n} > 0 \text{ e } y + \frac{1}{n} < 0 \Rightarrow y > \frac{1}{n} \text{ e } y < -\frac{1}{n}.$$

Contradição, logo não há região de escape.

• **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} X_n f < 0 \\ Y_n f > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{n} < 0 \text{ e } y + \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow y < \frac{1}{n} \text{ e } y > -\frac{1}{n}.$$

• **Pontos Singulares para a Reta de Descontinuidade  $\{x = 0\}$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $X_n$ :**

$$\begin{aligned} X_n f(P_{X_n}) &= 0 \Rightarrow y - \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{n} \Rightarrow P_{X_n} = \left( 0, \frac{1}{n} \right). \\ Y_n f(P_{X_n}) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \neq 0 \quad \forall n. \\ X_n^2 f(P_{X_n}) &= -1 - \frac{1}{n} \neq 0 \quad \forall n. \end{aligned}$$

Segue que o ponto  $P_{X_n} = \left( 0, \frac{1}{n} \right)$  é ponto de dobra em relação ao campo  $X_n$ .

2. Pontos de Dobra em relação ao Campo  $Y_n$ :

$$\begin{aligned} Y_n f(P_{Y_n}) &= 0 \Rightarrow y + \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{n} \Rightarrow P_{Y_n} = \left(0, -\frac{1}{n}\right). \\ X_n f(P_{Y_n}) &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -\frac{2}{n} \neq 0 \quad \forall n. \\ Y_n^2 f(P_{Y_n}) &= 1 + \frac{1}{n} \neq 0 \quad \forall n. \end{aligned}$$

Segue que o ponto  $P_{Y_n} = \left(0, -\frac{1}{n}\right)$  é ponto de dobra em relação ao campo  $Y_n$ .

## 3. Pontos Críticos:

$$X_n f(P_c) \cdot Y_n f(P_c) < 0 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{n}\right) \left(y + \frac{1}{n}\right) < 0 \Rightarrow y^2 - \frac{1}{n^2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n}.$$

Agora

$$\det [X_n, Y_n](P_c) = 0 \Rightarrow 2y \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Segue então que o ponto  $(0, 0)$  é um possível ponto crítico para a reta de descontinuidade. Mas, observando que

$$X_n = \begin{cases} \dot{x} &= y - \frac{1}{n} \\ \dot{y} &= -1 - \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -1 - \frac{1}{n} \Rightarrow y = -t - \frac{t}{n} + c_1 = -\frac{t(1+n)}{n} + c_1.$$

e que

$$Y_n = \begin{cases} \dot{x} &= y + \frac{1}{n} \\ \dot{y} &= 1 + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow y = t + \frac{t}{n} + c_2 = \frac{t(1+n)}{n} + c_2.$$

temos que os campos  $X_n$  e  $Y_n$  podem ser escritos na forma

$$X_n = \begin{cases} \dot{x} &= \frac{c_1 n - 1 - (n+1)t}{n} \\ \dot{y} &= \frac{-n-1}{n} \end{cases} \quad \text{e} \quad Y_n = \begin{cases} \dot{x} &= \frac{c_2 n + 1 + (n+1)t}{n} \\ \dot{y} &= \frac{n+1}{n} \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} \det [X_n, Y_n] &= \begin{vmatrix} \frac{c_1 n - 1 - (n+1)t}{n} & \frac{-n-1}{n} \\ \frac{c_2 n + 1 + (n+1)t}{n} & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix} = \frac{(c_1 + c_2)(n^2 + n)}{n^2} = \\ &= (c_1 + c_2) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \neq 0 \quad (\text{pois } c_1 + c_2 \neq 0). \end{aligned}$$

Concluimos então que o ponto  $P_c = (0, 0)$  é realmente um ponto crítico da reta de descontinuidade.

Baseado neste cálculos, o retrato de fase deste exemplo possui a forma aproximada da figura abaixo:

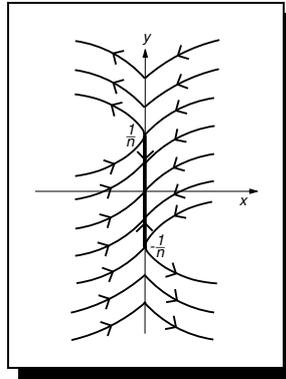


Figura 2.14: Exemplo 1.15 Perturbado

O seguinte lema será especialmente útil no enfoque da observação 2.14

**Lema 2.17.** *Assumimos as hipóteses do lema 2.13 e as notações da observação 2.14. Então, nestas condições, para qualquer  $u \in \gamma_\varepsilon^-$  temos que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(u) = 0$$

***Demonstração:***

Vamos provar o lema considerando  $Y(f) > 0$ ; o outro caso é similar. Considerando as coordenadas dadas no lema anterior, seja  $I_\varepsilon$  um intervalo aberto contendo  $p_\varepsilon$  sobre  $\{f = \varepsilon\}$ . Sejam  $h_0 : I_\varepsilon, 0 \rightarrow I_\varepsilon, 0$  e  $h_\varepsilon : I_\varepsilon, 0 \rightarrow I_\varepsilon, 0$  involuções de classe  $C^r$  em  $x = 0$  associadas aos campos vetoriais  $X$  e  $Z_\varepsilon$  respectivamente. Notemos que  $x$  e  $h_\varepsilon$  (resp.  $h_0$ ) pertencem à mesma órbita de  $Z_\varepsilon$  (resp.  $X$ ). Observe que nestas coordenadas nós temos  $h_0(x) = -x$ . Assim,

$$\det [X, Z_\varepsilon] = (1 - \varphi_\varepsilon) \det [X, Y]$$

e

$$\det [Z_\varepsilon, Y] = \varphi_\varepsilon \det [X, Y]$$

A primeira igualdade implica que se  $x < 0$  então  $h_\varepsilon(x) < -x$ . Observe agora que a curva integral de  $X$  passando por  $(x, \varepsilon)$  é  $y = x^2 + (\varepsilon - x)$ . Deste modo, a órbita de  $Z_\varepsilon$  através daquele ponto intercepta a curva  $Xf = 0$  em  $p_1 = (0, \varepsilon_1)$  com  $|\varepsilon_1| < \varepsilon$ . A curva integral de

$X$  (passando por  $p_1$ ) é dada por  $y = x^2 + \varepsilon_1$  que intercepta o nível  $y = \varepsilon$  em  $x' = \pm\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_1}$ . Então

$$h_\varepsilon(x) < \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_1} < \sqrt{2\varepsilon}$$

Isto mostra que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(u) = 0$$

para todo  $u$  próximo de  $p$  em  $S$ . ■

**Lema 2.18.** *Dado  $Z = (X, Y)$  seja  $p$  um ponto crítico hiperbólico de  $F(Z)$ . Então existe  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  tem próximo de  $p$  um ponto crítico que é uma sela hiperbólica ou um nó hiperbólico. Deste modo os autoespaços associados a esta singularidade são transversais às curvas  $\{f = \varepsilon\}$  e  $\{f = -\varepsilon\}$ .*

**Demonstração:**

Analizaremos apenas o caso quando  $Xf(p) < 0$ ,  $Yf(p) > 0$ ,  $\det[X, Y](p) = 0$  e  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y]|_S)(p) \neq 0$ . Os outros casos são similares. Como antes, podemos escolher coordenadas em torno de  $p$  tais que  $f(x, y) = y$ ,  $Y(x, y) = (0, 1)$ ,  $X(x, y) = (g, l)$ , com  $l(0, 0) = a < 0$ . Deste modo,  $\det[X, Y] = g$  e  $g(0, 0) = 0$ . Chamemos  $g_x(0, 0) = \alpha$  e  $g_y(0, 0) = \beta$ . O campo vetorial regularizado tem a forma

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon &= (Z_\varepsilon^1, Z_\varepsilon^2) = (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(y))(0, 1) + \varphi_\varepsilon(y)(g, l) = \\ &= (\varphi_\varepsilon(y)g, (1 - \varphi_\varepsilon(y)) + l\varphi_\varepsilon(y)). \end{aligned}$$

Os pontos críticos de  $Z_\varepsilon$  são expressos por  $g = 0$  e  $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{1-l}$ . Observe agora que  $g = 0$  pode ser resolvido por uma função suave

$$x(y) = \frac{-\beta}{\alpha}y + o(y^2)$$

desde que, para  $x$ , exista  $y = y_\varepsilon(x)$ , solução de  $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{1-l}$ . A última aplicação é também suave. Como  $l(0, 0) < 0$ , nós podemos encontrar uma função positiva  $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$  tal que os valores  $\eta$  para os quais  $0 < \eta < \varepsilon - \eta_0$  nunca são atingidos por  $y(x)$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Então a interseção

$$\{Z_\varepsilon^1 = 0\} \cap \{Z_\varepsilon^2 = 0\}$$

consiste de um único ponto  $p_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ . Vamos analisar a natureza deste ponto crítico. Um cálculo direto mostra que no ponto  $p_\varepsilon$  temos

$$\det [dZ_\varepsilon] = \varphi_\varepsilon^2 \left( \det [dX] - \frac{g_x \varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} \right)$$

e

$$\text{tr} [dZ_\varepsilon] = \varphi_\varepsilon \left( \text{tr} [dX] - \frac{\varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon} \right)$$

Assim,

- Para  $y$  pequeno temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi'_\varepsilon(y) = \infty.$$

- Quando  $y_\varepsilon(x) < \varepsilon - \eta$  obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} = \infty.$$

- $\text{sgn}(\det [dZ_\varepsilon](p_\varepsilon)) = \text{sgn}(-\alpha)$ .
- $\text{tr} [dZ_\varepsilon](p_\varepsilon) < 0$ .

Finalmente, deduzimos das considerações acima que

- $p_\varepsilon$  é um nó estável desde que  $\alpha < 0$ .
- $p_\varepsilon$  é um ponto de sela crítico desde que  $\alpha > 0$ .

Isto termina a demonstração. ■

**Definição 2.19.** *Uma S-Conexão de Sela de  $Z = (X, Y)$  em  $\Omega$  é uma órbita  $\gamma$  de  $Z$  conectando ou um ponto de sela crítico de  $X$  ou  $Y$  e um ponto crítico de  $F(Z)$  do tipo sela ou dois pontos de sela críticos de  $F(Z)$ , ou dois pontos de sela críticos de  $X$  ou/e  $Y$  de tal modo que é permitido aos seus pontos interiores encontrar  $S$  somente em **RC**.*

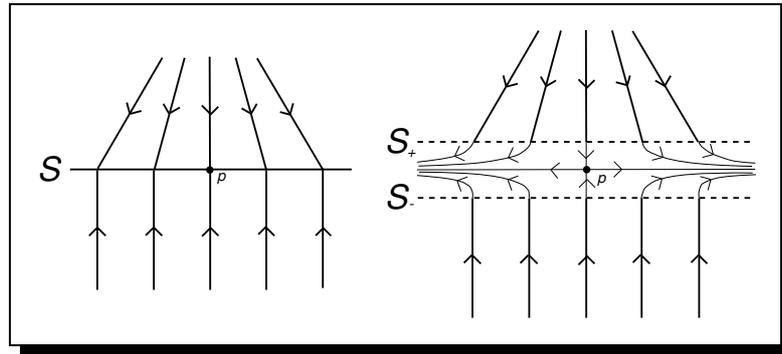


Figura 2.15: Ponto S-Singular Hiperbólico e sua Regularização

**Corolário 2.20.** *Seja  $Z = (X, Y)$  em  $\Omega$ . Assuma que  $X$  e  $Y$  estão em  $\Sigma^r(M)$ , todas as  $S$ -singularidades de  $Z$  são genéricas e  $Z$  não possui  $S$ -conexões de sela. Então existe um  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  nós temos*

1. *Todos os pontos críticos de  $Z_\varepsilon$  são hiperbólicos.*
2.  *$Z_\varepsilon$  não tem conexões de sela.*

**Demonstração:**

Segue imediatamente dos lemas anteriores. ■

**Observação 2.21.** *Lembramos que, sob as hipóteses do corolário 2.20, os limites das separatrizes sobre  $S$  de um ponto crítico de  $F(Z)$  do tipo sela são ou um ponto de dobra de  $Z$  ou um ponto crítico atrator (ou repulsor) de  $F(Z)$ . Isto significa, em particular, que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $Z_\varepsilon$  não admite conexões de sela dentro de uma vizinhança de  $S$  em  $M$ .*

### 2.2.3 Órbitas S-Periódicas

**Definição 2.22.** *Dizemos que uma curva fechada  $\gamma$ , formada por partes de órbitas regulares de  $X$  em  $M^+$  e órbitas regulares de  $Y$  em  $M^-$  é uma **Órbita S-Periódica** de  $Z = (X, Y)$  se  $\gamma$  intersecta  $S$  somente em **RC** e cada parte é transversal a  $S$ .*

**Observação 2.23.** *Dada uma Órbita S-Periódica*

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$$

$$\gamma_{2i} \in M^+, \gamma_{2i+1} \in M^-,$$

e

$$\gamma_j \cap S = \{p_j\} \cup \{p_{j+1}\},$$

podemos definir uma coleção de germes em  $p_j$  de  $C^r$ -Transformações de Poincaré

$$\eta_j : (S, p_j) \rightarrow (S, p_{j+1})$$

$j = 0, 1, \dots, k$  (associado a  $X$  ou a  $Y$ ) tal que a função primeiro retorno associada é dada por:

$$\eta = \eta_k \circ \eta_{k-1} \circ \dots \circ \eta_0$$

com  $\eta(p_0) = p_0$ .

**Definição 2.24.** Uma Órbita  $S$ -Periódica  $\gamma$  de  $Z$  é **Elementar** se a função primeiro retorno associada (em qualquer ponto  $p \in \gamma$ ) satisfaz:  $\eta'(p) \neq 1$ .

A demonstração do próximo lema é imediata e é omitida do texto.

**Lema 2.25.** Seja  $\gamma$  uma Órbita  $S$ -Periódica Elementar de  $Z = (X, Y)$ . Então existe uma vizinhança  $B$  de  $\gamma$  em  $M$  e um  $\varepsilon_0$  tais que para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  contém uma única órbita periódica em  $B$ , que é hiperbólica.

## 2.2.4 Gráficos

**Definição 2.26.** Dizemos que uma curva fechada  $\gamma$  é um **Gráfico** de  $Z = (X, Y)$  se ela é formada por partes de órbitas regulares de  $F(Z)$  e/ou partes de órbitas regulares de  $X$  em  $M^+$  e/ou partes de órbitas regulares de  $Y$  em  $M^-$ .

### Gráficos Simples

Um gráfico de  $Z = (X, Y)$  é simples se ele coincide com  $S$ . Neste caso,  $S$  é a Região de Escape ou a Região de Deslizamento de  $Z$ .

**Lema 2.27.** Seja  $\gamma$  um gráfico simples de  $Z = (X, Y)$ . Então existe uma vizinhança  $B$  de  $\gamma$  em  $M$  e um  $\varepsilon_0$  tais que para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  contém uma única órbita periódica em  $B$ , que é hiperbólica.

**Demonstração:**

Podemos assumir, sem perda de generalidade que  $\gamma \in \mathbf{RD}$ .

Consideremos coordenadas polares  $(\theta, \rho)$  em torno de  $\gamma$  de modo que

$$\gamma = \{\rho = \rho_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

. Neste caso,  $f(\theta, \rho) = \rho$ .

Seja  $Z(\theta, \rho) = (X(\theta, \rho), Y(\theta, \rho))$ , onde

$$X(\theta, \rho) = (a(\theta, \rho), b(\theta, \rho)) \text{ e } Y(\theta, \rho) = (c(\theta, \rho), d(\theta, \rho)).$$

Afirmamos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que se  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , então o campo vetorial regularizado

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(\theta, \rho) &= (Z_\varepsilon^1(\theta, \rho), Z_\varepsilon^2(\theta, \rho)) = \\ &= ((1 - \varphi_\varepsilon(\rho))c(\theta, \rho) + \varphi_\varepsilon(\rho)a(\theta, \rho), (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))d(\theta, \rho) + \varphi_\varepsilon(\rho)b(\theta, \rho)) \end{aligned}$$

possui uma órbita periódica

$$\gamma_\varepsilon = \{(\theta, \rho_\varepsilon(\theta)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

em  $B = \{(\theta, \rho) : |\rho| \leq \varepsilon_0\}$ .

De fato, como os pontos de  $\gamma$  pertencem a  $\mathbf{RD}$ , então  $Xf(\theta, 0) = b(\theta, 0) < 0$  e  $Yf(\theta, 0) = d(\theta, 0) > 0$ . Por continuidade, pode-se tomar  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $b(\theta, \rho) < 0$  e  $d(\theta, \rho) > 0$  se  $|\rho| \leq \varepsilon_0$ . Portanto, se  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , todas as órbitas do campo  $Z_\varepsilon$  estão entrando em  $B$  e pelo Teorema de Poincaré- Bendixon existe pelo menos uma órbita periódica em  $B$ .

Seja  $\gamma_\varepsilon$  uma órbita periódica de  $Z_\varepsilon$  em  $B$ . Provaremos que  $\gamma_\varepsilon$  é atratora e hiperbólica, e portanto única.

Sejam  $p \in \gamma_\varepsilon$ ,  $\Sigma$  uma seção transversal à órbita  $\gamma_\varepsilon$  em  $p$  e  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré, onde  $\Sigma_0 \subset \Sigma$  é o domínio de  $\pi$ . Utilizando a teoria de equações diferenciais, temos que

$$\pi'(p) = \exp \left[ \int_0^{2\pi} \text{div} Z_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(\theta)) d\theta \right]$$

onde  $\text{div} Z_\varepsilon = Z_{\varepsilon\theta}^1 + Z_{\varepsilon\rho}^2$ . Será provado que  $0 < \pi'(p) < 1$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \text{div} Z_\varepsilon &= (1 - \varphi_\varepsilon)c_\theta + \varphi_\varepsilon a_\theta - \varphi'_\varepsilon d + (1 - \varphi_\varepsilon)d_\rho + \varphi'_\varepsilon b + \varphi_\varepsilon b_\rho = \\ &= -\varphi'_\varepsilon(d - b) + \varphi_\varepsilon(a_\theta + b_\rho) + (1 - \varphi_\varepsilon)(c_\theta + d_\rho) = \\ &= -\varphi'_\varepsilon(d - b) + L, \end{aligned}$$

onde  $L = \varphi_\varepsilon \operatorname{div} X + (1 - \varphi_\varepsilon) \operatorname{div} Y$  é uma função limitada em  $B$ .

É imediato que  $(d - b) > 0$  em  $\gamma_\varepsilon$ , portanto resta mostrar que  $\varphi'_\varepsilon(\rho_\varepsilon(\theta)) \rightarrow +\infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]$ . Para isto será considerado inicialmente um sistema simplificado no qual os campos  $X$  e  $Y$  são dados por

$$\begin{cases} X(\theta, \rho) = (1, b_0) \\ Y(\theta, \rho) = (0, 1) \end{cases}$$

onde  $b_0 < 0$  é constante.

Neste caso, o campo vetorial regularizado fica

$$Z_\varepsilon(\theta, \rho) = (\varphi_\varepsilon(\rho), 1 - \varphi_\varepsilon(\rho) + \varphi_\varepsilon(\rho) b_0).$$

Fazendo a mudança de coordenadas  $\rho^* = \frac{\rho}{\varepsilon}$  e  $\theta^* = \frac{\theta}{\varepsilon}$ , tem-se

$$\frac{d\rho^*}{d\theta^*} = \frac{1 - \varphi(\rho^*) + \varphi(\rho^*) b_0}{\varphi(\rho^*)}.$$

Igualando esta última expressão a zero, encontra-se uma solução periódica do sistema, uma vez que o mesmo não depende de  $\theta$ . Esta solução periódica é dada implicitamente por

$$\varphi(\rho_0^*) = \frac{1}{1 - b_0}.$$

Como  $b_0 < 0$ ,

$$0 < \varphi(\rho_0^*) = \frac{1}{1 - b_0} < 1.$$

A solução periódica  $\rho_0^* = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{1 - b_0}\right)$  é única porque  $\varphi$  é monótona. Tem-se para  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho_0 = \varepsilon \rho_0^*$ , logo,

$$\varphi'_\varepsilon(\rho_0) = \left[ \varphi\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right) \right]' = \frac{1}{\varepsilon} \varphi'\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi'(\rho_0^*).$$

Conforme  $\varepsilon$  decresce,  $\varphi'_\varepsilon(\rho_0)$  aumenta. Isto se deve ao fato que  $\varphi'(\rho_0^*)$  é constante (pois  $\rho_0^*$  não depende de  $\varepsilon$ ) e estritamente positiva (pois  $0 < \varphi(\rho_0^*) < 1$ ), logo pode-se diminuir  $\varepsilon$  o quanto for necessário de modo a se ter a derivada grande quanto for preciso.

(1) Com isso tem-se que  $\rho = \rho_0 = \varepsilon \rho_0^*$  é uma primeira aproximação da solução periódica procurada. Será mostrado que pode-se tomar  $\delta > 0$  de modo que a solução do caso geral em que os campos são dados por  $X(\theta, \rho) = (a(\theta, \rho), b(\theta, \rho))$ ,  $Y(\theta, \rho) = (0, 1)$  está no intervalo  $\varepsilon(\rho_0^* \pm \delta)$ . Então, diminuindo-se  $\varepsilon$  o quanto for necessário para que a derivada seja grande neste intervalo, implicará que a órbita periódica será hiperbólica.

Como os pontos da órbita são regulares,  $\det [X, Y] (p) \neq 0$ , para qualquer  $p \in \gamma$ .

$$\det [X, Y] (p) = a(p) 1 - b(p) \cdot 0 = a(p) \neq 0.$$

Pode-se considerar, sem perda de generalidade, que  $a(p) > 0$ . Como  $\gamma$  é compacto, tem-se  $k = \min\{a(p) : p \in \gamma\} > 0$ .

O campo vetorial regularizado é dado por

$$Z_\varepsilon(\theta, \rho) = (\varphi_\varepsilon(\rho) a(\theta, \rho), (1 - \varphi_\varepsilon(\rho)) + \varphi_\varepsilon(\rho) b(\theta, \rho)).$$

Calculando-se a segunda coordenada de  $Z_\varepsilon$  em  $(\theta, \rho = \varepsilon(\rho_0^* \pm \delta))$ , tem-se

$$Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* \pm \delta)) = 1 - \varphi(\rho_0^* \pm \delta) + \varphi(\rho_0^* \pm \delta) b(\theta, \varepsilon(\rho_0^* \pm \delta)).$$

Se for mostrado que  $Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* + \delta)) < 0$  e  $Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* - \delta)) > 0$ , terá sido provado que as órbitas entram no anel  $(\theta, \rho = \varepsilon(\rho_0^* \pm \delta))$ , e por Poincaré-Bendixon, a órbita periódica estará neste anel.

As expansões de  $b$  e  $\varphi$  em série são dadas por

$$b(\theta, \rho) = b_0 + b_1(\theta) \rho + b_2(\theta, \rho) \rho^2,$$

$$b(\theta, \varepsilon(\rho_0^* \pm \delta)) = b_0 + b_1(\theta) \varepsilon(\rho_0^* \pm \delta) + b_2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* \pm \delta)) \varepsilon^2(\rho_0^* \pm \delta)^2$$

e

$$\varphi(\rho_0^* \pm \delta) = \varphi(\rho_0^*) \pm \varphi'(\rho_0^*) \delta + \frac{\varphi''(\rho_0^*) \delta^2}{2} + r_3(\delta),$$

onde  $r_3(\delta) = \varphi'''(\rho_0^* \pm m\delta)$ ,  $0 < m < 1$ . Logo

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* + \delta)) &= 1 - \left[ \varphi(\rho_0^*) + \varphi'(\rho_0^*) \delta + \frac{\varphi''(\rho_0^*) \delta^2}{2} + r_3(\delta) \right] \\ &\quad \cdot (1 - b_0 - b_1(\theta) \varepsilon(\rho_0^* + \delta) - b_2(\theta, \rho) \varepsilon^2(\rho_0^* + \delta)^2) = \\ &= 1 - \left[ \frac{1}{1-b_0} + \varphi'(\rho_0^*) \delta + \frac{\varphi''(\rho_0^*) \delta^2}{2} + r_3(\delta) \right] \\ &\quad \cdot (1 - b_0 - \varepsilon(\rho_0^* + \delta) (b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho) \varepsilon(\rho_0^* + \delta))). \end{aligned}$$

Fixado  $\delta > 0$ , pode-se diminuir  $\varepsilon > 0$  de modo que o fator

$$\varepsilon(\rho_0^* + \delta) (b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho) \varepsilon(\rho_0^* + \delta))$$

deixe de ser relevante e tenha-se

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{1-b_0} + \varphi'(\rho_0^*) \delta + \frac{\varphi''(\rho_0^*) \delta^2}{2} + r_3(\delta) \right] (1 - b_0) = \\ &= 1 + \left[ \varphi'(\rho_0^*) \delta + \frac{\varphi''(\rho_0^*) \delta^2}{2} + r_3(\delta) \right] (1 - b_0) > 1 \end{aligned}$$

e portanto

$$Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* + \delta)) < 0.$$

Agora calculando  $Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* + \delta))$ , temos

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* + \delta)) &= 1 - \left[ \frac{1}{1-b_0} + \varphi'(\rho_0^*)\delta + \frac{\varphi''(\rho_0^*)\delta^2}{2} + r_3(\delta) \right] \cdot \\ &\quad \cdot (1 - b_0 - \varepsilon(\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))) = \\ &= 1 - \frac{1-b_0}{1-b_0} + \frac{\varepsilon(\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))}{1-b_0} + (1-b_0)\varphi'(\rho_0^*)\delta + \\ &\quad - \varepsilon(\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))\varphi'(\rho_0^*)\delta - \frac{(1-b_0)\varphi''(\rho_0^*)\delta^2}{2} + \\ &\quad + \varepsilon(\rho_0^* - \delta)\frac{(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))\varphi''(\rho_0^*)\delta^2}{2} + \\ &\quad - r_3(\delta)(1 - b_0 - \varepsilon(\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))) = \\ &= \varepsilon\left(\frac{(\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))}{1-b_0} - (\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))\right) \cdot \\ &\quad \cdot \varphi'(\rho_0^*)\delta - (\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))\frac{\varphi''(\rho_0^*)\delta^2}{2} + \\ &\quad - (1-b_0)\left(\varphi'(\rho_0^*)\delta - \frac{\varphi''(\rho_0^*)\delta^2}{2}\right) + \\ &\quad - r_3(\delta)(1 - b_0 - \varepsilon(\rho_0^* - \delta)(b_1(\theta) + b_2(\theta, \rho)\varepsilon(\rho_0^* - \delta))). \end{aligned}$$

Como  $\delta^2 < \delta < 1$ , pode-se tomar  $\delta$  pequeno o suficiente para que

$$(1 - b_0)\varphi'(\rho_0^*)\delta - \frac{\varphi''(\rho_0^*)\delta^2}{2} > 0.$$

Depois de fixado o valor de  $\delta$  pode-se diminuir o valor de  $\varepsilon$  de maneira que

$$Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* + \delta)) > 0.$$

O valor de  $\delta$  pode ser tomado único e o valor de  $\varepsilon_0 > 0$  pode ser fixado de modo que para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  tenha-se

$$Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* + \delta)) < 0 \text{ e } Z_\varepsilon^2(\theta, \varepsilon(\rho_0^* - \delta)) > 0$$

e a derivada  $\varphi'_\varepsilon(\rho_0)$  seja grande o suficiente para que a órbita periódica seja hiperbólica, conforme foi argumentado em (1). ■

## Gráficos Elementares

Nesta seção analizaremos a dinâmica de uma regularização de um gráfico singular (a ser definido abaixo). Dado  $Z = (X, Y)$ , um gráfico singular está contido ou em  $M^+$  ou em  $M^-$ .

Nós o definiremos somente na primeira situação; o outro caso é tratado de modo similar. Também observamos que nossa análise estará centrada no caso em que o gráfico contém uma parte da região de deslizamento de  $Z$ ; O caso quando ele contém uma parte da região de escape pode ser tratado por dualidade e então omitimos sua análise.

Seja  $Q$  uma região conexa e compacta em  $M$  com fronteira não vazia. Denotaremos  $Q^+ = \{M^+\} \cap Q$  e  $Q^- = \{M^-\} \cap Q$ .

**Definição 2.28.** Um **Gráfico Singular**  $\gamma \in Q$  é caracterizado pela existência de uma curva consistindo de um arco  $S_1$  de  $S$  e uma parte  $\tau_0$  de uma órbita de  $X$  em  $M^+$  (veja a próxima observação) tal que :

- $S_1 = S \cap \partial Q$  é formado por dois pontos (chamados  $\alpha$  e  $\beta$ ). Nós definimos a orientação deste arco como sendo  $S_1 = [\alpha, \beta]$ . Escolhemos algum ponto (chamado 0) contido em  $S_1$  e denotamos  $I = (\alpha, \beta)$ ,  $I^- = (\alpha, 0)$  e  $I^+ = (0, \beta)$ .
- Assumimos que sobre  $Y$  não existem pontos críticos em  $Q^-$ , e  $X$  não possui pontos críticos em  $S_1$ . Além disso, em  $S_1$ ,  $Xf(u) = 0$  somente se  $u = 0$ , e  $X^2f(0) > 0$ .
- $Yf \neq 0$  e  $\det[X, Y] \neq 0$  em  $(\alpha, \beta)$ .
- $(\det[X, Y](\alpha))^2 + (\det[X, Y](\beta))^2 \neq 0$  e se  $\beta \in \partial \mathbf{RD}$  (resp.  $\alpha \in \partial \mathbf{RE}$ ) então

$$\det[X, Y](\beta) = 0 \text{ mas } D(\det[X, Y])|_S(\beta) \neq 0$$

(resp.  $\det[X, Y](\alpha) = 0$  mas  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y])|_S(\alpha) \neq 0$ ).

Se  $Yf > 0$  (resp.  $Yf < 0$ ) sobre  $I$  então  $I^+$  (resp.  $I^-$ ) pertence a  $\mathbf{RD}$  (resp.  $\mathbf{RE}$ ) em  $Z$ .

- A órbita de  $X$  passando através de 0, denotada por  $\gamma_0$ , está contida em  $Q^+$  de tal modo que ela intersepta  $S_1$  em  $\mu_0 \in (0, \beta)$ .

**Observação 2.29.** Observe que se o arco  $I^+$  (resp.  $I^-$ ) pertence a  $\mathbf{RD}$  (resp.  $\mathbf{RE}$ ) em  $Z$  então nós deduzimos que  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) é um ponto crítico hiperbólico de  $F(Z)$  (do tipo sela). Denotamos por  $q_\varepsilon$  o ponto crítico de sela de  $Z_\varepsilon$  associado a  $\beta$  (ou  $\alpha$ ). Isto permite que  $Xf(\alpha) = 0$  (resp.  $Xf(\beta) = 0$ ).

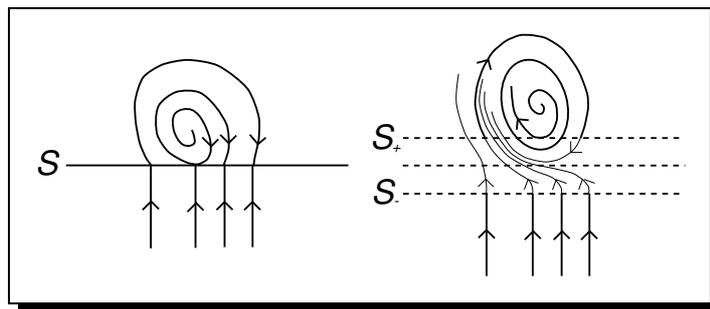


Figura 2.16: Gráfico Singular com RD e sua Regularização

**Observação 2.30.** Dado um gráfico singular, nós sabemos que um dos extremos de  $I = (\alpha, \beta)$  é um ponto crítico de  $F(Z)$ . Vamos denotá-lo por  $\omega_0$ . Chamaremos o outro extremo de extremo de costura e o denotaremos por  $\omega_1$ . Seguindo a observação 2.14, Podemos definir o valor  $h_\varepsilon(\omega_0)$  e por continuidade concluir que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(\omega_0) = 0.$$

**Definição 2.31.** Dizemos que  $\gamma_0$  é um **Gráfico Elementar** de  $Z = (X, Y)$  se ele é singular e intersecta  $S$  no interior de  $I = (\alpha, \beta)$ .

**Lema 2.32.** Seja  $\gamma$  um gráfico elementar de  $Z = (X, Y)$ . Então existe uma vizinhança  $B$  de  $\gamma$  em  $M$  e um  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  contém uma única órbita periódica em  $B$ , que é hiperbólica.

**Demonstração:**

Vamos provar este lema para o caso quando  $Q$  contém uma região de deslizamento de  $Z = (X, Y)$ . O caso quando  $Q$  contém uma região de escape é tratado de modo similar. Primeiramente, escolhemos coordenadas  $(x, y)$  em torno de 0 (mais precisamente em  $V_\varepsilon = \{|x| < 2\varepsilon, |y| < 2\varepsilon\}$ ), tais que  $f(x, y) = y$  e  $X(x, y) = (1, -x)$ . Procedendo como no lema 2.17 nós temos que, nestas coordenadas, as curvas integrais de  $X$  são expressas por  $y = x^2 + k$ . Por simplicidade de notação nós chamamos os pontos onde  $Z_\varepsilon$  é tangente a  $\{f = \varepsilon\}$  por  $0_\varepsilon$  e não fazemos nenhuma distinção entre  $u_0, \alpha, \beta$  e seus pontos correspondentes em cada curva  $\{f = \varepsilon\}$ . Observe que:

- O ponto  $q_\varepsilon$  dado na observação 2.29 pertence à curva  $\{Z_\varepsilon f = 0\}$ .
- Em nossas coordenadas, a curva  $\{Z_\varepsilon f = 0\}$  é expressa por  $x = x(y)$ , de modo que  $x(\varepsilon) = x'(\varepsilon) = 0$  e  $x'(\varepsilon) < 0$  em  $|y| < \varepsilon$ .

- A variedade invariante instável  $Z_\varepsilon$  de  $q_\varepsilon$  intercepta a curva  $Xf = 0$  no interior de  $V_\varepsilon$ .
- Seguindo a definição de um gráfico singular, nós podemos definir do mesmo modo como no lema 2.17, a involução associada a  $Z_\varepsilon$

$$h_\varepsilon : [0_\varepsilon, \beta) \rightarrow (\alpha, 0_\varepsilon)$$

de tal modo que para todo  $u$  em  $[0, \beta)$  nós temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon u = 0;$$

- A órbita positiva da variedade invariante de  $q_\varepsilon$  encontra a curva  $\{f = \varepsilon\}$  em uma seqüência ordenada  $a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots < 0_\varepsilon$ ;
- A órbita positiva de  $\mu_0$  encontra  $\{f = \varepsilon\}$  em uma seqüência ordenada  $b_1 > b_2 > \dots > b_l > \alpha$  no intervalo  $(\alpha, 0_\varepsilon)$ .

Deste modo, a região determinada pela saturação do  $Z_\varepsilon$ -fluxo sobre  $(\mu_0, \beta)$  contém uma região de atração invariante. Pelo Teorema de Poincaré-Bendixon existe nesta região pelo menos uma órbita periódica  $\gamma_\varepsilon$ . A seguir provaremos que esta órbita periódica é hiperbólica, atratora e única nesta região. O campo vetorial  $X$  sobre  $Q_+$  induz uma função  $C^r$  decrescente

$$g : (\alpha, 0) \rightarrow (0, \beta)$$

satisfazendo

$$g(0) = \mu_0, \quad g'(x) < 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = -\infty,$$

para todo  $x$  em  $(\alpha, 0)$ .

Utilizando a fórmula de Taylor nós podemos escrever (em torno de  $x = 0$ )

$$g(x) = \left(\sqrt{kx}\right) + o\left|\left(\sqrt{x}\right)^2\right|$$

para  $k < 0$  e  $x < 0$ . Qualquer órbita periódica de  $Z_\varepsilon$  em  $Q$  é caracterizada pelos pontos fixos da aplicação

$$\rho_\varepsilon : [\mu_0, \beta) \rightarrow [\mu_0, \beta)$$

onde  $\rho_\varepsilon = g \circ h_\varepsilon$ .

Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno então a imagem de  $h_\varepsilon$  está contida em  $|x| < 2\varepsilon$ . Isto significa que a derivada desta função em  $x_0$  coincide com a derivada da involução  $h_0$  associada

a  $X$ , em  $-h_\varepsilon(x_0)$ . Lembremos que  $h_0$  é uma aplicação linear. Daí  $h'_\varepsilon = -h_\varepsilon$ . Isto implica que

$$\rho'_\varepsilon(x) = a_0 \left( (h_\varepsilon)(x)^{\frac{1}{2}} \right) + o(|x|)^{\frac{1}{2}}$$

com  $a_0 < 0$ . A última igualdade significa que  $\rho'_\varepsilon$  é negativo e se aproxima de zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Isto prova o lema para o caso quando  $Q$  contém uma região de deslizamento de  $Z$ . De outra forma  $Z_\varepsilon$  apresenta em  $Q$  uma órbita periódica hiperbólica repulsora. ■

**Observação 2.33.** *Lembramos que se um gráfico singular de  $Z$  não é elementar então pode ocorrer em  $Q$  o surgimento de uma órbita homoclínica para  $Z_\varepsilon$  com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.*

**Definição 2.34.** *Dizemos que uma órbita de  $Z$  é **Simples** se ela encontra  $S$  somente em  $\overline{\mathbb{R}C}$ .*

**Definição 2.35.** *Seja  $G$  a classe de todos os campos  $Z = (X, Y) \in \Omega$  para os quais as seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $X$  e  $Y$  estão em  $\Sigma^r(M^+)$  e em  $\Sigma^r(M^-)$ , respectivamente.
2. Todas as  $S$ -Singularidades e  $S$ -Órbitas Periódicas de  $Z$  são elementares.
3. Nenhuma órbita simples de  $Z$  conecta um ponto de dobra de  $Z$  e um ponto crítico de  $F(Z)$  ou dois pontos de dobra de  $Z$ .
4.  $Z$  não possui  $S$ -Conexões de Sela.
5. Os gráficos de  $Z$  são simples ou elementares.

O principal resultado deste capítulo é:

**Teorema 2.36.** *Seja  $Z = (X, Y)$  em  $G$ . Então existe um número positivo  $\varepsilon_0$  tal que para qualquer  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $Z_\varepsilon$  está em  $\Sigma^r(M)$ .*

**Demonstração:**

A prova deste resultado é uma consequência direta do corolário 2.20 e dos lemas 2.25, 2.27 e 2.32.

---

# CAPÍTULO 3

---

## Modelos de Controle Automático

Após a formalização matemática do processo de regularização de campos vetoriais descontínuos que vimos no capítulo 1, vamos analisar alguns problemas de modelagem matemática que ocorrem com bastante frequência na engenharia e em outras ciências. Na seção 2.1 faremos uma breve introdução à teoria do controle, estabelecendo parte da terminologia que será utilizada na descrição dos modelos que faremos adiante.

---

### 3.1 Noções de Teoria do Controle

---

Em princípio, qualquer grandeza física pode ser controlada, isto é, pode ter seu valor intencionalmente alterado. Obviamente, há limitações práticas; uma das inevitáveis é a restrição da energia de que dispomos para afetar os fenômenos: por exemplo, a maioria das variáveis climatológicas pode ser medida mas não controlada, por causa da ordem de grandeza da energia envolvida.

O *controle manual* implica em ter-se um operador presente ao processo criador de uma variável física e que, de acordo com alguma regra de seu conhecimento, opera um aparelho qualquer (válvula, alavanca, chave, “elemento de controle”), que por sua vez produz alterações naquela variável.

O *controle* diz-se *automático* quando uma parte, ou a totalidade das funções do operador é realizada por um equipamento, freqüente mas não necessariamente eletrônico.

*Controle automático a realimentação* é o equipamento automático que age sobre o elemento de controle, baseando-se em informações de medida da variável controlada. As vantagens deste equipamento sobre o operador humano são, em geral: custo, constância de trabalho, rapidez, precisão; sua desvantagem essencial é a incapacidade para reagir a perturbações e acidentes, além daqueles previstos em seu projeto.

O *controle automático a programa* envolve a existência de um programa de ações, que se cumpre com base no decurso do tempo ou a partir de modificações eventuais em variáveis externas ao sistema. No primeiro caso temos um programa temporal e, no segundo, um programa lógico.

O tema central da teoria matemática do controle é a obtenção de resultados que visam o melhor desempenho de um determinado programa. Para isto, é necessário traduzir em linguagem matemática as operações que são realizadas em tal programa. Esta tradução recebe o nome de modelo matemático e nela são desprezadas uma maior ou menor quantidade de minúcias, com o objetivo de tornar o estudo o mais razoável possível. Na próxima seção, apresentaremos alguns exemplos de modelagem matemática para problemas que são constantemente estudados. Não nos preocuparemos em aplicar os métodos da teoria matemática do controle nestes modelos. Nos limitaremos apenas em utilizar os resultados obtidos para aplicar o algoritmo de regularização desenvolvido no capítulo 1.

---

## 3.2 Modelos

---

Nesta seção introduziremos alguns modelos de problemas de controle automático. Tais modelos serão regularizados no Capítulo 3 utilizando o processo descrito no Capítulo 1.

### 3.2.1 Piloto Automático de Duas Posições para Barcos

#### Formulação do Problema

Seja  $\varphi$  o desvio de um barco de seu curso pré-determinado (veja figura abaixo). Desconsiderando o deslocamento lateral do barco durante sua rotação, e levando em conta os momentos  $M = M(\psi)$  gerado pelo leme e  $-H \frac{d\varphi}{dt}$ , momento das forças de resistência, temos que, se  $I$  é o momento de inércia do barco em relação ao seu eixo vertical principal, a equação da rotação do barco tem a forma

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + H \frac{d\varphi}{dt} = M$$

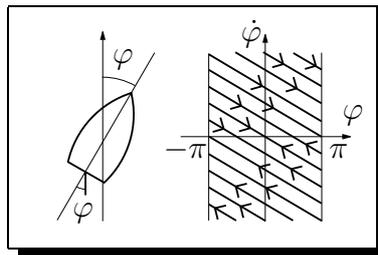


Figura 3.1: Ângulo de Desvio de um Barco

O barco por si só não possui estabilidade de curso. Para ilustrar isto, a figura acima mostra o retrato de fase do barco com o leme ao longo dos eixos  $\dot{\varphi}$  e  $\varphi$ , com  $\psi = 0$  e  $M = 0$ . As órbitas formam uma família de linhas retas ao longo das quais o ponto representativo se aproxima do estado de equilíbrio que cobre o eixo  $\varphi$  completo, quando  $t \rightarrow +\infty$ . A estabilidade para um curso dado somente pode ser conseguida por um aparelho de pilotagem fazendo movimentos adequados no leme. Assim, o problema deste aparelho (um homem ou um controlador automático de curso) é o de gerar um estado de equilíbrio estável correspondente ao curso dado ( $\varphi = 0$ ).

Um dos mais simples controladores de curso automático é aquele conhecido como “Piloto Automático de Duas Posições”, para o qual o leme pode assumir duas posições  $\psi = \pm\psi_0$ , gerando momentos  $M = \pm M_0$ . Nós vamos assumir que a posição do leme depende de certas leis sobre a situação do barco, dadas por  $\varphi$  e  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Nós temos o mais simples controlador de curso de duas posições quando o movimento do leme de um lado para o outro ocorre para uma passagem do barco através do curso dado  $\varphi = 0$  (assumimos também que o movimento do leme ocorre de maneira instantânea). Como veremos mais tarde, tal equipamento automático estabiliza de fato o curso do barco quando certas condições são satisfeitas. É natural pensar, entretanto, se somente com base na experiência em pilotagem de um barco comum, a ação estabilizadora do equipamento poderia ser mais efetiva se o movimento do leme ocorresse um pouco antes do barco desviar do curso pré-determinado. Este controle de antecipação é normalmente conseguido na prática por dois métodos: Ou por conhecimento da chamada “Velocidade de Correção” ou pela introdução do que conhecemos como “Realimentação Paralela” ou “Inflexível”. No caso da velocidade de correção ou ação derivada, o movimento do barco ocorre quando uma certa combinação linear do desvio de curso  $\varphi$  e a velocidade angular  $\dot{\varphi}$  se reduz a zero.

$$\sigma = \varphi + b \frac{d\varphi}{dt}$$

É fácil ver que para  $b > 0$ , a variação da posição do leme ocorrerá antes da passagem pelo barco através de  $\varphi = 0$ . Um diagrama de blocos representando o sistema “barco x piloto automático” com duas posições e correção de velocidade é mostrado na figura abaixo.

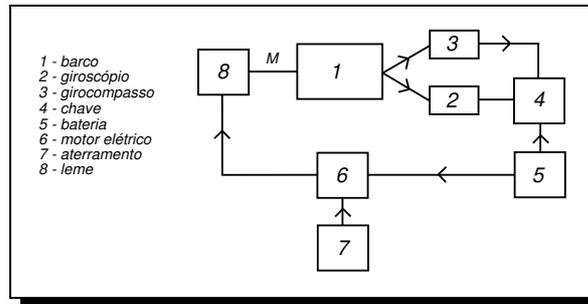


Figura 3.2: Diagrama de Blocos para o Piloto Automático

Este aparelho de pilotagem possui dois transmissores de dados: um girocompasso para detectar o desvio de curso  $\varphi$  e um giroscópio padrão para indicar mudanças na velocidade angular  $\frac{d\varphi}{dt}$ . O giroscópio está fixado ao barco somente pelo seu eixo vertical e sobre o eixo horizontal existem momentos devido a uma mola e um amortecedor viscoso especial. O ângulo de rotação do eixo horizontal do giroscópio (depois que suas oscilações livres tiverem sido amortecidas) é proporcional à velocidade angular do barco. Estes dois transmissores de dados movem a escova e os contatos de uma chave de tal maneira que para uma mudança no sinal da quantidade

$$\sigma = \varphi + b \frac{d\varphi}{dt}$$

a chave coloca (através de um revezamento) o aparelho de pilotagem para operar na direção requerida e deslocar o leme em uma das posições extremas  $\psi = \pm\psi_0$ . É claro que o leme está a bombordo ( $\psi = -\psi_0$  e  $M = -M_0$ ) para  $\sigma > 0$  e a estibordo ( $\psi = +\psi_0$  e  $M = +M_0$ ) para  $\sigma < 0$ . Se entretanto  $\sigma = 0$ , a chave está na posição central desligada e o aparelho de pilotagem está desconectado, de forma que o leme pode assumir uma posição arbitrária entre os dois extremos  $-\psi_0 \leq \psi \leq +\psi_0$  e  $-M_0 \leq M \leq +M_0$ .

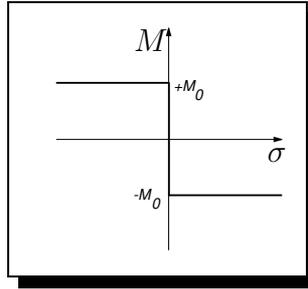


Figura 3.3: Função de Chaveamento para o Piloto Automático

Nós podemos escrever as equações do controlador com duas posições e do aparelho de pilotagem com correção de velocidade na forma

$$M = M_0 Z \left( \varphi + b \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

onde

$$Z(\sigma) = \begin{cases} -1 & \text{se } \sigma > 0 \\ +1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad \text{e } |Z(0)| \leq 1$$

### O Retrato de Fase

Primeiramente vamos simplificar as equações

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + H \frac{d\varphi}{dt} = M \quad \text{e} \quad M = M_0 Z \left( \varphi + b \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

do sistema introduzindo as variáveis  $x$ ,  $t^*$  e  $z$  definidas pelas relações

$$\varphi = Ax, \quad t = Tt^* \quad \text{e} \quad M = M_0 z$$

onde

$$A = \frac{M_0 I}{H^2} \quad \text{e} \quad T = \frac{I}{H}$$

Então as equações do sistema tomam a forma

$$\ddot{x} + x = z \quad \text{e} \quad z = Z(x + ky)$$

onde

$$k = \frac{b}{T} = b \frac{H}{I}$$

Em adição, como nós estamos interessados no caso de pequenos desvios do barco de seu curso original, de modo que  $|\varphi|$  será sempre menor do que  $\pi$ , podemos tomar o plano para

representar o retrato de fase do sistema. Vamos escrever  $\dot{x} = y$ . Então o plano  $x, y$  fica dividido pela Reta de Chaveamento

$$(*) \quad S = \{x + ky = 0\}$$

em duas regiões, que denotaremos por  $(I)$  e  $(II)$ . Temos então, nas regiões  $(I)$  ( $x + ky > 0$ ) e  $(II)$  ( $x + ky < 0$ ), respectivamente, os Campos Vetoriais:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + 1 \end{cases}$$

Seguindo a notação usada no Capítulo 1, definimos  $f(x, y) = x + ky$  e denotamos os campos nas regiões  $(I)$  e  $(II)$  por  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Deste modo, temos que:

1.  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1, k)$ .
2.  $Xf = X \cdot \nabla f = (y, -y - 1) \cdot (1, k) = y - ky - k = y(1 - k) - k$ .
3.  $Yf = Y \cdot \nabla f = (y, -y + 1) \cdot (1, k) = y - ky + k = y(1 - k) + k$ .
4.  $X^2f = X \cdot \nabla Xf = (y, -y - 1) \cdot (0, 1 - k) = -y + ky - 1 + k = y(k - 1) - (1 - k)$ .
5.  $Y^2f = Y \cdot \nabla Yf = (y, -y + 1) \cdot (0, 1 - k) = -y + ky + 1 - k = y(k - 1) + (1 - k)$ .
6.  $\det[X, Y] = \begin{vmatrix} y & -y - 1 \\ y & -y + 1 \end{vmatrix} = y(-y + 1) - y(-y - 1) = -y^2 + y + y^2 + y = 2y$ .

De posse destes valores, seguiremos identificando cada uma das regiões da Reta de Chaveamento  $S$  e analisando a existência ou não de Pontos Singulares:

• **Região de Costura:**

$$\begin{aligned} (Xf)(Yf) > 0 &\Rightarrow [y(1 - k) - k][y(1 - k) + k] > 0 \Rightarrow y^2(1 - k)^2 - k^2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 > \frac{k^2}{(1 - k)^2} \Rightarrow y > \frac{k}{1 - k} \text{ ou } y < -\frac{k}{1 - k}. \end{aligned}$$

• **Região de Escape:**

$$\left. \begin{aligned} Xf > 0 &\Rightarrow y(1 - k) - k > 0 \\ Yf < 0 &\Rightarrow y(1 - k) + k < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y > \frac{k}{1 - k} \text{ e } y < -\frac{k}{1 - k}.$$

Contradição, logo não há Região de Escape.

- **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} Xf < 0 \Rightarrow y(1-k) - k < 0 \\ Yf > 0 \Rightarrow y(1-k) + k > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y < \frac{k}{1-k} \text{ e } y > -\frac{k}{1-k} \Rightarrow -\frac{k}{1-k} < y < \frac{k}{1-k}.$$

- **Pontos Singulares para o Campo  $X$ :**

Não existem singularidades para o Campo  $X$ .

- **Pontos Singulares para o Campo  $Y$ :**

Não existem singularidades para o Campo  $Y$ .

- **Pontos Singulares para a Reta de Chaveamento  $S$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $X$ :**

$$Xf(P_X) = 0 \Rightarrow y(1-k) - k = 0 \Rightarrow y = \frac{k}{1-k}.$$

Substituindo em (\*), temos que

$$x + k \frac{k}{1-k} = 0 \Rightarrow x = -\frac{k^2}{1-k}.$$

Logo o ponto

$$P_X = \left( -\frac{k^2}{1-k}, \frac{k}{1-k} \right)$$

é um possível candidato a Ponto de Dobra da Reta de Chaveamento para o Campo  $X$ . Porém, observando que

$$Yf(P_X) = \frac{k}{(1-k)}(1-k) + k = 2k \neq 0$$

e que

$$X^2f(P_X) = \frac{k}{(1-k)}(k-1) - (1-k) = -k - (1-k) = -1 \neq 0$$

concluimos que  $P_X$  é realmente um Ponto de Dobra da Reta de Chaveamento em relação ao Campo  $X$ .

2. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $Y$ :**

$$Yf(P_Y) = 0 \Rightarrow y(1-k) + k = 0 \Rightarrow y = -\frac{k}{1-k}.$$

Substituindo em (\*), temos que

$$x + k \frac{-k}{1-k} = 0 \Rightarrow x = \frac{k^2}{1-k}.$$

Logo o ponto

$$P_Y = \left( \frac{k^2}{1-k}, -\frac{k}{1-k} \right)$$

é um possível candidato a Ponto de Dobra da Reta de Chaveamento para o Campo  $Y$ . Porém, observando que

$$Xf(P_Y) = \frac{-k}{1-k}(1-k) - k = -2k \neq 0$$

e que

$$Y^2f(P_Y) = \frac{-k}{1-k}(k-1) + (1-k) = k + 1 - k = 1 \neq 0$$

concluimos que  $P_Y$  é realmente um Ponto de Dobra da Reta de Chaveamento em relação ao Campo  $Y$ .

### 3. Pontos Críticos:

$$\begin{aligned} Xf(P_c) \cdot Yf(P_c) < 0 &\Rightarrow [y(1-k) - k][y(1-k) + k], 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2(1-k)^2 - k^2 < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 < \frac{k^2}{(1-k)^2} \Rightarrow -\frac{k}{1-k} < y < \frac{k}{1-k}. \end{aligned}$$

Assim, o Ponto Crítico (se existir) estará na Região de Deslizamento.

Agora

$$\det[X, Y](P_c) = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Substituindo em (\*), temos que

$$x + k(0) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Então a origem é um possível Ponto Crítico da Reta de Chaveamento.

Porém, observamos que:

$$\begin{aligned} X = \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y - 1 \end{cases} &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -y - 1 = -(1+y) \Rightarrow \frac{dy}{1+y} = -dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(1+y) = -t + c_1 \Rightarrow 1+y = \alpha_1 e^{-t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \alpha_1 e^{-t} - 1. \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
 Y = \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -y + 1 = -(y - 1) \Rightarrow \frac{dy}{(y-1)} = -dt \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ln(y - 1) = -t + c_2 \Rightarrow y - 1 = \alpha_2 e^{-t} \Rightarrow \\
 \Rightarrow y = \alpha_2 e^{-t} + 1.
 \end{aligned}$$

Assim, os Campos  $X$  e  $Y$  podem ser escritos na forma

$$X = \begin{cases} \dot{x} &= \alpha_1 e^{-t} - 1 \\ \dot{y} &= -\alpha_1 e^{-t} \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} \dot{x} &= \alpha_2 e^{-t} + 1 \\ \dot{y} &= -\alpha_2 e^{-t} \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \det[X, Y] &= \begin{vmatrix} \alpha_1 e^{-t} - 1 & -\alpha_1 e^{-t} \\ \alpha_2 e^{-t} + 1 & -\alpha_2 e^{-t} \end{vmatrix} = (\alpha_1 e^{-t} - 1)(-\alpha_2 e^{-t}) + \alpha_1 e^{-t}(\alpha_2 e^{-t} + 1) = \\
 &= -\alpha_1 \alpha_2 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_1 \alpha_2 e^{-2t} + \alpha_1 e^{-t} = \\
 &= (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-t}.
 \end{aligned}$$

Então

$$\frac{d}{dt} (\det[X, Y]) = -(\alpha_1 + \alpha_2) e^{-t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

donde

$$\frac{d}{dt} (\det[X, Y]_{|_s}) (P_c) \neq 0.$$

Concluimos assim que o ponto

$$P_c = (0, 0)$$

é realmente um Ponto Crítico da Reta de Chaveamento.

Seguindo a formulação de Filippov, temos que o Campo Vetorial Deslizante num ponto  $P$  da Reta de Chaveamento é dado pelo vetor no cone gerado por  $X(P)$  e  $Y(P)$ . Logo, usando a terminologia estabelecida no Capítulo 1, temos

$$\begin{aligned}
 F^+(P) &= \pi_S^{X,Y} \left( \frac{X(P) + Y(P)}{2} \right) = \pi_S^{X,Y} \left( \frac{(y, -y - 1) + (y, -y + 1)}{2} \right) = \\
 &= \pi_S^{X,Y} \left( \frac{(2y, -2y)}{2} \right) = \pi_S^{X,Y} (y(1, -1)).
 \end{aligned}$$

Então, tanto para  $y > 0$  quanto para  $y < 0$ , as órbitas na Região de Deslizamento se aproximam da origem e portanto  $P_c$  é um Ponto Crítico Atrator. De acordo com os cálculos

realizados acima concluímos que o Retrato de Fase para o modelo de Piloto Automático (considerando  $0 < k < 1$  e  $k > 1$ ) tem a forma:

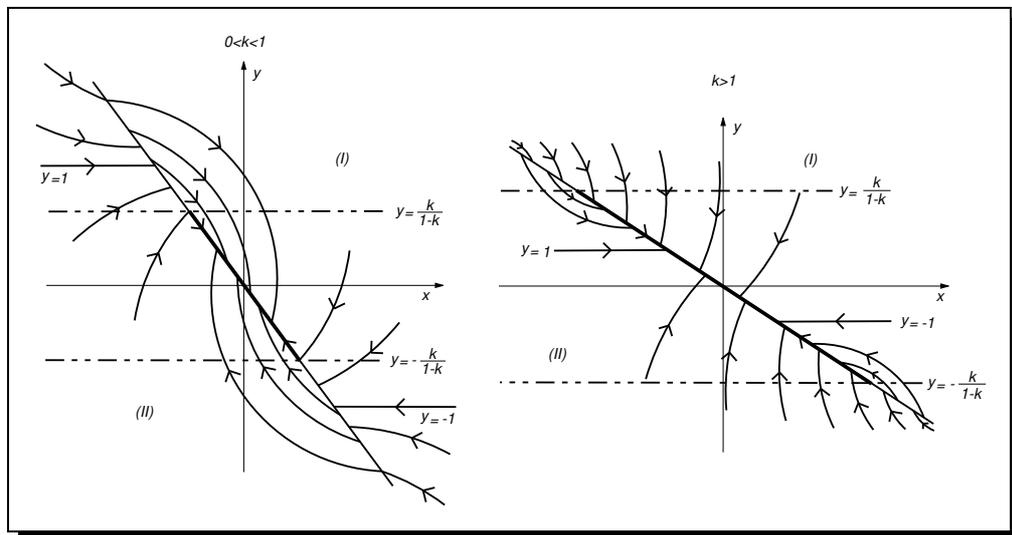


Figura 3.4: Retratos de Fase para o Modelo de Piloto Automático

### 3.2.2 Gerador Elétrico Valvulado

#### Formulação do Problema

Vamos considerar as auto-oscilações de um Gerador Elétrico Valvulado com rede ressonante no circuito em grade ou no circuito anôdo (veja figura abaixo).

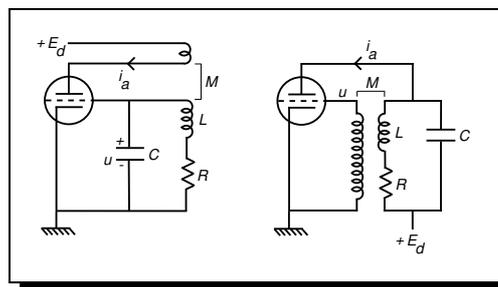


Figura 3.5: Geradores Elétricos Valvulados

Se desprezarmos a condutância do anôdo, a corrente na grade e a capacitância intereletrodos, então a equação das oscilações deste Gerador Elétrico Valvulado pode ser escrita

na seguinte forma

$$(**) \quad LC \frac{d^2 u}{dt'^2} + [RC - MS(u)] \frac{du}{dt'} + u = 0$$

onde

$$S(u) = \frac{di_a}{du}$$

é a inclinação da curva característica da válvula que depende da voltagem na grade. Usaremos uma aproximação linear para a curva característica da válvula  $i_a = i_a(u)$  dada por

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq -u_0 \\ S(u + u_0) & \text{se } u \geq -u_0 \end{cases}$$

onde  $-u_0$  é a voltagem eliminada da válvula ( $u_0 > 0$ ). Graficamente, temos

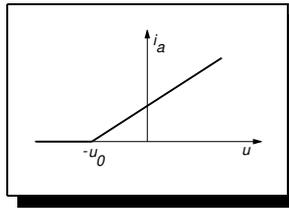


Figura 3.6: Curva Característica da Válvula

Vamos agora introduzir as variáveis adimensionais

$$x = \frac{u}{u_0} \quad \text{e} \quad t = \omega_0 t'$$

onde

$$\omega_0 = (LC)^{-\frac{1}{2}}$$

é a frequência natural não-amortecida do circuito ressonante. Então a equação (\*\*) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + x = 0 & \text{se } x < -1 \\ \ddot{x} - 2h_2 \dot{x} + x = 0 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

onde

$$h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC \quad \text{e} \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2} [MS - RC]$$

ou ainda, fazendo  $\dot{x} = y$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2h_1y \end{cases} \quad \text{se } x < -1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2h_2y \end{cases} \quad \text{se } x \geq -1$$

### O Retrato de Fase

Usando a notação estabelecida no Capítulo 1, temos dois Campos Vetoriais associados ao problema, definidos em duas regiões (I) e (II) do plano separadas pela reta de descontinuidade  $D = \{x = -1\}$ . Os Campos  $X$  e  $Y$  definidos nestas duas regiões são

$$X = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2h_1y \end{cases} \quad (\text{na região (I)}) \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2h_2y \end{cases} \quad (\text{na região (II)})$$

Tomemos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x + 1$ . Temos então:

1.  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1, 0)$
2.  $Xf = X \cdot \nabla f = (y, -x - 2h_1y) \cdot (1, 0) = y.$
3.  $Yf = Y \cdot \nabla f = (y, -x + 2h_2y) \cdot (1, 0) = y.$
4.  $X^2f = X \cdot \nabla Xf = (y, -x - 2h_1y) \cdot (0, 1) = -x - 2h_1y.$
5.  $Y^2f = Y \cdot \nabla Yf = (y, -x + 2h_2y) \cdot (0, 1) = -x + 2h_2y.$
6.  $\det [X, Y] = \begin{vmatrix} y & -x - 2h_1y \\ y & -x + 2h_2y \end{vmatrix} = -xy + 2h_2y^2 + xy + 2h_1y^2 = 2(h_1 + h_2)y^2.$

Identificaremos agora as regiões da Reta de Descontinuidade e verificaremos a existência ou não de Pontos Singulares:

- **Região de Costura:**

$$(Xf)(Yf) > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y \neq 0.$$

Logo todo ponto de  $D$  pertence à Região de Costura, exceto o ponto  $(-1, 0)$ .

- **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} Xf > 0 \\ Yf < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y > 0 \quad \text{e} \quad y < 0.$$

Contradição, portanto não há Região de Escape em  $D$ .

- **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} Xf < 0 \\ Yf > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y < 0 \text{ e } y > 0.$$

Contradição, portanto não há Região de Deslizamento em  $D$ .

- **Pontos Singulares para a Reta de Descontinuidade  $D$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $X$ :**

$$\left. \begin{array}{l} Xf(P_X) = 0 \Rightarrow y = 0 \\ X^2f(P_X) \neq 0 \Rightarrow -x - 2h_1y \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq 0.$$

Isto significa que o ponto  $P_X = (-1, 0) \in D$  é um Ponto de Dobra da Reta de Descontinuidade para o Campo  $X$  (veja a observação logo abaixo).

2. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $Y$ :**

$$\left. \begin{array}{l} Yf(P_Y) = 0 \Rightarrow y = 0 \\ Y^2f(P_Y) \neq 0 \Rightarrow -x + 2h_2y \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq 0.$$

Isto significa que o ponto  $P_Y = P_X = (-1, 0) \in D$  é também um Ponto de Dobra da Reta de Descontinuidade para o Campo  $Y$  (veja observação 2.16).

3. **Pontos Críticos:**

$$Xf(P_c)Yf(P_c) < 0 \Rightarrow y^2 < 0.$$

Contradição, logo não há Pontos Críticos na Reta de Descontinuidade.

- **Pontos Singulares para o Campo  $X$ :**

$$X = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x - 2h_1y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Como o ponto  $(0, 0)$  não está na região  $(I)$ , segue que o Campo  $X$  não possui singularidades.

- **Pontos Singulares para o Campo  $Y$ :**

$$Y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x + 2h_2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Então a origem é uma singularidade para o Campo  $Y$ . Vamos determinar o tipo topológico desta singularidade.

Observemos que o Campo  $Y$  pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores da matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2h_2 \end{pmatrix}$  obtemos:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2h_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(2h_2 - \lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2h_2\lambda + 1 = 0.$$

Então

$$\lambda = \frac{2h_2 \pm \sqrt{4h_2^2 - 4}}{2} = h_2 \pm \sqrt{h_2^2 - 1}.$$

Temos três casos a considerar:

1. Se  $h_2^2 - 1 < 0$  então  $h_2^2 < 1$  donde  $0 < h_2 < 1$ . Assim os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são conjugados complexos.
2. Se  $h_2^2 - 1 > 0$  então  $h_2^2 > 1$  donde  $h_2 > 1$  ou  $h_2 < -1$ . Assim os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e distintos.
3. Se  $h_2^2 - 1 = 0$  então  $h_2^2 = 1$  donde  $h_2 = \pm 1$ . Neste caso temos dois autovalores iguais

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Vamos analisar os casos quando  $0 < h_2 < 1$  e quando  $h_2 > 1$ . Os demais casos são similares.

Considerando  $0 < h_2 < 1$  temos que a origem é um foco instável e no caso em que  $h_2 > 1$  a origem torna-se um nó instável. Baseado nestes cálculos, concluímos que o Retrato de fase do modelo de Gerador Elétrico Valvulado assume a forma descrita na figura abaixo:

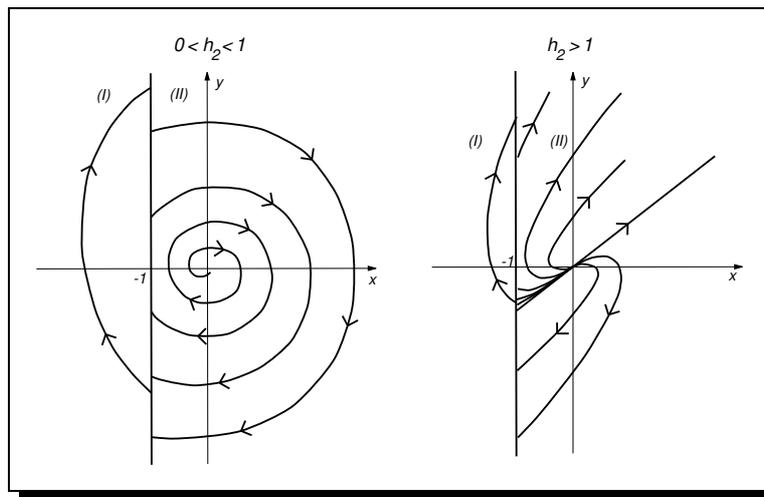


Figura 3.7: Retratos de Fase para o Modelo de Gerador Elétrico Valvulado

### 3.2.3 Máquina à Vapor

#### Formulação do Problema

Vamos analisar agora um exemplo de sistema auto-oscilante usando um modelo dinâmico simples de Máquina à Vapor. Um diagrama esquemático deste modelo é mostrado na figura abaixo:

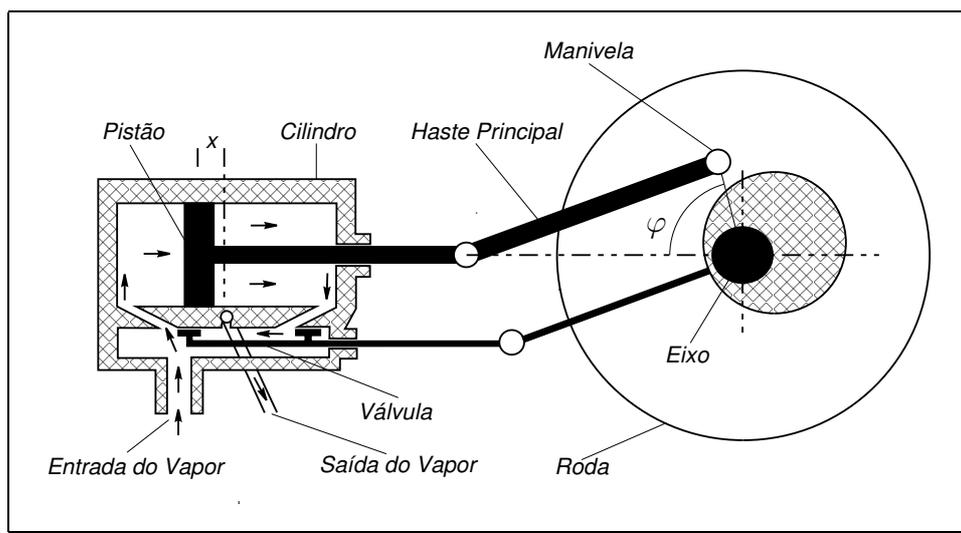


Figura 3.8: Máquina à Vapor

Como já sabemos, a Máquina à Vapor é um sistema com realimentação: a válvula deslizante do aparelho, conectada com seu eixo principal, controla a admissão do vapor dentro do cilindro (na cavidade direita ou esquerda, dependendo da posição do eixo) e produz uma força variável no pistão a partir de uma fonte constante de energia (obtida do eixo principal com pressão do vapor constante  $P_0$ ). Esta ação variável sobre o pistão causa um movimento oscilatório que é utilizado para produzir rotação no eixo, mesmo na presença de forças de resistência devidas à fricção e ao seu peso. A força  $f$  que a pressão do vapor exerce sobre o pistão depende da posição da válvula deslizante e da posição do pistão. A válvula deslizante conecta um dos dois lados do pistão com a câmara de entrada ou saída do vapor, e também isola o cilindro. A pressão do vapor no final do cilindro depende do volume da cavidade se a sua abertura está fechada pela válvula deslizante. Como as posições do pistão, do eixo e da válvula deslizante da máquina são unicamente determinadas pelo ângulo de rotação do eixo,  $\varphi$ , então, primeiramente, a força  $f$  será dada por uma certa função real e periódica do ângulo  $\varphi$  (veja a figura 3.9) e em segundo lugar o estado do modelo dinâmico da máquina a vapor será determinado unicamente pelo ângulo de rotação  $\varphi$  e pela velocidade angular do eixo. Como veremos adiante, o Retrato de Fase deste modelo será uma superfície cilíndrica.

Assumindo algumas simplificações, a equação do movimento do eixo é

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - M_H$$

onde  $I$  é o momento de inércia da máquina levando em conta a roda e o peso referente ao eixo,  $M$  é o torque sobre o eixo devido ao pistão e  $M_H$  é o torque devido à resistência e ao peso.

O torque  $M$  é relacionado com  $f$  pela igualdade

$$M = f(\varphi) A \sin(\varphi)$$

contanto que a perda de energia  $A$  da manivela seja pequena em comparação com o comprimento da haste de conexão. Deste modo o torque  $M$  também é uma função periódica real do ângulo  $\varphi$ , mas tendo agora período  $\pi$  (veja figura abaixo).

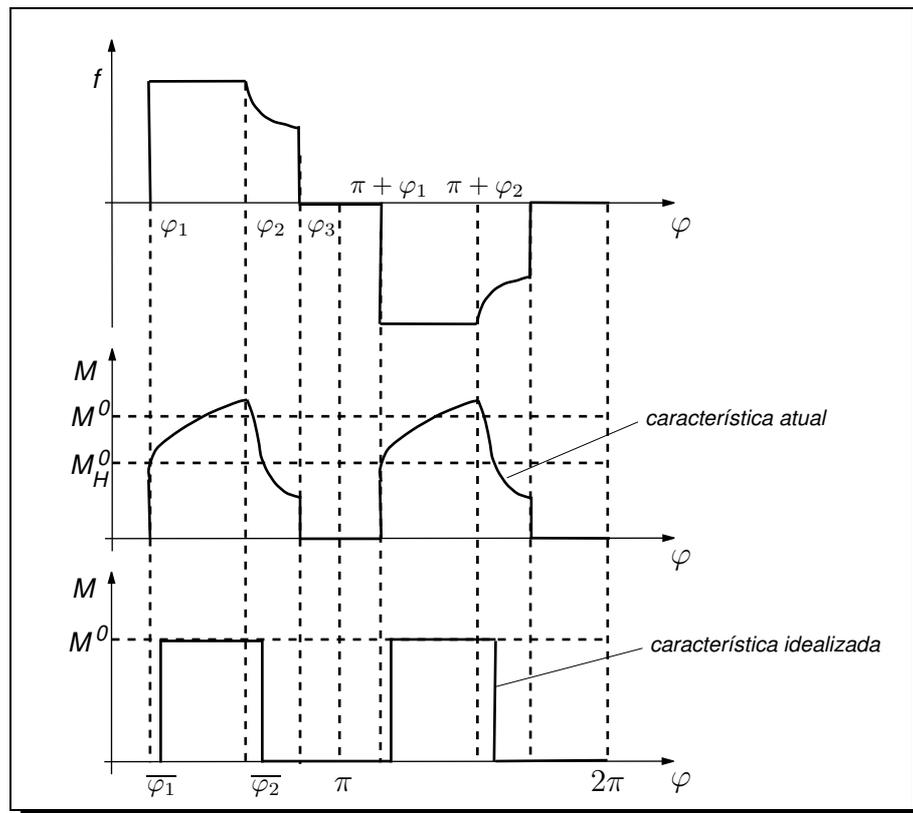


Figura 3.9: Gráficos de  $M = M(\varphi)$  e  $f = f(\varphi)$

Nós vamos assumir  $M \geq 0$  para todo  $\varphi$ , chegando a um máximo  $M_{\max}$  para ângulos  $\varphi$  próximos de  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ , e sendo zero na vizinhança dos “pontos mortos”  $\varphi = 0, \pi$  e  $2\pi$ . Podemos assumir também que o torque  $M_H$  depende, na maioria dos casos, somente da velocidade angular  $\frac{d\varphi}{dt}$  e que a perda de energia da máquina é gerada por forças de fricção obedecendo à Lei de Coulomb. Nestas condições, temos

$$\begin{aligned} \text{para } \frac{d\varphi}{dt} \neq 0 \quad & M_H = M_H^0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt} \\ \text{para } \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad & \begin{cases} M_H = M & \text{se } M \leq M_H^0 \\ M_H = M_H^0 & \text{se } M \geq M_H^0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $M_H^0$  é o torque máximo das forças de fricção no estado de repouso, no qual  $M_H^0 < M_{\max}$ . Para tal perda de energia, a máquina terá estados de equilíbrio estáveis na vizinhança dos “pontos mortos”. De fato, se  $M = M_H$  nos ângulos  $\bar{\varphi}_1$  e  $\bar{\varphi}_2$  (veja figura 3.9), então para  $0 < \varphi < \bar{\varphi}_1$ ,  $\bar{\varphi}_2 < \varphi < \pi + \bar{\varphi}_1$  e  $\pi + \bar{\varphi}_2 < \varphi < 2\pi$ , temos  $M(\varphi) < M_H^0$ . Deste modo todos os estados  $(\varphi^*, 0)$ , onde  $\varphi^*$  é algum ângulo em um destes três intervalos, são estados de equilíbrio desde que tenhamos  $M_H = M(\varphi^*)$  e, conseqüentemente  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ . Esta circunstância sugere

uma simples idealização da característica do torque  $M = M(\varphi)$ , que simplifica consideravelmente a análise, conservando ainda o estado de equilíbrio indicado acima. Nós vamos substituir a atual característica do torque pela função constante descontínua em partes

$$M = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \varphi < \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 < \varphi < \pi + \bar{\varphi}_1 \text{ e } \pi + \bar{\varphi}_2 < \varphi < 2\pi \\ M_0 & \text{se } \bar{\varphi}_1 \leq \varphi < \bar{\varphi}_2, \pi + \bar{\varphi}_1 \leq \varphi < \pi + \bar{\varphi}_2 \end{cases}$$

cujos gráficos são mostrados na parte inferior da figura 3.9 por uma linha pontilhada. A amplitude constante  $M_0$  do torque idealizado será escolhida de tal forma que, durante toda semi-revolução do eixo, o trabalho realizado por  $M$  é igual ao trabalho realizado pelo torque real, ou seja

$$M_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^\pi M(\varphi) d\varphi > M_H^0,$$

onde  $\theta = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$  é conhecido como “ângulo de corte”.

É fácil ver que o movimento ocorrerá com aumento da velocidade angular se  $M_0 > \frac{\pi M_H^0}{\theta}$  pois a cada meia volta o trabalho realizado pelas forças de torque ( $= M_0\theta$ ) é maior do que o trabalho absorvido pelo peso ( $+M_H^0\pi$ ). Se  $M_0 = \frac{\pi}{\theta} M_H^0$  o modelo será “quase-conservativo”, ou seja, ele terá continuidade no movimento periódico com  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$  (estes movimentos corresponderão à órbitas fechadas envolvendo o cilindro de fase na região  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ ). Finalmente, para  $M_0 < \frac{\pi}{\theta} M_H^0$  a máquina deixará de funcionar para qualquer condição inicial.

Estes resultados reproduzem, a certo ponto, propriedades de máquinas a vapor reais que possuem muito pouca auto-regulação, de modo que a velocidade do eixo varia consideravelmente em relação a pequenas mudanças na força de resistência e na pressão do vapor.

Vamos agora introduzir as novas variáveis

$$x = \varphi - \bar{\varphi}_1 \quad \text{e} \quad t_n = \sqrt{\frac{M_H^0}{I}} t;$$

Então a equação que representa o movimento da máquina a vapor pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda\Phi(x) - \Psi(y, x) \end{cases}$$

onde

$$\lambda = \frac{M_0}{M_H^0} > 1$$

e

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < \theta \text{ e para } \pi \leq x < \pi + \theta \\ 0 & \text{para } \theta \leq x < \pi \text{ e para } \pi + \theta \leq x < 2\pi \end{cases}$$

$$\Psi(y, x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(y) & \text{para } y \neq 0 \text{ e } x \text{ arbitrário} \\ 1 & \text{para } y = 0 \text{ e } 0 \leq x < \theta \text{ ou } \pi \leq x < \pi + \theta \\ 0 & \text{para } y = 0 \text{ e } \theta \leq x < \pi \text{ ou } \pi + \theta \leq x < 2\pi \end{cases}$$

### O Retrato de Fase

Observando os dados acima, concluímos que o Retrato de Fase cilíndrico para o problema da máquina a vapor fica dividido em 4 regiões ao longo do eixo  $x$  entre os valores  $0 \leq x < \pi$  (veja figura abaixo). O comportamento das órbitas referente ao intervalo  $\pi \leq x < 2\pi$  é similar.

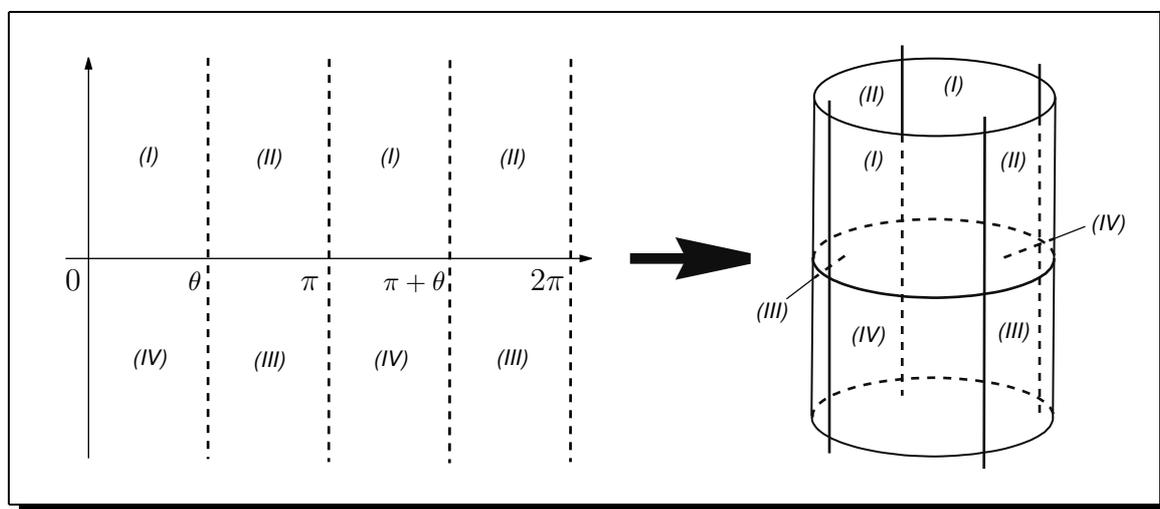


Figura 3.10: Regiões do Plano de Fase do Modelo de Máquina a Vapor

Analizaremos agora os pontos regulares e singulares, considerando cada par de regiões justapostas:

**Regiões I e II** ( $y \geq 0$  e  $0 \leq x < \pi$ ).

Temos os seguintes Campos Vetoriais:

$$\Omega_1 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda - 1 \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq x < \theta \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 \end{cases} \quad \text{para } \theta \leq x < \pi$$

separados pela Reta de Descontinuidade  $S_1 = \{x = \theta\}$ .

Definamos  $f(x, y) = x - \theta$ . Então

1.  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1, 0)$ .
2.  $\Omega_1 f = \Omega_1 \cdot \nabla f = (y, \lambda - 1) \cdot (1, 0) = y$ .
3.  $\Omega_2 f = \Omega_2 \cdot \nabla f = (y, -1) \cdot (1, 0) = y$ .
4.  $\Omega_1^2 f = \Omega_1 \cdot \nabla \Omega_1 f = (y, \lambda - 1) \cdot (0, 1) = \lambda - 1$ .
5.  $\Omega_2^2 f = \Omega_2 \cdot \nabla \Omega_2 f = (y, -1) \cdot (0, 1) = -1$ .
6.  $\det [\Omega_1, \Omega_2] = \begin{vmatrix} y & \lambda - 1 \\ y & -1 \end{vmatrix} = -y - y(\lambda - 1) = -\lambda y$ .

- **Região de Costura:**

$$(\Omega_1 f) \cdot (\Omega_2 f) > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y \neq 0.$$

Assim, todo ponto de  $S_1$  pertence à região de costura, com exceção do ponto  $(\theta, 0)$ .

- **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_1 f > 0 \\ \Omega_2 f < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y > 0 \text{ e } y < 0.$$

Contradição, portanto não há região de escape em  $S_1$ .

- **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_1 f < 0 \\ \Omega_2 f > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y < 0 \text{ e } y > 0.$$

Contradição, logo não há região de deslizamento em  $S_1$ .

- **Pontos Singulares para a Retra de Descontinuidade  $S_1$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $\Omega_1$ :**

$$\begin{aligned} \Omega_1 f(P_{\Omega_1}) &= 0 \Rightarrow y = 0. \\ \Omega_1^2 f(P_{\Omega_1}) &\neq 0 \Rightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1. \end{aligned}$$

Como  $\lambda > 1$ , segue que o ponto  $P_{\Omega_1} = (\theta, 0)$  é um Ponto de Dobra para o campo  $\Omega_1$ .

2. Pontos de Dobra em relação ao Campo  $\Omega_2$ :

$$\Omega_2 f(P_{\Omega_2}) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$\Omega_2^2 f(P_{\Omega_2}) \neq 0 \Rightarrow -1 \neq 0.$$

Assim, o ponto  $P_{\Omega_2} = (\theta, 0)$  é também Ponto de Dobra para o campo  $\Omega_2$  (veja Observação 2.16).

## 3. Pontos Críticos:

$$\Omega_1 f(P_c) \Omega_2 f(P_c) < 0 \Rightarrow y^2 < 0.$$

Contradição, logo não há pontos críticos na reta de descontinuidade  $S_1$ .

• Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_1$ .

$$\Omega_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ \lambda - 1 & = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ e } \lambda = 1.$$

Como  $\lambda > 1$  sempre, então não há pontos singulares para o campo  $\Omega_1$ .

• Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_2$ :

$$\Omega_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ -1 & = 0 \end{cases}.$$

Contradição, logo não há pontos singulares para o campo  $\Omega_2$ .

Observemos agora que

$$\Omega_1 = \begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} & = (\lambda - 1)t \\ y & = (\lambda - 1)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = \frac{(\lambda-1)}{2}t^2 \\ y & = (\lambda - 1)t \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2(\lambda - 1)} + c$$

e que

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \text{ (pois } \lambda > 1\text{)}.$$

Além disso,

$$\Omega_2 = \begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} & = -t \\ y & = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = -\frac{t^2}{2} \\ y & = -t \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y^2}{2}$$

e

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty.$$

Então, baseado nestes cálculos, temos que o retrato de fase para as regiões I e II tomam a forma:

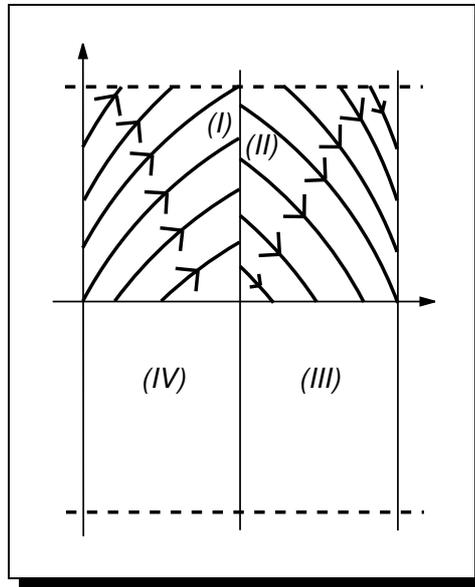


Figura 3.11: Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões I e II)

**Regiões II e III** ( $\theta \leq x < \pi$  e  $y$  arbitrário).

Temos os seguintes Campos Vetoriais:

$$\Omega_2 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 \end{cases} \text{ para } y > 0 \quad \text{e} \quad \Omega_3 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \text{ para } y < 0$$

separados pela Reta de Descontinuidade  $S_2 = \{y = 0\}$ .

Seja  $g(x, y) = y$ . Daí

1.  $\nabla g = \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = (0, 1)$ .
2.  $\Omega_2 g = \Omega_2 \cdot \nabla g = (y, -1) \cdot (0, 1) = -1$ .
3.  $\Omega_3 g = \Omega_3 \cdot \nabla g = (y, 1) \cdot (0, 1) = 1$ .
4.  $\Omega_2^2 g = \Omega_2 \cdot \nabla \Omega_2 g = (y, -1) \cdot (0, 0) = 0$ .
5.  $\Omega_3^2 g = \Omega_3 \cdot \nabla \Omega_3 g = (y, 1) \cdot (0, 0) = 0$ .

$$6. \det [\Omega_2, \Omega_3] = \begin{vmatrix} y & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = y + y = 2y.$$

• **Região de Costura:**

$$(\Omega_2 g) \cdot (\Omega_3 g) > 0 \Rightarrow -1 > 0.$$

Contradição, logo não há região de costura.

• **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_2 g > 0 \\ \Omega_3 g < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 > 0 \text{ e } 1 < 0.$$

Contradição, portanto não há região de escape em  $S_2$ .

• **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_2 g < 0 \\ \Omega_3 g > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < 0 \text{ e } 1 > 0.$$

Como estas desigualdades são sempre verdadeiras, segue que todos os pontos da reta de descontinuidade  $S_2$  com  $\theta \leq x < \pi$  pertencem à região de deslizamento.

• **Pontos Singulares para a Reta de Descontinuidade  $S_2$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $\Omega_2$ :**

$$\Omega_2 g (P_{\Omega_2}) = 0 \Rightarrow -1 = 0.$$

Contradição, logo não há pontos de dobra para o campo  $\Omega_2$ .

2. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $\Omega_3$ :**

$$\Omega_3 g (P_{\Omega_3}) = 0 \Rightarrow 1 = 0.$$

Contradição, logo não há pontos de dobra para o campo  $\Omega_3$ .

3. **Pontos Críticos:**

$$\Omega_2 g (P_c) \Omega_3 g (P_c) < 0 \Rightarrow -1 < 0.$$

Como esta desigualdade é sempre verdadeira, segue que todos os pontos da reta de descontinuidade  $S_2$  (com  $\theta \leq x < \pi$ ) são pontos críticos.

- Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_2$ :

Já vimos que não há pontos singulares para o campo  $\Omega_2$ .

- Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_3$ :

$$\Omega_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} .$$

Contradição, logo não há pontos singulares para o campo  $\Omega_3$ .

Vejamos agora que

$$\Omega_3 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} + c$$

e que

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty .$$

Então, temos que o retrato de fase para as regiões II e III possui a forma aproximada da figura abaixo:

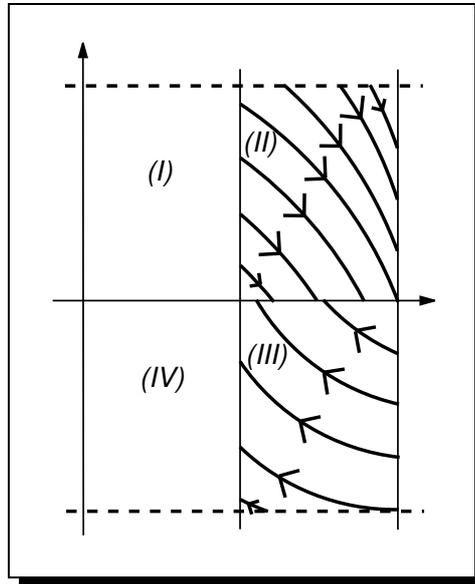


Figura 3.12: Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões II e III)

**Regiões III e IV** ( $0 \leq x < y$  e  $y < 0$ ).

Temos os seguintes Campos Vetoriais:

$$\Omega_3 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \quad \text{para } \theta \leq x < \pi \quad \text{e} \quad \Omega_4 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq x < \theta$$

separados pela Reta de Descontinuidade  $S_3 = \{x = \theta\}$ .

Tomemos  $h(x, y) = x - \theta$ . Então:

1.  $\nabla h = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (1, 0)$ .
2.  $\Omega_3 h = \Omega_3 \cdot \nabla h = (y, 1) \cdot (1, 0) = y$ .
3.  $\Omega_4 h = \Omega_4 \cdot \nabla h = (y, \lambda + 1) \cdot (1, 0) = y$ .
4.  $\Omega_3^2 h = \Omega_3 \cdot \nabla \Omega_3 h = (y, 1) \cdot (0, 1) = 1$ .
5.  $\Omega_4^2 h = \Omega_4 \cdot \nabla \Omega_4 h = (y, \lambda + 1) \cdot (0, 1) = \lambda + 1$ .
6.  $\det [\Omega_3, \Omega_4] = \begin{vmatrix} y & 1 \\ y & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda y + y - y = \lambda y$ .

• **Região de Costura:**

$$(\Omega_3 h) \cdot (\Omega_4 h) > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y \neq 0.$$

Então todo ponto de  $S_3$  pertence à região de costura, com exceção do ponto  $(\theta, 0)$ .

• **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_3 h > 0 \\ \Omega_4 h < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y > 0 \text{ e } y < 0.$$

Contradição, portanto não há região de escape em  $S_3$ .

• **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_3 h < 0 \\ \Omega_4 h > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y < 0 \text{ e } y > 0.$$

Contradição, logo não há região de deslizamento em  $S_3$ .

• **Pontos Singulares para a Reta de Descontinuidade  $S_3$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $\Omega_3$ :**

$$\begin{aligned} \Omega_3 h(P_{\Omega_3}) &= 0 \Rightarrow y = 0. \\ \Omega_3^2 h(P_{\Omega_3}) &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, o ponto  $P_{\Omega_3} = (\theta, 0)$  é ponto de dobra para o campo  $\Omega_3$ .

## 2. Pontos de Dobra em relação ao Campo $\Omega_4$ :

$$\begin{aligned}\Omega_4 h(P_{\Omega_4}) &= 0 \Rightarrow y = 0. \\ \Omega_4^2 h(P_{\Omega_4}) &= \lambda + 1 \neq 0 \quad (\text{pois } \lambda > 1).\end{aligned}$$

Então, o ponto  $P_{\Omega_4} = (\theta, 0)$  também é ponto de dobra para o campo  $\Omega_4$  (veja observação 2.16).

## 3. Pontos Críticos:

$$\Omega_3 h(P_c) \Omega_4 h(P_c) < 0 \Rightarrow y^2 < 0.$$

Contradição, logo não há pontos críticos na reta de descontinuidade  $S_3$ .

- **Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_3$ :**

Já vimos que não há pontos singulares para o campo  $\Omega_3$ .

- **Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_4$ :**

$$\Omega_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ e } \lambda = -1.$$

Como  $\lambda > 1$  segue que não há pontos singulares para o campo  $\Omega_4$ .

Agora

$$\Omega_4 = \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \lambda + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} &= y \\ y &= (\lambda + 1)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= (\lambda + 1)\frac{t^2}{2} \\ \dot{y} &= (\lambda + 1)t \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2(\lambda + 1)} + c.$$

Logo

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} y \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty \end{cases}.$$

Assim, o Retrato de Fase para as regiões III e IV assume a forma

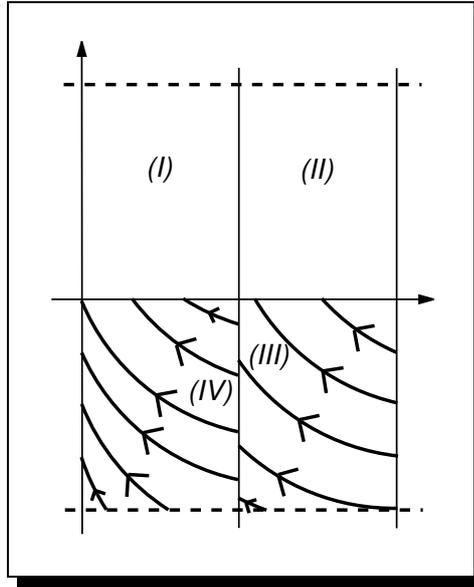


Figura 3.13: Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões III e IV)

**Regiões IV e I** ( $0 \leq x < \theta$  e  $y$  arbitrário).

Temos os seguintes Campos Vetoriais:

$$\Omega_4 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{para } y < 0 \quad \text{e} \quad \Omega_1 = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda - 1 \end{cases} \quad \text{para } y \geq 0$$

separados pela Reta de Descontinuidade  $S_4 = \{y = 0\}$ .

Tomemos  $u(x, y) = y$ . Então:

1.  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (0, 1)$ .
2.  $\Omega_4 u = \Omega_4 \cdot \nabla u = (y, \lambda + 1) \cdot (0, 1) = \lambda + 1$ .
3.  $\Omega_1 u = \Omega_1 \cdot \nabla u = (y, \lambda - 1) \cdot (0, 1) = \lambda - 1$ .
4.  $\Omega_4^2 u = \Omega_4 \cdot \nabla \Omega_4 u = (y, \lambda + 1) \cdot (0, 0) = 0$ .
5.  $\Omega_1^2 u = \Omega_1 \cdot \nabla \Omega_1 u = (y, \lambda - 1) \cdot (0, 0) = 0$ .
6.  $\det [\Omega_4, \Omega_1] = \begin{vmatrix} y & \lambda + 1 \\ y & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda y - y - \lambda y - y = -2y$ .

- **Região de Costura:**

$$(\Omega_4 u) \cdot (\Omega_1 u) > 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 > 0 \Rightarrow \lambda^2 > 1 \Rightarrow \lambda > 1 \text{ ou } \lambda < -1.$$

Como sabemos que  $\lambda > 1$ , então todos os pontos da reta de descontinuidade  $S_4$ , com  $0 \leq x < \theta$ , pertencem à região de costura.

- **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_4 u > 0 \\ \Omega_1 u < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 1 > 0 \text{ e } \lambda - 1 < 0 \Rightarrow \lambda > -1 \text{ e } \lambda < 1.$$

Como  $\lambda > 1$ , segue que não há região de escape..

- **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_4 u < 0 \\ \Omega_1 u > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 1 < 0 \text{ e } \lambda - 1 > 0 \Rightarrow \lambda < -1 \text{ e } \lambda > 1.$$

Contradição, logo não há região de deslizamento.

- **Pontos Singulares para a Reta de Descontinuidade  $S_4$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $\Omega_4$ :**

$$\Omega_4 u(P_{\Omega_4}) = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Como  $\lambda > 1$ , segue que não há pontos de dobra para a reta de descontinuidade  $S_4$  em relação ao campo  $\Omega_4$ .

2. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $\Omega_1$ :**

$$\Omega_1 u(P_{\Omega_1}) = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Como  $\lambda > 1$ , segue também que não há pontos de dobra em relação ao campo  $\Omega_1$ .

3. **Pontos Críticos:**

$$\Omega_4 u(P_c) \Omega_1 u(P_c) < 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 < 0 \Rightarrow \lambda^2 < 1 \Rightarrow \lambda > -1 \text{ e } \lambda < 1.$$

Mas, como anteriormente,  $\lambda > 1$  e portanto não temos pontos críticos em  $S_4$ .

- **Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_4$ :**

Já vimos que não há pontos singulares para o campo  $\Omega_4$ .

- Pontos Singulares para o Campo  $\Omega_1$ :

Também já vimos que não há pontos singulares para o campo  $\Omega_1$ .

Neste contexto, o Retrato de Fase para as regiões IV e I assume a forma:

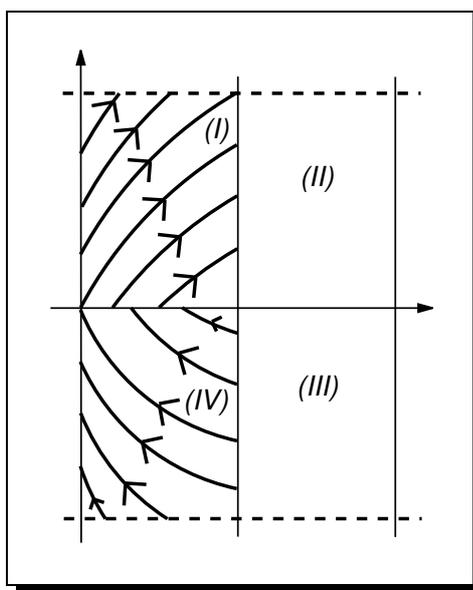


Figura 3.14: Retrato de Fase - Máquina a Vapor (regiões IV e I)

Agora, uma visão completa de todas as regiões numa só figura é mostrada a seguir:

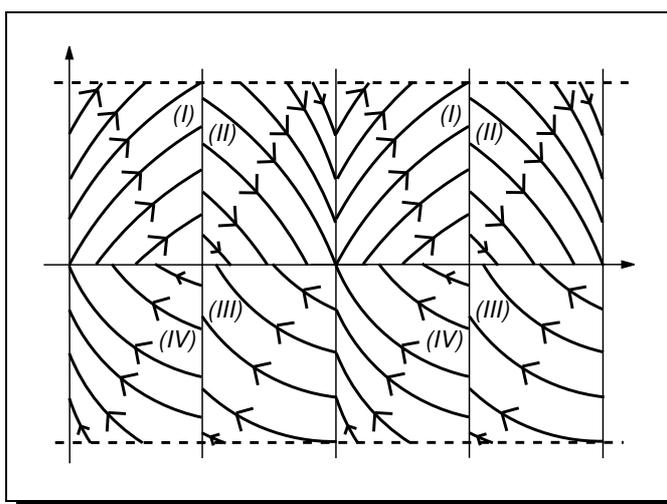


Figura 3.15: Retrato de Fase Global - Máquina a Vapor

### 3.2.4 Oscilações Sísmicas

#### Formulação do Problema

O efeito de um terremoto em estruturas construídas pelo homem pode provocar resultados devastadores, particularmente em áreas onde a atividade sísmica não é esperada e as construções não estão preparadas para suportá-la. No que segue, analisaremos um elemento particular deste problema extremamente complicado. Em anos recentes, cálculos numéricos e evidências experimentais mostram claramente que uma pequena mudança em parâmetros como amplitude de força e dimensões estruturais pode iniciar mudanças consideráveis no equilíbrio de uma estrutura rígida. Neste caso, é interessante determinar se esta sensibilidade surge da escolha do modelo ou é inerente da dinâmica do sistema. Para isso, vamos analisar a estrutura matemática que governa o equilíbrio de um simples bloco de concreto que é muito utilizado na construção de edifícios. Nosso modelo corresponderá ao movimento deste bloco para um dos lados com perda de energia ocorrendo no impacto com o chão, sendo o terremoto simulado pelo efeito de uma oscilação senoidal na direção horizontal. Vamos considerar o bloco como tendo dimensões  $H$  e  $B$ , de acordo com a figura abaixo, onde  $a_H$  é a aceleração do terremoto e  $g$  é a aceleração da gravidade:

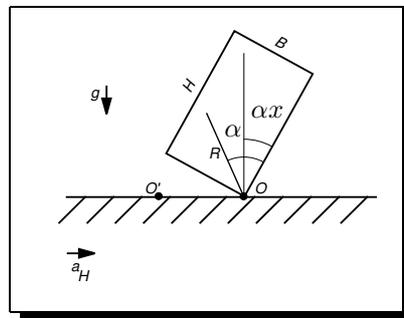


Figura 3.16: Modelo Gráfico para o Estudo dos Efeitos de um Terremoto

Assumimos que o bloco é rígido e uniforme, de modo que o seu centro de gravidade coincide com o centro geométrico, que está a uma distância  $R$  de qualquer um dos cantos. O ângulo  $\alpha$  do bloco em relação ao chão é dado por

$$\tan \alpha = \frac{B}{H}$$

e o coeficiente de fricção entre o bloco e o chão é assumido como sendo grande o suficiente para evitar deslizamentos. Saltos não são considerados. A base é considerada rígida e

suficientemente plana de modo que a rotação do bloco ocorre somente sobre os pontos  $O$  e  $O'$ . Quando existe rotação, o deslocamento angular é denotado por  $\alpha x$ , onde  $x$  positivo corresponde à rotação sobre  $O$  e  $x$  negativo à rotação sobre  $O'$ . Note que  $|x| > 1$  corresponde à queda sob ação da gravidade apenas.

Nestas condições, a equação da energia do problema é dada por

$$a_H = \beta \alpha g \cos(\Omega \tau + \phi)$$

onde  $\beta$  denota a amplitude adimensional,  $\Omega$  a frequência e  $\tau$  o tempo. Nós fixaremos o ângulo de fase  $\phi = 0$ . Para um bloco arbitrário, se o momento de virada da aceleração do terremoto excede o momento de restauração da gravidade, o bloco irá se partir (ou simplesmente tombar). Assim, na equação acima, se

$$\beta > \alpha^{-1} \tan \alpha$$

o bloco se partirá. Para blocos estreitos ( $\alpha \ll 1$ ) a condição acima se torna

$$\beta > 1.$$

A frequência  $p$  é dada por

$$p^2 = \frac{MgR}{I_0}$$

onde  $M$  é a massa do bloco e  $I_0$  é o momento de inércia do bloco em torno de  $O$  ou  $O'$ . Assim sendo, é fácil mostrar que

$$I_0 = \frac{4}{3}MR^2$$

e daí

$$p^2 = \frac{3g}{4R}$$

donde  $p$  é independente de  $M$ . O tempo adimensional é denotado por

$$t = p\tau$$

e a frequência adimensional por

$$\omega = \frac{\Omega}{p}.$$

As equações que governam o movimento do bloco são obtidas tomando momentos sobre os dois cantos  $O$  e  $O'$ . Assim, para um movimento em torno de  $O$  nós encontramos

$$\alpha \ddot{x} + \text{sen}[\alpha(1-x)] = -\alpha\beta \cos[\alpha(1-x)] \cos \omega t, \quad \text{com } x > 0$$

e para movimento em torno de  $O'$  nós temos

$$\alpha \ddot{x} - \text{sen} [\alpha (1 + x)] = -\alpha \beta \cos [\alpha (1 + x)] \cos \omega t, \quad \text{com } x < 0.$$

No momento do impacto a perda de energia é representada por um simples coeficiente de restituição  $r$ , e então

$$\dot{x}(t^A) = r\dot{x}(t^B)$$

onde  $0 \leq r \leq 1$ ,  $t^A$  é o tempo após o impacto e  $t^B$  é o tempo antes do impacto. Se considerarmos um bloco estreito ( $\alpha \ll 1$ ), as equações acima se tornam

$$\begin{cases} \ddot{x} - x + 1 = -\beta \cos \omega t, & x > 0 \\ \ddot{x} - x - 1 = -\beta \cos \omega t, & x < 0 \\ \dot{x}(t^A) = r\dot{x}(t^B) \end{cases}$$

### O Retrato de Fase

Para a análise qualitativa deste modelo, vamos considerar o caso particular em que  $\alpha \ll 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $r = 1$  e  $\cos \omega t = 1$ . Assim, as equações do movimento do bloco se tornam

$$\begin{cases} \dot{x}(t^A) = \dot{x}(t^B) \\ \ddot{x} = x + 1 \end{cases} \quad \text{para } x < 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}(t^A) = \dot{x}(t^B) \\ \ddot{x} = x - 1 \end{cases} \quad \text{para } x > 0.$$

Chamando  $\dot{x} = y$ , temos

$$X = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases} \quad \text{para } x < 0 \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 1 \end{cases} \quad \text{para } x > 0,$$

que são os campos vetoriais que descrevem o movimento do bloco, separados pela reta de descontinuidade  $S = \{x = 0\}$ . Neste caso vamos considerar  $f(x, y) = x$ , e então:

1.  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1, 0)$ .
2.  $Xf = X \cdot \nabla f = (y, x + 1) \cdot (1, 0) = y$ .
3.  $Yf = Y \cdot \nabla f = (y, x - 1) \cdot (1, 0) = y$ .
4.  $X^2 f = X \cdot \nabla Xf = (y, x + 1) \cdot (0, 1) = x + 1$ .
5.  $Y^2 f = Y \cdot \nabla Yf = (y, x - 1) \cdot (0, 1) = x - 1$ .

$$6. \det[X, Y] = \begin{vmatrix} y & x+1 \\ y & x-1 \end{vmatrix} = yx - y - yx - y = -2y.$$

• **Região de Costura:**

$$(Xf) \cdot (Yf) > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow y \neq 0.$$

Então todo ponto de  $S$  pertence à região de costura, exceto a origem.

• **Região de Escape:**

$$\left. \begin{array}{l} Xf > 0 \\ Yf < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y > 0 \text{ e } y < 0.$$

Contradição, portanto não há região de escape em  $S$ .

• **Região de Deslizamento:**

$$\left. \begin{array}{l} Xf < 0 \\ Yf > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y < 0 \text{ e } y > 0.$$

Contradição, logo não há região de deslizamento em  $S$ .

• **Pontos Singulares para a Reta de Descontinuidade  $S$ :**

1. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $X$ :**

$$\begin{aligned} Xf(P_X) &= 0 \Rightarrow y = 0. \\ X^2f(P_X) &= x + 1 = 0 + 1 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Segue então que o ponto  $P_X = (0, 0)$  é um ponto de dobra para o campo  $X$ .

2. **Pontos de Dobra em relação ao Campo  $Y$ :**

$$\begin{aligned} Yf(P_Y) &= 0 \Rightarrow y = 0. \\ Y^2f(P_Y) &= x - 1 = 0 - 1 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, o ponto  $P_Y = P_X = (0, 0)$  é também ponto de dobra para o campo  $Y$  (veja observação 2.16).

3. **Pontos Críticos:**

$$Xf(P_c) \cdot Yf(P_c) < 0 \Rightarrow y^2 < 0.$$

Contradição, logo não há pontos críticos na reta de descontinuidade  $S$ .

• **Pontos Singulares para o Campo  $X$ :**

$$X = 0 \Rightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ x + 1 & = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ e } x = -1.$$

Então o ponto  $S_X = (-1, 0)$  é uma singularidade para o campo  $X$ . Vamos determinar o seu tipo topológico:

Com efeito, o campo  $X$  pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar então os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -1$ . Segue que o ponto  $S_X$  é uma sela hiperbólica.

• **Pontos Singulares para o Campo  $Y$ :**

$$Y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ x - 1 & = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ e } x = 1.$$

Então o ponto  $S_Y = (1, 0)$  é uma singularidade para o campo  $Y$ . Vamos determinar o seu tipo topológico:

Do mesmo modo como procedemos anteriormente, o campo  $Y$  pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Já vimos que a matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  possui autovalores  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ , portanto o ponto  $S_Y$  é também uma sela hiperbólica.

Baseado nos cálculos acima, concluímos que o retrato de fase das equações que regem o movimento do bloco sob efeito de um terremoto tem a forma aproximada da figura abaixo:

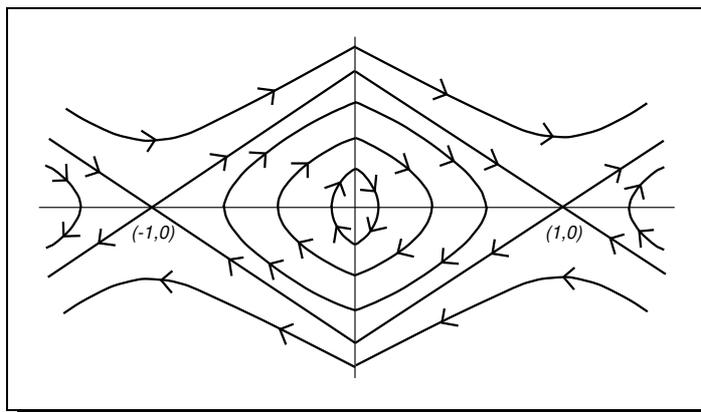


Figura 3.17: Retrato de Fase para o Modelo de Efeito de Oscilações Sísmicas

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Regularização dos Modelos

Finalmente, neste capítulo, usaremos as informações obtidas no capítulo 2 para apresentar uma  $\varphi_\varepsilon$ -Regularização para os modelos em questão. Observamos novamente que o enfoque utilizado será essencialmente geométrico.

---

### 4.1 Piloto Automático de Duas Posições para Barcos

---

#### 4.1.1 Construindo uma Regularização

Como vimos anteriormente, a equação para o problema do Piloto Automático é dada pelo Campo  $Z(X, Y)$  onde

$$X = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + 1 \end{cases}$$

Consideremos uma função de transição

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \\ \varphi'(t) > 0 & \text{se } t \in (-1, 1) \end{cases}$$

e  $f(x, y) = x + ky$  como foi definida no Capítulo anterior. Então

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(x + ky))(y, -y + 1) + \varphi_\varepsilon(x + ky)(y, -y - 1) = \\ &= (y, 1 - y - 2\varphi_\varepsilon(x + ky)) = \\ &= \left( y, 1 - y - 2\varphi\left(\frac{x + ky}{\varepsilon}\right) \right) \end{aligned}$$

é uma  $\varphi_\varepsilon$ -Regularização para o modelo de Piloto Automático.

Escrevendo em um formato mais apropriado, temos que

$$Z_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 1 - y - 2\varphi\left(\frac{x + ky}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

### 4.1.2 Retrato de Fase Regularizado

No Capítulo 1 estabelecemos a direção das Órbitas para o Campo Regularizado observando o tipo de região que ocorre em  $S$ . Em nosso modelo, temos  $RD$  no intervalo

$$-\frac{k}{1-k} < y < \frac{k}{1-k}$$

e  $RC$  nos intervalos

$$y > \frac{k}{1-k} \quad \text{e} \quad y < -\frac{k}{1-k}$$

logo as Órbitas são transversais a  $S$  no primeiro caso e se aproximam assintoticamente de  $S$  no segundo caso. Quanto ao Ponto Singular Hiperbólico (um nó atrator), ele continuará existindo no Campo  $Z_\varepsilon(x, y)$  e será ainda um nó atrator, mas sua localização dependerá da escolha da função de transição  $\varphi$ .

Com base nestes dados, o Retrato de Fase do modelo de Piloto Automático regularizado tem a forma aproximada da figura abaixo:

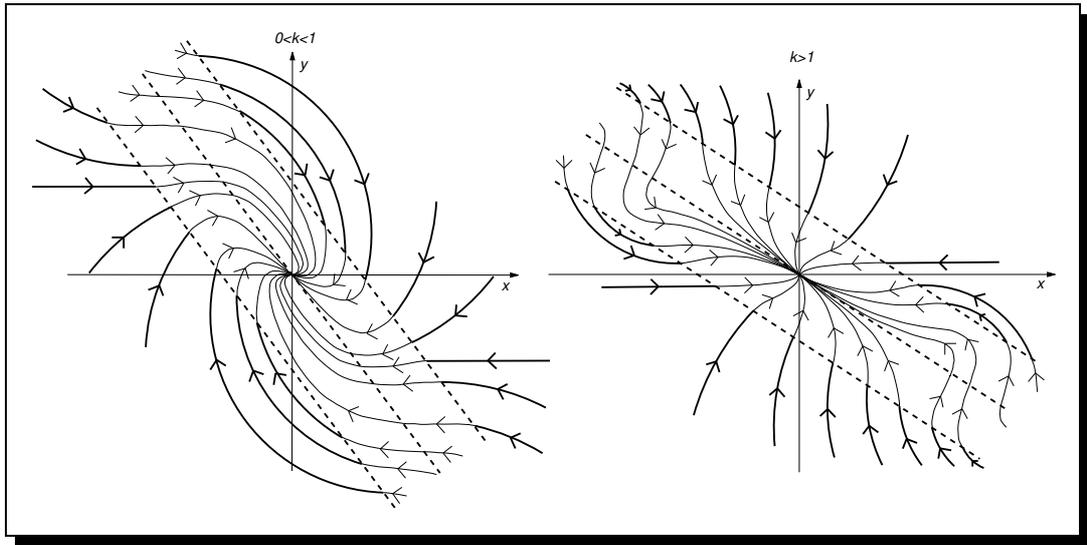


Figura 4.1: Retrato de Fase Regularizado do Modelo de Piloto Automático

**Observação 4.1.** Para esboçar esta figura tomamos uma função de transição que assume o valor  $\frac{1}{2}$  no ponto 0.

## 4.2 Gerador Elétrico Valvulado

### 4.2.1 Construindo uma Regularização

No processo de modelagem para o Gerador Elétrico Valvulado, encontramos um Campo Vetorial Descontínuo descrito pelos sistemas

$$X = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2h_1y \end{cases} \text{ se } x < -1 \text{ e } Y = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2h_2y \end{cases} \text{ se } x \geq -1$$

Tomemos uma função de transição

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \\ \varphi'(t) > 0 & \text{se } t \in (-1, 1) \end{cases}$$

e a função já definida anteriormente  $f(x, y) = x + 1$ . Então

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(x + 1))(y, -x + 2h_2y) + \varphi_\varepsilon(x + 1)(y, -x - 2h_1y) = \\ &= (y, -x + 2h_2y - 2h_1y\varphi_\varepsilon(x + 1) - 2h_2y\varphi_\varepsilon(x + 1)) = \\ &= (y, -x + 2h_2y - 2(h_1 + h_2)y\varphi_\varepsilon(x + 1)) = \\ &= \left( y, -x + 2h_2y - 2(h_1 + h_2)y\varphi\left(\frac{x+1}{\varepsilon}\right) \right) \end{aligned}$$

é uma  $\varphi_\varepsilon$ -Regularização para o modelo de Gerador Elétrico Valvulado.

Escrevendo em forma de Campo Vetorial, temos

$$Z_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2h_2y - 2(h_1 + h_2)y\varphi\left(\frac{x+1}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

### 4.2.2 Retrato de Fase Regularizado

Lembremos que na construção do Retrato de Fase para este modelo, encontramos  $RC$  em toda a Reta de Descontinuidade  $D$  com exceção do ponto  $(-1, 0)$ . Nenhuma Singularidade Hiperbólica foi detectada em  $D$  e o único Ponto Singular existente (um foco instável ou um nó instável) está no Campo  $Y$ , que permanecerá inalterado após a Regularização. Assim sendo, Concluimos que o Retrato de Fase Regularizado para o modelo de Gerador Elétrico Valvulado assume a forma aproximada da figura abaixo:

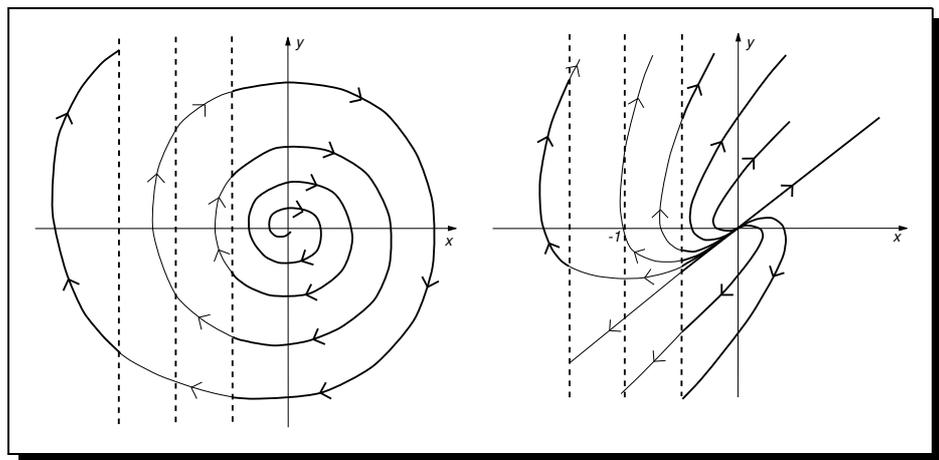


Figura 4.2: Retrato de Fase Regularizado do Modelo de Gerador Elétrico Valvulado

## 4.3 Máquina a Vapor

### 4.3.1 Construindo uma Regularização

Como observamos anteriormente, a modelagem matemática para o problema da máquina a vapor produziu quatro campos vetoriais, que são os seguintes:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda - 1 \end{cases} \quad \text{para } y \geq 0 \text{ e } 0 \leq x < \theta. \\ \Omega_2 &= \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 \end{cases} \quad \text{para } y > 0 \text{ e } \theta \leq x < \pi. \\ \Omega_3 &= \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \quad \text{para } y < 0 \text{ e } \theta \leq x < \pi. \\ \Omega_4 &= \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{para } y < 0 \text{ e } 0 \leq x < \theta.\end{aligned}$$

Faremos então uma bi-regularização, considerando uma  $\varepsilon$ -vizinhança em torno de  $S_2 = S_4$  e uma  $\mu$ -vizinhança em torno de  $S_1 = S_3$ . Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de transição com  $\varphi_\varepsilon = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$  e  $\varphi_\mu = \varphi\left(\frac{t}{\mu}\right)$ .

- Regiões I e II:

$$\begin{aligned}Z_\mu^{1,2}(x, y) &= (1 - \varphi_\mu(f(x, y)))\Omega_2(x, y) + \varphi_\mu(f(x, y))\Omega_1(x, y) = \\ &= (1 - \varphi_\mu(x - \theta))(y, -1) + \varphi_\mu(x - \theta)(y, \lambda - 1) = \\ &= (y - y\varphi_\mu(x - \theta), -1 + \varphi_\mu(x - \theta)) + \\ &\quad + (y\varphi_\mu(x - \theta), \lambda\varphi_\mu(x - \theta) - \varphi_\mu(x - \theta)) = \\ &= \left(y, -1 - \lambda\varphi\left(\frac{x-\theta}{\mu}\right)\right).\end{aligned}$$

- Regiões II e III:

$$\begin{aligned}Z_\varepsilon^{2,3}(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(g(x, y)))\Omega_3(x, y) + \varphi_\varepsilon(g(x, y))\Omega_2(x, y) = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(y))(y, 1) + \varphi_\varepsilon(y)(y, -1) = \\ &= (y - y\varphi_\varepsilon(y), 1 - \varphi_\varepsilon(y)) + (y\varphi_\varepsilon(y), -\varphi_\varepsilon(y)) = \\ &= \left(y, 1 - 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right).\end{aligned}$$

• Regiões III e IV:

$$\begin{aligned}
 Z_{\mu}^{3,4}(x, y) &= (1 - \varphi_{\mu}(h(x, y))) \Omega_4(x, y) + \varphi_{\mu}(h(x, y)) \Omega_3(x, y) = \\
 &= (1 - \varphi_{\mu}(x - \theta)) (y, \lambda + 1) + \varphi_{\mu}(x - \theta) (y, 1) = \\
 &= (y - y\varphi_{\mu}(x - \theta), \lambda + 1 - \lambda\varphi_{\mu}(x - \theta) - \varphi_{\mu}(x - \theta)) + \\
 &\quad + (y\varphi_{\mu}(x - \theta), \varphi_{\mu}(x - \theta)) = \\
 &= \left( y, 1 + \lambda - \lambda\varphi\left(\frac{x-\theta}{\mu}\right) \right).
 \end{aligned}$$

• Regiões IV e I:

$$\begin{aligned}
 Z_{\varepsilon}^{4,1}(x, y) &= (1 - \varphi_{\varepsilon}(u(x, y))) \Omega_1(x, y) + \varphi_{\varepsilon}(u(x, y)) \Omega_4(x, y) = \\
 &= (1 - \varphi_{\varepsilon}(y)) (y, \lambda - 1) + \varphi_{\varepsilon}(y) (y, \lambda + 1) = \\
 &= (y - y\varphi_{\varepsilon}(y), \lambda - 1 - \lambda\varphi_{\varepsilon}(y) + \varphi_{\varepsilon}(y)) + \\
 &\quad + (y\varphi_{\varepsilon}(y), \lambda\varphi_{\varepsilon}(y) + \varphi_{\varepsilon}(y)) = \\
 &= \left( y, -1 + \lambda + 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Então

$$Z_{\varepsilon, \mu}(x, y) = \begin{cases} \left( y, -1 - \lambda\varphi\left(\frac{x-\theta}{\mu}\right) \right) & \text{se } \theta - \mu \leq x < \theta + \mu \text{ e } y \geq 0. \\ \left( y, 1 - 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) & \text{se } \theta \leq x < \pi \text{ e } -\varepsilon \leq y < \varepsilon. \\ \left( y, 1 + \lambda - \lambda\varphi\left(\frac{x-\theta}{\mu}\right) \right) & \text{se } \theta - \mu \leq x < \theta + \mu \text{ e } y < 0. \\ \left( y, -1 + \lambda + 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) & \text{se } 0 \leq x < \theta \text{ e } -\varepsilon \leq y < \varepsilon. \end{cases}$$

é uma  $\varphi_{\varepsilon, \mu}$ -regularização para o problema da máquina a vapor.

### 4.3.2 Retrato de Fase Regularizado

De acordo com os cálculos realizados até aqui, concluímos que o retrato de fase regularizado para o problema da máquina a vapor tem a forma aproximada da figura abaixo:

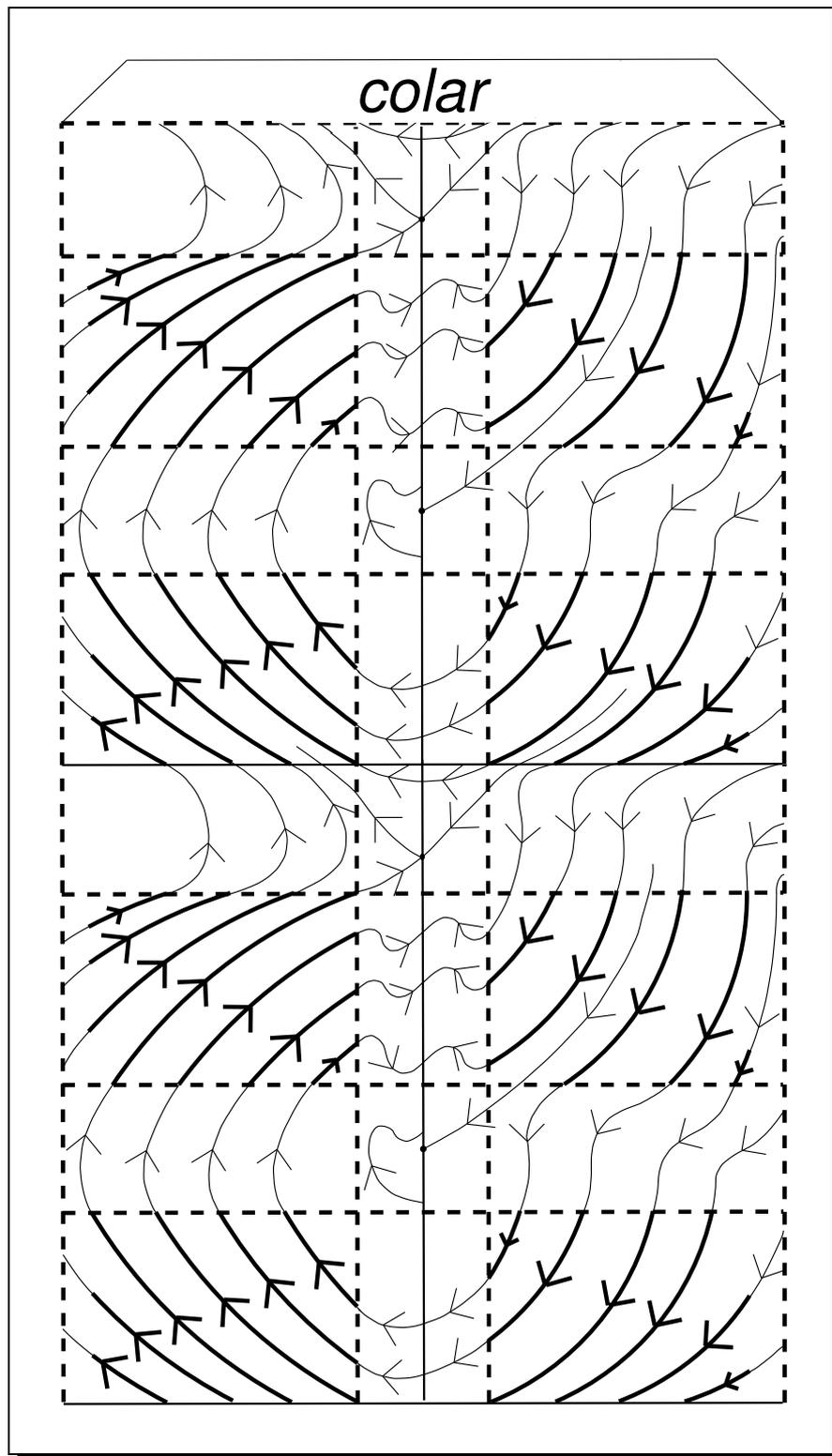


Figura 4.3: Retrato de Fase Cilíndrico Regularizado do Modelo de Máquina a Vapor

## 4.4 Oscilações Sísmicas

### 4.4.1 Construindo uma Regularização

No processo de modelagem do efeito de oscilações sísmicas num bloco de concreto, encontramos os seguintes campos vetoriais

$$X = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases} \quad \text{para } x < 0 \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 1 \end{cases} \quad \text{para } x > 0.$$

Vamos novamente considerar uma função de transição

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \\ \varphi'(t) > 0 & \text{se } t \in (-1, 1) \end{cases}$$

e  $f(x, y) = x$ , como especificado no capítulo 2. Nestas condições

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(x))(y, x - 1) + \varphi_\varepsilon(x)(y, x + 1) = \\ &= (y - y\varphi_\varepsilon(x), x - 1 - x\varphi_\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon(x)) + \\ &\quad + (y\varphi_\varepsilon(x), x\varphi_\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon(x)) = \\ &= (y, x - 1 + 2\varphi_\varepsilon(x)) = \\ &= \left(y, x - 1 + 2\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \end{aligned}$$

é uma  $\varphi_\varepsilon$ -regularização para o modelo de oscilações sísmicas.

Colocando na forma de sistema de equações ordinárias, temos

$$Z_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 1 + 2\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

### 4.4.2 Retrato de Fase Regularizado

No capítulo 2 estabelecemos **RC** para todos os pontos de  $S$  exceto a origem que era um ponto de dobra. Vamos analisar então que tipo de singularidade a origem é no campo regularizado. Tomemos, para  $x \in (-1, 1)$

$$\varphi(x) = \frac{x + 1}{2}$$

então, para  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$Z_{\frac{1}{2}}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 3x \end{cases}$$

Assim, o campo  $Z_{\frac{1}{2}}(x, y)$  pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Agora a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

possui autovalores  $\lambda_1 = \sqrt{3}$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ , portanto a origem é uma sela no campo regularizado.

Com base nestas informações, temos que o retrato de fase regularizado para o problema de oscilações sísmicas tem o formato aproximado da figura abaixo:

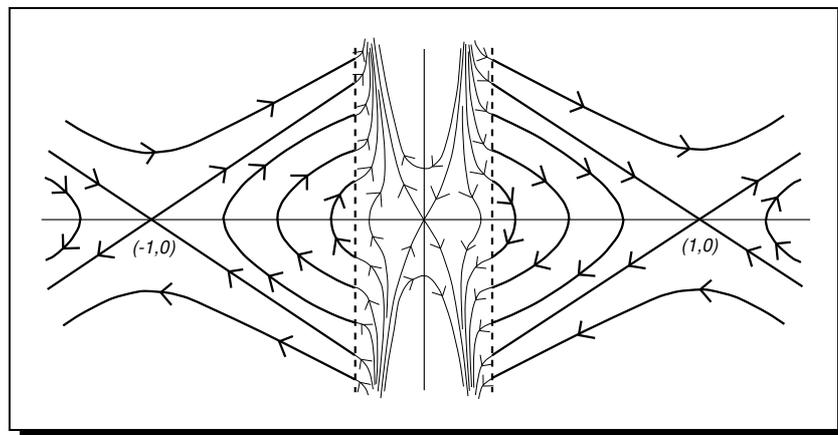


Figura 4.4: Retrato de Fase Regularizado do Modelo de Oscilações Sísmicas

---

# BIBLIOGRAFIA

- [1] A. A. Andronov, A. A. Vitt and S. E. Khaikin, *Theory of Oscillators*. Dover, New York, 1966.
- [2] P. Castrucci, *Controle Automático: Teoria e Projeto*. Edgard Blücher, São Paulo, 1969.
- [3] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer, 1988.
- [4] H. Hermes and J. P. Lasalle, *Functional Analysis and Time Optimal Control*. Academic Press, New York, 1969.
- [5] S. J. Hogan, *On the dynamics of rigid-block motion under harmonic forcing*. Proc. Royal Soc. London, vol.A, n<sup>o</sup>425, 441 – 476, 1989.
- [6] V. S. Kozlova, *Roughness of a Discontinuous System*. Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika, n<sup>o</sup>5, 1984, 16 – 20.
- [7] A. L. F. Machado, *Estabilidade Estrutural e Bifurcações de Campos de Vetores Descontínuos*. Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo, 2000.
- [8] N. Minorsky, *Nonlinear Oscillations*. Van Nostrand, New York, 1962.
- [9] M. C. Peixoto and M. M. Peixoto, *Structural Stability in the Plane with Enlarged Conditions*. An. Ac. Bras. Cienc., Vol. 31, 1959, 135 – 160.

- [10] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [11] J. Sotomayor and M. A. Teixeira, *Regularization of Discontinuous Vector Fields*. International Conference on Differential Equation, Lisboa, 1996, 207 – 223.
- [12] M. A. Teixeira, *Generic Singularities of Discontinuous Vector Fields*. An. Ac. Bras. Cienc., Vol.53, n<sup>o</sup>1, 1981.
- [13] V. I. Utkin, *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems*. Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [14] S. M. Vishik, *Vector Fields Near the Boundary of a Manifold*. Vestnik Moskouslogo Universiteta Matematika, Vol.27, n<sup>o</sup>1, 1972, 21 – 28.

---

# ÍNDICE REMISSIVO

*S*-Conexão de Sela, 21

$\varphi_\varepsilon$ -Regularização, 6

Órbita

*S*-Periódica, 22

*S*-Periódica Elementar, 23

    Simples, 31

Função de Transição, 6

Gráfico, 23

    Elementar, 29

    Simples, 23

    Singular, 28

Ponto

*S*-Regular, 9

*S*-Singular Elementar, 9

    Crítico Tipo Sela, 8

    de Dobra, 9

Região

    de Costura, 5

    de Deslizamento, 6

    de Escape, 5