

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

Dissertação de Mestrado em Matemática

Superfícies Mínimas Conjugadas e Superfícies Mínimas
Associadas.

Luciana Maria Dias de Ávila

Banca examinadora

Prof.Dr. Irwen Valle Guadalupe (orientador)
Prof.Dr. Caio José Coletti Negreiros
Prfa.Dra. Claudina Izepe Rodrigues
Prof.Dr. Jaime Angulo Pava (suplente)

Março - 1999



0013857

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Ávila, Luciana Maria Dias de

Av55s Superfícies mínimas conjugadas e superfícies mínimas associadas /
Luciana Maria Dias de Ávila -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Irwen Valle Guadalupe

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfícies mínimas. 2. Singularidades (Matemática). 3. Curvas
em superfícies. I. Guadalupe, Irwen Valle. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

UNID.:	BC
N.º CHAMADA:	
V.:	B2
TÍTULO:	38108
NUM.:	229/99
	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO:	R\$ 11,00
DATA:	20/07/99
N.º:	

CM-00125396-E

Superfícies mínimas conjugadas e superfícies mínimas associadas.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por LUCIANA MARIA DIAS DE ÁVILA e aprovada pela banca julgadora.

Campinas, 26 de março de 1999.

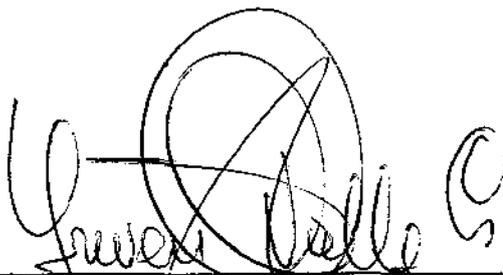
A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Irwen Valle Guadalupe', with a large, stylized flourish at the end.

Prof. Dr. Irwen Valle Guadalupe
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Tese de Mestrado defendida em 26 de março de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Irwen Valle G'. The signature is stylized with large loops and a prominent 'G' at the end.

Prof (a). Dr (a). IRWEN VALLE GUADALUPE

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Caio José Coletti Negreiros'. The signature is written in a cursive style.

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Claudina Izepe Rodrigues'. The signature is written in a cursive style.

Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Agradecimentos

Agradeço:

- a Deus, por mais esta etapa na minha vida e a todas as pessoas que rezaram por mim.
- ao Professor Irwen por toda dedicação, amizade e compreensão prestada em sua orientação.
- aos meus pais, Lino e Lourdes e aos meus irmãos pelo incentivo, carinho e compreensão em todos os momentos, e principalmente nos mais difíceis.
- ao meu namorado Moacir, por toda compreensão, carinho e amor durante todo este tempo.
- aos meus cunhados e cunhadas, meus sobrinhos: Michelly, Francieli, Maiko, Gustavo e Ana Beatriz, minha avó e todos os meus familiares.
- as amigas de república: Marcela, Elisângela, Juliana, Cláudia por toda a amizade, companheirismo, ajuda neste período.
- a todos os meus ex-professores que me apoiaram e incentivaram tanto na graduação quanto na pós-graduação.
- a todos os funcionários da UFU, UNICAMP, UFG, pela boa vontade que me serviram quando precisei.
- a todas as pessoas que me ajudaram com os Softwares, principalmente o Jesse pela ajuda com o "Matemática".
- a todos os amigos da UFU, os amigos da pós-graduação do IMECC, aos amigos de Araguari, por toda amizade, alegria, companheirismo.
- a todas as pessoas que fizeram e fazem parte da minha vida...

Dedicatória

*aos meus queridos pais
Lino e Lourdes pelo
exemplo carinho e amor,
aos meus irmãos,
e ao meu amor Moacir.*

Resumo

Neste trabalho estudamos superfícies mínimas conjugadas de uma superfície mínima e as propriedades geométricas que lhes são comuns; estudamos também superfícies mínimas associadas. Construção de superfícies mínimas como solução do problema de Björling também é estudado. Exemplos de superfícies mínimas e suas superfícies mínimas associadas são ilustrados, bem como exemplos de superfícies que são soluções do problema de Björling.

Abstract

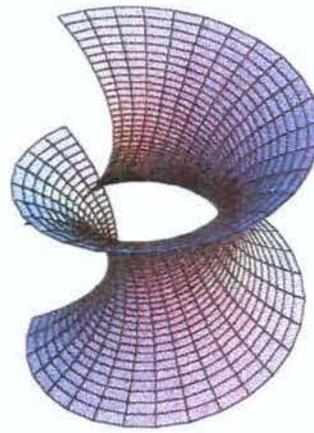
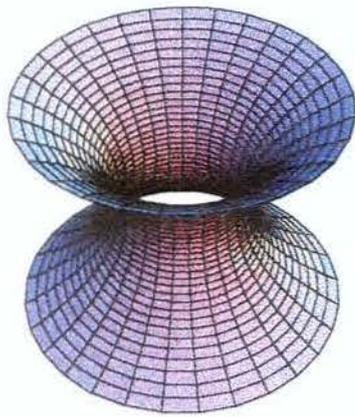
In this work we study conjugate minimal surfaces of a minimal surface and their geometric properties; we also study associated minimal surfaces. Construction of minimal surfaces are given as solution to the Björling's problem. Examples of minimal surfaces and their associated minimal surfaces are illustrated, as well as examples of surfaces that are solutions to the Björling's problem.

Introdução

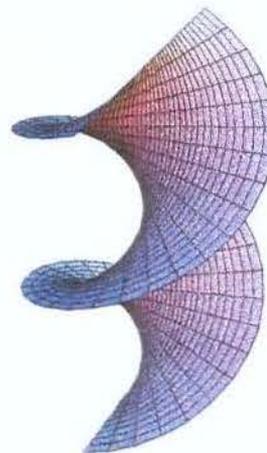
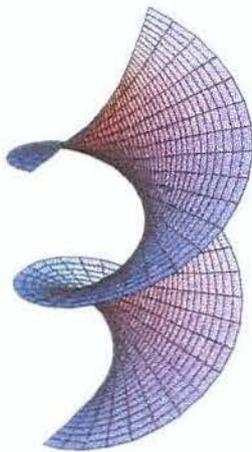
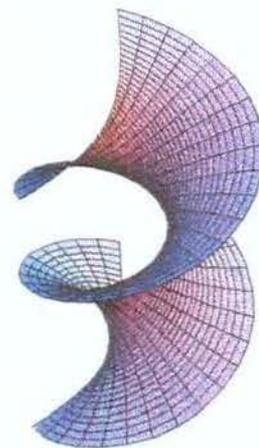
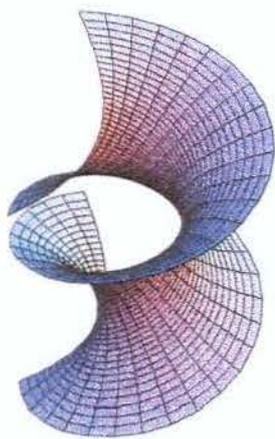
Neste trabalho estudamos superfícies mínimas conjugadas que são obtidas a partir de uma superfície mínima como solução das equações de Cauchy-Riemann. Vemos também a representação das mesmas como parte real (superfície mínima dada) e parte imaginária (superfície mínima conjugada) de uma curva isotrópica. Estudamos algumas propriedades geométricas comuns a estas superfícies, por exemplo, estas superfícies possuem a mesma normal, elas são isométricas, etc. Definimos superfícies mínimas associadas que dependem de um parâmetro θ ; quando θ e θ' diferem por $\frac{\pi}{2}$ então as superfícies associadas definem relativamente a θ a superfície mínima dada e relativamente a θ' sua superfície conjugada. Um exemplo clássico destas superfícies é o catenóide e o helicóide (superfície mínima conjugada do catenóide). Uma ilustração destas superfícies é mostrada na fig. 1.

Estudamos também como construir superfícies mínimas que são soluções do problema de Björling. Um exemplo deste tipo de superfície é a superfície de Catalan. Um esboço da superfície de Catalan e suas superfícies associadas também é mostrado na fig. 2.

Organizamos este trabalho em capítulos divididos da seguinte forma: Cap. 1 contém conceitos básicos necessários ao desenvolvimento do trabalho. Cap. 2 definimos superfície mínima conjugada de uma superfície mínima e estudamos propriedades geométricas que lhes são comuns. Também definimos pontos de ramificação, pontos umbílicos e vemos uma caracterização para as linhas assintóticas e para as linhas de curvatura. No Cap. 3 definimos superfícies mínimas associadas que dependem de um parâmetro θ e, quando θ e θ' diferem por $\frac{\pi}{2}$ concluímos que as linhas assintóticas da superfície definida por θ são as linhas de curvatura da superfície definida por θ' . Cap. 4 vemos o comportamento de superfícies mínimas próximo a pontos de ramificação, deduzimos uma forma normal para esta superfície e uma propriedade a qual é refletida na forma de limitante inferior para sua área. No Cap. 5 vemos as fórmulas de representação de Weierstrass, e calculamos expressões para a imagem esférica, curvatura de Gauss, linhas assintóticas e linhas de curvatura. No Cap. 6 estudamos o problema de Björling e como construir superfícies mínimas que são soluções deste problema. Para finalizar no Cap. 7 damos alguns exemplos de superfícies mínimas associadas, e superfície mínima conjugada de uma superfície mínima; além disso exemplos de superfícies que são obtidas como solução do problema de Björling.



Catenóide



helicóide

Fig. 1: Família de superfícies associadas do catenóide

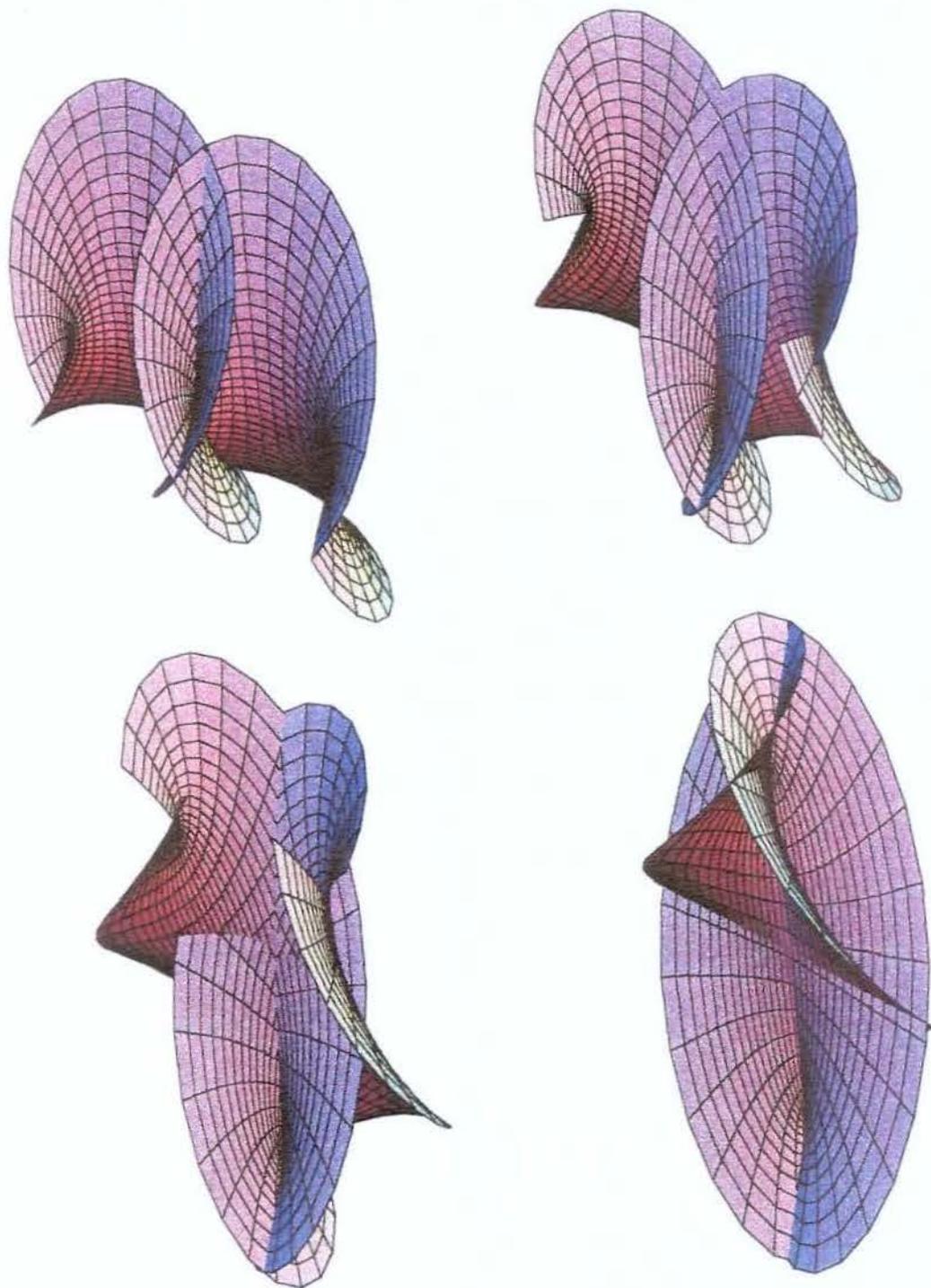


Fig. 2: Família de superfícies associadas à superfície de Catalan.

Índice

1	Preliminares	1
1.1	Primeira Forma Fundamental	1
1.2	Aplicação Normal de Gauss	2
1.3	Proposição	2
1.4	As equações de Weingarten	3
1.5	Curvatura Normal e Curvatura Geodésica	4
1.6	Interpretação geométrica da segunda forma fundamental	4
1.7	Curvaturas Principais, Direções Principais e Linhas de Curvatura	4
1.8	Equação Diferencial das Linhas de Curvatura	5
1.9	Proposição de Olinde Rodrigues	5
1.10	Direção Assintótica e Linha Assintótica	5
1.11	Equação Diferencial das Linhas Assintóticas	5
1.12	Geodésicas	6
1.13	Curvatura Média e Curvatura Gaussiana	6
1.14	Definição de superfície mínima	6
2	Superfícies mínimas conjugadas	7
2.1	Definição:	7
2.2	Definição:	8
2.3	Proposição:	8
2.4	Pontos de Ramificação.	9
2.5	Proposição:	9
2.6	Definição:	10
2.7	Proposição:	10
2.8	Proposição:	11
2.9	Pontos Umbílicos	12
2.10	Definição:	13
2.11	Linhas assintóticas e linhas de curvatura	13
2.12	Proposição [O1]	14

3	Superfícies Mínimas Associadas	15
3.1	Definição:	15
3.2	Teorema:	16
4	Comportamento de superfícies mínimas próximo de pontos de ramificação	19
4.1	Proposição:	20
4.2	Teorema:	21
5	Fórmulas de representação para superfícies mínimas	26
5.1	Lema	26
5.2	Teorema: Fórmula da representação de Enneper - Weierstrass.	27
5.3	Expressões para imagem esférica, curvatura de Gauss, linhas assintóticas e linhas de curvatura.	28
5.4	Interpretação geométrica da função $\vartheta(w)$	29
5.5	Teorema	31
5.6	Teorema: Fórmula de representação de Weierstrass	33
5.7	Teorema de R. Krust	35
6	O problema de Björling	38
6.1	Teorema	38
6.2	Corolário:	40
6.3	Teorema	40
6.4	Lema	41
6.5	Lema	42
6.6	Proposição:	44
6.7	Proposição:	44
6.8	Proposição	45
7	Exemplos	46
7.1	Catenóide e Helicóide	46
7.2	Teorema:	46
7.3	Proposição:[BC]	48
7.4	A segunda superfície de Scherk	53
7.5	A superfície de Catalan	54
7.6	A superfície de Henneberg	58
	Bibliografia	62

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Primeira Forma Fundamental

Seja $X : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ com Ω aberto de \mathbf{R}^2 , uma superfície regular. Denotemos por $T_p X$ o espaço tangente a X no ponto p . O produto interno \langle, \rangle_p em $T_p \mathbf{R}^3$, quando restrito a $T_p X$ define um produto interno \langle, \rangle_p em $T_p X$. A este produto interno corresponde uma forma quadrática: $I_p : T_p X \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $I_p(v_p) = \langle v_p, v_p \rangle, p \in X, v_p \in T_p X$.

Chamamos a esta forma quadrática de **primeira forma fundamental** da superfície X em p .

Seja $\{X_u, X_v\}$ base de $T_p X$. Vamos expressar a primeira forma fundamental com relação a esta base. Seja $w_p \in T_p X$ o vetor tangente a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t)), t \in \mathbf{R}, p = \alpha(0), \dot{\alpha}(0) = w_p$, então:

$$\begin{aligned} I_p(w_p) &= I_p(\dot{\alpha}(0)) = \langle \dot{\alpha}(0), \dot{\alpha}(0) \rangle_p = \\ &\langle X_u \dot{u}(0) + X_v \dot{v}(0), X_u \dot{u}(0) + X_v \dot{v}(0) \rangle = \\ &\dot{u}(0)^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2 \dot{u}(0) \dot{v}(0) \langle X_u, X_v \rangle + \dot{v}(0)^2 \langle X_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Denotando:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle, \text{temos:} \\ I_p(\dot{\alpha}(0)) &= E \dot{u}(0)^2 + 2 F \dot{u}(0) \dot{v}(0) + G \dot{v}(0)^2 \end{aligned}$$

onde E, F, G são chamados os coeficientes da primeira forma quadrática na base $\{X_u, X_v\}$ do espaço tangente $T_p X$.

1.2 Aplicação Normal de Gauss

Seja $X \subset \mathbf{R}^3$ uma superfície regular com orientação N e $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária e denotamos por $N(p)$ o vetor normal unitário a X em p . A aplicação $N : X \rightarrow S^2$ que associa a cada ponto $p \in X$, o vetor $N(p) \in S^2$ é chamada **aplicação normal de Gauss**.

Observação:

Se o domínio da superfície X é um aberto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ então, variando $(u, v) \in \Omega$ temos que esta aplicação N é diferenciável. Logo $dN_p : T_p X \rightarrow T_{N(p)} S^2(1)$ é uma aplicação linear. Temos que $T_p X$ e $T_{N(p)} S^2(1)$ são paralelos, então podemos considerar $dN_p : T_p X \rightarrow T_p X$

1.3 Proposição

A diferencial $dN_p : T_p X \rightarrow T_p X$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração:

Como dN_p é linear, é suficiente verificar que: $\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle$ para uma base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p X$. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em X , com $\alpha(0) = p$, temos:

$$dN_p(\dot{\alpha}(0)) = dN_p(X_u \dot{u}(0) + X_v \dot{v}(0)) = dN_p(X_u \dot{u}(0)) + dN_p(X_v \dot{v}(0)) = dN_p(X_u) \dot{u}(0) + dN_p(X_v) \dot{v}(0) = N_u \dot{u}(0) + N_v \dot{v}(0)$$

em particular, $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Portanto, para provar que dN_p é auto-adjunta, é suficiente mostrar que,

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle .$$

Para ver isto, derivando $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$, relativamente a v e u respectivamente obtemos:

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0$$

então

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle .$$

O fato de $dN_p : T_p X \rightarrow T_p X$ ser uma aplicação linear auto-adjunta permite-nos associar dN_p a uma forma quadrática Q em $T_p X$. Para a aplicação linear simétrica dN_p temos associado a forma bilinear simétrica. ■

$$B : T_p X \times T_p X \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(v, w) \mapsto B(v, w) = \langle dN_p(v), w \rangle.$$

A B temos associada a forma quadrática:

$$Q : T_p X \rightarrow \mathbf{R}$$

$$v \mapsto Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle.$$

A segunda forma fundamental de X é definida por

$$II_p : T_p X \rightarrow \mathbf{R}$$

$$v \mapsto - \langle dN_p(v), v \rangle.$$

Isto é,

$$II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle.$$

Na base $\{X_u, X_v\}$ calculemos a segunda forma quadrática II_p .

$$II_p(\dot{\alpha}(0)) = - \langle dN_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0) \rangle =$$

$$- \langle N_u \dot{u}(0) + N_v \dot{v}(0), X_u \dot{u}(0) + X_v \dot{v}(0) \rangle =$$

$$- \langle N_u, X_u \rangle \dot{u}(0)^2 - 2 \langle N_u, X_v \rangle \dot{u}(0) \dot{v}(0) - \langle N_v, X_v \rangle \dot{v}(0)^2.$$

Seja

$$e = - \langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle,$$

$$f = - \langle N_u, X_v \rangle = - \langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle,$$

$$g = - \langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

Então a segunda forma fundamental fica:

$$II_p(\dot{\alpha}(0)) = e \dot{u}(0)^2 + 2f \dot{u}(0) \dot{v}(0) + g \dot{v}(0)^2.$$

1.4 As equações de Weingarten

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ uma superfície regular. Então o operador dN_p de X é dado em termos da base $\{X_u, X_v\}$ por:

$$-dN_p(X_u) = N_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2} X_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} X_v$$

$$-dN_p(X_v) = N_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2} X_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} X_v,$$

estas equações são conhecidas como equações de Weingarten[M].

1.5 Curvatura Normal e Curvatura Geodésica

Seja $\alpha(t), t \in I \subset \mathbf{R}$ uma curva regular em X passando por $p \in X$, k a curvatura de α em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal unitário da curva α e N é o vetor normal de X em p . O número $K_n = k \cos \theta$ é então chamado a **curvatura normal** de $\alpha \subset X$ em p ; e o número $K_g = \pm k \sin \theta$ é chamado de **curvatura geodésica** de $\alpha \in X$ em p .

Em outras palavras, K_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal a superfície em p , com sinal dado pela orientação N de S em p ; e K_g é o comprimento da projeção do vetor kn sobre o vetor $\dot{\alpha}(t)$ em p .

1.6 Interpretação geométrica da segunda forma fundamental

Seja $\alpha(s)$ uma curva em X , parametrizada pelo comprimento de arco s e tal que $p = \alpha(0)$. Denotamos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N a curva $\alpha(s)$, temos:

$$\langle N(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle N(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle = - \langle \dot{N}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle.$$

Logo

$$II_p(\dot{\alpha}(0)) = - \langle dN_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0) \rangle = - \langle \dot{N}(0), \dot{\alpha}(0) \rangle = \langle N(0), \ddot{\alpha}(0) \rangle = \langle N(0), kn(0) \rangle = k \langle N(0), n(0) \rangle = k \cos \theta = K_n(\dot{\alpha}(0)),$$

onde k é a curvatura da curva. Portanto temos:

$$II_p(\dot{\alpha}(0)) = K_n(\dot{\alpha}(0)).$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental II_p para um vetor $v \in T_p X$ é igual a curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v .

1.7 Curvaturas Principais, Direções Principais e Linhas de Curvatura

Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Sabemos que $dN_p : T_p X \rightarrow T_p X$ é simétrica (pois dN_p é auto-adjunto). Logo da Álgebra Linear [H] sabemos que existe uma base $\{e_1, e_2\}$ ortonormal em $T_p X$ tal que:

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1,$$

$$dN_p(e_2) = -k_2 e_2;$$

Além disso pode-se verificar [M] que se X é uma superfície regular e K_n a função curvatura normal de X em p , então existem vetores unitários e ortogonais $e_1, e_2 \in T_p X$ tais que $K_n(e_1) = k_1$ e $K_n(e_2) = k_2$ são os valores máximo

e mínimo da função K_n . A curvatura normal máxima k_1 e a curvatura normal mínima k_2 são chamadas **curvaturas principais** no ponto p , e as correspondentes direções e_1 e e_2 são chamadas **direções principais**.

Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma **linha de curvatura** da superfície X se para qualquer $t \in I \subset \mathbf{R}$ o vetor $\dot{\alpha}(t)$ é uma direção principal de X em p .

1.8 Equação Diferencial das Linhas de Curvatura

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbf{R}$ uma curva regular de uma superfície X . Então $\alpha(t)$ é uma linha de curvatura de X se, e somente se, $u(t)$ e $v(t)$ satisfazem:

$$(fE - eF) \dot{u}(t)^2 + (gE - eG) \dot{u}(t) \dot{v}(t) + (gF - fG) \dot{v}(t)^2 = 0$$

Esta equação é chamada de **equação diferencial das linhas de curvatura**.

1.9 Proposição de Olinde Rodrigues

Seja $\alpha(t)$, $t \in I$ uma curva regular de uma superfície parametrizada regular X . Então α é uma linha de curvatura de X se, e somente se, existe uma função $\lambda(t)$ tal que $\forall t \in I, \dot{N}(t) = -\lambda(t)\dot{\alpha}(t)$ onde $N(t) = N(u(t), v(t))$. Neste caso $\lambda(t) = K_n(\dot{\alpha}(t))$ é uma curvatura principal de X em $(u(t), v(t))$.

Demonstração ver [DHKW].

1.10 Direção Assintótica e Linha Assintótica

Seja p um ponto em X . Uma **direção assintótica** de X em p é uma direção $v \in T_p X$ tal que a curvatura normal K_n na direção v é zero, isto é, $K_n(v) = 0$.

Uma curva regular $\alpha(t) \subset X$, $t \in I$ é uma **linha assintótica** se para cada $p \in \alpha$ a reta tangente de α em p é uma direção assintótica; ou ainda se sua curvatura normal $K_n(\alpha'(t)) = 0 \forall t \in I$.

1.11 Equação Diferencial das Linhas Assintóticas

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbf{R}$ uma curva regular de uma superfície X . Então $\alpha(t)$ é uma curva assintótica de X se, e somente se, $II(\dot{\alpha}(t)) = 0$,

para todo $t \in I$. Isto é, se e somente se

$$e\dot{u}(t)^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g\dot{v}(t)^2 = 0, t \in I.$$

Esta equação é chamada de **equação diferencial das linhas assintóticas**.

1.12 Geodésicas

Seja $X(u, v)$ superfície parametrizada regular, uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma **geodésica** de X se $\forall t \in I, \ddot{\alpha}(t)$ é um vetor normal a X em $(u(t), v(t))$; ou ainda se sua curvatura geodésica $K_g(\alpha(t)) = 0 \forall t \in I$.

1.13 Curvatura Média e Curvatura Gaussiana

Seja X uma superfície regular em \mathbf{R}^3 . A **curvatura Gaussiana** K e a **curvatura média** H de X são funções $K, H : X \rightarrow \mathbf{R}$ definidas por:

$$\begin{aligned} K(p) &= \det(dN_p) = k_1 k_2, \\ H(p) &= \frac{1}{2} \text{tr}(dN_p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

1.14 Definição de superfície mínima

Uma superfície $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, onde Ω é domínio de $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$, X de classe C^2 é chamada **superfície mínima** se satisfaz as equações:

$$\begin{aligned} \Delta X &= 0 \\ |X_u|^2 &= |X_v|^2, \langle X_u, X_v \rangle = 0 \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Observação 1 *Com esta definição incluímos superfícies com singularidades isoladas, chamadas de "pontos de ramificação" que estudaremos no Capítulo 2.*

Observação 2 *Se substituirmos $\Delta X = 2HX_u \wedge X_v$ (ver [DHKW] pág. 71) temos a definição de superfície mínima em função de H , porém esta definição não inclui superfícies com singularidades isoladas.*

Capítulo 2

Superfícies mínimas conjugadas

2.1 Definição:

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, onde Ω é domínio simplesmente conexo de $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ superfície mínima. Então definimos **superfície conjugada**

$X^*(u, v) = (x^*(u, v), y^*(u, v), z^*(u, v))$ de $X(u, v)$ em Ω como solução das equações de Cauchy-Riemann:

$$(1) \quad X_u = X_v^*, \quad X_v = -X_u^* \text{ em } \Omega.$$

Da definição temos que todas as superfícies conjugadas de alguma superfície mínima X dada diferem por um vetor constante, então podemos falar de "a" superfície mínima conjugada X^* de X em Ω . Além disso, valem as equações:

$$\Delta X^* = 0, \quad |X_u^*|^2 = |X_v^*|^2, \quad \langle X_u^*, X_v^* \rangle = 0.$$

Isto é, a superfície conjugada X^* de uma superfície mínima X é uma superfície mínima.

Considere uma aplicação harmônica arbitrária $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, Ω domínio simplesmente conexo em $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$, e sua aplicação conjugada X^* , definida como solução de (1). Então:

$$(2) \quad f(w) := X(u, v) + iX^*(u, v), \quad w = u + iv \in \mathbf{C},$$

é uma aplicação holomórfica de Ω em \mathbf{C}^3 com componentes:

$$\varphi(w) = x(u, v) + ix^*(u, v)$$

$$\psi(w) = y(u, v) + iy^*(u, v)$$

$$\chi(w) = z(u, v) + iz^*(u, v)$$

as quais podem ser consideradas como curvas holomórficas em \mathbf{C}^3 . Sua derivada complexa é dada por:

$$f' = X_u + iX_u^* = X_u - iX_v$$

de onde segue que:

$$\langle f', f' \rangle = \langle X_u - iX_v, X_u - iX_v \rangle = |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2i \langle X_u, X_v \rangle.$$

Agora observe que:

$$\langle f', f' \rangle = 0 \Leftrightarrow |X_u|^2 = |X_v|^2 \text{ e } \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

isto é, as relações de conformidade

$$(3) \quad |X_u|^2 = |X_v|^2 \text{ e } \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

são satisfeitas se, e somente se, a relação de isotropia

$$(4) \quad \langle f', f' \rangle = 0 \text{ for satisfeita.}$$

Observe que a relação (4) significa que as derivadas das três funções satisfazem:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 0.$$

2.2 Definição:

Uma curva holomórfica que satisfaz a relação (4) é chamada **curva isotrópica**.

Usando esta notação obtemos o seguinte resultado:

2.3 Proposição:

Se $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ é uma superfície mínima em um domínio simplesmente conexo Ω em \mathbf{R}^2 , então a curva holomórfica $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ definida por (1) e (2) é uma curva isotrópica. Reciprocamente, se $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ é uma curva isotrópica em \mathbf{C}^3 , então:

$$X(u, v) = \operatorname{Re}(f(w))$$

$$X^*(u, v) = \operatorname{Im}(f(w))$$

define duas superfícies mínimas $X, X^* : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, onde Ω é, ou não, domínio simplesmente conexo.

Demonstração: feita acima. ■

Observação 3 A partir daqui diremos que $X^*(u, v)$ é uma superfície conjugada de alguma superfície mínima $X(u, v)$, se existir uma curva isotrópica $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ tal que $X(u, v) := \operatorname{Re}f(w)$, $X^*(u, v) := \operatorname{Im}f(w)$, $w = u + iv \in \Omega$.

Observação 4 Se X^* é conjugada de X , então $-X$ é conjugada de X^* , isto é, $X^{**} = -X$.

De fato, seja $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ isotrópica tal que: $X(u, v) := \operatorname{Re} f(w)$, $X^*(u, v) := \operatorname{Im} f(w)$. Defina $g := -if : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$. Daí: $\langle g', g' \rangle = \langle -if', -if' \rangle = (-i)i \langle f', f' \rangle = 0$, isto é g é isotrópica e vale: $g(w) = -i(X(u, v) + iX^*(u, v)) = X^*(u, v) + i(-X(u, v))$, e portanto $-X$ é conjugada de X^* . ■

Introduzindo os dois operadores de Wirtinger

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right), \text{ temos que:}$$

$$\begin{aligned} \Delta X = 0 &\Leftrightarrow X_{w\bar{w}} = 0 \\ |X_u|^2 = |X_v|^2, \langle X_u, X_v \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle X_w, X_w \rangle = 0. \end{aligned}$$

2.4 Pontos de Ramificação.

Suponha agora que $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ é uma superfície mínima em algum domínio Ω . Então temos:

$$(5) \quad \varpi := \sqrt{EG - F^2} = E = G = \frac{1}{2}(E + G) = |X_u|^2.$$

Restringindo-nos a subdomínios simplesmente conexo Ω' de Ω , pela proposição 2.3 podemos assumir que existe uma curva isotrópica f tal que $X = \operatorname{Re} f$, $f = (\varphi, \psi, \chi)$.

Agora como $|f'|^2 = |\nabla X|^2 = 4|X_w|^2$, obtemos:

$$\varpi = |X_u|^2 = \frac{1}{2} |\nabla X|^2 = \frac{1}{2} |f'|^2 = 2|X_w|^2.$$

Então os zeros de ϖ são os zeros comuns das três funções holomórficas φ', ψ', χ' e portanto são isolados em Ω , exceto se $X(w) \equiv \text{constante}$.

2.5 Proposição:

Os pontos singulares de uma superfície mínima não constante $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ em um domínio Ω são isolados. Eles são exatamente os zeros da função $|X_u|$ em Ω .

Demonstração: Vimos que se w é ponto regular de X então ϖ não se anula [DHKW]. Logo se w é ponto singular de X temos $\varpi(w) = 0 \Rightarrow |X_u(w)| = 0$. ■

Resumindo temos que o comportamento de uma superfície mínima em uma vizinhança de um dos seus pontos singulares assemelha-se com o

comportamento de uma função holomórfica $\varphi(w)$ em uma vizinhança dos zeros de sua derivada $\varphi'(w)$.

2.6 Definição:

Os pontos singulares de uma superfície mínima são chamados **pontos de ramificação**.

2.7 Proposição:

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ uma superfície mínima regular e $X^* : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ sua superfície conjugada. Então valem:

i) $X(w) \equiv \text{constante} \Leftrightarrow X^*(w) \equiv \text{constante}$.

ii) w_o é um ponto de ramificação de X se, e somente se, w_o é ponto de ramificação de X^*

iii) denote por $N(w)$ e $N^*(w)$ as aplicações de Gauss de $X(w)$ e $X^*(w)$ respectivamente, que são definidas em um conjunto Ω' de pontos regulares de X em Ω . Então temos $N(w) = N^*(w)$ em Ω' . Além disso, $T_w X = T_w X^*$, $\forall w \in \Omega'$, e vale: $I_X(V, W) = I_{X^*}(V, W)$, $\forall V, W \in T_w X, w \in \Omega'$, isto é, as superfícies X e X^* são isométricas. Portanto as curvaturas de Gauss K e K^* de X e X^* são as mesmas.

Demonstração:

i) $X \equiv \text{cte} \Leftrightarrow X_u = X_v = 0 = X_u^* = X_v^* \Leftrightarrow X^* \equiv \text{cte}$.

ii) w_o é ponto de ramificação de $X \Leftrightarrow w_o$ é ponto singular de $X \Leftrightarrow w_o$ é zero de $|X_u|$ em $\Omega \Leftrightarrow w_o$ é zero de $|X_u|^2$ em $\Omega \Leftrightarrow w_o$ é zero de $|X_v|^2$ em $\Omega \Leftrightarrow w_o$ é zero de $|X_v|$ em $\Omega \Leftrightarrow w_o$ é zero de $|X_u^*|$ em $\Omega \Leftrightarrow w_o$ é ponto singular de $X^* \Leftrightarrow w_o$ é ponto de ramificação de X^* .

iii) Seja $w \in \Omega'$. Então temos:

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{X_u^* \wedge X_v^*}{|X_u^* \wedge X_v^*|} = \frac{X_u^* \wedge X_v^*}{|X_u^* \wedge X_v^*|} = N^*.$$

Agora como $N = N^*$ segue-se que $T_w X = T_w X^*$. Para ver que as superfícies X e X^* são isométricas, basta ver que, como X e X^* são mínimas temos $E = G, F = 0, E^* = G^*, F^* = 0$. Logo resta mostrar que $E = G^*$; mas isto sai direto de $X_u = X_v^*$, pois $E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v^*, X_v^* \rangle = G^*$. Logo as superfícies X e X^* são isométricas e portanto suas curvaturas Gaussianas K e K^* , respectivamente são iguais [K].

■

2.8 Proposição:

Seja Ω domínio simplesmente conexo em \mathbf{C} e $X_o \in \mathbf{R}^3, w_o \in \Omega$ e suponha que $\phi(w) = (\phi_1(w), \phi_2(w), \phi_3(w))$ seja uma aplicação holomórfica de Ω em \mathbf{C}^3 que satisfaz:

$$(6) \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \text{ em } \Omega.$$

Então a fórmula

$$(7) \quad X(w) = X_o + \operatorname{Re} \int_{w_o}^w \phi(w) dw, w \in \Omega$$

define uma superfície mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ e para todo $X_o^* \in \mathbf{R}^3$, a fórmula

$$X^*(w) = X_o^* + \operatorname{Im} \int_{w_o}^w \phi(w) dw, w \in \Omega$$

define uma superfície conjugada à X . Os pontos de ramificação de X são exatamente os zeros de ϕ .

Reciprocamente, se $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ é uma superfície mínima definida em algum domínio simplesmente conexo Ω , então existe uma função holomórfica $\phi : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$, satisfazendo $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, tal que $X(w) = X(w_o) + \operatorname{Re} \int_{w_o}^w \phi(w) dw, \forall w, w_o \in \Omega$.

Demonstração:

Suponha $\phi(w) = (\phi_1(w), \phi_2(w), \phi_3(w))$ com $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$. Defina $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ tal que $f' := \phi$. Logo f' é holomórfica e portanto f é holomórfica. De (6) $\langle f', f' \rangle = 0$, isto é, f é uma curva isotrópica. Então pela Proposição 2.3 $X(u, v) := \operatorname{Re} f(w)$ e $X^*(u, v) := \operatorname{Im} f(w)$ definem duas superfícies mínimas, onde X^* é a superfície conjugada de X . Como $f' = \phi$, integrando temos: $f(w) - f(w_o) = \int_{w_o}^w \phi(w) dw$. Como $f(w_o) \in \mathbf{C}^3$ faça $f(w_o) = X_o + iX_o^*$ com $X_o, X_o^* \in \mathbf{R}^3$. Daí:

$$X(u, v) = X_o + \operatorname{Re} \int_{w_o}^w \phi(w) dw$$

e,

$$X^*(u, v) = X_o^* + \operatorname{Im} \int_{w_o}^w \phi(w) dw.$$

Pela Proposição 2.5, os pontos de ramificação de X são os zeros de $|X_u|$. Agora de (5) temos $|X_u(w_o)| = 0 \Leftrightarrow |f'(w_o)|^2 = 0 \Leftrightarrow |\phi(w_o)|^2 = 0 \Leftrightarrow \phi(w_o) = 0$; isto é, se w_o é ponto de ramificação de X então w_o é zero de ϕ .

Reciprocamente suponha X superfície mínima, Ω domínio simplesmente conexo. Pela Proposição 2.3 existe $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ definida por $f(w) := X(u, v) + iX^*(u, v)$ com $X = \text{Re}f, X^* = \text{Im}f$, tal que f é uma curva isotrópica. Então defina: $\phi : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ por $\phi = f'$; daí ϕ é holomórfica e $\langle \phi, \phi \rangle = \langle f', f' \rangle = 0 \Leftrightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$. Agora pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos: $\int_{w_0}^w \phi(w)dw = \int_{w_0}^w f'(w)dw = f(w) - f(w_0)$. Portanto $X(u, v) = \text{Re}(f(w)) = X(w_0) + \text{Re} \int_{w_0}^w \phi(w)dw, \forall w, w_0 \in \Omega$. ■

Observação 5 Sempre exigiremos que a superfície mínima X seja não constante. Isto significa assumirmos $\phi(w) \neq 0$ na fórmula (7).

2.9 Pontos Umbílicos

Se $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ é uma superfície mínima dada na forma $X(w) = \text{Re}f(w)$, onde $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ denota uma curva isotrópica com derivada $f' = \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, então deduzimos de $f' = X_u - iX_v$ que:

$$X_u = \text{Re}\phi, X_v = -\text{Im}\phi.$$

Consequentemente obtemos:

$$X_u \wedge X_v = \text{Re}\phi \wedge (-\text{Im}\phi) = \text{Im}(\phi_2\bar{\phi}_3, \phi_3\bar{\phi}_1, \phi_1\bar{\phi}_2).$$

O elemento de reta $ds = |dX|$ toma a forma $ds^2 = \Lambda\{du^2 + dv^2\}$ onde:

$$\Lambda := |X_u|^2 = \frac{1}{2}|\nabla X|^2 = \frac{1}{2}|f'|^2 = \frac{1}{2}|\phi|^2.$$

Então a aplicação de Gauss $N : \Omega' \rightarrow \mathbf{S}^2$ onde $\Omega' = \{w \in \Omega : \Lambda(w) \neq 0\}$ será dada por:

$$N = \Lambda^{-1}X_u \wedge X_v \text{ ou } N = \frac{2}{|\phi|^2}\text{Im}(\phi_2\bar{\phi}_3, \phi_3\bar{\phi}_1, \phi_1\bar{\phi}_2).$$

Além disso, derivando a equação $f' = X_u - iX_v$ temos:

$$f'' = X_{uu} - iX_{vu} \Rightarrow f'' = -X_{vv} - iX_{uv}, \text{ daí:}$$

$$(8) \quad \langle f'', N \rangle = \langle X_{uu} - iX_{vu}, N \rangle = e - if, e$$

$$(9) \quad \langle f'', N \rangle = \langle -X_{vv} - iX_{uv}, N \rangle = -g - if.$$

Comparando as equações (8) e (9) obtemos

$$(10) \quad e = -g.$$

Observe que isto expressa o fato que X tem curvatura média zero, pois $H = \frac{e+g}{2E}$. Além disso temos:

$$(11) \quad |\langle f'', N \rangle|^2 = e^2 + f^2$$

De acordo com [GS] temos que a função $f(w) = \frac{e-g}{2} - if$ é holomórfica com $w = u + iv \in \Omega$. Logo a função $l(w) := e(w) - if(w) = \langle f''(w), N(w) \rangle$ é holomórfica em Ω' . Assim de (10) e de (11) temos que a curvatura de Gauss de X em Ω' é dada por:

$$K = \frac{eg-f^2}{\omega^2} = -\frac{e^2+f^2}{\omega^2} = -\frac{|l|^2}{\Lambda^2} = -\frac{4|\langle \phi', N \rangle|^2}{|\phi|^4} \text{ onde } \phi = f'.$$

Então concluímos que $K(w) \leq 0$ em Ω' e $K(w) = 0 \Leftrightarrow l(w) = 0$.

2.10 Definição:

Os pontos umbílicos w de uma superfície $X(w)$ são pontos regulares onde k_1 e k_2 são iguais.

Como $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$ e $K = k_1k_2 \leq 0$, os pontos umbílicos $w \in \Omega'$ de uma superfície mínima não constante $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ são caracterizados por $K(w) = 0$, ou equivalentemente $e(w) = 0, f(w) = 0, g(w) = 0$. Assim vemos que os pontos umbílicos de X são precisamente os zeros da função holomórfica $l : \Omega' \rightarrow \mathbf{C}$, logo eles são isolados ou então $e(w) \equiv 0, f(w) \equiv 0, g(w) \equiv 0$ em Ω' , e utilizando as equações de Weingarten (seção 1.5 Cap. 1) temos $N_u = N_v = 0 \Rightarrow N \equiv cte$, logo X planar.

2.11 Linhas assintóticas e linhas de curvatura

Usando a função $l(w), w \in \Omega$ podemos caracterizar as linhas assintóticas e as linhas de curvatura de uma superfície mínima não constante. Seja $w(t) = (\alpha(t), \beta(t)), t \in I$ uma curva em Ω . Considere as equações diferenciais das linhas assintóticas e das linhas de curvatura descritas no Cap. 1, seções 1.11 e 1.8. Usando que $E = G, F = 0, e = -g$ chegamos que as linhas assintóticas são descritas por:

$$e(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) + 2f\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0,$$

e as linhas de curvatura dadas por:

$$f(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) - 2e\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0,$$

Vamos introduzir a forma quadrática com valores complexos $\Xi(\dot{w})$ dependendo de $\dot{w} = (\dot{\alpha}, \dot{\beta})$ por: $\Xi(\dot{w}) := l(w)(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2$, $l = e - if$. E daí,
 $\Xi(\dot{w}) = (e - if)(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2 = e(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) + 2f\dot{\alpha}\dot{\beta} + i(f(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) - 2e\dot{\alpha}\dot{\beta})$.

Então as linhas assintóticas e as linhas de curvatura são dadas respectivamente por:

$$Re(\Xi(\dot{w})) = 0 \text{ e } Im(\Xi(\dot{w})) = 0,$$

ou ainda por:

$$(12) \quad Re(l(w)(dw)^2) = 0 \text{ e } Im(l(w)(dw)^2) = 0,$$

onde $l(w)dw^2$ é uma forma diferencial quadrática [DHW] e [O].

Colecionando todos estes resultados temos demonstrada a seguinte proposição:

2.12 Proposição [O1]

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ uma superfície mínima não constante dada por $X = Ref$, onde $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ é uma curva isotrópica com $f' = \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Então sua imagem esférica $N(w)$, $w \in \Omega'$, no conjunto de pontos regulares $\Omega' = \{w \in \Omega : \Lambda(w) \neq 0\}$ é dada por:

$$N = \frac{2}{|\phi|^2} Im(\phi_2 \bar{\phi}_3, \phi_3 \bar{\phi}_1, \phi_1 \bar{\phi}_2)$$

e sua curvatura de Gauss K em Ω' pode ser calculada por

$$K = -\frac{|l|^2}{\Lambda^2} = -\frac{4|\langle \phi', N \rangle|^2}{|\phi|^4} \text{ onde } \phi = f'.$$

Em Ω' a curvatura $K(w)$ é estritamente negativa, exceto para pontos umbilicos onde $K(w)$ é nula. Os pontos umbilicos de X são exatamente os zeros da função holomórfica $l(w) = e(w) - if(w)$, $w \in \Omega$. Se X é uma superfície não planar então seus pontos umbilicos são isolados. As linhas assintóticas de X são descritas por $Re(l(w)(dw)^2) = 0$ e as linhas de curvatura por $Im(l(w)(dw)^2) = 0$.

Capítulo 3

Superfícies Mínimas Associadas

O nosso objetivo é definir uma família de superfícies mínimas associadas a uma superfície mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada como parte real de alguma curva isotrópica $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$.

Então para todo $\theta \in \mathbf{R}$, defina $g(w, \theta) := e^{-i\theta} f(w)$, $w \in \Omega$, que descreve uma curva isotrópica, e,

$$(1) \quad Z(w, \theta) := \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} f(w)\} = X(w)\cos\theta + X^*(w)\operatorname{sen}\theta$$

define uma família de superfícies mínimas com a propriedade:

$$Z(w, 0) = X(w) \text{ e } Z(w, \frac{\pi}{2}) = X^*(w).$$

3.1 Definição:

As superfícies $Z(w, \theta)$, $w \in \Omega$, são chamadas **superfícies mínimas associadas à superfície $X(w)$** , $w \in \Omega$.

Usando as equações de Cauchy-Riemann ((1) Cap. 2) e derivando a expressão (1) acima, obtemos:

$$Z_u = X_u \cos\theta + X_u^* \operatorname{sen}\theta = X_u \cos\theta - X_v \operatorname{sen}\theta$$

$$Z_v = X_v \cos\theta + X_v^* \operatorname{sen}\theta = X_v \cos\theta + X_u \operatorname{sen}\theta.$$

E usando as relações de conformidade ((3) Cap. 2) temos:

$$|Z_u|^2 = |Z_v|^2 = |X_u|^2 = |X_v|^2, \text{ e } \langle Z_u, Z_v \rangle = 0.$$

Como anteriormente denotemos $\Omega' = \{w \in \Omega : \Lambda(w) \neq 0\}$, $\Lambda := |X_u|^2$ o domínio dos pontos regulares de X em Ω . Então Ω' é também o conjunto dos pontos regulares de cada uma das superfícies associadas $Z(., \theta)$. E também os espaços tangentes $T_w X$ e $T_w Z(., \theta)$ de X e $Z(., \theta)$ coincidem $\forall w \in \Omega'$ e para

todo $\theta \in \mathbf{R}$. Então a função de Gauss $N : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$ de X corresponde com a imagem esférica de cada uma das superfícies associadas. Além disso temos:
 $\langle dZ(., \theta), dZ(., \theta) \rangle = \langle dX, dX \rangle, \forall \theta \in \mathbf{R}$.

De fato:

$\langle dZ(., \theta), dZ(., \theta) \rangle = \langle Z_u du + Z_v dv, Z_u du + Z_v dv \rangle = |Z_u|^2 (du^2 + dv^2)$ e,
 $\langle dX, dX \rangle = \langle X_u du + X_v dv, X_u du + X_v dv \rangle = |X_u|^2 (du^2 + dv^2)$, e o resultado segue de $|Z_u|^2 = |X_u|^2$. Daí todas as superfícies mínimas associadas têm a mesma forma fundamental, logo todas as superfícies associadas são isométricas entre si.

Considere agora a função holomórfica $l(\theta) = e(\theta) - if(\theta) := \langle g''(., \theta), N \rangle$ que caracteriza as linhas assintóticas e as linhas de curvatura e os pontos umbílicos de uma superfície mínima associada $Z(., \theta)$. Como $g''(w, \theta) = e^{-i\theta} f''(w)$ obtemos: $l(\theta) = \langle e^{-i\theta} f'', N \rangle = e^{-i\theta} \langle f'', N \rangle = e^{-i\theta} l(0) = (e \cos \theta - f \sin \theta) - i(e \sin \theta + f \cos \theta)$ onde $l(0) = l = e - if$ é a função característica para $X = Z(., 0)$. Daí segue que $l(\frac{\pi}{2}) = -f - ie$.

Definindo:

$$\xi := e(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) + 2f\dot{\alpha}\dot{\beta} \quad \eta := -f(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) + 2e\dot{\alpha}\dot{\beta}$$

Obtemos:

$$l(0)(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2 = \xi + i\eta,$$

$$l(\frac{\pi}{2})(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2 = \eta - i\xi.$$

Considerando a Proposição 2.12 deduzimos que:

$Rel(0)(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2 = \xi = 0$ nos dá as linhas assintóticas de X e
 $Iml(0)(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2 = \eta = 0$ nos dá as linhas de curvatura de X .

Analogamente,

$Rel(\frac{\pi}{2})(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2 = \eta = 0$ fornece as linhas assintóticas de X^* , e
 $Iml(\frac{\pi}{2})(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})^2 = -\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$ fornece as linhas de curvatura de X^* .

Em outras palavras deduzimos que as linhas assintóticas de X são as linhas de curvatura de X^* , e as linhas de curvatura de X são as linhas assintóticas de X^* .

Assim temos o seguinte resultado:

3.2 Teorema:

Todas as superfícies associadas $Z(., \theta)$ são isométricas entre si. Cada su-

perfície associada pode ser obtida da superfície original X por um processo de deformação que em cada estágio continua sendo uma superfície mínima. Para cada $w \in \Omega$, todo espaço tangente $T_w Z(\cdot, \theta)$ coincide quando θ varia em \mathbf{R} . Finalmente se θ e θ' diferem por $\frac{\pi}{2}$ então as linhas assintóticas de $Z(\cdot, \theta)$ são as linhas de curvatura de $Z(\cdot, \theta')$, e as linhas de curvatura de $Z(\cdot, \theta)$ são as linhas assintóticas de $Z(\cdot, \theta')$.

Observação 6 Este procedimento de deformação $X \rightarrow Z(\cdot, \theta)$ é chamado de transformação de Bonnet [DHKW].

Vamos agora retornar a representação $X(w) = X_o + \text{Re} \int_{w_o}^w \phi(w) dw, w \in \Omega$. Em princípio esta representação permite construir superfícies mínimas em domínios simplesmente conexo, desde que satisfaça a relação de isotropia $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, o que nos impede de introduzir funções holomórficas arbitrárias ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Podemos contornar esta dificuldade do seguinte modo:

Seja Ω uma vizinhança suficientemente pequena de w_o e suponha que $\phi_1(w) \neq 0$ em Ω . Então podemos assumir que a função holomórfica

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega &\rightarrow \Omega^* := \sigma(\Omega) \\ w &\mapsto \int_{w_o}^w \phi_1(w) dw \end{aligned}$$

é uma aplicação inversível. Seja $\tau : \Omega^* \rightarrow \Omega$ a sua inversa, e defina a função $h : \Omega^* \rightarrow \mathbf{R}^2$ por:

$$h(\xi) := \int_0^\xi \frac{\phi_2 \sigma \tau}{\phi_1 \sigma \tau}(\xi) d\xi. \text{ A partir daí obtemos:}$$

$$\xi = \sigma(w) = \int_{w_o}^w \phi_1(w) dw, \xi \in \Omega^*$$

e,

$$h(\xi) = \int_0^\xi \frac{\phi_2(\tau(\xi))}{\phi_1(\tau(\xi))} d\xi = \int_{w_o}^w \frac{\phi_2(w)}{\phi_1(w)} \sigma'(w) dw.$$

Mas como $\sigma(w) = \int_{w_o}^w \phi_1(w) dw$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos $\sigma'(w) = \phi_1(w)$, assim:

$$h(\xi) = \int_{w_o}^w \phi_2(w) dw.$$

Agora: $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \Rightarrow \phi_3 = i\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \Rightarrow$

$$(1) \quad \phi_3 dw = i\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} dw.$$

Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo: $h'(\xi) = \frac{\phi_2(w)}{\phi_1(w)} \Rightarrow$
 $1 + h'(\xi)^2 = \frac{\phi_1^2(w) + \phi_2^2(w)}{\phi_1^2(w)} \Rightarrow$

$$(2) \quad i\sqrt{1+h'(\xi)^2} = i\frac{\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}}{\phi_1(w)}.$$

Agora: $\xi = \sigma(w) \Rightarrow d\xi = \sigma'(w)dw$ e como $\sigma'(w) = \phi_1(w)$ obtemos: $dw = \frac{d\xi}{\phi_1(w)}$.

Logo em (1) temos: $\phi_3(w)dw = i\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \frac{d\xi}{\phi_1(w)}$. Substituindo em (2) obtemos:

$$\phi_3(w)dw = i\sqrt{1+h'(\xi)^2}d\xi \text{ se } \phi_3(w) \neq 0 \text{ em } \Omega.$$

Então vemos que $X|_\Omega$ é equivalente a representação $Y := X \circ \tau$, que pode ser escrita como:

$$Y(\xi) = X_0 + \operatorname{Re}(\xi, h(\xi), i \int_0^\xi \sqrt{1+h'(\xi)^2}d\xi), \text{ para } \xi \in \Omega^*.$$

Reciprocamente, se $h(\xi)$ é holomórfica em Ω^* e $1+h'(\xi)^2 \neq 0$ para $\xi \in \Omega^*$, então: $Y(\xi) = X_0 + \operatorname{Re}(\xi, h(\xi), i \int_0^\xi \sqrt{1+h'(\xi)^2}d\xi)$, para $\xi \in \Omega^*$, define uma superfície mínima $Y(\xi), \xi \in \Omega^*$, desde que Ω^* seja um domínio simplesmente conexo em \mathbb{C} .

Esta é a representação clássica da fórmula de Monge, afirmando que toda superfície mínima é localmente equivalente a alguma função holomórfica, e reciprocamente, que essencialmente toda função holomórfica h gera uma superfície mínima.

Capítulo 4

Comportamento de superfícies mínimas próximo de pontos de ramificação

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ uma superfície mínima em um domínio $\Omega \subset \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$. Para algum $w_0 \in \Omega$, escolhamos um disco $B_r(w_0) \subset \Omega$. Então pela proposição 2.3, existe uma curva isotrópica $f : B_r(w_0) \rightarrow \mathbf{C}^3$ tal que $X(w) = \operatorname{Re} f(w), \forall w \in B_r(w_0)$. Lembremos que w_0 é um ponto de ramificação de X se, e somente se, $f'(w_0) = 0$.

Queremos deduzir uma expansão para $X(w)$ na vizinhança $B_r(w_0)$ usando a fórmula $f(w) = X(w) + iX^*(w), w \in B_r(w_0)$. Suponha que $f(w) \neq \text{cte}$ e que $f'(w_0) = 0$. Então existe um inteiro $m \geq 1$ ([C]) tal que:

$$f^{(k)}(w_0) = 0, 1 \leq k \leq m, f^{(m+1)}(w_0) \neq 0$$

Então obtemos a expansão em série de Taylor:

$$f(w) = f(w_0) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(w_0)(w - w_0)^{m+1} + \dots$$

em $B_r(w_0)$, e portanto temos:

$$f'(w) = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(w_0)(w - w_0)^m + \dots$$

Seja $X_0 = X(w_0)$ e $A = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) := \frac{1}{2m!} f^{(m+1)}(w_0)$, $B = \frac{2}{m+1} A = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(w_0)$. Então concluímos de $2X_w(w) = f'(w) = X_u(w) - iX_v(w)$ que

$$X_w(w) = A(w - w_0)^m + \sigma(|w - w_0|^{m+1}) \text{ quando } w \rightarrow w_0$$

e

$$X(w) = X_0 + \operatorname{Re}\{B(w - w_0)^{m+1} + \sigma(|w - w_0|^{m+2})\}.$$

A relação de conformidade $\langle X_w, X_w \rangle = 0$ implica que $\langle A, A \rangle = 0$; e daí $|\alpha|^2 = |\beta|^2$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ e de $A \neq 0$ deduzimos $|\alpha| = |\beta| > 0$. Além disso, usando as relações anteriores podemos escrever

$$f'(w) = 2A(w - w_0)^m + \dots = \alpha(w - w_0)^m - i\beta(w - w_0)^m + \dots, \text{ logo:}$$

$$X_u(w) = \operatorname{Re}(f'(w)) = \alpha \operatorname{Re}(w - w_0)^m + \beta \operatorname{Im}(w - w_0)^m + \dots$$

$$X_v(w) = -\operatorname{Im}(f'(w)) = -\alpha \operatorname{Im}(w - w_0)^m + \beta \operatorname{Re}(w - w_0)^m + \dots$$

onde o restante dos termos são de ordem $\sigma(|w - w_0|^{m+1})$. Então concluímos que:

$$X_u(w) \wedge X_v(w) = (\alpha \wedge \beta) |w - w_0|^{2m} + \sigma(|w - w_0|^{2m+1})$$

quando $w \rightarrow w_0$. Isto implica que $N(w)$ tende a um vetor limite N_0 quando $w \rightarrow w_0$, isto é:

$$\lim_{w \rightarrow w_0} N(w) = N_0 = \frac{\alpha \wedge \beta}{|\alpha \wedge \beta|}.$$

Consequentemente a aplicação de Gauss de uma superfície mínima não constante $X(w)$, $w \in \Omega$ é bem definida em todo Ω como uma aplicação contínua em S^2 , inclusive nos seus pontos de ramificação.

Vamos coletar alguns destes resultados:

4.1 Proposição:

Se $w_0 \in \Omega$ é um ponto de ramificação de uma superfície mínima não constante $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, então existe um vetor $A \in \mathbf{C}^3$, $A \neq 0$, e um inteiro $m \geq 1$, chamado ordem do ponto de ramificação w_0 , tal que vale:

$$X_w(w) = A(w - w_0)^m + \sigma(|w - w_0|^{m+1})$$

$$X(w) = X_0 + \operatorname{Re}\{B(w - w_0)^{m+1} + \sigma(|w - w_0|^{m+2})\}$$

quando $w \rightarrow w_0$ onde $B = \frac{2}{m+1}A$, $A = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)$ é um vetor isotrópico em \mathbf{C}^3 ; isto é: $\langle A, A \rangle = 0$ ou $|\alpha|^2 = |\beta|^2 > 0$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^3$. A normal $N(w)$ tende ao limite $N_0 = \frac{\alpha \wedge \beta}{|\alpha \wedge \beta|}$, e o plano tangente de X em w converge a uma posição limite $w \rightarrow w_0$. Consequentemente a imagem esférica $N(w)$ é uma aplicação contínua de Ω em S^2 .

Queremos agora expressar X como uma forma normal que iremos explicar em termos dos pontos de ramificação. Sejam

$$a := \frac{|\alpha|}{m+1} = \frac{|\beta|}{m+1}, e_1 := \frac{\alpha}{|\alpha|}, e_2 := \frac{\beta}{|\beta|}, e_3 := e_1 \wedge e_2 = N_0.$$

Então podemos reescrever a fórmula

$$\begin{aligned} X(w) &= X_0 + \operatorname{Re}\left\{\frac{\alpha-i\beta}{m+1}(w-w_0)^{m+1} + \sigma(|w-w_0|^{m+2})\right\} \Rightarrow X(w) = \\ &X_0 + \frac{|\alpha|}{(m+1)|\alpha|}\operatorname{Re}(w-w_0)^{m+1} + \frac{|\beta|}{(m+1)|\beta|}\operatorname{Im}(w-w_0)^{m+1} + \sigma(|w-w_0|^{m+2}) \Rightarrow \\ X(w) &= X_0 + ae_1\operatorname{Re}(w-w_0)^{m+1} + ae_2\operatorname{Im}(w-w_0)^{m+1} + \sigma(|w-w_0|^{m+2}). \end{aligned}$$

Se rodarmos os eixos de um sistema de coordenadas dado em \mathbf{R}^3 tal que e_1, e_2, e_3 estejam na direção de novos eixos positivos x, y, z respectivamente, então obtemos:

$$\begin{aligned} x(w) + iy(w) &= (x_0 + iy_0) + a(w-w_0)^{m+1} + \sigma(|w-w_0|^{m+2}) \\ z(w) &= z_0 + \sigma(|w-w_0|^{m+2}). \end{aligned}$$

Esta forma normal de uma superfície mínima $X(w) = (x(w), y(w), z(w))$ mostra que X se comporta em uma vizinhança dos seus pontos de ramificação como um ponto de ramificação de ordem m -ésima de uma superfície de Riemann. Chamamos o inteiro m de ordem do ponto de ramificação w_0 de X . Se definimos $m = 0$ para pontos regulares, podemos considerar pontos regulares como pontos de ramificação de ordem zero.

Agora queremos obter um limitante inferior para a área de superfícies mínimas. Suponha que $B_R(p)$ seja uma bola em \mathbf{R}^3 , de centro p que pertence ao gráfico de alguma superfície mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ que corta de um lado para outro $B_R(p)$; isto é, não existe pontos de bordo de $X(\Omega)$ dentro de $B_R(p)$. Seja w_0 um ponto de ramificação de X de ordem m e suponha $p = X(w_0)$. Então a forma normal

$$\begin{aligned} x(w) + iy(w) &= (x_0 + iy_0) + a(w-w_0)^{m+1} + \sigma(|w-w_0|^{m+2}) \\ z(w) &= z_0 + \sigma(|w-w_0|^{m+2}), \end{aligned}$$

sugere que a área de $X(\Omega) \cap B_R(p)$ é maior ou igual a área de $m+1$ discos equatoriais planos de $B_R(p)$, desde que o raio R seja suficientemente pequeno.

De fato, iremos demonstrar que:

4.2 Teorema:

Suponha que $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ é uma superfície mínima não constante definida em um domínio simplesmente conexo limitado Ω . Além

disso, seja $w_0 \in \Omega$ um ponto de ramificação de ordem $m \geq 0$, $X_0 = X(w_0)$ e seja $R > 0$ algum número tal que $\liminf_{k \rightarrow \infty} |X(w_k)| \geq R$ para toda sequência $(w_k) \in \Omega$ com $\text{dist}(w_k, \partial\Omega) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Então a área $A(X)$ de uma superfície X satisfaz:

$$A(X) \geq (m+1)\pi(R^2 - |X_0|^2).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, a imagem de X pertence ao plano que passa pelo ponto X_0 e é perpendicular a reta que passa por 0 e X_0 .

Demonstração

Como Ω pode ser levado por uma aplicação conforme sobre o disco unitário tal que w_0 é transformado na origem, podemos assumir que $w_0 = 0$, $X_0 = X(0)$, $\Omega = \{w : |w| < 1\}$. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ uma superfície mínima não constante. Pela Proposição 2.3 podemos encontrar uma curva isotrópica $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ satisfazendo $f(0) = X_0 = X(0)$ e $f = X + iX^*$ onde X^* é a superfície conjugada de X com $X^*(0) = 0$. Podemos representar $f(w)$ pela série de Taylor:

$$f(w) = X_0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k w^k, A_k \in \mathbf{C}^3$$

que é convergente para $|w| < 1$. Aplicando a fórmula integral de Cauchy [C] para a função holomórfica $F(w) := \langle f(w), f(w) \rangle$, $|w| < 1$ com $w = re^{i\theta}$, $\forall r \in (0, 1)$ temos:

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi F(0).$$

Agora observe que:

$$F(0) = \langle f(0), f(0) \rangle = \langle X_0, X_0 \rangle = |X_0|^2$$

$$F(re^{i\theta}) = \langle f(re^{i\theta}), f(re^{i\theta}) \rangle = \langle X(re^{i\theta}) + iX^*(re^{i\theta}), X(re^{i\theta}) + iX^*(re^{i\theta}) \rangle = |X(re^{i\theta})|^2 - |X^*(re^{i\theta})|^2.$$

Logo substituindo em (1) temos:

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} |X(re^{i\theta})|^2 d\theta - \int_0^{2\pi} |X^*(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi |X_0|^2.$$

Por outro lado como $|z|^2 = |\text{Re}z|^2 + |\text{Im}z|^2$, $\forall z \in \mathbf{C}$,

$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |X(re^{i\theta})|^2 d\theta + \int_0^{2\pi} |X^*(re^{i\theta})|^2 d\theta$. Agora como $|f(re^{i\theta})|^2 = |X_0|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k}$, temos: $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \{ |X_0|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \}$. Comparando obtemos:

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |X(re^{i\theta})|^2 d\theta + \int_0^{2\pi} |X^*(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \{ |X_0|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \}.$$

Somando (2) com (3) temos que:

$$2 \int_0^{2\pi} |X(re^{i\theta})|^2 d\theta = 4\pi |X_0|^2 + 2\pi \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \Rightarrow$$

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} |X(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi |X_0|^2 + \pi \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k}.$$

Chamando $\mu(r) := \min_{|w|=r} |X(w)|^2$ temos que para $w = re^{i\theta}$

$$\mu(r) \leq |X(w)|^2 = |X(re^{i\theta})|^2 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \mu(r) d\theta \leq \int_0^{2\pi} |X(re^{i\theta})|^2 d\theta \Rightarrow$$

$$2\pi\mu(r) \leq 2\pi |X_0|^2 + \pi \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \Rightarrow$$

$$(5) \quad \mu(r) \leq |X_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k}.$$

Além disso a área $A(r)$ da imagem de $\{w : |w| < r\}$ sobre a aplicação X é dada por:

$$A(r) = \frac{1}{2} \int_{|w|<r} |\nabla X|^2 dudv = \frac{1}{2} \int_{|w|<r} |f'(w)|^2 dudv \Rightarrow$$

$$(6) \quad A(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^r |f'(te^{i\theta})|^2 t dt d\theta.$$

Agora como $f(w) = X_0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k w^k$, $A_k \in \mathbf{C}^3$ temos:

$$f'(w) = \sum_{k=m+1}^{\infty} k A_k w^{k-1} \Rightarrow |f'(w)|^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} k^2 |A_k|^2 |w|^{2(k-1)}.$$

Substituindo este resultado em (6) obtemos:

$$A(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \sum_{k=m+1}^{\infty} k^2 |A_k|^2 t^{2(k-1)} t dt d\theta =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_0^r k^2 |A_k|^2 t^{2k-1} dt d\theta =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_0^{2\pi} k^2 |A_k|^2 \frac{t^{2k}}{2k} \Big|_0^r d\theta = \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{k}{2} |A_k|^2 r^{2k} d\theta =$$

$$\frac{\pi}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} k |A_k|^2 r^{2k}. \text{ Portanto}$$

$$(7) \quad A(r) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} k |A_k|^2 r^{2k}.$$

Observe que de (7) temos:

$$(8) \quad \frac{\pi}{2} (m+1) |A_{m+1}|^2 r^{2(m+1)} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} k |A_k|^2 r^{2k} = A(r)$$

E de (5) podemos escrever:

$$\mu(r) \leq |X_0|^2 + \frac{1}{2} |A_{m+1}|^2 r^{2(m+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \Rightarrow \pi(m+1)\mu(r) \leq$$

$$\pi(m+1) |X_0|^2 + \frac{\pi}{2} (m+1) |A_{m+1}|^2 r^{2(m+1)} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} (m+1) |A_k|^2 r^{2k} \Rightarrow$$

$$(9) \quad -\pi(m+1) |X_0|^2 - \frac{\pi}{2}(m+1) |A_{m+1}|^2 r^{2(m+1)} - \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} (m+1) |A_k|^2 r^{2k} \leq -\pi(m+1)\mu(r).$$

Somando (8) e (9) obtemos

$$-\pi(m+1) |X_0|^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} k |A_k|^2 r^{2k} - \frac{\pi}{2}(m+1) \sum_{k=m+2}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \leq A(r) - \pi(m+1)\mu(r) \Rightarrow$$

$$(10) \quad \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} (k - (m+1)) |A_k|^2 r^{2k} - \pi(m+1) |X_0|^2 \leq A(r) - \pi(m+1)\mu(r).$$

Seja $R > 0$ tal que $\liminf_{k \rightarrow \infty} |X(w_k)| \geq R, \forall$ sequência (w_k) de pontos $w_k \in \Omega$ com $\text{dist}(w_k, \partial\Omega) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Agora como $\mu(r) = \min_{|w|=r} |X(w)|^2$ temos $\liminf_{r \rightarrow 1} \mu(r) = \liminf_{r \rightarrow 1} \min_{|w|=r} |X(w)|^2 \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} |X(w_k)|^2 \geq R^2$.

Tomando o limite com $r \rightarrow 1$ em (10) temos o seguinte resultado:

$$(11) \quad \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} (k - (m+1)) |A_k|^2 + \pi(m+1)(R^2 - |X_0|^2) \leq \lim_{r \rightarrow 1} (A(r) - \pi(m+1)\mu(r)) = A(X).$$

Como $\frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} (k - (m+1)) |A_k|^2 \geq 0$ temos em (11)

$$\pi(m+1)(R^2 - |X_0|^2) \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=m+2}^{\infty} (k - (m+1)) |A_k|^2 +$$

$$\pi(m+1)(R^2 - |X_0|^2) \leq A(X).$$

Ou seja $(m+1)\pi(R^2 - |X_0|^2) \leq A(X)$ e a desigualdade da proposição está provada.

Suponha agora que vale a igualdade $(m+1)\pi(R^2 - |X_0|^2) = A(X)$. Então deduzimos de (11) que $A_k = 0$ para $k \geq m+2$. Assim de $f(w) = X_0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k w^k$ temos $f(w) = X_0 + A_{m+1} w^{m+1}$. Seja $A_{m+1} = a + ib$, com $a, b \in \mathbf{R}^3$. Como f é isotrópica, $\langle f', f' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (m+1)A_{m+1}w^m, (m+1)A_{m+1}w^m \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle A_{m+1}, A_{m+1} \rangle = 0 \Leftrightarrow |a|^2 - |b|^2 + 2i \langle a, b \rangle = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|, \langle a, b \rangle = 0$. Então os vetores $e_1 := \frac{a}{|a|}$ e $e_2 := \frac{-b}{|b|}$ são ortonormais. Agora de $f(w) = X_0 + A_{m+1} w^{m+1}$, temos:

$$X(w) = X_0 + \text{Re}(A_{m+1} w^{m+1}) \Rightarrow X(w) = X_0 + a \text{Re}(w^{m+1}) - b \text{Im}(w^{m+1})$$

$$\Rightarrow X(w) = X_0 + a \frac{|a|}{|a|} \text{Re}(w^{m+1}) + (-b) \frac{|b|}{|b|} \text{Im}(w^{m+1}) \Rightarrow$$

$$X(w) = X_0 + |a| e_1 \text{Re}(w^{m+1}) + |b| e_2 \text{Im}(w^{m+1}) \Rightarrow$$

$$X(w) = X_0 + |a| \{e_1 \text{Re}(w^{m+1}) + e_2 \text{Im}(w^{m+1})\} \Rightarrow$$

$$(12) \quad X(w) = X_0 + |a| r^{m+1} [e_1 \cos(m+1)\theta + e_2 \sin(m+1)\theta].$$

Dáí:

$$X_r(w) = (m+1) |a| r^m e_1 \cos(m+1)\theta + (m+1) |a| r^m e_2 \sin(m+1)\theta.$$

$$X_\theta(w) = -(m+1) |a| r^{m+1} e_1 \sin(m+1)\theta + (m+1) |a| r^{m+1} e_2 \cos(m+1)\theta.$$

$$X_r \wedge X_\theta = (0, 0, (m+1)^2 |a|^2 r^{2m+1}). \text{ Assim}$$

$$A(r) = \int_\Omega |X_r \wedge X_\theta| dr d\theta = \int_0^r \int_0^{2\pi} (m+1)^2 |a|^2 r^{2m+1} d\theta dr =$$

$$2\pi(m+1)^2 |a|^2 \frac{r^{2m+2}}{2(m+1)}.$$

Portanto

$$A(r) = \pi(m+1) |a|^2 r^{2m+1} \Rightarrow A(X) = \lim_{r \rightarrow 1} A(r) = \pi(m+1) |a|^2.$$

Agora como assumimos $(m+1)\pi(R^2 - |X_0|^2) = A(X)$ concluimos que:

$$(13) \quad |a|^2 = R^2 - |X_0|^2.$$

Agora seja $e_3 := e_1 \wedge e_2$, assim e_1, e_2, e_3 formam uma base ortonormal de \mathbf{R}^3 , e então podemos escrever $X_0 = \sum_{k=1}^3 c_k e_k = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$. Fazendo $r = 1$ e substituindo em (12) obtemos:

$$|X(e^{i\theta})|^2 = |e_1(c_1 + |a| \cos(m+1)\theta) + e_2(c_2 + |a| \sin(m+1)\theta) + c_3 e_3|^2 =$$

$$(c_1 + |a| \cos(m+1)\theta)^2 + (c_2 + |a| \sin(m+1)\theta)^2 + c_3^2 =$$

$$|X_0|^2 + |a|^2 + 2|a|(c_1 \cos(m+1)\theta + c_2 \sin(m+1)\theta). \text{ Agora por (13) temos:}$$

$|X(e^{i\theta})|^2 = R^2 + 2|a|(c_1 \cos(m+1)\theta + c_2 \sin(m+1)\theta)$. Então exceto se $c_1 = c_2 = 0$ encontramos um ângulo θ tal que $|X(e^{i\theta})| < R$ o que contradiz a hipótese $\liminf_{k \rightarrow \infty} |X(w_k)| \geq R$. Portanto devemos ter $c_1 = c_2 = 0$, ou seja, $X_0 = c_3(e_1 \wedge e_2)$, e assim a fórmula (12) mostra que $X(w)$ pertence ao plano perpendicular ao vetor $X_0 = c_3(e_1 \wedge e_2)$ e passa pelo ponto X_0 .

Reciprocamente introduzindo um sistema de coordenadas adequado $x, y, z \in \mathbf{R}^3$ obtemos a forma normal

$$x + iy = aw^{m+1}$$

$z = 0$ com $|w| < 1$ onde $|a|^2 = R^2 - |X_0|^2$. A igualdade segue do fato de $A(X) = \pi(m+1)|a|^2$. ■

Capítulo 5

Fórmulas de representação para superfícies mínimas

Neste capítulo primeiramente determinaremos todas as aplicações holomórficas (global) $\phi : \Omega \rightarrow C^3$ satisfazendo

$$(1) \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0.$$

Neste sentido chegaremos nas fórmulas de representação de Enneper - Weierstrass para superfícies mínimas que, em particular, podem ser usadas para estabelecer explicitamente expressões para a imagem normal, a curvatura de Gauss, para as linhas assintóticas e para as linhas de curvatura para superfícies mínimas.

5.1 Lema

Se $\mu(w)$ é uma função holomórfica e $\vartheta(w)$ é função meromórfica em domínio $\Omega \subset R^2 \cong C$ tal que $\mu(w) \not\equiv 0$ e μ tem zero de ordem pelo menos $2n$ onde ϑ tem polo de ordem n , então as funções

$$(2) \quad \phi_1 = \frac{1}{2}\mu(1 - \vartheta^2), \phi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2), \phi_3 = \mu\vartheta,$$

são funções holomórficas em Ω , e a tripla $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ satisfaz (1) e $\phi(w) \not\equiv 0$. Reciprocamente toda tripla $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \not\equiv 0$ de funções holomórficas em Ω satisfazendo (1) pode ser escrita na forma (2) se, e somente se, $\phi_1 - i\phi_2 \neq 0$.

Demonstração:

Seja μ função holomórfica com w_0 zero de ordem $2n$, assim $\mu(w_0) = (w - w_0)^{2n}h(w)$ com h holomórfica. E seja ϑ função meromórfica com w_0 polo de ordem n , daí $\vartheta(w_0) = \frac{F(w)}{(w-w_0)^n}$, F holomórfica. Assim $(\mu\vartheta)(w_0) = (w - w_0)^n h(w) F(w)$ então $\mu\vartheta$ é função holomórfica. Portanto ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 definidas

como em (2) são funções holomórficas. Como $\mu(w) \neq 0$ é claro que $\phi(w) \neq 0$.

Mostremos que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 satisfazem (1). De fato:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \frac{1}{4}\mu^2(1 - \vartheta^2)^2 + \left(\frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)\right)^2 + \mu^2\vartheta^2 = -\mu^2\vartheta^2 + \mu^2\vartheta^2 = 0.$$

Mostremos a recíproca. Suponha que $\phi \neq 0$, satisfaz (1) e pode ser escrita na forma (2). De (1),

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3) \quad (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) + \phi_3^2 = 0$$

Se supomos $\phi_1 - i\phi_2 \equiv 0$ então $\phi_3 = 0 \Leftrightarrow \mu\vartheta = 0 \Rightarrow \mu = 0$ ou $\vartheta = 0$. Se $\mu = 0 \Rightarrow \phi(w) = 0$, o que não ocorre. Logo teremos $\vartheta = 0 \Rightarrow \phi_1 = \frac{\mu}{2}, \phi_2 = i\frac{\mu}{2} \Rightarrow \phi_1 + i\phi_2 = 0$. Consequentemente $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ o que contradiz $\phi(w) \neq 0$. Logo $\phi_1 - i\phi_2 \neq 0$.

Suponha $\phi_1 - i\phi_2 \neq 0$. Então $\mu := \phi_1 - i\phi_2, \vartheta := \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$ define uma função holomórfica μ e uma meromórfica ϑ em Ω , satisfazendo:

$$\mu\vartheta = (\phi_1 - i\phi_2)\frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = \phi_3 \Rightarrow \phi_3 = \mu\vartheta. \text{ Além disso (3) implica:}$$

$$(4) \quad \phi_1 + i\phi_2 = \frac{-\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -(\phi_1 - i\phi_2)\frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = -\mu\vartheta^2.$$

Somando (4) e $\mu = \phi_1 - i\phi_2$, temos $2\phi_1 = -\mu\vartheta^2 + \mu \Rightarrow \phi_1 = \frac{\mu}{2}(1 - \vartheta^2)$.

Subtraindo (4) de $\mu = \phi_1 - i\phi_2$ obtemos $2i\phi_2 = -\mu\vartheta^2 - \mu \Rightarrow \phi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)$.

Finalmente a relação $\mu\vartheta^2 = -(\phi_1 + i\phi_2)$ mostra que a função $\mu\vartheta^2$ é holomórfica.

Além disso, se $w_0 \in \Omega$ é um polo de ordem n de ϑ , então w_0 é zero de ordem pelo menos $2n$ para μ . ■

5.2 Teorema: Fórmula da representação de Enneper - Weierstrass.

Para toda superfície mínima não-planar $X(w) = (x(w), y(w), z(w)), w \in \Omega$, definida em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbf{C}$, existe uma função holomórfica μ e uma meromórfica ϑ em Ω com $\mu \neq 0, \vartheta \neq 0$ tal que $\mu\vartheta^2$ é holomórfica em Ω , e

$$(5) \quad \begin{cases} x(w) = x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{\mu}{2}(1 - \vartheta^2)d\xi \\ y(w) = y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)d\xi \\ z(w) = z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \mu\vartheta d\xi, \forall w, w_0 \in \Omega, X_0 = (x_0, y_0, z_0) = X(w_0). \end{cases}$$

Reciprocamente, duas funções μ, ϑ como acima define por (5) uma superfície mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ desde que Ω seja domínio simplesmente conexo.

Demonstração

Se $X(w)$, $w \in \Omega$ domínio simplesmente conexo é uma superfície mínima, então existe uma função isotrópica $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ tal que $X = \operatorname{Re} f$ e $\langle f', f' \rangle = 0 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ onde $\phi = f' = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ com ϕ holomórfica. Logo defina:

$$(6) \quad \mu = \phi_1 - i\phi_2 \text{ e } \vartheta = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Daí temos μ holomórfica e ϑ meromórfica, e ϑ está bem definida pois $\phi \neq 0 \Rightarrow \phi_1 - i\phi_2 \neq 0$. Como $X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi(w)dw$ de (6) obtemos $\phi_1 = \frac{\mu}{2}(1 - \vartheta^2)$, $\phi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)$, $\phi_3 = \mu\vartheta$, e assim:

$$x(w) = x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{\mu}{2}(1 - \vartheta^2)d\xi$$

$$y(w) = y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)d\xi$$

$$z(w) = z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \mu\vartheta d\xi.$$

Para a recíproca, considere μ, ϑ como em (6), e daí $\phi_1 = \frac{\mu}{2}(1 - \vartheta^2)$, $\phi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)$, $\phi_3 = \mu\vartheta$ e de (5), temos:

$$x(w) = x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi_1(w)dw$$

$$y(w) = y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi_2(w)dw$$

$$z(w) = z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi_3(w)dw,$$

assim $X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi(w)dw$ define uma superfície mínima.

■

Observação 7 Se X é superfície mínima dada por (5) então w é ponto de ramificação de X se μ e $\mu\vartheta^2$ são nulas em w ; além disso como $\phi = f'$ e $\Lambda = \frac{1}{2}|f'|^2$ deduzimos que $\Lambda = \frac{1}{2}|(\frac{1}{2}\mu(1-\vartheta^2), \frac{i}{2}\mu(1+\vartheta^2), \mu\vartheta)|^2 = \frac{1}{4}|\mu|^2(1+|\vartheta|^2)^2$. Logo o conjunto de pontos regulares pode ser expresso por $\Omega' = \{w \in \Omega : |\mu(w)|(1+|\vartheta(w)|^2) \neq 0\}$.

5.3 Expressões para imagem esférica, curvatura de Gauss, linhas assintóticas e linhas de curvatura.

Deduzamos explicitamente expressões para a imagem esférica N e para a curvatura de Gauss de uma superfície mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por $X(w) =$

$Ref(w)$ com uma curva isotrópica $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ satisfazendo $f' = X_u - iX_v = \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\frac{1}{2}\mu(1-\vartheta^2), \frac{i}{2}\mu(1+\vartheta^2), \mu\vartheta)$, onde μ, ϑ satisfazem as hipóteses do teorema 5.2. Vimos na seção 2.9 que $X_u \wedge X_v = Im(\phi_2\bar{\phi}_3, \phi_3\bar{\phi}_1, \phi_1\bar{\phi}_2)$.

Assim

$$\begin{aligned} \phi_2\bar{\phi}_3 &= \frac{i}{2}\mu(1+\vartheta^2)\bar{\mu}\bar{\vartheta} = \frac{i}{2}|\mu|^2(\bar{\vartheta} + |\vartheta|^2\vartheta), \text{ logo} \\ Im(\phi_2\bar{\phi}_3) &= \left(\frac{|\mu|^2}{2}Im(i\bar{\vartheta}) + \frac{|\mu|^2|\vartheta|^2}{2}Im(i\vartheta)\right) = \frac{|\mu|^2}{2}Re\bar{\vartheta} + |\mu|^2\frac{|\vartheta|^2}{2}Re\vartheta = \frac{1}{4}|\mu|^2(1 + |\vartheta|^2)2Re\vartheta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3\bar{\phi}_1 &= \mu\vartheta\frac{\bar{\mu}}{2}(1-\bar{\vartheta}^2) = \frac{|\mu|^2\vartheta}{2} - \frac{|\mu|^2}{2}|\vartheta|^2\bar{\vartheta}, \text{ logo} \\ Im(\phi_3\bar{\phi}_1) &= \frac{|\mu|^2}{2}Im\vartheta - \frac{|\mu|^2}{2}|\vartheta|^2Im\bar{\vartheta} = \frac{1}{4}|\mu|^2(1 + |\vartheta|^2)2Im\vartheta. \end{aligned}$$

$$\phi_1\bar{\phi}_2 = \frac{\mu}{2}(1-\vartheta^2)\left(\frac{-i}{2}\bar{\mu}(1+\vartheta^2)\right) = \frac{-i}{4}|\mu|^2(1-\vartheta^2)(1+\vartheta^2) = \frac{i}{4}|\mu|^2(|\vartheta|^2-1)(1+|\vartheta|^2),$$

logo

$$Im(\phi_1\bar{\phi}_2) = \frac{1}{4}|\mu|^2(1 + |\vartheta|^2)(|\vartheta|^2 - 1).$$

Portanto:

$$X_u \wedge X_v = \frac{1}{4}|\mu|^2(1 + |\vartheta|^2)(2Re\vartheta, 2Im\vartheta, |\vartheta|^2 - 1).$$

Agora, em virtude de $\Lambda = \frac{1}{4}|\mu|^2(1 + |\vartheta|^2)^2$ obtemos a representação

$$N = \frac{1}{1 + |\vartheta|^2}(2Re\vartheta, 2Im\vartheta, |\vartheta|^2 - 1)$$

para a imagem esférica $N : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$ de X . Para calcular K , primeiro observemos que $f' = \mu(\frac{1}{2}(1-\vartheta^2), \frac{i}{2}(1+\vartheta^2), \vartheta) \Rightarrow f'' = \frac{\mu'}{\mu}f' + \mu\vartheta'g$ onde $g := (-\vartheta, i\vartheta, 1)$ em $\{w \in \Omega; \mu(w) \neq 0\}$. Então $\langle N, g \rangle = \frac{1}{1+|\vartheta|^2}(-\vartheta 2Re\vartheta + i2\vartheta Im\vartheta + |\vartheta|^2 - 1) = -1$. Como os zeros de μ são isolados e $\langle N, f' \rangle = 0$, obtemos: $\langle N, f'' \rangle = -\mu\vartheta'$. Agora de $l = \langle f'', N \rangle$ temos que $l = e - if = -\mu\vartheta'$. Os pontos de ramificação de $X(w)$ são singularidades removíveis de $l(w) = -\mu(w)\vartheta'(w)$ desde que $l(w)$ permaneça limitada se w aproxima de tal ponto. Portanto $l(w)$ é holomórfica em Ω . Logo de $K = -\frac{|l|^2}{\Lambda^2}$ segue que:

$$K = -\left(\frac{4|\vartheta'|}{|\mu|(1 + |\vartheta|^2)^2}\right)^2,$$

onde K é a curvatura de Gauss de X em $\Omega' = \{w \in \Omega; \Lambda(w) \neq 0\}$. Logo da proposição 2.12, temos que uma curva γ descreve uma linha assintótica de uma superfície mínima X se, e somente se $Re[\mu(\gamma)\vartheta'(\gamma)(\gamma')^2] = 0$; e as linhas de curvatura são caracterizadas por $Im[\mu(\gamma)\vartheta'(\gamma)(\gamma')^2] = 0$.

5.4 Interpretação geométrica da função $\vartheta(w)$

Identifiquemos o plano complexo $\mathbf{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbf{R}\}$ com o plano $\{(x, y, z); z = 0\}$ em \mathbf{R}^3 e seja $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ uma compactificação de \mathbf{C} com

um ponto no infinito. Introduzamos a esfera de Riemann $S^2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e denote por $p = (0, 0, 1)$ o polo norte. Então a projeção estereográfica

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{S}^2 &\rightarrow \bar{\mathbf{C}} \\ q = (a, b, c) &\mapsto \sigma(q) = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}\right) \end{aligned}$$

é uma função injetora que associa a cada ponto $q \in \mathbf{S}^2, q \neq p$ um ponto w no plano-xy que é a intercessão da reta passando por q e p interceptando o plano-xy. Considere a aplicação inversa,

$$\begin{aligned} \rho : \bar{\mathbf{C}} &\rightarrow \mathbf{S}^2 \\ w &\mapsto q = (a, b, c) = \rho(w), \text{ onde} \end{aligned}$$

$$(7) \quad a = \frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, b = \frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, c = \frac{\xi^2+\eta^2-1}{1+\xi^2+\eta^2}, \rho(\infty) = p.$$

A fórmula (7) pode ser escrita como:

$$(8) \quad \rho(w) = \frac{1}{1+|\omega|^2}(2\operatorname{Re}\omega, 2\operatorname{Im}\omega, |\omega|^2 - 1), \omega = \xi + i\eta$$

e vemos que $\rho(w) \rightarrow (0, 0, 1)$ quando $|\omega| \rightarrow \infty$. Comparando a fórmula para a imagem esférica $N(w)$ de uma superfície mínima não -constante $X(w), w \in \Omega$ com a expressão (8) vemos que:

$$N(w) = \rho(\vartheta(w)) \text{ e então } \vartheta(w) = \sigma(N(w)).$$

Isto é, a função meromórfica $\vartheta : \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$ é, nada mais que a projeção estereográfica da função normal N da superfície mínima X . Em particular, $w \in \Omega$ é polo de ϑ se, e somente se, $N(w) = p$. Além disso:

$$\begin{aligned} \vartheta : \Omega &\rightarrow \Omega^* = \vartheta(\Omega) \\ w &\mapsto \omega = \vartheta(w) \end{aligned}$$

é uma função bilomórfica se as duas condições são satisfeitas:

i) $N(w) \neq p \forall w \in \Omega$

ii) a aplicação $N : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$ é injetora.

Se ϑ é bilomórfica, então $\vartheta'(w) \neq 0, \forall w \in \Omega$, e de $K = -\left(\frac{4|\vartheta'|}{|\mu|(1+|\vartheta|^2)^2}\right)^2$ temos $K(w) < 0$ em Ω , ou seja, X não tem pontos umbílicos.

Suponha $\vartheta : \Omega \rightarrow \Omega^*$ bilomórfica e seja $\tau : \Omega^* \rightarrow \Omega$ sua imagem inversa; $w = \tau(\omega), \omega \in \Omega^*$. Então a reparametrização $Y = X \circ \tau$ da superfície mínima X é novamente uma superfície mínima. Vamos introduzir a função holomórfica em Ω^*

$$\mathfrak{S}(\omega) := \frac{1}{2} \frac{\mu(\tau(\omega))}{\vartheta'(\tau(\omega))} = \frac{1}{2} \tau'(\omega) \mu(\tau(\omega)).$$

Então deduzimos de (5) a seguinte fórmula de representação de Weierstrass:

$$Y(\omega) = (y^1(\omega), y^2(\omega), y^3(\omega)) \text{ onde:}$$

$$\begin{aligned} y^1(\omega) &= y_0^1 + \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\mu}{2}(\tau(\omega))(1 - \vartheta(\tau(\omega))^2)\tau'(\omega)d\omega = y_0^1 + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \omega^2)\mathfrak{S}(\omega)d\omega \\ y^2(\omega) &= y_0^2 + \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{i}{2}\mu(\tau(\omega))(1 + \vartheta(\tau(\omega))^2)\tau'(\omega)d\omega = y_0^2 + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} i(1 + \omega^2)\mathfrak{S}(\omega)d\omega \\ y^3(\omega) &= y_0^3 + \int_{\omega_0}^{\omega} \mu(\tau(\omega))\vartheta(\tau(\omega))\tau'(\omega)d\omega = y_0^3 + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} 2\omega\mathfrak{S}(\omega)d\omega, \end{aligned}$$

com $\omega, \omega_0 \in \Omega^*$ e $Y(\omega_0) = X(\omega_0) = (y_0^1, y_0^2, y_0^3)$.

Em vez de duas funções arbitrárias μ e ϑ , a expressão anterior envolve somente uma função arbitrária $\mathfrak{S}(\omega)$ em um domínio simplesmente conexo Ω^* , além disso, define uma superfície mínima não-constante $Y : \Omega^* \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Vamos coletar os resultados principais para esta fórmula de representação. Primeiro observe que esta recai em (5) se mudarmos ω_0 por w_0 , ω por w , $Y(\omega)$ por $X(w)$ e definindo $\mu(w) := 2\mathfrak{S}(w)$ e $\vartheta(w) := w$. Então temos o seguinte resultado:

5.5 Teorema

Seja $\mathfrak{S}(w)$ uma função holomórfica em um domínio simplesmente conexo Ω de \mathbf{C} , $\mathfrak{S}(w) \neq 0$, e seja

$$(9) \quad \phi(w) = ((1 - w^2)\mathfrak{S}(w), i(1 + w^2)\mathfrak{S}(w), 2w\mathfrak{S}(w)).$$

Então

$$(10) \quad X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi(w)dw, w \in \Omega$$

define uma superfície mínima não constante $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ com a normal à superfície dada por: $N(w) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)$, $w = u + iv$. Se σ denota a projeção estereográfica então temos $\sigma(N(w)) = w$. O elemento de reta $ds = |dX|$ da superfície X é dado por $ds^2 = \Lambda(w)\{du^2 + dv^2\}$ onde $\Lambda(w) = \frac{1}{4}|\mathfrak{S}(w)|^2(1 + u^2 + v^2)^2$, $w = u + iv$. Então o conjunto dos pontos regulares de uma superfície mínima X é dado por $\Omega' = \{w \in \Omega : \mathfrak{S}(w) \neq 0\}$ e sua curvatura de Gauss é dada por $K(w) = -\frac{4}{|\mathfrak{S}(w)|^2(1+u^2+v^2)^4}$. Os coeficientes e, f, g da segunda forma fundamental satisfazem $e + g = 0$ e podem ser obtidos da função holomórfica $l(w) = e(w) - if(w) = -2\mathfrak{S}(w)$, $w \in \Omega$. Os pontos de ramificação $w \in \Omega$ de X são os zeros de uma função holomórfica $\mathfrak{S}(w)$, $w \in \Omega$, e X não tem pontos umbílicos. As linhas assintóticas são caracterizadas pela equação $\operatorname{Re}\mathfrak{S}(w)(dw)^2 = 0$ e as linhas de curvatura são descritas por

$Im\mathfrak{S}(w)(dw)^2 = 0$. As superfícies mínimas associadas $Z(w, \theta)$ de $X(w)$ são dadas por

$$Z(w, \theta) = X_0 + Re \int_{w_0}^w e^{-i\theta} \phi(w) dw;$$

suas funções de Weierstrass $\tilde{\mathfrak{S}}(w, \theta)$ são simplesmente $\tilde{\mathfrak{S}}(w, \theta) = e^{-i\theta} \mathfrak{S}(w)$.

Inversamente se $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ é uma função isotrópica em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subseteq \mathbf{C}$, então a superfície mínima $\tilde{X}(w) = X_0 + Re \int_{w_0}^w f'(w) dw, w \in \tilde{\Omega}$ tem uma representação equivalente $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ em $\Omega := \sigma(N(\tilde{\Omega}))$ dada por (9), (10) desde que sua normal satisfaça as condições:

- i) $\tilde{N}(w) \neq$ polo norte de $\mathbf{S}^2, \forall w \in \tilde{\Omega}$
- ii) $\tilde{N} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbf{S}^2$ é injetora.

Observação 8 Para superfícies mínimas podemos obter K de um modo mais simples, basicamente voltando a definição de K . Primeiro observemos que a imagem esférica $N(w) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1), w = u + iv$, é dada por parâmetros conformes u, v ,

$$(11) \quad |N_u(w)|^2 = |N_v(w)|^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} \quad e \quad \langle N_u(w), N_v(w) \rangle = 0.$$

De fato:

$$N_u = \frac{-2u}{(1+u^2+v^2)^2}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1) + \frac{1}{1+u^2+v^2}(2, 0, 2u) \quad \text{então:}$$

$$|N_u|^2 = \langle N_u, N_u \rangle = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^4} \{(-u^2 + v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2\} = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^4} ((1 + u^2 + v^2)^2) = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$N_v = \frac{-2v}{(1+u^2+v^2)^2}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1) + \frac{1}{1+u^2+v^2}(0, 2, 2v) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}(-2vu, 1 + u^2 - v^2, 2v), \quad \text{e daí:}$$

$$|N_v|^2 = \langle N_v, N_v \rangle = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^4} \{4v^2u^2 + (1 + u^2 - v^2)^2 + 4v^2\} = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^4} ((1 + u^2 + v^2)^2) = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

E vale:

$$\langle N_u, N_v \rangle = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^4} (-2uv(1 - u^2 + v^2) - 2uv(1 + u^2 + v^2) + 4uv) = 0.$$

Observe que N é a inversa $\rho = \sigma^{-1}$ da projeção estereográfica $\sigma : \mathbf{S}^2 \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$ restrita a Ω . De (11) obtemos a 3ª forma fundamental de X expressa por:

$$III(du, dv) = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2} \{du^2 + dv^2\}.$$

Agora de $ds^2 = \Lambda(w)\{du^2 + dv^2\}$ segue que $I(du, dv) = \Lambda(w)\{du^2 + dv^2\}$. Por outro lado de [DHKW] pág. 17 temos que $III(du, dv) = -KI(du, dv)$, e daí,

$$K(w) = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2 \Lambda(w)} = -\frac{4}{|\mathfrak{F}(w)|^2 (1 + u^2 + v^2)^4}.$$

Vamos agora mostrar outra fórmula de representação dual da de Weierstrass, que é encontrada na literatura.

5.6 Teorema: Fórmula de representação de Weierstrass

Para toda superfície mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ de um domínio simplesmente conexo Ω , existem duas funções holomórficas G e H sem zeros comuns tal que:

$$(12) \quad \begin{cases} x(w) &= x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w (G^2 - H^2) d\xi \\ y(w) &= y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w i(G^2 + H^2) d\xi \\ z(w) &= z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w 2GH d\xi, \forall w, w_0 \in \Omega, X_0 = X(w_0) \end{cases}$$

Inversamente, se G, H são duas funções holomórficas em um domínio simplesmente conexo Ω tal que $|G(w)|^2 + |H(w)|^2 \not\equiv 0$, então (12) define uma superfície mínima não-constante que é regular se, e somente se, G e H não tem zeros em comum.

Demonstração:

Para verificar a primeira parte, consideremos uma superfície mínima arbitrária $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por $X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi(\xi) d\xi, w \in \Omega$ onde $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \not\equiv 0, \phi : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ é uma função holomórfica com

$$(13) \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0, \text{ e } (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2.$$

A última equação, que é equivalente a $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, implica que todo zero de $\phi_1 - i\phi_2$ ou de $\phi_1 + i\phi_2$ é também zero de ϕ_3 . Então deduzimos de (13) que as duas funções $\phi_1 - i\phi_2, \phi_1 + i\phi_2$ não têm zeros comuns. Então as funções $G := \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1 - i\phi_2), H := \sqrt{-\frac{1}{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ são funções holomórficas com valores simples, que para uma escolha adequada das raízes quadradas satisfaz:

$$(14) \quad 2GH = \phi_3.$$

De fato: $2GH = 2\sqrt{\frac{1}{2}(\phi_1 - i\phi_2)(-\frac{1}{2}(\phi_1 + i\phi_2))} = \sqrt{(\phi_1 - i\phi_2)(-(\phi_1 - i\phi_2))}$.
 Como $-\phi_3^2 = (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) \Rightarrow \phi_3 = \pm\sqrt{(\phi_1 - i\phi_2)(-(\phi_1 + i\phi_2))}$, basta tomar a raiz positiva. E claramente $G^2 - H^2 = \phi_1, i(G^2 + H^2) = \phi_2$. Além disso, G e H não têm zeros comuns pois $\phi_1 - i\phi_2, \phi_1 + i\phi_2$ não têm zeros em comuns. Então substituindo (14) em $X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi(\xi) d\xi$, chegamos em $X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w (G^2 - H^2, i(G^2 + H^2), 2GH) d\xi$.

Reciprocamente, suponha G e H duas funções holomórficas em Ω (simplesmente conexo) tal que $|G(w)|^2 + |H(w)|^2 \neq 0$. Suponha que (12) defina uma superfície mínima regular não-constante. Mostremos que G e H não têm zeros comuns. Suponha o contrário, isto é, $\exists z_0$ tal que $G(z_0) = H(z_0) = 0$, logo $X(z_0) = X_0 + 0 = 0$. Contradição.

Suponha G e H não têm zeros em comum. Mostremos que (12) define uma superfície mínima. Defina, $\phi_1 = (G^2 - H^2), \phi_2 = i(G^2 + H^2), \phi_3 = 2GH$, daí, como G, H não têm zeros em comum então ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 não têm zeros em comum, logo X não constante, então $x(w) = x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi_1 d\xi, y(w) = y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi_2 d\xi, z(w) = z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi_3 d\xi \Rightarrow X(w) = (x(w), y(w), z(w))$ define uma superfície mínima e $\phi(w) \neq 0$, onde $\phi(w) = (\phi_1(w), \phi_2(w), \phi_3(w))$. ■

Observação 9 Se omitirmos $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$ então nem toda superfície mínima $X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \phi(\xi) d\xi$ pode ser escrita na forma (12). Para ver isto, tomemos $\phi_1(w) = 3w, \phi_2(w) = 5iw, \phi_3(w) = 4w, w \in \Omega$, onde Ω é um disco pequeno centralizado em $w = 0$. Se existem funções G e H tal que $3w = G(w)^2 - H(w)^2, 4w = 2G(w)H(w), 5iw = i\{G(w)^2 + H(w)^2\}$, daí segue que $G^2(w) = 4w$. Contudo, não existe (valor simples) solução holomorfa $G(w)$ desta equação em Ω , pois $G(w) = \pm 2\sqrt{w}$ e $G' = \frac{1}{\sqrt{w}}$ que não é contínua em 0 .

Weierstrass já tinha deduzido a representação (10) com ϕ dada por (9) introduzindo uma nova variável $\omega = \frac{H(w)}{G(w)} = \frac{\phi_1(w) + i\phi_2(w)}{-\phi_3(w)}$ de tal forma que a aplicação $w \rightarrow \omega$ seja bilomórfica. Então $\frac{1}{\omega} = -\frac{\phi_3(w)}{\phi_1(w) + i\phi_2(w)}$ e de $(\phi_1(w) - i\phi_2(w))(\phi_1(w) + i\phi_2(w)) = -\phi_3^2(w)$ obtemos $\frac{1}{\omega} = \frac{(\phi_1(w) - i\phi_2(w))}{\phi_3(w)}$.

Agora temos:
$$\begin{cases} G^2 - H^2 = \phi_1 \\ i(G^2 + H^2) = \phi_2 \Rightarrow G^2 + H^2 = -i\phi_2 \end{cases}$$

Somando temos $2G^2 = \phi_1 - i\phi_2 \Rightarrow G^2 = \frac{1}{2}(\phi_1 - i\phi_2)$. Assim segue que $G^2(w) \frac{dw}{dw} = \frac{1}{2}(\phi_1(w) - i\phi_2(w)) \frac{dw}{dw} = \mathfrak{F}(w)$. Então podemos passar de (12) para as equações desejadas.

Como uma aplicação das fórmulas de Enneper-Weierstrass temos o seguinte resultado:

5.7 Teorema de R. Krust

Se uma superfície mínima mergulhada $X : B \rightarrow \mathbf{R}^3$, $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$, puder ser representada como gráfico sobre um domínio convexo no plano, então a superfície conjugada $X^* : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ correspondente também é um gráfico.

Observação 10 Primeiro escreveremos a fórmula de representação

$$\begin{aligned} x(w) &= x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{\mu}{2}(1 - \vartheta^2)d\xi \\ y(w) &= y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)d\xi \\ z(w) &= z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \mu\vartheta d\xi, \forall w, w_0 \in \Omega, X_0 = (x_0, y_0, z_0) = X(w_0) \end{aligned}$$

de um modo diferente. Vamos introduzir duas funções meromórficas g e h por $g := \vartheta$, $h' := \mu\vartheta$, $dh = \mu\vartheta d\xi \Rightarrow d\xi = \frac{dh}{h'}$. Logo

$$\begin{aligned} x(w) &= x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{\mu}{2}(1 - \vartheta^2)d\xi = x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right) dh \\ y(w) &= y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{i}{2}\mu(1 + \vartheta^2)d\xi = y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right) dh \\ z(w) &= z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \mu\vartheta d\xi = z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w dh \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) dh. \text{ Fazendo:}$$

$$(15) \quad \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) dh = \psi'(\xi)d\xi = d\psi, \text{ temos:}$$

$$(16) \quad X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \psi'(\xi)d\xi.$$

Além disso podemos escrever a aplicação de Gauss $N : B \rightarrow \mathbf{S}^2$ associada a X como

$$(17) \quad N = \frac{1}{1+|\vartheta|^2} (2\operatorname{Re}g, 2\operatorname{Im}g, |g|^2 - 1)$$

$$\text{uma vez que } \text{tínhamos } N = \frac{1}{1+|\vartheta|^2} (2\operatorname{Re}\vartheta, 2\operatorname{Im}\vartheta, |\vartheta|^2 - 1).$$

Demonstração do teorema de Krust

Podemos assumir que X é não planar, que ela pode ser representada como o gráfico sobre o plano-xy, e que $N(w)$ aponta sobre o hemisfério inferior de \mathbf{S}^2 , e daí de (17) deduzimos que a função g que aparece na representação de Weierstrass dada por (15) e (16) de X satisfaz

$$(18) \quad |g(w)| < 1, \forall w \in B.$$

Além disso também podemos assumir $w_0 = 0, X(w_0) = 0$. Introduzindo as funções $\sigma(w), \tau(w), w \in B$ definidas por $\sigma(w) := -\int_0^w \frac{g}{2} dh, \tau(w) := \int_0^w \frac{1}{2g} dh$ podemos escrever as duas primeiras funções coordenadas de $X(w)$ como:

$$x(w) = \operatorname{Re}[\sigma(w) + \tau(w)]$$

$$y(w) = \operatorname{Re}i[\tau(w) - \sigma(w)].$$

E também de $X^* = \operatorname{Im} \int_{w_0}^w \psi'(\xi) d\xi$ podemos escrever:

$$x^*(w) = \operatorname{Im}[\sigma(w) + \tau(w)]$$

$$y^*(w) = \operatorname{Im}i[\tau(w) - \sigma(w)].$$

Agora considere as projeções ortogonais no plano-xy, $\pi(w) := x(w) + iy(w), \pi^*(w) := x^*(w) + iy^*(w)$. Daí:

$$\bullet \pi(w) = \operatorname{Re}\sigma(w) + \operatorname{Re}\tau(w) + i\operatorname{Re}i\tau(w) - i\operatorname{Re}i\sigma(w) = \operatorname{Re}\sigma(w) + \operatorname{Re}\tau(w) - i\operatorname{Im}\tau(w) + i\operatorname{Im}\sigma(w) = \bar{\tau}(w) + \sigma(w)$$

$$\bullet \pi^*(w) = \operatorname{Im}\tau(w) + \operatorname{Im}\sigma(w) + i\operatorname{Im}i\tau(w) + i\operatorname{Im}[-i\sigma(w)] = \operatorname{Im}\tau(w) + \operatorname{Im}\sigma(w) + i\operatorname{Re}\tau(w) - i\operatorname{Re}\sigma(w) = i[\bar{\tau}(w) - \sigma(w)].$$

Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} \pi &= \bar{\tau} + \sigma \\ \pi^* &= i(\bar{\tau} - \sigma). \end{aligned}$$

Escolha dois pontos $w_1, w_2 \in B$ com $w_1 \neq w_2$ e defina $p_1 := \pi(w_1), p_2 = \pi(w_2)$. Como $D = \pi(B)$ é um domínio convexo no plano-xy, podemos conectar p_1 e p_2 dentro de D por um segmento de reta $l : [0, 1] \rightarrow D$ tal que $l(0) = p_1, l(1) = p_2$. Então existe uma curva seccionalmente suave $\gamma; [0, 1] \rightarrow B$ tal que $l = \pi \circ \gamma$. Então podemos assumir $|l'| = |p_2 - p_1|$, onde $p_2 - p_1 = l(1) - l(0) = l'(t), \forall t \in [0, 1]$.

$$\text{Por outro lado } l(t) = \pi(\gamma(t)) = \bar{\tau}(\gamma(t)) + \sigma(\gamma(t)) = \overline{\int_0^{\gamma(t)} \frac{1}{2g(\gamma(t))} h'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt} - \int_0^{\gamma(t)} \frac{g(\gamma(t))}{2} h'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \Rightarrow l'(t) = \left[\frac{1}{2g(\gamma(t))} \overline{h'(\gamma(t))} \gamma'(t) - \frac{g(\gamma(t))}{2} h'(\gamma(t)) \gamma'(t) \right]_0^w =$$

$$\left[\frac{1}{2g(w)} \overline{h'(w)} - \frac{g(w)}{2} h'(w) \right]_{w=\gamma(t)} \gamma'(t). \text{ E portanto:}$$

$$p_2 - p_1 = \left[\frac{1}{2g(w)} \overline{h'(w)} - \frac{g(w)}{2} h'(w) \right]_{w=\gamma(t)} \gamma'(t).$$

Agora vamos considerar o produto escalar S de dois vetores $p_2 - p_1$ e $i[\pi^*(w_2) - \pi^*(w_1)]$ de \mathbf{R}^2 . Defina:

$S := \langle p_2 - p_1, i[\pi^*(w_2) - \pi^*(w_1)] \rangle = \langle p_2 - p_1, -\int_\gamma \left(\frac{g}{2}dh + \frac{1}{2g}\overline{dh} \right) \rangle$, pois,

$$i[\pi^*(w_2) - \pi^*(w_1)] = -\bar{\tau}(w_2) + \sigma(w_2) + \bar{\tau}(w_1) - \sigma(w_1) =$$

$$-\int_0^{w_2} \frac{1}{2g}\overline{dh} + \int_0^{w_1} \frac{1}{2g}\overline{dh} - \int_0^{w_2} \frac{g}{2}dh + \int_0^{w_1} \frac{g}{2}dh = -\int_{w_1}^{w_2} \frac{g}{2}dh - \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{2g}\overline{dh} =$$

$$-\int_\gamma \left(\frac{g}{2}dh + \frac{1}{2g}\overline{dh} \right) \text{ onde } w_1 = \gamma(0), w_2 = \gamma(1). \text{ Como para quaisquer dois}$$

vetores $w_1, w_2 \in \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ temos $\langle w_1, w_2 \rangle = \operatorname{Re}(w_1\bar{w}_2)$ tomando $w_1 =$

$$p_2 - p_1, w_2 = -\int_\gamma \left(\frac{g}{2}dh + \frac{1}{2g}\overline{dh} \right) \Rightarrow \bar{w}_2 = -\int_\gamma \left(\frac{g}{2}\overline{dh} + \frac{1}{2g}dh \right). \text{ E daí;}$$

$$S = \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{2g(w)}\overline{h'(w)} - \frac{g(w)}{2}h'(w) \right]_{w=\gamma(t)} \gamma'(t) \left[-\int_\gamma \left(\frac{g}{2}\overline{dh} + \frac{1}{2g}dh \right) \right] \right\} =$$

$$\int_0^1 \operatorname{Re} \left\{ \left[\left(\frac{g}{2}\overline{h'} + \frac{1}{2g}h' \right) \circ \gamma \right] \gamma'(t) \left[\left(\frac{g}{2}h' - \frac{1}{2g}\overline{h'} \right) \right] \gamma'(t) \right\} dt =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{4} |\gamma'(t)|^2 \left[|g(\gamma(t))|^2 - \frac{1}{|g(\gamma(t))|^2} \right] dt.$$

Então deduzimos de (18) que $S < 0$. Além disso, temos que $p_2 - p_1 \neq 0$ pois $X : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ é um mergulho e gráfico, logo da definição de S obtemos $\pi^*(w_2) - \pi^*(w_1) \neq 0$ para quaisquer par de pontos distintos $w_1, w_2 \in B$ e então concluimos que a superfície conjugada X^* é um gráfico. ■

Observação 11 *Similarmente pode-se provar que todas as superfícies associadas $X : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ de uma superfície mínima mergulhada $X : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ são gráficos se $X(B)$ puder ser representada como um gráfico sobre um domínio convexo no plano [DHKW].*

Capítulo 6

O problema de Björling

Dada uma faixa analítica real S em \mathbf{R}^3 , o problema de Björling consiste em encontrar uma superfície mínima X contendo esta faixa e seu interior. A solução deste problema permite um elegante método para gerar superfícies mínimas com interessantes propriedades geométricas.

Vamos agora descrever o problema em detalhes. Consideremos uma faixa real analítica $S = \{(c(t), n(t)); t \in I\}$ consistindo de uma curva real-analítica $c : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ com $\dot{c}(t) \neq 0$ (ou no mínimo $\dot{c}(t) = 0$ somente em pontos isolados $t \in I$), e de um campo vetorial real-analítico $n : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ ao longo de c , com $|n(t)| \equiv 1$ e $\langle \dot{c}(t), n(t) \rangle \equiv 0$. Vamos assumir I intervalo aberto em \mathbf{R} . O problema de Björling consiste em encontrar uma superfície mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, com $I \subset \Omega$ tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- i) $X(u, 0) = c(u), \forall u \in I$
- ii) $N(u, 0) = n(u), \forall u \in I$, onde N é a normal de X , $N : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$.

6.1 Teorema

Para toda faixa real-analítica prescrita $S = \{(c(t), n(t)); t \in I\}$ o correspondente problema de Björling tem exatamente uma solução $X(u, v)$ dada por:

$$(1) \quad X(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}, w = u + iv \in \Omega, u_0 \in I,$$

onde Ω é um domínio simplesmente conexo com $I \in \Omega$.

Observação 12 A fórmula (1) significa o seguinte: Uma determinada extensão holomórfica $c(u+iv)$ e $n(u+iv)$ das funções reais analíticas $c(t), n(t), t \in I$ para um domínio simplesmente conexo adequado Ω , com $I \in \Omega$ determinam

a integral de linha

$$\int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) = \int_{u_0}^w n(w) \wedge \dot{c}(w)dw,$$

onde $\dot{c}(w)$ é a derivada complexa da função holomórfica $c(w)$.

Demonstração do teorema 6.1

i) Unicidade:

Suponha que $X(u, v)$ é uma solução do problema de Björling definida em Ω e seja $X^* : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ sua superfície conjugada com $X^*(u_0, 0) = 0, u_0 \in I$. Então $f(w) = X(u, v) + iX^*(u, v), w = u + iv \in \Omega$ é uma curva isotrópica com $X = \text{Ref}, X^* = \text{Imf}$ e $f' = X_u + iX_u^* = X_u - iX_v$. Agora como $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} \Rightarrow X_v = N \wedge X_u$ e daí segue que $f' = X_u - iN \wedge X_u$. Como $X(u, v)$ é solução temos $f'(u) := f'(u, 0) = \dot{c}(u) - in(u) \wedge \dot{c}(u)$, assim $f(u) = c(u) - i \int_{u_0}^u n(t) \wedge dc(t), \forall u \in I$. E da observação 12, $f(w) = c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w), \forall w \in \Omega$; desde que os dois lados sejam funções holomórficas de w . Assim, suponha $\tilde{X} : \Omega' \rightarrow \mathbf{R}^3$ outra solução do problema e $\tilde{f}(w) = \tilde{X}(u, v) + i\tilde{X}^*(u, v), w = u + iv \in \Omega'$. Assim:

$$X(u, 0) = c(u) = \tilde{X}(u, 0), \forall u \in I,$$

$$N(u, 0) = n(u) = \tilde{N}(u, 0), \forall u \in I.$$

Além disso, $\tilde{f}' = \tilde{X}_u - i\tilde{N} \wedge \tilde{X}_u \Rightarrow \tilde{f}'(u) := \tilde{f}'(u, 0) = \dot{c}(u) - in(u) \wedge \dot{c}(u), \forall u \in I \Rightarrow \tilde{f}'(w) = \dot{c}(w) - in(w) \wedge \dot{c}(w), \forall w \in \Omega'$. Logo $\text{Ref}\tilde{f}(w) = \text{Ref}(w), \forall w \in \Omega \cap \Omega'$, isto é, $X(u, v) = \tilde{X}(u, v), \forall w = u + iv \in \Omega \cap \Omega'$.

ii) Mostremos que (1) é de fato solução do problema de Björling. Considere a curva holomórfica $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^3$ definida por $f(w) = c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w), w \in \Omega$. Para $w \in I$, temos $\text{Ref}'(w) = \dot{c}(w), \text{Imf}' = -n(w) \wedge \dot{c}(w)$. Como os vetores $\dot{c}(w)$ e $\dot{c}(w) \wedge n(w)$ são ortogonais entre si e têm o mesmo comprimento e $f'(w) = \dot{c}(w) - in(w) \wedge \dot{c}(w)$, então $\forall w \in I < f'(w), f'(w) > = |\dot{c}(w)|^2 - |n(w) \wedge \dot{c}(w)|^2 = 0$, pois $|n(w) \wedge \dot{c}(w)|^2 = |n(w)|^2 |\dot{c}(w)|^2 \sin 90 = |\dot{c}(w)|^2$; e portanto $< f'(w), f'(w) > = 0, \forall w \in \Omega$. Daí f é isotrópica e $X(u, v) = \text{Ref}(w), w = u + iv \in \Omega$ é uma superfície mínima. Como $c(w), n(w), \dot{c}(w)$ são reais para $w \in I$, deduzimos que $X(u, 0) = \text{Ref}(u) = c(u), \forall u \in I$.

E $X_u(u, 0) - iX_v(u, 0) = f'(u) = \dot{c}(u) - in(u) \wedge \dot{c}(u), \forall u \in I$, e assim:

$$X_u(u, 0) = \dot{c}(u), \quad X_v(u, 0) = n(u) \wedge \dot{c}(u).$$

Além disso temos $X_v(u, 0) = N(u, 0) \wedge X_u(u, 0)$ e $< X_u(u, 0), X_v(u, 0) > = 0 = < n(u), \dot{c}(u) >, |N(u, 0)| = |n(u)| = 1$. E daí:

$$X_u(u, 0) \wedge X_v(u, 0) = - \langle n(u), \dot{c}(u) \rangle \dot{c}(u) + \langle \dot{c}(u), \dot{c}(u) \rangle n(u) = |\dot{c}(u)| n(u) \\ \Rightarrow |X_u \wedge X_v| = |\dot{c}(u)|. \text{ E portanto}$$

$$N(u, 0) = \frac{X_u(u, 0) \wedge X_v(u, 0)}{|X_u(u, 0) \wedge X_v(u, 0)|} = n(u), \quad \forall u \in I. \quad \blacksquare$$

6.2 Corolário:

Seja $X(u, v)$ uma solução do problema de Björling dada por (1). Então:

$$(2) \quad X(u, -v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) + i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}, \quad w = u + iv$$

é solução do problema de Björling para a faixa $\tilde{S} = \{(c(t), -n(t)), t \in I\}$.

Demonstração É claro que $X(u, -v) = \tilde{X}(u, v)$ é uma superfície mínima. Além disso:

$$\tilde{N}(u, v) = \frac{\tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v}{|\tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v|} = \frac{X_u \wedge X_{-v}}{|X_u \wedge X_{-v}|} = - \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = -N(u, v).$$

Sendo $X(u, v)$ solução do problema, $X(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}$, $w \in \Omega$ para a faixa $S = \{(c(t), n(t)), t \in I\}$. Então temos:

$$X(u, 0) = \tilde{X}(u, 0) = c(u)$$

$$\tilde{N}(u, 0) = -N(u, 0) = -n(u).$$

E portanto:

$$\tilde{X}(u, v) = X(u, -v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) + i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}, \quad w \in \Omega$$

é solução do problema de Björling para a faixa $\tilde{S} = \{(c(t), -n(t)), t \in I\}$. \blacksquare

As fórmulas (1) e (2) implicam os dois princípios de simetria descobertos por H. A. Schwarz:

6.3 Teorema

i) *Todo segmento de reta contido em uma superfície mínima é um eixo de simetria da superfície.*

ii) *Se uma superfície mínima intercepta algum plano E perpendicularmente, então E é um plano de simetria da superfície.*

Este teorema é uma consequência imediata do seguinte lema:

6.4 Lema

Seja $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), w = u + iv \in \Omega$ uma superfície mínima não-constante cujo domínio de definição Ω contém algum intervalo I que pertença a reta real.

i) Se $\forall u \in I$ os pontos $X(u, 0)$ estão contidos no eixo x então temos:

$$\begin{aligned}x(u, -v) &= x(u, v) \\y(u, -v) &= -y(u, v) \\z(u, -v) &= -z(u, v).\end{aligned}$$

ii) Se a curva $\Sigma = \{X(u, 0) : u \in I\}$ está contida no plano- xy E , e se a superfície X intercepta E ortogonalmente em Σ então segue que

$$\begin{aligned}x(u, -v) &= x(u, v) \\y(u, -v) &= y(u, v) \\z(u, -v) &= -z(u, v).\end{aligned}$$

Demonstração

i) Sejam $c(u) = X(u, 0), n(u) = N(u, 0), \forall u \in I$. Como $X(u, 0)$ está contido no eixo- x , $\forall u \in I$, temos $c(u) = (c_1(u), 0, 0)$ e $n(u) = (0, n_2(u), n_3(u)) \Rightarrow n(u) \wedge \dot{c}(u) = (0, \dot{c}_1(u)n_3(u), -\dot{c}_1(u)n_2(u))$. Então considerando $X(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}, \forall w \in \Omega$, e

$\tilde{X}(u, v) = X(u, -v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) + i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}, \forall w \in \Omega'$ temos:

$$X(u, 0) = \operatorname{Re} \left\{ (c_1(u), 0, 0) - i \int_{u_0}^u (0, \dot{c}_1(u)n_3(u), -\dot{c}_1(u)n_2(u)) du \right\}$$

$$\tilde{X}(u, 0) = \operatorname{Re} \left\{ (c_1(u), 0, 0) + i \int_{u_0}^u (0, \dot{c}_1(u)n_3(u), -\dot{c}_1(u)n_2(u)) du \right\}.$$

Logo,

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ (c_1(w), 0, 0) - i \int_{u_0}^w (0, \dot{c}_1(w)n_3(w), -\dot{c}_1(w)n_2(w)) dw \right\},$$

$$\tilde{X}(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ (c_1(w), 0, 0) + i \int_{u_0}^w (0, \dot{c}_1(w)n_3(w), -\dot{c}_1(w)n_2(w)) dw \right\}.$$

Daí:

$$x(u, v) = \operatorname{Re}(c_1(w)) = \tilde{x}(u, v) = x(u, -v),$$

$$y(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ -i \int_{u_0}^w \dot{c}_1(w)n_3(w) dw \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ i \int_{u_0}^w \dot{c}_1(w)n_3(w) dw \right\} = -\tilde{y}(u, v) = -y(u, -v),$$

$$z(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ -i \int_{u_0}^w -\dot{c}_1(w)n_2(w) dw \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ -i \int_{u_0}^w \dot{c}_1(w)n_2(w) dw \right\} = -\tilde{z}(u, v) = -z(u, -v).$$

ii) Se X intercepta $E = \{z = 0\}$ em $c(u) = X(u, 0)$ ortogonalmente e se $n(u) = N(u, 0)$ segue que $c(u) = (c_1(u), c_2(u), 0), n(u) = (n_1(u), n_2(u), 0)$ de

onde $n(u) \wedge \dot{c}(u) = (0, 0, n_1(u)\dot{c}_2(u) - \dot{c}_1(u)n_2(u))$. E então:

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ (c_1(w), c_2(w), 0) - i \int_{u_0}^w (0, 0, n_1(w)\dot{c}_2(w) - \dot{c}_1(w)n_2(w)) dw \right\},$$

$$\tilde{X}(u, v) = X(u, -v) = \operatorname{Re} \left\{ (c_1(w), c_2(w), 0) + i \int_{u_0}^w (0, 0, n_1(w)\dot{c}_2(w) - \dot{c}_1(w)n_2(w)) dw \right\}.$$

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \tilde{x}(u, v) = x(u, -v) \\ y(u, v) &= \tilde{y}(u, v) = y(u, -v) \\ z(u, v) &= \operatorname{Re} \left\{ -i \int_{u_0}^w (n_1(w)\dot{c}_2(w) - \dot{c}_1(w)n_2(w)) dw \right\} = \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ i \int_{u_0}^w (n_1(w)\dot{c}_2(w) - \dot{c}_1(w)n_2(w)) dw \right\} = -\tilde{z}(u, v) = -z(u, -v). \end{aligned}$$

■

6.5 Lema

Seja $X(w), w \in \Omega$, uma superfície regular de classe $C^3(\Omega, \mathbf{R}^3)$ e seja $c(t) = X(\omega(t)), t \in I$, alguma curva regular em X definida por alguma curva $C^3, \omega : I \rightarrow \Omega$ em Ω . Então vale:

- i) A curva c é uma geodésica e uma linha assintótica se, e somente se, ela é um segmento de reta.
- ii) Seja c uma geodésica em X . Então c é uma linha de curvatura se, e somente se, ela é uma curva plana.
- iii) Suponha que c está contida em um plano E . Então c é uma linha de curvatura em X se, e somente se, X intercepta E ao longo de c em um ângulo constante φ . Além disso, se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ então c é uma geodésica.

Demonstração

Seja $c(t) = X(\omega(t)), t \in I$ curva regular em X . Podemos assumir que t coincide com o parâmetro comprimento de arco s . Seja $\{t(s), S(s), \mathfrak{R}(s)\}$ um triedro móvel ao longo de $c(s)$, consistindo do vetor tangente $t(s) = \dot{c}(s)$, do lado normal $S(s)$, e da superfície normal $\mathfrak{R}(s) = N(\omega(s))$. Considere o triedro de Frenet $\{t(s), n(s), b(s)\}$ onde $n(s)$ é o vetor normal a $c(s)$ e $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ o vetor binormal de $c(s)$. De [DHKW] pág. 15 temos:

$$(3) \quad t' = K_g S + K_n \mathfrak{R}$$

onde $K_n = k \cos \theta$ é a curvatura normal de c e $K_g = \pm k \operatorname{sen} \theta$ é a curvatura geodésica de c , $\cos \theta = \langle n, \mathfrak{R} \rangle$ e $t' = kn$, onde k denota a curvatura da curva c .

i) Suponha c uma geodésica e uma linha assintótica, isto é, $K_g(s) \equiv 0$ e $K_n(s) \equiv 0$. Então a relação (3) implica $t(s) \equiv cte$, ou seja $c(s)$ é um segmento de reta. Reciprocamente, se $c(s)$ é um segmento de reta então $t'(s) \equiv 0$ e de (3) $K_g(s)S(s) + K_n(s)\mathfrak{R}(s) \equiv 0$, como $\mathfrak{R}(s)$ e $S(s)$ são li's, $K_g(s) \equiv 0$ e $K_n(s) \equiv 0$, ou seja, c é geodésica e uma linha assintótica.

ii) Suponha $c(s)$ uma geodésica, isto é, $K_g(s) \equiv 0$ ou $n(s) = \pm \mathfrak{R}(s)$. Então de

$b = t \wedge n \Rightarrow b' = t' \wedge n + t \wedge n' = kn \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n'$ deduzimos $b' = t \wedge \mathfrak{R}'$. Projitando \mathfrak{R}' em $\{t, S, \mathfrak{R}\}$ temos $\mathfrak{R}' = \langle \mathfrak{R}', t \rangle t + \langle \mathfrak{R}', S \rangle S + \langle \mathfrak{R}', \mathfrak{R} \rangle \mathfrak{R}$ e como $\langle \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \rangle = 1 \Rightarrow 2 \langle \mathfrak{R}', \mathfrak{R} \rangle = 0$. Daí $\mathfrak{R}' = \langle \mathfrak{R}', t \rangle t + \langle \mathfrak{R}', S \rangle S$, isto é, \mathfrak{R}' pertence ao plano gerado por t e S , que é o plano tangente. Logo podemos escrever $\mathfrak{R}' = \gamma_1 t + \gamma_2 S \Rightarrow b' = t \wedge (\gamma_1 t + \gamma_2 S) = \gamma_2 (t \wedge S)$. Mas $S = \mathfrak{R} \wedge t \Rightarrow t \wedge S = t \wedge (\mathfrak{R} \wedge t) = -(\mathfrak{R} \wedge t) \wedge t = -[\langle \mathfrak{R}, t \rangle t - \langle t, t \rangle \mathfrak{R}] = \mathfrak{R}$. Logo $b' = \gamma_2 \mathfrak{R}$ assim $b'(s) \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma_2(s) \equiv 0$, isto é $\mathfrak{R}'(s) = \gamma_1(s)t(s)$. Então concluímos que $c(s)$ é curva plana se, e somente se $c(s)$ é uma linha de curvatura.

iii) Introduza $\varphi(s)$ o ângulo entre o plano tangente da superfície em $w = \omega(s)$ e o plano osculador da curva c , isto é, $\cos \varphi = \langle \mathfrak{R}, b \rangle$. Então temos $\frac{d}{ds} \cos \varphi = \langle \mathfrak{R}', b \rangle + \langle \mathfrak{R}, b' \rangle$. Suponha c está contido em um plano, ou seja, $b' = 0$. Se c é uma linha de curvatura então pela proposição de Olinde Rodrigues (seção 1.9) $-\mathfrak{R}' = kt$ onde $k = k_1$ ou k_2 . Então uma linha de curvatura satisfaz $\frac{d}{ds} \cos \varphi = -k \langle t, b \rangle = 0 \Rightarrow \varphi(s) \equiv cte$.

Reciprocamente, suponha c uma curva planar com $\varphi(s) \equiv cte$. Então $b'(s) \equiv 0$ e de $\frac{d}{ds} \cos \varphi = \langle \mathfrak{R}', b \rangle + \langle \mathfrak{R}, b' \rangle \equiv 0$ temos $\langle \mathfrak{R}'(s), b(s) \rangle \equiv 0$, ou seja, $\mathfrak{R}'(s)$ pertence ao plano gerado por t e n . Além disso, como $\mathfrak{R}' \in T_{\omega(s)}X$, temos

$$(4) \quad \mathfrak{R}' = \gamma_1 t + \gamma_2 S.$$

Mas do feito anteriormente

$$(5) \quad \mathfrak{R}'(s) = \gamma_1(s)t(s) + \gamma_3(s)n(s).$$

para uma função apropriada $\gamma_3(s)$. Então para todo valor admissível do parâmetro s , pelo menos uma das duas relações são satisfeitas $\gamma_2(s) = \gamma_3(s) = 0$ ou $S(s) = n(s)$. Suponha que para algum valor admissível s_0 a equação $S(s_0) = n(s_0)$ é satisfeita. Então temos $\langle \mathfrak{R}(s_0), b(s_0) \rangle = cte \Rightarrow b(s_0) = \pm \mathfrak{R}(s_0)$, isto é $\varphi(s_0) = 0$. Por outro lado $\varphi(s) \equiv cte$ logo $\varphi(s) \equiv 0 \Rightarrow b(s) \equiv \pm \mathfrak{R}(s)$ ou $b(s) \equiv -\mathfrak{R}(s)$. Agora por hipótese $b'(s) \equiv 0$, e assim $\mathfrak{R}'(s) \equiv 0$. Logo de (4) e (5),

$$0 \equiv \gamma_1(s)t(s) + \gamma_2(s)S(s)$$

$$0 \equiv \gamma_1(s)t(s) + \gamma_3(s)n(s).$$

Subtraindo temos, $\gamma_2(s)S(s) - \gamma_3(s)n(s) = 0$ e como $S(s), n(s)$ são li's devemos ter $\gamma_2(s) = \gamma_3(s) = 0$. Então $\mathfrak{R}' = \gamma_1(s)t(s)$, o que significa que $c(s)$ é uma linha de curvatura.

Observação 13 Observe que o lema anterior depende basicamente de $N(\omega(s)) = \mathfrak{R}(s)$. Assim as afirmações do lema continuam sendo válidas se considerarmos X superfície mínima não-constante com pontos de ramificação, e se $c(t)$ for curva regular exceto para pontos isolados $t \in I$; uma vez que N está bem definida nos pontos de ramificação.

6.6 Proposição:

Seja $S = \{(c(t), n(t)) : t \in I\}$ uma faixa real analítica cuja curva suporte $c(t)$ $t \in I$ é um segmento de reta. Então

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}, w = u + iv, u_0 \in I$$

define uma superfície mínima onde $c(u) = X(u, 0)$ é uma geodésica. Além disso, c é também uma linha assintótica de X e a superfície normal $N(u, v)$ de X coincide em I com n , isto é, $N(u, 0) = n(u)$.

Demonstração: Imediata, basta observar que do teorema 6.1, $X(u, v)$ é solução do problema de Björling para a faixa S ; então $X(u, v)$ é uma superfície mínima e $c(u) = X(u, 0)$, $n(u) = N(u, 0)$,

$\forall u \in I$. Agora como $c(t)$ é um segmento de reta, pelo lema 6.5)i) $c(t)$ é uma geodésica e uma linha assintótica de X . ■

Considere a faixa real analítica $S = \{(c(t), n(t)); t \in I\}$ cuja curva suporte c está contida em um plano E com vetor normal e satisfazendo $\langle n(t), e \rangle \equiv \cos \varphi$, $t \in I$ para algum ângulo constante φ . Então (1) define uma superfície mínima X para a qual c é uma linha de curvatura contida no plano E que intercepta X em c sobre um ângulo constante φ . Reciprocamente, se $c(t)$, $t \in I$ é uma curva regular real analítica contida em um plano E e se $\varphi(t)$ é uma função real analítica, então

$$(6) S = \{(c(t), n(t)); t \in I\}; \quad n(t) := e \cos \varphi(t) + \dot{c}(t) \wedge \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \operatorname{sen} \varphi(t),$$

é uma faixa real analítica tal que $n(t)$ intercepta E em pontos do suporte $c(t)$ sobre o ângulo $\varphi(t)$. Substituindo (6) em (1) e usando lema 6.5)iii) obtemos:

6.7 Proposição:

Seja $c(t)$, $t \in I$ alguma curva regular analítica real contida em um plano E com um vetor normal e , e seja φ um ângulo constante. Então para $w = u + iv$ e $u_0 \in I$,

$$(7) X(w) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - ie \wedge [c(w) - c(u_0)] \cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi \int_{u_0}^w \langle \dot{c}(w), \dot{c}(w) \rangle^{\frac{1}{2}} dwe \right\}$$

define uma superfície mínima contendo $c(u) = X(u, 0)$ como uma linha de curvatura planar. Além disso, X intercepta E ao longo de um ângulo constante φ . Finalmente se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ então c é uma geodésica planar de X .

Demonstração

Substituindo (6) em (1) temos:

$$X(w) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w e \cos \varphi(w) \wedge dc(w) - i \int_{u_0}^w \dot{c}(w) \wedge e \frac{1}{|\dot{c}(w)|} \operatorname{sen} \varphi(w) \wedge dc(w) \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(w) &= \operatorname{Re}\{c(w) - ie \wedge [c(w) - c(u_0)] \cos \varphi(w) - \\ &i \int_{u_0}^w \dot{c}(w) \wedge e \frac{1}{|\dot{c}(w)|} \sin \varphi(w) \wedge dc(w)\}. \text{ Agora,} \\ &-i \int_{u_0}^w \dot{c}(w) \wedge e \frac{1}{|\dot{c}(w)|} \sin \varphi(w) \wedge dc(w) = \\ &-i \sin \varphi \left\{ \int_{u_0}^w \left(\langle \dot{c}(w), \dot{c}(w) \rangle \frac{e}{|\dot{c}(w)|} - \langle \frac{e}{|\dot{c}(w)|}, \dot{c}(w) \rangle \right) dw \right\} = \\ &-i \operatorname{sen} \varphi \int_{u_0}^w \frac{\langle \dot{c}(w), \dot{c}(w) \rangle}{\langle \dot{c}(w), \dot{c}(w) \rangle^{\frac{1}{2}}} edw = -i \sin \varphi \int_{u_0}^w \langle \dot{c}(w), \dot{c}(w) \rangle^{\frac{1}{2}} dwe. \end{aligned}$$

E portanto:

$$X(w) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - ie \wedge [c(w) - c(u_0)] \cos \varphi - i \sin \varphi \int_{u_0}^w \langle \dot{c}(w), \dot{c}(w) \rangle^{\frac{1}{2}} dwe \right\}.$$

Agora como $c(t)$ está contida em um plano E , pelo lema 6.5)iii) $c(t)$ é uma linha de curvatura, e além disso, se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, c é uma geodésica planar. ■

Na proposição 6.7, escolhendo E como sendo o plano- xz , particularmente obtemos:

6.8 Proposição

Se $c(t) = (\xi(t), 0, \zeta(t)), t \in I$ é uma curva real analítica contida no plano- xz E , então $X(u, v) = \left(\operatorname{Re} \xi(w), \operatorname{Im} \int_0^w \{\xi'(w)^2 + \zeta'(w)^2\}^{\frac{1}{2}} dw, \operatorname{Re} \zeta(w) \right)$ define uma superfície mínima X que intercepta E perpendicularmente ao longo de c . Além disso, a curva c é uma linha de curvatura planar em X ; de fato é uma geodésica planar.

Demonstração

Decorre da proposição anterior. De fato, tome $e = (0, 1, 0)$ normal ao plano E . De (7) temos:

$$X(w) = \operatorname{Re}\{(\xi(w), 0, \zeta(w)) - i(0, 1, 0) \wedge [(\xi(w), 0, \zeta(w)) - (\xi(u_0), 0, \zeta(u_0))] \cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi \int_0^w \langle (\xi'(w), 0, \zeta'(w)), (\xi'(w), 0, \zeta'(w)) \rangle^{\frac{1}{2}} dwe\}.$$

Agora observe que $\langle n(t), e \rangle \equiv 0 \equiv \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \varphi = 1$. Logo

$$X(u, v) = \left(\operatorname{Re} \xi(w), \operatorname{Re} \left(-i \int_0^w \{\xi'(w)^2 + \zeta'(w)^2\}^{\frac{1}{2}} dw \right), \operatorname{Re} \zeta(w) \right) \Rightarrow$$

$$X(u, v) = \left(\operatorname{Re} \xi(w), \operatorname{Im} \int_0^w \{\xi'(w)^2 + \zeta'(w)^2\}^{\frac{1}{2}} dw, \operatorname{Re} \zeta(w) \right). \quad \blacksquare$$

Capítulo 7

Exemplos

Neste capítulo iremos discutir alguns exemplos clássicos de superfícies mínimas.

7.1 Catenóide e Helicóide

A superfície mínima chamada **catenóide** recebe este nome por ser obtida pela rotação de uma certa catenária ao longo de algum eixo. Se escolhermos o eixo-z como eixo de rotação, todos os catenóides são gerados pela rotação das catenárias

(1) $x = \alpha \cosh\left(\frac{z-z_0}{\alpha}\right)$; $z \in \mathbf{R}$, z_0, α constantes arbitrárias e $\alpha \neq 0$.

7.2 Teorema:

(Teorema de Meusnier [BC])

Qualquer superfície mínima de rotação em \mathbf{R}^3 é, a menos de um movimento rígido, parte de um plano ou parte de um catenóide.

Demonstração

Por um movimento rígido, podemos supor que a superfície em \mathbf{R}^3 é tal que seu eixo de rotação coincide com o eixo-x. A superfície será gerada pela rotação da curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$.

i) Se $x(t) \equiv cte$ então a superfície é um plano perpendicular ao eixo-x.

ii) Se $x(t) \neq cte$ então $\exists t_0$ tal que $x' \neq 0$ numa vizinhança de t_0 . Podemos representar a curva α por $(x, y(x), 0)$ em uma vizinhança do ponto $\alpha(t_0)$.

A parte da superfície obtida pela rotação de α pode ser parametrizada por $X(x, v) = (x, y(x) \cos(v), y(x) \sin(v))$, $0 < v < 2\pi$. Usando que X é mínima $\Leftrightarrow H = 0$ [M], e calculando H obtemos;

$$H = 0 \Leftrightarrow -yy'' + 1 + y'^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação obtemos $y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right)$ ([BC] pág. 6). Logo a curva $\alpha = (x, a \cosh(\frac{x}{a} + b), 0)$ é uma catenária e logo $X(x, v)$ descreve o catenóide. ■

Considerando a equação (1), podemos obter uma parametrização para o catenóide dada por:

$$(2) \quad \begin{cases} x(u, v) = \alpha \cosh u \cos v \\ y(u, v) = -\alpha \cosh u \sin v \\ z(u, v) = \alpha u, \quad \text{com } -\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad \text{se } z_0 = 0 \end{cases}$$

Seja $w = u + iv \in \mathbf{C}$ e considere as fórmulas

$$\cosh(u + iv) = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v$$

$$\sinh(u + iv) = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v.$$

Seja:

$$(3) \quad \begin{aligned} f: \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}^3 \\ w &\mapsto f(w) = (\alpha \cosh w, \alpha i \sinh w, \alpha w) \end{aligned}$$

curva isotrópica. Então vemos que $X(w) = \text{Re} f(w)$.

Queremos encontrar a função de Weierstrass $\mathfrak{S}(\omega)$ e a representação $Y(\omega)$ dada no Cap. 5, seção 5.4; isto é:

$$x = \alpha + \text{Re} \int_1^\omega (1 - \omega^2) \mathfrak{S}(\omega) d\omega$$

$$y = \text{Re} \int_1^\omega i(1 + \omega^2) \mathfrak{S}(\omega) d\omega$$

$$z = \text{Re} \int_1^\omega 2\omega \mathfrak{S}(\omega) d\omega, \quad \text{com } Y(\omega_0) = Y(0) (\Rightarrow x(0, 0) = \alpha, y(0, 0) = z(0, 0) = 0).$$

Primeiro introduzamos uma nova variável $\omega = e^{-w}$. Seja $r = |\omega|$ e $\theta = \arg \omega$, isto é, $\omega = r e^{i\theta}$. Então $\log \omega = \log r + i\theta = \log e^{-u-iv} = -u - iv \Rightarrow -u = \log r$ e $\theta = -v$. Daí

$$\cosh u = \frac{1}{2}(e^{-\log r} + e^{\log r}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r} + r\right].$$

$$\cos v = \cos \theta, \quad \sin v = -\sin \theta.$$

Então de (2) podemos escrever

$$(4) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{r} + r\right) \cos \theta = \text{Re} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) \\ y = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{r} + r\right) \sin \theta = \text{Re} i \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\omega} - \omega\right) \\ z = -\alpha \log r = -\text{Re} \alpha \log \omega, \end{cases}$$

Então se escolhermos $\mathfrak{S}(\omega) = \frac{-\alpha}{2\omega^2}, \omega \in \mathbf{C} - \{0\}$ recaímos nestas equações para x, y, z . De fato:

$$\bullet x = \alpha + \text{Re} \int_1^\omega (1 - \omega^2) \frac{-\alpha}{2\omega^2} d\omega = \alpha + \text{Re} \frac{\alpha}{2} \int_1^\omega \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) d\omega =$$

$$\alpha + \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{2}(\omega - 1) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \right] = \operatorname{Re} \frac{\alpha}{2} \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right),$$

- $y = \operatorname{Re} \int_1^\omega i(1 + \omega^2) \frac{-\alpha}{2\omega^2} d\omega = \operatorname{Re} \frac{-i\alpha}{2} \int_1^\omega \left(1 + \frac{1}{\omega^2} \right) d\omega = \operatorname{Re} \frac{i\alpha}{2} \left(\frac{1}{\omega} - \omega \right),$
- $z = \operatorname{Re} \int_1^\omega 2\omega \Im(\omega) d\omega = \operatorname{Re} \int_1^\omega 2\omega \left(\frac{-\alpha}{2\omega^2} \right) d\omega = \operatorname{Re} (-\alpha[\log \omega - \log 1]) = -\operatorname{Re} \alpha \log \omega.$

Considerando a expressão

$$(3) \quad f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^3 \\ w \mapsto f(w) = (\alpha \cosh w, \alpha i \sinh w, \alpha w)$$

obtemos a superfície conjugada do catenóide $X^*(w) = \operatorname{Im} f(w)$, que é dada por

$$\begin{aligned} x^*(u, v) &= \alpha \sinh u \sin v \\ y^*(u, v) &= \alpha \sinh u \cos v \\ z^*(u, v) &= \alpha v. \end{aligned}$$

Ou ainda podemos escrever $X^*(u, v) = \alpha Y(v) + \alpha \sinh u Z(v)$, onde $Y(v) = (0, 0, v)$, $Z(v) = (\sin v, \cos v, 0)$. Isto é, X^* é uma superfície regrada com o eixo- z como diretriz. Agora $\forall v \in \mathbf{R}$, a curva $X^*(\cdot, v)$ é um segmento de reta que intercepta o eixo- z perpendicularmente. Se fixamos $u \neq 0$, então $X^*(u, \cdot)$ descreve a hélice de passo $2\pi|\alpha|$. Esta hélice é o lado esquerdo do segmento para $\alpha > 0$ e o lado direito para $\alpha < 0$. Logo X^* é o helicóide. Em outras palavras, a superfície conjugada do catenóide é o helicóide.

7.3 Proposição:[BC]

Qualquer superfície mínima regular regrada de \mathbf{R}^3 é, a menos de um movimento rígido, parte de um plano ou parte de um helicóide.

Demonstração:

Se $X \subset \mathbf{R}^3$ é uma superfície regrada, então X pode ser representada localmente pela parametrização

$$(5) \quad X(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

onde $\alpha(s)$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco s perpendicular as retas de X , e $\beta(s)$ é um campo de vetores unitários ao longo de $\alpha(s)$ e na direção das retas que passam através de $\alpha(s)$. Além disso, podemos assumir α e β curvas holomórficas. De (5) temos:

$$\begin{aligned} X_s &= \alpha'(s) + t\beta'(s) \\ X_t &= \beta(s) \\ X_s \wedge X_t &= \alpha'(s) \wedge \beta(s) + t\beta'(s) \wedge \beta(s) \\ |X_s \wedge X_t| &= E = \sqrt{1 + 2t \langle \alpha', \beta' \rangle + t^2 |\beta'|^2}. \end{aligned}$$

Logo o campo de vetores unitário normal N ao longo de $\alpha(s)$ é dado por:

$$N = \frac{\alpha' \wedge \beta + t\beta' \wedge \beta}{\sqrt{1 + 2t \langle \alpha', \beta' \rangle + t^2 |\beta'|^2}}.$$

Temos que X é mínima $\Leftrightarrow H = \frac{e+g}{2E} = 0[M]$. Observe que $X_{tt} = 0$ e $X_{ss} = \alpha'' + t\beta''$. Logo $H = 0 \Rightarrow e = \langle N, X_{ss} \rangle = 0$. Logo vemos que X é mínima \Leftrightarrow

$$(6) \quad \langle \beta' \wedge \beta, \beta'' \rangle t^2 + [\langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle]t + \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle = 0.$$

Observando (6) vemos que o lado esquerdo é um polinômio na variável t , logo:

$$(7) \quad \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle = 0$$

$$(8) \quad \langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle = 0$$

$$(9) \quad \langle \beta' \wedge \beta, \beta'' \rangle = 0.$$

Segue de (7) que α'' pertence ao plano gerado por α' e β . Mas como α é parametrizada pelo comprimento de arco então α e α' são perpendiculares, logo

$$(10) \quad \alpha'' \text{ é paralelo a } \beta.$$

Então $\langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle = 0$. Logo de (8) temos

$$(11) \quad \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle = 0.$$

Assim de (9) e de (11) vemos que β'' pertence simultaneamente ao plano gerado por α' e β e ao plano gerado por β' e β . A interseção destes dois planos contém pelo menos o subespaço gerado pelo vetor β .

Se existe um ponto onde β'' não é paralelo a β então dentro de uma vizinhança deste ponto esses dois planos coincidirão e α' é paralelo a β' . Como α e β são funções reais analíticas isto ocorre em todo lugar. Portanto temos que $(\beta \wedge \alpha')' = \beta' \wedge \alpha' + \beta \wedge \alpha'' = 0$. Assim o plano gerado por β e α' é constante. Logo $\tau = 0$ e portanto α é uma curva plana e a superfície descrita por X é parte de um plano.

Por outro lado se β'' é paralelo a β em todo lugar e α' e β' não são paralelos num ponto, então isto ocorre nas vizinhanças deste ponto. Neste caso temos:

(12) a curvatura k e a torção τ de α são constantes.

De fato, de $k = \langle \alpha'', \beta \rangle$ e de $\langle \alpha', \beta \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha'', \beta \rangle = -\langle \alpha', \beta' \rangle$ segue que $\pm \frac{dk}{ds} = (\langle \alpha'', \beta \rangle)' = -(\langle \alpha', \beta' \rangle)' = -\langle \alpha'', \beta' \rangle - \langle \alpha', \beta'' \rangle = 0$; logo k é constante.

Agora pelas fórmulas de Frenet $b = \alpha' \wedge \beta \Rightarrow \langle b', \beta \rangle = \langle \alpha'' \wedge \beta, \beta \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta', \beta \rangle = \langle \alpha' \wedge \beta', \beta \rangle$, logo $\pm \tau = \langle \alpha' \wedge \beta', \beta \rangle$. Portanto $\pm \frac{d\tau}{ds} = \langle \alpha'' \wedge \beta', \beta \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta'', \beta \rangle = 0$. Ou seja, τ é constante.

Agora como $\frac{k}{\tau} = cte \Leftrightarrow \alpha(s)$ é uma hélice ([K] pág. 75), a menos de um movimento rígido em \mathbf{R}^3 , $\alpha(s)$ pode ser representada pela parametrização $\alpha(s) = (A \cos as, A \sin as, bs)$ onde $A^2 a^2 + b^2 = 1$. Como β é paralelo a α'' temos $\beta(s) = \pm(\cos as, \sin as, 0)$. Logo $\alpha(s) + t\beta(s) = ((A \pm t) \cos as, (A \pm t) \sin as, bs)$, e fazendo $u = A \pm t, v = s$, obtemos $X(u, v) = (u \cos av, u \sin av, bv)$. Assim X é parte de um helicóide. ■

Usando as equações diferenciais das linhas assintóticas e das linhas de curvatura descritas nas seções 1.11 e 1.8 respectivamente, vemos que para o catenóide as linhas assintóticas são dadas por $\alpha(t) = X(\pm v(t) + k(t), v(t))$, e as linhas de curvatura por $u = cte$ ou $v = cte$, isto é, as linhas de curvatura são as curvas coordenadas. Logo pelo teorema 3.2, para o helicóide as linhas de curvatura são $\alpha(t) = X(\pm v(t) + k(t), v(t))$ e suas linhas assintóticas são as curvas coordenadas. Um esboço das linhas assintóticas e das linhas de curvatura pode ser visto nas Fig. 3 e Fig. 4, respectivamente.

As superfícies associadas do catenóide são dadas por $Z(w, \theta) = Re \{ e^{-i\theta} f(w) \} = X(w) \cos \theta + X^*(w) \sin \theta, \theta \in \mathbf{R}$, isto é:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cosh u \cos v \cos \theta + \alpha \sinh u \sin v \sin \theta \\ y &= -\alpha \cosh u \sin v \cos \theta + \alpha \sinh u \cos v \sin \theta \\ z &= \alpha u \cos \theta + \alpha v \sin \theta. \end{aligned}$$

Observe que se $\theta = 0$, $Z(w, 0)$ é o catenóide, e se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $Z(w, \frac{\pi}{2})$ é o helicóide. Um esboço destas superfícies é dado na fig. 5.

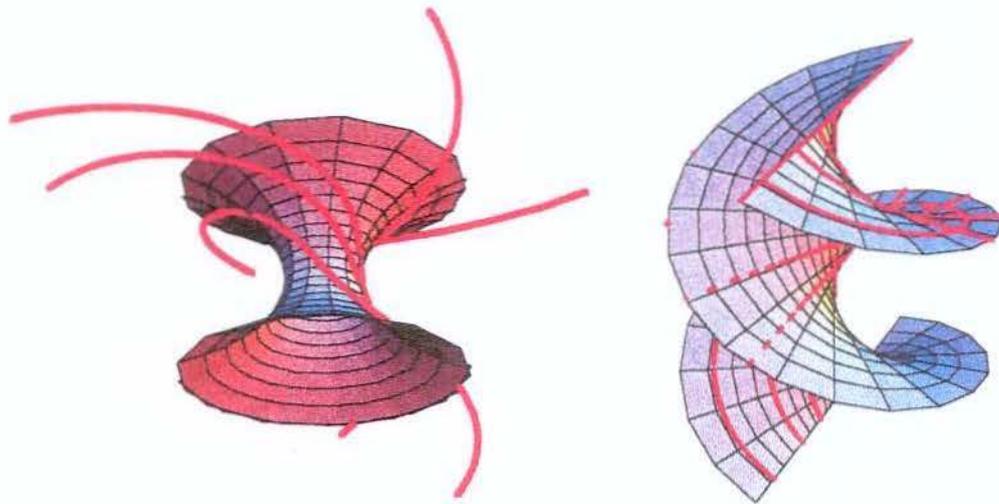


Fig. 3: Ilustração das linhas assintóticas(de vermelho) do catenóide e do helicóide.

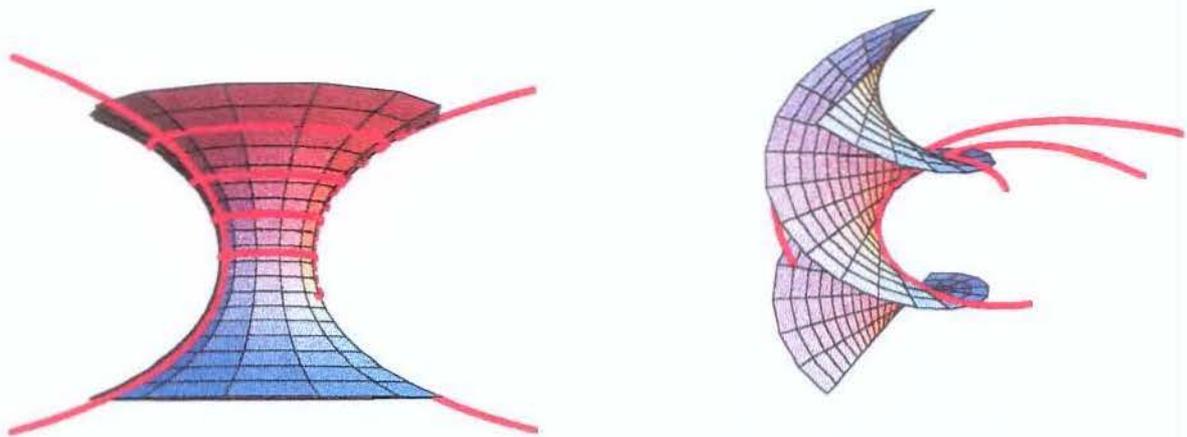
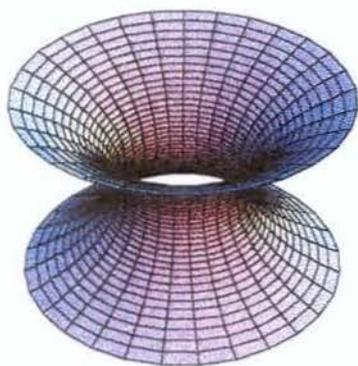
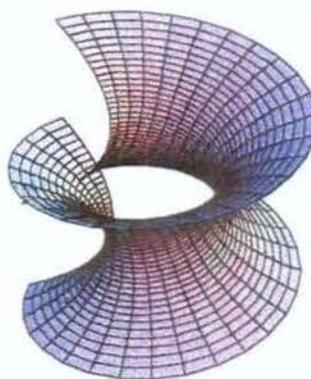


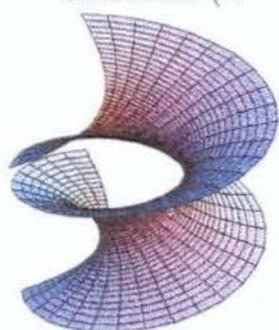
Fig. 4: Ilustração das linhas de curvatura(de vermelho) do catenóide e do helicóide.



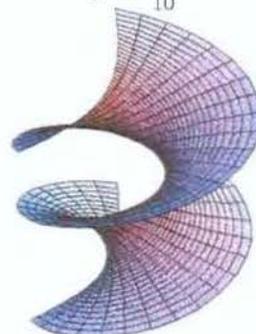
Catenóide ($\theta = 0$)



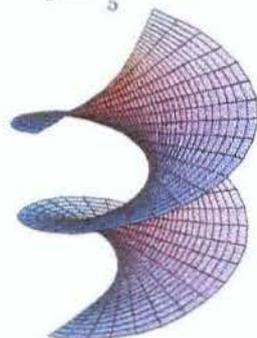
$\theta = \frac{\pi}{10}$



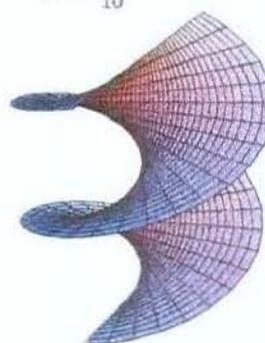
$\theta = \frac{\pi}{5}$



$\theta = \frac{3\pi}{10}$



$\theta = \frac{2\pi}{5}$



helicóide ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

Fig. 5: Família de superfícies associadas ao catenóide.

7.4 A segunda superfície de Scherk

Considere a superfície mínima $Y(\omega)$ definida por

$$\begin{aligned}x &= \alpha + \operatorname{Re} \int_1^\omega (1 - \omega^2) \Im(\omega) d\omega \\y &= \operatorname{Re} \int_1^\omega i(1 + \omega^2) \Im(\omega) d\omega \\z &= \gamma + \operatorname{Re} \int_1^\omega 2\omega \Im(\omega) d\omega, \text{ com a função de Weierstrass } \Im(\omega) = \\&= \frac{-(\alpha - i\beta)}{2\omega^2}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}; \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \text{ Daí podemos escrever:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \alpha + \operatorname{Re} \frac{-(\alpha - i\beta)}{2} \int_1^\omega \left(\frac{1}{\omega^2} - 1\right) d\omega = \alpha + \operatorname{Re} \frac{-(\alpha - i\beta)}{2} \left(2 - \frac{1}{\omega} - \omega\right) = \\&= \alpha + \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) - \alpha + i\beta - i\frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) + i\beta - i\frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Re} \left[i \frac{-(\alpha - i\beta)}{2} \int_1^\omega \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right) d\omega \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{-\alpha i - \beta}{2} \int_1^\omega \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right) d\omega \right] = \\&= \operatorname{Re} \left[\frac{-\alpha i - \beta}{2} \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) \right]\end{aligned}$$

$$z = \gamma + \operatorname{Re}(-\alpha + i\beta) \int_1^\omega \frac{1}{\omega} d\omega = \gamma + \operatorname{Re}[(-\alpha + i\beta)(\ln \omega)].$$

Agora se substituirmos $\omega = e^{-w}$, $w = u + iv$, as expressões anteriores podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{2} (e^w + e^{-w}) + i\beta - i\frac{\beta}{2} (e^w + e^{-w}) \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{2} (e^u (\cos v + i \sin v) \right. \\&+ e^{-u} (\cos v - i \sin v)) + i\beta - \frac{i\beta}{2} (e^u (\cos v + i \sin v) + e^{-u} (\cos v - i \sin v))] = \\&= \alpha \cos v \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) + \beta \sin v \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) = \alpha \cos v \cosh u + \beta \sin v \sinh u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Re} \frac{-\alpha i - \beta}{2} (e^{-w} - e^w) = \operatorname{Re} \frac{-\alpha i - \beta}{2} (e^{-u} (\cos v - i \sin v) - e^u (\cos v + \\&i \sin v)) = -\alpha \left(\frac{e^{-u} + e^u}{2} \right) \sin v + \beta \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) \cos v = -\alpha \cosh u \sin v + \beta \sinh u \cos v\end{aligned}$$

$$z = \gamma + \operatorname{Re}(-\alpha + i\beta) \ln e^{-w} = \gamma + \operatorname{Re}[(-\alpha + i\beta)(-u - iv)] = \gamma + \alpha u + \beta v.$$

Logo obtemos uma representação paramétrica de uma família de superfícies mínimas:

$$X(u, v) = (\alpha \cos v \cosh u + \beta \sin v \sinh u, -\alpha \cosh u \sin v + \beta \sinh u \cos v, \gamma + \alpha u + \beta v).$$

Para uma escolha fixa de α, β, γ denotaremos esta superfície por **segunda superfície de Scherk**. Desta família quando $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ obtemos um helicóide e um catenóide. De fato podemos escrever $X(w)$ usando as fórmulas: $X^{cat}(w) = (\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, u)$ para o catenóide, $X^{hel}(w) = (\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, v)$ para o helicóide, e escolhendo $\gamma = 0$, temos:

$$X(w) = \alpha X^{cat}(w) + \beta X^{hel}(w).$$

Também podemos escrever $\alpha = c \cos \theta, \beta = c \sin \theta$ com $c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, e daí segue que:

$$X(w) = c[\cos \theta X^{cat}(w) + \sin \theta X^{hel}(w)].$$

Em outras palavras, a segunda superfície de Scherk nada mais é do que uma superfície associada do catenóide (veja Fig. 6).

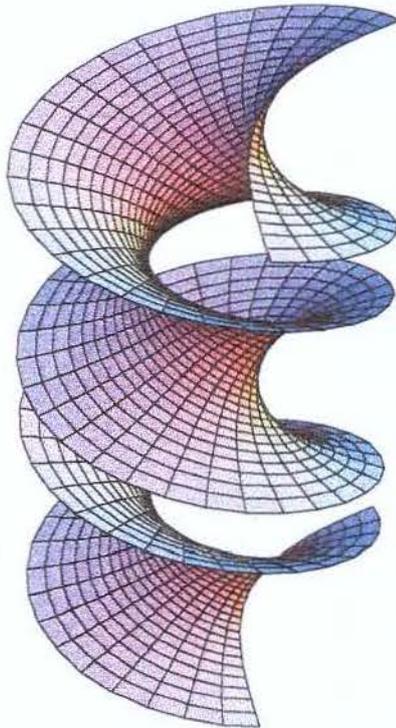


Fig. 6: A segunda superfície de Scherk (superfície do tipo helicoidal).

7.5 A superfície de Catalan

A superfície de Catalan é obtida resolvendo o problema de Björling para a faixa consistindo do cicloide $c(t) = (1 - \cos t, 0, t - \sin t)$, $t \in \mathbf{R}$ e de sua normal principal.

De fato, $c(t) = (1 - \cos t, 0, t - \sin t)$, $t \in \mathbf{R}$ é uma curva regular analítica contida no plano- xz , então pela proposição 6.8:

$$X(u, v) = (Re(1 - \cos w), Im \int_0^w \{(1 - \cos w)'^2 + (w - \sin w)'^2\}^{\frac{1}{2}} dw,$$

$Re(w - \cos w)$, $w = u + iv \in \mathbf{C}$

define uma superfície mínima que intercepta plano- xz ao longo de c . Além disso, $c(t)$ é uma linha de curvatura e uma geodésica de X , e o plano- xz é um plano de simetria de X . Mas:

$$x(u, v) = Re(1 - \cos w) = 1 - Re\left(\frac{e^{iu-v} + e^{-iu+v}}{2}\right) = 1 - Re\frac{1}{2}(e^{-v}(\cos u + i \sin u) + e^v(\cos u - i \sin u)) = 1 - Re\left(\cos u\left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right) + i \sin u\left(\frac{e^{-v} - e^v}{2}\right)\right) = 1 - \cos u \cosh v$$

$$y(u, v) = Im \int_0^w \{\sin^2 w + (1 - \cos w)^2\}^{\frac{1}{2}} dw = Im \int_0^w \sqrt{2(1 - \cos w)} dw = 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2},$$

$$z(u, v) = Re(w - \sin w) = u - Re\frac{e^{iu-v} - e^{-iu+v}}{2i} = u - Re(\cos u \frac{e^{-v} - e^v}{2i} + i \sin u \frac{e^{-v} + e^v}{2i}) = u - Re(\sin u \cosh v + i \cos u \sinh v) = u - \sin u \cosh v.$$

Logo a superfície de Catalan X pode ser escrita como

$$X(u, v) = (1 - \cos u \cosh v, 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}, u - \sin u \cosh v).$$

Daí temos $X_u(u, v) = (\sin u \cosh v, 2 \cos \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}, 1 - \cos u \cosh v)$ e assim $X_u(u, v) = 0 \Rightarrow (u, v) = (2\pi k, 0), k \in \mathbf{Z}$. Isto é os pontos de ramificação de X são da forma $(2\pi k, 0), k \in \mathbf{Z}$. As imagens destes pontos são as cúspides do ciclóide $c(u) = X(u, 0) = (1 - \cos u, 0, u - \sin u)$. Veja uma ilustração destes pontos na Fig. 7.

Considere a curva isotrópica $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^3$ dada por $f(w) = (1 - \cosh(iw), 4i \cosh \frac{iw}{2}, w + i \sinh(iw))$. Observe que $f(w)$ pode ser escrita como:

$$f(w) = (1 - \cos u \cosh v + i \sin u \sinh v, 4i(\cos \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2} - i \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}), u + iv - \sin u \cosh v - i \cos u \sinh v).$$

E assim $X(u, v) = Ref(w)$. Em outras palavras a superfície de Catalan pode ser escrita como $X(u, v) = Ref(w)$, e sua superfície conjugada tem a representação:

$$X^*(u, v) = (\sin u \sinh v, 4 \cos \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2}, v - \cos u \sinh v).$$

As superfícies associadas da superfície de Catalan são dadas por $Z(w, \theta) = Re\{e^{-i\theta} f(w)\} = X(w) \cos \theta + X^*(w) \sin \theta, \theta \in \mathbf{R}$; isto é:

$$x = (1 - \cos u \cosh v) \cos \theta + \sin u \sinh v \sin \theta,$$

$$y = 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \cos \theta + 4 \cos \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2} \sin \theta,$$

$$z = (u - \sin u \cosh v) \cos \theta + (v - \cos u \sinh v) \sin \theta.$$

Um esboço destas superfícies é dado na fig. 8.

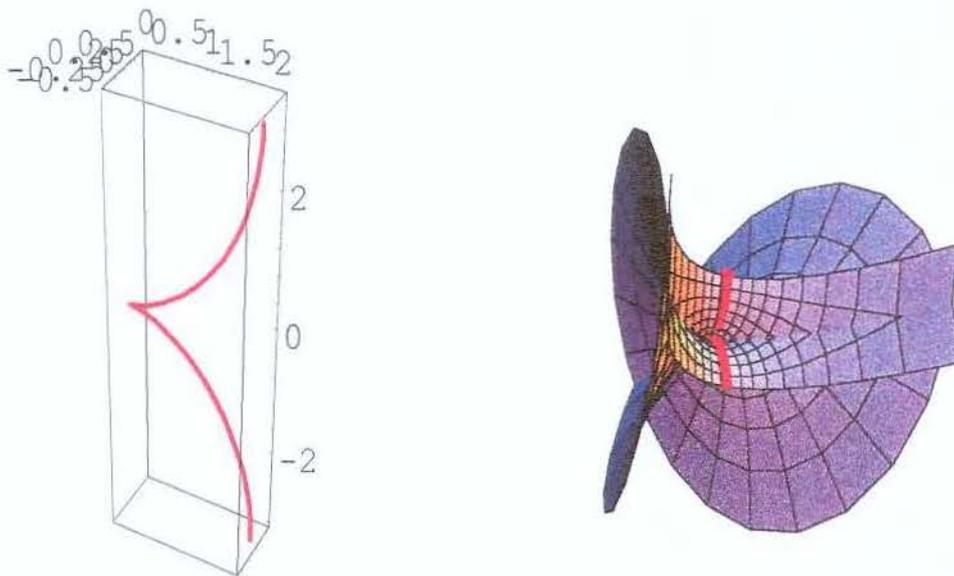


Fig. 7: A superfície de Catalan é obtida como solução do problema de Björling para o cicloide (de vermelho) e sua normal principal. Seus pontos de ramificação são as cúspides do cicloide.

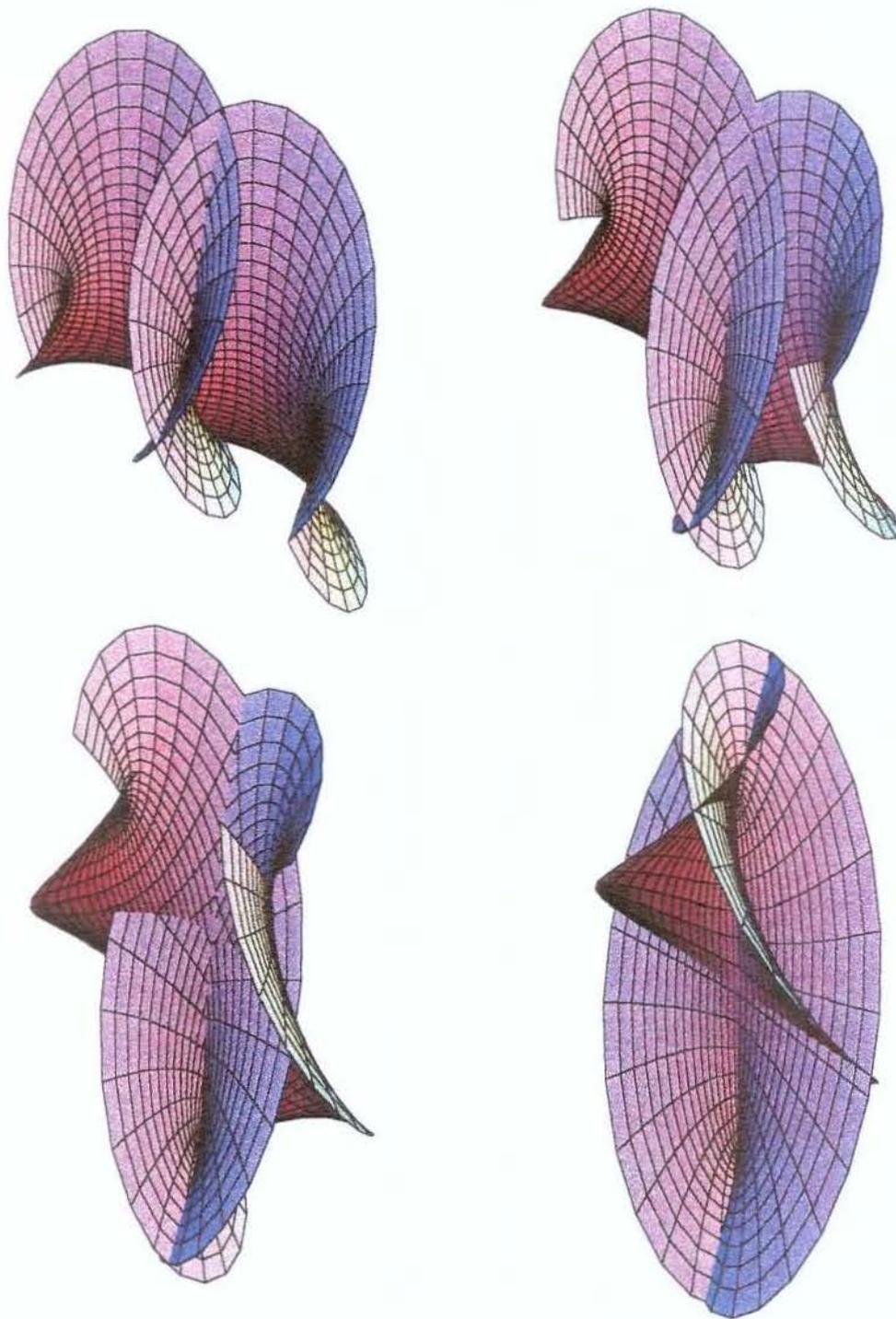


Fig. 8: Família de superfícies associadas à superfície de Catalan.
 $\{\theta = 0$ (Catalan), $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{2}\}$.

7.6 A superfície de Henneberg

Resolvamos o problema de Bjöling para uma faixa real analítica $\{(c(t), n(t)); t \in I\}$ onde $c(t) = (x(t), 0, z(t)) = (\cosh 2t - 1, 0, -\sinh t + \frac{1}{3} \sinh 3t)$ ($c(t)$ é uma parametrização da parábola de Neil), $t \in I$ e n seu vetor normal principal. Observe que $c(t)$ está contida no plano- xz , então pela proposição 6.8: $X(u, v) = (Re(\cosh 2w - 1), Im \int_0^w \{(\cosh 2w - 1)'^2 + (-\sinh w + \frac{1}{3} \sinh 3w)'\}^{\frac{1}{2}} dw, Re(-\sinh w + \frac{1}{3} \sinh 3w))$, $w = u + iv \in \mathbf{C}$, define uma superfície mínima que é chamada de **superfície de Henneberg**; além disso c é linha de curvatura e geodésica de X , e o plano- xz é plano de simetria. Podemos escrever $X(u, v)$ da seguinte forma:

$$x = Re(\cosh 2w - 1) = Re(-1 + \cosh 2u \cos 2v + i \sinh 2u \sin 2v) = -1 + \cosh 2u \cos 2v$$

Agora usando as identidades: $\cosh 2t = 1 + 2 \sinh^2 t$, $\frac{1}{3} \sinh 3t - \sinh t = \frac{4}{3} \sinh^3 t$, obtemos:

$$y = Im \int_0^w \{(2 \sinh^2 w)'^2 + (\frac{4}{3} \sinh^3 w)'\}^{\frac{1}{2}} dw = Im \int_0^w \{(4 \sinh w \cosh w)^2 + (4 \sinh^2 w \cosh w)^2\}^{\frac{1}{2}} dw = Im \int_0^w \{16 \sinh^2 w \cosh^2 w + 16 \sinh^4 w \cosh^2 w\}^{\frac{1}{2}} dw = \frac{-1}{3} \sinh 3u \sin 3v - \sinh u \sin v$$

$$z = Re(-\sinh w + \frac{1}{3} \sinh 3w) = Re(-\sinh u \cos v - i \cosh u \sin v + \frac{1}{3} \sinh 3u \cos 3v + \frac{1}{3} \cosh 3u \sin 3v) = -\sinh u \cos v + \frac{1}{3} \sinh 3u \cos 3v.$$

Logo a superfície de Henneberg pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x &= -1 + \cosh 2u \cos 2v \\ y &= -\sinh u \sin v - \frac{1}{3} \sinh 3u \sin 3v \\ z &= -\sinh u \cos v + \frac{1}{3} \sinh 3u \cos 3v. \end{aligned}$$

Por outro lado considerando a curva isotrópica $f(w) = (-1 + \cosh 2w, i \cosh w + \frac{i}{3} \cosh 3w, -\sinh w + \frac{1}{3} \sinh 3w) = (-1 + \cosh 2u \cos 2v + i \sinh 2u \sin 2v, i \cosh u \cos v - \sinh u \sin v + \frac{i}{3} \cosh 3u \cos 3u - \frac{1}{3} \sinh 3u \sin 3v, -\sinh u \cos v - i \cosh u \sin v + \frac{1}{3} \sinh 3u \cos 3v + \frac{i}{3} \cosh 3u \sin 3v)$, vemos que a superfície de Henneberg é $X(u, v) = Ref(w)$, e sua superfície conjugada X^* tem a forma:

$$\begin{aligned} x^* &= \sinh 2u \sin 2v \\ y^* &= \cosh u \cos v + \frac{1}{3} \cosh 3u \cos 3v \\ z^* &= -\cosh u \sin v + \frac{1}{3} \cosh 3u \sin 3v. \end{aligned}$$

Agora $X_u(u, v) = (2 \sinh 2u \cos 2v, -\cosh u \sin v - \cosh 3u \sin 3v, -\cosh u \cos v + \cosh 3u \cos 3v)$. E de $X_u(u, v) = 0$ temos que $(u, v) = (0, \frac{k\pi}{2}), k \in \mathbf{Z}$ fornecem os pontos de ramificação de X , e logo de X^* . A curva:

$X^*(0, v) = (0, \frac{4}{3} \cos^3 v, -\frac{4}{3} \sin^3 v)$ é um asteróide no plano- yz conectando os quatro pontos de ramificação da superfície conjugada à superfície de Henneberg para $0 < v \leq 2\pi$. Veja ilustração na Fig. 10.

Por outro lado, $X(0, v) = (-1 + \cos 2v, 0, 0)$ é um segmento de reta, logo pelo lema 6.5 é uma geodésica e uma linha assintótica, e pelo teorema 6.3 é uma linha de simetria de X . Além disso os pontos finais de $X(0, v)$ são dois pontos de ramificação de X . O segmento de reta $X^*(u, 0) = (0, \frac{4}{3} \cosh^3 u, 0) = \text{eixo-}y$ é uma linha de simetria de X^* , e também uma linha assintótica e uma geodésica. Veja ilustração Fig. 11.

A família das superfícies associadas à superfície de Henneberg é dada por:
 $x = (-1 + \cosh 2u \cos 2v) \cos \theta + \sinh 2u \sin 2v \sin \theta,$
 $y = (-\sinh u \sin v - \frac{1}{3} \sinh 3u \sin 3v) \cos \theta + (\cosh u \cos v + \frac{1}{3} \cosh 3u \cos 3v) \sin \theta,$
 $z = (-\sinh u \cos v + \frac{1}{3} \sinh 3u \cos 3v) \cos \theta + (-\cosh u \sin v + \frac{1}{3} \cosh 3u \sin 3v) \sin \theta.$
 Um esboço da superfície de Henneberg e suas superfícies associadas é dado nas figuras 12 e 13.

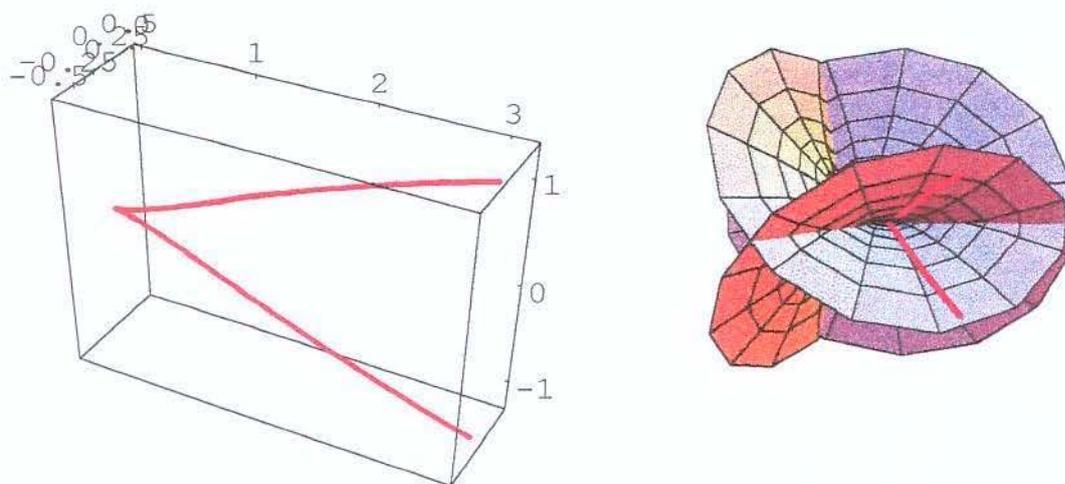


Fig. 9: A superfície de Henneberg é obtida como solução do problema de Björling para a parábola de Neil (de vermelho) e de sua normal principal.

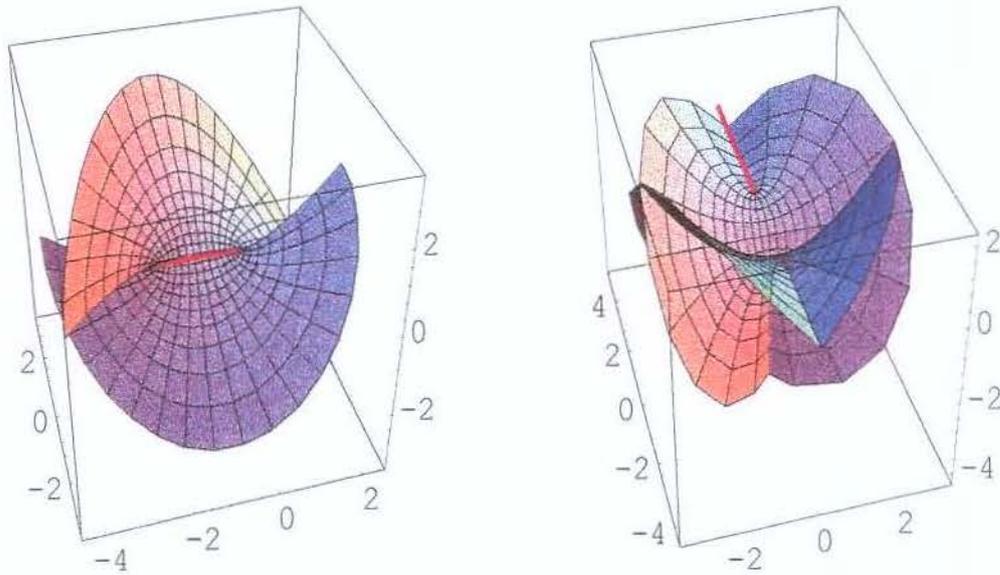


Fig.10: Ilustração das linhas de simetria (de vermelho) para a superfície de Henneberg ($0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}, u \leq |3\frac{\pi}{10}|$) e para sua superfície conjugada ($0 \leq v \leq \pi, u \leq |3\frac{\pi}{10}|$), respectivamente.

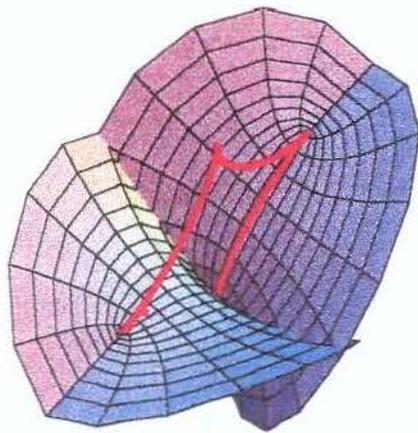


Fig. 11: Ilustração da superfície conjugada da superfície de Henneberg para $0 \leq v \leq 2\pi$. Os quatro pontos de ramificação de X^* são conectados pelo asteróide (de vermelho).

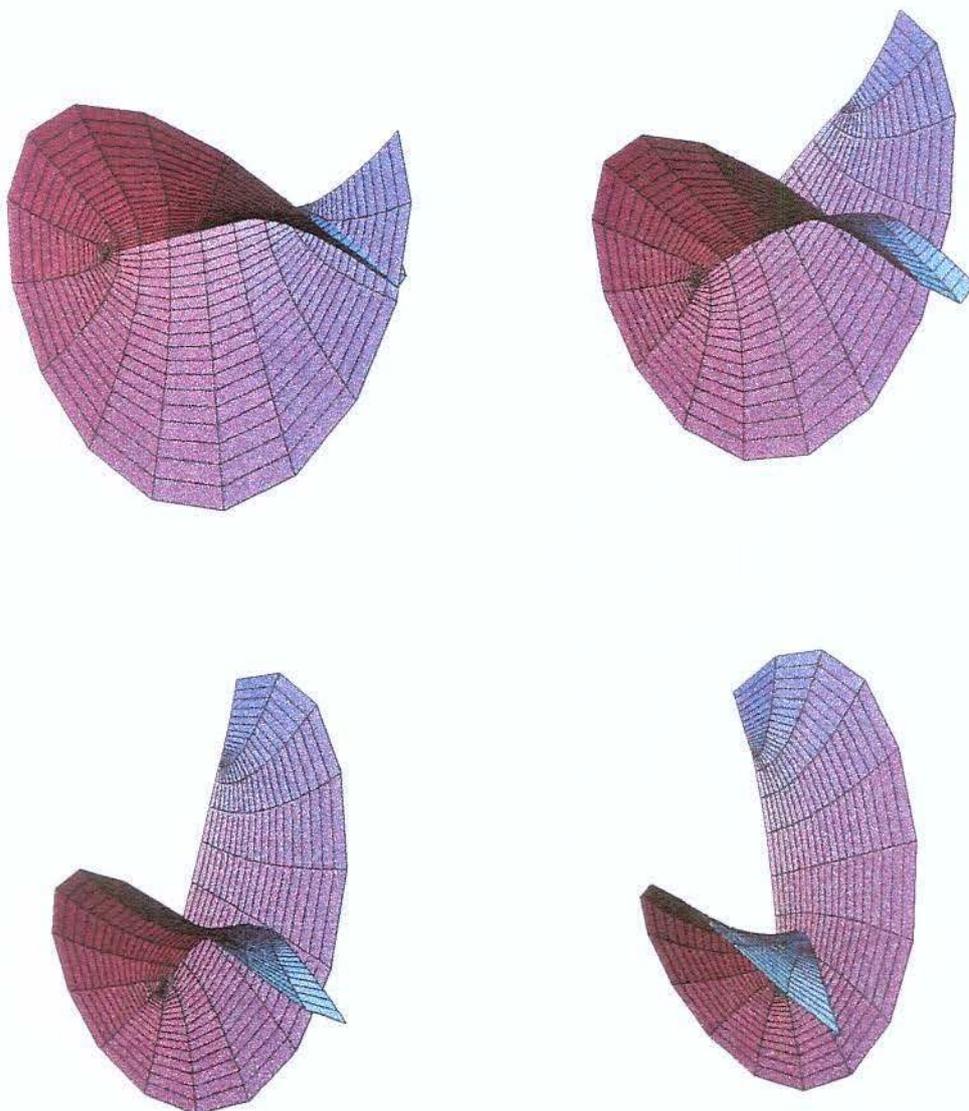


Fig. 12: Parte da superfície de Henneberg e suas associadas correspondendo a variação $0 \leq u \leq \frac{\pi}{5}$ e $0 \leq v \leq \pi$.

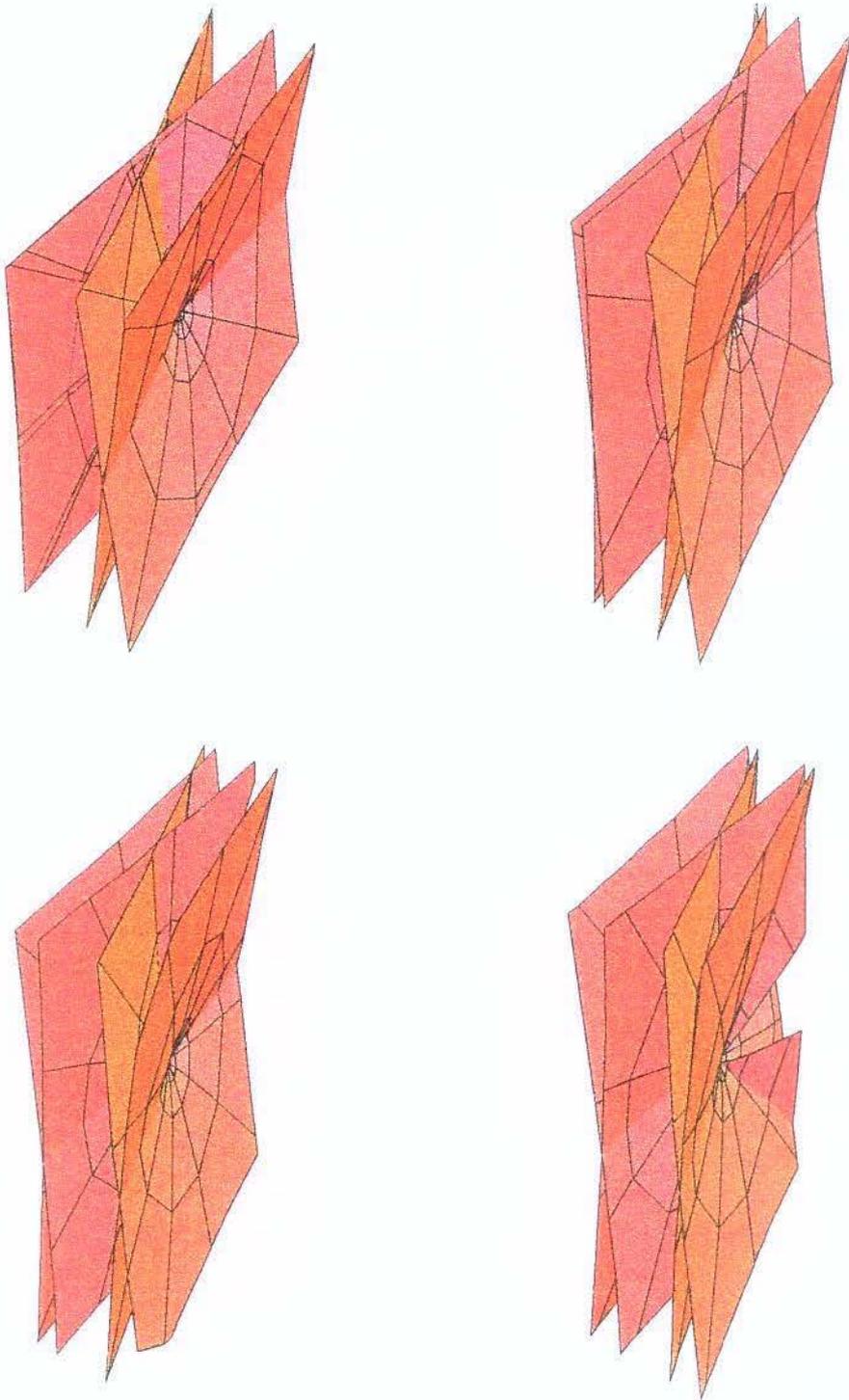


Fig. 13: Parte da superfície de Henneberg e suas associadas correspondendo a variação $u \leq |\pi|$ e $v \leq |2|$.

Bibliografia

- [GS] C. Gutiérrez and J. Sotomayor, *Principal lines on surfaces immersed with constant mean curvature*, *Tras. Ame. Math. Soc.* 293(1986) 751-766.
- [C] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I*, second edition, Springer-Verlag, New York, Inc (1978).
- [N] J.C.C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, vol. 1: Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary problems. Cambridge Univ. Press (1989).
- [BC] J. L. Barbosa, A. G. Colares; *Lectures Notes Math.* 1195, Springer, Berlin Heidelberg, New York (1986).
- [H] K. Hoffman and R. Kunze, *Álgebra Linear*, Polígono - São Paulo (1970).
- [K] K. Tenenblat, *Introdução à Geometria Diferencial*. Editora Universidade de Brasília - Brasília (1990).
- [M] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc. (1976).
- [O] O. Aléssio, *Linhas assintóticas em superfícies mínimas de \mathbf{R}^3* , dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, (1998).
- [O1] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*. Van Nostrand, New York (1969).
- [DHKW] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster and O. Wohlrab, *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlang (1992).