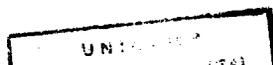


**IMECC – UNICAMP
1999**

Tese de Doutorado sob orientação de: João Frederico C. A. Meyer

**ANÁLISES DE PROBLEMAS POPULACIONAIS
INTRAESPECÍFICOS E INTERESPECÍFICOS COM DIFUSÃO
DENSIDADE-DEPENDENTE.**

Tânia Maria Vilela Salgado Lacaz



**ANÁLISE DE PROBLEMAS POPULACIONAIS
INTRAESPECÍFICOS E INTERESPECÍFICOS COM DIFUSÃO
DENSIDADE-DEPENDENTE.**

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por
Tânia Maria Vilela Salgado Lacaz
e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de fevereiro de 1999



Prof. Dr. João Frederico C.A. Meyer
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação - Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Lacaz, Tânia Maria Vilela Salgado

L116a Análises de problemas populacionais intraespecíficos e
interespecíficos com difusão densidade-dependente / Tânia Maria Vilela
Salgado Lacaz -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais não-lineares. 2. Equações diferenciais
parciais. 3. Método dos elementos finitos. I. Meyer, João Frederico da
Costa Azevedo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 26 de fevereiro de 1999

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER



Prof (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



Prof (a). Dr (a). SÔNIA REGINA DAL-RI MURCIA



Prof (a). Dr (a). SANDRA MARA CARDOSO MALTA



Prof (a). Dr (a). CLÁUDIA MARIA JACOBI

Instrui-te, para que possas andar por teus passos na vida, e transmite aos teus filhos a instrução, que é dote que não se gasta, direito que não se perde, liberdade que não se limita.

Coelho Neto

Agradecimentos

Ao Prof. João Frederico (Joni) pela amizade e dedicação extrema no trabalho de orientação.

A Rúbia pela inestimável ajuda.

Ao Renato, que até o último momento foi companheiro, trocando idéias e dividindo tarefas.

Às minhas filhas Helena e Laura, eternas fontes de alegria, prazer e consolo.

À minha família pela compreensão e carinho, especialmente ao meu irmão Luiz Eduardo pelas valorosas sugestões.

À pessoa que sempre acreditou na força do meu trabalho: meu querido amigo e orientador de mestrado Prof. Dr. Wagner Sessin.

Às minhas colegas de trabalho e amigas Maria Helena C.F. Lacaz e Leopoldina C.F. Ribeiro, pelo incentivo e exemplo.

Às funcionárias Fátima e Luciana do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC, e Cidinha da Pós-Graduação do IMECC pela gentileza e disposição diárias para nos ajudar.

À Ana Maria da Seção de Biblioteca da FEG-UNESP por sua gentileza e eficiência.

Aos colegas e amigos do IMECC e da FEG-UNESP pelo apoio, e às pessoas que me querem bem e torceram por mim.

À minha mãe, Isa.

ÍNDICE

Introdução:		01
Capítulo 1:	Da dependência temporal à dependência espaço-temporal.	06
§1.0	Introdução.	06
§1.1	Dependência espaço-temporal: resultados históricos e recentes.	18
Capítulo 2:	Modelos intraespecíficos com coeficiente de difusão variável.	23
§2.0	Introdução.	23
§2.1	O problema populacional.	24
§2.1.1	A formulação fraca.	26
§2.1.2	A existência e a unicidade da solução fraca.	29
§2.1.3	O modelo discreto.	33
§2.1.4	A discretização espacial: o método dos elementos finitos de primeira ordem.	36
§2.1.5	A discretização temporal : o método de Crank-Nicolson.	37
§2.1.6	Comentários sobre convergência.	38
Capítulo 3:	Distribuição populacional do bicudo do algodoeiro.	45
§3.0	Introdução.	45
§3.1	Aplicação 1: Dispersão do bicudo do algodoeiro no Estado de São Paulo na década de 80 .	48
§3.2	Aplicação 2: Controle biológico do bicudo do algodoeiro em uma área de plantio.	59

Capítulo 4:	A dispersão densidade-dependente em modelos intraespecíficos - a difusibilidade densidade-dependente.	74
§4.0	Introdução.	74
§4.1	Um modelo de dispersão densidade-dependente intraespecífico - a difusibilidade densidade-dependente.	77
§4.1.1	A formulação fraca do problema.	77
§4.1.2	O Método de Galerkin.	79
§4.1.3	A discretização espacial: o método dos elementos finitos de segunda ordem.	81
§4.1.4	A discretização temporal: o método de Crank-Nicolson.	82
§4.1.5	Resultados de simulações numéricas.	84
Capítulo 5:	Modelos interespecíficos.	96
§5.0	Introdução.	96
§5.1	Dependência espaço-temporal em modelos interespecíficos.	103
§5.1.1	A formulação fraca.	104
§5.1.2	O modelo semi-discreto.	106
§5.1.3	A discretização espacial: o método dos elementos finitos de segunda ordem.	108
§5.1.4	A discretização temporal : o método de Crank-Nicolson.	109
§5.1.5	Resultados de simulações numéricas.	110
§5.1.5.1	Primeiro caso: coeficientes constantes.	110
§5.1.5.2	Segundo caso: decaimento variável no tempo.	118
§5.2	Modelos interespecíficos descritos por equações de advecção-difusão.	122
§5.2.1	A formulação fraca.	123
§5.2.2	O modelo discreto.	124
§5.2.3	As discretizações espacial e temporal.	125

§5.2.4	Resultados de simulações numéricas.	126
§5.2.4.1	Primeiro caso: coeficientes constantes.	126
§5.2.4.2	Segundo caso: coeficientes variáveis no tempo.	130
Capítulo 6:	A dispersão densidade-dependente em modelos interespecíficos.	135
§6.1	A dinâmica vital densidade-dependente: equações de reação-difusão	135
§6.1.1	O problema populacional.	137
§6.1.2	A formulação fraca.	138
§6.1.3	O modelo completamente discretizado.	139
§6.2	A difusibilidade densidade-dependente.	143
§6.2.1	O problema populacional.	144
§6.2.1	A formulação fraca.	145
§6.2.2	O modelo discreto.	147
§6.2.3	As discretizações espacial e temporal.	147
§6.3	Resultados de simulações numéricas.	152
Conclusões:	Considerações finais	159
Apêndice:	Índice do apêndice	162
Apêndice 1:	Considerações sobre a equação da difusão.	163
Apêndice 2:	Lions ⁴⁹ : Teorema de existência e unicidade.	167
Apêndice 3:	Sub-matrizes de rigidez tri-dimensionais.	172
Apêndice 4:	Comentários gerais sobre convergência.	177
Apêndice 5:	Alguns programas desenvolvidos.	188
Bibliografia		253

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 1:	Da dependência temporal à dependência espaço-temporal.	06
Figura 1.0.1	Crescimento exponencial $N \times t$ para o Modelo de Malthus.	07
Figura 1.0.2	Crescimentos populacionais do tipo logístico.	08
Figura 1.0.3	Representação gráfica da equação logística - modelo de Verhulst .	09
Figura 1.0.4	Representação gráfica de soluções do modelo de Verhulst.	09
Figura 1.0.5	Representação gráfica da equação de Gompertz.	11
Figura 1.0.6	Representação gráfica de soluções do modelo de Gompertz.	11
Figura 1.0.7	Representação gráfica da equação de Schaefer.	12
Figura 1.0.8	Solução do modelo de Bassanezi e Meyer.	13
Figura 1.0.9	Representação gráfica de $\frac{dN}{dt} \times N$.	14
Figura 1.0.10	Soluções qualitativas para o modelo (1.0.14).	15
Figura 1.0.11	Representações gráficas da equação (1.017) para diversos valores de r_B .	16
Capítulo 3:	Distribuição populacional do bicudo do algodoeiro.	45
Figura 3.0.1	Mapa do Estado e as localizações de algumas DIRAs.	45
Figura 3.1.1	Mapa do Estado e a definição da região de interesse.	48
Figura 3.1.2	Domínio espacial utilizado nas simulações numéricas.	49
Figura 3.1.3	Distribuição inicial de insetos na região de Campinas.	51
Figura 3.1.4	Distribuição da população de insetos após um ano.	54
Figura 3.1.5	Distribuição final da população de insetos - 1989.	54
Figura 3.1.6	Distribuição da população de insetos após um ano.	55
Figura 3.1.7	Distribuição final da população de insetos - 1989.	56
Figura 3.2.1	Campo experimental para controle biológico do bicudo do algodoeiro.	60

Figura 3.2.2	Domínio espacial utilizado nas simulações numéricas.	61
Figura 3.2.3	Distribuição inicial dos insetos.	62
Figura 3.2.4	Campo de velocidades da migração durante a fase 1.	63
Figura 3.2.5a	Distribuição populacional na área de plantio após 4 horas.	65
Figura 3.2.5b	Distribuição populacional em curvas de nível após 4 horas.	66
Figura 3.2.6a	Distribuição populacional na área de plantio após 2 dias.	66
Figura 3.2.6b	Distribuição populacional em curvas de nível após 2 dias.	67
Figura 3.2.6c	Distribuição populacional na área de plantio após 2 dias com $\mathbf{W} = (0, 0)$ e $f = 0$.	68
Figura 3.2.7a	Distribuição populacional na área de plantio após 12,5 dias.	68
Figura 3.2.7b	Distribuição populacional em curvas de nível após 12,5 dias.	69
Figura 3.2.8a	Distribuição populacional na área de plantio no final da fase 1, ou seja, $T_1 = 75$ dias.	69
Figura 3.2.8b	Distribuição populacional em curvas de nível no final da fase 1, ou seja, $T_1 = 75$ dias.	70
Figura 3.2.9	Condição inicial da fase 2.	70
Figura 3.2.10a	Distribuição da população de bicudos na área 2 no final da safra, ou seja $T = 180$ dias.	71
Figura 3.2.10b	Distribuição da população de bicudos em curvas de nível no final da safra, ou seja $T = 180$ dias.	72
Capítulo 4:	A dispersão densidade-dependente em modelos intraespecíficos - a difusibilidade densidade-dependente.	74
Figura 4.1.1	Domínio espacial utilizado nas simulações numéricas.	85
Figura 4.1.2	Condição inicial utilizada nas simulações numéricas.	86
Figura 4.1.3a	Distribuição da população com difusão densidade-dependente, sem migração e sem fonte, no instante final $T = 12$.	87
Figura 4.1.3b	Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.	88
Figura 4.1.3c	Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.	88
Figura 4.1.4a	Distribuição da população com difusão densidade-dependente,	

	sem migração e com fonte, no instante final $T = 12$.	89
Figura 4.1.4b	Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.	89
Figura 4.1.4c	Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.	90
Figura 4.1.5	Distribuição da população com difusão densidade-dependente, com migração, no instante final $T = 12$.	90
Figura 4.1.6	Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.	91
Figura 4.1.7	Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.	91
Figura 4.1.8	Variação do decaimento populacional com as iterações.	92
Figura 4.1.9	Distribuição da população com difusão densidade-dependente, migração, e com decaimento variável, no instante final $T = 12$.	92
Figura 4.1.10	Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.	93
Figura 4.1.11	Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.	93
Figura 4.1.12	Variação de σ com a iteração no tempo.	94
Figura 4.1.13	Distribuição populacional com difusão densidade-dependente, com migração e decaimento variáveis no tempo, no instante final $T = 12$.	94
Figura 4.1.14	Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.	95
Figura 4.1.15	Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.	95
Capítulo 5:	Modelos interespecíficos.	96
Figura 5.0.1	Presa (u) - Predador (v) : $r > 0$ e $s < 0$.	102
Figura 5.0.2	Competição : $r, s > 0$.	102
Figura 5.0.3	Mutualismo : $r, s < 0$.	102

Capítulo 6:	A dispersão densidade-dependente em modelos interespecíficos.	135
Figura 6.3.1a	Distribuição inicial das presas.	154
Figura 6.3.1b	Distribuição inicial dos predadores.	154
Figura 6.3.2	Distribuição populacional das presas no instante final $T = 25$.	155
Figura 6.3.3	Distribuição populacional dos predadores no instante final $T = 25$.	155
Figura 6.3.4	Distribuição populacional das presas (u) e predadores (v) no nó #23 ao longo do tempo.	156
Figura 6.3.5	Distribuição populacional das presas no instante final $T = 25$.	157
Figura 6.3.6	Distribuição populacional dos predadores no instante final $T = 25$.	157
Figura 6.3.7	Distribuição populacional das presas (u) e predadores (v) no nó #23 ao longo do tempo.	158

RESUMO

Construímos modelos genéricos descritos por equações diferenciais parciais para problemas de dinâmica populacional intraespecíficos com difusão densidade-dependente, coeficientes de decaimento populacional e/ou taxa intrínseca de reprodução de Malthus que podem variar com o tempo, e campo de velocidades associados a processos migratórios ou convecção induzida por quimiotaxia que podem apresentar também variações temporais. Os Métodos de Galerkin - Elementos Finitos de primeira e segunda ordens - Crank-Nicolson, são desenvolvidos, neste caso, para problemas parabólicos lineares e não lineares específicos, e são apresentadas ilustrações com os resultados de diversas simulações numéricas. São realizados dois exemplos de aplicações a problemas de dispersão do bicudo do algodoeiro, sob hipóteses que são consistentes com os modelos que os descrevem e com os dados que foram obtidos. São demonstradas existência e unicidade da solução fraca para o problema variacional no caso linear e discutidas condições de convergência dos métodos utilizados.

São tratados também, através dos mesmos códigos numéricos, sistemas interespecíficos (com enfoque para o caso em que duas espécies estão presentes) considerando a difusibilidade densidade-dependente e variações temporais nos coeficientes citados acima. São realizadas algumas simulações numéricas, comentadas, e ilustradas através de figuras.

INTRODUÇÃO

O grupo de Biomatemática do IMECC-UNICAMP é composto de vários professores orientadores e alunos pesquisadores em iniciação científica, mestrado e doutorado que trabalham com modelagem matemática. Muitos trabalham (ou já concluíram seus trabalhos) em dinâmica populacional onde a população pode ser uma determinada bactéria, um certo tipo de célula, uma espécie de animal, substâncias químicas, etc. Os problemas aplicados podem ter origem na área de agricultura, saúde, ecologia, toxicologia e outras. Problemas onde o interesse maior está focalizado no comportamento de uma espécie são chamados intraespecíficos e, quando o interesse está focalizado no comportamento de duas espécies ou mais, são chamados interespecíficos.

As equações diferenciais ordinárias e os sistemas de equações diferenciais ordinárias têm sido utilizados tradicionalmente como ferramentas da modelagem matemática de problemas de dinâmica de populações e muitos pesquisadores recorrem a este tipo de modelagem com tratamentos diversos. Mais recentemente se encontram alguns trabalhos que incluem as equações diferenciais parciais e os sistemas de equações diferenciais parciais a fim de melhorar a modelagem matemática de certos fenômenos biológicos.

O problema é que as equações diferenciais ordinárias e os sistemas de equações diferenciais ordinárias supõem uma homogeneidade no problema quando analisado sob o ponto de vista espacial (geográfico). Ora, a simples observação do comportamento de várias espécies em seus habitats leva-nos a modelar fenômenos de difusão e migração em nossos problemas - logo, trabalhar com equações diferenciais parciais.

Equações e/ou sistemas de equações diferenciais parciais do tipo parabólicas têm sido utilizadas por matemáticos com o objetivo de descreverem problemas de dinâmicas populacionais.

O trabalho de Skellam⁶⁰ de 1951 é talvez o precursor da introdução de processos de dispersão populacional às funções clássicas da dinâmica vital, além de introduzir também fenômenos migratórios.

Neste sentido o grupo orientado pelo Prof. Dr. João Frederico C.A. Meyer do IMECC tem procurado modelar fenômenos difusivos, migração, mortalidade, presença de fontes ou sumidouros, efeitos de interação entre as espécies presentes, entre as espécies e seu

habitat, e outros, descrevendo seus problemas em forma de uma, ou mais de uma, equação diferencial parcial.

Kareiva⁴², em 1983, fez uso de uma equação diferencial parcial para classificar espécies de acordo com sua capacidade de dispersão e a utilizou para estimar coeficientes de difusão. São equações que se aplicam a curto prazo. A longo prazo verificam-se a necessidade de se incluir componentes que modelem o caráter evolutivo do fenômeno, e que descrevam, além da dinâmica vital, por exemplo processos migratórios sazonais (ou seja, que variam com o tempo), ou comportamentos que dependam da densidade populacional (o que chamamos de densidade-dependentes). Ou seja, incluir variações espaciais, temporais e densidade-dependência nos coeficientes e funções da equação diferencial. Quando dependências da densidade estão presentes, seus efeitos podem ser mascarados por variações temporais e espaciais, estocasticidade do meio ambiente e outros (Cosner²³).

Sob o ponto de vista da matemática as hipóteses citadas podem levar a funções fortemente descontínuas ou não diferenciáveis, que obrigam a tratar o problema em espaços mais amplos que incluam tais funções. Além disso, a hipótese de densidade-dependência leva a não linearidades nas equações sugerindo o desenvolvimento de esquemas numéricos de aproximação de soluções.

O objetivo de alguns pesquisadores do grupo é realizar o estudo teórico deste tipo genérico de equação (e de sistemas), propondo inclusive, quando necessário, a utilização de códigos de aproximação numérica. O tratamento destas equações via Método de Galerkin em conjunto com o Método dos elementos finitos e o Método de Crank-Nicolson, fornece uma solução aproximada que indica a variação da população ao longo do tempo.

A total inexistência de trabalhos na área de Ecologia Matemática com este tratamento matemático, aliada a carência de publicações de resultados que permitam avaliações qualitativas e quantitativas destes tipos de problemas demonstram a contribuição dos trabalhos realizados.

No caso de modelos intraespecíficos, o presente trabalho contribui com o estudo teórico deste tipo de equação introduzindo hipóteses de difusão densidade-dependente, difusão variando geograficamente, e variações sazonais tanto no coeficiente de

decaimento devido a uma possível hostilidade vinda do meio ambiente, como no campo de velocidades que descreve processos migratórios.

Também constitui uma contribuição o exemplo de aplicação do estudo da dispersão do bicudo em lavouras de algodão.

Para modelos interespecíficos, o presente trabalho contribui com toda a formalização da Modelagem Matemática e Modelagem Numérica de problemas de duas espécies com difusão densidade dependente e variações sazonais nos mesmos coeficientes citados anteriormente. Foram também realizadas simulações numéricas para a obtenção de soluções aproximadas de problemas de duas espécies nos casos de difusão constante e difusão densidade dependente.

Os objetivos principais do presente trabalho são:

- 1 - Desenvolver códigos numéricos precisos através dos métodos citados e aplicá-los em modelos gradativamente sofisticados, a fim de fornecer material didático de consulta aos que estão trabalhando na área de dinâmica populacional.
- 2- Trabalhar com variação temporal nos coeficientes de decaimento devido a hostilidade do meio ambiente e nas funções que definem os campos de velocidades que representam processos migratórios.
- 3- Trabalhar com o coeficiente de difusão densidade-dependente.
- 4- Estudar questões de existência e unicidade de soluções e convergência de processos numéricos.
- 5- Procurar aplicar os modelos em problemas reais.

No Capítulo 1 são introduzidos diversos modelos, clássicos e mais recentes, que descrevem problemas populacionais intraespecíficos considerando variações temporais e geográficas.

O Capítulo 2 inicia com a definição de um problema populacional intraespecífico genérico que visa modelar fenômenos de dispersão, transportes induzidos e/ou migratórios, decaimento devido a hostilidade do meio ambiente e dinâmica vital de Malthus. A equação diferencial parcial resultante é linear, à qual são aplicados os Métodos de Galerkin, elementos finitos de primeira ordem e Crank-

Nicolson, resultando em um modelo discreto dado por um conjunto de N equações algébricas lineares. São demonstradas condições de existência e unicidade da solução fraca do problema variacional e introduzidos, no final do capítulo, alguns comentários sobre convergência.

O problema da dispersão do bicudo do algodoeiro no Estado de São Paulo durante a década de 80 é exposto no Capítulo 3. É apresentada uma equação que descreve o problema e as soluções aproximadas calculadas através dos métodos do Capítulo 2 são apresentadas através de ilustrações. São feitas diversas considerações a respeito do problema real e a sua interpretação através da linguagem matemática. Também neste capítulo, como exemplo de aplicação dos resultados do Capítulo 2, é analisada a dispersão do bicudo em uma área de plantio. Os resultados são comentados e ilustrados através de figuras.

O Capítulo 4 apresenta um modelo intraespecífico com difusão densidade-dependente. A equação diferencial parcial resultante é não linear e a aplicação dos métodos numéricos (com elementos finitos de segunda ordem) resulta em um sistema de equações algébricas não lineares.

É introduzido um exemplo de aplicação e são realizadas diversas simulações numéricas com ilustrações que permitem observar a dispersão populacional em alguns casos: difusão pura e constante, difusão e migração, presença ou não de fontes, difusão densidade-dependente, decaimento variando ou não com o tempo e outros.

No Capítulo 5 são introduzidos os problemas interespecíficos. Uma pequena parte aborda os sistemas com homogeneidade espacial, ilustrando com figuras os diversos tipos de interações entre duas espécies.

A fim de aplicar o Método de Galerkin com o método dos elementos finitos de segunda ordem e o Método de Crank-Nicolson a sistemas interespecíficos, é introduzido um sistema de equações que descreve um problema populacional onde estão presentes apenas fenômenos de dispersão (difusão pura), decaimentos devido a hostilidade do meio, fontes, dinâmicas vitais malthusianas e termos de interações entre as espécies (que são os únicos termos não lineares presentes no sistema).

São realizados diversos ensaios considerando primeiramente todos os coeficientes presentes nas equações constantes, e depois definindo, como no Capítulo 4, os coeficientes de decaimento devidos a um meio hostil variando com o tempo.

O Capítulo 6 aborda também sistemas interespecíficos descritos por equações de reação-difusão e um sistema interespecífico com difusão densidade-dependente considerando o caso onde estão presentes duas espécies distintas. As equações são bem gerais procurando descrever todos os fenômenos abordados nos capítulos anteriores.

São realizados alguns ensaios considerando os coeficientes de difusão das duas espécies dependentes das densidades populacionais a fim de se comparar os resultados com aqueles obtidos no Capítulo 5.

Capítulo 1: Da dependência temporal à dependência espaço-temporal.

§1.0 Introdução.

Em uma grande variedade de aplicações, deseja-se prever o crescimento futuro, ou declínio, da população de uma determinada espécie. Pode-se estar interessado, dependendo do tipo de situação, em populações de bactérias, ou insetos, ou mamíferos. Equações similares também descrevem muitos tipos de fenômenos, tais como exploração de recursos orgânicos renováveis, epidemias, reações químicas, e outros.

Seja $N(t)$ a população de uma dada espécie no instante t . O Modelo de Malthus (Bassanezi & Ferreira Jr.⁶), que em 1789 enunciou um princípio inovador, supõe que a variação de $N(t)$ é proporcional ao valor de N , ou seja,

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (1.0.1)$$

onde r indica a taxa de crescimento ou decaimento dependendo do seu sinal. Supondo $r > 0$ e impondo a condição inicial

$$N(0) = N_0, \quad (1.0.2)$$

obtem-se:

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (1.0.3)$$

Portanto o modelo de Malthus com $r > 0$ prediz que a população crescerá exponencialmente no tempo. A figura 1.0.1 apresenta algumas soluções para diversos valores de N_0 .

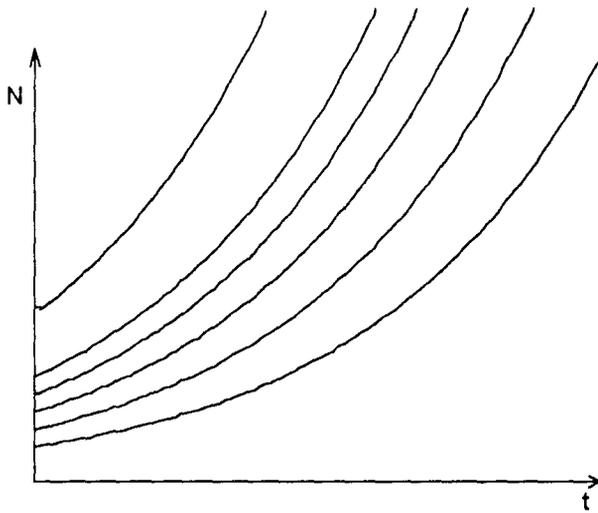


Figura 1.0.1 Crescimento exponencial $N \times t$ para o Modelo de Malthus.

Sob condições ideais a equação (1.0.3) descreve de modo bem preciso o crescimento de muitas populações, ao menos quando são considerados pequenos períodos de tempo. Entretanto, é óbvio que tais condições não permanecem indefinidamente; eventualmente, limitações no espaço, no suprimento de comida ou outros recursos modificarão o valor de r e irão alterar a taxa de reprodução e o crescimento deixará de ser exponencial. Nesse caso o crescimento dependerá da própria população, que se auto-inibe. Substituí-se então, na equação (1.0.1), a constante r por uma função $f(N)$ que é chamada de taxa intrínseca de reprodução da espécie, e obtém-se a equação modificada:

$$\frac{dN}{dt} = N f(N). \quad (1.0.4)$$

Para que $f(N)$ possa descrever as limitações citadas, impõem-se algumas condições à função $f(N)$:

1. Existe $k > 0$ tal que $f(k) = 0$, $f'(k) < 0$ e $f'(N) < 0$ para todo $N > k$. (1.0.5)

2. Existe "a" tal que $2 f'(N) + N f''(N) < 0$ para todo $N \in (a, k)$. (1.0.6)

Define-se então o que se chama de **crescimento populacional do tipo logístico**.

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0)e^{-rt}} \quad (1.0.9)$$

O modelo de Verhulst foi utilizado, muito satisfatoriamente, na estimativa de populações humanas, como por exemplo para as populações da França, Canadá e Estados Unidos. Os resultados e discussões provenientes destas pesquisas são encontrados em Braun, Coleman & Drew⁸. Em 1930 R. Pearl demonstrou que o modelo fornece uma boa aproximação testando dados experimentais para populações de moscas de frutas (*Drosophila melanogaster*). Em 1935 o biólogo matemático G.F. Gause usa o modelo de Verhulst no estudo de populações de outros insetos (Braun, Coleman & Drew⁸). O modelo foi aplicado também ao crescimento natural de populações de alguns tipos de peixes que ocorrem em certas áreas do Oceano Pacífico. No caso $N(t)$, medido em quilogramas, representa a massa total ou biomassa da população no instante t .

● Modelo de Gompertz.

Outra equação também usada para descrever crescimentos populacionais e que tem a forma (1.0.4) é a equação de Gompertz

$$\frac{dN}{dt} = F(N) = Nf(N) = rN \ln\left(\frac{k}{N}\right) \quad (1.0.10)$$

Em 1938, Gompertz usou esta equação para descrever o crescimento de tumores sólidos, assumindo que a taxa de crescimento diminui - mas não linearmente - com o aumento da massa celular. A função $f(N)$ satisfaz as condições (1.0.5) e (1.0.6), portanto a equação de Gompertz define um modelo de crescimento do tipo logístico, com a função $\frac{dN}{dt}$ versus N ilustrada na figura 1.0.5.

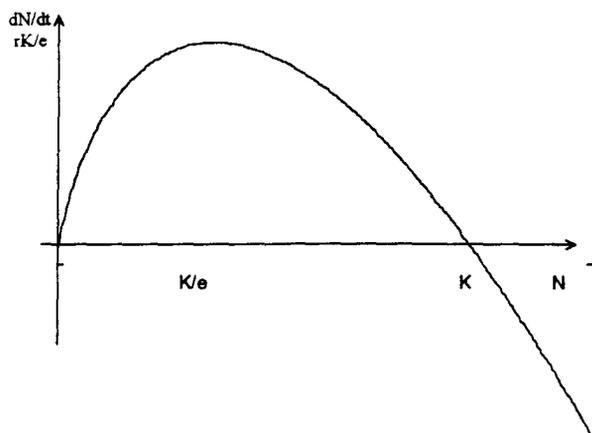


Figura 1.0.5 Representação gráfica da equação de Gompertz.

A figura 1.0.6 descreve soluções típicas deste modelo para diferentes valores da condição inicial N_0 .

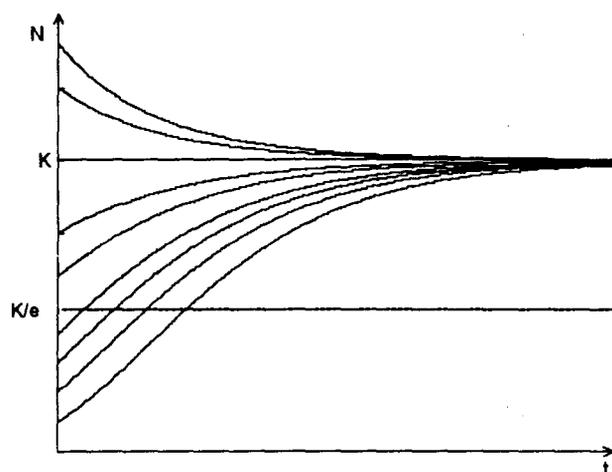


Figura 1.0.6 Representação gráfica de soluções do modelo de Gompertz.

● **Exploração de recursos renováveis.**

A população $N(t)$ de uma determinada espécie de peixe numa dada área do oceano pode ser descrita pela equação logística (1.0.7).

Embora seja desejável utilizar esse tipo de alimento, é intuitivamente claro que, se uma grande quantidade de peixe é pescada, a população será reduzida abaixo de níveis suportáveis, e, possivelmente a população será levada à extinção. Para um dado nível de

esforço de pesca desejado, é razoável assumir que a taxa na qual a população é pescada deve depender da população N ; quanto mais peixe há, mais fácil será pescá-los.

Supõe-se então que a quantidade pescada é dada por $Y = EN$, onde E é uma constante positiva, com unidade 1/tempo, que mede o esforço feito para pescar a dada espécie de peixe. Para incluir este efeito, a equação logística é substituída por:

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k} \right) N - EN. \quad (1.0.11)$$

Esta equação ficou conhecida como Modelo de Schaefer após o biólogo M.B. Schaefer tê-la aplicado à populações de peixes.

A taxa intrínseca de reprodução, neste caso dada por

$$f(N) = r \left(1 - \frac{N}{k} - \frac{E}{r} \right), \quad (1.0.12)$$

satisfaz as condições (1.0.5) e (1.0.6), e o gráfico de $\frac{dN}{dt}$ versus N está representado na figura 1.0.7 indicando um crescimento populacional do tipo logístico.

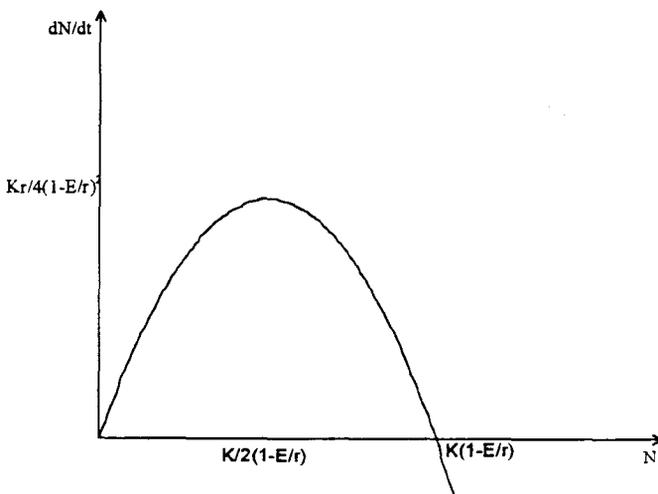


Figura 1.0.7 Representação gráfica da equação de Schaefer.

● Modelo de Bassanezi e Meyer.

O modelo, desenvolvido por Bassanezi, R.C. e Meyer, J.F.C. em 1980, é descrito por:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} r_0 N & \text{com } r_0 \text{ uma constante positiva, para } 0 < N < N_1 \text{ (fase I)} \\ N \frac{-r_0}{(N_1 - k)^2} (N^2 + k(2N_1 - k) - 2NN_1) & \text{para } N_1 \leq N \text{ (fase II)} \end{cases} \quad (1.0.13)$$

e visa facilitar a escolha de uma estratégia para a exploração de recursos renováveis sujeitos a restrições ambientais.

O modelo é descrito em duas fases: durante a fase I não há inibição sobre o crescimento da população o que corresponde a um desenvolvimento malthusiano com coeficiente de reprodução constante, r_0 . Na fase II o crescimento é inibido e o coeficiente de reprodução aproximado por um polinômio de segundo grau. O modelo objetiva principalmente adaptar o ponto de inflexão, que corresponde ao ponto de máximo no gráfico $\frac{dN}{dt}$ versus N , a fatores ambientais. As soluções são, qualitativamente, análogas às soluções do modelo de Verhulst.

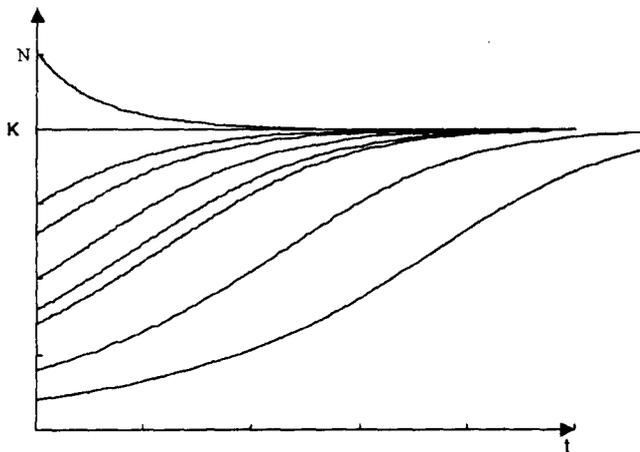


Figura 1.0.8 Solução do modelo de Bassanezi e Meyer.

● **Efeito Alee ou depressão endogâmica em problemas genéticos.**

A população de algumas espécies apresenta um comportamento singular. Se o número de indivíduos da população está abaixo de um certo valor crítico, que representa-se por L , a espécie não consegue reproduzir-se com sucesso e a população vai à extinção. Entretanto, quando o número de indivíduos da população está acima

deste valor L , ocorre crescimento populacional, crescimento esse que não ultrapassa a capacidade de suporte do meio ambiente, indicada por k . A maneira mais simples de modelar o Efeito Alee é introduzir na equação do modelo de Verhulst, (1.0.7), outro fator que terá o efeito de tornar $\frac{dN}{dt}$ negativo quando N é grande, ou seja,

$$\frac{dN}{dt} = -r \left(1 - \frac{N}{k}\right) \left(1 - \frac{N}{L}\right) N, \quad (1.0.14)$$

$$N(0) = N_0,$$

onde $r > 0$ e $0 < L < k$.

O gráfico de $\frac{dN}{dt}$ versus N é mostrado na figura 1.0.9. Neste caso, existem três pontos críticos $N = 0$, $N = L$ e $N = k$, correspondentes a três soluções de equilíbrio $\Phi_1(t) = 0$, $\Phi_2(t) = L$, $\Phi_3(t) = k$, respectivamente. As soluções $\Phi_1(t)$ e $\Phi_3(t)$ são estáveis e $\Phi_2(t)$ é instável.

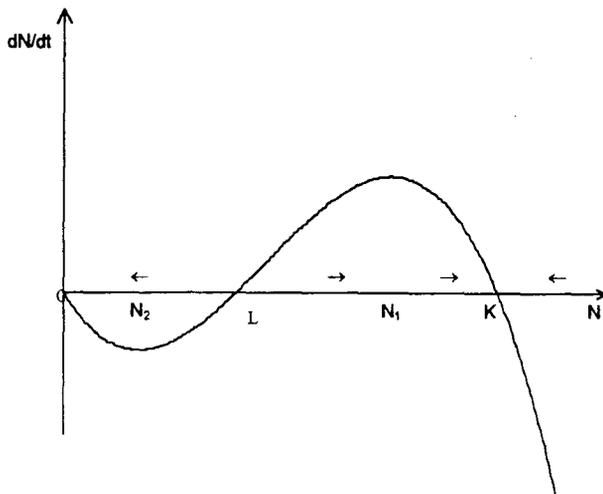


Figura 1.0.9 Representação gráfica de $\frac{dN}{dt}$ versus N .

A figura 1.0.10 apresenta algumas soluções do modelo para diversos valores da condição inicial. Os valores N_1 e N_2 representam pontos de inflexão do gráfico de $N(t)$ versus t .

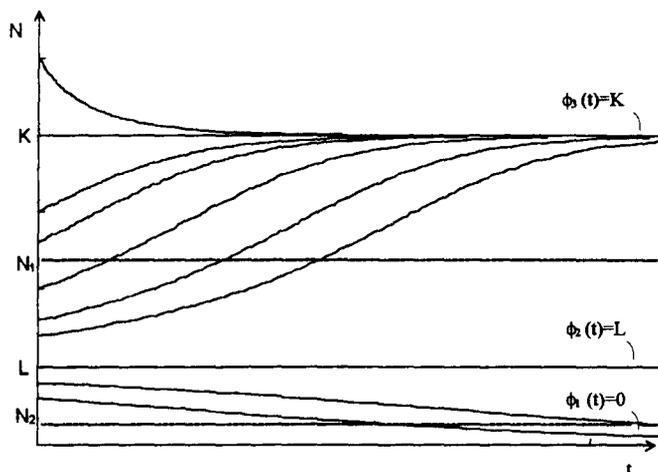


Figura 1.0.10 Soluções qualitativas para o modelo (1.0.14).

Aparentemente um modelo deste tipo aproximou a população de pombos viajantes, a qual esteve presente em grande número nos Estados Unidos até o final do século XIX. Esta população foi sistematicamente caçada por esporte e para fins alimentícios. Em consequência, seu número foi drasticamente reduzido por volta de 1880. Infelizmente o pombo viajante parece conseguir procriar satisfatoriamente somente quando há uma alta concentração de indivíduos em sua população, o que corresponderia a um valor alto para L . Embora um número razoável de pássaros tenha sobrevivido nos últimos anos, tal número não foi suficiente para evitar sua extinção. O último exemplar da espécie morreu em 1914. O declínio rápido da população de pombos viajantes nos Estados Unidos, de um número razoavelmente grande à extinção numa escala de tempo não maior que três décadas, foi um dos fatores que contribuíram para conscientizar a população para o problema da conservação das espécies animais naquele país.

● **Modelo de Ludwig.**

Para encerrar esta breve introdução, aborda-se o modelo introduzido por Ludwig *et al*⁵¹. O modelo foi desenvolvido em 1978 para descrever a dinâmica populacional de uma lagarta (*spruce budworm*) que, com uma eficiência feroz, ataca as folhas dos bálsamos no Canadá. A equação do modelo é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N) - p(N), \quad (1.0.15)$$

onde N representa a população de lagarta. O termo $p(N)$ representa uma predação, geralmente por pássaros. Quando N é suficientemente grande a predação é saturada. Existe um valor limiar aproximado N_c , abaixo do qual a predação é pequena, enquanto que, acima deste valor, a predação se aproxima do seu valor de saturação. Quando a densidade populacional N é muito pequena, os pássaros tendem a procurar outro alimento e portanto o termo de predação cai rapidamente. A forma de $p(N)$ sugerida por Ludwig e outros em 1978 é dada por:

$$p(N) = \frac{BN^2}{A + N^2}, \quad (1.0.16)$$

Considerando na equação (1.0.15) uma dinâmica vital verhulstiana, tem-se:

$$\frac{dN}{dt} = r_B N \left(1 - \frac{N}{k_B} \right) - \frac{BN^2}{A + N^2}. \quad (1.0.17)$$

A fim de entender as implicações da equação (1.0.17) analisa-se o comportamento de $\frac{dN}{dt}$ versus N que pode ser representado por uma das três curvas ilustradas na figura 1.10.11.

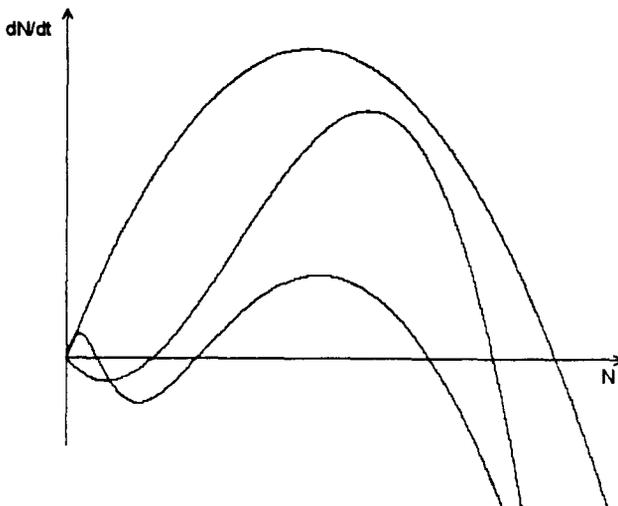


Figura 1.0.11 Representações gráficas da equação (1.0.17) para diversos valores de r_B .

Pode-se verificar facilmente, comparando as figuras 1.0.11 e 1.0.2, que o modelo (1.0.17) define um crescimento do tipo logístico. A literatura fornece um estudo detalhado e muito interessante deste modelo (Murray ⁵⁸ ou Ludwig *et al* ⁵¹, 1979). Através da análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio - pontos que anulam a equação (1.0.17) - o estudo propõe uma forma de controle da lagarta, evitando sua explosão populacional.

Todas as equações apresentadas até aqui descrevem modelos que consideram a população N variando apenas com o tempo, t . Isto significa que a população é uniforme quando analisada do ponto de vista espacial. No entanto, pode-se justificar a não-homogeneidade espacial da densidade populacional até pela simples observação do comportamento de diversas populações em seus habitats. Considerando uma determinada região onde ocorrem diversas configurações geográficas (planícies e florestas por exemplo), observa-se que uma mesma espécie altera sua difusão dependendo de onde ela se encontra na região analisada. Diversos pesquisadores, entre eles Carl ¹⁹, 1971, Gurney & Nisbet ³⁴, 1975 Gurtin & MacCamy ³⁵, 1977, observaram que migração e dispersão podem ser utilizados no equilíbrio populacional de certas espécies animais. Quando atingem uma dada densidade populacional, pequenos grupos migram para regiões muitas vezes mais desfavoráveis ou nas quais se expõem à predação intensiva. Fenômenos de dispersão, de convecção dirigida por fatores associados à quimiotaxia, meio-ambiente não uniforme, estão presentes em quase todo o tipo de populações existentes na natureza, e, todos eles levam a considerar-se a variação espacial na densidade populacional.

Introduz-se a seguir os conceitos básicos dos modelos espacialmente dependentes e as equações diferenciais parciais que descrevem alguns desses modelos.

§1.1 Dependência espaço-temporal: resultados históricos e recentes.

A equação da conservação, em suas várias formas, é a mais básica formulação através da qual são descritas as mudanças na distribuição espacial de uma ou mais populações. Em um contexto biológico, u representa ou a população de uma dada espécie, ou sua densidade populacional, e a equação da conservação para u é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - F(u, \mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.1.1)$$

A dedução da equação (1.1.1) encontra-se no Apêndice 1. O vetor \mathbf{J} é o fluxo da população e, conforme o Apêndice 1, sua forma mais ampla é dada por:

$$\mathbf{J} = u\mathbf{V} + ua\nabla\psi - \alpha\nabla u, \quad (1.1.2)$$

onde o vetor \mathbf{V} representa um campo de velocidades, ψ é uma função que representa uma fonte de atração da população, a é um coeficiente de proporcionalidade e α é o coeficiente de difusão da população u . Substituindo-se (1.1.2) em (1.1.1) tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\mathbf{V} + ua\nabla\psi - \alpha\nabla u) - F(u, t, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.1.3)$$

Na equação (1.1.3), o termo de fonte F , em um contexto biológico, pode representar entre outros fenômenos, a dinâmica vital da população ou uma hostilidade do meio - predação por exemplo - ou as duas coisas, como se viu no capítulo anterior.

Equações diferenciais parciais, em particular equações de difusão, têm sido amplamente utilizadas para descrever processos biológicos.

● Kareiva ⁴² utiliza, em 1983, um modelo simples de difusão passiva para analisar e classificar algumas espécies de insetos de acordo com sua dispersão local. Este estudo sintetiza também a taxa de dispersão relativa de várias espécies ecologicamente similares. A equação bi-dimensional é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.1.4)$$

uma forma particular de (1.1.3), onde o domínio é $(0, T] \times \Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

• Feromônios são odores químicos liberados por animais e utilizados para comunicação química entre membros de uma mesma espécie. Okubo ⁵⁹ faz um estudo detalhado da emissão desses odores e das equações que os modelam. Ignorando-se os efeitos do vento e a turbulência e assumindo uma difusão isotrópica do tipo Fick, pode-se escrever a equação tri-dimensional para emissão aérea instantânea por:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right), \quad (1.1.5)$$

onde S é a concentração de feromônios, t o tempo e x, y e z as coordenadas espaciais cartesianas.

• Considera-se, no presente texto, o trabalho de Skellam ⁶⁰, de 1951, como um dos trabalhos mais importantes realizados em sua época. O problema do movimento aleatório é adotado como ponto de partida para um estudo analítico da dispersão em organismos vivos. A solução é usada como base para o estudo da expansão de uma população, e são fornecidos exemplos ilustrativos. É também descrito um processo iterativo para a solução numérica de certos casos. São considerados estados de equilíbrio de vários modelos analíticos em relação ao tamanho do habitat, e são investigadas questões de estabilidade. Skellam considera populações malthusianas em habitats lineares,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru; \quad (1.1.6)$$

também populações logísticas em habitats lineares,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 u(1 - u); \quad (1.1.7)$$

ainda, populações malthusianas em habitats bi-dimensionais,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \alpha^2 \nabla^2 u + \lambda u(t, x, y); \quad (1.1.8)$$

e populações logísticas em habitats bi-dimensionais radialmente simétricos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + u(1-u) \right), \quad (1.1.9)$$

sendo $z=2r\gamma/\alpha$. Em todos os modelos u representa a população. São tratados diversos casos, com soluções analíticas e aproximadas, e é analisada a estabilidade dos estados estacionários.

Em 1905 um proprietário de terras da Boêmia introduziu roedores do Alasca na Europa permitindo que cinco deles escapassem de sua propriedade. Os animais então começaram a se espalhar e a repetir o processo de reprodução e dispersão até que se tornaram muitos milhões na Europa. A equação usada por Skellam⁶⁰ é dada em coordenadas polares por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \lambda u \quad (1.1.10)$$

onde u é a densidade populacional, α o coeficiente de difusibilidade e λ a taxa de crescimento. Resolvendo-se a equação (1.1.10) com a condição inicial de que em $t=0$, m indivíduos estão concentrados em $r=0$, obtém-se:

$$u = \left(\frac{m}{4\pi\alpha t} \right) \exp \left(\lambda t - \frac{r^2}{4\alpha t} \right). \quad (1.1.11)$$

Uma aproximação para a área circular ocupada por estes animais após o tempo t (Okubo⁵⁹) tem raio estimado em:

$$R^2 = 4\lambda\alpha t^2. \quad (1.1.12)$$

Skellam utiliza o mesmo modelo para calcular a taxa de dispersão pós glacial dos carvalhos no norte das Ilhas Britânicas.

• Considerando-se, na equação (1.1.3) uma difusão passiva, dada pela Lei de Fick, e o termo fonte F como uma função apenas de u , tem-se a equação de difusão-reação não linear dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + uf(u). \quad (1.1.13)$$

Fisher (1937) propõe a versão unidimensional desta equação como um modelo para descrever o espalhamento de um gene favorável em uma população, considerando uma dinâmica vital logística dada por $f(u)=r(1-u)$. Detalhes deste estudo podem ser encontrados em Sossae⁶², apêndice B. A equação (1.1.13) torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + ru(1 - u), \quad (1.1.14)$$

conhecida como Equação de Fisher.

• O trabalho de Ludwig, Aronson & Weinberger⁵⁰, de 1979, volta a analisar o problema da lagarta (*spruce budworm*) que ataca as folhas do bálsamo no Canadá, introduzindo no modelo o termo da dispersão espacial. A equação é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_B u \left(1 - \frac{u}{K_B} \right) - \frac{Bu^2}{A + u^2}, \quad (1.1.15)$$

onde o último termo do lado direito indica a mencionada predação por pássaros. Deseja-se enfatizar aqui a forma da função $f(u)$ para este caso, dada por:

$$f(u) = r_B \left(1 - \frac{u}{K_B} \right) - \frac{Bu}{A + u^2}. \quad (1.1.16)$$

O estudo envolve uma análise detalhada da estabilidade dos pontos de equilíbrio a fim de prevenir uma explosão na população da lagarta. Comentando que muitas possibilidades e efeitos não foram considerados no trabalho, este artigo menciona: a dispersão é modelada por difusão pura e existem ventos prevaletentes sobre a região que produzem, sistematicamente, movimentos convectivos na população dos adultos. Existem, além

disso, características topográficas que podem produzir grandes concentrações locais na população.

- A mudança no habitat de populações de peixes, de rio a represa, nos períodos de fechamento de barragens, causam comportamentos migratórios nessas populações. Em seu trabalho, Diniz²⁵ considera os três tipos específicos de comportamentos migratórios definidos por Welcomme e formula o modelo através da equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + \nabla \cdot (\mathbf{W}u) + \sigma u = f(u). \quad (1.1.17)$$

O termo σu representa o decaimento populacional, σ sendo o coeficiente de mortalidade e o termo $\nabla \cdot (\mathbf{W}u)$ representa a migração, sendo que \mathbf{W} , considerado um campo não dissipativo, fornece a direção e a intensidade do processo migratório. Para períodos de tempo relativamente curtos, Diniz utiliza um crescimento malthusiano, ou seja, $f(u) = \lambda u$, conservando a linearidade da equação diferencial parcial.

- Sossae⁶² estuda o caso não-linear descrito pelo modelo densidade-dependente de Verhulst, ou seja, quando na equação (1.1.17), a dinâmica vital assume a forma dita de Verhulst. A equação, então, assume a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + \nabla \cdot (\mathbf{W}u) + \sigma u = \lambda \left(1 - \frac{u}{K} \right) u, \quad (1.1.18)$$

sendo, em um domínio bi-dimensional, $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$ o vetor de velocidades da migração nas direções x e y , λ a taxa de crescimento populacional e K a capacidade de suporte do meio ambiente.

O presente trabalho faz uma análise detalhada do modelo descrito pela equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{W}u) + \sigma u = \lambda u + f,$$

considerando variações espaciais em α , variações sazonais em σ e \mathbf{W} , e densidade-dependência em α .

Capítulo 2: Modelos intraespecíficos com coeficiente de difusão variável.

§2.0 Introdução.

A idéia do coeficiente de difusão, encarado como parâmetro de dispersão, variar com o tempo não é nova para os biólogos. De fato, tal situação está sempre presente na biologia. Por exemplo, muitos processos biológicos variam com o tempo porque o meio muda sazonalmente. Processos biológicos podem também variar com o tempo sem a ação motriz de uma força vinda do meio: um exemplo familiar é a mudança cronológica dos órgãos em indivíduos.

Motivados por uma variação temporal aparente na mobilidade dos insetos em seus experimentos, Banks, Kareiva & Lamm⁵ estendem seus algoritmos para estimativa de parâmetros, a fim de tratarem equações de transporte que contêm parâmetros com variação temporal bem como variação espacial. Diferenças geográficas nos habitats de inúmeras espécies de animais justificam a dependência espacial dos coeficientes e da função fonte que aparecem nestas equações. O citado trabalho de Banks, Kareiva & Lamm⁵ considera o problema do movimento quantitativamente modelado de “flea beetles”, marcados, em linhas cultivadas com repolhos. A equação, dada em (2.0.1), descreve mecanismos de convecção, de difusão de Fick, e uma fonte contendo parâmetros variáveis e possivelmente desconhecidos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{W}u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma u + f, \quad t \in (0, T], x \in (0, 1), \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(\gamma), \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

onde $\gamma = \gamma(x)$, $f = f(\beta, t, x)$ e \mathbf{W} , α , σ e β são funções de $(t, x) \in (0, T] \times (0, 1)$.

A comparação dos resultados numéricos obtidos com os dados observados levou-os a reduzir o modelo para a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(t)u. \tag{2.0.2}$$

Ou seja, na confrontação dos resultados numéricos obtidos com os dados experimentais não se percebeu dependência espacial nos coeficientes. Também não foram encontrados componentes convectivos significativos ao se usarem modelos na forma (2.0.1) para interpolar os dados observados. É claro que a homogeneidade espacial não surpreende já que os campos experimentais foram cuidadosamente cultivados, em terrenos homogêneos e sob condições controladas. O problema se caracteriza como um problema inverso, ou seja, o objetivo é identificar os coeficientes que variam com t e x na equação do transporte. A teoria e os métodos utilizados são generalizações do método de elementos finitos, onde os elementos da base são combinações lineares de splines cúbicos definidos em uma malha uniforme.

§2.1 O problema populacional.

Será apresentado a seguir um problema populacional genérico, com alguma especificidade. O objetivo é descrever, durante um período fixo de tempo $[0, T]$, o comportamento de um espécie em um meio não homogêneo, que apresenta variações sazonais - por exemplo diferenças grandes na temperatura - acarretando, periodicamente, um aumento no índice de mortalidade da espécie. Considera-se que o espalhamento geográfico é modelado por difusão, por processos advectivos ou convectivos e pela própria dinâmica vital da espécie. Além disso, como o meio é não homogêneo, a difusão varia geograficamente.

Para pequenos períodos de tempo, assume-se uma dinâmica vital malthusiana.

O problema populacional visa modelar, portanto, os seguintes fenômenos:

- Dispersão.
- Processos advectivos ou processos convectivos (correspondentes a transporte induzido ou migração).
- Decaimento da espécie devido a uma possível hostilidade do meio.
- Dinâmica vital malthusiana.

A fim de analisar um caso o mais abrangente possível, tendo em vista a não homogeneidade espacial e variações sazonais, consideram-se os coeficientes e o vetor

velocidade dos processos advectivos ou convectivos variando com o tempo e com as coordenadas espaciais.

Assumindo que a região de interesse seja descrita matematicamente por um subconjunto $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ - na prática n assume os valores 1, 2 ou 3 - com Ω um aberto, conexo, limitado, com fronteira suficientemente regular Γ (Lions ⁴⁹), a formulação clássica do problema é dada por (ver Medeiros & Miranda ⁵², Murray ⁵⁸ e Okubo ⁵⁹, por exemplo):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{W}u) + \sigma' u = \lambda u + f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T], \quad (2.1.1)$$

onde

$u = u(t, \mathbf{x})$ representa a população ou a densidade populacional,

$\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$ é o coeficiente de difusão populacional,

$\mathbf{W} = \mathbf{W}(t, \mathbf{x})$ é o campo velocidades relativo aos processos advectivos ou convectivos,

$\sigma' = \sigma'(t, \mathbf{x})$ é um coeficiente de decaimento da espécie, indicando, por exemplo, uma mortalidade devido a hostilidade do meio,

λ é a taxa intrínseca de reprodução da espécie, dada por :

$$\lambda = \text{nascimento} - \text{morte} + \text{imigração} - \text{emigração}, \text{ e}$$

$f = f(t, \mathbf{x})$ é uma fonte (ou sumidouro) da espécie, no meio Ω durante o período $(0, T]$.

As condições inicial e de contorno são do tipo:

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \text{ e} \quad (2.1.2)$$

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad t \in (0, T],$$

com Γ_0 e Γ_1 disjuntos formando a fronteira Γ , ou seja, $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ e η designa a normal exterior em \mathbf{x} à curva Γ_1 .

A condição de contorno em Γ_0 indica que esta parte da fronteira está suficientemente distante para que se possa dizer que $u = 0$ em Γ_0 . A condição de contorno em Γ_1 indica que não existe entrada nem saída da população por esta parte da fronteira, ou seja, admite-se a existência de uma barreira física (margens de rio, montanhas, cercas, etc.) impedindo a passagem da população através de Γ_1 , ou, supõe-se uma simetria no

domínio de interesse ao longo de Γ_1 .

A formulação (2.1.1) exige uma igualdade pontual em Ω para todo $t \in (0, T]$, devendo, por este motivo, as funções envolvidas serem bem regulares. A solução u deve, em princípio, pertencer a $C^1(0, T)$ e $C^2(\Omega)$ (Medeiros & Miranda ⁵²).

Além disso exige-se regularidade nos coeficientes e nas funções envolvidas na equação e na condição inicial. Na prática tudo isto não acontece, ou seja, no mínimo trabalha-se com funções que possam descrever de modo mais realista os fenômenos, e, geralmente, tais funções nem sequer são contínuas. Apenas para citar um exemplo que aparecerá mais tarde em uma das aplicações, poder-se-ia caracterizar a região Ω como a união de duas sub-regiões Ω_1 e Ω_2 onde:

$$\alpha = \alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \alpha_2 & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

Em contraposição às formulações fortes, introduz-se as formulações variacionais que, além de aceitar exigências bem menos restritivas nos parâmetros, na solução, e na condição inicial, presta-se excepcionalmente à obtenção construtiva de soluções aproximadas e seus métodos.

§2.1.1 A formulação fraca.

Consideram-se o espaço de distribuições $L^2(\Omega)$, e $v \in H^1(\Omega)$ - espaço de Sobolev de ordem um, Kardestuncer & Norrie ⁴¹, Sobolev ⁶¹ - caracterizado por:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (2.1.3)$$

Para todo par $u, v \in H^1(\Omega)$, define-se o produto escalar com a integração por Lebesgue:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\mu + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu. \quad (2.1.4)$$

O produto escalar e a norma em $L^2(\Omega)$ são dados por:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\mu, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v(x)^2 d\mu. \quad (2.1.5)$$

A norma em $H^1(\Omega)$ induzida pelo produto escalar definido em $H^1(\Omega)$ é definida por:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 d\mu + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 d\mu = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.1.6)$$

Multiplicando-se a equação (2.1.1) e a equação para a condição inicial (2.1.2) escalarmente por v , tem-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\Omega} - (\nabla \cdot (\alpha \nabla u), v)_{\Omega} + (\nabla \cdot (\mathbf{W}u), v)_{\Omega} + (\sigma u, v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega}, \quad (2.1.7)$$

$$\text{e } (u(0, \mathbf{x}), v)_{\Omega} = (u_0, v)_{\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

onde $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ indica o produto escalar em $L^2(\Omega)$, e $\sigma = \sigma' - \lambda$.

Como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\alpha \nabla u) &= \nabla \alpha \cdot \nabla u + \alpha \Delta u, \text{ e} \\ \nabla \cdot (\mathbf{W}u) &= u \nabla \cdot \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot \nabla u, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

substituindo estes resultados em (2.1.7), tendo em vista a definição (2.1.5) do produto escalar em $L^2(\Omega)$, e agrupando-se alguns termos obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu - \int_{\Omega} \alpha \Delta u v d\mu + \int_{\Omega} (\mathbf{W} - \nabla \alpha) \cdot \nabla u v d\mu + \int_{\Omega} (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) u v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu, \quad (2.1.9)$$

$$\forall v \in H^1(\Omega).$$

Definindo-se o subespaço fechado $V \subset H^1(\Omega)$:

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) : \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \}, \quad (2.1.10)$$

e aplicando-se a fórmula de Green na segunda integral em (2.1.9), após o cancelamento de alguns termos, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v d\mu + \int_{\Omega} (\mathbf{W} \cdot \nabla u) v d\mu + \int_{\Omega} (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) u v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu, \quad (2.1.11)$$

$$\forall v \in V.$$

Faz-se necessário trabalhar em um espaço que incorpore a dependência do tempo. Portanto, sendo V espaço de Banach, $L^2((0, T]; V)$ denota o espaço das funções quadrado integráveis a Lebesgue de $(0, T]$ em V .

A formulação fraca do problema (2.1.1) com as condições dadas em (2.1.2) consiste portanto em:

Dadas as funções $f \in L^2((0, T] \times \Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u \in V = \{v \in L^2((0, T]; V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2((0, T]; L^2(\Omega))\}$ tal que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \nabla u v d\mu + \int_{\Omega} (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) u v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu, \quad (2.1.12)$$

$$\int_{\Omega} u(0, \mathbf{x}) v d\mu = \int_{\Omega} u_0 v d\mu, \quad \forall v \in V.$$

Definindo-se a forma bilinear

$$a(t; u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_j(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} v d\mu + \int_{\Omega} a_0(t, \mathbf{x}) u v d\mu, \quad (2.1.13)$$

a forma linear

$$L_f(v) = (f, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v d\mu, \quad (2.1.14)$$

e o operador

$$D_t(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu, \quad (2.1.15)$$

pode-se escrever a formulação (2.1.12) (cf Lions ⁴⁹) como:

$$a(t; u, v) + D_t(u, v) = L_f(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.1.16)$$

onde, por (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14) e (2.1.2) têm-se:

$$a_{ij}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha(t, \mathbf{x}) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

$$a_i(t, \mathbf{x}) = W_i(t, \mathbf{x}), \quad (2.1.17)$$

$$a_0(t, \mathbf{x}) = \sigma(t, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i},$$

e a forma bilinear (2.1.13) é então dada por:

$$\begin{aligned}
a(t; u, v) = & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} W_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mu + \\
& + \int_{\Omega} (\sigma(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i}) u v d\mu.
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

§2.1.2 A existência e a unicidade da solução fraca.

Em termos de existência e unicidade da solução procurada, vai-se provar que são válidas as condições do seguinte teorema de Lions ⁴⁹:

Teorema 1: Dadas $f \in L^2((0, T] \times \Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$, se a forma bilinear $a(t; u, v)$ é tal que,

sendo $\alpha(t, x)$, $W_i(t, x)$ e $\frac{\partial W_i}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$), $\sigma(t, x) \in L^\infty((0, T] \times \Omega)$ valham:

(i) $\forall u, v \in V$, a função $t \rightarrow a(t; u, v)$ é mensurável,

(ii) $\exists M > 0$ tal que $|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$,

(iii) $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \delta \|v\|_V^2, \text{ para algum } \delta > 0, \forall v \in V,$$

(iv) $L_f(v)$ é contínua em V ,

então existe uma única solução $u \in L^2((0, T]; V)$ que é solução do problema variacional (2.1.16), com a condição inicial escrita como em (2.1.12).

Como $\alpha(t, x)$, $W_i(t, x)$ e $\frac{\partial W_i}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$), $\sigma(t, x) \in L^\infty((0, T] \times \Omega)$ estão definidas as

seguintes constantes:

$$\rho = \sup_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} |\alpha(t, x)|,$$

$$\beta_i = \sup_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} |W_i(t, x)| \quad \text{e} \quad \beta = \max_{i=1, \dots, n} \{\beta_i\} \tag{2.1.19}$$

$$\gamma = \sup_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} \left| \sigma(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \right|,$$

e, também:

$$\omega = \inf_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} \alpha(t,x) \text{ e} \tag{2.1.20}$$

$$\vartheta = \inf_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} \left(\sigma(t,x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \right).$$

Demonstração do teorema 1:

De fato:

(i) $a(t;u,v)$ é mensurável pois, pela sua própria definição, $a(t;u,v)$ é uma combinação linear de funções mensuráveis.

(ii) **Continuidade de $a(t;u,v)$** : Para cada $t \in (0,T]$ tem-se:

$$\begin{aligned} |a(t;u,v)| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} W_j(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v d\mu + \int_{\Omega} \left(\sigma(t,x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \right) uv d\mu \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\alpha(t,x)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |W_j(t,x)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} v \right| d\mu + \int_{\Omega} \left| \left(\sigma(t,x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \right) uv \right| d\mu \end{aligned}$$

De acordo com as definições dadas em (2.1.19) e (2.1.20) segue que:

$$\begin{aligned} |a(t,u,v)| &\leq \rho \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \beta_j \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} v \right| d\mu + \gamma \int_{\Omega} |uv| d\mu \leq \\ &\leq \rho \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| d\mu + \beta \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} v \right| d\mu + \gamma \int_{\Omega} |uv| d\mu, \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwartz vêm:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right| dx \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

portanto:

$$|a(t; u, v)| \leq (\rho + \beta + \gamma) \|u\|_v \|v\|_v \leq M \|u\|_v \|v\|_v \text{ sendo } 0 < M \leq (\rho + \beta + \gamma);$$

logo, $a(t; u, v)$ é contínua em $V \times V$.

$$(iii) \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \delta \|v\|_v^2, \text{ para algum } \delta > 0, \forall v \in V.$$

Para cada $t \in (0, T]$ tem-se:

$$\begin{aligned} a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} W_j(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_j} v d\mu + \\ &+ \int_{\Omega} (\sigma(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i}) v^2 d\mu + \varepsilon \int_{\Omega} v^2 d\mu. \end{aligned}$$

Tem-se, de acordo com as definições dadas em (2.1.19) e (2.1.20):

$$\begin{aligned} a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \omega \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 d\mu - \beta \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| |v| d\mu + (\vartheta + \varepsilon) \int_{\Omega} v^2 d\mu \geq \\ &\geq \omega \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta \|v\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + (\vartheta + \varepsilon) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Faz-se agora o uso de um recurso clássico obtido da desigualdade:

$$-ab \geq -\frac{\theta}{2} a^2 - \frac{1}{2\theta} b^2$$

para quaisquer a, b e θ positivos, que, aplicada ao segundo termo da inequação anterior, tomando-se:

$$a = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad b = \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

implica que:

$$a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \omega \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 d\mu - \frac{\beta\theta}{2} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Mas

$$\left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Substituindo-se esta igualdade na última desigualdade vem:

$$a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \omega \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\beta\theta}{2} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\beta\theta}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Como

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_V,$$

$$\text{então } - \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \geq - \|v\|_V,$$

o que implica que

$$a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \left(\omega - \frac{\beta\theta}{2} \right) \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Sendo

$$\chi = \min \left\{ \left(\omega - \frac{\beta\theta}{2} \right), \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \right\}, \text{ tem-se:}$$

$$\begin{aligned} a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \chi \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ &= \chi \|v\|_V^2 - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \left(\chi - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} \right) \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

Escolhendo ε e θ convenientemente de tal forma que $\chi > 0$ e $\delta = \chi - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} > 0$

tem-se que:

$$a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \delta \|v\|_V^2 \text{ para todo } v \in V.$$

Vale a pena observar que as hipóteses do Teorema 1 - mais precisamente esta hipótese (iii) - não são as mesmas classicamente usadas nos teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais parciais, as quais, se fossem utilizadas no presente texto incluiriam a exigência da coercividade do operador bilinear $a(t; u, v)$. Optou-se aqui por utilizar um teorema devido a Lions ⁴⁹ que garante, com a hipótese menos restritiva de quase-coercividade de $a(t; u, v)$, a existência e a unicidade de solução para o problema

variacional (2.1.16)¹.

(iv) Continuidade do operador linear $L_f(v)$.

Ora,

$$\left| L_f(v) \right| = \left| \int_{\Omega} f(t, x)v(x)d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f(t, x)v(x)|d\mu \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V,$$

$\forall v \in V$,

portanto $L_f(v)$ é contínuo.

Estão garantidas, então, a existência e a unicidade da solução fraca do problema (2.1.16). Passa-se, a seguir, à construção de uma solução aproximada para (2.1.16), através de discretizações espacial e temporal e utilização de métodos numéricos apropriados.

§2.1.3 O modelo discreto.

Usa-se o método de Galerkin para a construção da solução aproximada, considerando-se uma separação das variáveis espaciais e temporal, em conjunto com o Método de Elementos Finitos para a discretização das variáveis espaciais e o Método de Diferenças Finitas (Crank-Nicolson) para a discretização da variável temporal (Meyer⁵³ e Meyer *et al*⁵⁴). Considera-se o caso bi-dimensional, ou seja, Ω é uma aberto, limitado, conexo, do \mathbb{R}^2 . O método consiste em procurar uma solução aproximada do problema (2.1.16) em um subespaço de V de dimensão finita.

Escolhendo-se em $V = \{v \in H^1(\Omega) : \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, N funções linearmente independentes $\varphi_i, i=1, \dots, N$, denomina-se V_h o subespaço fechado de V , de dimensão N , gerado por $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$.

Procura-se uma aproximação u_h da solução u , considerando-se em u_h uma separação de variáveis, de tal forma que:

¹ No Apêndice 2 faz-se um resumo dos principais resultados utilizados nesta referência.

$$u_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (2.1.21)$$

e satisfaça (2.1.16) para toda $v \in V_h$ e que, para a qual

$$\frac{\partial u_h(t; x, y)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{du_j(t)}{dt} \varphi_j(x, y). \quad (2.1.22)$$

O espaço vetorial das funções da forma (2.1.21) será indicado por V_h .

Desde que as funções $\varphi_i(x, y)$ sejam conhecidas, a aproximação u_h será completamente determinada ao calcularem-se as N funções $u_j(t)$, $j=1, \dots, N$, que correspondem aos coeficientes da discretização (2.1.21).

Para verificar que (2.1.16) vale para cada $v \in V_h$, basta verificar que vale para cada elemento da base B .

Agora então, o problema (2.1.16) no subespaço V_h de V , (isto é, com u_h definido em (2.1.21)) passa a ser o seguinte:

Achar $u_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$ suficientemente regular para que se possa ter:

$$a(t; u_h, v) + \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v \right) = L_f(v), \text{ e} \quad (2.1.23)$$

$$(u_h(0; x, y), v) = L_{u_0}(v), \quad \forall v \in V_h$$

com

$$a(t; u_h, v) = \iint_{\Omega} \alpha(t, x, y) \nabla u_h \cdot \nabla v d\mu + \iint_{\Omega} \mathbf{W}(t, x, y) \cdot \nabla u_h v d\mu + \iint_{\Omega} (\sigma(t, x, y) + \nabla \cdot \mathbf{W}(t, x, y)) u_h v d\mu, \quad (2.1.24)$$

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v \right) = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} v d\mu, \quad (2.1.25)$$

$$L_f(v) = \iint_{\Omega} f(t, x, y) v d\mu, \quad (2.1.26)$$

e, para a condição inicial

$$L_{u_0}(v) = \iint_{\Omega} u_0(x, y) v d\mu. \quad (2.1.27)$$

Fazendo $v = \varphi_i$, $i=1, \dots, N$, e substituindo em (2.1.23), tendo em vista as equações (2.1.21) e (2.1.22), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{du_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \sum_{j=1}^N u_j(t) (\alpha(t, x, y) \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \sum_{j=1}^N u_j(t) (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ + \sum_{j=1}^N u_j(t) ((\sigma(t, x, y) + \nabla \cdot \mathbf{W}(t, x, y)) \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} = (f(t, x, y), \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in B \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

onde,

$$(\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} = \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\mu = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) d\mu,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} &= \left(W_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + W_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right)_{\Omega} = \\ &= \iint_{\Omega} \left(W_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i + W_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i \right) d\mu = (\mathbf{W} \varphi_i \| \nabla \varphi_j)_{\Omega} \quad e \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y}.$$

Uma escolha natural para o vetor inicial na formulação integral do problema é obtida por projeção de u_0 na base B , ou seja:

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) u_j(0) = (u_0, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in B. \quad (2.1.29)$$

Como $i = 1, 2, \dots, N$, tem-se um sistema de N equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^N ((\alpha \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ + ((\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}) u_j = (f, \varphi_i)_{\Omega}, \quad e \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega u_j(0) = (u_0(x, y), \varphi_i)_\Omega, \quad \forall \varphi_i \in B. \quad (2.1.31)$$

Em particular, considerando-se o campo vetorial não dissipativo², ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$, e definindo as matrizes:

$$A = (A_{ij}) = (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega, \quad D = (D_{ij}) = (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega, \quad U = (U_j(t)) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{pmatrix},$$

$$B = (B_{ij}) = (\alpha \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_\Omega, \quad C = (C_{ij}) = (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_\Omega, \quad F = (F_i) = (f, \varphi_i)_\Omega \text{ e} \quad (2.1.32)$$

$$\hat{U}_0 = (\hat{U}_{0i}) = (u_0, \varphi_i)_\Omega$$

sendo $M = B + D + C$, pode-se escrever o sistema linear dado por (2.1.30) e (2.1.31) na forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dU}{dt} + MU = F \end{array} \right. \quad (2.1.33)$$

sendo que o vetor inicial $U_0 = \{u_j(0)\}$ $j = 1, 2, \dots, N$ será calculado diretamente como:

$$AU_0 = \hat{U}_0. \quad (2.1.34)$$

§2.1.4 A discretização espacial: o método dos elementos finitos de primeira ordem.

O método dos elementos finitos consiste na construção de uma malha - através da discretização do domínio - na escolha do espaço de funções teste e das funções da base B (Carey & Oden¹⁶, Ciarlet²², Kardestuncer & Norrie⁴¹).

Conforme foi estabelecido anteriormente, o espaço de funções será o subespaço fechado denotado por V_h gerado pelo conjunto B . As funções da base B serão funções polinomiais de ordem um definidas por partes dentro do domínio discretizado Ω_h obtido

² A existência e unicidade de solução fraca no caso do campo não dissipativo pode ser demonstrada através do Teorema de Lax Milgram, já que, neste caso, a coercividade do operador bilinear é forte.

através da triangularização de Ω . Nem sempre o domínio Ω coincide com o domínio Ω_h ; neste caso, quando $h \rightarrow 0$, $\Omega_h \rightarrow \Omega$, sendo h a área do maior elemento da malha.

Cada função de base φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ é definida, em cada triângulo da malha, como uma função linear por partes.

O trabalho de Diniz ²⁵ traz toda a sistemática de enumeração dos nós, as considerações e cálculos necessários à construção das φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, bem como desenhos ilustrativos dos elementos.

Na aproximação numérica de equações com componentes migratórios, ou seja, termos advectivos - $\nabla \cdot (\mathbf{W} u)$ - podem-se obter oscilações indesejáveis na solução numérica, quando há uma dominância deste termo. Deve-se, então, estabelecer-se um critério que forneça uma condição sobre a discretização do domínio. Esta condição é denominada "Condição de Peclet" (Henrich *et al* ³⁷ e Brooks & Hughes ⁹) e é descrita por:

$$\frac{|W_i| \Delta x_i}{2\alpha} < 1 \quad (2.1.35)$$

onde W_i é a i -ésima componente do vetor de velocidades da migração \mathbf{W} , Δx_i é a dimensão máxima da discretização (ou subintervalo) na direção x_i e α é o coeficiente de difusão, no caso constante.

§2.1.5 A discretização temporal : o método de Crank-Nicolson.

Utiliza-se o método de Crank-Nicolson para discretizar a variável temporal da equação (2.1.15) (Carey & Oden ¹⁷, Ciarlet ²², Johnson ⁴⁰, diversos autores em Kardestuncer & Norrie ⁴¹). O método consiste em usar as aproximações:

$$u_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_n) + u_j(t_{n+1})}{2} \quad (2.1.36)$$

e

$$\frac{du_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t}$$

ambas de ordem de Δt^2 em (2.1.21) estimadas em $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$.

Adotando a notação:

$$U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \dots \\ u_N^{(n+1)} \end{pmatrix} \text{ com } U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1}), \quad (2.1.37)$$

e com $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, substituindo em (2.1.36) tem-se:

$$u_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_n) + u_j(t_{n+1})}{2} = \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2} \quad (2.1.38)$$

$$\frac{du_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}.$$

Substituindo (2.1.38) nas equações (2.1.30) e (2.1.31), usando a notação adotada nas equações (2.1.32) e (2.1.33), e isolando os termos calculados em $(n+1)$ e n , vem:

$$\begin{cases} \left(A + \frac{\Delta t}{2} M^{(n+1/2)} \right) U^{(n+1)} = \left(A - \frac{\Delta t}{2} M^{(n+1/2)} \right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)}, \\ AU^{(0)} = \hat{U}_0, \end{cases} \quad (2.1.39)$$

onde $M^{(n+1/2)} = M(t_{n+\frac{1}{2}})$ e $F^{(n+1/2)} = F(t_{n+\frac{1}{2}})$.

A solução do sistema linear (2.1.39) será $U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1})$, conforme (2.1.37).

§2.1.6 Comentários sobre convergência³.

O método de Crank-Nicolson aplicado ao sistema (2.1.33) com a condição inicial dada em (2.1.34) resulta no sistema de equações lineares (2.1.39) dado por:

³ Alguns resultados clássicos referentes a estabilidade podem ser encontrados no Apêndice.

$$\begin{cases} \left(A + \frac{\Delta t}{2} M^{(n+1/2)} \right) U^{(n+1)} = \left(A - \frac{\Delta t}{2} M^{(n+1/2)} \right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)}, \\ AU^{(0)} = \hat{U}_0. \end{cases} \quad (2.1.40)$$

e sua estabilidade pode ser demonstrada, através de uma análise de auto-valores (Carey & Oden¹⁷).

Tem-se que $\sum_{n=0}^k \Delta t = T$, considerando k iterações no tempo, e $[0, T]$ o intervalo

de tempo de interesse.

No sistema discretizado (2.1.40), começando em $t_0 = 0$ com o vetor de condições iniciais $U^{(0)}$, dado um passo no tempo Δt , o lado direito do vetor em (2.1.40) pode ser calculado, ou seja, $U^{(1)}$. O vetor solução em t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é obtido resolvendo a equação:

$$U^{(n+1)} = \left(A + \frac{\Delta t}{2} M \right)^{-1} \left\{ \left(A - \frac{\Delta t}{2} M \right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \right\} \quad (2.1.41)$$

onde se está considerando M constante.

Para estudar a estabilidade é preciso definir o vetor erro. Voltando ao sistema (2.1.39) tem-se:

$$\frac{dU}{dt} = -A^{-1}MU + A^{-1}F \quad (2.1.42)$$

e supondo outra solução V tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = -A^{-1}MV + A^{-1}F \quad (2.1.43)$$

Subtraindo as equações (2.1.42) e (2.1.43) vem:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(U - V)}{dt} = -A^{-1}M(U - V) = -A^{-1}ME \quad (2.1.44)$$

onde $E = U - V$ representa o vetor erro, ou seja, como o sistema (2.1.39) é linear, o vetor erro irá satisfazer o seguinte sistema homogêneo:

$$A \frac{dE}{dt} + ME = 0 \quad (2.1.45)$$

O sistema evolutivo (2.1.45) fornece a propagação do erro ao longo do tempo. Aplicando o método de Crank-Nicolson ao sistema (2.1.45) tem-se:

$$\frac{E^{(n+1)} - E^{(n)}}{\Delta t} = -A^{-1}M \left(\frac{E^{(n+1)} + E^{(n)}}{2} \right) \quad (2.1.46)$$

Isolando os termos em $E^{(n+1)}$ e $E^{(n)}$ vem:

$$E^{(n+1)} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A^{-1}M \right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2} A^{-1}M \right) E^{(n)} \quad (2.1.47)$$

onde I é a matriz identidade de ordem N .

Como a propagação de um erro introduzido em qualquer etapa da computação da solução de (2.1.41) depende dos auto-valores da matriz $A^{-1}M$, conforme o sistema (2.1.44), a análise será dividida em dois casos:

O caso da difusão pura.

Considerando $W = 0$, e os coeficientes α e σ constantes, a matriz M é dada por $M = B + C$. Definindo as seguintes matrizes:

$$P_{\pm} = \left(I \pm \frac{\Delta t}{2} A^{-1}M \right) \quad (2.1.48)$$

e substituindo em (2.1.47) tem-se:

$$E^{(n+1)} = P_{+}^{-1} P_{-} E^{(n)} \quad (2.1.49)$$

o que conduz à seguinte relação de recorrência:

$$E^{(n+1)} = \left(P_{+}^{-1} P_{-} \right)^{n+1} E^{(0)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, k. \quad (2.1.50)$$

Sejam $\{w_i\}_{i=1}^N$ os auto-vetores da matriz $A^{-1}M$. Assumindo que o conjunto de auto-vetores é linearmente independente, então, existem N constantes $\{a_i\}_{i=1}^N$ tais que:

$$E^{(0)} = \sum_{i=1}^N a_i w_i \quad (2.1.51)$$

Então

$$P_{+}^{-1} P_{-} E^{(0)} = \sum_{i=1}^N a_i P_{+}^{-1} P_{-} w_i. \quad (2.1.52)$$

Mas

$$P_{-} w_i = \left(I - \frac{\Delta t}{2} A^{-1}M \right) w_i = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_i \right) w_i \quad (2.1.53)$$

$$P_+^{-1}w_i = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A^{-1}M \right)^{-1} w_i = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i \right)^{-1} w_i \quad (2.1.54)$$

onde λ_i são os auto-valores de $A^{-1}M$ associados aos auto-vetores w_i .

Voltando a (2.1.50) e, tendo em vista as equações anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned} E^{(n+1)} &= (P_+^{-1}P_-)^{n+1} E^{(0)} = (P_+^{-1}P_-)^n (P_+^{-1}P_-) E^{(0)} = \\ &= (P_+^{-1}P_-)^n \sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i} \right) w_i \end{aligned} \quad (2.1.55)$$

Definindo

$$\rho_i = \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i} \right) \quad (2.1.56)$$

e substituindo em (2.1.55) vem:

$$\begin{aligned} E^{(n+1)} &= (P_+^{-1}P_-)^n \sum_{i=1}^N a_i \rho_i w_i = (P_+^{-1}P_-)^{n-1} \sum_{i=1}^N a_i \rho_i (P_+^{-1}P_-) w_i = \\ &= (P_+^{-1}P_-)^{n-1} \sum_{i=1}^N a_i \rho_i^2 w_i. \end{aligned}$$

Aplicando (n+1) vezes tem-se:

$$E^{(n+1)} = \sum_{i=1}^N \rho_i^{n+1} a_i w_i. \quad (2.1.57)$$

Portanto, o fator de amplificação para cada auto-vetor w_i é:

$$\rho_i^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i} \right)^{n+1} \quad (2.1.58)$$

e nenhum componente do erro irá poder crescer se $|\rho_i| < 1$. Fazendo as contas, tendo em vista a equação (2.1.56), chega-se a condição $\lambda_i > 0$.

No caso da difusão pura a matriz $A^{-1}M$ é simétrica e positiva-definida, cf Carey & Oden¹⁷, portanto todos os seus auto-valores são reais positivos, o que implica que

$1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_i < 1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i$ e, então, $|\rho_i| < 1$. Isto indica que $\|E^{(n+1)}\|$ diminui com n e,

consequentemente, o esquema é estável para qualquer escolha de Δt .

Observação final: Voltando à equação (2.1.45) para o erro E, tem-se a solução exata:

$$E(t) = \exp(-A^{-1}M t) E(0) = [I - A^{-1}M t + \frac{1}{2}(A^{-1}M)^2 t^2 - \dots]E(0) \quad (2.1.59)$$

a qual pode ser colocada em uma forma mais concisa, usando (2.1.51):

$$E(t) = \sum_{i=1}^N (1 - \lambda_i t + \frac{1}{2}(\lambda_i t)^2 - \dots) a_i w_i = \sum_{i=1}^N e^{-\lambda_i t} a_i w_i . \quad (2.1.60)$$

Calculando (2.1.57) e (2.1.60) em $t = t_1$ a fim de comparar a taxa de decaimento sobre um passo no tempo tem-se:

Em (2.1.57) fazendo $n = 0$ vem:

$$E^{(1)} = \sum_{i=1}^N \rho_i \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \lambda_i}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \lambda_i} \right) a_i w_i = \quad (2.1.61)$$

$$= \sum_{i=1}^N [1 - \Delta t \lambda_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \lambda_i^2 - \frac{1}{4} \Delta t^3 \lambda_i^3 + \dots] a_i w_i .$$

Em (2.1.60) substituindo t por Δt vem:

$$E(\Delta t) = \sum_{i=1}^N [1 - \Delta t \lambda_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \lambda_i^2 - \frac{1}{6} \Delta t^3 \lambda_i^3 + \dots] a_i w_i . \quad (2.1.62)$$

Comparando os termos das séries em (2.1.61), a qual fornece o valor aproximado do erro, e em (2.1.62) que fornece o valor exato do erro, está claro que estes valores concordam até a ordem prevista no método de Crank-Nicolson, ou seja, até a ordem $O(\Delta t^2)$. Para valores moderados de λ_i o erro aproximado cairá de valor mais rapidamente que o valor exato. À medida que λ_i cresce a taxa do fator de decaimento $e^{-\lambda_i t}$ para o valor exato do erro em (2.1.62) torna-se mais elevada, portanto esta componente de frequência mais alta decai progressivamente de modo mais rápido. Por outro lado, de (2.1.57), pode-se obter:

$$\rho_i = \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \lambda_i}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \lambda_i} = \frac{1 - \mu_i}{1 + \mu_i} = \frac{-\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\mu_i}\right)} \quad (2.1.63)$$

e, portanto, quando λ_i cresce $\rho_i \rightarrow -1$. Isto significa que usando (2.1.41) para aproximar a solução do sistema (2.1.33) com a condição inicial dada em (2.1.34), as componentes de frequência mais alta no erro continuarão a cair quando λ_i cresce, porém lentamente, com uma taxa limite correspondendo a $\rho_i = -1$. Portanto se ocorrerem valores grandes para λ_i , o erro no método numérico utilizado será da ordem de Δt^2 e persistirá sem se extinguir, oscilando seu sinal indefinidamente.

Para contornar esta dificuldade pode ser adicionado um termo dissipativo na equação, e a utilização deste artifício é necessária em problemas em que aparecem efeitos convectivos, como no próximo caso que será analisado.

O caso da convecção-difusão.

Quando são utilizados métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais onde ocorrem termos de difusão e de convecção, estes termos competem entre si. Se efeitos convectivos dominam no modelo numérico, a solução pode exibir comportamentos oscilatórios inadequados devidos à dispersão de erros de alta frequência que são essencialmente oscilações numéricas não extintas. Por outro lado se a difusão domina, a aproximação pode ser muito fortemente amortecida, particularmente em regiões onde existem gradientes agudos ou descontinuidades na solução exata.

Considerando W não nulo, a matriz M do sistema (2.1.41) constante será definida por $M = B + C + D$ onde $D \neq 0$. Para o caso unidimensional as matrizes são dadas por:

$$A = (A_{ij}) = \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \quad e \quad (2.1.64)$$

$$M = (M_{ij}) = \alpha \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \sigma \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + W \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i(x) dx \quad (2.1.65)$$

A presença de D na matriz M , cujo elemento genérico é a última parcela da equação

(2.1.65), faz com que M perca a simetria. Neste caso, voltando à equação (2.1.45):

$$\frac{dE}{dt} = -A^{-1}ME, \quad (2.1.66)$$

a solução exata seria:

$$E(t) = [\exp(-A^{-1}M t)] E_0 \quad (2.1.67)$$

Levando em conta a definição de M e separando o termo correspondente ao processo convectivo tem-se:

$$E(t) = e^{[-A^{-1}(B+C+D)t]} E(0) = e^{-A^{-1}Dt} [e^{-A^{-1}(B+C)t} E(0)] \quad (2.1.68)$$

O termo entre colchetes representa a solução do primeiro caso, e este termo está multiplicado por um “fator de escala” dado pela exponencial da componente convectiva. Como $A^{-1}(B+C)$ é definida positiva e simétrica, seus auto-valores são reais e positivos, e tem-se a taxa usual de decaimento do erro difusivo, para qualquer escolha de Δt . Os autovalores da outra exponencial, em que figura a matriz $A^{-1}D$ são complexos; sendo $A^{-1}D$ assimétrica são imaginários puros (ou zero) e estão associados com o comportamento oscilatório.

A condição de estabilidade dada em (2.1.56) para o método de Crank-Nicolson conduz à condição de Peclet:

$$\frac{W\Delta x}{2\alpha} < 1. \quad (2.1.69)$$

que deve ser então satisfeita para que se tenha convergência no processo numérico.

Embora possam ser acrescentadas diversas estimativas para os problemas variacionais, e também para o problema totalmente discretizado, considerando casos particulares - onde eventualmente os coeficientes da equação sejam constantes ou nulos, bem como a utilização de outras normas - os resultados obtidos até aqui são satisfatórios no âmbito do trabalho e, ao leitor mais interessado na análise numérica dos problemas abordados, sugerem-se leituras cujas referências se encontram na bibliografia (Carey & Oden^{16, 17, 18}, Jonhson⁴⁰, diversos autores em Kardestuncer & Norrie⁴¹, Mitchell & Wait⁵⁶, e Wait & Mitchell⁶⁵) e também no Apêndice 4 do trabalho.

Capítulo 3: Distribuição populacional do bicudo do algodoeiro.

§3.0 Introdução.

O algodão, que é considerado a mais importante das fibras têxteis, entre as naturais e as artificiais, é também a planta de aproveitamento mais completo e que oferece os mais variados produtos de utilidade. Cultivam-se no Brasil três tipos de algodão: anual, semi-perene e perene. O anual é cultivado no Sul e Centro-Sul do país. Os outros são plantados no Nordeste. A partir da década de 30, com a crise do café, o Estado de São Paulo se pronuncia como o grande produtor de algodão do país, ao lado do Paraná. Na década de 80 o Brasil era o quinto produtor mundial, vindo depois da China, União Soviética, Estados Unidos e Índia. As DIRAs (Divisão Regional Agrícola) produtoras de algodão no Estado de São Paulo são: Ribeirão Preto, São José do Rio Preto, Araçatuba, Presidente Prudente, Marília, Bauru, Sorocaba e Campinas. Estas divisões supervisionaram e deram assistência técnica aos cotonicultores do Estado de São Paulo durante as décadas de 80 e 90. A figura 1.2.1 apresenta o mapa do Estado onde as setas indicam as localizações de algumas DIRAs.

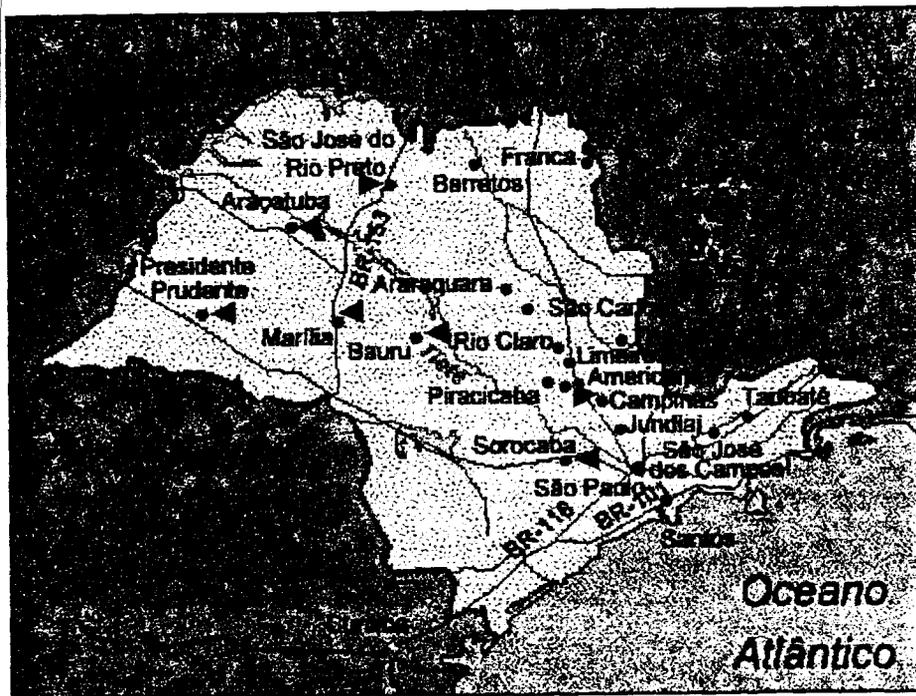


Figura 3.0.1: Mapa do Estado e as localizações de algumas DIRAs.

O litoral e o sul do Estado, bem como o Vale do Paraíba são considerados zonas não algodoeiras.

O algodão está classificado entre as cinco primeiras culturas no tocante ao valor de produção, mas representa grande custo ao produtor - em torno de R\$1.200,00/hectare enquanto o milho por exemplo custa em torno de R\$500,00/hectare. O início da safra se dá por volta de setembro a dezembro e a colheita é iniciada em abril podendo se estender até junho.

A cultura do algodão, em virtude da planta apresentar boas condições para atrair os insetos, é bastante atacada por diversas pragas. Destas, as mais comuns e prejudiciais são insetos e ácaros. Elas não limitam suas ações nocivas apenas a destruição dos órgãos da planta, concorrendo para diminuir a produção, mas também afetam algumas características da semente e da fibra, depreciando-as para seu emprego na indústria. Dentre as diversas pragas, o bicudo (*Anthonomus grandis* Boheman) foi a mais ameaçadora até em torno de dois anos atrás. A introdução de uma variedade de algodão americana precoce para substituir o IAC-20, usado como planta de bordadura, trouxe consigo um vírus que se propagou rapidamente no Brasil, e constitui-se hoje na maior praga do algodão, superando os efeitos já extremamente nocivos do bicudo. O bicudo ataca há tempos os algodoads americanos, colombianos e venezuelanos. Seus estragos são grandes, mas o pior é que sua presença fez com que os cotonicultores, que já aplicavam uma quantidade enorme de venenos nas lavouras, passassem a utilizar ainda mais intensamente esses produtos, onerando seus custos de produção e pondo em risco o equilíbrio do meio ambiente. O algodão é conhecido entre os agricultores como uma cultura migratória devido ao grande ataque de pragas forçando o agricultor a parar de plantar depois de alguns anos. O cultivo sucessivo em uma mesma área é altamente arriscado devido aos efeitos residuais de pragas da safra anterior, e a cultura “viaja” pelo país. No início da década de 90 os DIRAs no Estado de São Paulo acusavam em torno de 220 mil hectares plantados. Atualmente os cotonicultores do Estado do Mato Grosso têm tido lucro com seu plantio, mas, a introdução da virose somada à abertura de mercado fez com que muitos produtores deixassem de plantar e hoje o Brasil importa algodão da China.

O bicudo é originário do México, onde foi identificado em 1843, por C.H. Boheman. De lá ele invadiu o Texas, disseminando-se até ocupar quase toda a região produtora de algodão dos EUA. Em 1983 foi encontrado em grande quantidade nos algodoais da região de Sorocaba e Campinas, principalmente ao redor do aeroporto de Viracopos em São Paulo. Depois disso foi se alastrando por São Paulo, Paraná e Minas Gerais. O inseto voa rapidamente; a população é capaz de ocupar uma área de, em média 7800 km² em um ano agrícola¹, ou seja, a partir de um foco os insetos são capazes de atingir em um ano qualquer localidade distante até 50 km do foco.

O bicudo se reproduz rapidamente; em condições ideais - umidade e calor - 50 adultos fêmeas/hectare no início da safra são suficientes para que se tenham no final da safra 500 mil adultos neste mesmo hectare. Cada fêmea bota de 5 a 6 ovos por dia e chega a depositar de 150 a 200 ovos durante sua vida. Produz até 10 gerações em um ano agrícola, aumentando a população cerca de 7 a dez vezes por geração. A atividade do inseto adulto é bastante intensa; os ovos são depositados na flor; o estágio inicial - larvas e pupas - dura 16 dias em média, e após este período a flor é atacada e cai. Todavia, o inseto quando tocado ou quando pressente o perigo, imobiliza-se, fingindo estar morto e caindo até mesmo ao solo. Entre os inimigos naturais do bicudo, além dos pássaros, encontram-se cerca de 42 espécies de artrópodes, entre parasitas e predadores. O parasita mais eficiente tem sido uma pequena vespa - *Bracon mellitor*: cerca de 80% de todos os parasitas encontrados na larva do bicudo foram desta espécie. No Brasil além dessa vespa, diversas espécies de formigas foram observadas predando larvas e adultos do bicudo. O percevejo *Podisus sp.*, muito comum no país, também tem mostrado ser bom predador, sugando em média dois adultos por dia. Além dos inimigos naturais os bicudos são sensíveis ao frio e ao calor excessivo.

As práticas culturais, como manejo integrado de pragas (MIP), são recomendadas e supervisionadas pelos DIRAs como medidas auxiliares no controle do bicudo. A destruição dos restos culturais pela queima contribuirá para a eliminação da população infestante da próxima safra. A adoção de plantas iscas, em forma de faixas, para atrair os adultos migrantes e destruí-los é também boa medida de combate à praga. O uso de variedades de ciclo curto, para florescimento precoce e mais uniforme, é também recomendável. Muitos agricultores na década de 80 achavam que qualquer

¹ Esta informação obtida no CATI - Coordenadoria de Assistência Técnica Integral - com o Sr. Virino Cruz possibilitou o cálculo do coeficiente de difusão α necessário na descrição matemática do problema.

população de pragas que aparecesse na cultura devia ser exterminada. Para isso eles recorriam aos agrotóxicos mais fortes e pulverizavam suas lavouras de 12 a 15 vezes durante o plantio para matar até a última praga que tivesse resistido aos tratamentos anteriores. Hoje, cotonicultores mais esclarecidos sabem que é impossível erradicar as pragas da cultura. O combate químico indiscriminado pode agravar ainda mais a infestação, ao eliminar seus inimigos naturais. Com o MIP é possível reduzir as pulverizações para até duas durante o plantio, reduzindo os custos e a agressão ao meio ambiente.

§3.1 Aplicação 1: Dispersão do bicudo do algodoeiro no Estado de São Paulo na década de 80 ².

No ano de 1983 o bicudo chega em Campinas. O Estado de São Paulo possui uma zona propícia para a propagação do inseto com uma área estimada em 220.000 hectares, sendo tanto o sul do Estado como o litoral e o Vale do Paraíba zonas não algodoeiras.

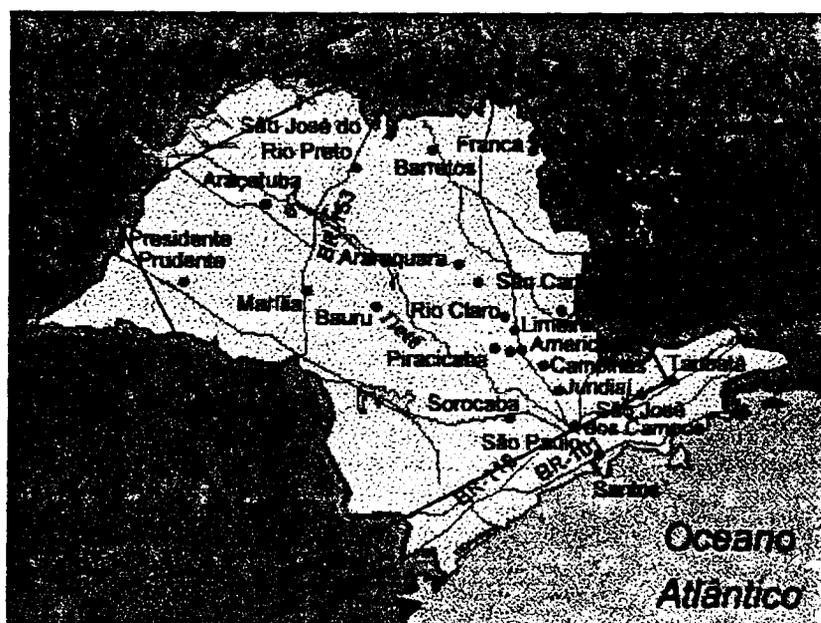


Figura 3.1.1: Mapa do Estado e a definição da região de interesse.

² Os programas e os gráficos foram desenvolvidos com o software MATLAB versão 4.2.

A partir de 91/92 todas as regiões algodoeiras do Estado são consideradas economicamente infectadas pelo bicudo. A última região atacada foi Araçatuba, em 89/90.

Considerando as informações obtidas, pretende-se estimar o coeficiente de difusão e a taxa de crescimento da espécie, descrever o problema da dispersão do inseto no estado de São Paulo entre 1983 e 1989 através de uma equação diferencial parcial mais condições iniciais e de contorno, e obter uma solução aproximada para o modelo matemático³.

▪ Parâmetros do domínio.

A região de interesse, marcada no mapa da figura 3.1.1 no mapa, é um quadrado que corresponde à uma área de 260.100 km² aproximadamente. Utilizando uma escala de 1:510 km o domínio espacial é dado pelo conjunto $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. A unidade de comprimento utilizada é indicada por u.c..

O instante inicial $t = 0$ corresponde ao início do ano de 1983, e o instante final $T = 84$ meses corresponde ao final do ano de 1989. O tempo é medido em meses.

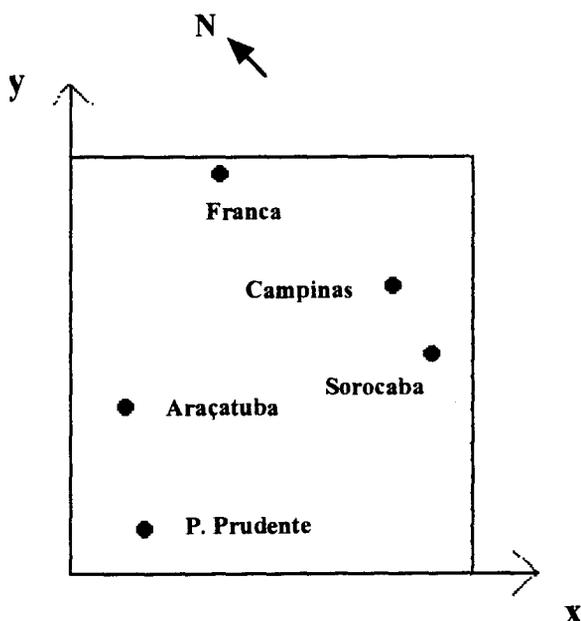


Figura 3.1.2: Domínio espacial utilizado nas simulações numéricas.

³ Supõe-se que não existe fonte, e fenômenos advectivos e/ou convectivos.

▪ **Parâmetros da discretização.**

Os valores utilizados na discretização são:

$x_f = 1$: valor final no eixo x.

$y_f = 1$: valor final no eixo y.

$N_{sx} = x_f/\Delta x = 16$: número total de subintervalos de $[0, 1]$ no eixo x.

$N_{sy} = y_f/\Delta y = 16$: número total de subintervalos de $[0, 1]$ no eixo y.

$n_t = 336$: número de passos no tempo.

A estes valores correspondem:

$\Delta x = x_f/N_{sx} = 0.0625$, $\Delta y = y_f/N_{sy} = 0.0625$ e $\Delta t = T/n_t = 0.25$.

Observações:

1. O valores de $\Delta x = \Delta y = 0.0625$ correspondem a 31.875 km de acordo com a escala utilizada.
2. O valor de $\Delta t = 0.25$ corresponde a 7.5 dias ($\frac{1}{4}$ de mês) e, como o instante final vale $T = 84$ meses, são necessárias $n_t = 336$ iterações no tempo a fim de cumprir o período de tempo fixado.

A equação que inicialmente descreve o problema é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + \sigma u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T] \quad (3.1.1)$$

▪ **Parâmetros do problema.**

São parâmetros do problema os coeficientes e as funções que aparecem na equação (3.1.1), além da condição inicial e as condições de contorno.

A **condição inicial** indica a distribuição da população em $t_0=0$, considerada concentrada em Campinas. Embora se tenha observado uma grande quantidade de insetos nos algodoais de Campinas em 1983, optou-se aqui por considerar uma simulação com uma população inicial de 400 insetos em uma área de aproximadamente 3.000 km² em torno de Campinas. Adotou-se então a seguinte definição para o vetor de condições iniciais:

$u_0(x,y) = 100$ nos pontos da malha de coordenadas cartesianas dadas por:
 $(13/16, 10/16)$, $(13/16, 11/16)$, $(14/16, 10/16)$ e $(14/16, 11/16)$, e
 $u_0(x,y) = 0$ nos demais pontos da malha.

A figura 3.1.3 ilustra esta definição. O eixo vertical indica a densidade populacional para cada ponto do domínio espacial Ω do plano xy no instante inicial $t_0=0$.

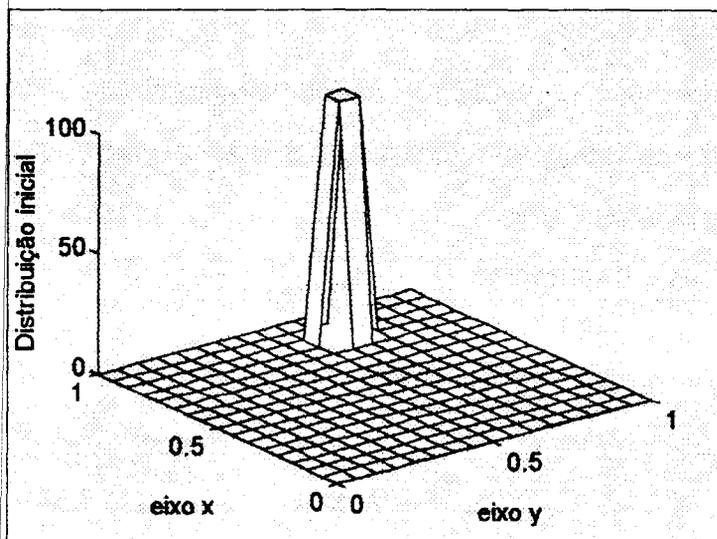


Figura 3.1.3: Distribuição inicial dos insetos nas região de Campinas.

As condições de contorno ⁴.

Considerando que o foco inicial de insetos ocorreu a uma distância razoável da fronteira do Estado de São Paulo com o Paraná e que apenas nos últimos anos se está plantando algodão no Estado do Mato Grosso do Sul define-se:

$$u(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, t \in (0,T].$$

Tanto a região litorânea do Estado de São Paulo como a fronteira com o Estado de Minas Gerais são consideradas regiões letais para o inseto o que implica na definição seguinte:

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, t \in (0,T].$$

⁴ Veja as figuras 3.1.1 e 3.1.2.

O coeficiente de difusão : α

Sabe-se que a população é capaz de ocupar uma área de $\pi(50)^2 \text{ km}^2/\text{ano}$. De acordo com o domínio e a escala utilizada tem-se portanto a área correspondente em u.c.^2 .

Determinação da área na unidade de comprimento utilizada:

$$260.100 \pi \text{ km}^2 - \pi \text{ u.c.}^2$$

$$2.500 \pi \text{ km}^2 - A \quad \text{portanto } A = 0.03019601 \text{ u.c.}^2.$$

Sendo a unidade de tempo, u.t. dada em meses, o coeficiente de difusão que deve ser utilizado no processo numérico é então dado por:

$$\alpha = \frac{2.500\pi \text{ km}^2}{\text{ano}} = \frac{(0.03019601) \text{ u.c.}^2}{12\text{u.t.}} \cong 0.00251633 \text{ u.c.}^2 / \text{u.t.}$$

Portanto o coeficiente de difusão que será utilizado será:

$$\alpha = 0.00251633 \text{ u.c.}^2 / \text{u.t.}$$

A taxa intrínseca de reprodução : λ

Como em média o bicudo produz até 10 gerações em um ano agrícola, durante a safra isto corresponde a 5 gerações. Cada geração vive portanto, em média, 36 dias.

Considerando uma população inicial de 50 fêmeas por hectare resultando em uma população final de 250.000 fêmeas neste mesmo hectare, tem-se:

$P_0 = 50$: população inicial de fêmeas $P_5 = 250.000$: população final de fêmeas.

A passagem de geração a geração é calculada como segue:

Primeira geração : $P_1 = P_0 + n_a P_0 = (1 + n_a) P_0$

Segunda geração : $P_2 = P_1 + n_a P_1 = (1 + n_a)^2 P_0$

.....

Quinta geração : $P_5 = P_4 + n_a P_4 = (1 + n_a)^5 P_0$, onde n_a é a taxa de crescimento por geração, ou seja, a cada 36 dias, e P_i é a população de fêmeas na i -ésima geração.

Portanto $n_a = \sqrt[5]{\frac{P_5}{P_0}} - 1$, e $n_a \cong 4.49/\text{geração}$, ou ainda $n_a \cong 449\%/\text{geração}$.

A taxa diária de crescimento, indicada por n_d será calculada tendo em vista que

após 36 dias a população de fêmeas é $P_1 = (1 + n_d) P_0$. Assim:

Primeiro dia: $D_1 = P_0 + n_d P_0 = (1 + n_d) P_0$

Segundo dia: $D_2 = D_1 + n_d D_1 = (1 + n_d)^2 P_0$

.....

Trigésimo sexto dia: $D_{36} = D_{35} + n_d D_{35} = (1 + n_d)^{36} P_0$, onde D_i é a população de fêmeas

no i-ésimo dia. Mas $D_{36} = P_1 = (1 + n_d) P_0$, logo tem-se que:

$$(1 + n_d)^{36} P_0 = (1 + n_d) P_0$$

portanto $n_d = \sqrt[36]{1 + n_d} - 1$, o que implica que $n_d \cong 0.0484551/\text{dia}$.

A taxa intrínseca de reprodução da espécie, λ , será a taxa de crescimento em um mês, que corresponde a 30 dias. Conhecendo a taxa diária de natalidade tem-se que :

$D_{30} = (1 + n_d)^{30} P_0$. Também $M_1 = (1 + \lambda)P_0$, onde M_1 é a população de fêmeas

após um mês e λ é a taxa de crescimento em um mês. Portanto $D_{30} = M_1$, e

$(1 + n_d)^{30} P_0 = (1 + \lambda)P_0$, sendo então $\lambda = (1 + n_d)^{30} - 1$, e portanto $\lambda \cong 3.13518646/ \text{u.t.}$

Usando então o tempo medido em meses, $\lambda \cong 3.13518646/\text{u.t.}$ é a taxa intrínseca de reprodução que será utilizada.

A taxa de sobrevivência σ .

Primeiro ensaio:

Neste primeiro ensaio considera-se que a prática do manejo integrado de pragas nas plantações do Estado de São Paulo acarretaram uma taxa de mortalidade correspondente a 80% da taxa de crescimento da população dada por $\lambda \cong 3.13518646/ \text{u.t.}$ O coeficiente que indica este decaimento vale então $\sigma' = 2.50814917$. Portanto tem-se que a taxa de sobrevivência é a seguinte:

$$\sigma = \sigma' - \lambda \cong -0.62703729/\text{u.t.}$$

A figura 3.1.4 ilustra uma situação intermediária, ou seja, a distribuição populacional dos insetos após um ano. O eixo vertical indica a densidade populacional para cada ponto do

domínio Ω no plano xy no instante $t = 12$ meses, o que corresponde a 48 iterações no tempo.

A região de Franca nesta fase começa a ser atingida, enquanto que regiões mais a sudoeste do estado ainda não estão infectadas.

Apesar do uso das práticas agrícolas percebe-se um aumento considerável da população já no primeiro ano.

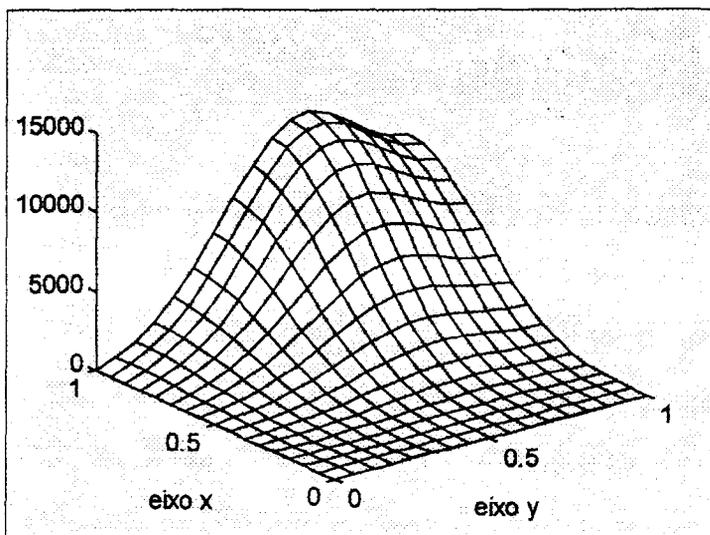


Figura 3.1.4: Distribuição da população de insetos após um ano.

A figura 3.1.5 mostra a situação após 7 anos, com toda a região tomada. O uso de defensivos demonstra ter sido ineficiente e a população cresce a níveis altíssimos, conforme indicam os valores no eixo vertical.

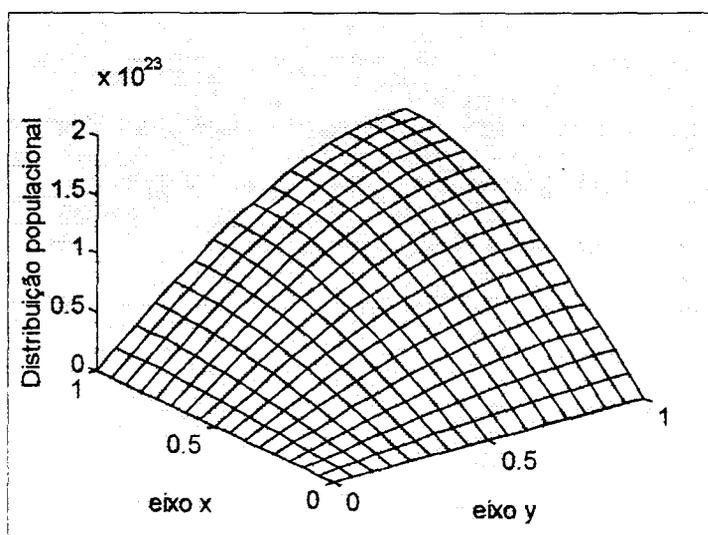


Figura 3.1.5: Distribuição final da população de insetos - 1989.

Segundo ensaio:

Considerando um aumento na taxa de mortalidade, correspondendo neste segundo ensaio a 98% da taxa de crescimento λ , o coeficiente de decaimento devido à hostilidade do meio passa a valer $\sigma' = 3.07248273$ e tem-se que a taxa de sobrevivência é de:

$$\sigma = \sigma' - \lambda \cong -0.06270373/\text{u.t.}$$

Neste caso a densidade populacional consegue ser controlada, sendo a situação após um ano ilustrada na figura 3.1.6.

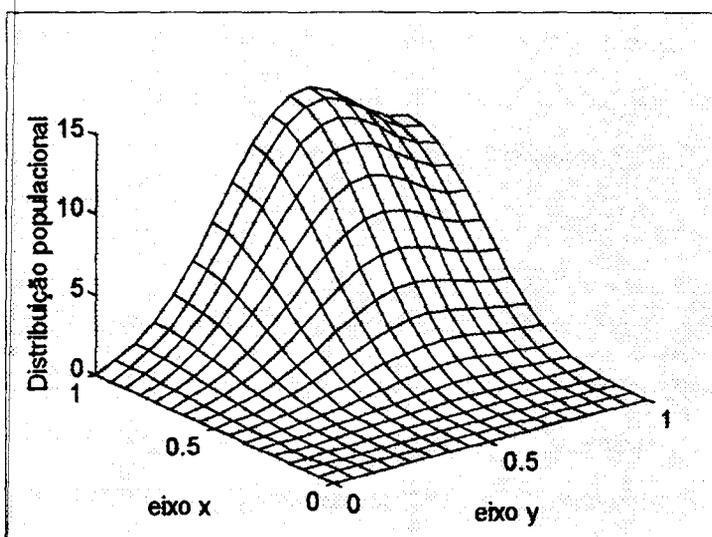


Figura 3.1.6: Distribuição da população de insetos após um ano.

A situação no final da década está ilustrada na figura 3.1.7 com todo o Estado invadido pelo inseto, mas o ensaio mostra claramente a diferença quanto a densidade populacional no instante final.

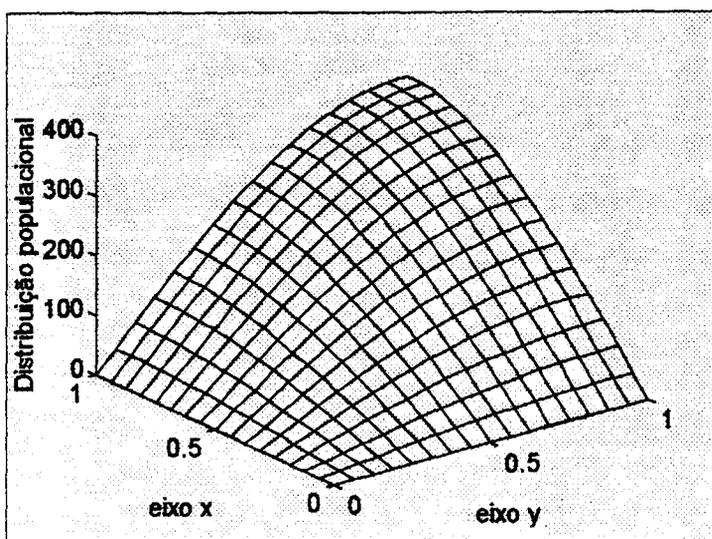


Figura 3.1.7: Distribuição final da população de insetos - 1989.

Os ensaios são qualitativos mas apresentam resultados que comprovam o que ocorreu na década de 80 no Estado de São Paulo. O coeficiente de difusão dos insetos é bem grande e a área, em pouco tempo, se encontra totalmente infectada.

Observações finais:

Foram feitas diversas considerações a fim de descrever o espalhamento do bicudo no Estado de São Paulo utilizando o processo de modelagem matemática. Algumas são naturais e até mesmo intuitivas, representando a simples adaptação à linguagem matemática daquilo que ocorre na realidade, enquanto outras são artificiais e se justificam na formulação matemática. Todo problema real envolve muitas variáveis e, fazem-se necessárias hipóteses simplificadoras a fim de que seja possível tratá-lo sob diversos pontos de vista; a matemática é apenas um destes. A modelagem matemática de um problema pode ser utilizada para constatar o que acontece na realidade através de respostas numéricas. O processo todo pode então ser transportado para outros problemas que apresentem, por analogia, características suficientemente semelhantes além de comportamentos similares, e, neste caso, o modelo pode ser utilizado a fim de se tentarem previsões e inferências. Este “transporte” pode ser observado já nos cursos de Cálculo Integral e/ou Equações Diferenciais Ordinárias da Graduação¹.

¹ Um exemplo clássico é a analogia entre os sistemas mecânicos massa-mola e os circuitos elétricos.

As considerações feitas foram as seguintes:

1. A não existência de fonte.

A hipótese é justificada pelo fato de que o Estado de São Paulo foi o primeiro a detectar a presença do bicudo no ano de 1983.

2. Não foram considerados processos convectivos e/ou advectivos.

Embora existam correntes de ventos dominantes em várias localidades do Estado de São Paulo e embora possam estar presentes processos de quimiotaxia que justifiquem a inclusão de termos convectivos e/ou advectivos, tais fenômenos não foram considerados, ou foram negligenciados. Supôs-se, intuitivamente, que o coeficiente de difusão resultante de informações fornecidas pelo CATI de certa forma englobou todos estes tipos de comportamentos, já que os números são resultados de experimentos de campo realizados nos Estados Unidos. Sugerem-se as inclusões de tais termos na equação em um trabalho futuro, com os devidos cuidados na obtenção de valores que se aproximem da realidade e possam contribuir para a obtenção de resultados melhores.

3. Crescimento malthusiano.

A população de bicudos cresce exponencialmente, embora existam predadores naturais já citados no texto. Sem a aplicação de defensivos agrícolas qualquer safra de algodão estará comprometida pelo ataque e multiplicação extremamente rápida desta praga.

4. Intervalo de tempo e unidades de medida.

A fim de isolar o Estado de São Paulo como o único Estado a detectar a presença do bicudo, escolheu-se como instante final o ano de 1989. A partir de 1990 outros Estados já sentiam a presença e a ação dos insetos: norte do Paraná, a região de Uberaba em Minas Gerais e Goiás.

A determinação das unidades de medidas e dos incrementos Δx , Δy e Δt utilizados no processo numérico devem estar condicionados não só ao interesse do pesquisador como também às restrições de convergências numéricas que estão diretamente ligadas aos valores dos coeficientes presentes na equação; no caso o

coeficiente de difusão α .

Isolar Campinas como a primeira localidade do Estado a acusar a presença do inseto e a partir daí definir a condição inicial leva a cuidados na escolha da malha.

5. A condição inicial.

O instante inicial foi considerado como o mês de janeiro de 1983 a fim de se considerar apenas Campinas como depositária de um número razoável de bicudos. No mesmo ano de 1983 já se constatava a presença de um grande número de bicudos nos algodoads não só de Campinas como também de Sorocaba. A fim de se considerar a presença dos insetos no instante inicial também na cidade de Sorocaba basta trabalhar com uma malha mais grossa - aumentando Δx e Δy adequadamente - e levar em consideração um aumento sensível na densidade inicial de insetos neste caso.

6. Fronteiras do domínio e condições de contorno.

A hipótese de que não existam bicudos na fronteira do Estado de São Paulo com o Mato Grosso do Sul - indicada por Γ_0 - é natural dado o período de tempo considerado. A mesma hipótese aplicada à outra parte de Γ_0 que considera o sul do Estado de São Paulo e uma pequena fatia do Paraná pode ser considerada simplificadora; justificada em parte pelo fato de que o sul do Estado de São Paulo não é zona de algodão e também pelo período de tempo considerado e a distância relativamente grande do foco inicial em Campinas. A região produtora no Paraná pertence ao domínio considerado. A condição de contorno na fronteira Γ_1 indica que esta região é letal par o inseto. No caso do litoral do Estado de São Paulo e Vale do Paraíba esta hipótese é justificada pela própria região composta de serras e clima não favorável. A outra parte de Γ_1 foi marcada no Estado de Minas Gerais e a condição de contorno neste caso é sem dúvida a hipótese mais artificial utilizada no tratamento matemático. Optou-se aqui por conservá-la a fim de que esta aplicação exemplifique não só o tipo de equação mas também as condições iniciais e de contorno que foram consideradas na parte teórica no capítulo precedente e os métodos de solução. Martins, R.E. em seu trabalho de iniciação científica² - em andamento - pretende alterar esta condição a fim de considerar uma hipótese mais real.

² Martins, R.E. "Um tratamento matemático ao problema do bicudo do algodoeiro." PIBIC 98/99.

A inclusão de termos advectivos e/ou convectivos em um trabalho futuro também contribuirá muito no sentido de descrever melhor o espalhamento dos insetos, levando em consideração direções preferenciais de uso, evitando, por exemplo, o sul do Estado de São Paulo, sem deixar de considerar a ida dos insetos para o Paraná, principalmente na década de 90.

A utilização de outros pacotes matemáticos e programas³ para geração de malhas e figuras apresentam grandes vantagens operacionais sobre o software MATLAB (e diversas dificuldades de implementação), trabalhando com fronteiras irregulares com boas definições gráficas e ficam como sugestão para serem usados em trabalhos futuros.

Para terminar, uma investigação criteriosa sobre a eficiência de técnicas agrícolas adotadas nos controles de pragas pode resultar em um trabalho conjunto que possibilite uma aproximação melhor no cálculo do coeficiente de decaimento σ' melhorando assim os resultados obtidos.

§3.2 Aplicação 2: Controle biológico do bicudo do algodoeiro em uma área de plantio⁴.

A fim de testar um controle biológico desta praga, considera-se uma área de plantio de algodão dividida em duas sub-áreas, como indica a figura 1.2.8. A área total de plantio é de 648 km², o que corresponde a 64.800 hectares, tendo 36 km de extensão por 18 km de largura. A lavoura é dividida em glebas com aproximadamente 300 hectares em média cada uma. Considera-se inicialmente a população de insetos vinda das áreas de refúgio - beiradas de matas e margens de rios ou riachos. Na primeira fase instalam-se armadilhas de feromônios, a fim de atrair os insetos adultos para esta região, onde serão exterminados. As armadilhas são colocadas na bordadura em volta da área de plantio e são eficientes em atrair bicudos - tanto machos como fêmeas - até 75 dias em média após a emergência. As bordaduras são também utilizadas em torno das glebas onde se plantam variedades precoces a fim de atrair os insetos. Após alguns dias estas áreas são queimadas e todo o algodão enterrado para exterminar insetos, larvas e ovos.

³ PDEase - disponível no IMECC

⁴ Os programas e os gráficos foram desenvolvidos com o software MATLAB versão 4.2.

Findos os 75 dias de ação dos feromônios, inicia-se a segunda fase do projeto, quando a população sobrevivente da área 1 continuará se espalhando através da plantação onde serão realizados monitoramentos de controle.

Na segunda fase do projeto, com a área 2 já cultivada, a população sobrevivente se difundirá através da plantação onde serão realizados trabalhos de controle os mais modernos e eficientes possíveis, conservando os inimigos naturais e realizando-se pulverizações periódicas com produtos agroquímicos de acordo com orientação técnica.

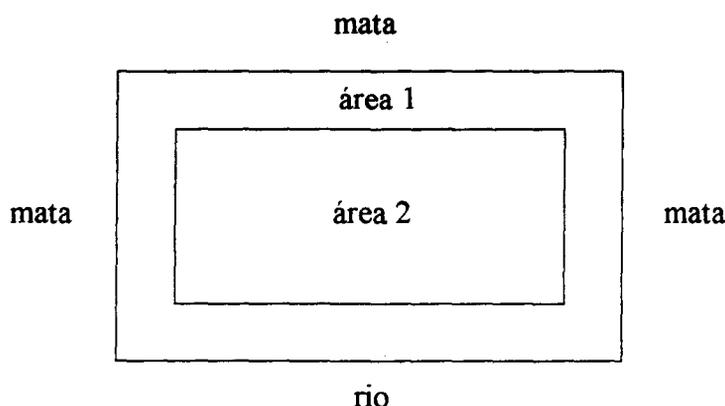


Figura 3.2.1: Campo experimental para controle biológico do bicudo do algodoeiro.

▪ Parâmetros do domínio.

Dada a simetria do problema, matematicamente trabalha-se com um quarto da área de interesse o que corresponde a 162 km^2 .

Utilizando uma escala de 1:18 km o domínio espacial é dado pelo conjunto $\Omega = [0, 1] \times [0, 0.5] = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com $\Omega_2 = [0.125, 1] \times [0.0625, 0.5]$ correspondente a uma área de aproximadamente 124 km^2 , e $\Omega_1 = \Omega - \Omega_2$ correspondente a uma área de aproximadamente 38 km^2 representado na figura 3.2.2. A unidade de comprimento utilizada é indicada por u.c..

O instante inicial onde $t_0=0$ indica o início da fase 1 do projeto, quando os insetos vindos da área de refúgio estão na bordadura em volta da lavoura.

O instante final é igual a $T = 10.800$ horas correspondente a 180 dias e indica o final da safra, fim da fase 2.

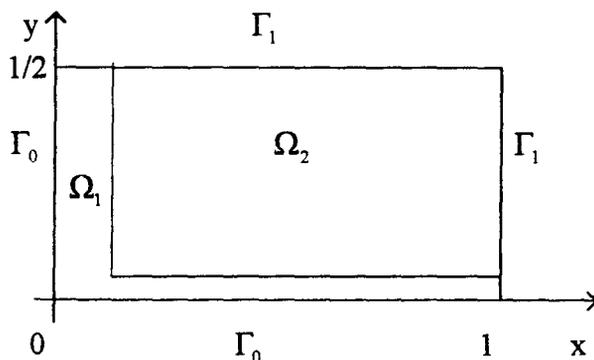


Figura 3.2.2: Domínio espacial utilizado nas simulações numéricas.

O objetivo é estimar a quantidade de insetos sobreviventes na área e sua distribuição espacial no final da safra, ou seja em $T = 180$ dias. O tempo é medido em horas e o espaço em u.c.

▪ **Parâmetros da discretização.**

Os valores utilizados na discretização são:

$x_f = 1$: valor final no eixo x.

$y_f = 1/2$: valor final no eixo y.

$x_s = 1/8$: marca o valor no eixo x que demarca a área 1.

$y_s = 1/16$: marca o valor no eixo y que demarca a área 1.

$N_{sx} = x_f/\Delta x = 16$: número total de subintervalos de $[0, 1]$ no eixo x.

$N_{sy} = y_f/\Delta y = 16$: número total de subintervalos de $[0, 1/2]$ no eixo y.

$nsfx = 2$: número de subintervalos até x_s na área 1 no eixo x.

$nsfy = 2$: número de subintervalos até y_s na área 1 no eixo y.

$n_t = 8.640$: número de iterações no tempo.

$n_{t1} = 3.600$: número de iterações no tempo durante a fase 1.

$n_{t2} = 5.040$: número de iterações no tempo durante a fase 2.

A estes valores correspondem:

$\Delta x = x_s/nsfx = 1/16$, $\Delta y = y_s/nsfy = 1/32$ e $\Delta t = T/n_t = 0.5$.

O ensaio numérico será dividido em duas fases: a primeira até 75 dias após o plantio da variedade precoce na área 1 onde se tem a ação das armadilhas de feromônios, e a segunda até o final da safra - 180 dias - onde se utiliza o manejo integrado de pragas.

Fase 1:

▪ Parâmetros do problema.

São parâmetros do problema os coeficientes e as funções que aparecem na equação diferencial parcial, além da condição inicial e as condições de contorno.

A **condição inicial** indica a distribuição da população em $t_0=0$, considerada homogênea em Ω_1 e inexistente em Ω_2 . Definindo $u_0(x,y) = 30000$ insetos em cada ponto de Ω_1 , e $u_0(x,y)=0$ em Ω_2 (que corresponde a uma pequena densidade inicial de aproximadamente 0.05 insetos/ m^2) tem-se a condição inicial na área total ilustrada na figura 3.2.3.

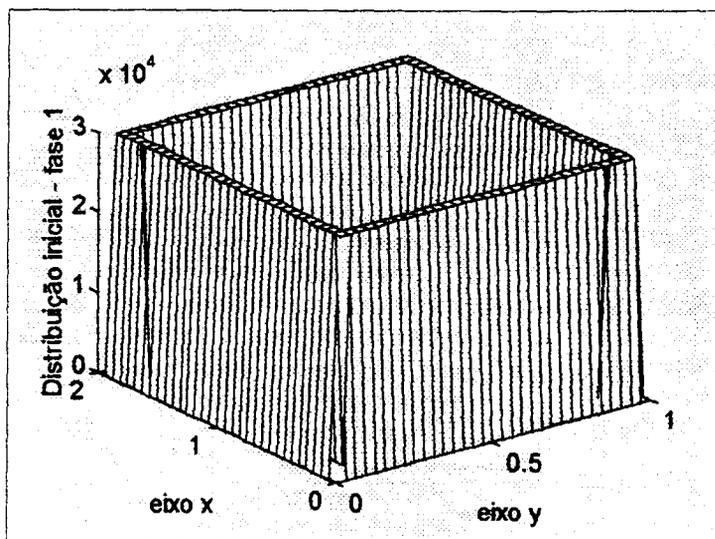


Figura 3.2.3: Distribuição inicial dos insetos.

As condições de contorno são:

$$u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \text{ e}$$

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad t \in (0, T],$$

com a parte da fronteira indicada por Γ_0 suficientemente afastada da região de interesse, e com a outra parte definida por Γ_1 , indicando as condições de simetria.

A taxa intrínseca de reprodução : λ

A taxa diária de crescimento, indicada por n_d já foi calculada na aplicação 1 e vale $n_d \cong 0.0484551/\text{dia}$. Portanto $H_{24} = (1 + \lambda)^{24} P_0 = D_1 = (1 + n_d) P_0$ e tem-se que:

$$\lambda = \sqrt[24]{1 + n_d} - 1 \cong 0.00197352/\text{h}.$$

A taxa de sobrevivência σ .

Considerando o coeficiente de decaimento devida à hostilidade do meio (aplicação de bordaduras nas glebas, inseticidas, etc.) $\sigma' = 0.00160090$ tem-se que:

$$\sigma = \sigma' - \lambda \cong -0.0037262/\text{h}.$$

O coeficiente de difusão : α

Considerando que população é capaz de ocupar uma área de $625\pi \text{ km}^2/\text{ano}$, sendo a unidade de comprimento medida em u.c. e a unidade de tempo em horas, tem-se que:

$$\alpha = \frac{625\pi \text{ km}^2}{\text{ano}} = \frac{6.0601701 \text{ u.c.}^2}{365 \text{ dia}} \cong \frac{0.01660321 \text{ u.c.}^2}{24 \text{ horas}} \cong 0.00069180 \text{ u.c.}^2/\text{h}.$$

O vetor velocidade de migração $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$ será dado por:

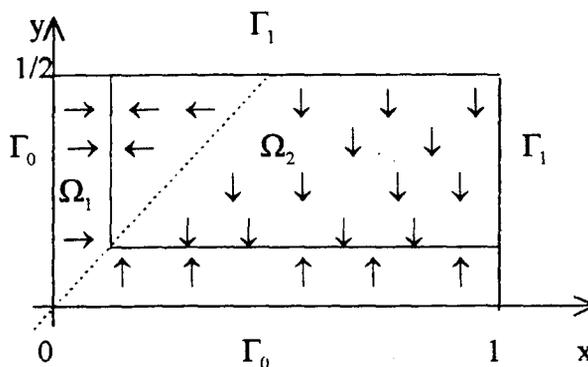


Figura 3.2.4: Campo de velocidades da migração durante a fase 1.

Ou seja, como existe algodão somente na área 1 durante a fase 1, os insetos

vindos das regiões de refúgio que estiverem na região Ω serão atraídos para a borda da região. A hipótese assumida neste caso é a de que os insetos deverão percorrer a menor distância para atingir a borda.

Matematicamente, fixam-se os valores:

$$W_1 = 0 \text{ e } W_2 = -0.005 \text{ em } \Omega \text{ se } x > y,$$

$$W_1 = -0.005 \text{ e } W_2 = 0 \text{ em } \Omega \text{ se } x \leq y.$$

OBS: Nas faixas onde estão localizadas as armadilhas de feromônios considera-se o campo de velocidades definido por:

$$W_1 = 0 \text{ e } W_2 = 0.005 \text{ em } \Omega \text{ se } x > y,$$

$$W_1 = 0.005 \text{ e } W_2 = 0 \text{ em } \Omega \text{ se } x \leq y.$$

A função $f(t,x,y)$.

Considera-se um **sumidouro** na faixa onde estão colocadas as armadilhas de feromônios, sendo neste ensaio a função $f(t,x,y)$ função do tempo, no sentido de que quanto mais forte o efeito das armadilhas maior é f - isto ocorre no instante inicial. Este efeito decresce linearmente no tempo até chegar a zero o que implica em $f = 0$ no instante final. Tem-se então:

$$f(t, x, y) = -0.05 \left(1 - \frac{t}{1800} \right)$$

na faixa definida por $x = \Delta x = 1/16$, e $y \in [\Delta y, 1/2]$ e para a faixa definida por $y = \Delta y = 1/32$ e $x \in [\Delta x, 1]$; $f = 0$ nos demais nós da malha.

A equação diferencial parcial que descreve estes fenômenos é, então, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + \nabla \cdot (\mathbf{W}u) + \sigma u = f(t, x), \quad x \in \Omega, t \in (0, T_1], \quad (3.2.1)$$

com os coeficientes e as condições inicial e de contorno apresentadas acima e o tempo final da fase 1 dado por $T_1 = 75$ dias .

As figuras a seguir ilustram a distribuição parcial de insetos no tempo $T_p = 4$

horas, correspondendo a 8 iterações no tempo, a distribuição no tempo $T_p = 2$ dias, correspondendo a 96 iterações no tempo, a distribuição no tempo $T_p = 12,5$ dias correspondendo a 600 iterações no tempo, e a distribuição no final da fase 1, ou seja em $T_1 = 75$ dias, correspondendo a 3600 iterações no tempo.

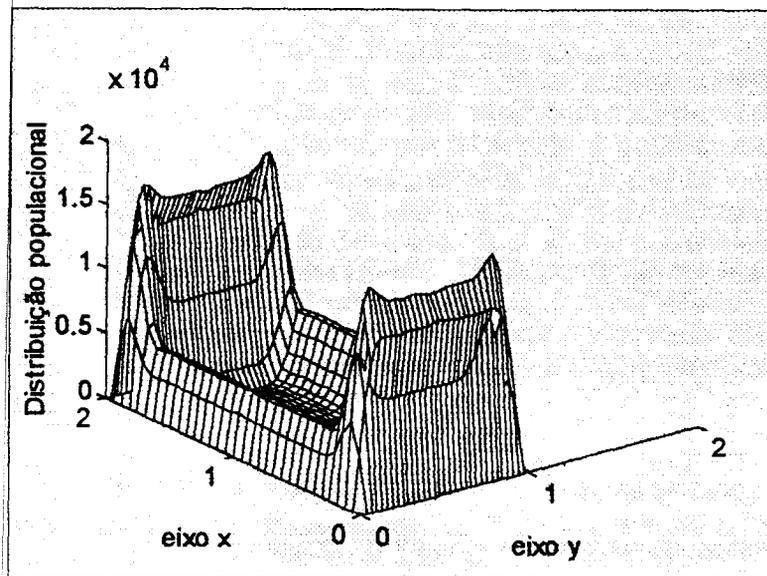


Figura 3.2.5a: Distribuição populacional na área de plantio após 4 horas.

A diferença grande na densidade populacional nos pontos próximos das fronteiras se deve à diferença entre os incrementos Δx e Δy ; enquanto que na direção do eixo y , cada Δx é percorrido em aproximadamente $4 \Delta t$, na direção do eixo x , cada Δy é percorrido na metade do tempo, ou seja, $2 \Delta t$.

A figura 3.2.5a mostra claramente as oscilações iniciais devidas ao método numérico utilizado, localizadas principalmente nos pontos extremos do domínio e ferindo até mesmo a condição de contorno (derivada na direção da normal deve ser nula). Este resultado pode ser observado também na figura 3.2.5b que ilustra algumas curvas de nível correspondentes ao gráfico da solução anterior.

Estas oscilações desaparecem rapidamente e devem-se exclusivamente a magnitude do termo difusivo presente na equação (3.2.1) combinada com os incrementos das variáveis espaciais e temporais (como comentado no §2.1.6 do capítulo 2).

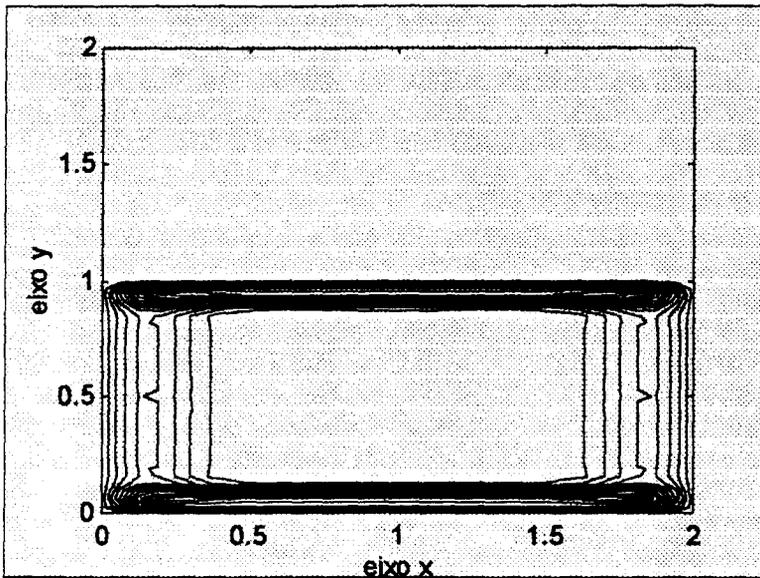


Figura 3.2.5b: Distribuição populacional em curvas de nível após 4 horas.

As figuras 3.2.6a e 3.2.6b representam as densidades populacionais em cada ponto do domínio após 96 iterações no tempo. As oscilações iniciais desaparecem e as curvas são mais suaves. O decréscimo da população deve-se em parte ao fato da fronteira não estar suficientemente afastada da região de interesse, além da presença do sumidouro. O termo advectivo domina e, como, inicialmente, a população se encontra muito próxima à fronteira, embora aí u seja igual a zero a derivada de u na direção da normal não é zero e a população “escapa”. Este efeito é diminuído pela ação contrária da velocidade nos nós da malha que estão fora da região de plantio, entre a região e a fronteira.

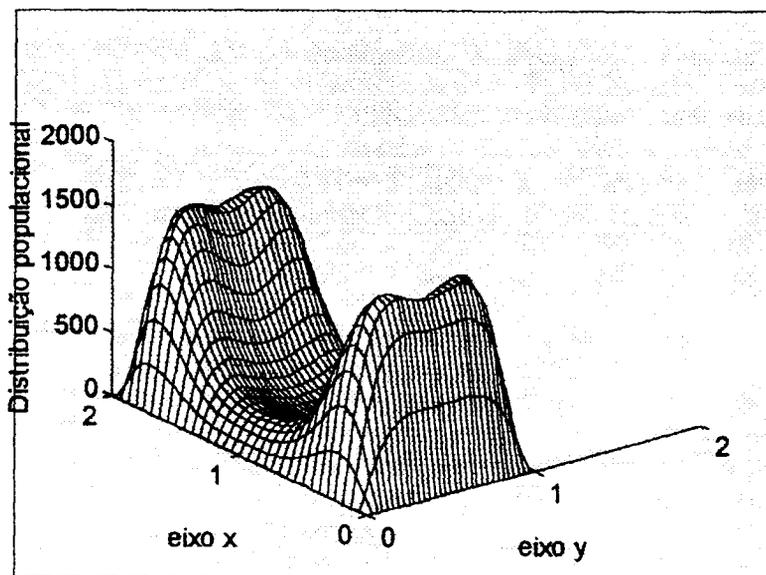


Figura 3.2.6a: Distribuição populacional na área de plantio após 2 dias.

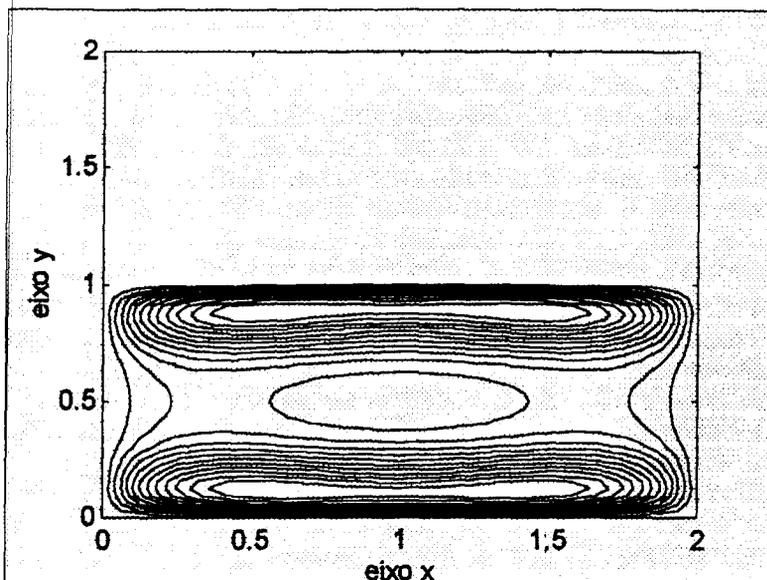


Figura 3.2.6b: Distribuição populacional em curvas de nível após 2 dias.

Inicialmente nota-se menos este “equilíbrio” no campo de velocidades, mas a medida que são realizadas mais iterações seu efeito é mais positivo no sentido de “segurar” a população dentro da região de plantio.

Para um futuro trabalho que melhore o resultado quantitativo, sugere-se afastar a fronteira da região de plantio; isto implica em trabalhar com o campo de velocidades dependente das coordenadas espaciais e, conseqüentemente, devem-se realizar integrações numéricas a fim de montar as matrizes de rigidez.

Nota-se claramente o efeito do campo de velocidades carregando a população para a bordadura onde estão localizadas as armadilhas de feromônios. A fim de evidenciar este efeito realizou-se um ensaio considerando $\mathbf{W} = (0, 0)$ e $f = 0$. Após 96 iterações no tempo tem-se o seguinte resultado, ilustrado nas figuras 3.2.6c e 3.2.6d:

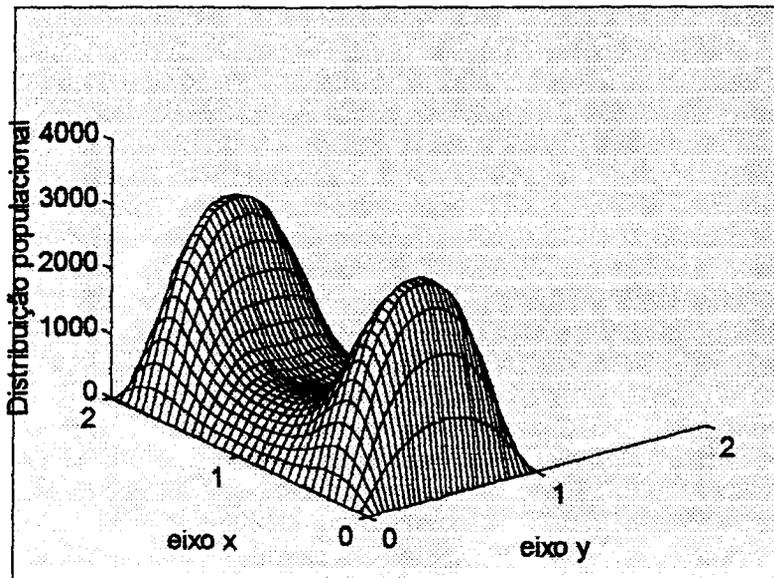


Figura 3.2.6c: Distribuição populacional na área de plantio após 2 dias com $W = (0, 0)$ e $f = 0$.

Com 600 iterações realizadas a população se encontra mais dispersa na área de plantio e a densidade populacional aumenta sensivelmente. A capacidade de atração das armadilhas de feromônios decresce no tempo e, este fenômeno somado ao equilíbrio dos campos de velocidades e também ao sinal de σ , favorecem o crescimento populacional.

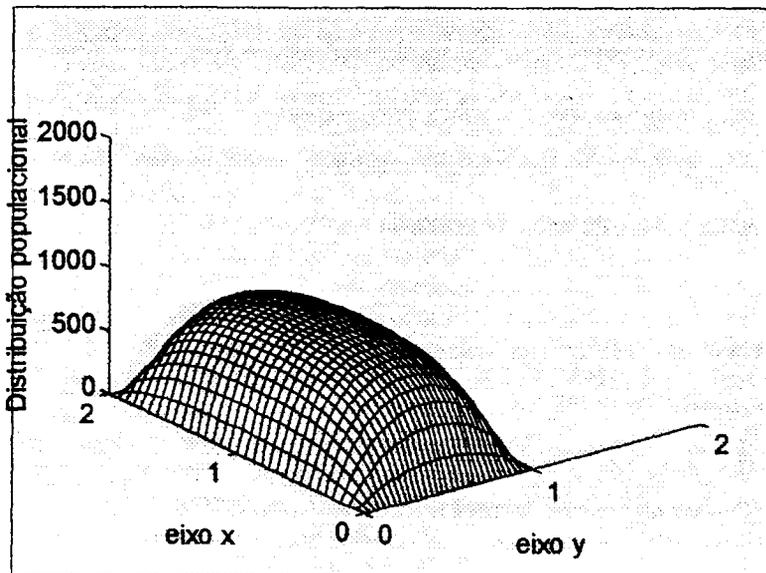


Figura 3.2.7a: Distribuição populacional na área de plantio após 12,5 dias.

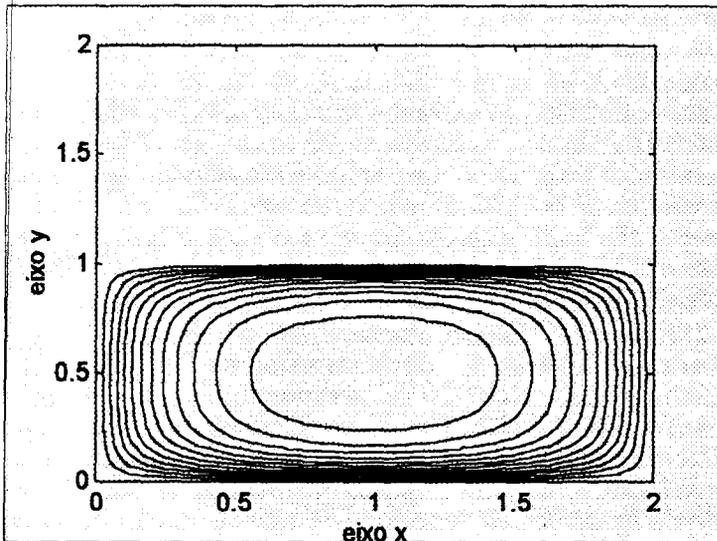


Figura 3.2.7b: Distribuição populacional em curvas de nível após 12,5 dias.

A figura 3.2.8. ilustra este crescimento populacional após 75 dias ou 3600 iterações no tempo. Apesar da fronteira não estar suficientemente afastada da região de interesse, este resultado é coerente com a definição de σ . Pode-se, mesmo assim, intensificar as técnicas de controle durante a fase 2 para evitar um infestamento da praga na lavoura.

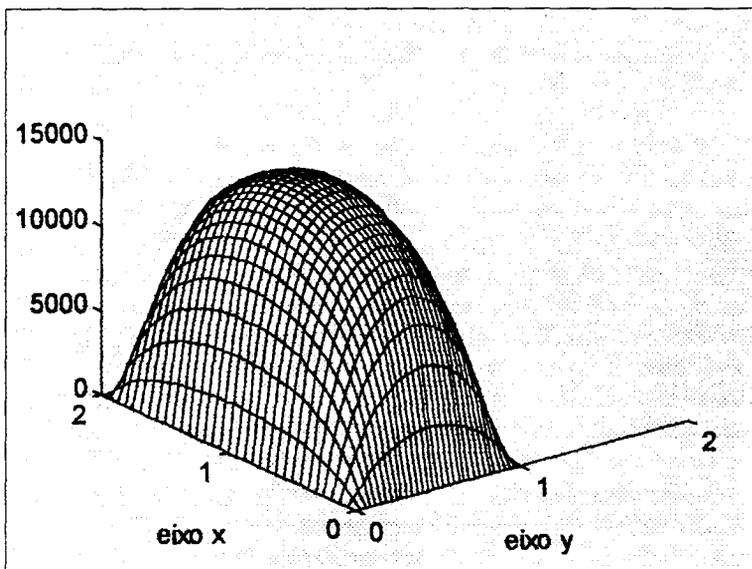


Figura 3.2.8a: Distribuição populacional na área de plantio no final da fase 1, ou seja, $T_1 = 75$ dias.

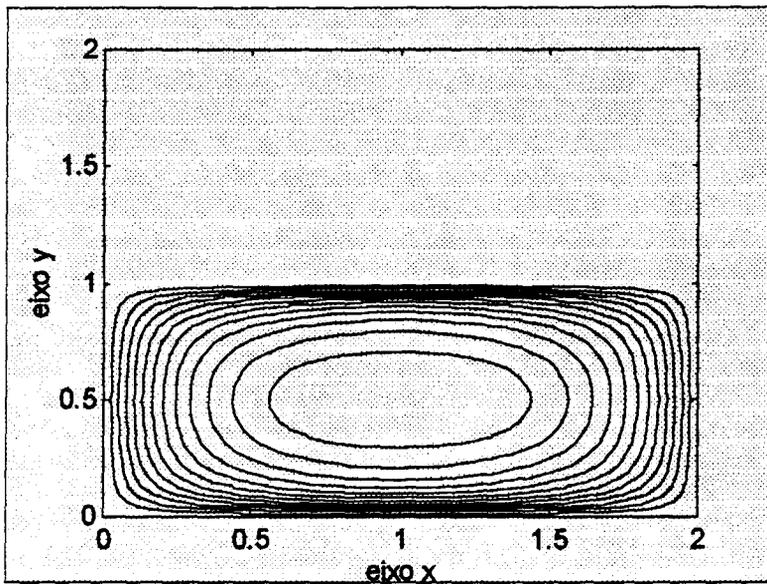


Figura 3.2.8b: Distribuição populacional em curvas de nível no final da fase 1, ou seja, $T_1 = 75$ dias.

Fase 2 :

A fase 2 consiste em um novo problema dado pela equação 3.2.1, com a condição inicial definida pela solução da fase 1, sendo que na área 1 a condição inicial é zero já que o algodão nesta área será queimado, matando insetos, larvas e ovos que estiverem nesta região.

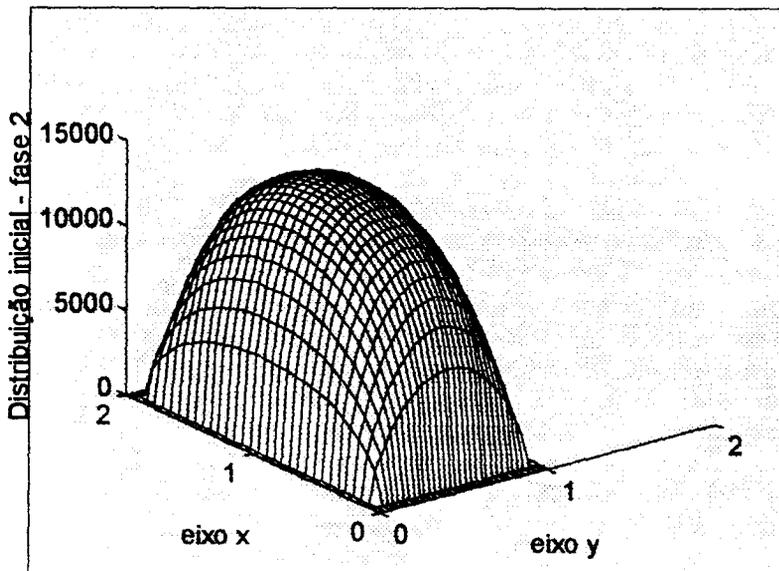


Figura 3.2.9: Condição inicial da fase 2.

O coeficiente de difusão α é o mesmo da fase 1. Supõe-se que não existam fontes

ou sumidouros nesta fase, ou seja $f = 0$, e que as componentes da velocidade sejam pequenas no sentido de atrair a população para a área 2 de plantio, ou seja $W1 = W2 = 0.0001$ nas faixas onde estão localizadas as armadilhas de feromônios, e $W1 = W2 = 0$ nos demais nós da malha. Considera-se um aumento considerável nas técnicas de controle de pragas, causando uma diminuição na taxa de sobrevivência σ , dada na fase 2 por:

$$\sigma = - 0.00037262.$$

A equação (3.2.1) com estas definições passa a ser a seguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + \nabla \cdot (Wu) + \sigma u = 0, \quad x \in \Omega, t \in (T_1, T], \quad (3.2.2)$$

com os coeficientes e as condições inicial e de contorno apresentadas acima.

A figura 3.2.10 ilustra a distribuição final da população de bicudos que sobreviveram.

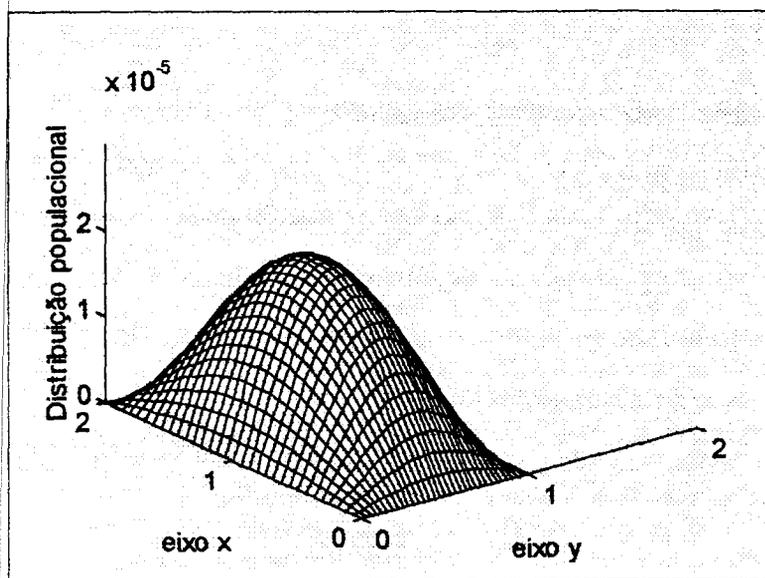


Figura 3.2.10a: Distribuição da população de bicudos na área 2 no final da safra, ou seja $T = 180$ dias.

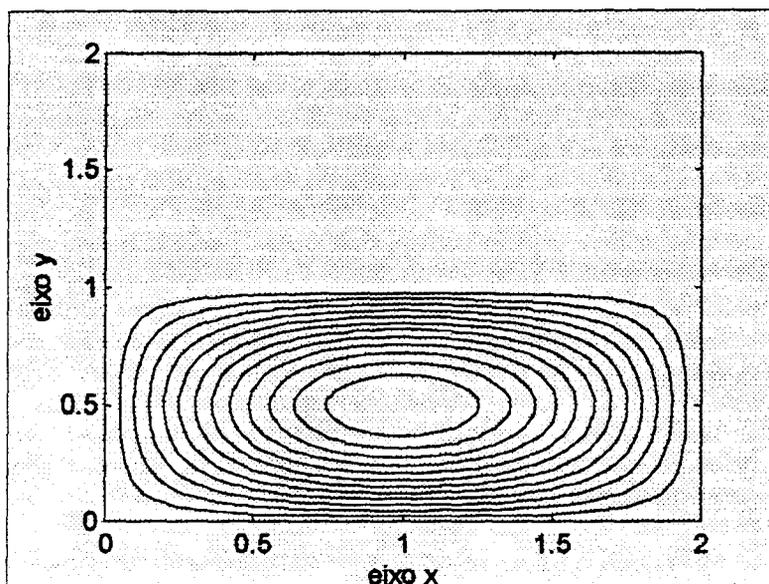


Figura 3.2.10b: Distribuição da população em curvas de nível no final da safra, ou seja $T = 180$ dias.

Observações finais:

Nesta aplicação existem inúmeros aspectos, tanto matemáticos quanto biológicos, que levam a inúmeras reconsiderações, sugerindo outras abordagens e hipóteses.

Embora a condição inicial seja razoável sob o ponto de vista biológico, concentrando os insetos inicialmente na área 1, e no método de Galerkin juntamente com o método dos elementos finitos possam ser consideradas funções descontínuas (até mesmo distribuições), o uso de uma função contínua como condição inicial pode eventualmente trazer melhores resultados, evitando as oscilações iniciais na utilização do método de Crank-Nicolson para a discretização temporal. Talvez o uso dos elementos finitos de segunda ordem para a discretização das variáveis espaciais também ajudem a contornar este problema.

Afastar a fronteira da região de interesse, como já mencionado, parece ser uma hipótese essencial para uma tentativa de melhores resultados quantitativos sob o ponto de vista matemático.

O valor do coeficiente de difusão utilizado na aplicação 2 é igual a um quarto daquele utilizado na aplicação 1 para o Estado de São Paulo. Diferenças intrínsecas entre

os dois problemas levaram a esta decisão; uma comparação entre os valores utilizados e aqueles calculados por Kareiva⁴² para diversos outros tipos de insetos (em geral besouros) podem, à primeira vista parecer muito discrepantes. De fato não o são; o trabalho de Kareiva⁴², além de específico, estima os coeficientes sem levar em conta agentes externos de dispersão (transporte por ventos, o homem, pássaros, há um infinidade deles) que alteram sensivelmente estes valores. Para a área de plantio considerou-se que o bicudo apresenta um coeficiente de difusão aproximadamente 240 vezes maior que o coeficiente de difusão estimado para um tipo de borboleta. As justificativas são que não se quis fugir muito do coeficiente fornecido pelo CATI (utilizado na aplicação 1) e que o bicudo, provavelmente, é muito mais veloz do que a borboleta

Capítulo 4: A dispersão densidade-dependente em modelos intraespecíficos - a difusibilidade densidade-dependente.

§4.0 Introdução.

Em um trabalho datado de 1977, Gurtin & MacCamy³⁵ estendem a idéia de dispersão populacional à dispersão densidade-dependente. Eles sugerem que hipóteses mais realistas a respeito da dispersão devem incluir uma taxa de dispersão variável, que aumenta quando prevalecem condições de superpopulação. Existem, de fato, amplas evidências - e isto é citado no artigo de Gurtin & MacCamy³⁵ - que indicam que algumas espécies migram a fim de evitar aglomeração, alterando sensivelmente seu coeficiente de difusão dependendo da densidade populacional. Mais do que movimento puramente aleatório, a superpopulação é indicada como sendo a primeira causa da dispersão. Eles desenvolvem um modelo para a dispersão espacial de populações biológicas, considerando um equação diferencial parcial não linear, degenerada, que descreve a dispersão populacional, dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta[\varphi(p)] + \sigma(p), \quad (4.0.1)$$

onde p representa a população, ou a densidade populacional e com a dinâmica dada por $\sigma(p)$ sendo ainda $\varphi(p)$ uma função não-linear de p , tal que $\varphi'(0)=0$ e $\varphi'(p) > 0$ para $p > 0$. Portanto a equação (4.0.1) é degenerada, ou seja, é uma equação diferencial parcial de segunda ordem parabólica quando $p > 0$, mas degenera-se a uma equação diferencial parcial de primeira ordem quando $p=0$. Eles também utilizam:

$$\varphi(p) = k p^m, \quad (4.0.2)$$

com k e m constantes e $m \geq 2$.

Substituindo a equação (4.0.2) na equação (4.0.1) tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \Delta(p^m) + \lambda p, \quad (4.0.3)$$

onde foi considerada uma dinâmica vital malthusiana, ou seja, em (4.0.1) $\sigma(p) = \lambda p$.

O modelo é aplicado a diversas situações já conhecidas e, no caso particular dado pelo

fluxo definido por (4.0.2), estabeleceu-se a existência e a unicidade de solução para o problema dado pela equação diferencial parcial mais condições iniciais e de contorno adequadas, considerando um domínio unidimensional.

Gurney & Nisbet ³⁴ usam uma equação análoga à equação (4.0.1). Eles baseiam sua análise em considerações probabilísticas: consideram um movimento no qual os indivíduos ou permanecem em sua presente localização, ou movem-se na direção da população decrescente; uma hipótese que conduz à equação (4.0.1) com $\varphi(p) = k p^2$.

Gurney & Nisbet ³⁴ permitem que σ dependa da posição e fornecem exemplos numéricos os quais indicam que a não-linearidade inerente à equação (4.0.1) tem uma influência estabilizadora. Ou seja, a dispersão é utilizada por certas espécies para regular seu tamanho abaixo da capacidade suporte determinada pelo fornecimento de nutrientes disponíveis. Parece plausível que devam ocorrer vantagens adaptativas para certas espécies, já que desse modo previnem-se contra flutuações no fornecimento dos nutrientes. A equação utilizada por Gurney & Nisbet ³⁴ é:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = G(\mathbf{r})p(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (4.0.4)$$

onde \mathbf{j} é chamado de “densidade local de população circulante”, dado por:

$$\mathbf{j} = -\alpha \nabla p - \lambda p \nabla p = -(\alpha + \lambda p) \nabla p, \quad (4.0.5)$$

sendo λ uma constante positiva. Substituindo o valor de \mathbf{j} dado em (4.0.5) em (4.0.4) tem-se a equação que descreve a dispersão populacional dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = G(\mathbf{r})p(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot [-(\alpha + \lambda p) \nabla p] = G(\mathbf{r})p(\mathbf{r}, t) + \alpha \Delta p + \lambda \nabla \cdot (p \nabla p). \quad (4.0.6)$$

No artigo são analisados três casos particulares extraídos da equação (4.0.6) e obtidas soluções aproximadas de modelos unidimensionais, utilizando um método numérico do tipo predictor-corrector.

Em seu trabalho, Carl¹⁹ observa que esquilos do ártico migram de áreas densamente povoadas para áreas esparsamente povoadas, até mesmo quando a última

oferece um habitat menos favorável à espécie. Tipicamente isto levaria a modificar o fluxo difusivo:

$$\mathbf{J} = -\alpha(p)\nabla p. \quad (4.0.7)$$

A forma utilizada para o coeficiente de difusão $\alpha(p)$ é a mesma utilizada para o fluxo por Gurtin & MacCamy, ou seja:

$$\alpha(p) = kp^m, \quad (4.0.8)$$

onde k é uma constante positiva e $m \geq 1$. Um aumento na população, causa portanto, um aumento na taxa de dispersão. Uma equação unidimensional descrevendo o movimento da população, citada no referido trabalho é:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \left(p^m \frac{\partial p}{\partial x} \right) = f(p), \quad (4.0.9)$$

onde f representa a dinâmica vital da espécie.

Um modelo devido a Okubo⁵⁹ é descrito com detalhes no trabalho de Sossae⁶²; ele modela a dispersão causada pela alta concentração da população expressando os termos de advecção e a difusibilidade como funções da densidade populacional. Para o caso unidimensional tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (Vp)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.0.10)$$

onde $V = V(p,x,t)$ é o campo de velocidades relativo aos processos advectivos e o coeficiente de difusão dependente da densidade é dado por:

$$\alpha = \alpha_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^m \text{ para } m > 0, \text{ sendo } \alpha_0 \text{ a difusibilidade para } p = p_0.$$

O citado trabalho de Sossae⁶² (onde a população, tal como no presente trabalho, é indicada por “ u ” e não mais por “ p ”), também considera a dispersão densidade dependente, quando supõe uma dinâmica vital verhulstiana. A equação é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + \nabla \cdot (\mathbf{V}u) + \sigma u = r \left(1 - \frac{u}{k} \right) u, \quad (4.0.11)$$

sendo u a população ou a densidade populacional, $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ o vetor de velocidades da migração nas direções x e y respectivamente, r a taxa de crescimento populacional e k a capacidade suporte do meio. Após a demonstração de existência e unicidade de solução para a formulação fraca do problema, correspondente à equação (4.0.11), faz-se a construção de uma solução aproximada através do método de Galerkin e o método dos elementos finitos, com uma base de elementos finitos de segunda ordem a fim de se evitar oscilações numéricas. Tais oscilações estão presentes não só pela inclusão do termo advectivo mas também pela não-linearidade da equação, gerada pela escolha da forma da dinâmica vital verhulstiana. A seguir se utiliza o mesmo procedimento para obter soluções aproximadas de um modelo densidade-dependente.

§4.1 Um modelo de dispersão densidade-dependente intraespecífico – a difusibilidade densidade-dependente.

§4.1.1 A formulação fraca do problema.

O problema populacional visa modelar os mesmos fenômenos já descritos no Capítulo 2, considerando, agora, o coeficiente de difusão dependendo da população. Ou seja, o problema consiste em modelar os fenômenos seguintes:

- Dispersão, considerando o coeficiente de difusão densidade dependente.
- Processos advectivos ou processos convectivos.
- Decaimento da espécie devido a hostilidade do meio.
- Dinâmica vital malthusiana.

A equação e as condições inicial e de contorno que descrevem estes fenômenos (capítulo 2) são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{W} u) + \sigma u = \lambda u + f(t, x, y), \quad (4.1.1)$$

$$t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned}
u(0, \mathbf{x}, y) &= u_0(\mathbf{x}, y), \quad t = 0, \quad (\mathbf{x}, y) \in \Omega, \\
u(t, \mathbf{x}, y) &= 0, \quad t \in (0, T], \quad (\mathbf{x}, y) \in \Gamma_0, \quad \text{e} \\
-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \quad t \in (0, T], \quad (\mathbf{x}, y) \in \Gamma_1,
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

com Γ_0 e Γ_1 disjuntos formando a fronteira Γ de Ω , e η designando a normal exterior em (\mathbf{x}, y) à curva Γ_1 .

A diferença entre este capítulo e os capítulos 2 e 3 consiste na hipótese da difusão densidade-dependente, ou seja, o coeficiente de difusão α , além de poder variar com o tempo e nas coordenadas espaciais, depende da população u . Em primeira aproximação considera-se que:

$$\alpha = \alpha(t, \mathbf{x}, y, u) = \alpha_0(t, \mathbf{x}, y) + \beta_0(t, \mathbf{x}, y) u. \tag{4.1.3}$$

A fim de enfraquecer as condições de regularidade de u e das demais funções envolvidas, trabalha-se com a formulação fraca da equação (4.1.1), tendo em vista as condições dadas em (4.1.2).

Tomando-se o subespaço fechado $V \subset H^1(\Omega)$, definido anteriormente por $V = \{v \in H^1(\Omega): \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, a formulação fraca do problema (4.1.1) com as condições (4.1.3) consiste em:

Dadas as funções $f \in L^2((0, T]; L^2(\Omega))$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u \in V = \{v \in L^2((0, T]; V): \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2((0, T]; L^2(\Omega))\}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_\Omega - (\nabla(\alpha \nabla u), v)_\Omega + (\nabla(\mathbf{W}u), v)_\Omega + (\sigma u, v)_\Omega &= (f, v)_\Omega, \quad \text{e} \\
(u(0, \mathbf{x}), v)_\Omega &= (u_0, v)_\Omega, \quad \forall v \in V,
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

sendo $\sigma = \sigma(t, \mathbf{x}, y) = \sigma'(t, \mathbf{x}, y) - \lambda$, e o produto escalar é definido em $L^2(\Omega)$. A equação (4.1.4) pode então ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \nabla u) v d\mu + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{W} u) v d\mu + \int_{\Omega} \sigma u v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu, \text{ e} \quad (4.1.5)$$

$$\int_{\Omega} u(0, \mathbf{x}) v d\mu = \int_{\Omega} u_0 v d\mu, \quad \forall v \in V.$$

Levando em conta a definição (4.1.2) vem:

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla u) = \nabla \alpha \cdot \nabla u + \alpha \Delta u, \quad (4.1.6)$$

onde:

$$\nabla \alpha = \nabla \alpha_0 + (\nabla \beta_0) u + \beta_0 \nabla u. \quad (4.1.7)$$

Aplicando a Fórmula de Green na segunda integral em (4.1.5), após cancelar-se alguns termos, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v d\mu + \int_{\Omega} (\mathbf{W} \cdot \nabla u) v d\mu + \int_{\Omega} (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) u v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu, \quad (4.1.8)$$

$$\int_{\Omega} u(0, \mathbf{x}) v d\mu = \int_{\Omega} u_0 v d\mu, \quad \forall v \in V,$$

ou, usando a notação adotada para o produto escalar em $L^2(\Omega)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\Omega} + ((\alpha \nabla u), \nabla v)_{\Omega} + ((\mathbf{W} \cdot \nabla u), v)_{\Omega} + ((\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) u, v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega}, \quad (4.1.9)$$

$$(u(0, \mathbf{x}), v)_{\Omega} = (u_0, v)_{\Omega}, \quad \forall v \in V.$$

§4.1.2 O Método de Galerkin.

Seguindo o que foi feito no Capítulo 2, §2.1.3, será construída uma solução aproximada u_h da solução u em um subespaço de V de dimensão finita.

Escolhendo-se em $V = \{v \in H^1(\Omega) : \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, N funções linearmente independentes $\varphi_i, i=1, \dots, N$, denomina-se V_h o subespaço fechado de V , de dimensão N , gerado por $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$.

Procura-se uma aproximação u_h da solução u , considerando-se em u_h uma separação de variáveis, de tal forma que:

$$u_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (4.1.10)$$

e que satisfaça (4.1.9) para toda $v \in V_h$ e, para a qual

$$\frac{\partial u_h(t; x, y)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{du_j(t)}{dt} \varphi_j(x, y), \quad \text{com} \quad (4.1.11)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \beta_0 \sum_{k=1}^N u_k(t) \varphi_k(x, y). \quad (4.1.12)$$

O espaço vetorial das funções da forma (4.1.10) será indicado por V_h .

Substituindo (4.1.10), (4.1.11) e (4.1.12) em (4.1.9), e considerando $v = \varphi_i$, resulta que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{du_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \alpha_0 \sum_{j=1}^N u_j (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + \sum_{j=1}^N u_j (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \\ & + (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) \sum_{j=1}^N u_j (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \beta_0 \sum_{k=1}^N u_k \left(\sum_{j=1}^N u_j (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega \right) = (f, \varphi_i)_\Omega, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

$$\sum_{j=1}^N u_j(0) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega = (u_0, \varphi_i)_\Omega, \quad \forall \varphi_i \in B, \quad 1 \leq i \leq N,$$

onde:

$$(\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega = \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) dx dy$$

e, também:

$$\begin{aligned} (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega &= \left(W_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + W_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right)_\Omega = \\ &= \iint_{\Omega} \left(W_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i + W_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i \right) dx dy = (\mathbf{W} \varphi_i \| \nabla \varphi_j)_\Omega \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y}.$$

Considerando $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0^1$, e definindo as matrizes:

¹ Isto é, considerando \mathbf{W} como um campo não dissipativo.

$$M = (M_{ij}) = (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}, \quad U = (U_j(t)) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad F = (F_i) = (f, \varphi_i), \quad (4.1.15)$$

$$g(U) = (g(U)_{ij}) = u_j \left[\begin{array}{l} \alpha_0 (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j \| \varphi_i)_{\Omega} + (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ + \beta_0 \sum_{k=1}^N u_k (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} \end{array} \right] \quad (4.1.16)$$

$$\hat{U}_0 = \left(\hat{U}_{0,i} \right) = (u_0, \varphi_i)_{\Omega},$$

pode-se escrever o sistema (4.1.13) na forma matricial:

$$M \frac{dU}{dt} + g(U) = F \quad (4.1.17a)$$

sendo que o vetor inicial $U_0 = \{u_j(0)\}$, $j=1,2,\dots,N$, adequado para as simulações numéricas, será calculado diretamente como:

$$M U_0 = \hat{U}_0. \quad (4.1.17b)$$

As equações (4.1.17a) são não lineares devido a definição do coeficiente de difusão (4.1.3), e esta não linearidade é de caráter diferente da de Sossae ⁶², que a introduz no termo que representa a dinâmica vital verhulstiana.

§4.1.3 A discretização espacial: o método dos elementos finitos de segunda ordem.

A discretização espacial será feita com o uso do método de elementos finitos de segunda ordem, ou seja, a base B de V_h será composta por funções quadráticas por partes em cada triângulo do domínio discretizado Ω_h . Detalhes em Sossae ⁶² e também no apêndice 3 deste capítulo.

§4.1.4 A discretização temporal: o método de Crank-Nicolson.

Para a discretização temporal utiliza-se o método de Crank-Nicolson, como feito no Capítulo 2, com as aproximações:

$$u_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_n) + u_j(t_{n+1})}{2},$$

e

$$\frac{du_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t},$$
(4.1.18)

ambas de ordem de Δt^2 em u_h dada em (4.1.10), estimadas em $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$. Na

equação (4.1.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} - u_j^n}{\Delta t} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha_0 \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} + u_j^n}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} + u_j^n}{2} (\mathbf{W}^{(n+1/2)} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + (\sigma^{(n+1/2)} + \nabla \cdot \mathbf{W}^{(n+1/2)}) \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} + u_j^n}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta_0 \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} + u_j^n}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^n}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} = \\ & = (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega} \quad \forall \varphi_i \in \mathcal{B}, i=1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por Δt , e isolando os termos em $u_j^{(n+1)}$ e u_j^n tem-se que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[\left(1 + \sigma^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} + \nabla \cdot \mathbf{W}^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{W}^{(n+1/2)} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta_0 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^n}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} \right] u_j^{(n+1)} = \\ & + \sum_{j=1}^N \left[\left(1 - \sigma^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} - \nabla \cdot \mathbf{W}^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{W}^{(n+1/2)} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta_0 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^n}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} \right] u_j^n + \\ & + \Delta t (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega} \quad \forall \varphi_i \in \mathcal{B}, i=1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Para a condição inicial:

$$\sum_{j=1}^N u_j(0) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} = (u_0, \varphi_i)_{\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in B, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Adota-se a notação:

$$U(t_{n+1}) = U^{(n+1)}, \quad U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{(n+1)} \\ \mathbf{u}_2^{(n+1)} \\ \dots \\ \mathbf{u}_N^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad (4.1.19)$$

com $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j=1, 2, \dots, N$, a qual, inserida em (4.1.17) fornece:

$$A(U^{(n+1)}, U^{(n)}) U^{(n+1)} = B(U^{(n+1)}, U^{(n)}) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)}, \quad (4.1.20)$$

com a condição inicial $U^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)})$, tal que $MU^{(0)} = \hat{U}_0$, onde, conforme as definições (4.1.15), $M = (M_{ij}) = (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}$.

As matrizes $A(U^{(n+1)}, U^{(n)})$ e $B(U^{(n+1)}, U^{(n)})$ introduzidas na equação (4.1.20) são dadas por:

$$A = (a_{ij}) = \left(1 + \sigma^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} + \nabla \cdot \mathbf{W}^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \\ + \beta_0 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + (\mathbf{W}^{(n+1/2)} \cdot \nabla \varphi_j \| \varphi_i)_{\Omega}, \quad (4.1.21)$$

$$B = (b_{ij}) = \left(1 - \sigma^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} - \nabla \cdot \mathbf{W}^{(n+1/2)} \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \\ - \beta_0 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - (\mathbf{W}^{(n+1/2)} \cdot \nabla \varphi_j \| \varphi_i)_{\Omega} \text{ e} \quad (4.1.22)$$

$$F = (F_i) = (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}. \quad (4.1.23)$$

O processo iterativo² é obtido mediante a relação de recorrência (4.1.20), e é o seguinte:

² Os diversos produtos internos envolvendo as funções de base quadráticas em (4.1.21), (4.1.22) e (4.1.23) podem ser vistos em Sossae⁶² apêndice C, e no apêndice 3 deste trabalho.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } U^{(0)} \in \mathfrak{R}^N \\ \text{obter } U^{(n+1)} \text{ das sucessivas soluções de:} \\ A\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}\right) U^{(**)} = B\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}\right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \end{array} \right. \quad (4.1.24)$$

com $U^{(*)}$ dado inicialmente por $U^{(n)}$ e, a partir da segunda iteração interna, assumindo o valor de $U^{(**)}$. O valor obtido na iteração interna final será o de $U^{(n+1)}$ (cf. Meyer ⁵³).

§4.1.5 Resultados de simulações numéricas.

O Problema.

O problema consiste em acompanhar a variação populacional de uma dada espécie numa dada região, a qual pode apresentar as seguintes características:

- Um coeficiente de difusão dependente da densidade populacional.
- Processos convectivos e processos advectivos.
- Um coeficiente de decaimento da espécie podendo variar com o tempo.
- Uma dinâmica vital malthusiana.

O Modelo.

Conforme as equações (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.3), o problema é descrito matematicamente através da equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{W} u) + \sigma u = \lambda u + f(t, x, y), \quad (4.1.25)$$

$$t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathfrak{R}^2,$$

com condição inicial e condições de contorno dadas por:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad t = 0, (x, y) \in \Omega,$$

$$u(t, x, y) = 0, \quad t \in (0, T], (x, y) \in \Gamma_0, \quad (4.1.26)$$

$$e - \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, t \in (0, T], (x, y) \in \Gamma_1,$$

e coeficiente de difusão densidade-dependente definido por:

$$\alpha = \alpha(t, x, y, u) = \alpha_0(t, x, y) + \beta_0(t, x, y) u. \quad (4.1.27)$$

Parâmetros do Domínio.

Dada a simetria do problema, matematicamente trabalha-se, como no Capítulo 3, com um quarto da área de interesse³. O domínio utilizado nas simulações é definido, então, por $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ conforme ilustra a figura 4.1.1.

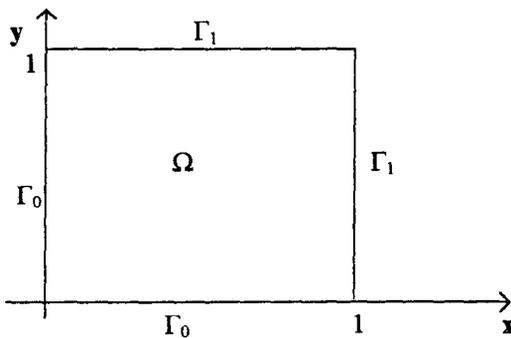


Figura 4.1.1: Domínio espacial utilizado nas simulações numéricas.

O período de tempo considerado é indicado pelo intervalo $[0, T]$.

Parâmetros da Discretização.

Os valores utilizados na discretização são:

$T = 12$: instante final.

$x_f = 1$: valor final no eixo x.

$y_f = 1$: valor final no eixo y.

$nnx = 4$: número de subintervalos no eixo x.

³ Os programas e os gráficos foram desenvolvidos com o software MATLAB versão 4.2.

$n_{ny} = 4$: número de subintervalos no eixo y .

$n_i = 3$: número de iterações internas a fim de ajustar o valor de $U^{(n+1)}$ conforme o sistema (4.1.24).

$n_t = 100$: número de passos no tempo.

A estes valores correspondem:

$\Delta x = x_0/n_{nx} = 0.25$, $\Delta y = y_0/n_{ny} = 0.25$ e $\Delta t = T/n_t = 0.12$.

Parâmetros do Problema.

Alguns parâmetros do problema, que aparecem nas equações (4.1.25), (4.1.26) e (4.1.27) estão fixos; são eles:

$\lambda = 0.1$: coeficiente da dinâmica vital de Malthus.

$\alpha = \alpha_0 + \beta_0 u$, com $\alpha_0 = \beta_0 = 0.007$: coeficiente da difusão densidade-dependente.

A condição inicial é dada por $u_0(x,y) = 0.5$ nos nós #55, #56, #63 e #64, de coordenadas cartesianas dadas por $(7/8, 7/8)$, $(7/8, 1)$, $(1, 7/8)$ e $(1, 1)$ respectivamente, e zero nos demais. Isto corresponde a considerar a condição inicial concentrada no meio da região, como ilustra a figura 4.1.2 para o domínio completo.

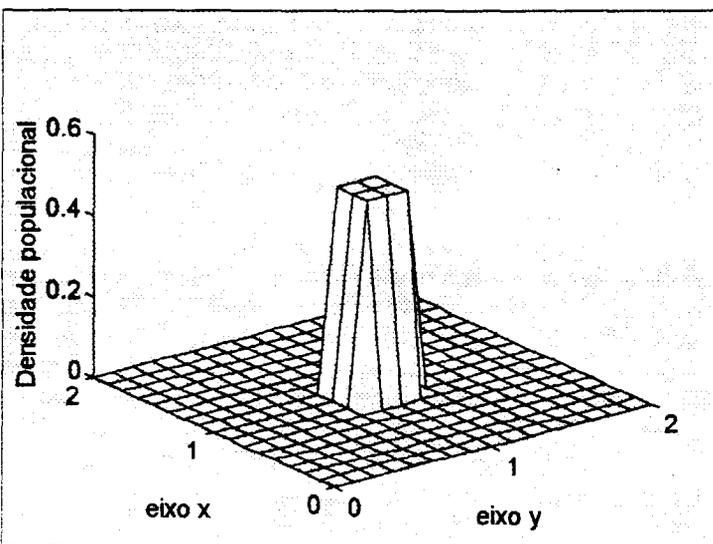


Figura 4.1.2: Condição inicial utilizada nas simulações numéricas.

O termo de fonte é dado por $f(t,x,y) = 0.01$ nos mesmos nós citados acima e zero nos demais, ou seja, considera-se uma fonte artificial inserindo indivíduos continuamente na população, desde o instante inicial até o instante final, concentrada no meio da região de interesse.

Os demais parâmetros assumem valores diferentes, conforme o ensaio realizado. Seus valores e resultados obtidos após as 100 iterações no tempo são os seguintes:

Ensaio 1: Dispersão como difusão densidade-dependente, sem migração.

$W = (0,0)$: não há migração.

$\sigma = \sigma' - \lambda = -0.05$: diferença entre o coeficiente de decaimento e o coeficiente de Malthus.

Considerando o termo de fonte $f = 0$, nota-se que o espalhamento da população é suave, como ilustra a figura 4.1.3a.

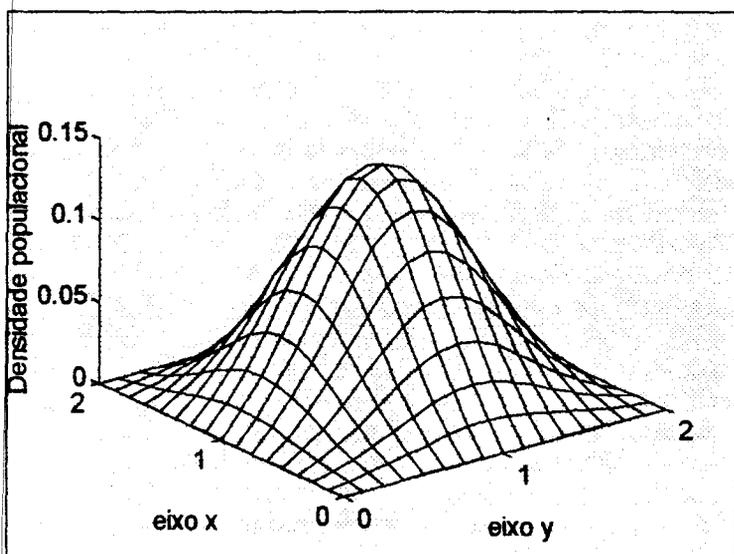


Figura 4.1.3a: Distribuição da população com difusão densidade-dependente, sem migração e sem fonte, no instante final $T = 12$.

As variações da densidade populacional nos nós #14 e #52 da malha, de coordenadas cartesianas dadas por $(1/4, 3/4)$ e $(7/8, 1/2)$ respectivamente, ao longo do tempo, são ilustradas nas figuras 4.1.3b e 4.1.3c respectivamente. No nó #52 a densidade aumenta mais rapidamente até a iteração 50, tornando-se mais lenta à medida que o tempo passa pois o coeficiente de difusão neste ponto aumenta mais lentamente.

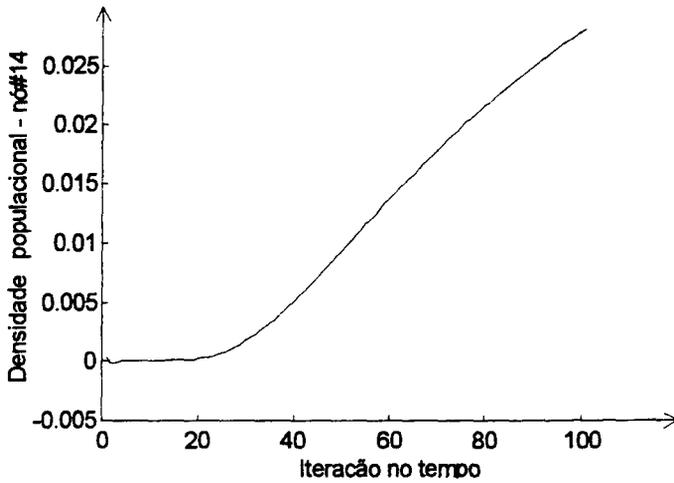


Figura 4.1.3b: Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.

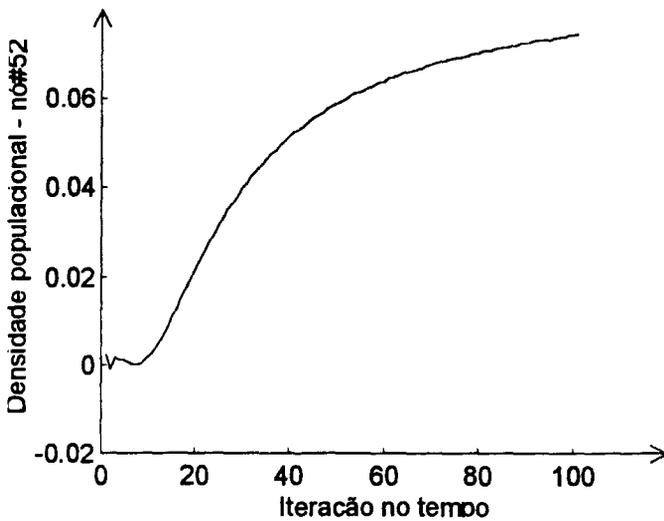


Figura 4.1.3c: Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.

A ligeira oscilação para valores iniciais de t é proveniente do método de Crank-Nicolson e rapidamente desaparece (Carey & Oden¹³).

A figura 4.1.4a representa a densidade populacional no instante final, supondo a existência da fonte concentrada.

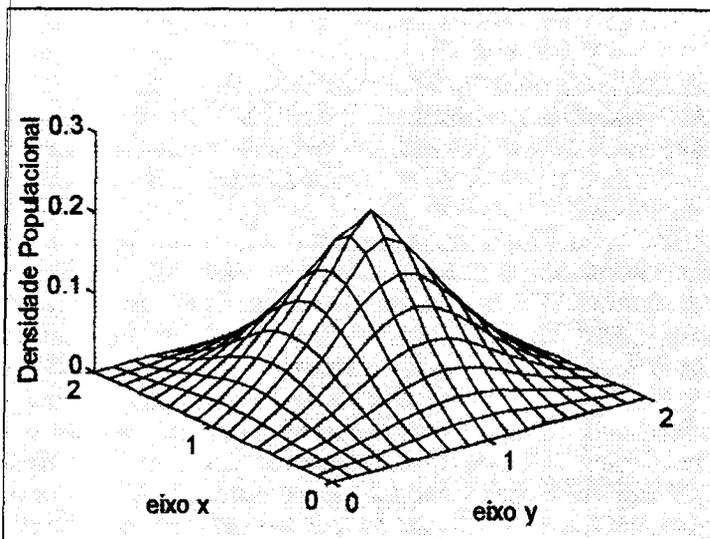


Figura 4.1.4a: Distribuição da população com difusão densidade-dependente, sem migração e com fonte, no instante final $T = 12$.

Com a presença da fonte, nota-se na figura 4.1.4b, um aumento maior da densidade populacional no nó #14 em comparação com o resultado ilustrado na figura 4.1.3c, pois o coeficiente de difusão neste nó tem um aumento acentuado. Percebe-se claramente, comparando as figuras 4.1.3c e 4.1.4c, o aumento da densidade no nó #52 com a presença da fonte.

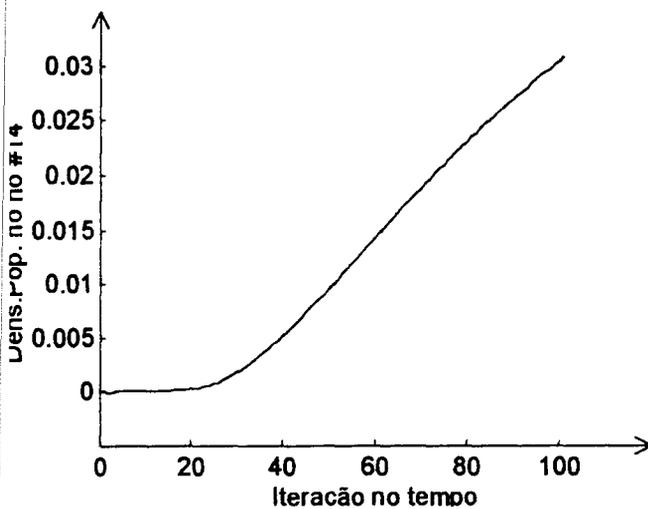


Figura 4.1.4b: Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.

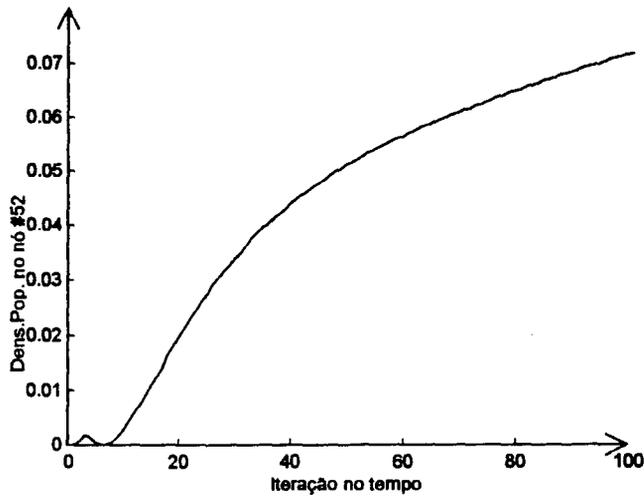


Figura 4.1.4c: Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.

Ensaio 2: Dispersão como difusão densidade-dependente, com migração.

$W = (W_1, W_2) = (0.05, 0)$: existe migração populacional na direção do eixo dos x.

$\sigma = -0.05$ como no primeiro ensaio.

É importante salientar que a condição de Peclet é satisfeita sempre, ou seja, para qualquer valor de α definido no domínio e em qualquer instante.

A figura 4.1.5 mostra claramente o movimento dirigido pela presença do campo de velocidades atuando na direção do eixo dos x.

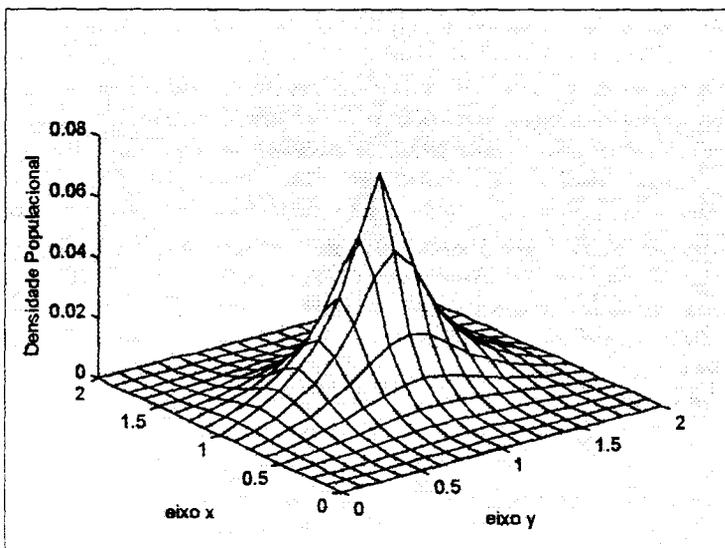


Figura 4.1.5: Distribuição da população com difusão densidade-dependente, com migração, no instante final $T = 12$.

A figura 4.1.6 e a figura 4.1.7 apresentam o acompanhamento da densidade populacional nos nós #14 e #52 respectivamente, desde o instante inicial $t_0 = 0$ até o instante final $T = 12$.

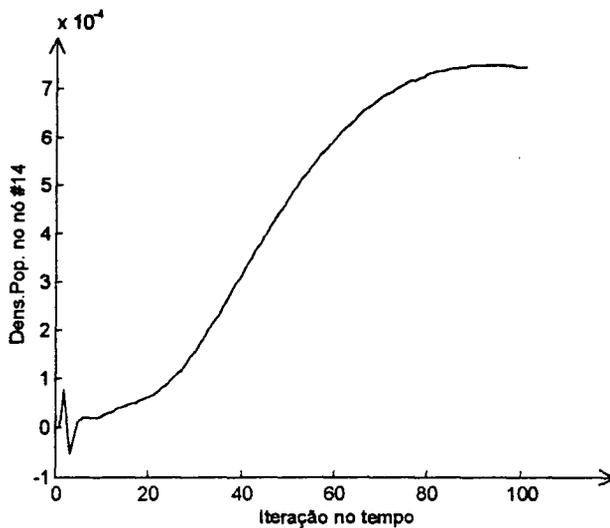


Figura 4.1.6: Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.

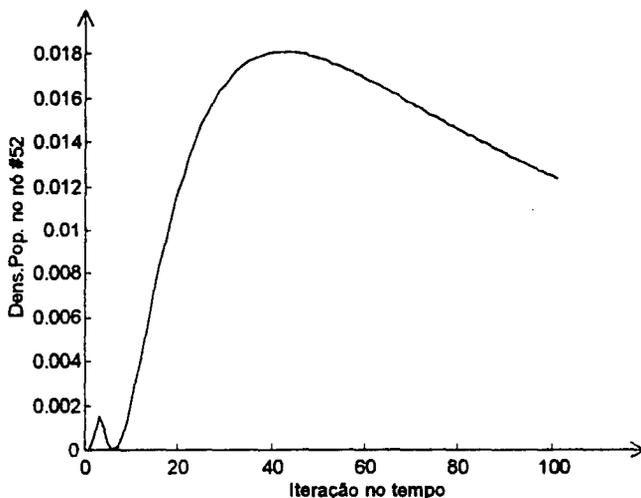


Figura 4.1.7: Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.

Ensaio 3: Dispersão como difusão densidade-dependente, com migração e com mortalidade variável.

$W = (W_1, W_2) = (0.05, 0)$: existe migração populacional na direção do eixo dos x .

$\sigma'(t) = \frac{m_M}{2}(\text{sen } \omega t + 1)$, modelando uma mortalidade variando sazonalmente no meio,

sendo $m_M = 0.15$ a mortalidade máxima atingida no meio Ω , e $\omega = 4\pi / 201\Delta t$ para que, em cada 100 iterações no tempo seja completado um período de variação de σ , dado por

$\sigma(t) = \sigma'(t) - \lambda$, igual a 2Π .

A figura 4.1.8 apresenta a variação de σ com a iteração, para 100 iterações, ou seja, do instante inicial $t = 0$ até o instante final $T=12$.

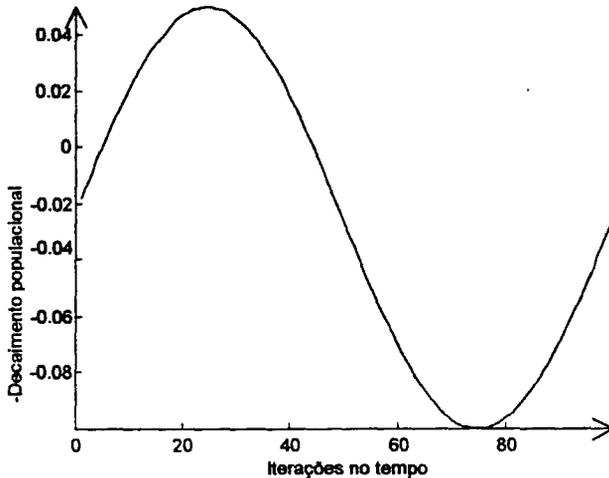


Figura 4.1.8: Variação do decaimento populacional com as iterações.

Embora na figura 4.1.9 não fique evidente a diferença de comportamento da população quando se considera a variação temporal de σ , a indicação no eixo z quantifica essa diferença.

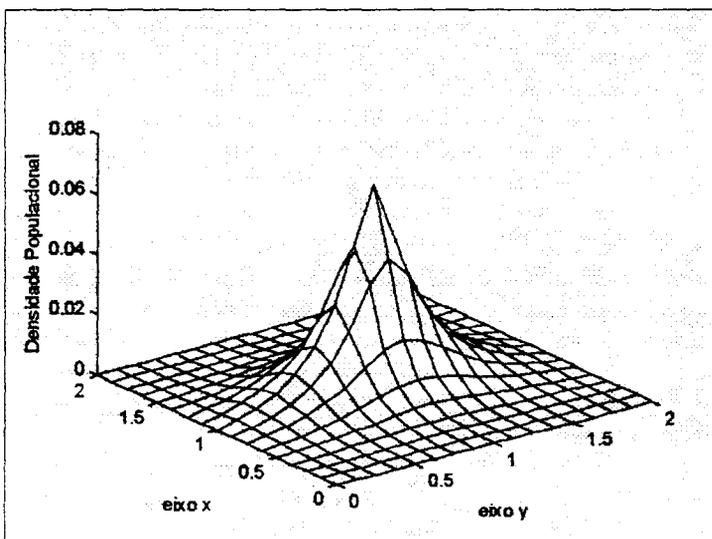


Figura 4.1.9: Distribuição da população com difusão densidade-dependente, migração, e com decaimento variável no tempo, no instante final $T = 12$.

As figuras 4.1.10 e 4.1.11 representam a variação da população ao longo do tempo nos nós #14 e #52, e, nelas fica mais clara a variação de σ .

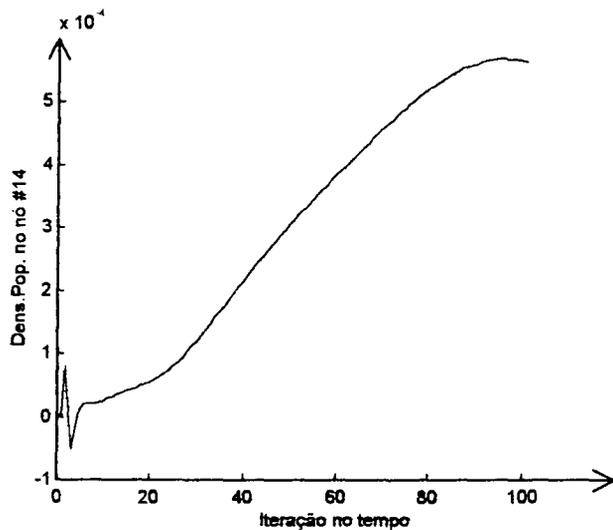


Figura 4.1.10: Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.

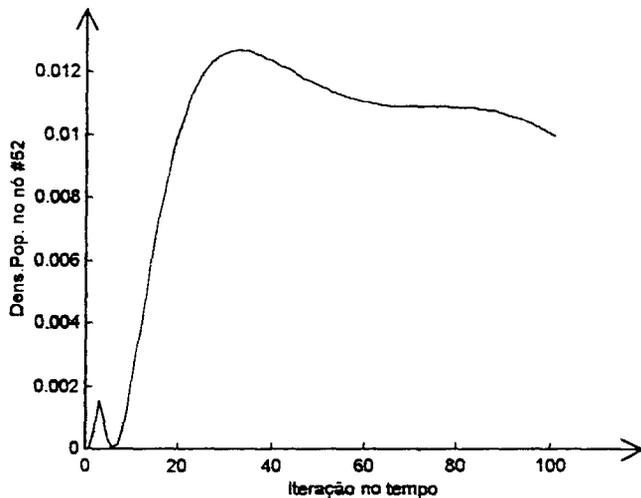


Figura 4.1.11: Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.

Ensaio 4: Dispersão como difusão densidade-dependente, com migração e mortalidade variáveis.

No quarto ensaio consideram-se a mortalidade e o campo de velocidades da migração variando com o tempo. Supõe-se que a atuação do campo de velocidades provoca um decaimento populacional, e que a ausência desse campo faz com que a população se equilibre ou que não sofra decaimento.

$$W = (W_1, W_2) \text{ sendo } W_2 = 0 \text{ e } W_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T/4 \\ 0,05, & T/4 < t \leq T/2 \end{cases}, \text{ periódica de período } T/2.$$

$\sigma(t) = \sigma'(t) - \lambda$: a figura 4.1.12 ilustra a definição do parâmetro σ .

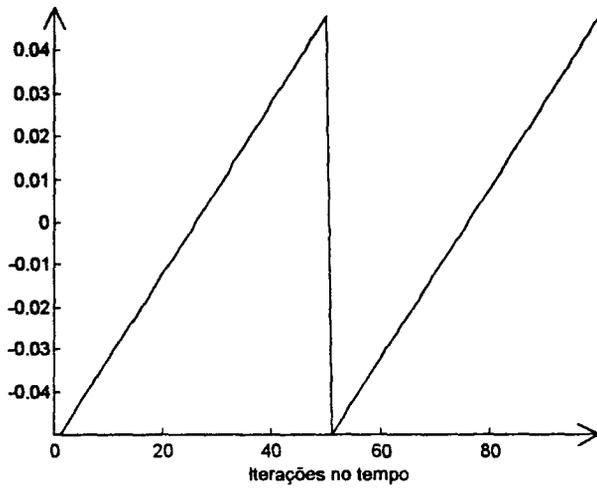


Figura 4.1.12: Variação de σ com a iteração no tempo.

A distribuição final da população, após 100 iterações no tempo é apresentada na figura 4.1.13.

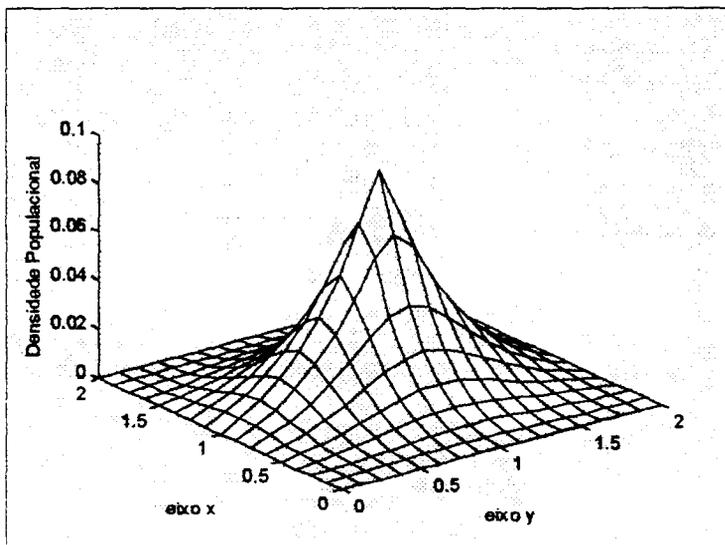


Figura 4.1.13: Distribuição populacional com difusão densidade-dependente, com migração e decaimento variáveis no tempo, no instante final $T = 12$.

O acompanhamento dos nós #14 e #52 estão indicados nas figuras 4.1.14 e 4.1.15 respectivamente.

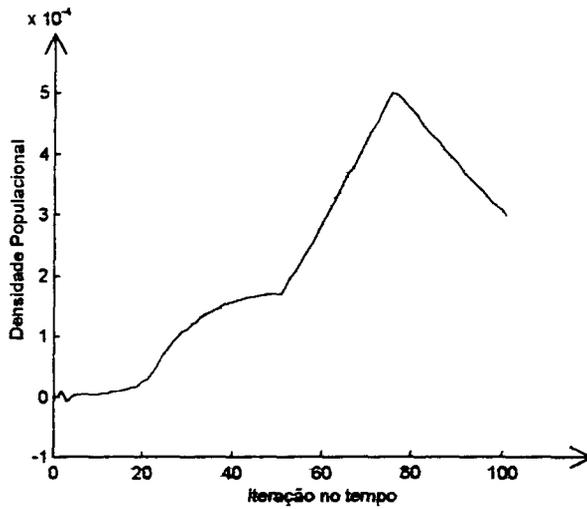


Figura 4.1.14: Variação da densidade populacional no nó #14 com a iteração no tempo.

Percebe-se, claramente a variação periódica de σ e de W , alterando sensivelmente o valor da população para estes dois nós a medida que o tempo passa.

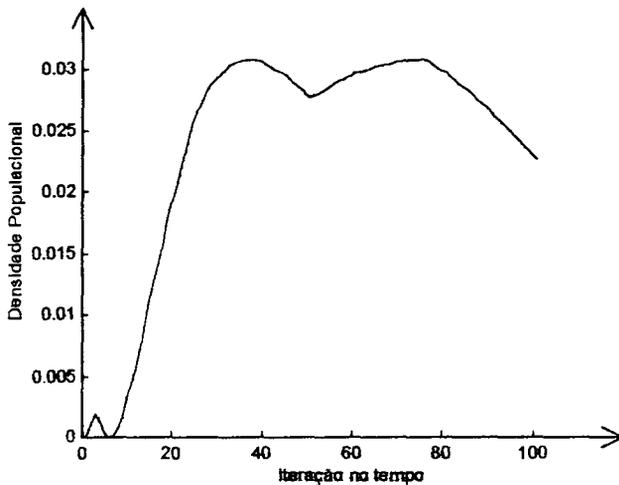


Figura 4.1.15: Variação da densidade populacional no nó #52 com a iteração no tempo.

Vários outros ensaios podem ser realizados com novas definições dos parâmetros do problema, mantendo apenas a definição de α .

O fato de α variar linearmente com u quando W é diferente de zero não gera oscilações numéricas, desde que a condição de Peclet seja satisfeita para α_0 , ou seja:

$$\frac{W_i \Delta x_i}{2 \alpha_0} < 1,$$

e que se mantenham α_0 e β_0 positivos.

Capítulo 5: Modelos interespecíficos.

§5.0 Introdução.

Na maior parte de problemas populacionais reais ou estão presentes subdivisões de uma dada espécie - por sexo, faixas etárias, indivíduos sadios e infectados etc. - ou estão envolvidas duas ou mais espécies. No caso de populações variando continuamente no tempo, tais problemas são descritos por sistemas de equações diferenciais ordinárias, e quando, além de variar no tempo, as populações variarem também espacialmente, os problemas são descritos por sistemas de equações diferenciais parciais. Quando estão presentes duas ou mais espécies interagindo em um mesmo habitat, os modelos são conhecidos como modelos interespecíficos.

Para modelar um ecossistema, freqüentemente é necessário trabalhar com várias espécies interagindo. O estudo de sistemas de duas espécies pode ser estendido a sistemas envolvendo mais espécies, adicionando detalhes e complexidades matemáticas. O modelo contínuo de interação mais genérico entre duas espécies pode ser descrito matematicamente através do sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= u F(t, \mathbf{x}, u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= v G(t, \mathbf{x}, u, v)\end{aligned}\tag{5.0.1}$$

onde $u = u(t, \mathbf{x})$ e $v = v(t, \mathbf{x})$ são as densidades populacionais das espécies u e v que se inter-relacionam, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathfrak{R}^n$, $t \in (0, T]$ e com condições iniciais e de contorno adequadas. As funções F e G podem incluir os mais diversos tipos de termos dependendo do que se deseja modelar. Na literatura atual é possível encontrar alguns trabalhos que, além de considerar a relação interespecífica, modelam fenômenos de dispersão espacial, migração, pesca, colheita, termos de predação do tipo Ludwig, fontes, sumidouros, e incluem também as dinâmicas vitais de cada uma das espécies, e serão mencionados ao longo do presente capítulo.

O problema populacional que será tratado envolve a interação entre duas espécies e visa modelar, analogamente ao que foi feito nos capítulos anteriores, os seguintes fenômenos:

- Dispersão de cada espécie.
- Processos advectivos ou processos convectivos de cada espécie.
- Decaimento das espécies devido a uma possível hostilidade do meio.
- Dinâmica vital malthusiana para cada espécie.
- A relação interespecífica.

O sistema de equações que descreve estes fenômenos é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{V} u) + \gamma u &= \lambda u - ruv + f(t, x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla v) + \nabla \cdot (\mathbf{W} v) + \varepsilon v &= \nu v - suv + g(t, x, y), \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

$$t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

onde u e v representam as densidades populacionais de cada uma das duas espécies. As condições iniciais e de contorno podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= u_0(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ v(0, x, y) &= v_0(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_0} &= v|_{\Gamma_0} = 0 \\ e - \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} &= -\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

com Γ_0 e Γ_1 disjuntos formando a fronteira Γ de Ω , e η designando a normal exterior em (x, y) à curva Γ_1 . Estas condições indicam uma parte da fronteira onde não há indivíduos de cada espécie e outra em que os indivíduos não atravessam a fronteira do domínio.

Qualquer tentativa de análise, qualitativa ou quantitativa, deste conjunto de equações não lineares envolve sérias dificuldades quando todos os termos estão presentes, ou seja, todos os coeficientes são tomados não nulos.

Tratamentos matemáticos de modelos interespecíficos, descritos por equações mais simples, podem ser considerados subproblemas oriundos deste problema mais geral, com a introdução criteriosa de hipóteses simplificadoras.

O objetivo deste capítulo é o de realizar um estudo gradativo de modelos interespecíficos, partindo de modelos mais simples e ir acrescentando termos que imponham dificuldades crescentes até chegar ao modelo mais complexo dado pelas equações (5.0.2) e (5.0.3).

Tratamentos matemáticos de problemas populacionais interespecíficos são encontrados na literatura clássica desde Gause(1935) e Volterra(1931). O artigo de Skellam ⁶⁰ considera o caso em que duas espécies de plantas competem no mesmo habitat. As equações são originárias da distribuição de probabilidade de Poisson aplicada ao modelo discreto no tempo, ou seja, o comportamento das populações é descrito por equações de diferenças, considerando, também, homogeneidade espacial.

Modelos contínuos que consideram apenas a variação temporal podem ser descritos por um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo:

$$\begin{aligned}\frac{d u}{d t} &= u F(t, u, v) \\ \frac{d v}{d t} &= v G(t, u, v)\end{aligned}\tag{5.0.4}$$

e têm sido estudados exaustivamente sob os mais diversos pontos de vista de análise tanto matemática como biológica. O sistema (5.0.4) inclui o clássico modelo de Lotka-Volterra ⁵⁸ dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d N}{d t} &= N(\sigma - rP) \\ \frac{d P}{d t} &= P(sN - \tau)\end{aligned}$$

onde N representa a população de presas e P a população de predadores.

Este modelo mais simples extraído das equações (5.0.3) e (5.0.4) considera homogeneidade espacial e visa modelar uma dinâmica vital malthusiana para ambas as espécies. Este modelo é descrito, matematicamente, através do sistema não linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\frac{d u}{d t} &= \sigma u - ruv \\ \frac{d v}{d t} &= \tau v - suv\end{aligned}\tag{5.0.5}$$

sendo $\sigma = \lambda - \gamma$ e $\tau = \nu - \varepsilon$ onde, para as espécies u e v respectivamente, γ e ε são os

coeficientes que indicam o decaimento devido à hostilidade do meio, e, λ e ν são as taxas intrínsecas de reprodução. Os termos não lineares representam a interação entre as espécies u e v . Se $r = s = 0$, as espécies não interagem e há um crescimento exponencial ou extinção das espécies, dependendo do sinal de σ e μ . Se r e s são não nulos, classifica-se o tipo de interação entre as espécies u e v , conforme o seguinte (Bassanezi & Ferreira Jr.⁶):

* Se $r > 0$ e $s < 0$, o sistema é chamado presa-predador, sendo que, neste caso, u representa a densidade populacional da presa e v a densidade populacional do predador. O coeficiente r representa o fator de decaimento linear devido à interação de v na variação da população u , e s representa o fator de crescimento linear devido à interação de u na variação da população v .

* Se $r > 0$ e $s > 0$ há competição entre u e v .

* Se $r < 0$ e $s < 0$ tem-se cooperação, ou mutualismo, ou simbiose entre u e v .

* Se $r < 0$ e $s = 0$ (ou ao contrário) há comensalismo entre u e v .

* Se $r > 0$ e $s = 0$ (ou ao contrário) tem-se amensalismo entre u e v .

O sistema (5.0.5) com as condições iniciais:

$$u(0) = u_0 \quad e \quad v(0) = v_0 \quad (5.0.6)$$

tem solução única e depende continuamente dos dados iniciais (Chattopadhyay²⁰).

A análise de estabilidade linear do sistema (5.0.5) demonstra que existem dois pontos estacionários:

1. $P_1 = (0,0)$ com autovalores $\lambda_1 = \sigma$ e $\lambda_2 = \tau$. Considerando σ e τ positivos a fim de que se tenha crescimento populacional, o ponto P_1 é instável.

2. $P_2 = \left(\frac{-\tau}{s}, \frac{-\sigma}{r} \right)$ com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\tau\sigma}$, e, para $\tau\sigma > 0$ P_2 é ponto de sela, instável.

Estudos clássicos de modelos interespecíficos descritos pelo sistema de equações (5.0.4) fazem uma análise qualitativa das soluções, através da construção das trajetórias no plano de fase, Okubo⁵⁹. O modelo clássico de Lotka-Volterra motivou e motiva diversos estudos e publicações que, através de análises e códigos numéricos cada vez mais sofisticados sob o ponto de vista da utilização de ferramentas matemáticas como

por exemplo análises de estabilidade de pontos de equilíbrio e trajetórias no plano de fase (Azar *et al*⁴, 1995, Keitt & Johnson⁴⁴, 1995, Kohlmeier & Ebenhoh⁴⁶, 1995, Van Den Bosch & Gabriel⁶⁴, 1997, Dubey²⁸, 1997, Moreira & Yuquan⁵⁷, 1997), sistemas hamiltonianos e métodos de perturbação (King *et al*⁴⁵, 1996, Auger & Poggiale³, 1996), estimativas de parâmetros (Tayasu *et al*⁶³, 1996, Wu *et al*⁶⁸, 1996, Jensen³⁹, 1996), autômatas celulares etc, possibilitam aos pesquisadores - matemáticos, biólogos, ecólogos - estudar e entender melhor o comportamento de muitas espécies e ecossistemas complexos.

Seguindo o que foi feito nos capítulos anteriores para o caso intraespecífico, como uma ilustração introdutória será dado enfoque à construção de soluções aproximadas para os modelos introdutórios abordados. No caso das equações (5.0.5) em conjunto com as condições iniciais (5.0.6), o objetivo é calcular soluções aproximadas para $u = u(t)$ e $v = v(t)$ em qualquer $t \in (0, T]$.

Considerando o Método de Crank-Nicolson aplicado ao sistema (5.0.5) e (5.0.6), fazendo novamente uso das aproximações do tipo de (2.1.18), a saber:

$$u(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u(t_n) + u(t_{n+1})}{2} \quad (5.0.7)$$

$$v(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{v(t_n) + v(t_{n+1})}{2} \quad (5.0.8)$$

$$\frac{d u}{d t}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u(t_n) - u(t_{n+1})}{\Delta t} \quad (5.0.9)$$

$$\frac{d v}{d t}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{v(t_n) - v(t_{n+1})}{\Delta t} \quad (5.0.10)$$

todas de ordem $o(\Delta t^2)$ estimadas em $t = (t_n + \frac{\Delta t}{2})$, e usando a notação

$$u^{(n)} = u(t_n) \text{ e } v^{(n)} = v(t_n),$$

tem-se o seguinte sistema de equações algébricas não lineares:

$$\left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} + \frac{r \Delta t}{2} \left(\frac{v^{(n)} + v^{(n+1)}}{2} \right) \right] u^{(n+1)} = \left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} - \frac{r \Delta t}{2} \left(\frac{v^{(n)} + v^{(n+1)}}{2} \right) \right] u^{(n)} \quad (5.0.11)$$

$$\left[1 + \frac{\tau \Delta t}{2} + \frac{s \Delta t}{2} \left(\frac{u^{(n)} + u^{(n+1)}}{2} \right) \right] v^{(n+1)} = \left[1 - \frac{\tau \Delta t}{2} - \frac{s \Delta t}{2} \left(\frac{u^{(n)} + u^{(n+1)}}{2} \right) \right] v^{(n)} \quad (5.0.12)$$

com $u^{(0)} = u(0)$ e $v^{(0)} = v(0)$. Como este algoritmo corresponde a uma única iteração interna em cada passo no tempo, o que não evita as naturais oscilações numéricas, introduz-se a seguinte variante:

Dados $u^{(0)}$ e $v^{(0)}$ positivos obter $u^{(n+1)}$ e $v^{(n+1)}$ das sucessivas soluções de :

$$\left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} + \frac{r \Delta t}{2} \left(\frac{v^{(*)} + v^{(n)}}{2} \right) \right] u^{(**)} = \left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} - \frac{r \Delta t}{2} \left(\frac{v^{(*)} + v^{(n)}}{2} \right) \right] u^{(n)} \quad (5.0.13)$$

$$\left[1 + \frac{\tau \Delta t}{2} + \frac{s \Delta t}{2} \left(\frac{u^{(*)} + u^{(n)}}{2} \right) \right] v^{(**)} = \left[1 - \frac{\tau \Delta t}{2} - \frac{s \Delta t}{2} \left(\frac{u^{(*)} + u^{(n)}}{2} \right) \right] v^{(n)} \quad (5.0.14)$$

com $v^{(*)}$ dado inicialmente por $v^{(n)}$ e, a partir da segunda iteração interna assumindo o valor de $v^{(**)}$. Os valores obtidos na iteração interna final serão os de $u^{(n+1)}$ e $v^{(n+1)}$. O período de tempo considerado é o intervalo $[0, T]$.

Os gráficos a seguir ilustram as soluções do sistema dado pelas equações (5.0.13) e (5.0.14), para os diversos tipos de interações classificados acima de acordo com os sinais dos coeficientes r e s .

Os valores utilizados para a obtenção das soluções aproximadas foram os seguintes:

Parâmetros da discretização :

$\Delta t = 0.12$; $n = 300$ número de passos no tempo; $n_i = 3$ número de iterações internas em cada passo do tempo e, em consequência, o domínio será o intervalo $[0, T]$ com $T = n \Delta t = 36$ instante final.

Coefficientes : $\sigma = -0.05$; $\tau = -0.05$.

Condições iniciais : $u_0 = 5$, $v_0 = 6$.

Em valor absoluto os coeficientes da interação entre as populações u e v são : $r = s = 0.001$.

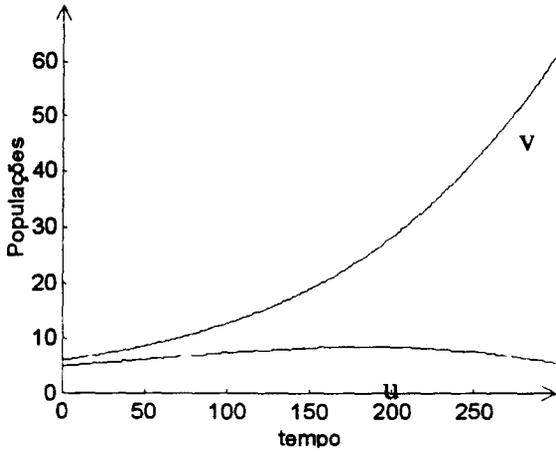


Figura 5.0.1: Presa (u)-predador (v) : $r > 0$ e $s < 0$.

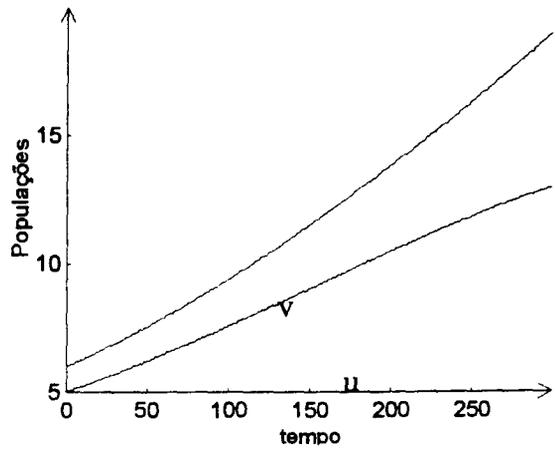


Figura 5.0.2 : Competição : $r, s > 0$.

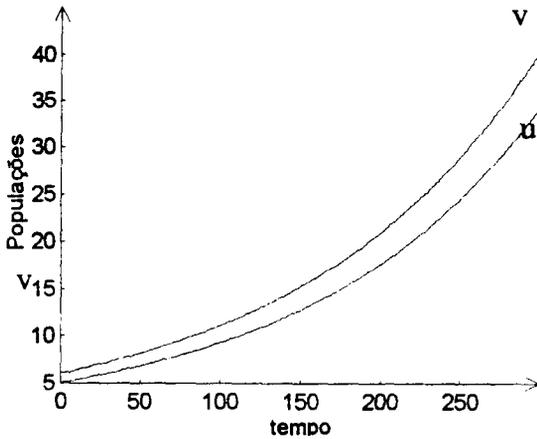


Figura 5.0.3: Mutualismo : $r, s < 0$.

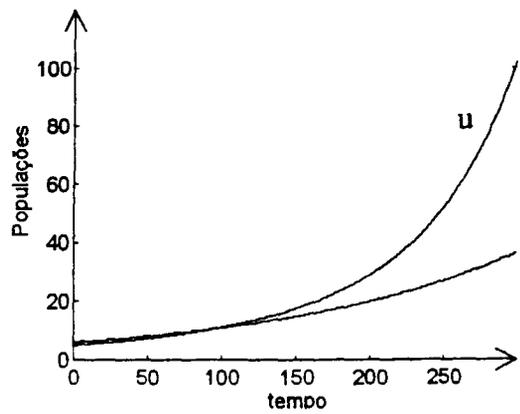


Figura 5.0.4 : Comensalismo : $r < 0$ e $s = 0$.

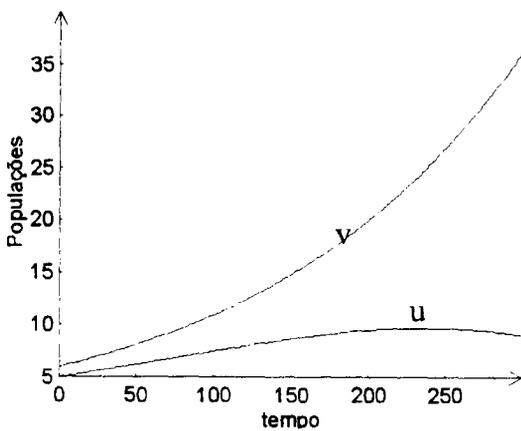


Figura 5.0.5: Amensalismo : $r > 0$ e $s = 0$.

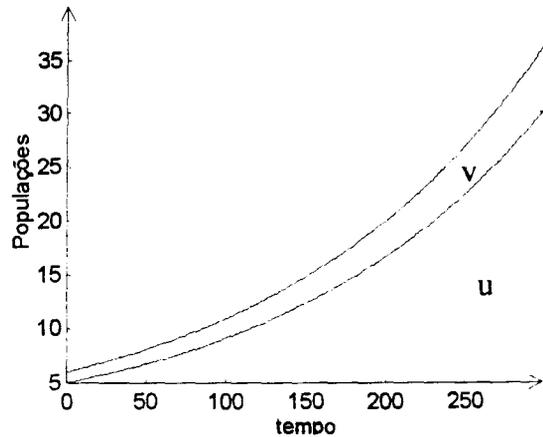


Figura 5.0.6: Sem interação : $r = 0$ e $s = 0$.

§5.1 Dependência espaço-temporal em modelos interespecíficos.

Modelos de difusão e de reação-difusão têm sido utilizados recentemente para descrever relações interespecíficas em problemas de dinâmica populacional. Ding da-fu *et al*²⁴ trabalham com um sistema que apresenta a difusão e um termo não linear que pode ser pensado, segundo o artigo, como as equações dinâmicas que surgem da minimização de um campo de energia. São realizadas análises dos pontos de equilíbrio. O artigo de Milner & Rabbio⁵⁵ propõe algoritmos rapidamente convergentes para a determinação de soluções aproximadas para o sistema de Gurtin-MacCamy.. O esquema utilizado é explícito e convergente, e são realizados ensaios computacionais aplicados a censos populacionais.

O grupo de dinâmica populacional do IMECC-UNICAMP tem trabalhado no sentido de procurar soluções aproximadas via métodos numéricos dos problemas abordados. Além de esforço significativo no tratamento matemático adequado, quanto à determinação de parâmetros e coeficientes que se aproximem da realidade, o grupo esbarra na dificuldade extrema na obtenção destes valores quando se trata de problemas reais, dada a interdisciplinaridade intrínseca destes problemas, e a conseqüente necessidade de cooperação dos mais diversos setores de pesquisa.

Considerando a não-homogeneidade espacial nas populações u e v , ou seja, retornando às equações (5.0.2), supondo um crescimento malthusiano em ambas as espécies e que não ocorram processos convectivos ou advectivos, as equações (5.0.2) se tornam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \gamma u &= \lambda u - ruv + f(t, x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla v) + \varepsilon v &= \nu v - suv + g(t, x, y), \end{aligned} \quad (5.1.1)$$
$$t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

e com as condições de contorno e iniciais definidas em (5.0.3) por:

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= u_0(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ v(0, x, y) &= v_0(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_0} &= v|_{\Gamma_0} = 0 \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = -\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

com Γ_0 e Γ_1 disjuntos formando a fronteira Γ de Ω , e η designando a normal exterior em (x,y) à curva Γ_1 .

O trabalho de Bernardes & Meyer ⁷ aborda um sistema do tipo (5.1.1) com α constante por partes dentro do domínio considerado e usa o método de diferenças finitas a fim de obter soluções aproximadas do modelo discreto. Pregolato, S. - tese de doutorado, a aparecer - trata este modelo seguindo a mesma linha deste trabalho, ou seja, através do método de Galerkin em conjunto com o método dos elementos finitos e método de Crank-Nicolson, considerando $\alpha = \alpha(x,y)$ e $\beta = \beta(x,y)$, além de incorporar ao modelo um crescimento verhulstiano e termos advectivos associados aos processos migratórios.

Introduz-se, repetindo o que foi feito nos capítulos 2 e 4, a formulação variacional do problema dado pelas equações (5.1.1), tendo em vista as condições (5.1.2), a fim de enfraquecer as condições de regularidade nas funções e coeficientes envolvidos. Na prática, estes coeficientes e funções são muitas vezes descontínuos, ou até mesmo representados matematicamente por distribuições.

§5.1.1 A formulação fraca.

Consideram-se o espaço de distribuições $L^2(\Omega)$, e $p \in H^1(\Omega)$ - espaço de Sobolev de ordem um.

A norma em $H^1(\Omega)$ induzida pelo produto escalar definido em $H^1(\Omega)$ é definida por:

$$\|p\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} p^2 d\mu + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 d\mu = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.1.3)$$

Multiplicando as equações do sistema (5.1.1) escalarmente por p , tem-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, p \right)_{\Omega} - (\nabla \cdot (\alpha \nabla u), p)_{\Omega} + (\sigma u, p)_{\Omega} = -r(uv, p)_{\Omega} + (f, p)_{\Omega} \quad (5.1.4)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, p \right)_\Omega - (\nabla \cdot (\beta \nabla v), p)_\Omega + (\tau v, p)_\Omega = -s(uv, p)_\Omega + (g, p)_\Omega, \quad (5.1.5)$$

$\forall p \in H^1(\Omega)$, onde $(\cdot, \cdot)_\Omega$ indica o produto escalar em $L^2(\Omega)$, $\sigma = \lambda - \gamma$ e $\tau = \nu - \varepsilon$.

Para as condições iniciais definidas em (5.1.2) tem-se:

$$(u(0, x, y), p)_\Omega = (u_0(x, y), p)_\Omega, \quad \forall p \in H^1(\Omega) \quad (5.1.6)$$

$$(v(0, x, y), p)_\Omega = (v_0(x, y), p)_\Omega, \quad \forall p \in H^1(\Omega). \quad (5.1.7)$$

Como

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla u) = \nabla \alpha \cdot \nabla u + \alpha \Delta u \quad (5.1.8)$$

$$\nabla \cdot (\beta \nabla v) = \nabla \beta \cdot \nabla v + \beta \Delta v,$$

substituindo esses resultados nas equações (5.1.4) e (5.1.5), tendo em vista a definição do produto escalar em $L^2(\Omega)$, e agrupando alguns termos obtêm-se:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} p \, d\mu - \int_\Omega \alpha \Delta u p \, d\mu + \int_\Omega \nabla \alpha \cdot \nabla u p \, d\mu + \int_\Omega \sigma u p \, d\mu = -r \int_\Omega uv p \, d\mu + \int_\Omega f p \, d\mu, \quad (5.1.9)$$

$\forall p \in H^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} p \, d\mu - \int_\Omega \beta \Delta v p \, d\mu + \int_\Omega \nabla \beta \cdot \nabla v p \, d\mu + \int_\Omega \tau v p \, d\mu = -s \int_\Omega uv p \, d\mu + \int_\Omega g p \, d\mu, \quad (5.1.10)$$

$\forall p \in H^1(\Omega)$.

Definindo o subespaço fechado $V \subset H^1(\Omega)$:

$$V = \{ w \in H^1(\Omega) : \text{tr}(w) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \}$$

e aplicando a fórmula de Green na segunda integral das equações (5.1.9) e (5.1.10), tendo em vista as condições de contorno dadas em (5.1.2), após o cancelamento de alguns termos, têm-se:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} p \, d\mu + \int_\Omega \alpha \nabla u \cdot \nabla p \, d\mu + \int_\Omega \sigma u p \, d\mu = -r \int_\Omega u v p \, d\mu + \int_\Omega f p \, d\mu, \quad \forall p \in V \quad (5.1.11)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} p \, d\mu + \int_\Omega \beta \nabla v \cdot \nabla p \, d\mu + \int_\Omega \tau v p \, d\mu = -s \int_\Omega u v p \, d\mu + \int_\Omega g p \, d\mu, \quad \forall p \in V \quad (5.1.12)$$

e, para as condições iniciais dadas pelas equações (5.1.6) e (5.1.7),

$$\int_{\Omega} u(0, x, y) p \, d\mu = \int_{\Omega} u_0(x, y) p \, d\mu, \quad \forall p \in V, \text{ e} \quad (5.1.13)$$

$$\int_{\Omega} v(0, x, y) p \, d\mu = \int_{\Omega} v_0(x, y) p \, d\mu, \quad \forall p \in V. \quad (5.1.14)$$

A fim de trabalhar em um espaço que incorpore a dependência do tempo introduz-se $L^2((0, T]; V)$ que denota o espaço das funções quadrado integráveis a Lebesgue de $(0, T]$ em V . A formulação fraca do problema (5.1.1) com as condições dadas em (5.1.2) consiste portanto em:

Dadas $f, g \in L^2((0, T) \times \Omega)$, e $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u, v \in V = \{w \in L^2((0, T]; V) \text{ tal que } \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2((0, T], L^2(\Omega))\}$, tais que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} p \, d\mu + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} \sigma u p \, d\mu = -r \int_{\Omega} u v p \, d\mu + \int_{\Omega} f p \, d\mu, \quad \forall p \in V \quad (5.1.15)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} p \, d\mu + \int_{\Omega} \beta \nabla v \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} \tau v p \, d\mu = -s \int_{\Omega} u v p \, d\mu + \int_{\Omega} g p \, d\mu, \quad \forall p \in V \quad (5.1.16)$$

$$\int_{\Omega} u(0, x, y) p \, d\mu = \int_{\Omega} u_0(x, y) p \, d\mu, \quad \forall p \in V. \quad (5.1.17)$$

$$\int_{\Omega} v(0, x, y) p \, d\mu = \int_{\Omega} v_0(x, y) p \, d\mu, \quad \forall p \in V. \quad (5.1.18)$$

§5.1.2 O modelo semi-discreto.

Utilizando o método de Galerkin em conjunto com o Método dos elementos finitos de segunda ordem para a discretização espacial e o método de Crank-Nicolson para a discretização temporal a fim de construir a solução aproximada, considera-se inicialmente uma separação das variáveis espaciais e temporal. Veja, nos capítulos 2 e 4, detalhes da construção do modelo discreto para problemas intraspecíficos, onde se considera apenas uma espécie. O presente capítulo é análogo àquele, levando em consideração que o problema tratado aqui envolve duas espécies e a não linearidade do

sistema aparece no termo de interação entre elas. Considera-se o domínio Ω (aberto, limitado, conexo) do \mathbb{R}^2 . O método consiste em procurar uma solução aproximada do problema definido pelas equações (5.1.15) a (5.1.18) em um subespaço V_h de V gerado por $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, como nos capítulos anteriores.

Procuram-se aproximações u_h e v_h das soluções u e v respectivamente, considerando em u_h e v_h uma separação de variáveis, de tal forma que:

$$u_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x, y) \quad \text{e} \quad (5.1.19)$$

$$v_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N v_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (5.1.20)$$

que satisfaçam as equações (5.1.15), (5.1.16), (5.1.17) e (5.1.18) para toda função $p \in V_h$ e para as quais

$$\frac{\partial u_h(t; x, y)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{du_j(t)}{dt} \varphi_j(x, y), \quad \text{e} \quad (5.1.21)$$

$$\frac{\partial v_h(t; x, y)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{dv_j(t)}{dt} \varphi_j(x, y). \quad (5.1.22)$$

O espaço vetorial das funções da forma (5.1.19), (5.1.20) é indicado por V_h .

Agora então, o problema dado pelas equações (5.1.15) a (5.1.18) no subespaço V_h de V , (isto é, com u_h e v_h definidas em (5.1.19) e (5.1.20) respectivamente) passa a ser o seguinte:

$$\text{Achar} \quad u_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)) \quad \text{e} \quad v_h(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))$$

suficientemente regulares para que se possa ter:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} p \, d\mu + \iint_{\Omega} \alpha \nabla u_h \cdot \nabla p \, d\mu + \iint_{\Omega} \sigma u_h p \, d\mu = -r \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \\ + \iint_{\Omega} f p \, d\mu, \quad \forall p \in V_h, \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial v_h}{\partial t} p \, d\mu + \iint_{\Omega} \beta \nabla v_h \cdot \nabla p \, d\mu + \iint_{\Omega} \tau v_h p \, d\mu = -s \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \\ + \iint_{\Omega} g p \, d\mu, \quad \forall p \in V_h \text{ com} \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

$$\iint_{\Omega} u_h(0, x, y) p \, d\mu = \iint_{\Omega} u_0(x, y) p \, d\mu, \quad \forall p \in V_h \text{ e} \quad (5.1.25)$$

$$\iint_{\Omega} v_h(0, x, y) p \, d\mu = \iint_{\Omega} v_0(x, y) p \, d\mu, \quad \forall p \in V_h. \quad (5.1.26)$$

Fazendo $p = \varphi_i$, $i=1, \dots, N$, e substituindo em (5.1.23) a (5.1.26), tendo em vista as equações (5.1.19) a (5.1.22), têm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{du_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \sum_{j=1}^N u_j(t) (\alpha \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \sum_{j=1}^N u_j(t) (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} = \\ = -r \sum_{j=1}^N u_j(t) \sum_{k=1}^N v_k(t) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + (f, \varphi_i)_{\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in B, \text{ e} \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{dv_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \sum_{j=1}^N v_j(t) (\beta \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \sum_{j=1}^N v_j(t) (\tau \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} = \\ = -s \sum_{j=1}^N v_j(t) \sum_{k=1}^N u_k(t) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + (g, \varphi_i)_{\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in B, \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

para as condições iniciais:

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} u_j(0) = (u_0, \varphi_i)_{\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in B \text{ e} \quad (5.1.29)$$

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} v_j(0) = (v_0, \varphi_i)_{\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in B. \quad (5.1.30)$$

Como $i = 1, 2, \dots, N$, tem-se um sistema de $2N$ equações diferenciais não lineares ordinárias de primeira ordem com as condições iniciais dadas acima.

§5.1.3 A discretização espacial: o método dos elementos finitos de segunda ordem.

A discretização espacial será feita com o método dos elementos finitos, sendo o espaço de funções denotado por V_h gerado pelo conjunto B de funções polinomiais de

ordem dois definidas por partes dentro do domínio discretizado Ω_h . Definem-se as funções de base φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ em cada triângulo da malha como uma função quadrática por partes.

§5.1.4 A discretização temporal : o método de Crank-Nicolson.

Utiliza-se o método de Crank-Nicolson para discretizar a variável temporal das equações (5.1.27) e (5.1.28), utilizando as aproximações:

$$u_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_n) + u_j(t_{n+1})}{2}$$

e

$$\frac{du_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t}$$
(5.1.31)

para a variável u , e:

$$v_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{v_j(t_n) + v_j(t_{n+1})}{2}$$

e

$$\frac{dv_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{v_j(t_{n+1}) - v_j(t_n)}{\Delta t}$$
(5.1.32)

para v , todas de ordem de Δt^2 em (5.1.19) e (5.1.20) estimadas em $t = t_n + \frac{\Delta t}{2}$.

Serão realizados vários ensaios computacionais, divididos em dois casos:

Primeiro: todos os coeficientes das equações são constantes.

Segundo: os coeficientes de decaimento somados às taxas intrínsecas de reprodução de cada uma das espécies u e v , representados por σ e τ respectivamente, variam com o tempo.

§5.1.5 Resultados de simulações numéricas.

§5.1.5.1 Primeiro caso: coeficientes constantes.

Substituindo (5.1.31) e (5.1.32) nas equações (5.1.27) e (5.1.28) e usando $u_j(t_n) \cong u_j^{(n)}$ tem-se, após as discretizações efetuadas, o seguinte sistema de equações não lineares de primeira ordem acoplado:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N [(1 + \sigma \frac{\Delta t}{2})(\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega}] + \\ & + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] u_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N [(1 - \sigma \frac{\Delta t}{2})(\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ & - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] u_j^{(n)} + \Delta t (f, \varphi_i)_{\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in B \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

para u , e

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N [(1 + \tau \frac{\Delta t}{2})(\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega}] + \\ & + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] v_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N [(1 - \tau \frac{\Delta t}{2})(\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ & - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] v_j^{(n)} + \Delta t (g, \varphi_i)_{\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in B \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

para v .

Adotando a notação:

$$U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \dots \\ u_N^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad e \quad V^{(n+1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n+1)} \\ v_2^{(n+1)} \\ \dots \\ v_N^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (5.1.35)$$

$$\text{com } U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1}), \quad e \quad V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1}), \quad (5.1.36)$$

sendo $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, e $v_j^{(n+1)} \cong v(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j=1,2,\dots,N$, o sistema de equações (5.1.33) e (5.1.34) pode ser escrito na forma:

Dados $U^{(0)}$ e $V^{(0)}$ obter $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$ das sucessivas soluções de

$$A(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n+1)} = B(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \quad (5.1.37)$$

$$C(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n+1)} = D(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n)} + \Delta t G^{(n+1/2)}. \quad (5.1.38)$$

O processo iterativo é obtido mediante as relações de recorrência (5.1.37) e (5.1.38), e é uma extensão do processo usado no capítulo 4 para uma espécie; ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } U^{(0)} \text{ e } V^{(0)} \in \mathfrak{R}^N \\ \text{obter } U^{(n+1)} \text{ e } V^{(n+1)} \text{ das sucessivas soluções de:} \\ A\left(\frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) U^{(**)} = B\left(\frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \\ C\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}\right) V^{(**)} = D\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}\right) V^{(n)} + \Delta t G^{(n+1/2)} \end{array} \right.$$

com $U^{(*)}$ e $V^{(*)}$ dados inicialmente por $U^{(n)}$ e $V^{(n)}$ e, a partir da segunda iteração interna, assumindo os valores de $U^{(**)}$ e $V^{(**)}$. Os valores obtidos na iteração interna final serão $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$.

As matrizes A, B, C, D, F e G¹ são dadas por:

$$A = (A_{ij}) = \left(\left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \tau \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right),$$

$$B = (B_{ij}) = \left(\left(1 - \sigma \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \tau \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right),$$

$$C = (C_{ij}) = \left(\left(1 + \tau \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right),$$

¹ Todos os produtos internos que aparecem nestas definições podem ser encontrados em Sossae⁶².

$$D = (D_{ij}) = \left(\left(1 - \tau \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right),$$

$$F = (F_i) = (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}, \text{ e}$$

$$G = (G_i) = (g^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}.$$

As soluções do sistema não linear dado pelas equações (5.1.37) e (5.1.38) para as espécies u e v , com as condições iniciais dadas pelas equações (5.1.29) e (5.1.30) serão $U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1})$ e $V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1})$, conforme (5.1.35) e (5.1.36).

Presas-predador.

O primeiro ensaio computacional que será ilustrado graficamente considera o caso de um sistema presa-predador, sendo u a densidade populacional da presa e v a densidade populacional do predador. Todos os valores utilizados são fictícios. Não se consideram a presença de fontes ou sumidouros, ou seja $f = g = 0$.

O domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ e os parâmetros são:

Parâmetros da discretização.

Os valores utilizados na discretização são:

$T=25$: instante final.

$x_f = 1$: valor final no eixo x .

$y_f = 1$: valor final no eixo y .

$nnx = 3$: número de subintervalos no eixo x .

$nny = 3$: número de subintervalos no eixo y .

$n_i = 2$: número de iterações internas.

$n_t = 100$: número de passos no tempo.

A estes valores correspondem:

$\Delta x = x_f/nnx = 0.33$, $\Delta y = y_f/nny = 0.33$ e $\Delta t = T/n_t = 0.25$.

Coeficientes : $\sigma = -0.05$, $\tau = -0.05$; $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.005$; $r = 0.01$, $s = -0.01$.

Condições iniciais : supõe-se que as populações de presas e de predadores estão, inicialmente, concentradas nos nós #29, #30, #35 e 36 as presas com coordenadas cartesianas dadas por $(5/6, 5/6)$, $(5/6, 1)$, $(1, 5/6)$ e $(1, 1)$ respectivamente, sendo em cada ponto $u_0 = 5$, e nos nós #19, #20, #25 e #26 os predadores com coordenadas cartesianas dadas por $(2/3, 1/6)$, $(2/3, 1/3)$, $(5/6, 1/6)$ e $(5/6, 1/3)$ respectivamente, sendo em cada ponto $v_0 = 6$.

As figuras 5.1.1a e 5.1.1b a seguir ilustram estas definições considerando o domínio completo, ou seja, levando em consideração a simetria do problema.

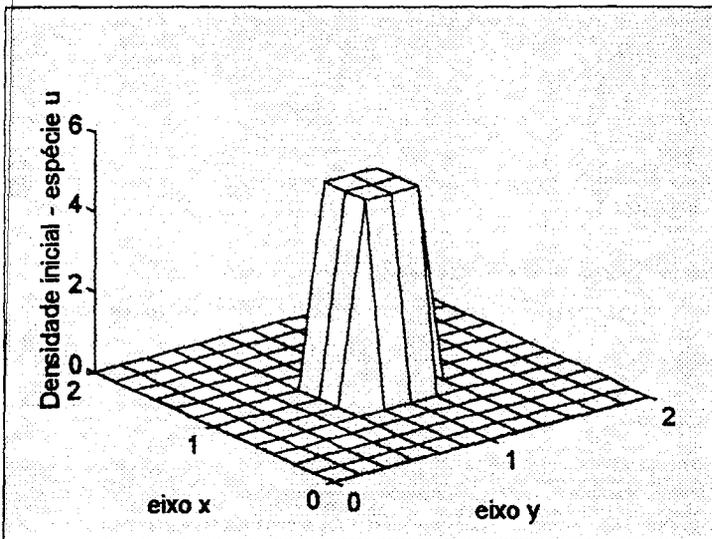


Figura 5.1.1a: Distribuição inicial das presas.

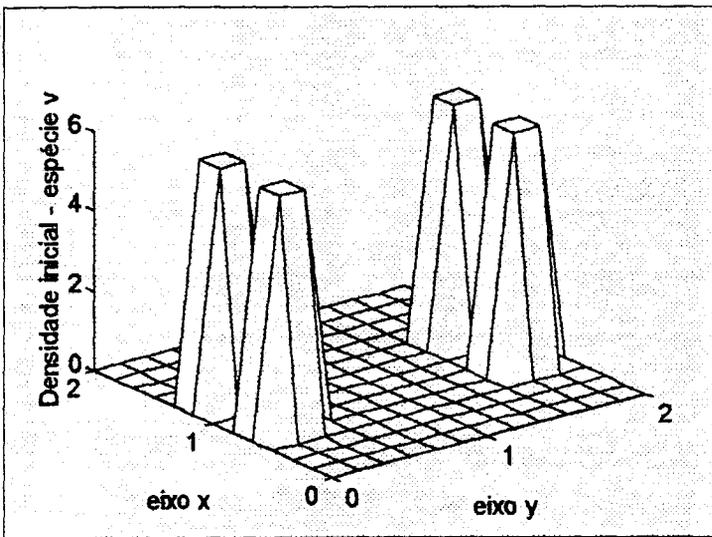


Figura 5.1.1b: Distribuição inicial dos predadores.

As figuras 5.1.2 e 5.1.3 ilustram as densidades populacionais no instante final $T = 25$, após 100 iterações no tempo, indicando a dispersão de ambas as espécies no domínio de interesse.

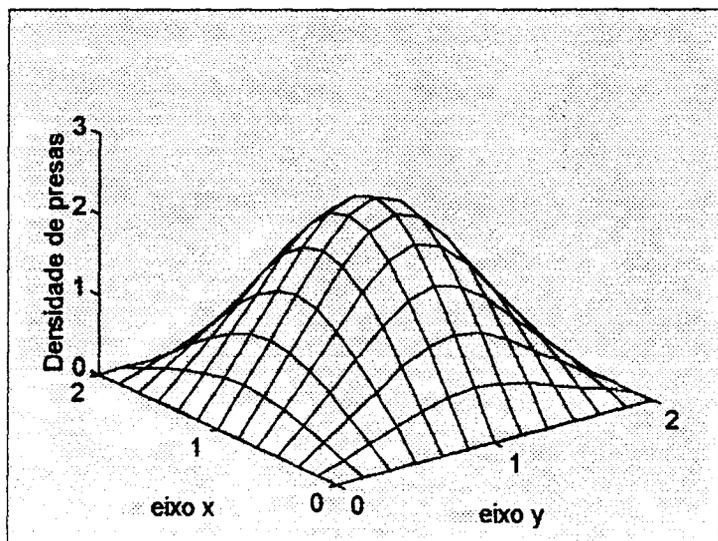


Figura 5.1.2: Distribuição populacional das presas no instante final $T = 25$.

Percebe-se claramente uma diminuição na densidade das presas devida à presença dos predadores.

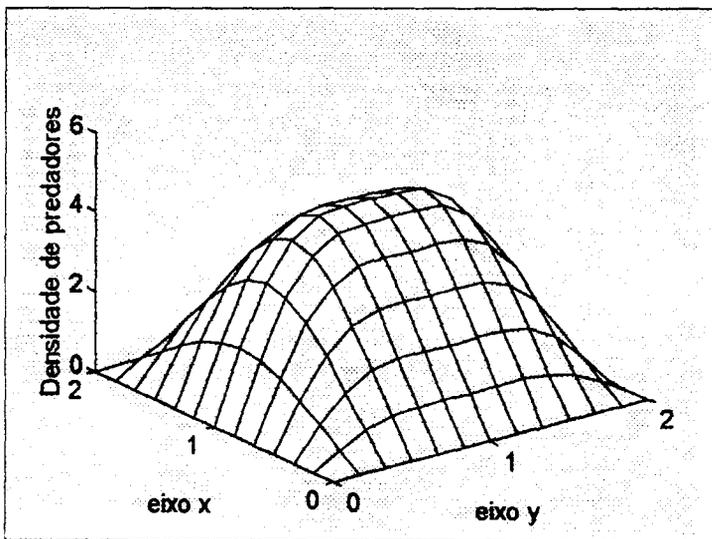


Figura 5.1.3: Distribuição populacional dos predadores no instante final $T = 25$.

O afastamento da região de interesse da fronteira talvez traga melhoras, ainda que qualitativas, nos resultados obtidos para a dispersão dos predadores, pelo fato de ter-se considerado a condição inicial para os mesmos muito próxima aos eixos. Mesmo assim, considerando o espalhamento no domínio pode-se perceber que ainda houve ganho na população.

A figura 5.1.4 indica a dispersão populacional das espécies u e v ao longo do tempo no nó #23 da malha de coordenadas cartesianas dadas por $(2/3, 5/6)$; a população de predadores aumenta enquanto a de presas diminui.

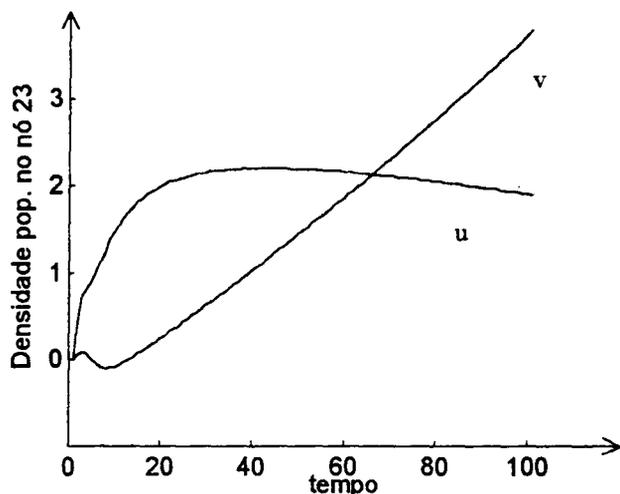


Figura 5.1.4: Distribuição populacional das presas (u) e predadores (v) no nó #23 ao longo do tempo.

Mutualismo.

O próximo ensaio ilustra o caso em que as espécies se beneficiam mutuamente uma com a presença da outra. Os parâmetros da discretização foram mantidos e as condições iniciais também, sendo $u_0 = 5$ e $v_0 = 6$ nos mesmos nós fixados para o sistema presa-predador. Também foram mantidos os valores dos coeficientes, havendo apenas uma alteração no sinal dos coeficientes da interação entre as espécies, a fim de trabalhar o mutualismo entre as mesmas, ou seja, $r = -0.01$, $s = -0.01$.

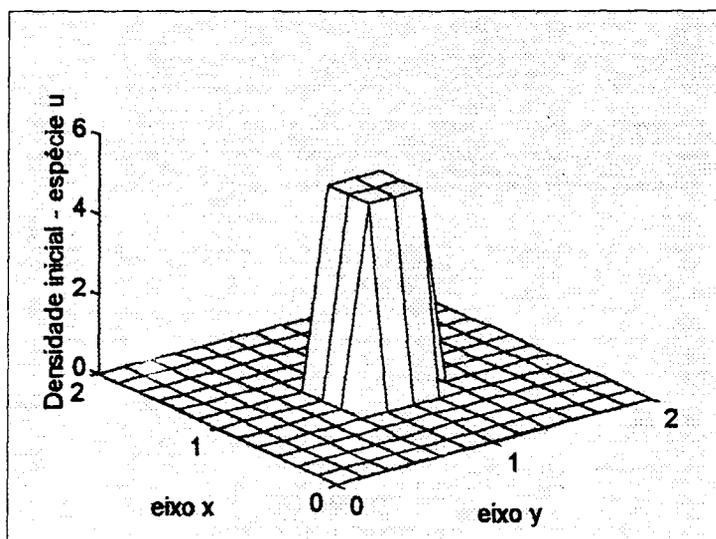


Figura 5.1.5a: Distribuição inicial da espécie u no caso do mutualismo.

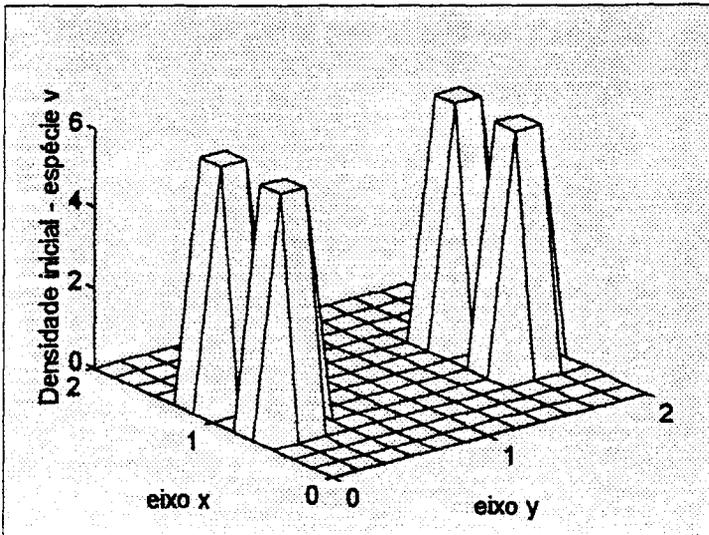


Figura 5.1.5b: Distribuição inicial da espécie v no caso do mutualismo.

As figuras 5.1.6 e 5.1.7 ilustram a dispersão das populações após as 100 iterações no tempo. Ambas as espécies, neste caso, se beneficiam com a presença uma da outra.

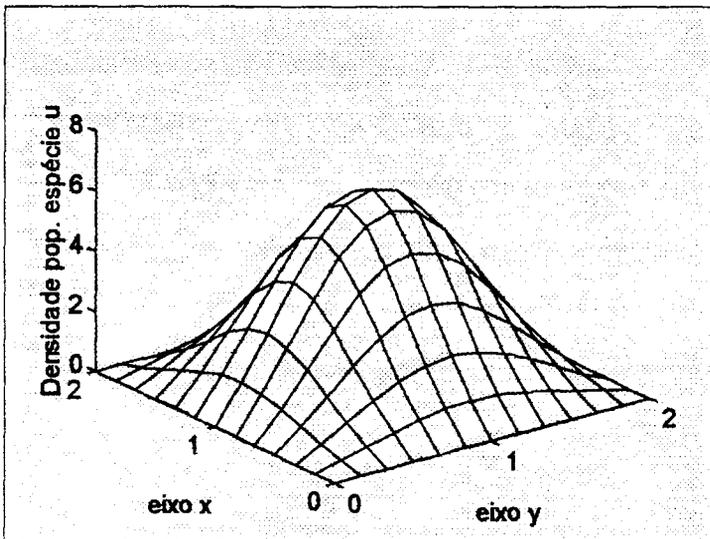


Figura 5.1.6: Distribuição populacional da espécie u no instante final $T = 25$.

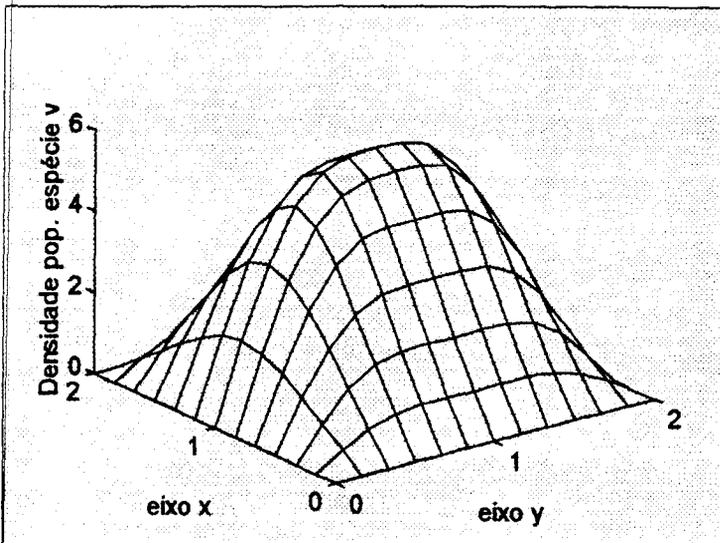


Figura 5.1.7: Distribuição populacional da espécie v no instante final $T = 25$.

A figura 5.1.8 indica a dispersão populacional das espécies u e v ao longo do tempo no nó #23 da malha. A diferença de comportamento no caso do mutualismo e no caso do sistema presa-predador fica bem clara ao se compararem as figuras 5.1.4 e 5.1.8.

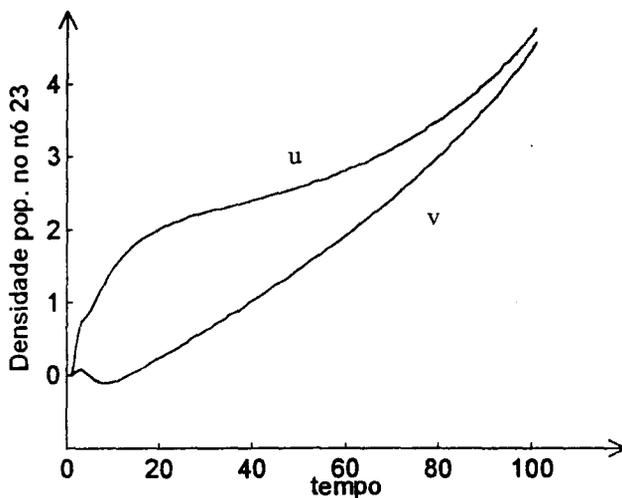


Figura 5.1.8: Distribuição populacional das espécies u e v no nó #23 ao longo do tempo (mutualismo).

A adequação de valores no caso de sistemas interespecíficos é muito difícil. Quando se tratam casos efetivos podem-se comparar os resultados obtidos com os esperados, ao menos qualitativamente, e, embora ocorram muito mais dificuldades, talvez os resultados sejam mais indicativos.

§5.1.5.2 Segundo caso: decaimento variável no tempo.

Voltando às equações (5.1.27) e (5.1.28), considera-se agora o caso em que os coeficientes de decaimento devidos à uma possível hostilidade do meio podem variar com o tempo, o que acarreta que:

$$\sigma = \sigma(t) \text{ para a espécie } u, \text{ e } \tau = \tau(t) \text{ para a espécie } v.$$

Consideram-se ainda que $f = g = 0$, ou seja não existem fontes ou sumidouros.

Substituindo (5.1.31) e (5.1.32) nas equações (5.1.27) e (5.1.28) tem-se, após as discretizações efetuadas, o seguinte sistema de equações não lineares de primeira ordem acoplado:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N [(1 + \sigma^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] u_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N [(1 - \sigma^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ & - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] u_j^{(n)}, \quad \forall \varphi_i \in B \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

para a espécie u , e

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N [(1 + \tau^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] v_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N [(1 - \tau^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ & - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] v_j^{(n)}, \quad \forall \varphi_i \in B \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

para a espécie v .

Adotando novamente a notação:

$$U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \dots \\ u_N^{(n+1)} \end{pmatrix}, \text{ e } V^{(n+1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n+1)} \\ v_2^{(n+1)} \\ \dots \\ v_N^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (5.1.41)$$

$$\text{com } U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1}), \text{ e } V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1}), \quad (5.1.42)$$

sendo $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, e $v_j^{(n+1)} \cong v(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, o sistema de equações (5.1.39) e (5.1.40) pode ser escrito na forma:

Dados $U^{(0)}$ e $V^{(0)}$ obter $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$ das sucessivas soluções de

$$A(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n+1)} = B(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n)} \quad (5.1.43)$$

$$C(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n+1)} = D(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n)}. \quad (5.1.44)$$

O processo iterativo é o mesmo do primeiro caso. As matrizes A, B, C e D neste caso são dadas por:

$$A = (A_{ij}) = \left(\left(1 + \sigma \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right),$$

$$B = (B_{ij}) = \left(\left(1 - \sigma \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right),$$

$$C = (C_{ij}) = \left(\left(1 + \tau \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right),$$

e

$$D = (D_{ij}) = \left(\left(1 - \tau \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right).$$

As soluções do sistema não linear dado pelas equações (5.1.43) e (5.1.44) para as espécies u e v , com as condições iniciais dadas pelas equações (5.1.29) e (5.1.30) serão $U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1})$ e $V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1})$, conforme (5.1.41) e (5.1.42).

Foram realizados dois ensaios, repetindo os casos presa-predador e mutualismo, considerando agora os coeficientes de decaimento somados às taxas intrínsecas de reprodução, variáveis no tempo. As condições iniciais e os parâmetros das discretizações são os mesmos utilizados anteriormente. Serão apresentados os resultados para o sistema presa-predador.

Presa-predador.

Consideram-se as seguintes definições para os coeficientes do decaimento devido a hostilidade do meio somados as taxas intrínsecas de reprodução para as espécies u e v, representados por σ e τ :

$$\sigma(t) = \begin{cases} -0.05 & \text{para } 0 \leq t \leq 2.5 \\ -0.005 & \text{para } 2.5 \leq t \leq 5 \\ \sigma(t-5) = \sigma(t) \end{cases}$$

para as presas (espécie u), e

$$\tau(t) = \begin{cases} -0.01 & \text{para } 0 \leq t \leq 2.5 \\ -0.001 & \text{para } 2.5 \leq t \leq 5 \\ \tau(t-5) = \tau(t) \end{cases}$$

para os predadores (espécie v).

Coeficientes : $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.005$; $r = 0.01$, $s = -0.01$.

Conforme as definições dos coeficientes, considera-se que a taxa intrínseca de reprodução das presas é maior que a dos predadores, mas a população sofre, periodicamente, uma agressão maior devida ao meio - efeitos de clima por exemplo - o que torna o coeficiente σ função do tempo e aumenta a mortalidade das presas das iterações de 10 a 20, enquanto que inicialmente a agressão era menor. A situação se repete periodicamente. Comparando as figuras 5.1.6 e 5.1.9 fica evidenciada a perda maior de presas neste caso. Também os predadores sofrem mais a agressão do meio periodicamente, conforme a definição de τ .

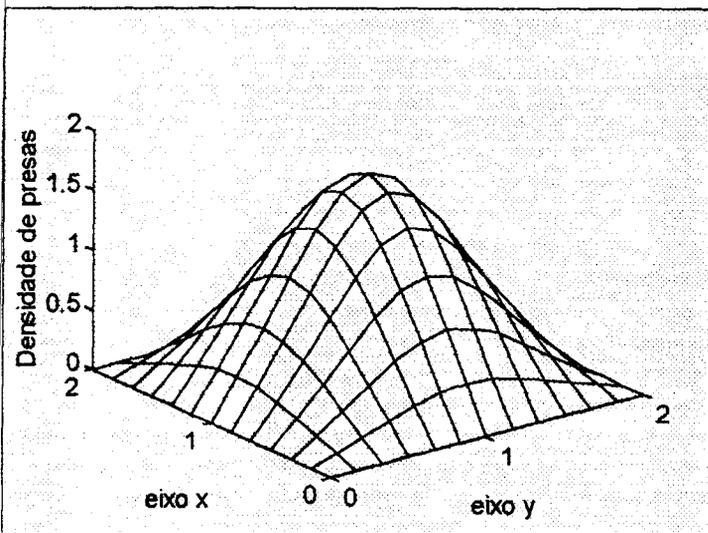


Figura 5.1.9: Distribuição populacional de presas no instante final $T=25$.

A taxa de reprodução dos predadores, embutida em τ , é cinco vezes menor que a das presas, conforme a definição de τ , e a população acaba perdendo muito também neste caso e a figura 5.1.10 indica isso. Pode-se comparar este resultado com o da figura 5.1.7 quando todos os coeficientes foram tomados constantes.

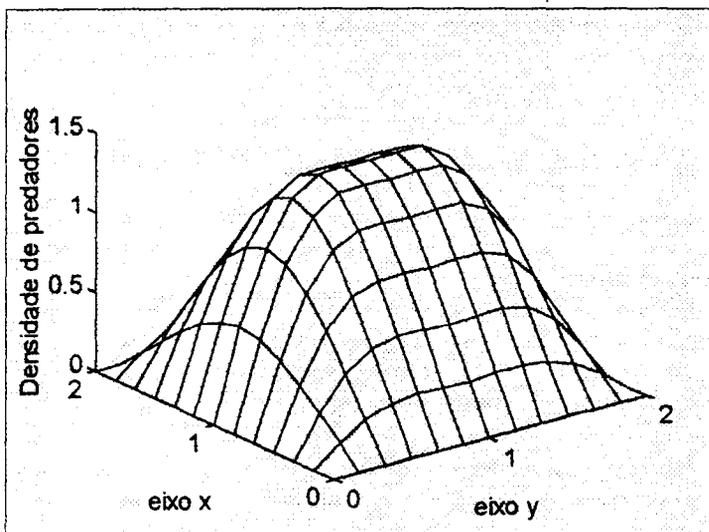


Figura 5.1.10: Distribuição populacional de predadores no instante final $T=25$.

A figura 5.1.11 mostra a dispersão para as presas e os predadores no nó #23 ao longo do tempo. Percebe-se nitidamente o efeito da variação temporal do coeficiente σ na população de presas. O efeito da variação temporal do coeficiente τ para

os predadores é menos notada. Percebem-se, neste caso, as oscilações iniciais do método de Crank-Nicolson que logo desaparecem.

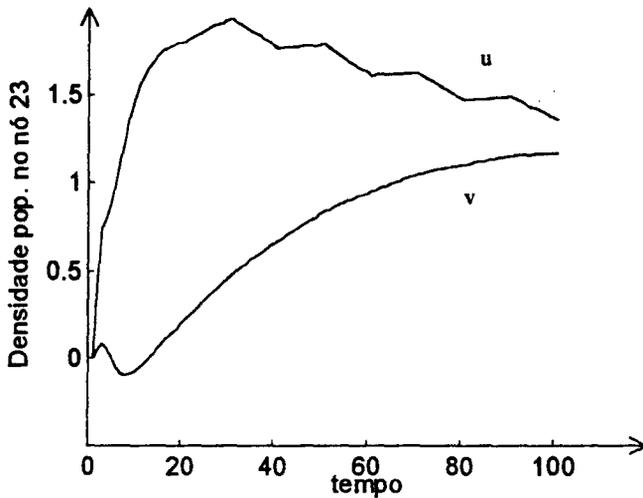


Figura 5.1.11: Distribuição populacional das presas e dos predadores no nó #23 ao longo do tempo.

Uma comparação das figuras 5.1.4 e 5.1.11 é bastante indicativa dos efeitos nas definições das variações nos coeficientes σ e τ .

§5.2 Modelos interespecíficos descritos por equações de advecção-difusão.

Considerando o modelo mais completo dado pelas equações (5.0.2), supondo um crescimento malthusiano em ambas as espécies, e que ocorram processos convectivos ou advectivos, as equações (5.0.2) se tornam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{V} u) + \gamma u &= \lambda u - ruv + f(t, x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla v) + \nabla \cdot (\mathbf{W} v) + \varepsilon v &= \nu v - suv + g(t, x, y), \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

$$t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

com as mesmas condições de contorno e iniciais definidas em (5.0.3) a saber

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), (x, y) \in \Omega,$$

$$v(0, x, y) = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u|_{\Gamma_0} = v|_{\Gamma_0} = 0 \tag{5.2.2}$$

$$e - \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = -\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

com Γ_0 e Γ_1 disjuntos formando a fronteira Γ de Ω , e η designando a normal exterior em (x, y) à curva Γ_1 .

§5.2.1 A formulação fraca.

Consideram-se o espaço de distribuições $L^2(\Omega)$, e $p \in H^1(\Omega)$ - espaço de Sobolev de ordem um. Multiplicando as equações do sistema (5.2.1) escalarmente por p , têm-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, p \right)_{\Omega} - (\nabla \cdot (\alpha \nabla u), p)_{\Omega} + (\nabla \cdot (\mathbf{V}u), p)_{\Omega} + (\sigma u, p)_{\Omega} = -r(uv, p)_{\Omega} + (f, p)_{\Omega} \tag{5.2.3}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, p \right)_{\Omega} - (\nabla \cdot (\beta \nabla v), p)_{\Omega} + (\nabla \cdot (\mathbf{W}v), p)_{\Omega} + (\tau v, p)_{\Omega} = -s(uv, p)_{\Omega} + (g, p)_{\Omega}, \tag{5.2.4}$$

$\forall p \in H^1(\Omega)$, onde $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ indica o produto escalar em $L^2(\Omega)$, $\sigma = \lambda - \gamma$ e $\tau = \nu - \varepsilon$.

Substituindo

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}u) = (\nabla \cdot \mathbf{V})u + \mathbf{V} \cdot \nabla u \tag{5.2.5}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{W}v) = (\nabla \cdot \mathbf{W})v + \mathbf{W} \cdot \nabla v \tag{5.2.6}$$

nas equações (5.2.3) e (5.2.4) respectivamente e tendo em vista a definição do produto escalar em $L^2(\Omega)$, repetem-se os mesmos cálculos efetuados nos capítulos precedentes a fim de obter a formulação fraca do problema dado pelas equações (5.2.1) com as condições dadas em (5.2.2). A formulação consiste em:

Dadas $f, g \in L^2((0, T) \times \Omega)$, e $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u, v \in \mathbf{V} = \{ w \in L^2((0, T]; V) \text{ tal que } \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2((0, T], L^2(\Omega)) \}$, tais que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} p \, d\mu + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla u \, p \, d\mu + \int_{\Omega} (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{V}) u \, p \, d\mu =$$

$$= -r \int_{\Omega} u \, v \, p \, d\mu + \int_{\Omega} f \, p \, d\mu, \quad (5.2.7)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} p \, d\mu + \int_{\Omega} \beta \nabla v \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \nabla v \, p \, d\mu + \int_{\Omega} (\tau + \nabla \cdot \mathbf{W}) v \, p \, d\mu =$$

$$= -s \int_{\Omega} u \, v \, p \, d\mu + \int_{\Omega} g \, p \, d\mu, \quad (5.2.8)$$

$$\int_{\Omega} u(0, x, y) \, p \, d\mu = \int_{\Omega} u_0(x, y) \, p \, d\mu,$$

$$\int_{\Omega} v(0, x, y) \, p \, d\mu = \int_{\Omega} v_0(x, y) \, p \, d\mu,$$

$\forall p \in V = \{p \in L^2((0, T]; H^1(\Omega)) : \text{tr}(p) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, e $L^2((0, T]; V)$ denota o espaço das funções quadrado integráveis a Lebesgue de $(0, T]$ em V .

§5.2.2 O modelo discreto.

Seguindo os mesmos cálculos feitos nos capítulos precedentes, usam-se o método de Galerkin em conjunto com os métodos dos elementos finitos e método de Crank-Nicolson para a construção de soluções aproximadas para u e v .

Procuram-se aproximações

$$u_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)) \text{ e } v_h(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))$$

suficientemente regulares das soluções u e v respectivamente para que se possam ter:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} p \, d\mu + \iint_{\Omega} \alpha \nabla u_h \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} (\mathbf{V} \cdot \nabla u_h) p \, d\mu + \iint_{\Omega} \sigma u_h \, p \, d\mu =$$

$$-r \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \iint_{\Omega} f \, p \, d\mu, \quad (5.2.9)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial v_h}{\partial t} p \, d\mu + \iint_{\Omega} \beta \nabla v_h \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} (\mathbf{W} \cdot \nabla v_h) p \, d\mu + \iint_{\Omega} \tau v_h p \, d\mu = \\ & = -s \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \iint_{\Omega} g p \, d\mu, \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

$$\iint_{\Omega} u_h(0, x, y) p \, d\mu = \iint_{\Omega} u_0(x, y) p \, d\mu,$$

$$\iint_{\Omega} v_h(0, x, y) p \, d\mu = \iint_{\Omega} v_0(x, y) p \, d\mu,$$

$\forall p \in V_h = [B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}]$ subespaço de V de dimensão N , considerando que $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{W} = 0$.

§5.2.3 As discretizações espacial e temporal.

A discretização espacial será feita com o método dos elementos finitos, sendo o espaço de funções denotado por V_h gerado pelo conjunto B de funções polinomiais de ordem dois, $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, N$, definidas por partes dentro do domínio discretizado Ω_h .

Fazendo $p = \varphi_i, i=1, \dots, N$, e utilizando o método de Crank-Nicolson para a discretização temporal tem-se o sistema de $2N$ equações algébricas não lineares:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N (u_j^{n+1} - u_j^n) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N (u_j^{n+1} + u_j^n) \left[\begin{aligned} & (\alpha \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\Omega} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^N (v_k^{n+1} + v_k^n) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{aligned} \right] = \\ & = \Delta t (f, \varphi_i)_{\Omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N (v_j^{n+1} - v_j^n) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N (v_j^{n+1} + v_j^n) \left[\begin{aligned} & (\beta \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\Omega} + (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + (\tau \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^N (u_k^{n+1} + u_k^n) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{aligned} \right] = \\ & = \Delta t (g, \varphi_i)_{\Omega}, \end{aligned}$$

$\forall \varphi_i \in B$.

e, para as condições iniciais:

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega u_j(0) = (u_0, \varphi_i)_\Omega, \quad \forall \varphi_i \in B.$$

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega v_j(0) = (v_0, \varphi_i)_\Omega, \quad \forall \varphi_i \in B.$$

Os ensaios realizados no parágrafo §5.1 serão repetidos, considerando agora a presença dos termos advectivos.

§5.2.4 Resultados de simulações numéricas.

§5.2.4.1 Primeiro caso: coeficientes constantes.

Considerando $\alpha, \beta, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \sigma, \tau, r$ e s constantes e isolando os termos em $(n+1)$ e n tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[(1 + \sigma \frac{\Delta t}{2}) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_\Omega + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \right. \\ & \left. + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] u_j^{(n+1)} = \\ & = \sum_{j=1}^N \left[(1 - \sigma \frac{\Delta t}{2}) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_\Omega - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \right. \\ & \left. - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] u_j^{(n)}, \quad \forall \varphi_i \in B \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

para a espécie u , e

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[(1 + \tau \frac{\Delta t}{2}) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_\Omega + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \right. \\ & \left. + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] v_j^{(n+1)} = \\ & = \sum_{j=1}^N \left[(1 - \tau \frac{\Delta t}{2}) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_\Omega - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \right. \\ & \left. - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] v_j^{(n)}, \quad \forall \varphi_i \in B \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

para a espécie v , sendo como no caso anterior, $f = g = 0$.

Adotando a notação:

$$U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \dots \\ u_N^{(n+1)} \end{pmatrix}, \text{ e } V^{(n+1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n+1)} \\ v_2^{(n+1)} \\ \dots \\ v_N^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (5.2.13)$$

$$\text{com } U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1}), \text{ e } V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1}), \quad (5.2.14)$$

sendo $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, e $v_j^{(n+1)} \cong v(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, o sistema de equações (5.2.11) e (5.2.12) pode ser escrito na forma:

Dados $U^{(0)}$ e $V^{(0)}$ obter $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$ das sucessivas soluções de

$$A(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n+1)} = B(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n)} \quad (5.2.15)$$

$$C(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n+1)} = D(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n)}. \quad (5.2.16)$$

As matrizes A, B, C e D são dadas por:

$$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{pmatrix}$$

$$B = (B_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(1 - \sigma \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{pmatrix}$$

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(1 + \tau \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{pmatrix}$$

$$D = (D_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(1 - \tau \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_{j, \varphi_i})_{\Omega} - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{pmatrix}$$

As soluções do sistema não linear dado pelas equações (5.2.15) e (5.2.16) para as espécies u e v , com as condições iniciais dadas serão $U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1})$ e $V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1})$, conforme (5.2.13) e (5.2.14).

O ensaio computacional que será ilustrado graficamente considera o caso do sistema presa-predador do parágrafo §5.1.5.1, sendo u a densidade populacional da presa e v a densidade populacional do predador. O domínio, os parâmetros da discretização e as condições iniciais são os mesmos utilizados anteriormente

Presa-predador:

Coeficientes : $\sigma = -0.05$, $\tau = -0.05$; $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.005$; $r = 0.01$, $s = -0.01$ e os campos de velocidades da migração são $\mathbf{V} = (0.026, 0)$ e $\mathbf{W} = (0, 0.026)$.

Condições iniciais : as mesmas do parágrafo §5.1.5.1, ou seja: $u_0 = 5$, $v_0 = 6$ concentradas.

A densidade populacional das presas em cada ponto do domínio é mostrada na figura 5.2.1, considerando 100 iterações no tempo.

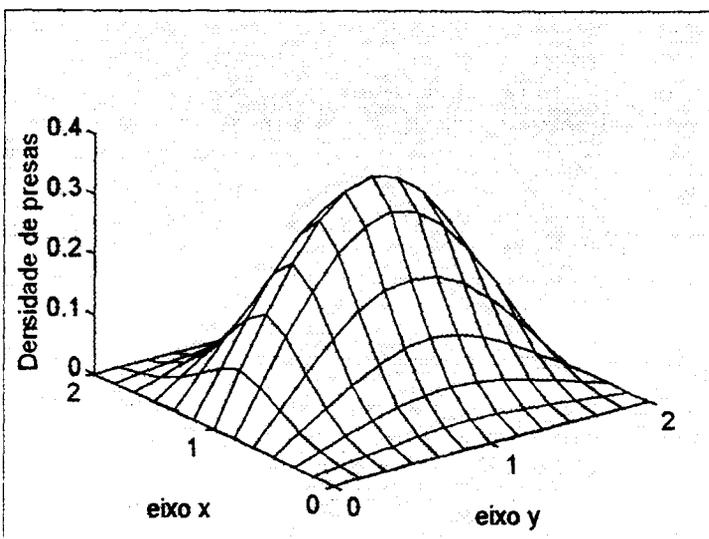


Figura 5.2.1 Distribuição populacional das presas no instante final $T = 25$.

Percebe-se a ação do campo de velocidades carregando a população para o centro do domínio, na direção do segmento de reta dado por $x = 1$.

A figura 5.2.2 ilustra a densidade populacional dos predadores onde se verifica também a ação do campo de velocidades empurrando a população na direção do segmento de reta dado por $y = 1$. Comparando as figuras 5.1.2 e 5.2.1 percebe-se que a ação do campo de velocidades prejudica ainda mais a população de presas.

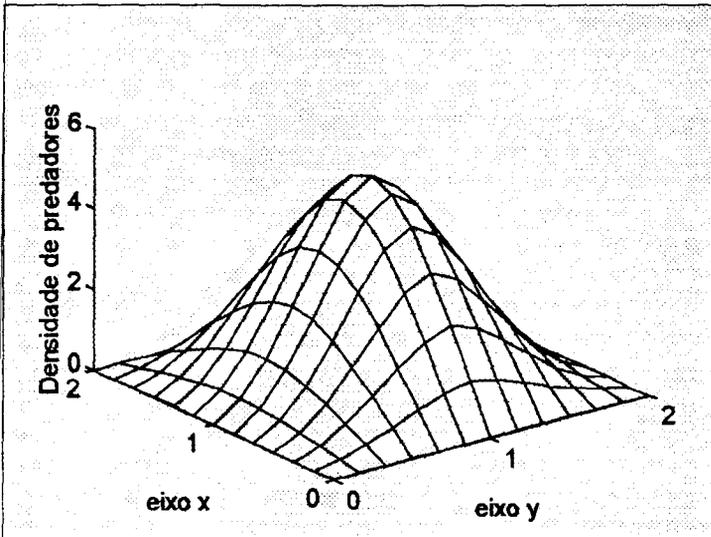


Figura 5.2.2 Distribuição populacional dos predadores no instante final $T = 25$.

Comparando as figuras 5.1.3 e 5.2.2, até mesmo a população de predadores parece perder um pouco com a ação do campo de velocidades. Isto fica mais evidente quando se comparam as figuras 5.1.4 e 5.2.3 que mostram o acompanhamento da população no nó #23 da malha; talvez o afastamento da região de interesse altere e melhore este resultado.

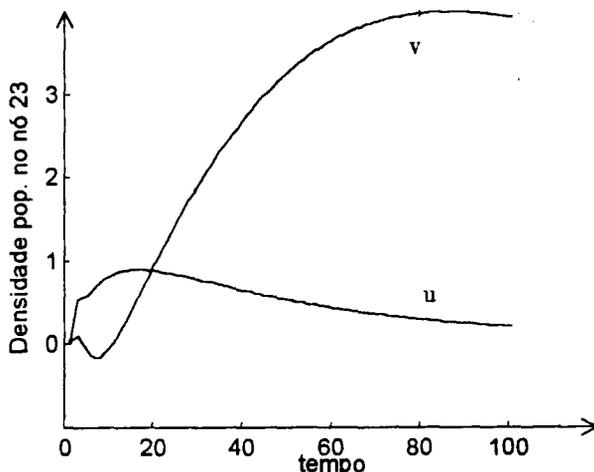


Figura 5.2.3 Distribuição populacional de presas e predadores no nó #23 ao longo do tempo.

§5.2.4.2 Segundo caso: coeficientes variáveis no tempo.

Voltando às equações (5.2.9) e (5.2.10), considera-se agora o caso em que os coeficientes de decaimento devidos a uma possível hostilidade do meio e os campos de velocidades da migração para ambas as espécies podem variar com o tempo, ou seja:

$\sigma = \sigma(t)$ e $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$ para a espécie u , e $\tau = \tau(t)$ e $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ para a espécie v .

O sistema de equações não lineares será então dado por:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^N \left[(1 + \sigma^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{V}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} \right] + \\
 & + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] u_j^{(n+1)} = \\
 & = \sum_{j=1}^N \left[(1 - \sigma^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{V}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} \right] - \\
 & - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] u_j^{(n)}, \quad \forall \varphi_i \in B
 \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

para a espécie u , e

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^N \left[(1 + \tau^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{W}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} \right] + \\
 & + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] v_j^{(n+1)} = \\
 & = \sum_{j=1}^N \left[(1 - \tau^{(n+\frac{1}{2})}) \frac{\Delta t}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{W}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} \right] - \\
 & - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega}] v_j^{(n)}, \quad \forall \varphi_i \in B
 \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

para a espécie v .

Tendo em vista (5.2.13) e (5.2.14) o sistema de equações (5.2.16) e (5.2.17) pode ser escrito na forma:

Dados $U^{(0)}$ e $V^{(0)}$ obter $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$ das sucessivas soluções de

$$A(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n+1)} = B(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n)} \quad (5.2.19)$$

$$C(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n+1)} = D(U^{(n+1)}, U^{(n)}) V^{(n)}. \quad (5.2.20)$$

As matrizes A, B, C e D neste caso são dadas por:

$$A=(A_{ij})=\left(\begin{array}{l} \left(1 + \sigma \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{V}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} + \\ + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{array} \right)$$

$$B=(B_{ij})=\left(\begin{array}{l} \left(1 - \sigma \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{V}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} - \\ - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{array} \right)$$

$$C=(C_{ij})=\left(\begin{array}{l} \left(1 + \tau \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{W}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} + \\ + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{array} \right)$$

$$D=(D_{ij})=\left(\begin{array}{l} \left(1 - \tau \frac{(n+\frac{1}{2}) \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{W}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i \right)_{\Omega} - \\ - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)})}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{array} \right)$$

As soluções do sistema não linear dado pelas equações (5.2.15) e (5.2.16) para as espécies u e v, com as condições iniciais dadas serão $U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1})$ e $V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1})$, conforme (5.2.13) e (5.2.14).

O ensaio computacional ilustrado graficamente a seguir considera o sistema presa-predador do parágrafo §5.1.5.2, com a presença, agora, do campo de velocidades e variações temporais.

Presa-predador

As definições dos coeficientes da equação no parágrafo §5.1.5.2 foram mantidas; são elas:

Coefficientes do decaimento devido a hostilidade do meio somado a taxa intrínseca de reprodução:

$$\sigma(t) = \begin{cases} -0.05 & \text{para } 0 \leq t \leq 2.5 \\ -0.005 & \text{para } 2.5 \leq t \leq 5 \\ \sigma(t-5) = \sigma(t) \end{cases}$$

para as presas (espécie u), e

$$\tau(t) = \begin{cases} -0.01 & \text{para } 0 \leq t \leq 2.5 \\ -0.001 & \text{para } 2.5 \leq t \leq 5 \\ \tau(t-5) = \tau(t) \end{cases}$$

para os predadores (espécie v).

Coefficientes : $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.005$; $r = 0.01$, $s = -0.01$.

Considerando agora, além da variação temporal em σ e τ , que os campos de velocidades da migração V e W também variam com o tempo, definem-se:

$$V_1(t) = \begin{cases} 0.026 & \text{para } 0 \leq t \leq 2.5 \\ 0 & \text{para } 2.5 \leq t \leq 5 \\ V_2(t-5) = V_2(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad V_2 = 0$$

para as presas (espécie u), e

$W = (0, 0.026)$ para os predadores (espécie v).

As figuras a seguir mostram soluções aproximadas para o sistema presa-predador. A figura 5.2.4 indica a distribuição populacional das presas, no domínio de interesse, no instante final $T = 25$. Comparando com a figura 5.1.9 verifica-se visualmente a ação do campo de velocidades empurrando a população para o centro do domínio. Como no presente ensaio há simultaneamente a presença do campo de velocidades, uma mortalidade maior em dois sub intervalos de tempo, esta mortalidade atinge um maior número de indivíduos como se observa na figura 5.2.4.

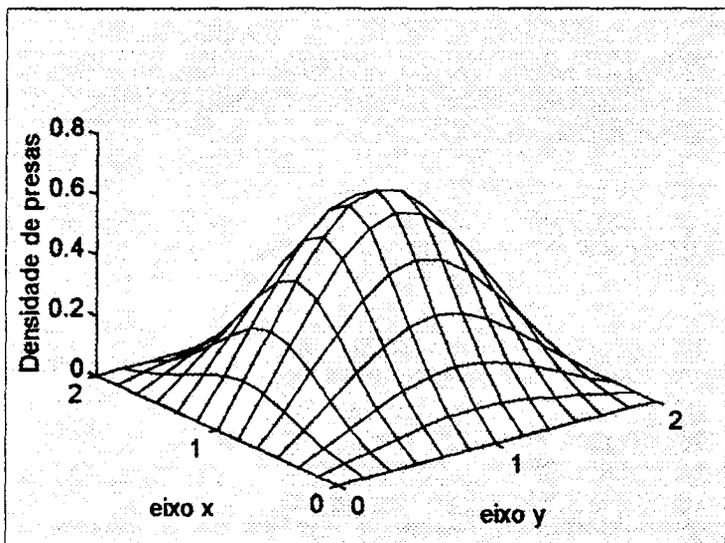


Figura 5.2.4: Distribuição populacional de presas no instante final $T = 25$.

Um comportamento análogo é observado comparando-se as figuras 5.1.10 e 5.2.5 para os predadores.

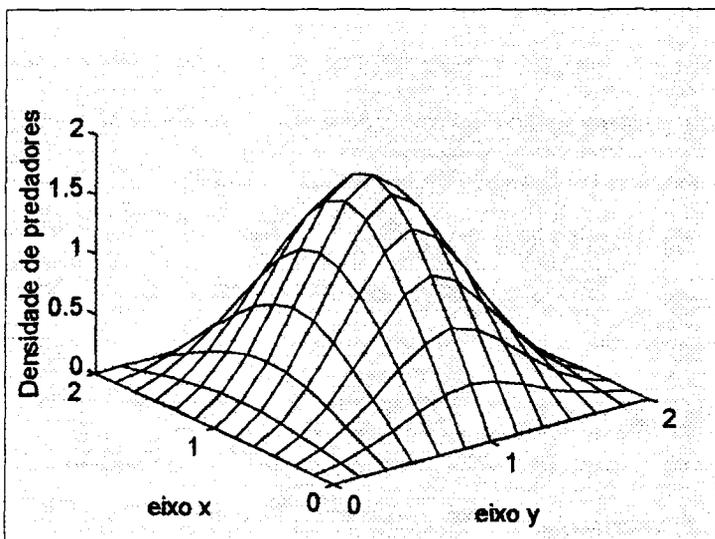


Figura 5.2.5: Distribuição populacional de predadores no instante final $T = 25$.

Os acompanhamentos das densidades populacionais ao longo do tempo foi feito neste caso para o nó #23 que ilustra muito bem o efeito da variação no campo de velocidades das presas, alterando sua densidade populacional neste nó ao longo do tempo. Para os predadores os efeitos não são fáceis de serem mas há também uma alteração nesta população em relação ao resultado da figura 5.1.11 onde não existe ação do campo de velocidades. Isto pode ser notado comparando-se as figuras 5.1.11 e 5.2.6.

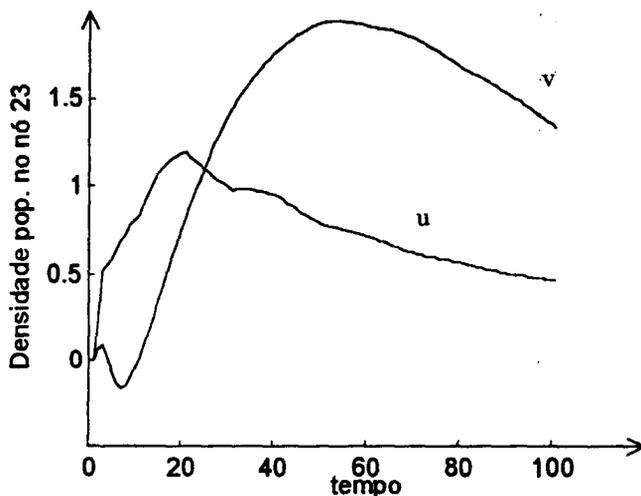


Figura 5.2.6: Variação de presas e predadores no nó #23 com a iteração no tempo.

Poderia ainda ser realizado um ensaio mantendo-se os campos de velocidades constantes porém não nulos, e, considerando apenas os termos de decaimento somados às taxas intrínsecas de reprodução das espécies variando com o tempo. Os ensaios do parágrafo §5.2.5.1 onde todas estas funções foram consideradas constantes serviriam de ponto de partida para uma comparação mais detalhada.

A simples presença de termos difusivos, convectivos e de crescimento (ou decaimento) populacional causando dispersão em uma espécie geram uma distribuição final na população na qual seus efeitos isolados não são visíveis, eles se misturam. Mensurar o grau de influência de um ou outro termo é trabalho delicado. Muitos ensaios devem ser realizados a fim de se isolar e comparar os resultados intermediários. Depois disso fica mais fácil tentar analisar os efeitos conjuntos.

Em sistemas interespecíficos esta análise fica ainda mais delicada devido à presença do termo que representa a interação entre as espécies. Casos particulares exigem um estudo metódico e exaustivo a fim de não se tirarem conclusões precipitadas.

Capítulo 6: A dispersão densidade-dependente em modelos interespecíficos.

§6.1 A dinâmica vital densidade-dependente: equações de reação-difusão

Problemas descritos por equações de reação-difusão são tratados em um grande número de publicações. Geralmente tais sistemas apresentam crescimentos populacionais do tipo logístico, o que motivou a introdução do presente capítulo neste trabalho. O sistema de equações diferenciais parciais que descreve os tipos de fenômenos mencionados acima é dado, de maneira geral, por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= L_i u_i + f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) u_i \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ B_i \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, \infty) \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um domínio limitado. No sistema acima L_i é o operador elíptico (possivelmente com coeficientes que variam com o tempo e/ou com o espaço), as funções $f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ podem conter, além dos termos que descrevem as dinâmicas vitais das espécies u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, as interações entre elas e com seu meio ambiente, e $B_i \mathbf{u}$

$\equiv \mathbf{u}$, ou $B_i \mathbf{u} \equiv \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta}$ é a condição de contorno.

Ikeda & Mimura³⁸ consideram o problema de coexistência de duas espécies em competição mediada por um predador. Eles usam um sistema de reação-difusão adaptado ao modelo de Lotka-Volterra e consideram que a possibilidade de coexistência é realçada por diferenças nas taxas de difusão da presa e do predador. O sistema de três equações não lineares é analisado sob o ponto de vista de existência de pontos de equilíbrio e soluções estáveis. Cantrell *et al*¹⁵ analisam um modelo descrito por um sistema de duas equações que descrevem o processo de colonização de uma ilha por uma espécie de pássaro na ausência e na presença de competição com uma outra espécie nativa. A dinâmica vital da espécie colonizadora é considerada malthusiana até um certo período de tempo, passando depois a Verhulstiana. O estudo incorpora também o efeito Allee na população colonizadora. Usando funções de Liapounov, análise de pontos de equilíbrio e noções de super-solução e sub-solução, o estudo permite traçar conclusões a

respeito das características que fazem de uma determinada espécie um bom colonizador. Em um artigo bem recente, publicado em 1998, Cantrell & Cosner¹³ trabalham com sistemas de equações de reação difusão que descrevem modelos de interação entre duas espécies do tipo presa-predador e competição, e estabelecem resultados qualitativos, via análise de pontos de equilíbrio, para que as espécies persistam no habitat considerado. Em 1996 Cantrell & Cosner^{11,12} já haviam publicado outros dois artigos que abordavam questões de permanência e persistência de populações, utilizando as equações de reação-difusão e análises de existência de pontos de equilíbrio e soluções periódicas, considerando vários casos onde podem estar presentes tanto espécies que competem entre si como presas e predadores.

No capítulo 5, §5.0 já foram feitas diversas citações de trabalhos que abordam sistemas do tipo Lotka-Volterra considerando homogeneidade espacial. Quando se considera o caso mais geral (em que as densidades populacionais variam com as coordenadas espaciais e o tempo) muitos trabalhos abordam as equações de reação-difusão com dinâmicas do tipo Lotka-Volterra (veja por exemplo Cantrell & Cosner¹¹). Um caso bem típico, considerando duas espécies competindo é descrito por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla(D_i u_i) + (a_i - \sum_{j=1}^2 b_{ij} u_j) u_i \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \quad (6.1.2)$$

$$u_i = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

onde a_i , $i = 1, 2$, b_{ij} , $i, j = 1, 2$ são constantes positivas e D_i pode variar com t , u , e $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathcal{R}^m$.

Um artigo de Cosner²³ de 1996 afirma que existe um número razoável de trabalhos matemáticos em dinâmica populacional baseados na teoria qualitativa de persistência, onde se usam modelos precisos com dinâmicas complicadas, e poucos trabalhos que são, ao menos parcialmente, quantitativos em seus tratamentos. Este comentário se não justifica, ao menos valoriza o tipo de tratamento que vem sendo realizado pelo já citado grupo do IMECC-UNICAMP e que constitui a linha principal seguida no presente trabalho. Simulações numéricas de problemas populacionais com dinâmica vital densidade-dependente foram tratados por Sossae⁶² para o caso

intraespecífico. A seguir apresenta-se o mesmo tipo de densidade dependência para o caso de duas espécies, ressaltando-se a não linearidade presente nas equações devida, neste caso, não só a dinâmica vital de Verhulst no caso dos predadores, mas também a presença do termo que descreve a relação interespecífica nas duas equações.

§6.1.1 O problema populacional.

A fim de tratar um sistema do tipo (6.1.2), preservando as notações utilizadas até aqui, considera-se o caso de um sistema presa-predador onde a população de predadores se auto-inibe, gerando assim um sistema de reação-difusão do tipo Lotka-Volterra. As equações (veja o sistema (5.1.1) do capítulo 5) são, então, dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) &= \lambda u - ruv + f(t, x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla v) &= -v v - cv^2 + suv + g(t, x, y), \\ t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

sendo α e β constantes, ou constantes por partes em Ω , e todos os demais coeficientes de (6.1.3) positivos.

As condições de contorno e iniciais são as mesmas definidas no capítulo 5, ou seja:

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ v(0, x, y) &= v_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_0} &= v|_{\Gamma_0} = 0 \\ -\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} &= -\beta \frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} = 0 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

As hipóteses que dão origem às equações (6.1.3) são:

- (i) Na ausência de predação a população de presas cresce malthusianamente; este fato é representado pela presença do termo λu com $\lambda > 0$ em (6.1.3).
- (ii) A ação predatória reduz a taxa de crescimento das presas por um termo proporcional

as densidades populacionais de presas e de predadores; o termo $-ruv$ com $r > 0$ representa este fato em (6.1.3).

(iii) Com a ausência de presas para o seu sustento, a população de predadores diminui malthusianamente; este fato é descrito pelo termo $-vv$ com $v > 0$ em (6.1.3).

(iv) A contribuição da população de presas à taxa de crescimento da população de predadores é dada por sv com $s > 0$ em (6.1.3).

(v) A população de predadores se auto-inibe; a capacidade suporte é dada por v/c , conforme a equação de Verhulst; o termo correspondente na equação (6.1.3) é dado por

$$-v\left(1 + \frac{c}{v}v\right)v.$$

§6.1.2 A formulação fraca.

Enfraquecendo as condições de regularidade das funções u e v , tem-se a formulação fraca do problema dado pelas equações (6.1.3) e (6.1.4):

Dadas $f, g \in L^2((0, T) \times \Omega)$, e $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u, v \in V = \{w \in L^2((0, T]; V) \text{ tal que } \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2((0, T], L^2(\Omega))\}$, tais que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} p \, d\mu + \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla p \, d\mu = \lambda \int_{\Omega} u p \, d\mu - r \int_{\Omega} u v p \, d\mu + \int_{\Omega} f p \, d\mu, \quad (6.1.5)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} p \, d\mu + \beta \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla p \, d\mu = -v \int_{\Omega} v p \, d\mu - c \int_{\Omega} v^2 p + s \int_{\Omega} u v p \, d\mu + \int_{\Omega} g p \, d\mu \quad (6.1.6)$$

$$\int_{\Omega} u(0, x, y) p \, d\mu = \int_{\Omega} u_0(x, y) p \, d\mu, \quad (6.1.7)$$

$$\int_{\Omega} v(0, x, y) p \, d\mu = \int_{\Omega} v_0(x, y) p \, d\mu, \quad (6.1.8)$$

$$\forall p \in V = \{w \in H^1(\Omega) : \text{tr}(w) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}.$$

§6.1.3 O modelo completamente discretizado.

Utilizando, como nos capítulos 4, e 5 anteriores, o método de Galerkin em conjunto com o método dos elementos finitos de segunda ordem, tem-se inicialmente o modelo semi-discreto dado por:

Procurar aproximações u_h e v_h das soluções u e v respectivamente, de tal forma que:

$$u_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (6.1.9)$$

$$v_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N v_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (6.1.10)$$

e satisfaçam as equações (6.1.5) e (6.1.6) respectivamente para toda função $p \in V_h$. V_h é o subespaço de V gerado por $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, onde as φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ são funções quadráticas definidas por partes dentro do domínio discretizado Ω_h .

O espaço vetorial das funções da forma (6.1.9), (6.1.10) é indicado por V_h .

Agora então, o problema dado pelas equações (6.1.5) a (6.1.8) no subespaço V_h de V , (isto é, com u_h e v_h definidas em (6.1.9) e (6.1.10) respectivamente) passa a ser o seguinte:

$$\text{Achar } u_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)) \quad \text{e} \quad v_h(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))$$

suficientemente regulares para que se possam ter:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} p \, d\mu + \alpha \iint_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla p \, d\mu = \lambda \iint_{\Omega} u_h p \, d\mu - r \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \iint_{\Omega} f p \, d\mu, \quad (6.1.11)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial v_h}{\partial t} p \, d\mu + \beta \iint_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla p \, d\mu = & -v \iint_{\Omega} v_h p \, d\mu - c \iint_{\Omega} v_h^2 p \, d\mu + \\ & + s \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \iint_{\Omega} g p \, d\mu, \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

$$\iint_{\Omega} u_h(0, x, y) p \, d\mu = \iint_{\Omega} u_0(x, y) p \, d\mu, \quad (6.1.13)$$

$$\iint_{\Omega} v_h(0, x, y) p \, d\mu = \iint_{\Omega} v_0(x, y) p \, d\mu, \quad (6.1.14)$$

$$\forall p \in V_h$$

Fazendo $p = \varphi_i$, $i=1,\dots,N$, e substituindo em (6.1.11) a (6.1.12), tendo em vista as equações (6.1.9) e (6.1.10), têm-se:

$$\sum_{j=1}^N \frac{du_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \sum_{j=1}^N u_j(t) (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} = \lambda \sum_{j=1}^N u_j(t) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \quad (6.1.15)$$

$$- r \sum_{j=1}^N u_j(t) \sum_{k=1}^N v_k(t) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + (f, \varphi_i)_{\Omega},$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{dv_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \sum_{j=1}^N v_j(t) (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} = -v \sum_{j=1}^N v_j(t) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \quad (6.1.16)$$

$$- c \sum_{j=1}^N v_j(t) \sum_{k=1}^N v_k(t) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + s \sum_{j=1}^N v_j(t) \sum_{k=1}^N u_k(t) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + (g, \varphi_i)_{\Omega},$$

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) u_j(0) = (u_0, \varphi_i), \quad (6.1.17)$$

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) v_j(0) = (v_0, \varphi_i), \quad (6.1.18)$$

$\forall \varphi_i \in B$.

Como $i = 1, 2, \dots, N$, tem-se um sistema de $2N$ equações diferenciais não lineares ordinárias de primeira ordem com as condições iniciais dadas acima.

Utiliza-se o método de Crank-Nicolson para discretizar a variável temporal das equações (6.1.15) a (6.1.18), considerando, como no capítulo 5, as aproximações:

$$u_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_n) + u_j(t_{n+1})}{2} \quad (6.1.19)$$

$$\frac{du_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t}$$

para u , e:

$$v_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{v_j(t_n) + v_j(t_{n+1})}{2} \quad (6.1.20)$$

$$\frac{dv_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{v_j(t_{n+1}) - v_j(t_n)}{\Delta t}$$

para v , todas de ordem de Δt^2 em (6.1.9) e (6.1.10) estimadas em $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$.

Nas equações (6.1.15) e (6.1.16) obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} + u_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} = \\ & = \lambda \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} + u_j^{(n)}}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - r \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{(n+1)} + u_j^{(n)}}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + \Delta t (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{v_j^{(n+1)} - v_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \sum_{j=1}^N \frac{v_j^{(n+1)} + v_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} = \\ & = -v \sum_{j=1}^N \frac{v_j^{(n+1)} + v_j^{(n)}}{2} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - c \sum_{j=1}^N \frac{v_j^{(n+1)} + v_j^{(n)}}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + s \sum_{j=1}^N \frac{v_j^{(n+1)} + v_j^{(n)}}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \Delta t (g^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Isolando os termos em $u_j^{(n+1)}$ e $u_j^{(n)}$ para u , e os termos em $v_j^{(n+1)}$ e $v_j^{(n)}$ para v nas equações acima têm-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[\left(1 - \lambda \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right] u_j^{(n+1)} = \\ & = \sum_{j=1}^N \left[\left(1 + \lambda \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right] u_j^{(n)} + \\ & + \Delta t (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[\left(1 + v \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \right. \\ & \left. + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right] v_j^{(n+1)} = \\ & = \sum_{j=1}^N \left[\left(1 - v \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \right. \\ & \left. - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right] v_j^{(n)} + \\ & + \Delta t (g^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}, \end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, N$ tem-se um sistema de $2N$ equações não lineares a $2N$ incógnitas.

Adotando novamente a notação:

$$U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \dots \\ u_N^{(n+1)} \end{pmatrix}, \text{ e } V^{(n+1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n+1)} \\ v_2^{(n+1)} \\ \dots \\ v_N^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (6.1.21)$$

$$\text{com } U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1}), \text{ e } V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1}), \quad (6.1.22)$$

sendo $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, e $v_j^{(n+1)} \cong v(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, o sistema de equações anterior pode ser escrito na forma:

Dados $U^{(0)}$ e $V^{(0)}$ obter $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$ das sucessivas soluções de

$$A(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n+1)} = B(V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \quad (6.1.23)$$

$$C(U^{(n+1)}, U^{(n)}, V^{(n+1)}, V^{(n)}) V^{(n+1)} = D(U^{(n+1)}, U^{(n)}, V^{(n+1)}, V^{(n)}) V^{(n)} + \Delta t G^{(n+1/2)} \quad (6.1.24)$$

O processo iterativo é obtido mediante as relações de recorrência (6.1.23) e (6.1.24), e é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } U^{(0)} \text{ e } V^{(0)} \in \mathfrak{R}^N \\ \text{obter } U^{(n+1)} \text{ e } V^{(n+1)} \text{ das sucessivas soluções de:} \\ A\left(\frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) U^{(**)} = B\left(\frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \\ C\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}, \frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) V^{(**)} = \\ = D\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}, \frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) V^{(n)} + \Delta t G^{(n+1/2)} \end{array} \right.$$

com $U^{(*)}$ e $V^{(*)}$ dados inicialmente por $U^{(n)}$ e $V^{(n)}$ e, a partir da segunda iteração interna, assumindo os valores de $U^{(**)}$ e $V^{(**)}$. Os valores obtidos na iteração interna final serão $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$.

As matrizes A, B, C, D, F e G neste caso são dadas por:

$$A = (A_{ij}) = \left(\left(1 - \lambda \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right)$$

$$B = (B_{ij}) = \left(\left(1 + \lambda \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right)$$

$$C = (C_{ij}) = \left(\left(1 + v \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \left(c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right)$$

$$D = (D_{ij}) = \left(\left(1 - v \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \left(c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right)$$

$$F = (F_i) = (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}, e$$

$$G = (G_i) = (g^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}.$$

As soluções do sistema não linear dado pelas equações (6.1.23) e (6.1.24) para as espécies u e v, com as condições iniciais dadas pelas equações (6.1.17) e (6.1.18) serão $U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1})$ e $V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1})$, conforme (6.1.21) e (6.1.22).

§6.2 A difusibilidade densidade-dependente.

Este parágrafo aborda uma dinâmica populacional interespecífica levando em consideração que os coeficientes de ambas as espécies dependem das densidades populacionais. Como no capítulo 5 serão considerados sistemas de duas espécies. O presente parágrafo pode ser visto como a generalização do capítulo 4 para o caso onde estão presentes duas espécies.

O trabalho de Cantrell & Cosner¹⁴ analisa a dinâmica de uma população em um meio ambiente fortemente heterogêneo, considerando que esta característica afeta a taxa

intrínseca de reprodução da espécie. Eles sugerem que uma extensão de seu trabalho seria considerar espécies cujas dispersões não sejam modeladas por movimentos puramente brownianos; isto seria justificado, por exemplo, pela presença de ventos ou correntes, ou a presença de gradientes químicos no meio ambiente, que causam agrupamentos populacionais alterando dessa forma a dispersão da população. Através de análises de modelos discutidos em outras referências citadas no artigo, eles sugerem que tais situações poderiam ser modeladas por equações cujo termo difusivo seria escrito como $\nabla \cdot (\alpha(x, t, u) \nabla u)$ onde $\alpha > 0$. Além disso, os autores comentam que tais modelos são muito gerais para serem tratados via critérios de estabilidade de pontos de equilíbrio. A formulação variacional do problema e o uso de Galerkin-Crank-Nicolson talvez possibilite uma análise qualitativa de tais modelos através de ensaios computacionais.

§6.2.0 O problema populacional.

O problema populacional que será tratado envolve a interação entre duas espécies e visa modelar os seguintes fenômenos:

- Dispersão de cada espécie, considerando os coeficientes de difusão densidade dependente, como feito no capítulo 4.
- Processos advectivos ou processos convectivos de cada espécie.
- Decaimento das espécies devido a uma possível hostilidade do meio.
- Dinâmicas vitais de Malthus e/ou de Verhulst, para cada espécie.
- A relação interespecífica.

O sistema de equações que descreve estes fenômenos é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{V} u) + \gamma u &= \lambda u - au^2 - ruv + f(t, x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla v) + \nabla \cdot (\mathbf{W} v) + \varepsilon v &= \nu v - cv^2 - suv + g(t, x, y), \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

$t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$

onde u e v representam as densidades populacionais das duas espécies. Todos os outros coeficientes e funções que aparecem nas equações acima já foram definidos anteriormente em outros capítulos e serão omitidos aqui. Sendo $a \neq 0$ e $c \neq 0$ têm-se crescimentos logísticos para ambas as espécies. A formulação variacional e a indicação do sistema discretizado serão feitas para este caso mais geral.

As condições iniciais e de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ v(0, x, y) &= v_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_0} &= v|_{\Gamma_0} = 0 \\ e \quad -\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} &= -\beta \frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} = 0, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

com Γ_0 e Γ_1 disjuntos formando a fronteira Γ de Ω , e η designando a normal exterior em (x, y) à curva Γ_1 .

Os coeficientes de difusão α e β , além de poder variar com o tempo e nas coordenadas espaciais, dependem das populações u e v respectivamente, e são definidos, em primeira aproximação por:

$$\alpha = \alpha(t, x, y, u) = \alpha_0(t, x, y) + \alpha_1(t, x, y) u \tag{6.2.3}$$

$$\beta = \beta(t, x, y, u) = \beta_0(t, x, y) + \beta_1(t, x, y) v \tag{6.2.4}$$

§6.2.1 A formulação fraca.

Consideram-se o espaço de distribuições $L^2(\Omega)$, e $p \in H^1(\Omega)$ - espaço de Sobolev de ordem um. Multiplicando as equações do sistema (6.2.1) escalarmente por p , têm-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, p \right)_\Omega - (\nabla \cdot (\alpha \nabla u), p)_\Omega + (\nabla \cdot (\mathbf{V}u), p)_\Omega + (\sigma u, p)_\Omega = \\ = -a(u^2, p)_\Omega - r(uv, p)_\Omega + (f, p)_\Omega \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t}, p \right)_{\Omega} - (\nabla \cdot (\beta \nabla v), p)_{\Omega} + (\nabla \cdot (\mathbf{W}v), p)_{\Omega} + (\tau v, p)_{\Omega} = \\ = -c(v^2, p)_{\Omega} - s(uv, p)_{\Omega} + (g, p)_{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$\forall p \in H^1(\Omega)$, onde $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ indica o produto escalar em $L^2(\Omega)$, $\sigma = \lambda - \gamma$ e $\tau = \nu - \varepsilon$.

Substituindo

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}u) = (\nabla \cdot \mathbf{V})u + \mathbf{V} \cdot \nabla u \quad (6.2.7)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{W}v) = (\nabla \cdot \mathbf{W})v + \mathbf{W} \cdot \nabla v \quad (6.2.8)$$

nas equações (6.2.5) e (6.2.6) respectivamente e tendo em vista a definição do produto escalar em $L^2(\Omega)$, repetem-se os mesmos cálculos efetuados nos capítulos precedentes a fim de obter a formulação fraca do problema dado pelas equações (6.2.1) com as condições dadas em (6.2.2). A formulação consiste em:

Dadas $f, g \in L^2((0, T) \times \Omega)$, e $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u, v \in V = \{w \in L^2((0, T]; V) \text{ tal que } \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2((0, T], L^2(\Omega))\}$, tais que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} p \, d\mu + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla u \, p \, d\mu + \int_{\Omega} (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{V}) u \, p \, d\mu = \\ = -a \int_{\Omega} u^2 \, p \, d\mu - r \int_{\Omega} u \, v \, p \, d\mu + \int_{\Omega} f \, p \, d\mu, \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} p \, d\mu + \int_{\Omega} \beta \nabla v \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \nabla v \, p \, d\mu + \int_{\Omega} (\tau + \nabla \cdot \mathbf{W}) v \, p \, d\mu = \\ = -c \int_{\Omega} v^2 \, p \, d\mu - s \int_{\Omega} u \, v \, p \, d\mu + \int_{\Omega} g \, p \, d\mu, \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

$\forall p \in V = \{p \in L^2((0, T]; H^1(\Omega)) : \text{tr}(p) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, e $L^2((0, T]; V)$ denota o espaço das funções quadrado integráveis a Lebesgue de $(0, T]$ em V . Na formulação acima já se fez uso da fórmula de Green nos segundos termos das equações (6.2.5) e (6.2.6).

§6.2.2 O modelo discreto.

Seguindo os mesmos cálculos feitos nos capítulos precedentes, usam-se o método de Galerkin em conjunto com os métodos dos elementos finitos e método de Crank-Nicolson para a construção de soluções aproximadas para u e v .

Procuram-se aproximações

$$u_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)) \text{ e } v_h(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))$$

suficientemente regulares das soluções u e v respectivamente para que se possam ter:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} p \, d\mu + \iint_{\Omega} (\alpha_0 + \alpha_1 u_h) \nabla u_h \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} (\mathbf{V} \cdot \nabla u_h) p \, d\mu + \\ & + \iint_{\Omega} \sigma u_h p \, d\mu = -a \iint_{\Omega} u_h^2 p \, d\mu - r \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \iint_{\Omega} f p \, d\mu, \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial v_h}{\partial t} p \, d\mu + \iint_{\Omega} (\beta_0 + \beta_1 v_h) \nabla v_h \cdot \nabla p \, d\mu + \int_{\Omega} (\mathbf{W} \cdot \nabla v_h) p \, d\mu + \\ & + \iint_{\Omega} \tau v_h p \, d\mu = -c \iint_{\Omega} v_h^2 p \, d\mu - s \iint_{\Omega} u_h v_h p \, d\mu + \iint_{\Omega} g p \, d\mu, \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

$\forall p \in V_h = [B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}]$ subespaço de V de dimensão N , considerando que $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ e tendo em vista as definições (6.2.3) e (6.2.4) dos coeficientes de difusão.

§6.2.3 As discretizações espacial e temporal.

A discretização espacial será feita, como nos capítulos anteriores, com o método dos elementos finitos, sendo o espaço de funções denotado por V_h gerado pelo conjunto B de funções polinomiais de ordem dois, φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, definidas por partes dentro do domínio discretizado Ω_h .

Fazendo $p = \varphi_i$, $i=1, \dots, N$, e utilizando o método de Crank-Nicolson para a discretização temporal tem-se o sistema de $2N$ equações algébricas não linear:

$$\sum_{j=1}^N (u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N (u_j^{(n+1)} + u_j^{(n)}) \left[\begin{aligned} & \alpha_0 (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \\ & + \frac{\alpha_1}{2} \sum_{k=1}^N (u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}) (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + \\ & + \left(\frac{a}{2} \sum_{k=1}^N (u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}) + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^N (v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \end{aligned} \right] =$$

$$= \Delta t (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_\Omega,$$

$$\sum_{j=1}^N (v_j^{(n+1)} - v_j^{(n)}) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N (v_j^{(n+1)} + v_j^{(n)}) \left[\begin{aligned} & \beta_0 (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + (\tau \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \\ & + \frac{\beta_1}{2} \sum_{k=1}^N (v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}) (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + \\ & + \left(\frac{c}{2} \sum_{k=1}^N (v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}) + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^N (u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \end{aligned} \right] =$$

$$= \Delta t (g^{(n+1/2)}, \varphi_i)_\Omega,$$

$$\forall \varphi_i \in \mathbf{B}.$$

Para as condições iniciais:

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega u_j(0) = (u_0, \varphi_i)_\Omega, \quad \forall \varphi_i \in \mathbf{B}.$$

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega v_j(0) = (v_0, \varphi_i)_\Omega, \quad \forall \varphi_i \in \mathbf{B}.$$

Isolando os termos em $u_j^{(n+1)}$ e $u_j^{(n)}$ para u , e os termos em $v_j^{(n+1)}$ e $v_j^{(n)}$ para v nas equações acima têm-se:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \\
& \sum_{j=1}^N + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + \\
& \left. + \left(a \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] u_j^{(n+1)} = \\
= & \sum_{j=1}^N \left[\begin{aligned}
& \left(1 - \sigma \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \\
& - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega - \\
& - \left(a \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] u_j^{(n)} + (6.2.13) \\
& + \Delta t (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_\Omega,
\end{aligned}
\end{aligned}$$

para u, e

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \left(1 + \tau \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \beta_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \\
& \sum_{j=1}^N + \beta_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega + \\
& \left. + \left(c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] v_j^{(n+1)} = \\
= & \sum_{j=1}^N \left[\begin{aligned}
& \left(1 - \tau \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \beta_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega - \\
& - \beta_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_\Omega - \\
& - \left(c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_\Omega \right] v_j^{(n)} + (6.2.14) \\
& + \Delta t (g^{(n+1/2)}, \varphi_i)_\Omega,
\end{aligned}
\end{aligned}$$

para v e, sendo $i = 1, 2, \dots, N$ tem-se um sistema de $2N$ equações não lineares a $2N$ incógnitas.

Adotando novamente a notação:

$$U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \dots \\ u_N^{(n+1)} \end{pmatrix}, \text{ e } V^{(n+1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n+1)} \\ v_2^{(n+1)} \\ \dots \\ v_N^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (6.2.15)$$

$$\text{com } U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1}), \text{ e } V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1}), \quad (6.2.16)$$

sendo $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, e $v_j^{(n+1)} \cong v(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, o sistema de equações (6.2.13), (6.2.14) pode ser escrito na forma:

Dados $U^{(0)}$ e $V^{(0)}$ obter $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$ das sucessivas soluções de

$$A(U^{(n+1)}, U^{(n)}, V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n+1)} = B(U^{(n+1)}, U^{(n)}, V^{(n+1)}, V^{(n)}) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \quad (6.2.17)$$

$$C(U^{(n+1)}, U^{(n)}, V^{(n+1)}, V^{(n)}) V^{(n+1)} = D(U^{(n+1)}, U^{(n)}, V^{(n+1)}, V^{(n)}) V^{(n)} + \Delta t G^{(n+1/2)} \quad (6.2.18)$$

O processo iterativo é obtido mediante as relações de recorrência (6.2.17) e (6.2.18), e é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } U^{(0)} \text{ e } V^{(0)} \in \mathfrak{R}^N \\ \text{obter } U^{(n+1)} \text{ e } V^{(n+1)} \text{ das sucessivas soluções de:} \\ A\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}, \frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) U^{(**)} = \\ = B\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}, \frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)} \\ C\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}, \frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) V^{(**)} = \\ = D\left(\frac{U^{(*)} + U^{(n)}}{2}, U^{(n)}, \frac{V^{(*)} + V^{(n)}}{2}, V^{(n)}\right) V^{(n)} + \Delta t G^{(n+1/2)} \end{array} \right.$$

com $U^{(*)}$ e $V^{(*)}$ dados inicialmente por $U^{(n)}$ e $V^{(n)}$ e, a partir da segunda iteração interna,

assumindo os valores de $U^{(**)}$ e $V^{(**)}$. Os valores obtidos na iteração interna final serão $U^{(n+1)}$ e $V^{(n+1)}$.

As matrizes A, B, C, D, F e G neste caso são dadas por:

$$A = (A_{ij}) = \left(\begin{aligned} & \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + \left(a \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) + r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{aligned} \right)$$

$$B = (B_{ij}) = \left(\begin{aligned} & \left(1 - \sigma \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \alpha_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ & - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \\ & - \left(a \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) - r \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{aligned} \right)$$

$$C = (C_{ij}) = \left(\begin{aligned} & \left(1 + \tau \frac{\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \beta_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + \beta_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{\Omega} + \\ & + \left(c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) + s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{aligned} \right)$$

$$D = (D_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(1 - \tau \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \beta_0 \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} - \\ - \beta_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) (\varphi_k \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\Omega} - \\ - \left(c \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k^{(n+1)} + v_k^{(n)}}{2} \right) - s \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{u_k^{(n+1)} + u_k^{(n)}}{2} \right) \right) (\varphi_k \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \end{pmatrix}$$

$$F = (F_i) = \Delta t (f^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}, e$$

$$G = (G_i) = \Delta t (g^{(n+1/2)}, \varphi_i)_{\Omega}.$$

As soluções do sistema não linear dado pelas equações (6.2.17) e (6.2.18) para as espécies u e v , com as condições iniciais dadas serão $U^{(n+1)} \cong U(t_{n+1})$ e $V^{(n+1)} \cong V(t_{n+1})$, conforme (6.2.15) e (6.2.16).

§6.3 Resultados de simulações numéricas¹.

Serão incluídos no trabalho dois ensaios computacionais² considerando os coeficientes de difusão densidade-dependentes para as duas espécies. A fim de comparar os resultados obtidos nestes ensaios com o caso em que ambas as espécies têm as taxas de difusão constantes, se abordará o problema presa-predador do Capítulo 5; mais especificamente os problemas dos itens § 5.1.5.1 e § 5.2.4.1.

¹ O programa foi desenvolvido para simular todos os casos abordados no Capítulo 5 considerando, além das hipóteses trabalhadas naquele capítulo, a inclusão de dinâmicas vitais de Verhulst e a difusão densidade-dependente.

² O apêndice 4 traz alguns programas desenvolvidos.

Conforme as equações (6.2.1), (6.2.3) e (6.2.4) o problema será descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{V} u) + \gamma u &= \lambda u - au^2 - ruv + f(t, x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla v) + \nabla \cdot (\mathbf{W} v) + \varepsilon v &= \nu v - cv^2 - suv + g(t, x, y), \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

$$t \in (0, T], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

com

$$\alpha = \alpha(t, x, y, u) = \alpha_0(t, x, y) + \alpha_1(t, x, y) u \quad (6.3.2)$$

$$\beta = \beta(t, x, y, u) = \beta_0(t, x, y) + \beta_1(t, x, y) v \quad (6.3.3)$$

As dinâmicas vitais das duas espécies são descritas pelo modelo de Malthus, sendo as taxas de sobrevivência dadas por $\sigma = \lambda - \gamma$ e $\tau = \nu - \varepsilon$, para as presas e predadores respectivamente. Portanto $a = c = 0$ em (6.3.1). Não se consideram presenças de fontes ou sumidouros, ou seja $f = g = 0$ em (6.3.1).

Como no Capítulo 5, os valores dos coeficientes são:

Coefficientes : onde $\sigma = -0.05$, $\tau = -0.05$, $r = 0.01$, $s = -0.01$.

Difusão densidade dependente : Nas equações (6.3.2) e (6.3.3) consideram-se:

$$\alpha_0 = 0.005, \beta_0 = 0.005 \text{ e } \alpha_1 = 0.0005, \beta_1 = 0.0005.$$

O domínio de interesse e os parâmetros da discretização são os mesmos utilizados no Capítulo 5.

As condições de contorno e as condições iniciais são as mesmas consideradas no Capítulo 5, sendo a condição inicial para as presas ilustrada na figura (6.3.1a) e a condição inicial para os predadores ilustrada na figura (6.3.1b) considerando o domínio completo, ou seja, levando em consideração a simetria do problema.

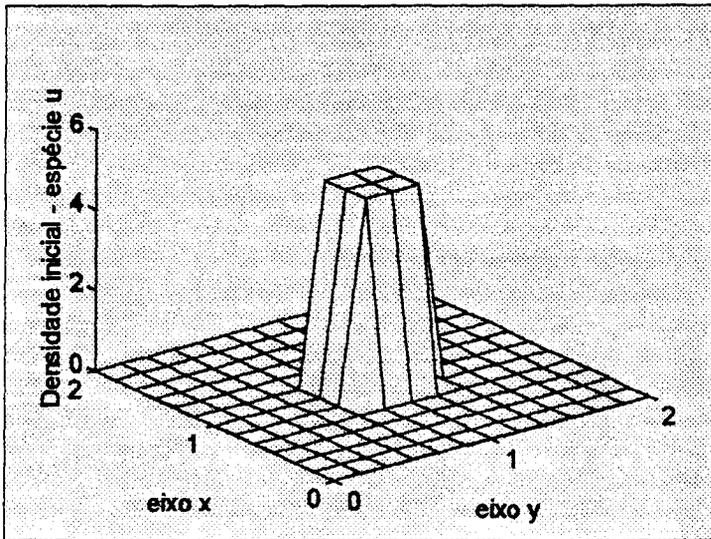


Figura 6.3.1a: Distribuição inicial das presas.

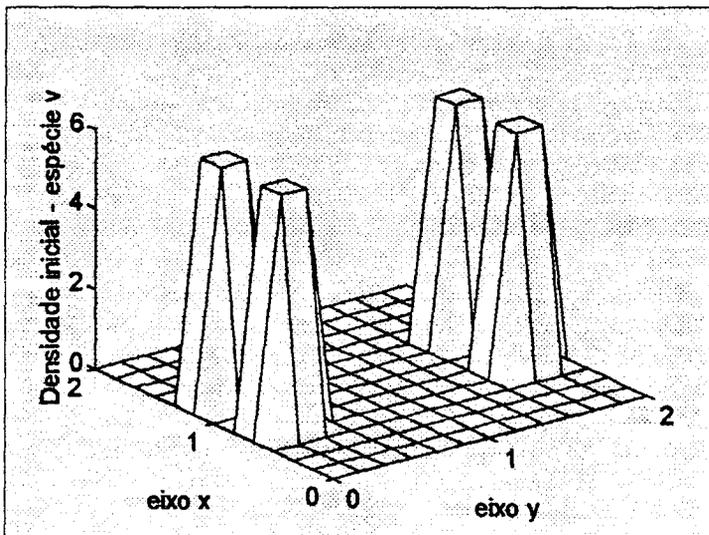


Figura 6.3.1b: Distribuição inicial dos predadores.

Ensaio 1 : Presa-predador : dinâmica de Malthus e sem migração

Neste caso, $V = W = 0$.

As figuras 6.3.2 e 6.3.3 ilustram as densidades populacionais no instante final $T = 25$, após 100 iterações no tempo, indicando a dispersão de ambas as espécies no domínio de interesse.

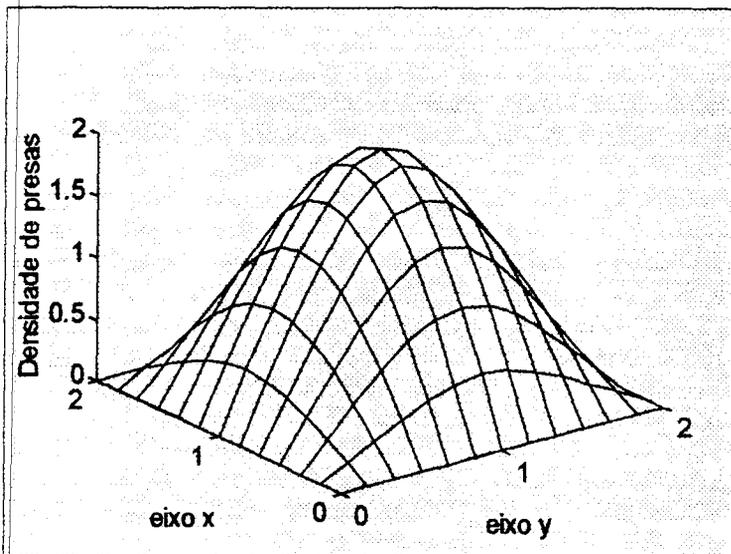


Figura 6.3.2: Distribuição das presas no instante final $T = 25$.

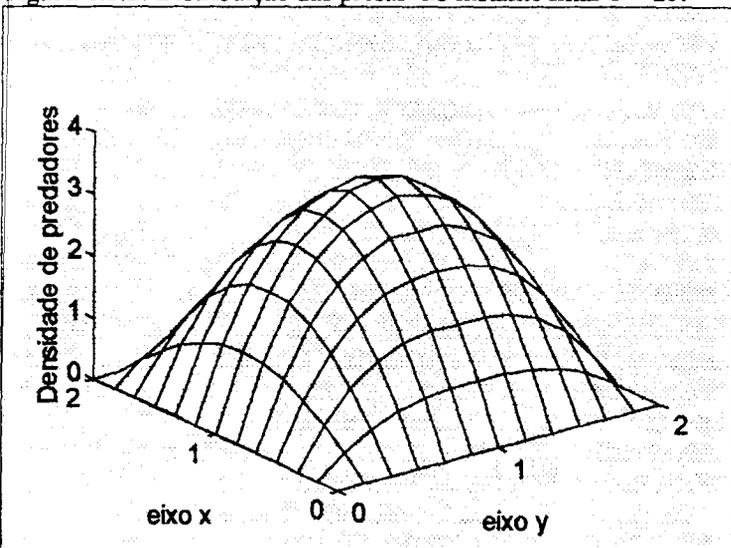


Figura 6.3.3: Distribuição dos predadores no instante final $T = 25$.

Os resultados obtidos no Capítulo 5 no caso da difusão constante estão ilustrados nas figuras 5.1.2 e 5.1.3. Comparando a figura 5.1.2 com a figura 6.3.2, e a figura 5.1.3 com a figura 6.3.3, nota-se que houve uma dispersão maior das espécies considerando os coeficientes de difusão densidade dependentes

A figura 6.3.4 ilustra a dispersão populacional das espécies u (presas) e v (predadores) ao longo do tempo no nó #23 da malha.

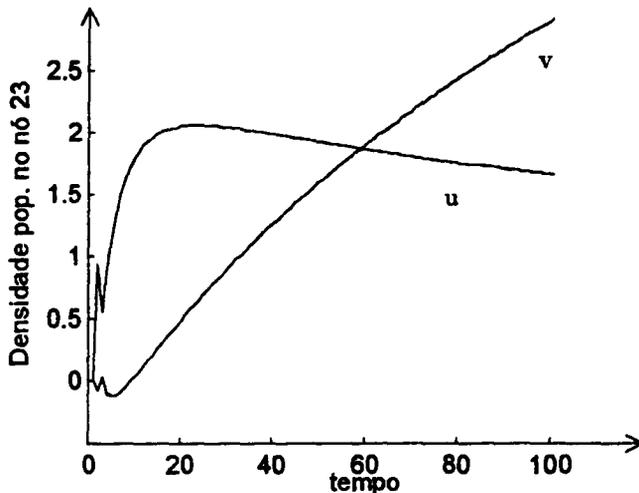


Figura 6.3.4: Variação de presas e predadores no nó #23 com a iteração no tempo.

Comparando com o resultado obtido para o mesmo nó no Capítulo 5, ilustrado na figura 5.1.4, percebe-se claramente que há um aumento mais rápido na densidade populacional neste nó para ambas as espécies.

Ensaio 2 : Presa-predador : dinâmica de Malthus e com migração.

Neste caso, $\mathbf{V} = (0.026, 0)$ e $\mathbf{W} = (0, 0.026)$ como considerado no Capítulo 5.

Coeficientes : onde $\sigma = -0.05$, $\tau = -0.05$, $r = 0.01$, $s = -0.01$.

Difusão densidade dependente : Nas equações (6.3.2) e (6.3.3) consideram-se:

$$\alpha_0 = 0.005, \beta_0 = 0.005 \text{ e } \alpha_1 = 0.0005, \beta_1 = 0.0005.$$

Com as mesmas condições iniciais já ilustradas nas figuras 6.3.1a e 6.3.2b, considera-se agora a presença do campo de velocidades. As definições de \mathbf{V} e \mathbf{W} são as mesmas do item § 5.2.4.1.

As figuras 6.3.5 e 6.3.6 ilustram as densidades populacionais no instante final $T = 25$, após 100 iterações no tempo.

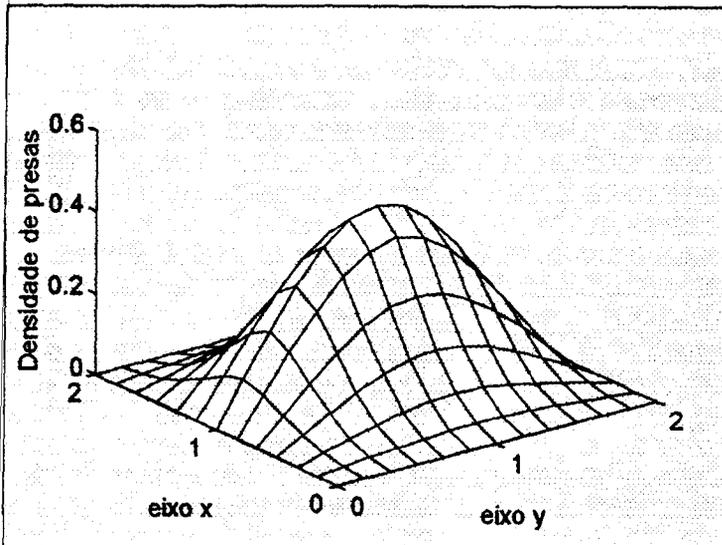


Figura 6.3.5: Distribuição das presas no instante final $T = 25$.

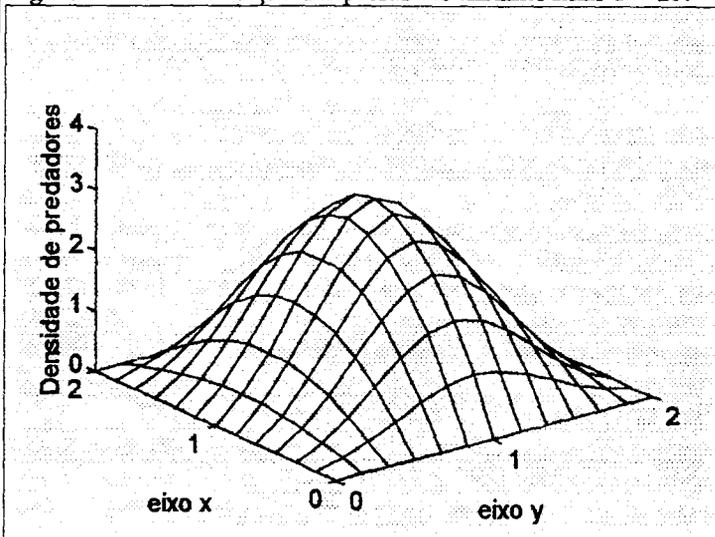


Figura 6.3.6: Distribuição dos predadores no instante final $T = 25$.

Percebem-se alterações de comportamento em comparação com os resultados obtidos no Capítulo 5 e que estão ilustrados nas figuras 5.2.1 e 5.2.2. As espécies se dispersam mais rapidamente no domínio, mas a ação do campo de velocidades ainda é facilmente observada.

A figura 6.3.7 ilustra a dispersão populacional das espécies u (presas) e v (predadores) ao longo do tempo no nó #23 da malha, considerando agora a presença do campo de velocidades. A alteração de comportamento em comparação com o resultado obtido no Capítulo 5, ilustrado na figura 5.2.3 é clara. A difusão densidade-dependente causa também mais oscilações iniciais neste caso pois seu valor (em módulo) é maior.

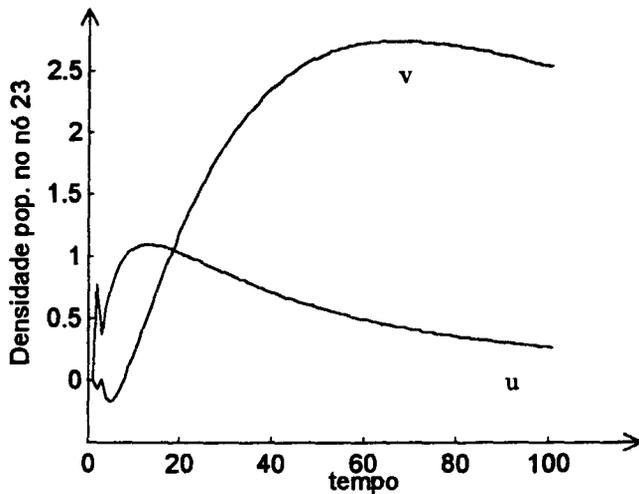


Figura 6.3.7: Variação de presas e predadores no nó #23 com a iteração no tempo.

Qualitativamente se pode “ver” que o transporte por vento ou agentes afeta a população, mas aspectos de parâmetros do problema que dificultam a parte numérica e estão ligados aos parâmetros das discretizações, limitam seus valores impedindo uma melhor visualização em alguns casos. Esta dificuldade é muito maior quando se consideram os problemas populacionais interespecíficos tratados neste capítulo e no anterior. Trabalhar, por exemplo, um sistema presa-predador com e sem velocidades e inferir conclusões é difícil. Também um ou mais termos podem estar variando com o tempo ou com as coordenadas espaciais e, mesmo considerando o caso da difusibilidade constante do Capítulo 5, existem na equação termos não lineares que indicam a relação interespecífica, dificultando o tratamento matemático e também a visualização dos efeitos isolados. No caso teórico é possível ver resultados mas não se ponderam os efeitos isolados, só o todo. Passar do qualitativo para um problema efetivo corresponde a isolar fenômenos: ensaios numéricos podem ser realizados exaustivamente, mudando valores de coeficientes, alterando as condições iniciais, tornando um determinado termo dominante no modelo através de valores mais significativos em relação aos valores presentes, etc, tendo em vista sempre as características próprias do problema que se está modelando.

Considerações finais

Procuramos realizar um trabalho amplo e completo no sentido da modelagem matemática e modelagem numérica, além de tratar problemas reais. Além disso a ampla pesquisa bibliográfica realizada e os resultados de inúmeras simulações numéricas foram incluídos a fim de contribuir com os pesquisadores da área de Biomatemática. O trabalho pretende ser uma fonte de consulta e investigação de várias ponderações incluídas, alertando também sobre os cuidados que devem ser tomados. Neste aspecto as maiores contribuições do trabalho foram as de considerar problemas que apresentam variações sazonais nos decaimentos populacionais devidos a hostilidades do meio ambiente e/ou nas taxas intrínsecas de reprodução das espécies envolvidas, e também nos processos migratórios ou de convecções induzidas e, sobretudo, considerar o caso da difusibilidade densidade-dependente.

A eficiência dos métodos utilizados na obtenção de soluções aproximadas de Equações Diferenciais Parciais do tipo parabólicas demonstrou a adequação dos mesmos no tratamento de problemas populacionais. Embora os valores utilizados na maior parte das simulações numéricas sejam fictícios, os resultados obtidos são confiáveis e conseguem indicar (através dos gráficos) os efeitos produzidos quando são considerados fenômenos específicos em problemas populacionais.

Os resultados numéricos do problema populacional intraespecífico do Capítulo 2, que considerou variações espaciais em α e variações temporais em σ e W , foram apresentados no IV ERMAC-Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional em Nova Friburgo (1996), resultando também em uma orientação de trabalho de Iniciação Científica na UNESP-Campus de Guaratinguetá. O trabalho completo de modelagem, demonstração de existência e unicidade de solução fraca e simulações numéricas foi apresentado no XX CNMAC-Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional em Gramado (1997) e publicado nos Relatórios Internos de Pesquisa da UNICAMP (1998). Uma comparação destes resultados com os obtidos para o problema do Capítulo 4, que considera o caso da difusão densidade-

dependente, pode ser interessante. O caso da difusibilidade densidade dependente em um problema populacional intraespecífico, do Capítulo 4, foi apresentado no XIX CNMAC-Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, em Goiânia (1996). Foram realizadas análises de convergência à posteriori no programa desenvolvido.

Em alguns casos, uma hipótese mais realista sobre a região de interesse e a definição das condições de contorno do modelo matemático podem trazer resultados melhores, embora ainda qualitativos. No Capítulo 3, quando se trata do problema da dispersão do bicudo do algodoeiro, fazem-se alguns comentários a respeito dessas mudanças, sugerindo um afastamento maior da fronteira da região de interesse. É claro que o interesse, neste caso, é a dispersão dentro de Ω e não efeitos de fronteira, e a expectativa é de que quaisquer tipos de condições de contorno dissipativas deveriam trazer, qualitativamente, resultados similares. Na aplicação 1 usa-se um modelo que pode ser considerado simples em comparação com outros modelos citados no trabalho como um todo, mas a etapa de simplificação é uma etapa difícil e indispensável para o estudo que se propôs, e foi justificada sob os pontos de vista da Biologia e da Matemática. A aplicação 2 trata um modelo mais sofisticado e trouxe muitos resultados interessantes, deixando também sugestões para outros trabalhos.

Recentemente, novas informações sobre o comportamento do bicudo do algodoeiro estão sendo exploradas em um trabalho de Iniciação Científica na UNESP-Campus de Guaratinguetá. Além disso, existem possibilidades de orientação de trabalhos de mestrado baseados neste problema. Abordar modelos reais faz com que não só o trabalho seja enriquecido, mas principalmente traz maturidade ao pesquisador nos mais diversos aspectos, e isso constitui etapa muito relevante do projeto.

Durante o XXI CNMAC-Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, em Caxambu (1998) apresentamos alguns dos resultados numéricos obtidos para modelos interespecíficos. A modelagem matemática foi completamente realizada e sugere a orientação de outros trabalhos, como, por exemplo, analisar o problema presa (bicudo) - predador (vespa).

Resultados de inúmeros ensaios numéricos nos levam a concordar com os comentários de diversos pesquisadores sobre os problemas das oscilações iniciais do

Método de Crank-Nicolson. Embora não tenha sido objetivo do trabalho a comparação entre métodos numéricos quanto a sua eficiência, verificou-se que a simples presença da difusão pura e constante em problemas parabólicos pode causar oscilações nos nós da malha que estão próximos a “saltos” na condição inicial, as quais estão associadas à magnitude do principal auto-valor da matriz do sistema. São observações que precisam de embasamento matemático e constituem um campo de pesquisa que traria benefícios para pesquisadores de diversas áreas.

Uma forma de responder a problemas associados com modelos ecológicos é aceitar que existem variações e estocasticidade na natureza, que equilíbrios estáveis são passíveis de não existirem, e que populações podem não estar em equilíbrio mesmo que este equilíbrio exista, que caos e dinâmicas complexas não são patologias de modelos matemáticos, mas fatos da vida, e que tudo isso acima citado pode e deve ser incorporado aos modelos. Pensando certamente desta maneira, alguns matemáticos continuarão tentando descrever os mais diversos tipos de fenômenos biológicos através de seus modelos cada vez mais sofisticados e utilizando frases aparentemente incompreensíveis, principalmente sob o ponto de vista dos profissionais de outras áreas do conhecimento. A linguagem que, a princípio, é traduzida por fórmulas pequenas e “inofensivas”, torna-se à medida que o trabalho avança, lotada de simbologias impressionantes. Até sua própria forma parece traduzir, como uma dança agitada, a alta entropia presente no Universo.

É...a vida é complicada. Juntemo-nos pois a Platão e conclamemos todos os interessados: é preciso explicar os fenômenos!

Apêndice

APÊNDICE 1 -

CONSIDERAÇÕES SOBRE A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO. _____ 163

APÊNDICE 2 -

LIONS⁴⁹ : TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE. _____ 167

APÊNDICE 3 -

SUB-MATRIZES DE RIGIDEZ TRI-DIMENSIONAIS. _____ 172

APÊNDICE 4 -

COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE CONVERGÊNCIA. _____ 177

APÊNDICE 5 -

ALGUNS PROGRAMAS DESENVOLVIDOS. _____ 188

APÊNDICE 1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO.

Introduzir-se-á (Murray⁵⁸) a difusão em um espaço tri-dimensional.

Seja S uma superfície arbitrária encerrando um volume V . A equação da conservação diz que a taxa de variação da quantidade de material - que pode ser partículas, substâncias químicas, população de uma determinada espécie, etc - em V é igual à taxa de fluxo do material através de S para dentro de V mais a quantidade de material gerada em V . Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c(t, \mathbf{x}) dv = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_V f dv, \quad (\text{A1.1})$$

onde \mathbf{J} é o fluxo do material e f , que representa uma fonte (ou sumidouro) do material, pode ser função de c , t e \mathbf{x} .

Aplicando-se o teorema da divergência à integral de superfície na equação (A1.1) e assumindo-se $c(t, \mathbf{x})$ contínua, tem-se que:

$$\int_V \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - f(c, t, \mathbf{x}) \right) dv = 0. \quad (\text{A1.2})$$

Como o volume V é arbitrário, o integrando deve ser nulo, e, portanto, a equação da conservação para c é:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - f(c, t, \mathbf{x}) = 0, \quad (\text{A1.3})$$

onde o termo $\nabla \cdot \mathbf{J}$ indica o divergente de \mathbf{J} .

Encontra-se uma rápida dedução da equação da conservação unidimensional, em Edelstein-Keshet³⁰, dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} - f(c, t, \mathbf{x}) = 0. \quad (\text{A1.4})$$

Pode-se relacionar a idéia de fluxo a funções que descrevem distribuições espaciais. Partículas submersas em um fluido em movimento, por exemplo, adquirem também a velocidade do fluido e apresentam aí um movimento coletivo; tal distribuição espacial é chamada de **convecção**.

Se $v(x,y,z)$ é a velocidade do fluido, pode-se demonstrar facilmente que este fluxo das partículas será dado por:

$$\mathbf{J} = c\mathbf{v} \quad (\text{A1.5})$$

onde todas as quantidades podem variar com o tempo e o espaço.

Substituindo a equação (A1.5) na equação (A1.3), tem-se a equação do transporte:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) - f(c, t, \mathbf{x}) = 0. \quad (\text{A1.6})$$

Seja ψ uma função representando uma fonte de atração para as partículas. Então existe uma força atrativa que arrasta as partículas em direção ao ponto, ou local, de maior atração. A direção e a magnitude do movimento são determinados pelo gradiente de ψ (ou proporcional ao gradiente de ψ); o fluxo naquela direção é dado por:

$$\mathbf{J} = c\alpha \nabla \psi \quad (\text{A1.7})$$

Substituindo (A1.7) na equação (A1.3), resulta a seguinte equação para a atração exercida por ψ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\alpha \nabla \psi) - f(c, t, \mathbf{x}) = 0. \quad (\text{A1.8})$$

A forma mais utilizada em aplicações biológicas para o fluxo \mathbf{J} é conhecida como Lei de Fick (Bassanezi e Ferreira Jr.⁶) e diz que o fluxo devido a um movimento aleatório é aproximadamente proporcional ao gradiente local da concentração do material; ou seja:

$$\mathbf{J} = -D\nabla c, \quad (\text{A1.9})$$

onde a constante de proporcionalidade D é o coeficiente de difusão. Substituindo-se a equação (A1.9) em (A1.3) tem-se:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (D \nabla c) - f(c, t, \mathbf{x}) = 0, \quad (\text{A1.10})$$

onde D pode ser função de c , t e \mathbf{x} .

Considerando que não haja fontes ou sumidouros no volume V , a equação unidimensional é dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c(t, x)}{\partial x} \right). \quad (\text{A1.11})$$

Se D é uma constante, ou seja não depende de c ou de x , então tem-se a versão mais conhecida (Bassanezi e Ferreira Jr.⁶) da equação da difusão unidimensional:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(t, x)}{\partial x^2}. \quad (\text{A1.12})$$

Supondo que é liberada uma quantidade Q de partículas por unidade de área em $x=0$ no instante $t=0$, ou seja:

$$c(0, x) = Q \delta(x) \quad (\text{A1.13})$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac, então tem-se o problema de Cauchy dado por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(t, x)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathfrak{R}, t > 0, \quad (\text{A1.14})$$

$$c(0, x) = Q \delta(x), \quad x \in \mathfrak{R}, t = 0,$$

cuja solução é dada por:

$$c(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, t > 0, \quad (\text{A1.15})$$

e está representada na figura A1.1.

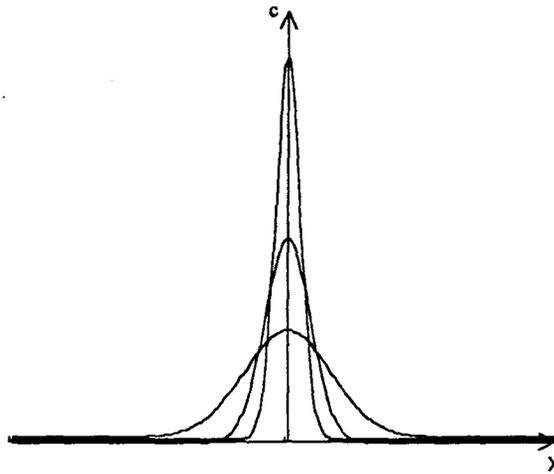


Figura A1.1 Distribuição de partículas difundindo-se de acordo com a equação da difusão unidimensional.

APÊNDICE 2 - LIONS⁴⁹ : TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE.

Consideram-se dois espaços de Hilbert V e H (no presente texto $H = L^2(\Omega)$) separáveis, com $V \subset H$ algebricamente e topologicamente, ou seja, a imersão de V em H é contínua.

Dada uma família de formas sesquilineares contínuas sobre V , seja $a(t;u,v)$, dependente do parâmetro t ; suponha que $t \in [0,T]$ para começar. Faz-se a hipótese seguinte:

$$|a(t;u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad (\text{A2.1})$$

M uma constante independente de t , u e v .

Nota: Supõe-se que para cada t , $a(t;u,v)$ é contínua sobre $V \times V$, e que para todo $u, v \in V$, $a(t;u,v)$ é limitado. Neste caso, existe uma constante M tal que $|a(t;u,v)| \leq M \|u\| \|v\|$. Com efeito, como $a(t;u,v)$ é contínua sobre $V \times V$, pode-se escrever $a(t;u,v) = (A(t)u,v)$ donde $A(t) \in \mathcal{L}(V;V)$ (espaço dos operadores lineares contínuos de V sobre ele mesmo). Então, após a hipótese, $|(A(t)u,v)|$ é limitado para todo $u, v \in V$, portanto $A(t)$ é limitado em norma dentro de $\mathcal{L}(V;V)$, de onde o resultado.

Consideram-se os dois problemas seguintes:

Problema 1.1: Achar uma função $u \in L^2(-\infty, T; V)$, com

$$u \text{ é nula (q.s.) para } t < 0 \quad (\text{A2.2})$$

$$a(t;u,v) + \frac{d}{dt}(u,v) = (f,v) + (u_0,v)\delta, \text{ para todo } u \in V \quad (\text{A2.3})$$

onde f é dado em $L^2(-\infty, T; H)$, nula para $t < 0$, u_0 é dado em H , δ é a massa de Dirac na origem.

Precisão do resultado de (A2.3): Prolonga-se $a(t;u,v)$ (definido à priori sómente em $(0,T)$) para $t < 0$ de uma forma qualquer, por exemplo 0. Então $a(t;u,v)$ designa a função

$t \rightarrow a(t;u,v)$. Pode-se escrever $a(t;u,v) = (A(t)u, v) = (u, A^*(t)v)$, donde $A(t) \in \mathcal{L}(V;V)$; a função $t \rightarrow A(t)u(t)$ para u dado em $L^2(0,T;V)$ é mensurável à valores em V , já que V é separável e é escalarmente mensurável (com efeito, para u fixo em V , $((A(t)u(t),v)) = ((u(t),A^*(t)v))$ é mensurável, pois $A^*(t)v$ é escalarmente - e também fortemente - mensurável, por hipótese); como, por outro lado $\|A(t)u(t)\| \leq M\|u(t)\|$, $A(t)$ está em $L^2(0,T;V)$, e $a(t;u,v)$ está em $L^2(0,T)$. Enfim, $\frac{d}{dt}(u,v)$ designa a derivada, no sentido das distribuições, sobre $] -\infty, T[$, da função $t \rightarrow (u(t), v)$.

Problema 1.1': Achar uma função $u \in L^2(-\infty, T; V)$, com

$$\int_0^T \{a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))\} dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi(0)) \quad (A2.4)$$

para toda função φ verificando:

$$\varphi \in L^2(0, T; V), \quad \varphi' \in L^2(0, T; H), \quad \varphi(T) = 0 \quad (A2.5)$$

Tem-se, então o resultado:

Lema 1.1: Os problemas 1.1 e 1.1' são equivalentes.

Teorema 1.1: Suponha que $a(t;u,v)$ verifica (A2.1) mais a hipótese seguinte:

$$\text{existe } \varepsilon \text{ tal que } \operatorname{Re}(a(t;u,v)) + \varepsilon \|v\|^2 \geq \rho \|v\|^2, \quad \rho > 0, \quad v \in V. \quad (A2.6)$$

Sob estas condições o problema (1.1) admite uma única solução u .

A aplicação $\{f, u_0\} \rightarrow u$ é contínua de $L^2(-\infty, T; H) \times H$ sobre $L^2(-\infty, T; V)$.

Operadores Parabólicos de segunda ordem em x.

Sobre Ω aberto do \mathfrak{R}^n considere-se os espaços $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, depois V com:

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) \quad (\text{A2.7})$$

V sendo um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$, e as igualdades sendo admitidas em (A2.7).

Toma-se $H = L^2(\Omega)$ e $a(t;u,v)$ é dado por:

$$\begin{aligned} a(t;u,v) = & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x,t) D_j \bar{v}(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i(x,t) (D_i u(x)) \bar{v}(x) dx + \\ & + \int_{\Omega} a_0(x,t) u(x) \bar{v}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

onde a_{ij} , a_i e a_0 estão em $L^\infty(\Omega \times (0,T)) = L^\infty(Q_T)$, sendo $Q_T = \Omega \times]0,T[$. (A2.9)

Faz-se a hipótese seguinte:

$$\text{Re} \left(\sum a_{ij}(t,x) \xi_j \bar{\xi}_i \right) \geq \rho \left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 \right), \quad \rho > 0, \xi_i \in \mathbf{C}, \quad (\text{A2.10})$$

quase sempre em Q_T .

Está-se, neste caso, dentro das condições de aplicação do teorema 1.1.

Portanto, sob as hipóteses (A2.9) e (A2.10), sendo dada $f \in L^2(Q_T)$, e sendo dado $u_0 \in L^2(\Omega)$, existe uma função u e uma só verificando:

$$u \in L^2(-\infty, T; V), \text{ nula para } t < 0 \quad (\text{A2.11})$$

e

$$a(t;u(t),v) + D_t(u(t),v) = (f(t),v) + (u_0,v)\delta \text{ para toda } v \in V \quad (\text{A2.12})$$

Além disso, após eventuais modificações sobre um conjunto de medida nula, $t \rightarrow u(t)$ é contínua de $\{0, T\}$ em H , e $u(0) = u_0$.

Interpreta-se agora o problema assim resolvido. Introdz-se o operador diferencial:

$$A(t, x, \frac{\partial}{\partial x}) = A(t) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(t, x) \quad (A2.13)$$

Neste caso, (A2.12) acarreta em particular:

$$A(t, x, \frac{\partial}{\partial x})u + \frac{\partial}{\partial t}u = f, \text{ em } Q_T \quad (A2.14)$$

A condição (A2.11) implica que $u(x, t)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}u(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ estão em $L^2(Q_T)$, e além

disso acarreta a dependência (quase sempre) de $u(t) : x \rightarrow u(t, x)$, ao espaço V (isto não é uma condição suplementar se $V = H^1(\Omega)$ e somente neste caso).

Em seguida, se v está em V , deduz-se (formalmente) de (A2.14):

$$\int_{\Omega} \left(A \left(t, x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \frac{\partial}{\partial t} u \right) \overline{v(x)} \, dx = \int_{\Omega} f(t, x) \overline{v(x)} \, dx$$

e por (A2.12) isto deve ser igual a:

$$a(t; u, v) + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right) \overline{v} \, dx,$$

portanto, em resumo:

- 1) $u = u(t, x)$ é solução da equação (A2.14);
- 2) u verifica a condição inicial : $u(0, x) = u_0$;
- 3) u verifica as condições aos limites, que são de duas maneiras:
 - (i) $u(t) \in V$ quase sempre;

$$(ii) \int_{\Omega} \left(A \left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} \right) \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} = \mathbf{a}(t; \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{v} \in V.$$

Pode-se substituir a condição 3)(ii), pela utilização da fórmula de Green; sendo

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{A(t)}} = \sum a_{ij}(t, \mathbf{x}) \cos(n, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (A2.15)$$

ou designando a norma exterior em \mathbf{x} a Γ , fronteira de Ω , obtém-se a condição equivalente a 3)(ii):

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu_{A(t)}} \overline{\mathbf{v}} \, d\gamma = 0 \text{ para toda } \mathbf{v} \in V. \quad (A2.16)$$

ou designando o elemento de comprimento de arco de Γ .

APÊNDICE 3 - SUB-MATRIZES DE RIGIDEZ TRI-DIMENSIONAIS.

Nas discretizações dos problemas que são tratados nos capítulos 5, 6, 7 e 8, aparecem diversos produtos internos envolvendo as funções de base quadráticas que definem os elementos finitos de segunda ordem. Estes produtos são utilizados para montar as matrizes de rigidez que definem os sistemas lineares e não lineares destes capítulos.

Para montar as matrizes A e B das equações (4.1.21) e (4.1.22) do capítulo 4, além dos produtos $(\varphi_j, \varphi_i)_\Omega$, $(\nabla\varphi_j \parallel \nabla\varphi_i)_\Omega$ e $(\mathbf{W} \cdot \nabla\varphi_j, \varphi_i)_\Omega$ definidos em cada triângulo padrão (Sossae⁶², Apêndice C) também são necessárias as sub-matrizes tridimensionais definidas através dos produtos $(\varphi_k \nabla\varphi_j \parallel \nabla\varphi_i)_\Omega$. No capítulo 5 (veja páginas 109 e 117), no capítulo 6 (veja páginas 129 e 136) e no capítulo 7 (veja página 151), as matrizes A, B, C e D envolvem os cálculos dos produtos $(\varphi_j, \varphi_i)_\Omega$, $(\nabla\varphi_j \parallel \nabla\varphi_i)_\Omega$, $(\mathbf{W} \cdot \nabla\varphi_j, \varphi_i)_\Omega$ e $(\varphi_k \nabla\varphi_j, \varphi_i)_\Omega$ sendo que todos estes produtos podem ser encontrados em Sossae⁶². No capítulo 8 todos os produtos mencionados são utilizados nos programas que determinam as soluções numéricas aproximadas.

De todos estes produtos os únicos que não são calculados em Sossae⁶² são os produtos $(\varphi_k \nabla\varphi_j \parallel \nabla\varphi_i)_\Omega$, que devem ser calculados em cada triângulo padrão usando então:

$$m_{ijk} = \iint_T \varphi_k (\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i) d\mu = \iint_T \left(\varphi_k \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + \varphi_k \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} \right) dx dy$$

onde T indica o triângulo padrão e i, j, k = 1, 2, ..., 6.

Como as matrizes são simétricas os resultados coincidem independente do tipo de triângulo padrão utilizado (veja Sossae⁶² página 43).

Seguindo as nomenclaturas usadas nos programas, as sub-matrizes de rigidez são SMTRI1, SMTRI2, ..., SMTRI6 e são definidas nos sub-programas SUMTRI1, SUMTRI2, ..., SUMTRI6; são elas:

Para k = 1: SMTRI1 =

$$\begin{bmatrix}
 \frac{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{15\Delta x\Delta y} & \frac{\Delta x}{30\Delta y} - \frac{\Delta y}{6\Delta x} & \frac{\Delta y}{30\Delta x} & -\frac{\Delta x}{30\Delta y} - \frac{\Delta y}{30\Delta x} & \frac{\Delta x}{30\Delta y} & -\frac{\Delta x}{6\Delta y} + \frac{\Delta y}{30\Delta x} \\
 \frac{\Delta x}{30\Delta y} - \frac{\Delta y}{6\Delta x} & \frac{-4\Delta x}{45\Delta y} + \frac{8\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta y}{90\Delta x} & \frac{4\Delta x}{45\Delta y} + \frac{2\Delta y}{45\Delta x} & \frac{\Delta x}{90\Delta y} & \frac{-2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} \\
 \frac{\Delta y}{30\Delta x} & \frac{-\Delta y}{90\Delta x} & \frac{-\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta y}{90\Delta x} & 0 & \frac{\Delta y}{90\Delta x} \\
 -\frac{\Delta x}{30\Delta y} - \frac{\Delta y}{30\Delta x} & \frac{4\Delta x}{45\Delta y} + \frac{2\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta y}{90\Delta x} & \frac{-4(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} & \frac{-\Delta x}{90\Delta y} & \frac{2\Delta x}{45\Delta y} + \frac{4\Delta y}{45\Delta x} \\
 \frac{\Delta x}{30\Delta y} & \frac{\Delta x}{90\Delta y} & 0 & \frac{-\Delta x}{90\Delta y} & \frac{-\Delta x}{45\Delta y} & \frac{-\Delta x}{90\Delta y} \\
 -\frac{\Delta x}{6\Delta y} + \frac{\Delta y}{30\Delta x} & \frac{-2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} & \frac{\Delta y}{90\Delta x} & \frac{2\Delta x}{45\Delta y} + \frac{4\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta x}{90\Delta y} & \frac{8\Delta x}{45\Delta y} - \frac{4\Delta y}{45\Delta x}
 \end{bmatrix}$$

Nas demais matrizes serão omitidos os elementos do triângulo inferior.

Para k = 2: SMTRI2 =

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{6\Delta x\Delta y} & \frac{4\Delta x}{45\Delta y} - \frac{8\Delta y}{45\Delta x} & \frac{\Delta y}{90\Delta x} & \frac{-4\Delta x}{45\Delta y} - \frac{2\Delta y}{45\Delta x} & \frac{\Delta x}{18\Delta y} & \frac{-2\Delta x}{9\Delta y} + \frac{2\Delta y}{45\Delta x} \\
 & \frac{8\Delta x}{15\Delta y} + \frac{16\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-8\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-8\Delta x}{15\Delta y} & \frac{4\Delta x}{45\Delta y} & \frac{-8\Delta x}{45\Delta y} \\
 & & \frac{\Delta y}{6\Delta x} & \frac{2\Delta y}{45\Delta x} & 0 & \frac{-2\Delta y}{45\Delta x} \\
 & & & \frac{8\Delta x}{15\Delta y} + \frac{8\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-4\Delta x}{45\Delta y} & \frac{8(\Delta x^2 - \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} \\
 & & & & \frac{7\Delta x}{90\Delta y} & \frac{-2\Delta x}{15\Delta y} \\
 & & & & & \frac{8(2\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y}
 \end{array} \right]$$

Para k = 3: SMTRI3 =

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{-(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} & \frac{-\Delta x}{15\Delta y} - \frac{\Delta y}{90\Delta x} & \frac{\Delta y}{30\Delta x} & \frac{\Delta x}{15\Delta y} + \frac{\Delta y}{90\Delta x} & \frac{-\Delta x}{45\Delta y} & \frac{2\Delta x}{45\Delta y} - \frac{\Delta y}{90\Delta x} \\
 & \frac{4\Delta x}{15\Delta y} + \frac{8\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta y}{6\Delta x} & \frac{-4\Delta x}{15\Delta y} - \frac{2\Delta y}{45\Delta x} & \frac{\Delta x}{15\Delta y} & \frac{2\Delta y}{45\Delta x} \\
 & & \frac{2\Delta y}{15\Delta x} & \frac{\Delta y}{30\Delta x} & 0 & \frac{-\Delta y}{30\Delta x} \\
 & & & \frac{4\Delta x}{15\Delta y} - \frac{4\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta x}{15\Delta y} & \frac{4\Delta y}{45\Delta x} \\
 & & & & \frac{-\Delta x}{45\Delta y} & \frac{2\Delta x}{45\Delta y} \\
 & & & & & \frac{-4(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y}
 \end{array} \right]$$

Para k = 4: SMTRI4 =

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{7(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{90\Delta x\Delta y} & \frac{-4\Delta x}{45\Delta y} - \frac{2\Delta y}{15\Delta x} & \frac{\Delta y}{18\Delta x} & \frac{4(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} & \frac{\Delta x}{18\Delta y} & \frac{-2\Delta x}{15\Delta y} - \frac{4\Delta y}{45\Delta x} \\
 & \frac{8\Delta x}{15\Delta y} + \frac{16\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-2\Delta y}{9\Delta x} & \frac{-8\Delta x}{15\Delta y} - \frac{8\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-4\Delta x}{45\Delta y} & \frac{8(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} \\
 & & \frac{\Delta y}{6\Delta x} & \frac{4\Delta y}{45\Delta x} & 0 & \frac{-4\Delta y}{45\Delta x} \\
 & & & \frac{8(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{15\Delta x\Delta y} & \frac{4\Delta x}{45\Delta y} & \frac{-8\Delta x}{45\Delta y} - \frac{8\Delta y}{15\Delta x} \\
 & & & & \frac{\Delta x}{6\Delta y} & \frac{-2\Delta x}{9\Delta y} \\
 & & & & & \frac{8(2\Delta x^2 + 3\Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y}
 \end{array} \right]$$

Para k = 5: SMTRI5 =

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{-(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} & \frac{-\Delta x}{90\Delta y} + \frac{2\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta y}{45\Delta x} & \frac{\Delta x}{90\Delta y} + \frac{\Delta y}{15\Delta x} & \frac{\Delta x}{30\Delta y} & \frac{-\Delta x}{90\Delta y} - \frac{\Delta y}{15\Delta x} \\
 & \frac{-4(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} & \frac{2\Delta y}{45\Delta x} & \frac{4\Delta x}{45\Delta y} & \frac{-\Delta x}{30\Delta y} & \frac{2\Delta x}{45\Delta y} \\
 & & \frac{-\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-\Delta y}{15\Delta x} & 0 & \frac{\Delta y}{15\Delta x} \\
 & & & \frac{-4\Delta x}{45\Delta y} + \frac{4\Delta y}{15\Delta x} & \frac{\Delta x}{30\Delta y} & \frac{-2\Delta x}{45\Delta y} - \frac{4\Delta y}{15\Delta x} \\
 & & & & \frac{2\Delta x}{15\Delta y} & \frac{-\Delta x}{6\Delta y} \\
 & & & & & \frac{4(2\Delta x^2 + 3\Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y}
 \end{array} \right]$$

Para k = 6: SMTRI6 =

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{6\Delta x\Delta y} & \frac{2\Delta x}{45\Delta y} - \frac{2\Delta y}{9\Delta x} & \frac{\Delta y}{18\Delta x} & \frac{-2\Delta x}{45\Delta y} - \frac{4\Delta y}{45\Delta x} & \frac{\Delta x}{90\Delta y} & \frac{-8\Delta x}{45\Delta y} + \frac{4\Delta y}{45\Delta x} \\
 & \frac{8\Delta x}{45\Delta y} + \frac{16\Delta y}{45\Delta x} & \frac{-2\Delta y}{15\Delta x} & \frac{8(-\Delta x^2 + \Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y} & \frac{-2\Delta x}{45\Delta y} & \frac{-8\Delta y}{45\Delta x} \\
 & & \frac{7\Delta y}{90\Delta x} & \frac{-4\Delta y}{45\Delta x} & 0 & \frac{4\Delta y}{45\Delta x} \\
 & & & \frac{8\Delta x}{45\Delta y} + \frac{8\Delta y}{15\Delta x} & \frac{2\Delta x}{45\Delta y} & \frac{-8\Delta y}{15\Delta x} \\
 & & & & \frac{\Delta x}{6\Delta y} & \frac{-8\Delta x}{45\Delta y} \\
 & & & & & \frac{8(2\Delta x^2 + 3\Delta y^2)}{45\Delta x\Delta y}
 \end{array} \right]$$

APÊNDICE 4 - COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE CONVERGÊNCIA.

Questões de existência, unicidade de solução e convergência de métodos numéricos (quando aplicados) estão presentes em qualquer problema que envolva equações diferenciais com condições iniciais e de contorno. Neste trabalho são abordados problemas populacionais que são descritos por equações diferenciais parciais, ou sistemas de equações parciais, do tipo parabólicas.

A idéia básica de qualquer método numérico aplicado a uma equação diferencial cuja solução analítica esteja fora de alcance operacional é, de algum modo, discretizar o problema contínuo dado, a fim de obter uma equação ou um sistema de equações com um número finito de incógnitas. O método de elementos finitos começa com uma reformulação da equação diferencial ou sistema dado tornando-o um problema variacional equivalente. No caso do Capítulo 2 a equação diferencial mais geral adotada com as condições inicial e de contorno, e que constitui a formulação clássica do problema tratado é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + \nabla \cdot (\mathbf{W}u) + \sigma u = f(t, \mathbf{x}, y), \quad (\mathbf{x}, y) \in \Omega, t \in (0, T], \quad (\text{A4.0a})$$

$$u(0, \mathbf{x}, y) = u_0(\mathbf{x}, y), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u(t, \mathbf{x}, y) = 0, \quad (\mathbf{x}, y) \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \text{ e} \quad (\text{A4.0b})$$

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \mathbf{x}, y) = 0, \quad (\mathbf{x}, y) \in \Gamma_1, \quad t \in (0, T],$$

onde Ω é um domínio no \mathfrak{R}^2 e $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$.

A formulação variacional equivalente é a seguinte:

Dadas as funções $f \in L^2((0, T] \times \Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u \in V = \{v \in L^2((0, T]; V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2((0, T]; L^2(\Omega))\}$ tal que:

$$a(t; u, v) + D_t(u, v) = L_f(v), \quad \forall v \in V, \quad (\text{A4.1})$$

onde a forma bilinear a é dada por:

$$a(t; u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} W_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mu + \int_{\Omega} \sigma u v d\mu,$$

a forma linear L é dada por:

$$L_f(v) = (f, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v d\mu, \text{ e}$$

o operador D_t é o seguinte:

$$D_t(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu,$$

e o conjunto V é definido por : $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$.

Uma solução de (A4.0) é também solução de (A4.1) já que o problema variacional foi deduzido da formulação clássica enfraquecendo-se as condições de regularidade de u .

Proposição 1: Se u é solução de (A4.1) então u é solução de (A4.0).

Demonstração: Se u é solução de (A4.1), então

$$(u_t, v) + (\alpha \nabla u, \nabla v) + (W \cdot \nabla u, v) + (\sigma u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (\text{A4.2})$$

Sendo $V = \{v \in H^2(\Omega) \mid \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$,

e, supondo que $u \in V = \{v \in L^2((0, T]; V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2((0, T]; L^2(\Omega))\}$, pela fórmula de Green

tem-se que:

$$(\alpha \nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v d\mu = \int_{\Gamma} \alpha v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds - \int_{\Omega} \alpha v \Delta u d\mu \quad \forall v \in V.$$

$$\text{Mas } \int_{\Gamma} \alpha v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \int_{\Gamma_0} \alpha v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds + \int_{\Gamma_1} \alpha v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = 0, \text{ pois } v|_{\Gamma_0} = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} = 0,$$

logo, tem-se que:

$$(\alpha \nabla u, \nabla v) = - \int_{\Omega} \alpha v \Delta u \, dx dy = -(\alpha \Delta u, v) \quad \forall v \in V. \quad (A4.3)$$

Substituir (A4.3) em (A4.2) implica que:

$$(u_t, v) - (\alpha \Delta u, v) + (\mathbf{W} \cdot \nabla u, v) + (\sigma u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

ou ainda:

$$(u_t - \alpha \Delta u + \mathbf{W} \cdot \nabla u + \sigma u - f, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

e então, do Lema de Du Bois Raymond, vem:

Dadas $u \in V$ e $f \in L^2(\Omega)$

$$u_t - \alpha \Delta u + \mathbf{W} \cdot \nabla u + \sigma u - f = 0$$

e, portanto, se $u \in C^2(\Omega)$, $u \in C^1(0, T]$, e $f \in C^1(\Omega)$ tem-se que:

$$u_t - \alpha \Delta u + \mathbf{W} \cdot \nabla u + \sigma u = f$$

com $u(t, x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma_0$, $t \in (0, T]$, e $-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma_1$, $t \in (0, T]$,

ou seja, u é solução de (A4.1).

Para a condição inicial a demonstração é trivial e segue diretamente do Lema de Du Bois Raymond.

Para o problema (A4.1), com condição de contorno de Dirichlet, $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma\}$ e $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$, obtém-se uma estimativa de estabilidade, através da demonstração de que, nestas condições, a forma bilinear $a(t; u, v)$ é V -elíptica.

Inicialmente prova-se a seguinte proposição:

Proposição 2: Se $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ e $u|_{\Gamma} = 0$, então a forma bilinear $a(t; u, v)$ é V -elíptica.

Demonstração: Sendo $a(t; u, v)$ definida em (A4.1) com $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ tem-se que:

$$a(t; v, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \alpha(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} W_i(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} v d\mu + \int_{\Omega} \sigma(t, x) v^2 d\mu, \forall v \in V \quad (\text{A4.4})$$

para $n = 2$; analogamente prova-se o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Mas, $\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} W_i(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} v d\mu = 0$. De fato, da fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} u \Delta w d\mu = \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w d\mu = \int_{\Gamma} u (\nabla w \cdot \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w d\mu,$$

sendo $u = W_i v$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i v \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu &= \int_{\Gamma} W_i v (v n_i) ds - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (W_i v) v d\mu = \\ &= \int_{\Gamma} W_i v^2 n_i ds - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_i} v^2 + W_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v \right) d\mu \end{aligned}$$

Aplicando a somatória tem-se que:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} W_i v \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu = \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} W_i v^2 n_i ds - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_i} v^2 + W_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v \right) d\mu.$$

Como $v|_{\Gamma} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$, a equação acima resulta em:

$$2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} W_i v \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu = 0, \text{ e, voltando a (A4.4) tem-se que:}$$

$$a(t; v, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \alpha(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \int_{\Omega} \sigma(t, x) v^2 d\mu, \forall v \in V. \quad (\text{A4.5})$$

Substituindo em (A4.5) as definições dadas em (2.1.20) por

$$\omega = \underset{(t,x,y) \in (0,T] \times \Omega}{\text{infesse}} \alpha(t, x, y) \text{ e } \vartheta = \underset{(t,x,y) \in (0,T] \times \Omega}{\text{infesse}} \sigma(t, x, y), \quad (\text{A4.6})$$

tem-se que:

$$\begin{aligned}
a(t; v, v) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \alpha(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \int_{\Omega} \sigma(t, x) v^2 d\mu \geq \\
&\geq \omega \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 d\mu + \vartheta \int_{\Omega} v^2 d\mu = \\
&= \omega \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \vartheta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \forall v \in V.
\end{aligned}$$

Sendo $\varepsilon = \min\{\omega, \vartheta\}$ tem-se que:

$$a(t; v, v) \geq \varepsilon \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \quad (\text{A4.7})$$

e, portanto, $a(t; u, v)$ é V-elíptica.

De (A4.7) e da parte (iv) do teorema 1 em que se provou que

$$|L_f(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V, \forall v \in V,$$

deduz-se a seguinte estimativa de estabilidade para o problema variacional:

$$\varepsilon \|u\|_V^2 \leq a(t; u, u) \leq D_t(u, u) + a(t; u, u) = L_f(u) \leq |L_f(u)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_V,$$

$\forall u \in V$, ou seja,

$$\|u\|_V^2 \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon} \|u\|_V$$

e, portanto, tem-se que:

$$\|u\|_V \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}.$$

Utilizando o método de Galerkin em conjunto com o método dos elementos finitos, procura-se construir uma solução $u_h \in V_h$ subespaço de V , sendo $V_h = [B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}]$ de dimensão N onde:

$$u_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (\text{A4.8})$$

e as funções φ_j são polinômios por partes definidos no domínio discretizado Ω_h .

O problema variacional de dimensão finita passa a ser então dado por:

Achar $u_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$ suficientemente regular para que se possa ter:

$$\begin{aligned} D_t(u_h, v) + a(t; u_h, v) &= L_f(v), \text{ e} \\ (u_h(0; x, y), v) &= L_{u_0}(v), \quad \forall v \in V_h \end{aligned} \tag{A4.9}$$

com

$$a(t; u_h, v) = \iint_{\Omega} \alpha(t, x, y) \nabla u_h \cdot \nabla v d\mu + \iint_{\Omega} \mathbf{W}(t, x, y) \cdot \nabla u_h \nabla v d\mu + \iint_{\Omega} \sigma(t, x, y) u_h v d\mu,$$

$$D_t(u_h, v) = \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v \right) = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} v d\mu,$$

$$L_f(v) = \iint_{\Omega} f(t, x, y) v d\mu,$$

e, para a condição inicial

$$L_{u_0}(v) = \iint_{\Omega} u_0(x, y) v dx dy.$$

Como $u_h \in V_h$ então $u_h \in V$, portanto o teorema 1 se aplica a V_h , ou seja, o problema (A4.9) tem solução única, e vale, quando $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$, a mesma estimativa de estabilidade anterior, ou seja:

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}.$$

Considerando-se $f = 0$ vale também a seguinte desigualdade de estabilidade:

$$\|u_h\|_V \leq \|u_h(0)\|_V \leq \|u_0\|_V.$$

De fato, fazendo $v = u_h$ na equação (A4.9) tem-se:

$$(\dot{u}_h(t), u_h(t))_{L^2(\Omega)} + a(u_h(t), u_h(t)) = 0 \quad t \in (0, T]$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(u_h(t), u_h(t)) = 0 \quad t \in (0, T].$$

Integrando de 0 a t tem-se:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \|u_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + 2 \int_0^t a(u_h(\tau), u_h(\tau)) d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\|u_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big|_0^t + 2 \int_0^t a(u_h(\tau), u_h(\tau)) d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t a(u_h(\tau), u_h(\tau)) d\tau = 0, \text{ e, portanto, sendo a V-elíptica,}$$

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0. \quad (\text{A4.10})$$

Na equação (A4.9), fazendo $v = u_h(0)$ tem-se que:

$$(u_h(0), u_h(0))_{L^2(\Omega)} = L_{u_0}(u_h(0)) = (u_0, u_h(0))_{L^2(\Omega)} \Rightarrow$$

$$\|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (u_0, u_h(0))_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\| \|u_h(0)\| \Rightarrow$$

$$\|u_h(0)\| \leq \|u_0\| \quad (\text{A4.11})$$

Portanto, das equações (A4.10) e (A4.11) conclui-se que:

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e então tem-se a seguinte desigualdade:

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Voltando agora à equação (A4.9) e, fazendo $v = \varphi_i$ sucessivamente para $i = 1, 2, \dots, N$, obtém-se o sistema de equações ordinárias semi-discretizado dado por:

$$\begin{cases} A \frac{dU}{dt} + MU = F & \text{e o vetor inicial } U_0 \text{ calculado em } AU_0 = \hat{U}_0. \end{cases} \quad (\text{A4.12})$$

As matrizes que aparecem no sistema (A4.12) estão definidas, no Capítulo 2, equação (2.1.14), por:

$$A = (A_{ij}) = (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega)}, \quad D = (D_{ij}) = (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega)}, \quad U = (U_j(t)) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{pmatrix},$$

$$B = (B_{ij}) = (\alpha \nabla \varphi_j \|\nabla \varphi_i)_{L^2(\Omega)}, \quad C = (C_{ij}) = (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega)}, \quad F = (F_i) = (f, \varphi_i)_{L^2(\Omega)},$$

$$\hat{U}_0 = \left(\hat{U}_{0_i} \right) = (u_0, \varphi_i)_{L^2(\Omega)}, \quad e$$

$$M = B + D + C.$$

Proposição 3: A matriz A é simétrica e positiva definida.

Demonstração: Uma matriz $S = (S_{ij})$ é definida positiva \Leftrightarrow

$\eta^T \cdot S \eta > 0, \forall \eta \in \mathfrak{R}^N, \eta \neq 0$, onde o ponto denota o produto escalar usual em \mathfrak{R}^N , ou seja:

$$\eta^T \cdot S \eta = \sum_{i,j=1}^N \eta_i S_{ij} \eta_j.$$

Para a matriz A tem-se que A é simétrica e:

$$\eta^T \cdot A \eta = \sum_{i,j=1}^N \eta_i (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} \eta_j = \left(\sum_{i=1}^N \eta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N \eta_j \varphi_j \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Sendo $v = \sum_{i=1}^N \eta_i \varphi_i$, tem-se que:

$$\eta^T \cdot A \eta = (v, v)_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0, \quad e \quad (v, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

portanto A é definida positiva.

Este resultado implica que A é inversível, existe uma decomposição de Choleski para A e o sistema (A4.12) pode ser resolvido por qualquer método para equações diferenciais lineares.

Para o Capítulo 2 estabeleceram-se existência e unicidade de solução e critérios de convergência. A fim de fornecer algumas informações e sugestões de abordagens destas questões para os problemas abordados nos Capítulos 4, 5 e 6, apresentamos a seguir alguns resultados relacionados a dois tópicos principais:

1- A teoria de existência de soluções para equações e sistemas de evolução quasi-lineares.

2- Estimativas de erros *a priori* na obtenção de soluções aproximadas estimadas via Método de Galerkin em conjunto com o método de elementos finitos e Crank-Nicolson.

Considere uma equação diferencial parcial, ou um sistema de equações diferenciais parciais quasi-lineares da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{t}, \mathbf{u})\mathbf{u} &= f(\mathbf{t}, \mathbf{u}) \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \\ \mathbf{u}(\cdot, t) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0 \text{ sobre } \Omega \end{aligned} \tag{A4.13}$$

com $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ e A um operador do tipo parabólico.

Diversos autores (Amann², Browder¹⁰, Kato⁴³, Leung⁴⁸) demonstram a existência e a unicidade de soluções clássicas para problemas do tipo (A4.13) utilizando vários critérios distintos. Tais demonstrações exigem muita regularidade nas funções e nos coeficientes que estão presentes em (A4.13), e nem sempre os métodos utilizados podem ser adaptados ao problema variacional a fim de garantir a unicidade da solução fraca e soluções aproximadas via métodos numéricos. Em Lions⁴⁹ encontram-se resultados referentes às formulações fracas de problemas não lineares.

O artigo de Douglas & Dupont²⁷ trata de algumas questões teóricas e computacionais do Método de Galerkin para a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais do tipo parabólicas lineares e não lineares. Os resultados são estendidos a equações mais gerais do tipo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, t, u, \nabla_x u) &= f(x, t, u, \nabla_x u) \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(\cdot, t) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u(0, \cdot) &= u_0 \text{ sobre } \Omega \end{aligned} \tag{A4.14}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado. São calculados limites para o erro induzido pelo uso de Galerkin-Crank-Nicolson para aproximar a solução do problema (A4.14).

Estimativas de erro na norma L^2 para as soluções aproximadas dos problemas semi-discreto e totalmente discretizado são calculadas em Wheeler⁶⁶. As estimativas obtidas são as melhores possíveis nesta norma. Um dos problemas tratados via Método de Galerkin é descrito pelas equações seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (a(x, u) \nabla u) + \sum_{i=1}^n b_i(x, u) u_{x_i} + f(x, u) \text{ em } \Omega \times (0, T] \\ u(\cdot, t) &= 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \\ u(0, \cdot) &= u_0, x \in \bar{\Omega} \end{aligned} \tag{A4.15}$$

Observam-se claramente as semelhanças entre o problema (A4.15) e o problema abordado no Capítulo 4 do presente trabalho. Embora seja interessante poder garantir existência e unicidade de solução e estimativas de erros nos códigos numéricos utilizados naquele capítulo, as restrições impostas afastam a possibilidade de se trabalhar com funções descontínuas que ocorrem naturalmente nos problemas reais.

Para se ter uma idéia destas restrições, as hipóteses assumidas para que se possam garantir as estimativas no trabalho de Wheeler para o problema (A4.15) são:

- 1- Para $(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $0 < \eta \leq a(x, p) \leq C_0$, $|b_i(x, p)| \leq C_0$, $1 \leq i \leq n$.
- 2- a , f e b_i , $1 \leq i \leq n$, são uniformemente Lipschitz contínuas com respeito às $(n+1)$ variáveis e $f(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$.
- 3- $a_u(x, u(x, t))$ existe para $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$.
- 4- $u_0 \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para algum r inteiro e positivo.
- 5- $u \in C^2(\Omega \times [0, T])$ é solução única de (A4.15) e $u, u_t \in L^2([0, T]; H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

6- Para $1 \leq i \leq n$, $(b_i(x, u))_x$ existem e são limitadas para $t \in (0, T]$.

Existem também muitos trabalhos que tratam as questões (1) e (2) referentes a sistemas de equações diferenciais parciais lineares e não lineares análogos aos que foram abordados nos Capítulos 5, 6, 7 e 8 do presente trabalho. Leung⁴⁸ estuda sistemas parabólicos não lineares aplicados à dinâmica populacional; o trabalho inclui demonstrações de existência e unicidade de solução para problemas mistos envolvendo sistemas de equações parabólicas quasi-lineares do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t, u, u_x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(x, t, u, u_x) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T]$$

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T]$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), x \in \bar{\Omega}$$

onde $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $u_x = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ e

$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m)$, sob inúmeras restrições tanto para o domínio e fronteira como para as funções envolvidas. Estas restrições incluem condições de regularidades, limitações em norma, algumas desigualdades relacionadas a princípios de máximo, entre outras. São tratados diversos problemas tipo presa-predador, competição e outros.

O artigo de Douglas & Dupont²⁷, já citado anteriormente, estabelece estimativas de erro nas aproximações de soluções aproximadas via Método de Galerkin para um sistema de equações diferenciais parciais tipo parabólico não linear.

Embora não se vá aplicar todos esses estudos nas equações e sistemas abordados nos Capítulos de 5 a 8 do presente trabalho, algumas considerações serão feitas.

Para pequenos períodos de tempo, ainda que a dinâmica vital presente nas equações indique um crescimento malthusiano, pode-se considerar que os coeficientes de difusão α e β , quando não lineares, tal como foram definidos, são limitados, ou seja:

$$0 < \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 u < M, \text{ e } 0 < \beta = \beta_0 + \beta_1 v < K.$$

Com estas hipóteses as demonstrações são mais simples. No caso do Capítulo 5 que trata de uma espécie, o teorema de existência e unicidade demonstrado no Capítulo 2 pode ser aplicado. Nos processos de discretizações pode-se garantir que a matriz que está envolvida com este termo é definida positiva facilitando estimativas de erro.

APÊNDICE 5 - ALGUNS PROGRAMAS DESENVOLVIDOS.

PARA CAPÍTULO 3 - APLICAÇÃO 1

```
sp.m
%
% Programa Principal - Bicudo no Estado de SP
%
clear all
% Construção da matriz malha
%
spmalh
n=336; % número de iterações no tempo = 48 - 1 ano; 336 - 7anos
dt=0.25;
%sig=-0.62703729; % 80% do que nasce morre
sig=-0.06270373; % 98% do que nasce morre
%
% Vetor alfa - difusibilidade - constante
%
for k=1:nt
    alfa(k)=0.00251633;
end
%
% Vetor de condições iniciais
%
for i=1:nsx*nsy
    uu(i)=0;
    Ucha(i)=0;
end
uu((nsx-4)*nsy+(nsy-6))=100;
uu((nsx-4)*nsy+(nsy-5))=100;
uu((nsx-3)*nsy+(nsy-6))=100;
uu((nsx-3)*nsy+(nsy-5))=100;
u0=uu;
%
% Condições de contorno
%
for i=1:nsx+1
    zz(i,1)=0;
end
for i=1:nsy+1
    zz(1,i)=0;
end
%
% Domínio para construção das soluções gráficas - gráfico da condição inicial
%
x=0:dx:xf;
y=0:dy:yf;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        zz(i+1,j+1)= uu((i-1)*nsy+j);
    end
end
mesh(y,x,zz),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Distribuição inicial')
pause
```

```

%
% Sistema linear: solução e gráficos
%
spsl
*****
spmalh.m
%
% P.Bicudo no Estado de SP - para gerar a malha
%
xf=1;
yf=1;
nsx=16; %total de linhas verticais com eixo
nsy=16; %total de linhas horiz. com eixo
dx=xf/nsx;
dy=yf/nsy;
ny=nsy-1;
nx=nsx-1;
nt=2*nsx*nsy; %número de triângulos da malha
%
% Construção da matriz malha
%
for i=1:nt
    for j=1:3
        malha(i,j)=0;
    end
end
malha(2,1)=1;
for k=1:ny
    i=2*k + 1;
    malha(i,2)=k;
    i=2*k + 2;
    malha(i,3)= k;
    malha(i,1)= k + 1;
end
for k=1:nx
    i=2*k*nsy;
    for l=1:nsy
        j=2*l-1;
        malha(i+j,3)=l+(k-1)*nsy;
        malha(i+j,1)= malha(i+j,3)-1;
        malha(i+j,2)= malha(i+j,3)+ny;
        j=2*l;
        malha(i+j,2)= l+(k-1)*nsy;
        malha(i+j,3)= malha(i+j,2) + ny;
        malha(i+j,1)= malha(i+j,3) + 1;
    end
    malha(i+1,1)=0;
    malha(i+1,2)=0;
    malha(i+2,3)=0;
end
*****
spsl.m
%
% Bicudo no Estado de SP - Solução do sistema linear - gráficos
%
a=dy/(2*dx);

```

```

b=dx/(2*dy);
c=dx*dy/24;
%
% Matrizes produtos internos A=(f|f) e B=(gradf|gradf)
%
A=[2*c c c
   c 2*c c
   c c 2*c];
B=[12*c*(1/dx^2 + 1/dy^2) -a -b
   -a a 0
   -b 0 b];
%
% Inicializando as matrizes e lado direito
%
for i=1:nsx*nsy
    for j=1:nsx*nsy
        M(i,j)=0;
        M0(i,j)=0;
        N(i,j)=0;
    end
end
%
% Construção das matrizes M0, M e N
%
for k=1:nt
    for il=1:3
        igl=malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:3
                jgl=malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    M0(igl,jgl)=M0(igl,jgl)+A(il,jl);
                    M(igl,jgl)= M(igl,jgl)+(1+sig*dt/2)*A(il,jl)+(alfa(k)*dt/2)*B(il,jl);
                    N(igl,jgl)= N(igl,jgl)+(1-sig*dt/2)*A(il,jl)-(alfa(k)*dt/2)*B(il,jl);
                end
            end
            Ucha(igl)= Ucha(igl) + uu(igl)*dx*dy/6;
        end
    end
end
u0=uu;
[L U]=lu(M0);
uu0=L\Ucha';
uu=U\uu0; % vetor inicial adequado para o procedimento numérico
[L U]=lu(M);
%
% Condições de contorno
%
for i=1:nsx+1
    zz(i,1)=0;
end
for i=1:nsy+1
    zz(1,i)=0;
end
%
% Domínio para construção das soluções gráficas
%
x=0:dx:xf;

```

```

y=0:dy:yf;
%
% Solução do sistema linear
%
for l=1:n
    l
    uu=N*uu;
    v=L\uu;
    uu=U\v;
    for i=1:nsx
        for j=1:nsy
            zz(i+1,j+1)= uu((i-1)*nsy+j);
        end
    end
end
%
% Solução armazenada no vetor zz
%

mesh(y,x,zz)
drawnow
end
mesh(y,x,zz),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Distribuição populacional')
*****

```

PARA CAPÍTULO 3 - APLICAÇÃO 2

plantiol.m

```

%
% Programa Principal da fase 1 - Bicudo do algodoeiro em uma área de plantio
%
clear all
malha1 % Para gerar a malha
nfl=3600;
dt=0.5; % 1/2 hora
sig=-0.0037262;
%
b=dx/(2*dy);
a=dy/(2*dx);
c=dx*dy/24;
%
% Matrizes produtos internos A=(f|f) e B=(gradf|gradf)
%
A=[2*c c c
    c 2*c c
    c c 2*c];
B=[12*c*(1/dx^2 + 1/dy^2) -a -b
    -a a 0
    -b 0 b];
%
% Vetor alfa
%
for k=1:nt
    alfa(k)=0.00069180;
end
%
% Vetor de condições iniciais

```

```

%
for i=1:nsx*nsy
    u(i)=0;
    Ucha(i)=0;
end;
%
% área 1 - distribuição homogenea
%
for i=1:(nsfx-1)*nsy
    u(i)=30000;
end
for i=1:nsy-1
    u(i+1+nsy)=30000;
end
for i=1:(nsx-1)
    u(1+i*nsy)=30000;
    u(2+i*nsy)=30000;
end
u0=u'; % para fazer o gráfico da condição inicial
figci
pause
%
% Vetor da migração
%
for i=1:nsx*nsy
    w1(i)=0;
    w2(i)=0;
end;
%
k=0;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        k=k+1;
        coord1(k)=i*dx;
        coord2(k)=j*dy;
    end
end
for i=1:nsx*nsy
    if (coord1(i) <= coord2(i)), % x <= y
        w1(i)=-0.005;
        w2(i)=0;
    else % x > y
        w1(i)=0;
        w2(i)=-0.005;
    end
end
for i=1:(nsfx-1)*nsy
    w1(i)=0.005;
    w2(i)=0;
end
for i=1:(nsx-1)
    w1(1+i*nsy)=0;
    w2(1+i*nsy)=0.005;
end
%
% Condição de contorno em gama zero - Dirichlet
%
for i=1:nsx+1

```

```

    zz(i,1)=0;
end
for i=1:nsy+1
    zz(1,i)=0;
end
%
% Solução do sistema linear
%
splan1
%
% Gráfico da população no tempo final
%
% Guardar as soluções
%
z1=zz;
x=0:dx:2*xf;
y=0:dy:2*yf;
figura
*****

malha1.m
%
% Bicudo do algodoeiro em área de plantio- Construção da matriz malha
%
xf=1;
yf=1/2;
xs=1/8;
ys=1/16;
nsfx=2;
nsfy=2;
dx=xs/nsfx;
dy=ys/nsfy;
nsx=xf/dx;
nsy=yf/dy;
ny=nsy-1;
nx=nsx-1;
nt=2*nsx*nsy;
%
% Construção da matriz malha
%
for i=1:nt
    for j=1:3
        malha(i,j)=0;
    end
end
malha(2,1)=1;
for k=1:ny
    i=2*k + 1;
    malha(i,2)=k;
    i=2*k + 2;
    malha(i,3)= k;
    malha(i,1)= k + 1;
end
for k=1:nx
    i=2*k*nsy;
    for l=1:nsy
        j=2*l-1;
        malha(i+j,3)=l+(k-1)*nsy;
    end
end

```

```

malha(i+j,1)= malha(i+j,3)-1;
malha(i+j,2)= malha(i+j,3)+ny;
j=2*1;
malha(i+j,2)= 1+(k-1)*nsy;
malha(i+j,3)= malha(i+j,2) + ny;
malha(i+j,1)= malha(i+j,3) + 1;
end
malha(i+1,1)=0;
malha(i+1,2)=0;
malha(i+2,3)=0;
end
*****

```

figci.m

```

%
% Bicudo do algodoeiro em área de plantio - Gráfico da condição inicial
%
x=0:dx:2*xf;
y=0:dy:2*yf;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        z00(i+1,j+1)= u0((i-1)*nsy+j);
    end
end
z0=z00;
for i=1:nsx+1
    for j=1:nsy+1
        z0(i,j)=z00(i,j);
    end
end
for i=1:2*nsx+1
    z0(i,2*nsy+1)=0;
end
for j=1:2*nsy+1
    z0(2*nsx+1,j)=0;
end
for i=1:nsx-1
    for j=1:nsy+1
        z0(i+nsx+1,j)=z0(nsx+1-i,j);
    end
end
for j=1:nsy-1
    for i=1:2*nsx
        z0(i,j+nsy+1)=z0(i,nsy+1-j);
    end
end
mesh(y,x,z0),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Distribuição inicial - fase 1')%,axis([0 2 0 2 0
15000])
*****

```

splan1.m

```

%
% Bicudo do algodoeiro em área de plantio - Solução do sistema da fase 1
%
% Matrizes M, N - definição inicial
%
for i=1:nsx*nsy
    for j=1:nsx*nsy

```

```

M(i,j)=0;
M0(i,j)=0;
N(i,j)=0;
end
end
%
% para entrar com termo da migração
%
no(1)=1;
no(2)=1;
for i=1:(nt/2-1)
    j=2*i+1;
    no(j)=j-i;
    no(j+1)=j-i;
end
%
% Começo do cálculo das matrizes M (MI) e N (NI)
%
for k=1:nt
    mm=no(k);
    d1=-w1(mm)*dy/6 - w2(mm)*dx/6;
    d2=w1(mm)*dy/6;
    d3=w2(mm)*dx/6;
    D=[d1 d2 d3
        d1 d2 d3
        d1 d2 d3];
    m=-1;
    for l=1:k
        m=-1*m;
    end
    for il=1:3
        igl=malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:3
                jgl=malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    M0(igl,jgl)=M0(igl,jgl)+A(il,jl);
M(igl,jgl)=M(igl,jgl)+(1+sig*dt/2)*A(il,jl)+(alfa(k)*dt/2)*B(il,jl)+m*(dt/2)*D(il,jl);
N(igl,jgl)=N(igl,jgl)+(1-sig*dt/2)*A(il,jl)-(alfa(k)*dt/2)*B(il,jl)-m*(dt/2)*D(il,jl);
                end
            end
        end
        Ucha(igl)=Ucha(igl) + u(igl)*dx*dy/6;
    end
end
end
[L U]=lu(M0);
v=L\Ucha';
u=Uv; % vetor inicial adequado para a integração
u00=u;
%
% Solução do sistema linear
%
x=0:dx:xf;
y=0:dy:yf;
[L U]=lu(M);
im=0;
for nt1=1:nf1
    nt1

```

```

vafonte
u=N*u + dt*F';
v=Lu;
u=Uv;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        zz(i+1,j+1)= u((i-1)*nsy+j);
    end
end
surf(y,x,zz),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x')
drawnow
im=im+1;
end
*****

```

vafonte.m

```

%
% Variação da fonte com o espaço e tempo - para fase 1
%
% f(maximo) = 0.05
%
vf=-0.05*(1 - ((nt1+1/2)*dt)/1800);
%
% função fonte
%
for i=1:nsx*nsy
    F(i)=0;
end
for i=1:nsx*nsy
    f(i)=0;
end
%
% área 1 - distribuição homogênea
%
for i=1:nsy
    f(i+nsy)=vf;
end
for i=1:(nsx-1)
    f(2+i*nsy)=vf;
end
%
% Definição do vetor fonte
%
for k=1:nt
    for il=1:3
        igl=malha(k,il);
        if (igl~=0),
            F(igl)=F(igl)+f(igl)*dx*dy/6;
        end
    end
end
*****

```

figura.m

```

%
% Bicudo do algodoeiro em área de plantio - Gráficos
%
for i=1:nsx

```

```

    for j=1:nsy
        z00(i+1,j+1)= u0((i-1)*nsy+j);
    end
end
z0=z00;
for i=1:nsx+1
    for j=1:nsy+1
        z0(i,j)=z00(i,j);
    end
end
for i=1:2*nsx+1
    z0(i,2*nsy+1)=0;
end
for j=1:2*nsy+1
    z0(2*nsx+1,j)=0;
end
for i=1:nsx-1
    for j=1:nsy+1
        z0(i+nsx+1,j)=z0(nsx+1-i,j);
    end
end
for j=1:nsy-1
    for i=1:2*nsx
        z0(i,j+nsy+1)=z0(i,nsy+1-j);
    end
end
mesh(y,x,z0)
pause
%
% Gráfico após as iterações no tempo
%
for i=1:nsx+1
    for j=1:nsy+1
        zc1(i,j)=z1(i,j);
    end
end
for i=1:2*nsx+1
    zc1(i,2*nsy+1)=0;
end
for j=1:2*nsy+1
    zc1(2*nsx+1,j)=0;
end
for i=1:nsx-1
    for j=1:nsy+1
        zc1(i+nsx+1,j)=zc1(nsx+1-i,j);
    end
end
for j=1:nsy-1
    for i=1:2*nsx
        zc1(i,j+nsy+1)=zc1(i,nsy+1-j);
    end
end
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Distribuição populacional'),axis([0 2 0 2 0 15000])
pause
contour(x,y,zc1,12,'r'),xlabel('eixo x'),ylabel('eixo y'),axis([0 2 0 2])
*****

```

```

platio2.m
%
% Programa Principal da fase 2 - Bicudo do algodoeiro em uma área de plantio
%
nf2=5040; % tres meses final 5040;
u0=u;
sig=-0.00037262;
%
% Vetor alfa
%
for k=1:nt
    alfa(k)=0.00069180;
end
%
% Vetor de condições iniciais
%
% área 1
%
l=(nsfx-1)*nsy;
for kk=1:l
    u0(kk)=0;
end
for i=1:(nsx-nsfx+1)
    for k=1:(nsfy-1)
        j=1+k;
        u0(j)=0;
    end
end
%
% área 2
%
for kl=1:(nsy-nsfy+1)
    jl=j+kl;
    u0(jl)=u(jl);
end
l=1+nsy;
end
%
figci
pause
%
%
for i=1:nsx*nsy
    Ucha2(i)=0;
end;
%
% Vetor da migração
%
for i=1:nsx*nsy
    w1(i)=0;
    w2(i)=0;
end;
%
k=0;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        k=k+1;
        coord1(k)=i*dx;
    end
end

```

```

    coord2(k)=j*dy;
end
end
for i=1:nsx*nsy
    if (coord1(i) <= coord2(i)),
        w1(i)=0;
        w2(i)=0;
    else
        w1(i)=0;
        w2(i)=0;
    end
end
end
for i=1:(nsfx-1)*nsy
    w1(i)=0.00001;
    w2(i)=0;
end
end
for i=1:(nsx-1)
    w1(1+i*nsy)=0;
    w2(1+i*nsy)=0.00001;
end
end
%
% Condição de contorno em gama zero - Dirichlet
%
for i=1:nsx+1
    zz(i,1)=0;
end
end
for i=1:nsy+1
    zz(1,i)=0;
end
end
%
% Solução do sistema linear
%
splan2
%
% Gráfico da população no tempo final
%
% Guardar as soluções
%
z1=zz;
x=0:dx:2*xf;
y=0:dy:2*yf;
figura
*****
figci.m
%
% Para desenhar a condição inicial da fase 2
%
%
% Gráfico da condição inicial
%
x=0:dx:2*xf;
y=0:dy:2*yf;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        z00(i+1,j+1)= u0((i-1)*nsy+j);
    end
end
end

```

```

z0=z00;
for i=1:nsx+1
    for j=1:nsy+1
        z0(i,j)=z00(i,j);
    end
end
for i=1:2*nsx+1
    z0(i,2*nsy+1)=0;
end
for j=1:2*nsy+1
    z0(2*nsx+1,j)=0;
end
for i=1:nsx-1
    for j=1:nsy+1
        z0(i+nsx+1,j)=z0(nsx+1-i,j);
    end
end
for j=1:nsy-1
    for i=1:2*nsx
        z0(i,j+nsy+1)=z0(i,nsy+1-j);
    end
end
mesh(y,x,z0),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Distribuição inicial - fase 1')%,axis([0 2 0 2 0
15000])
*****

splan2.m
%
% Bicudo do algodoeiro em área de plantio - Solução do sistema da fase 2
%
% Matrizes MM, NN - definição inicial
%
for i=1:nsx*nsy
    for j=1:nsx*nsy
        MM(i,j)=0;
        NN(i,j)=0;
        M02(i,j)=0;
    end
end
%
% para entrar com termo da migração
%
no(1)=1;
no(2)=1;
for i=1:(nt/2-1)
    j=2*i+1;
    no(j)=j-i;
    no(j+1)=j-i;
end
%
% Comção do cálculo das matrizes M (MI) e N (NI)
%
for k=1:nt
    mm=no(k);
    d1=-w1(mm)*dy/6 - w2(mm)*dx/6;
    d2=w1(mm)*dy/6;
    d3=w2(mm)*dx/6;
    D=[d1 d2 d3

```

```

d1 d2 d3
d1 d2 d3];
m=-1;
for l=1:k
    m=-1*m;
end
for il=1:3
    igl=malha(k,il);
    if (igl ~= 0),
        for jl=1:3
            jgl=malha(k,jl);
            if (jgl ~= 0),
                M02(igl,jgl)=M02(igl,jgl)+A(il,jl);
                MM(igl,jgl)=MM(igl,jgl)+(1+sig*dt/2)*A(il,jl)+(alfa(k)*dt/2)*B(il,jl)+m*(dt/2)*D(il,jl);
                NN(igl,jgl)=NN(igl,jgl)+(1-sig*dt/2)*A(il,jl)-(alfa(k)*dt/2)*B(il,jl)-m*(dt/2)*D(il,jl);
            end
        end
        Ucha2(igl)=Ucha2(igl) + u(igl)*dx*dy/6;
    end
end
end
x=0:dx:xf;
y=0:dy:yf;
[L U]=lu(M02);
v=L\Ucha2';
u=U\v; % vetor inicial adequado para a integração
%
[X Y]=lu(MM);
for nt2=1:nf2
    nt2
    q=NN*u;
    v=X\q;
    u=Y\v;
    for i=1:nsx
        for j=1:nsy
            zz(i+1,j+1)= u((i-1)*nsy+j);
        end
    end
end
mesh(y,x,zz),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x')
drawnow
end
*****

```

PROGRAMAS PARA CAPÍTULO 4

cap4s1.m

```

%
% Programa principal - Difusão não-linear - sem migração
%
% Elementos finitos de ordem 2 - caso bidimensional - Capítulo4 - Ensaio 1
%
clear all
t1=clock;
malha
%
% número de iterações

```

```

%
n=100;
ni=3;
%
sig= -0.05; % decaimento - taxa intrínseca de reprodução
alfa0= 0.007; % difusibilidade - coeficiente linear
beta0=0.007;
dt=0.12;
%
% Sub-matrizes de rigidez
%
sumfi
sumgfi
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5
sumtri6
%
% função fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
end
f(4*nnx*nnny)=0.01;
f(4*nnx*nnny-1)=0.01;
f((2*nnx-1)*2*nnny)=0.01;
f((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.01;
%
% Vetor de condições iniciais
%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
end
%
% condição inicial no canto
%
u0(4*nnx*nnny)=0.5;
u0(4*nnx*nnny-1)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.5;
w1=u0; % se quiser armazenar a condição inicial
%
mlin41
%
snlin412
%
% Gráfico no domínio completo
%
x=0:dx/2:2*xf;
y=0:dy/2:2*yf;
for i=1:2*nnx+1
    for j=1:2*nnny+1
        zc1(i,j)=z(i,j);
    end
end

```

```

end
for i=1:4*nnx+1
    zc1(i,4*nny+1)=0;
end
for j=1:4*nny+1
    zc1(4*nnx+1,j)=0;
end
for i=1:2*nnx-1
    for j=1:2*nny+1
        zc1(i+2*nnx+1,j)=zc1(2*nnx+1-i,j);
    end
end
for j=1:2*nny-1
    for i=1:4*nnx
        zc1(i,j+2*nny+1)=zc1(i,2*nny+1-j);
    end
end
%
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x').zlabel('Densidade Populacional')
pause
figc4s10
te=etime(clock,t1); % tempo de execução
*****

```

malha.m

```

%
% Capítulo 4 - todos os ensaios - geração da malha - elementos finitos de ordem 2
%
nny=4; % número de linhas horizontais sem o eixo x
nnx=4; % número de linhas verticais sem o eixo y
nn= 4*nnx*nny; % número de nós da malha
xf=1;
yf=1;
dx=xf/nnx;
dy=yf/nny;
dnnny= 2*nny; % número de nós por coluna
nt= 2*nnx*nny; % número de triângulos da malha
%
% zerando a matriz malha
%
for i=1:nt
    for j=1:6
        malha(i,j)= 0;
    end
end
%
% primeiras dnnny linhas da matriz malha
%
for k=1:nny
    i= 2*k-1;
    malha(i,4)= i;
    malha(i+1,4)=i;
    malha(i,2)= i-1;
    malha(i+1,2)= i+1;
    malha(i,3)= i+(dnnny-1);
    malha(i+1,5)= i+(dnnny-1);
    malha(i+1,1)= i+(dnnny+1);
end

```

```

malha(i+1,6)= i+dny;
end
%
% voltar com os zeros da fronteira e demais
%
malha(1,3)= 0;
malha(2,5)= 0;
malha(1,2)= 0;
%
% demais linhas da matriz malha
%
for kb=1:(nnx-1)
t= 2*kb*nny;
for k=1:nny
i= 2*k-1;
malha(t+i,4)= 2*t+i;
malha(t+i+1,4)= 2*t+i;
malha(t+i,2)= 2*t+i-1;
malha(t+i+1,2)= 2*t+i+1;
malha(t+i,3)= 2*t+i+(dny-1);
malha(t+i+1,3)= 2*t+i-(dny-1);
malha(t+i,5)= 2*t+i-(dny-1);
malha(t+i+1,5)= 2*t+i+(dny-1);
malha(t+i,1)= 2*t+i-(dny+1);
malha(t+i+1,1)= 2*t+i+(dny+1);
malha(t+i,6)= 2*t+i-dny;
malha(t+i+1,6)= 2*t+i+dny;
end
end
%
% voltar com os zeros
%
for kb=1:(nnx-1)
l= 2*kb*nny+1;
malha(l,1)=0;
malha(l,2)=0;
malha(l,3)=0;
malha(l+1,5)=0;
end
*****

```

sumfi.m

```

%
% sub-matriz de rigidez : fi.fi
%
a1= (dx*dy);
SMFI= a1*[1/60  0  -1/360 -1/90 -1/360  0
          0  4/45  0   2/45 -1/90  2/45
          -1/360 0  1/60  0   -1/360 -1/90
          -1/90  2/45 0   4/45  0   2/45
          -1/360 -1/90 -1/360  0   1/60  0
          0   2/45 -1/90  2/45  0   4/45];

```

sumgfi.m

```

%
% sub-matriz de rigidez : gradf.gradf
%

```

a2= (dx/dy)+(dy/dx);

b2= dx/dy;

c2= dy/dx;

```
SMGFI= [a2/2 -(2*c2)/3 c2/6 0 b2/6 -(2*b2)/3
        -(2*c2)/3 (4*a2)/3 -(2*c2)/3 -(4*b2)/3 0 0
        c2/6 -(2*c2)/3 c2/2 0 0 0
        0 -(4*b2)/3 0 (4*a2)/3 0 -(4*c2)/3
        b2/6 0 0 0 b2/2 -(2*b2)/3
        -(2*b2)/3 0 0 -(4*c2)/3 -(2*b2)/3 (4*a2)/3];
```

sumtri1.m

%

% Matriz da primeira faixa do bloco tri

%

a3=(dx^2 + dy^2)/(dx*dy);

SMTRI1(1,1)= (2/15)*a3;

SMTRI1(1,2)= b2/30-c2/6;

SMTRI1(1,3)= c2/30;

SMTRI1(1,4)= -(b2+c2)/30;

SMTRI1(1,5)= b2/30;

SMTRI1(1,6)= -b2/6+c2/30;

SMTRI1(2,1)= SMTRI1(1,2);

SMTRI1(2,2)= (-4/45)*b2+(8/45)*c2;

SMTRI1(2,3)= -c2/90;

SMTRI1(2,4)= (4/45)*b2+(2/45)*c2;

SMTRI1(2,5)= b2/90;

SMTRI1(2,6)= -(2/45)*a3;

SMTRI1(3,1)= SMTRI1(1,3);

SMTRI1(3,2)= SMTRI1(2,3);

SMTRI1(3,3)= -c2/45;

SMTRI1(3,4)= -c2/90;

SMTRI1(3,5)= 0;

SMTRI1(3,6)= c2/90;

SMTRI1(4,1)= SMTRI1(1,4);

SMTRI1(4,2)= SMTRI1(2,4);

SMTRI1(4,3)= SMTRI1(3,4);

SMTRI1(4,4)= -(4/45)*a3;

SMTRI1(4,5)= -b2/90;

SMTRI1(4,6)= (2/45)*b2+(4/45)*c2;

SMTRI1(5,1)= SMTRI1(1,5);

SMTRI1(5,2)= SMTRI1(2,5);

SMTRI1(5,3)= SMTRI1(3,5);

SMTRI1(5,4)= SMTRI1(4,5);

SMTRI1(5,5)= -b2/45;

SMTRI1(5,6)= -b2/90;

SMTRI1(6,1)= SMTRI1(1,6);

SMTRI1(6,2)= SMTRI1(2,6);

SMTRI1(6,3)= SMTRI1(3,6);

SMTRI1(6,4)= SMTRI1(4,6);

SMTRI1(6,5)= SMTRI1(5,6);

SMTRI1(6,6)= (8/45)*b2-(4/45)*c2;

sumtri2.m

%

% Matriz da segunda faixa do bloco tri

%

```

a3=(dx^2 + dy^2)/(dx*dy);
SMTRI2(1,1)= a3/6;
SMTRI2(1,2)= (4/45)*b2-(8/45)*c2;
SMTRI2(1,3)= c2/90;
SMTRI2(1,4)= -4*(b2+c2/2)/45;
SMTRI2(1,5)= b2/18;
SMTRI2(1,6)= -2*b2/9+2*c2/45;
SMTRI2(2,1)= SMTRI2(1,2);
SMTRI2(2,2)= (8/15)*b2+(16/45)*c2;
SMTRI2(2,3)= -8*c2/45;
SMTRI2(2,4)= (-8/15)*b2;
SMTRI2(2,5)= 4*b2/45;
SMTRI2(2,6)= -(8/45)*b2;
SMTRI2(3,1)= SMTRI2(1,3);
SMTRI2(3,2)= SMTRI2(2,3);
SMTRI2(3,3)= c2/6;
SMTRI2(3,4)= 2*c2/45;
SMTRI2(3,5)= 0;
SMTRI2(3,6)= -2*c2/45;
SMTRI2(4,1)= SMTRI2(1,4);
SMTRI2(4,2)= SMTRI2(2,4);
SMTRI2(4,3)= SMTRI2(3,4);
SMTRI2(4,4)= (8/15)*b2+(8/45)*c2;
SMTRI2(4,5)= -4*b2/45;
SMTRI2(4,6)= (8/(45*dx*dy))*(dx^2-dy^2);
SMTRI2(5,1)= SMTRI2(1,5);
SMTRI2(5,2)= SMTRI2(2,5);
SMTRI2(5,3)= SMTRI2(3,5);
SMTRI2(5,4)= SMTRI2(4,5);
SMTRI2(5,5)= 7*b2/90;
SMTRI2(5,6)= -2*b2/15;
SMTRI2(6,1)= SMTRI2(1,6);
SMTRI2(6,2)= SMTRI2(2,6);
SMTRI2(6,3)= SMTRI2(3,6);
SMTRI2(6,4)= SMTRI2(4,6);
SMTRI2(6,5)= SMTRI2(5,6);
SMTRI2(6,6)= (8/(45*dx*dy))*(2*dx^2+dy^2);

```

sumtri3.m

```

%
% Matriz da terceira faixa do bloco tri
%
a3=(dx^2 + dy^2)/(dx*dy);
SMTRI3(1,1)= -a3/45;
SMTRI3(1,2)= -(1/15)*b2-(1/90)*c2;
SMTRI3(1,3)= c2/30;
SMTRI3(1,4)= b2/15+c2/90;
SMTRI3(1,5)= -b2/45;
SMTRI3(1,6)= 2*b2/45-c2/90;
SMTRI3(2,1)= SMTRI3(1,2);
SMTRI3(2,2)= (4/15)*b2+(8/45)*c2;
SMTRI3(2,3)= -c2/6;
SMTRI3(2,4)= (-4/15)*b2-(2/45)*c2;
SMTRI3(2,5)= b2/15;
SMTRI3(2,6)= (2/45)*c2;
SMTRI3(3,1)= SMTRI3(1,3);
SMTRI3(3,2)= SMTRI3(2,3);

```

```

SMTRI3(3,3)= (2/15)*c2;
SMTRI3(3,4)= c2/30;
SMTRI3(3,5)= 0;
SMTRI3(3,6)= -c2/30;
SMTRI3(4,1)= SMTRI3(1,4);
SMTRI3(4,2)= SMTRI3(2,4);
SMTRI3(4,3)= SMTRI3(3,4);
SMTRI3(4,4)= (4/15)*b2-(4/45)*c2;
SMTRI3(4,5)= -b2/15;
SMTRI3(4,6)= (4/45)*c2;
SMTRI3(5,1)= SMTRI3(1,5);
SMTRI3(5,2)= SMTRI3(2,5);
SMTRI3(5,3)= SMTRI3(3,5);
SMTRI3(5,4)= SMTRI3(4,5);
SMTRI3(5,5)= -b2/45;
SMTRI3(5,6)= 2*b2/45;
SMTRI3(6,1)= SMTRI3(1,6);
SMTRI3(6,2)= SMTRI3(2,6);
SMTRI3(6,3)= SMTRI3(3,6);
SMTRI3(6,4)= SMTRI3(4,6);
SMTRI3(6,5)= SMTRI3(5,6);
SMTRI3(6,6)= -(4/45)*a3;

```

sumtri4.m

```
%
```

```
% Matriz da quarta faixa do bloco tri
```

```
%
```

```

a3=(dx^2 + dy^2)/(dx*dy);
SMTRI4(1,1)= 7*a3/90;
SMTRI4(1,2)= -(4/45)*b2-(2/15)*c2;
SMTRI4(1,3)= c2/18;
SMTRI4(1,4)= (4/45)*a3;
SMTRI4(1,5)= b2/18;
SMTRI4(1,6)= -2*b2/15-4*c2/45;
SMTRI4(2,1)= SMTRI4(1,2);
SMTRI4(2,2)= (8/15)*b2+(16/45)*c2;
SMTRI4(2,3)= -2*c2/9;
SMTRI4(2,4)= (-8/15)*b2-(8/45)*c2;
SMTRI4(2,5)= -4*b2/45;
SMTRI4(2,6)= (8/45)*a3;
SMTRI4(3,1)= SMTRI4(1,3);
SMTRI4(3,2)= SMTRI4(2,3);
SMTRI4(3,3)= c2/6;
SMTRI4(3,4)= 4*c2/45;
SMTRI4(3,5)= 0;
SMTRI4(3,6)= -4*c2/45;
SMTRI4(4,1)= SMTRI4(1,4);
SMTRI4(4,2)= SMTRI4(2,4);
SMTRI4(4,3)= SMTRI4(3,4);
SMTRI4(4,4)= (8/15)*a3;
SMTRI4(4,5)= 4*b2/45;
SMTRI4(4,6)= -8*b2/45-(8/15)*c2;
SMTRI4(5,1)= SMTRI4(1,5);
SMTRI4(5,2)= SMTRI4(2,5);
SMTRI4(5,3)= SMTRI4(3,5);
SMTRI4(5,4)= SMTRI4(4,5);
SMTRI4(5,5)= b2/6;

```

```

SMTRI4(5,6)= -2*b2/9;
SMTRI4(6,1)= SMTRI4(1,6);
SMTRI4(6,2)= SMTRI4(2,6);
SMTRI4(6,3)= SMTRI4(3,6);
SMTRI4(6,4)= SMTRI4(4,6);
SMTRI4(6,5)= SMTRI4(5,6);
SMTRI4(6,6)= (8/(45*dx*dy))*(2*dx^2+3*dy^2);

```

sumtri5.m

```

%
% Guarda os elementos da quinta faixa do bloco tri
%
a3=(dx^2 + dy^2)/(dx*dy);
SMTRI5(1,1)= -a3/45;
SMTRI5(1,2)= -(1/90)*b2+(2/45)*c2;
SMTRI5(1,3)= -c2/45;
SMTRI5(1,4)= b2/90+c2/15;
SMTRI5(1,5)= b2/30;
SMTRI5(1,6)= -b2/90-c2/15;
SMTRI5(2,1)= SMTRI5(1,2);
SMTRI5(2,2)= -(4/45)*a3;
SMTRI5(2,3)= 2*c2/45;
SMTRI5(2,4)= (4/45)*b2;
SMTRI5(2,5)= -b2/30;
SMTRI5(2,6)= (2/45)*b2;
SMTRI5(3,1)= SMTRI5(1,3);
SMTRI5(3,2)= SMTRI5(2,3);
SMTRI5(3,3)= -c2/45;
SMTRI5(3,4)= -c2/15;
SMTRI5(3,5)= 0;
SMTRI5(3,6)= c2/15;
SMTRI5(4,1)= SMTRI5(1,4);
SMTRI5(4,2)= SMTRI5(2,4);
SMTRI5(4,3)= SMTRI5(3,4);
SMTRI5(4,4)= -(4/45)*b2+(4/15)*c2;
SMTRI5(4,5)= b2/30;
SMTRI5(4,6)= -2*b2/45-(4/15)*c2;
SMTRI5(5,1)= SMTRI5(1,5);
SMTRI5(5,2)= SMTRI5(2,5);
SMTRI5(5,3)= SMTRI5(3,5);
SMTRI5(5,4)= SMTRI5(4,5);
SMTRI5(5,5)= 2*b2/15;
SMTRI5(5,6)= -b2/6;
SMTRI5(6,1)= SMTRI5(1,6);
SMTRI5(6,2)= SMTRI5(2,6);
SMTRI5(6,3)= SMTRI5(3,6);
SMTRI5(6,4)= SMTRI5(4,6);
SMTRI5(6,5)= SMTRI5(5,6);
SMTRI5(6,6)= (4/(45*dx*dy))*(2*dx^2+3*dy^2);

```

sumtri6.m

```

%
% Guarda os elementos da sexta faixa do bloco tri
%
a3=(dx^2 + dy^2)/(dx*dy);
SMTRI6(1,1)= a3/6;

```

```

SMTRI6(1,2)= (2/45)*b2-(2/9)*c2;
SMTRI6(1,3)= c2/18;
SMTRI6(1,4)= -2*b2/45-4*c2/45;
SMTRI6(1,5)= b2/90;
SMTRI6(1,6)= -8*b2/45+4*c2/45;
SMTRI6(2,1)= SMTRI6(1,2);
SMTRI6(2,2)= (8/45)*b2+16*c2/45;
SMTRI6(2,3)= -2*c2/15;
SMTRI6(2,4)= (8/(45*dx*dy))*(-dx^2+dy^2);
SMTRI6(2,5)= -2*b2/45;
SMTRI6(2,6)= -(8/45)*c2;
SMTRI6(3,1)= SMTRI6(1,3);
SMTRI6(3,2)= SMTRI6(2,3);
SMTRI6(3,3)= 7*c2/90;
SMTRI6(3,4)= -4*c2/45;
SMTRI6(3,5)= 0;
SMTRI6(3,6)= 4*c2/45;
SMTRI6(4,1)= SMTRI6(1,4);
SMTRI6(4,2)= SMTRI6(2,4);
SMTRI6(4,3)= SMTRI6(3,4);
SMTRI6(4,4)= (8/45)*b2+(8/15)*c2;
SMTRI6(4,5)= 2*b2/45;
SMTRI6(4,6)= -(8/15)*c2;
SMTRI6(5,1)= SMTRI6(1,5);
SMTRI6(5,2)= SMTRI6(2,5);
SMTRI6(5,3)= SMTRI6(3,5);
SMTRI6(5,4)= SMTRI6(4,5);
SMTRI6(5,5)= b2/6;
SMTRI6(5,6)= -8*b2/45;
SMTRI6(6,1)= SMTRI6(1,6);
SMTRI6(6,2)= SMTRI6(2,6);
SMTRI6(6,3)= SMTRI6(3,6);
SMTRI6(6,4)= SMTRI6(4,6);
SMTRI6(6,5)= SMTRI6(5,6);
SMTRI6(6,6)= (8/(45*dx*dy))*(2*dx^2+3*dy^2);
*****

```

mlin41.m

```

%
% Matrizes M e N - sem termo não-linear - Capítulo4 : Ensaio 1
%
% zerar matrizes M e N
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        M(i,j)=0;
        M0(i,j)=0;
        N(i,j)=0;
    end
end
%
% Cálculo triângulo por triângulo
%
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6

```

```

    jgl= malha(k,jl);
    if (jgl ~= 0),
M0(igl,jgl)=M0(igl,jgl)+SMFI(il,jl);
M(igl,jgl)= M(igl,jgl)+(1+sig*dt/2)*SMFI(il,jl)+(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
N(igl,jgl)= N(igl,jgl)+(1-sig*dt/2)*SMFI(il,jl)-(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
    end
    end
    F(igl)= F(igl) + f(igl)*dx*dy/6;
    Ucha(igl)=Ucha(igl) + u0(igl)*dx*dy/6;
    end
end
end
[L U]=lu(M0);
v=L\Ucha;
u0=U\v;
*****

```

snlin412.m

```

%
% Solução do sistema não-linear
% Capítulo 4 Ensaio 1 e 2
%
% acerto da condição de contorno de Dirichlet
%
for i=1:2*nnx+1
    z(i,1)=0;
end
for j=1:2*nny+1
    z(2*nnx+1,j)=0;
end
%
% Solução do sistema não linear
%
u=u0;
%
for i=1:n
    i
    iext=i;
    ind=i;
    u00=u;
    mnaolin
    C=C+M;
    D=D+N;
    [L U]= lu(C);
    d=D*u + dt*F;
    w=L\d;
    u1=U*w;
    su(iext,1)=norm(u1-u00)/norm(u1);
    sAu(iext,1)=norm(C*u1-d)/norm(u1);
%
% Iterações internas
%
for l=1:ni
% 1
    iint=1;
    u=(u1+u00)/2;
    mnaolin
    C=C+M;

```

```

D=D+N;
[L U]= lu(C);
d=D*u00 + dt*F';
w=L\d;
u1=U*w;
su(iext,iint+1)=norm(u1-u)/norm(u1);
sAu(iext,iint+1)=norm(C*u1-d)/norm(u1);
end
%
% Volta ao sistema - solução final armazenada em u1
%
u=u1;
u14(ind+1)=u(14);
u52(ind+1)=u(52);
u64(ind+1)=u(64);
%
% gráfico da solução final
%
x=0:dx/2:xf;
y=0:dy/2:yf;
% O vetor z armazena a solução u1 em cada nó da malha
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        z(i+1,j+1)= u1((i-1)*2*nny+j);
    end
end
%
% para plotar o gráfico representando u1
%
mesh(y,x,z),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
drawnow
end
*****

mnaolin.m
%
% Monta a matriz do termo não-linear-Capítulo 4 - todos os ensaios
%
% zerar as matrizes
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        C(i,j)=0;
        D(i,j)=0;
    end
end
%
% cálculo das matrizes C e D
%
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    matri;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        C(igl,jgl)= C(igl,jgl)+(beta0*dt/2)*s;
        D(igl,jgl)= D(igl,jgl)-(beta0*dt/2)*s;
    end
end
end
end
end

```

matri.m

```

%
% Cálculos com a matriz tri-dimensional - Capítulo 4 - todos os ensaios
%

```

```

s=0; % variável que acumula a soma interna do termo não-linear

```

```

kl=1; % índice interno para cada triângulo da malha

```

```

kgl= malha(k,kl);

```

```

if (kgl ~= 0),

```

```

    s= s + u(kgl)*SMTRI1(il,jl);

```

```

end

```

```

kl=2;

```

```

kgl= malha(k,kl);

```

```

if (kgl ~= 0),

```

```

    s= s + u(kgl)*SMTRI2(il,jl);

```

```

end

```

```

kl=3;

```

```

kgl= malha(k,kl);

```

```

if (kgl ~= 0),

```

```

    s= s + u(kgl)*SMTRI3(il,jl);

```

```

end

```

```

kl=4;

```

```

kgl= malha(k,kl);

```

```

if (kgl ~= 0),

```

```

    s= s + u(kgl)*SMTRI4(il,jl);

```

```

end

```

```

kl=5;

```

```

kgl= malha(k,kl);

```

```

if (kgl ~= 0),

```

```

    s= s + u(kgl)*SMTRI5(il,jl);

```

```

end

```

```

kl=6;

```

```

kgl= malha(k,kl);

```

```

if (kgl ~= 0),

```

```

    s= s + u(kgl)*SMTRI6(il,jl);

```

```

end

```

fic4s10.m

```

%
% Plotar resultados do ensaio 1
%

```

```

x=0:dx/2:2*xf;

```

```

y=0:dy/2:2*yf;

```

```

for i=1:2*nnx+1

```

```

    for j=1:2*nny+1

```

```

        zc1(i,j)=z(i,j);

```

```

    end

```

```

end

```

```

for i=1:4*nnx+1

```

```

    zc1(i,4*nny+1)=0;
end
for j=1:4*nny+1
    zc1(4*nnx+1,j)=0;
end
for i=1:2*nnx-1
    for j=1:2*nny+1
        zc1(i+2*nnx+1,j)=zc1(2*nnx+1-i,j);
    end
end
for j=1:2*nny-1
    for i=1:4*nnx
        zc1(i,j+2*nny+1)=zc1(i,2*nny+1-j);
    end
end
%
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
pause
%
% Para o Ensaio 1 do Cap4 - cap4s1
%
plot(u14,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Densidade Populacional')
pause
plot(u52,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Densidade Populacional')
*****
cap4s2.m
%
% Programa principal - Difusão não-linear, migração
%
% Elementos finitos de ordem 2 - caso bidimensional - Capítulo4 - Ensaio2
%
clear all
%
t1=clock;
malha
%
% número de iterações
%
n=100;
ni=3;
%
sig=-0.05;
dt=0.12;
alfa0= 0.001; % difusividade - coeficiente linear
beta0=0.0001;
sumfi
sumgfi
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5
sumtri6
v1=0.002;
v2=0;
%
%
```

```

D1=v1*dy*[-1/15 1/10 -1/30 -1/30 0 1/30
-1/10 0 1/10 2/15 0 -2/15
1/30 -1/10 1/15 -1/30 0 1/30
1/30 -2/15 1/10 4/15 0 -4/15
1/30 0 -1/30 1/15 0 -1/15
-1/10 2/15 -1/30 4/15 0 -4/15];
%
D2=v2*dx*[-1/15 1/30 0 -1/30 -1/30 1/10
-1/10 -4/15 0 4/15 -1/30 2/15
1/30 -1/15 0 1/15 -1/30 0
1/30 -4/15 0 4/15 1/10 -2/15
1/30 1/30 0 -1/30 1/15 -1/10
-1/10 -2/15 0 2/15 1/10 0];
DM=D1+D2;
%
% função fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
end
f(4*nnx*nnny)=0.01;
f(4*nnx*nnny-1)=0.01;
f((2*nnx-1)*2*nnny)=0.01;
f((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.01;
%
% Vetor de condições iniciais
%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
end
%
% condição inicial no canto
%
u0(4*nnx*nnny)=0.5;
u0(4*nnx*nnny-1)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.5;
u14(1)=u0(14);
u52(1)=u0(52);
u64(1)=u0(64)
%
mlin42          % matriz da migração embutida
%
snlin412
%
% Gráfico no domínio completo
%
x=0:dx/2:2*xf;
y=0:dy/2:2*yf;
for i=1:2*nnx+1
    for j=1:2*nnny+1
        zc1(i,j)=z(i,j);
    end
end
for i=1:4*nnx+1
    zc1(i,4*nnny+1)=0;

```

```

end
for j=1:4*nny+1
    zc1(4*nnx+1,j)=0;
end
for i=1:2*nnx-1
    for j=1:2*nny+1
        zc1(i+2*nnx+1,j)=zc1(2*nnx+1-i,j);
    end
end
for j=1:2*nny-1
    for i=1:4*nnx
        zc1(i,j+2*nny+1)=zc1(i,2*nny+1-j);
    end
end
end
%
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
pause
figc4s2
te=etime(clock,t1); % tempo de execução
*****

mlin42.m
%
% Matrizes M e N - sem termo não-linear - para Capítulo2 - Ensaio2
%
% zerar matrizes M e N
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        M(i,j)=0;
        M0(i,j)=0;
        N(i,j)=0;
    end
end
%
% Cálculo triângulo por triângulo
%
for k=1:nt
    m=-1;
    for l=1:k
        m=-1*m;
    end
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    M0(igl,jgl)=M0(igl,jgl)+SMFI(il,jl);
                    M(igl,jgl)= M(igl,jgl)+(1+sig*dt/2)*SMFI(il,jl)+(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl)+m*(dt/2)*DM(il,jl);
                    N(igl,jgl)= N(igl,jgl)+(1-sig*dt/2)*SMFI(il,jl)-(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl)-m*(dt/2)*DM(il,jl);
                end
            end
            F(igl)= F(igl) + f(igl)*dx*dy/6;
            Ucha(igl)=Ucha(igl) + u0(igl)*dx*dy/6;
        end
    end
end
end
[L U]=lu(M0);

```

```

v=LUcha';
u0=Uv;
*****

figc4s2.m
%
% Plotar resultados do ensaio 2
%
%
% Acompanhamento dos nós
%
plot(u14,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Dens.Pop. no nó #14')
pause
plot(u52,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Dens.Pop. no nó #52')
pause
%
% Densidade Populacional no domínio completo
%
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
pause
contour(x,y,zc1,8,'b'),xlabel('eixo x'),ylabel('eixo y')
*****

cap4s3.m
%
% Programa principal
% Difusão não-linear, migração, Decaimento variável
%
% Elementos finitos de ordem 2 - caso bidimensional
%
clear all
%
% Programa para Capítulo4 - Ensaio3
%
t1=clock;
malha
%
% número de iterações
%
n=100;
ni=3;
%
dt=0.12;
alfa0= 0.007; % difusibilidade - coeficiente linear
beta0=0.007;
sumfi
sumgfi
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5
sumtri6
%
% Vetor de velocidades da migração
%
for i=1:n

```

```

W1(i)=0.05;
end
for i=1:n
    W2(i)=0;
end
%
D1=dy*[-1/15 1/10 -1/30 -1/30 0 1/30
        -1/10 0 1/10 2/15 0 -2/15
        1/30 -1/10 1/15 -1/30 0 1/30
        1/30 -2/15 1/10 4/15 0 -4/15
        1/30 0 -1/30 1/15 0 -1/15
        -1/10 2/15 -1/30 4/15 0 -4/15];
%
D2=dx*[-1/15 1/30 0 -1/30 -1/30 1/10
        -1/10 -4/15 0 4/15 -1/30 2/15
        1/30 -1/15 0 1/15 -1/30 0
        1/30 -4/15 0 4/15 1/10 -2/15
        1/30 1/30 0 -1/30 1/15 -1/10
        -1/10 -2/15 0 2/15 1/10 0];
%
% função fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
end
f(4*nnx*nnny)=0.01;
f(4*nnx*nnny-1)=0.01;
f((2*nnx-1)*2*nnny)=0.01;
f((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.01;
%
% Vetor de condições iniciais
%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
end
% condição inicial no canto
%
u0(4*nnx*nnny)=0.5;
u0(4*nnx*nnny-1)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.5;
%
w1=u0; % se quiser armazenar a condição inicial
mlin434
%
snlin43
% Gráfico no domínio completo
%
x=0:dx/2:2*xf;
y=0:dy/2:2*yf;
for i=1:2*nnx+1
    for j=1:2*nnny+1
        zc1(i,j)=z(i,j);
    end
end
end
for i=1:4*nnx+1

```

```

    zc1(i,4*nny+1)=0;
end
for j=1:4*nny+1
    zc1(4*nnx+1,j)=0;
end
for i=1:2*nnx-1
    for j=1:2*nny+1
        zc1(i+2*nnx+1,j)=zc1(2*nnx+1-i,j);
    end
end
for j=1:2*nny-1
    for i=1:4*nnx
        zc1(i,j+2*nny+1)=zc1(i,2*nny+1-j);
    end
end
%
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
drawnow
pause
figc4s3
te=etime(clock,t1); % tempo de execução
*****

m434.m
% Matrizes da parte linear - Ensaio 3 e 4
%
% Matrizes MI e NI - sem termo não-linear -
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        MI(i,j)=0;
        M0(i,j)=0;
        NI(i,j)=0;
    end
end
% Cálculo triângulo por triângulo
%
for k=1:nt
    m=-1;
    for l=1:k
        m=-1*m;
    end
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    M0(igl,jgl)= M0(igl,jgl)+SMGFI(il,jl);
                    MI(igl,jgl)= MI(igl,jgl)+(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
                    NI(igl,jgl)= NI(igl,jgl)-(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
                end
            end
        end
        F(igl)= F(igl) + f(igl)*dx*dy/6;
        Ucha(igl)= Ucha(igl) + u0(igl)*dx*dy/6;
    end
end
end
end
end

```

```

[L U]=lu(M0);
v=L\Ucha';
u0=U\v;
*****
snlin43.m
% Solução do sistema não-linear - Ensaio3
%
x=0:dx/2:xf;
y=0:dy/2:yf;
%
% acerto da condição de contorno de Dirichlet
%
for i=1:2*nnx+1
    z(i,1)=0;
end
for j=1:2*nny+1
    z(2*nnx+1,j)=0;
end
% Solução do sistema não linear
%
u=u0;
for j=1:n
    u14(j)=0;
    u52(j)=0;
end
%
u14(1)=w1(14);
u52(1)=w1(52);
arg=(2*pi/dt)*(1/(100+1/2));
im=0;
for i=1:n
    i
    iext=i;
    u00=u;
    sig(im+1)=(0.15/2)*(sin(arg*dt*(i+1/2))+1)-0.1;
    vamort2
    mnaolin
    mmig
    M=M+MI+MG;
    N=N+NI+NG;
    C=C+M;
    D=D+N;
    [L U]= lu(C);
    d=D*u + dt*F';
    w=L\d;
    u1=U\w;
    su(iext,1)=norm(u1-u00)/norm(u1);
    sAu(iext,1)=norm(C*u1-d)/norm(u1);
% Iterações internas
%
for l=1:ni
    iint=l;
    u=(u1+u00)/2;
    mnaolin
    C=C+M;
    D=D+N;
    [L U]= lu(C);

```

```

d=D*u00 + dt*F';
w=L\d;
u1=U*w;
su(iext,iint+1)=norm(u1-u)/norm(u1);
sAu(iext,iint+1)=norm(C*u1-d)/norm(u1);
end
% Volta ao sistema linear - solução final armazenada em u1
%
im=im+1;
u=u1;
u14(iext+1)=u(14);
u52(iext+1)=u(52);
% gráfico da solução final
%
% O vetor z armazena a solução u1 em cada nó da malha
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        z(i+1,j+1)= u1((i-1)*2*nny+j);
    end
end
mesh(y,x,z),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
drawnow
end
*****

```

mmig.m

% Matrizes MG e NG - matrizes da migração - Capítulo4 - Ensaio 3 e 4

```

%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        MG(i,j)=0;
        NG(i,j)=0;
    end
end
% Cálculo triângulo por triângulo
%
for k=1:nt
    m=-1;
    for l=1:k
        m=-1*m;
    end
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    MG(igl,jgl)= MG(igl,jgl)+m*(dt/2)*(W1(im+1)*D1(il,jl)+W2(im+1)*D2(il,jl));
                    NG(igl,jgl)= NG(igl,jgl)-m*(dt/2)*(W1(im+1)*D1(il,jl)+W2(im+1)*D2(il,jl));
                end
            end
        end
    end
end
end
*****

```

vamort2.m

% Programa para Capítulo4 - Ensaio 3 e 4

```

%
% Matrizes M e N para o caso sigma=sigma(t)
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        M(i,j)=0;
        N(i,j)=0;
    end
end
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl=malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl=malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    M(igl,jgl)=M(igl,jgl)+(1+sig(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);
                    N(igl,jgl)=N(igl,jgl)+(1-sig(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);
                end
            end
        end
    end
end
end
*****
figc4s3.m
% Para desenhar resultados do ensaio 3
%
% Acompanhamento dos nós
%
plot(u14,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Dens.Pop. no nó #14')
pause
plot(u52,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Dens.Pop. no nó #52')
pause
%Densidade Populacional no domínio completo
%
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
pause
contour(x,y,zc1,8,'b'),xlabel('eixo x'),ylabel('eixo y')
pause
%Mortalidade Variável
%
plot(sig,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Decaimento devido a hostilidade do meio')
*****
cap4s4.m
% Programa principal - Difusão não-linear - Migração e decaimento variáveis no tempo
% Programa para Capítulo4 - Ensaio4
%
clear all
t1=clock;
malha
% número de iterações
%
n=100;
T=50; % índice do período das funções migração e mortalidade
ni=1;

```

```

%
dt=0.12;
alfa0= 0.007; % difusividade - coeficiente linear
beta0=0.007;
sumfi
sumgfi
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5
sumtri6
% Definição do vetor de velocidades da migração
%
k=round(T/2);
for i=1:k
    W1(i)=0;
end
for j=k+1:T
    W1(j)=0.05;
end
if (n > T),
    for l=T+1:n
        W1(l)=W1(l-T);
    end
end
for i=1:n
    W2(i)=0;
end
for i=1:T
    sig(i)=0.002*i-0.052;
end
if (n > T),
    for i=T+1:n
        sig(i)=sig(i-T);
    end
end
%
D1=dy*[-1/15 1/10 -1/30 -1/30 0 1/30
        -1/10 0 1/10 2/15 0 -2/15
        1/30 -1/10 1/15 -1/30 0 1/30
        1/30 -2/15 1/10 4/15 0 -4/15
        1/30 0 -1/30 1/15 0 -1/15
        -1/10 2/15 -1/30 4/15 0 -4/15];
%
D2=dx*[-1/15 1/30 0 -1/30 -1/30 1/10
        -1/10 -4/15 0 4/15 -1/30 2/15
        1/30 -1/15 0 1/15 -1/30 0
        1/30 -4/15 0 4/15 1/10 -2/15
        1/30 1/30 0 -1/30 1/15 -1/10
        -1/10 -2/15 0 2/15 1/10 0];
% função fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
end
%af(4*nnx*ny)=0.01;

```

```

%f(4*nnx*ny-1)=0.01;
%f((2*nnx-1)*2*ny)=0.01;
%f((2*nnx-1)*2*ny-1)=0.01;
%
% Vetor de condições iniciais
%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
end
% condição inicial no canto
%
u0(4*nnx*ny)=0.5;
u0(4*nnx*ny-1)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*ny)=0.5;
u0((2*nnx-1)*2*ny-1)=0.5;
%
mlin434
%
snlin44
% Gráfico no domínio completo
%
x=0:dx/2:2*xf;
y=0:dy/2:2*yf;
for i=1:2*nnx+1
    for j=1:2*ny+1
        zc1(i,j)=z(i,j);
    end
end
for i=1:4*nnx+1
    zc1(i,4*ny+1)=0;
end
for j=1:4*ny+1
    zc1(4*nnx+1,j)=0;
end
for i=1:2*nnx-1
    for j=1:2*ny+1
        zc1(i+2*nnx+1,j)=zc1(2*nnx+1-i,j);
    end
end
for j=1:2*ny-1
    for i=1:4*nnx
        zc1(i,j+2*ny+1)=zc1(i,2*ny+1-j);
    end
end
%
mesh(y,x,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
drawnow
pause
for i=1:100
    p(i)=i;
end
figc4s4
te=etime(clock,t1): % tempo de execução
*****
snlin44.m
% Solução do sistema não-linear - para Capítulo4 - Ensaio 4

```

```

%
x=0:dx/2:xf;
y=0:dy/2:yf;
% acerto da condição de contorno de Dirichlet
%
for i=1:2*nnx+1
    z(i,1)=0;
end
for j=1:2*nny+1
    z(2*nnx+1,j)=0;
end
% Solução do sistema não linear
%
u=u0;
for j=1:n
    u14(j)=0;
    u52(j)=0;
end
%
u14(1)=u0(14);
u52(1)=u0(52);
im=0;
for i=1:n
    i
    iext=i;
    u00=u;
    vamort2
    mnaolin
    mmig
    M=M+MI+MG;
    N=N+NI+NG;
    C=C+M;
    D=D+N;
    [L U]=lu(C);
    d=D*u + dt*F';
    w=L\d;
    u1=U\w;
    su(iext,1)=norm(u1-u00)/norm(u1);
    sAu(iext,1)=norm(C*u1-d)/norm(u1);
% Iterações internas
%
for l=1:ni
    iint=1;
    u=(u1+u00)/2;
    mnaolin
    C=C+M;
    D=D+N;
    [L U]=lu(C);
    d=D*u00 + dt*F';
    w=L\d;
    u1=U\w;
    su(iext,iint+1)=norm(u1-u)/norm(u1);
    sAu(iext,iint+1)=norm(C*u1-d)/norm(u1);
end
% Volta ao sistema linear - solução final armazenada em u1
%
im=im+1;
u=u1;

```

```

u14(iext+1)=u(14);
u52(iext+1)=u(52);
end
% Situação intermediária
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        z(i+1,j+1)= u1((i-1)*2*nny+j);
    end
end
mesh(y,x,z),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
drawnow
*****

figc4s4.m
% Para desenhar resultados do Ensaio4
%
%Acompanhamento dos nós
%
plot(u14,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Dens.Pop. no nó #14')
pause
plot(u52,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Dens. Pop. no nó #52')
pause
%Densidade Populacional no domínio completo
%
mesh(x,y,zc1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade Populacional')
pause
contour(x,y,zc1,8,'b'),xlabel('eixo x'),ylabel('eixo y')
%Densidade Populacional em 1/4 do domínio
%
x=0:dx/2:xf;
y=0:dy/2:yf;
surf(x,y,z'),title('Figura8(c): 1/4 do domínio'),xlabel('eixo x'),ylabel('eixo y'),zlabel('Densidade Populacional')
pause
%Mortalidade Variável
%
plot(p,sig,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('Decaimento Populacional')
pause
%Migração Variável
%
plot(W1,'b'),xlabel('Iteração no tempo'),ylabel('W1: velocidade na direção dos x')
*****

```

PROGRAMAS PARA CAPÍTULO 5

cap5s1.m

```

%
% Programa principal - SISTEMA DE EDPs - Coeficientes constantes e sem migração.
% Elementos finitos de ordem 2 - caso bidimensional
% Primeiro caso : 5.1.4.1
%
clear all
t1=clock;
malha2

```

```

dt=0.25;
% número de iterações
%
n=100;
ni=2;
%
alfa0=0.005; % difusibilidade espécie 1 - constante
beta0=0.005; % difusibilidade espécie 2 - constante
sig=-0.05;
mi=-0.05;
r=-0.01; % coef. interação espécie u ; no caso do sistema presa-predador trocar o sinal
s=-0.01; % coef. interação espécie v
% funções fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
    G(i)=0;
    g(i)=0;
end
% Vetores de condições iniciais
%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
    v0(i)=0;
    Vcha(i)=0;
end
% condição inicial no canto - espécie1
%
u0(4*nnx*nny)=5;
u0(4*nnx*nny-1)=5;
u0((2*nnx-1)*2*nny)=5;
u0((2*nnx-1)*2*nny-1)=5;
% condição inicial no meio - espécie2
%
v0(19)=6;
v0(20)=6;
v0(25)=6;
v0(26)=6;
% Acompanhamento de nós da malha
%
u16(1)=u0(16);
v16(1)=v0(16);
u23(1)=u0(23);
v23(1)=v0(23);
ui=u0;
vi=v0;
grafci
pause
%
sumfi
sumgf
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5

```

```

sumtri6
sumtri1;
sumtri2;
sumtri3;
sumtri4;
sumtri5;
sumtri6;
%
mlinuv
slnin51
te=etime(clock,t1); % tempo de execução
*****

malha2.m
%
% geração da malha para elementos finitos de ORDEM 2 - Capítulos 5 e 6
% CASO bidimensional - C.C. DIRICHLET e Neumann (simetria)
%
nny=3; % número de linhas horizontais sem o eixo x
nnx=3; % número de linhas verticais sem o eixo y
nn= 4*nnx*nny; % número de nós da malha
xf=1;
yf=1;
dx=xf/nnx;
dy=yf/nny;
dnn= 2*nny; % número de nós por coluna
nt= 2*nnx*nny; % número de triângulos da malha
%
% zerando a matriz malha
%
for i=1:nt
    for j=1:6
        malha(i,j)= 0;
    end
end
%
% primeiras dnn linhas da matriz malha
%
for k=1:nny
    i= 2*k-1;
    malha(i,4)= i;
    malha(i+1,4)=i;
    malha(i,2)= i-1;
    malha(i+1,2)= i+1;
    malha(i,3)= i+(dnn-1);
    malha(i+1,5)= i+(dnn-1);
    malha(i+1,1)= i+(dnn+1);
    malha(i+1,6)= i+dnn;
end
%
% voltar com os zeros da fronteira e demais
%
malha(1,3)= 0;
malha(2,5)= 0;
malha(1,2)= 0;
%
% demais linhas da matriz malha
%
```

```

for kb=1:(nnx-1)
  t= 2*kb*nny;
  for k=1:nny
    i= 2*k-1;
    malha(t+i,4)= 2*t+i;
    malha(t+i+1,4)= 2*t+i;
    malha(t+i,2)= 2*t+i-1;
    malha(t+i+1,2)= 2*t+i+1;
    malha(t+i,3)= 2*t+i+(dnnny-1);
    malha(t+i+1,3)= 2*t+i-(dnnny-1);
    malha(t+i,5)= 2*t+i-(dnnny-1);
    malha(t+i+1,5)= 2*t+i+(dnnny-1);
    malha(t+i,1)= 2*t+i-(dnnny+1);
    malha(t+i+1,1)= 2*t+i+(dnnny+1);
    malha(t+i,6)= 2*t+i-dnnny;
    malha(t+i+1,6)= 2*t+i+dnnny;
  end
end
%
% voltar com os zeros
%
for kb=1:(nnx-1)
  l= 2*kb*nny+1;
  malha(l,1)=0;
  malha(l,2)=0;
  malha(l,3)=0;
  malha(l+1,5)=0;
end
*****

```

Matrizes tri-dimensionais - Capítulos 5 e 6

sumitri1.m

```

%
% Matriz da primeira faixa do bloco tri - termo não linear da interação entre as
espécies
SMITRI1= dx*dy*[1/140 1/210 -1/1260 1/630 -1/1260 1/210
  1/210 0 -1/630 -1/315 0 0
 -1/1260 -1/630 -1/1260 0 1/2520 0
 1/630 -1/315 0 -2/315 0 -1/315
 -1/1260 0 1/2520 0 -1/1260 -1/630
 1/210 0 0 -1/315 -1/630 0];

```

sumitri2.m

```

%
% Matriz da segunda faixa do bloco tri - termo não linear da interação entre as
espécies
SMITRI2= dx*dy*[1/210 0 -1/630 -1/315 0 0
 0 2/35 0 2/105 -2/315 2/105
 -1/630 0 1/210 0 0 -1/315
 -1/315 2/105 0 2/105 -1/315 4/315
 0 -2/315 0 -1/315 1/630 -1/315
 0 2/105 -1/315 4/315 -1/315 2/105];

```

sumitri3.m

%

% Matriz da terceira faixa do bloco tri - termo não linear da interação entre as espécies

```
SMITRI3= dx*dy*[-1/1260 -1/630 -1/1260 0 1/2520 0
-1/630 0 1/210 0 0 -1/315
-1/1260 1/210 1/140 1/210 -1/1260 1/630
0 0 1/210 0 -1/630 -1/315
1/2520 0 -1/1260 -1/630 -1/1260 0
0 -1/315 1/630 -1/315 0 -2/315];
```

sumitri4.m

%

% Matriz da quarta faixa do bloco tri - termo não linear da interação entre as espécies

```
SMITRI4= dx*dy*[1/630 -1/315 0 -2/315 0 -1/315
-1/315 2/105 0 2/105 -1/315 4/315
0 0 1/210 0 -1/630 -1/315
-2/315 2/105 0 2/35 0 2/105
0 -1/315 -1/630 0 1/210 0
-1/315 4/315 -1/315 2/105 0 2/105];
```

sumitri5.m

%

% Matriz da quinta faixa do bloco tri - termo não linear da interação entre as espécies

```
SMITRI5= dx*dy*[-1/1260 0 1/2520 0 -1/1260 -1/630
0 -2/315 0 -1/315 1/630 -1/315
1/2520 0 -1/1260 -1/630 -1/1260 0
0 -1/315 -1/630 0 1/210 0
-1/1260 1/630 -1/1260 1/210 1/140 1/210
-1/630 -1/315 0 0 1/210 0];
```

sumitri6.m

%

% Matriz da sexta faixa do bloco tri - termo não linear da interação entre as espécies

```
SMITRI6= dx*dy*[1/210 0 0 -1/315 -1/630 0
0 2/105 -1/315 4/315 -1/315 2/105
0 -1/315 1/630 -1/315 0 -2/315
-1/315 4/315 -1/315 2/150 0 2/105
-1/630 -1/315 0 0 1/210 0
0 2/105 -2/315 2/105 0 2/35];
```

mliuv.m

%

% Matrizes MIu, NIu, MIV, NIV - sem termo não-linear - para Capítulo5 - Ensaio1

%

```
for i=1:nn
for j=1:nn
M0(i,j)=0;
MIu(i,j)=0;
```

```

    Nlu(i,j)=0;
    Mlv(i,j)=0;
    Nlv(i,j)=0;
end
end
% Cálculo triângulo por triângulo
%
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    M0(igl,jgl)= M0(igl,jgl)+SMFI(il,jl);
                    Mlu(igl,jgl)= Mlu(igl,jgl)+(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl)+(1+sig*dt/2)*SMFI(il,jl);
                    Nlu(igl,jgl)= Nlu(igl,jgl)-(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl)+(1-sig*dt/2)*SMFI(il,jl);
                    Mlv(igl,jgl)= Mlv(igl,jgl)+(beta0*dt/2)*SMGFI(il,jl)+(1+mi*dt/2)*SMFI(il,jl);
                    Nlv(igl,jgl)= Nlv(igl,jgl)-(beta0*dt/2)*SMGFI(il,jl)+(1-mi*dt/2)*SMFI(il,jl);
                end
            end
            end
            F(igl)= F(igl) + f(igl)*dx*dy/6;
            G(igl)= G(igl) + g(igl)*dx*dy/6;
            Ucha(igl)= Ucha(igl) + u0(igl)*dx*dy/6;
            Vcha(igl)= Vcha(igl) + v0(igl)*dx*dy/6;
        end
    end
end
end
[L U]=lu(M0);
w=L\Ucha';
u0=U\w;
q=L\Vcha';
v0=U\q;
*****

```

snlin51.m

```

%
% Solução do sistema não-linear - para Capítulo5 - Ensaio 1
%
x=0:dx/2:xf;
y=0:dy/2:yf;
% acerto da condição de contorno de Dirichlet
%
for i=1:2*nnx+1
    zu(i,1)=0;
    zv(i,1)=0;
end
for j=1:2*nny+1
    zu(2*nnx+1,j)=0;
    zv(2*nnx+1,j)=0;
end
% Solução do sistema não linear
%
u=u0;
v=v0;
im=0;
for i=1:2.5

```

```

i
u00=u;
v00=v;
mnaolinu
C1=C1+M\u;
D1=D1+N\u;
[L U]= lu(C1);
du=D1*u + dt*F';
wu=L\du;
u1=U\wu;
u=(u1+u)/2;
mnaolinv;
C2=C2+M\v;
D2=D2+N\v;
[Li Ui]= lu(C2);
dv=D2*v00 + dt*G';
wv=Li\dv;
v1=Ui\wv;
v=(v1+v)/2;
% Iterações internas
%
for l=1:ni
    mnaolinu
    C1=C1+M\u;
    D1=D1+N\u;
    [Lj Uj]= lu(C1);
    du=D1*u00 + dt*F';
    wu=Lj\du;
    u1=Uj\wu;
    u=(u1+u00)/2;
    mnaolinv
    C2=C2+M\v;
    D2=D2+N\v;
    [Li Ui]= lu(C2);
    dv=D2*v00 + dt*G';
    wv=Li\dv;
    v1=Ui\wv;
    v=(v1+v00)/2;
end
% Volta ao sistema linear - solução final armazenada em u1
%
im=im+1;
u=u1;
v=v1;
% Acompanhamento de dois nós da malha
%
u16(im+1)=u(16);
v16(im+1)=v(16);
u23(im+1)=u(23);
v23(im+1)=v(23);
% Situação intermediária
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        zu(i+1,j+1)= u((i-1)*2*nny+j);
        zv(i+1,j+1)= v((i-1)*2*nny+j);
    end
end
end

```

```

surf(y,x,zu),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie1')
drawnow
pause(1)
surf(y,x,zv),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie2')
drawnow
end
pause %solução para 25 iterações
for i=1:n-25
% i
u00=u;
v00=v;
mnaolinu
C1=C1+M\u;
D1=D1+N\u;
[L U]= lu(C1);
du=D1*u + dt*F';
wu=L\du;
u1=U\wu;
u=(u1+u)/2;
mnaolinv;
C2=C2+M\v;
D2=D2+N\v;
[Li Ui]= lu(C2);
dv=D2*v00 + dt*G';
wv=Li\dv;
v1=Ui\wv;
v=(v1+v)/2;
% Iterações internas
%
for l=1:ni
mnaolinu
C1=C1+M\u;
D1=D1+N\u;
[Lj Uj]= lu(C1);
du=D1*u00 + dt*F';
wu=Lj\du;
u1=Uj\wu;
u=(u1+u00)/2;
mnaolinv
C2=C2+M\v;
D2=D2+N\v;
[Li Ui]= lu(C2);
dv=D2*v00 + dt*G';
wv=Li\dv;
v1=Ui\wv;
v=(v1+v00)/2;
end
% Volta ao sistema linear - solução final armazenada em u1
%
im=im+1;
u=u1;
v=v1;
% Acompanhamento de dois nós da malha
%
u16(im+1)=u(16);
v16(im+1)=v(16);
u23(im+1)=u(23);
v23(im+1)=v(23);

```

```

% Situação intermediária
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        zu(i+1,j+1)= u((i-1)*2*nny+j);
        zv(i+1,j+1)= v((i-1)*2*nny+j);
    end
end
surf(y,x,zu),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie1')
drawnow
pause(1)
surf(y,x,zv),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie2')
drawnow
end
*****

```

mnaolinu.m

% Monta a matriz do termo não-linear espécie 1-Capítulo 5

```

%
% zerar as matrizes
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        C1(i,j)=0;
        D1(i,j)=0;
    end
end
%
% cálculo das matrizes C1 e D1
%
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    Matriuv;
                    C1(igl,jgl)= C1(igl,jgl)+(r*dt/2)*sv2;
                    D1(igl,jgl)= D1(igl,jgl)-(r*dt/2)*sv2;
                end
            end
        end
    end
end
end
*****

```

matriuv.m

```

%
% Cálculos com a matrizes tri-dimensionais - Capítulos 5 e 6
%
su1=0; % difusão não-linear da espécie 1
sv1=0; % difusão não-linear da espécie 2
su2=0; % dinâmica vital não linear + interação entre as espécies
sv2=0;
kl=1; % índice interno para cada triângulo da malha
kgl= malha(k,kl);

```

```

if (kgl ~= 0),
    su1= su1 + u(kgl)*SMTRI1(il,jl);
    sv1= sv1 + v(kgl)*SMTRI1(il,jl);
    su2= su2 + u(kgl)*SMTRI1(il,jl);
    sv2= sv2 + v(kgl)*SMTRI1(il,jl);
end
kl=2;
kgl= malha(k,kl);
if (kgl ~= 0),
    su1= su1 + u(kgl)*SMTRI2(il,jl);
    sv1= sv1 + v(kgl)*SMTRI2(il,jl);
    su2= su2 + u(kgl)*SMTRI2(il,jl);
    sv2= sv2 + v(kgl)*SMTRI2(il,jl);
end
kl=3;
kgl= malha(k,kl);
if (kgl ~= 0),
    su1= su1 + u(kgl)*SMTRI3(il,jl);
    sv1= sv1 + v(kgl)*SMTRI3(il,jl);
    su2= su2 + u(kgl)*SMTRI3(il,jl);
    sv2= sv2 + v(kgl)*SMTRI3(il,jl);
end
kl=4;
kgl= malha(k,kl);
if (kgl ~= 0),
    su1= su1 + u(kgl)*SMTRI4(il,jl);
    sv1= sv1 + v(kgl)*SMTRI4(il,jl);
    su2= su2 + u(kgl)*SMTRI4(il,jl);
    sv2= sv2 + v(kgl)*SMTRI4(il,jl);
end
kl=5;
kgl= malha(k,kl);
if (kgl ~= 0),
    su1= su1 + u(kgl)*SMTRI5(il,jl);
    sv1= sv1 + v(kgl)*SMTRI5(il,jl);
    su2= su2 + u(kgl)*SMTRI5(il,jl);
    sv2= sv2 + v(kgl)*SMTRI5(il,jl);
end
kl=6;
kgl= malha(k,kl);
if (kgl ~= 0),
    su1= su1 + u(kgl)*SMTRI6(il,jl);
    sv1= sv1 + v(kgl)*SMTRI6(il,jl);
    su2= su2 + u(kgl)*SMTRI6(il,jl);
    sv2= sv2 + v(kgl)*SMTRI6(il,jl);
end
*****

```

mnaolinv.m

```

%
% Monta a matriz do termo não-linear espécie 2 - Capítulo 5
%
% zerar as matrizes
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        C2(i,j)=0;
    end
end

```

```

    D2(i,j)=0;
end
end
% cálculo das matrizes C2 e D2
%
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    Matriuv;
                    C2(igl,jgl)= C2(igl,jgl)+(s*dt/2)*su2;
                    D2(igl,jgl)= D2(igl,jgl)-(s*dt/2)*su2;
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
*****

```

grafmut.m

```

%
% Desenha as soluções no caso do mutualismo
%
% Gráfico no domínio completo
%
x=0:dx/2:2*xf;
y=0:dy/2:2*yf;
for i=1:2*nnx+1
    for j=1:2*nny+1
        zcu1(i,j)=zu(i,j);
        zcv1(i,j)=zv(i,j);
    end
end
for i=1:4*nnx+1
    zcu1(i,4*nny+1)=0;
    zcv1(i,4*nny+1)=0;
end
for j=1:4*nny+1
    zcu1(4*nnx+1,j)=0;
    zcv1(4*nnx+1,j)=0;
end
for i=1:2*nnx-1
    for j=1:2*nny+1
        zcu1(i+2*nnx+1,j)=zcu1(2*nnx+1-i,j);
        zcv1(i+2*nnx+1,j)=zcv1(2*nnx+1-i,j);
    end
end
for j=1:2*nny-1
    for i=1:4*nnx
        zcu1(i,j+2*nny+1)=zcu1(i,2*nny+1-j);
        zcv1(i,j+2*nny+1)=zcv1(i,2*nny+1-j);
    end
end
%

```

```

mesh(y,x,zcu1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade pop. espécie u')
drawnow
pause
mesh(y,x,zcv1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade pop. espécie v')
drawnow
pause
for i=1:101
    s(i)=i;
end
plot(s,u16,'b'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade populacional no nó 16')
pause
plot(s,v16,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade populacional no nó 16')
pause
plot(s,u16,'b',s,v16,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade pop. no nó 16')
pause
plot(s,u23,'b'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade populacional no nó 23')
pause
plot(s,v23,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade populacional no nó 23')
pause
plot(s,u23,'b',s,v23,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade pop. no nó 23')

```

grafpp.m

```

%
% Desenha as soluções no caso presa-predador
%
% Gráfico no domínio completo
%
x=0:dx/2:2*xf;
y=0:dy/2:2*yf;
for i=1:2*nnx+1
    for j=1:2*nny+1
        zcu1(i,j)=zu(i,j);
        zcv1(i,j)=zv(i,j);
    end
end
for i=1:4*nnx+1
    zcu1(i,4*nny+1)=0;
    zcv1(i,4*nny+1)=0;
end
for j=1:4*nny+1
    zcu1(4*nnx+1,j)=0;
    zcv1(4*nnx+1,j)=0;
end
for i=1:2*nnx-1
    for j=1:2*nny+1
        zcu1(i+2*nnx+1,j)=zcu1(2*nnx+1-i,j);
        zcv1(i+2*nnx+1,j)=zcv1(2*nnx+1-i,j);
    end
end
for j=1:2*nny-1
    for i=1:4*nnx
        zcu1(i,j+2*nny+1)=zcu1(i,2*nny+1-j);
        zcv1(i,j+2*nny+1)=zcv1(i,2*nny+1-j);
    end
end
mesh(y,x,zcu1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade de presas')
drawnow

```

```

pause
mesh(y,x,zcv1),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Densidade de predadores')%,axis([0 2 0 2 0 4])
drawnow
pause
for i=1:101
    s(i)=i;
end
plot(s,u16,'b'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade de presas no nó 16')
pause
plot(s,v16,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade de predadores no nó 16')
pause
plot(s,u16,'b',s,v16,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade populacional')
pause
plot(s,u23,'b'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade de presas no nó 23')
pause
plot(s,v23,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade de predadores no nó 23')
pause
plot(s,u23,'b',s,v23,'r'),xlabel('tempo'),ylabel('Densidade pop. no nó 23')
*****

```

cap5s2.m

```

%
% Programa principal - SISTEMA DE EDPs - Capítulo 5
% Campo de velocidades - elementos finitos de ordem 2 - caso bidimensional
% Ensaios dos itens 5.1.5.2 , 5.2.4.1 e 5.2.4.2
%
clear all
t1=clock;
malha2
dt=0.25;
alfa0=0.005; % difusibilidade espécie 1 - coeficiente linear
alfa1=0; % difusibilidade espécie 1 - coeficiente não-linear
beta0=0.005; % difusibilidade espécie 2 - coeficiente linear
beta1=0; % difusibilidade espécie 2 - coeficiente não-linear
a=0;
r=0.01; % presa-predador
c=0;
s=-0.01;
sumfi
sumgfi
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5
sumtri6
sumitri1;
sumitri2;
sumitri3;
sumitri4;
sumitri5;
sumitri6;
% número de iterações
%
n=100;
T=20; % índice do periodo das funções migração e mortalidade
ni=2;
% Definição dos vetores de velocidades da migração

```

```

%
pe=round(T/2);
for i=1:pe
    Wu1(i)=0;
    Wv1(i)=0;
end
for j=pe+1:T
    Wu1(j)=0;
    Wv1(j)=0;
end
if (n > T),
    for l=T+1:n
        Wu1(l)=Wu1(l-T);
        Wv1(l)=Wv1(l-T);
    end
end
for i=1:n
    Wu2(i)=0;
    Wv2(i)=0;
end
% Coeficientes de decaimento
%
for i=1:pe
    sig(i)=-0.05;
    mi(i)=-0.01;
end
for i=pe+1:T
    sig(i)=-0.005;
    mi(i)=-0.001;
end
if (n > T),
    for i=T+1:n
        sig(i)=sig(i-T);
        mi(i)=mi(i-T);
    end
end
%
V1=dy*[-1/15 1/10 -1/30 -1/30 0 1/30
        -1/10 0 1/10 2/15 0 -2/15
        1/30 -1/10 1/15 -1/30 0 1/30
        1/30 -2/15 1/10 4/15 0 -4/15
        1/30 0 -1/30 1/15 0 -1/15
        -1/10 2/15 -1/30 4/15 0 -4/15];
V2=dx*[-1/15 1/30 0 -1/30 -1/30 1/10
        -1/10 -4/15 0 4/15 -1/30 2/15
        1/30 -1/15 0 1/15 -1/30 0
        1/30 -4/15 0 4/15 1/10 -2/15
        1/30 1/30 0 -1/30 1/15 -1/10
        -1/10 -2/15 0 2/15 1/10 0];
% funções fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
    G(i)=0;
    g(i)=0;
end
% Vetores de condições iniciais

```

```

%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
    v0(i)=0;
    Vcha(i)=0;
end
% condição inicial no canto - espécie1
%
u0(4*nnx*ny)=5;
u0(4*nnx*ny-1)=5;
u0((2*nnx-1)*2*ny)=5;
u0((2*nnx-1)*2*ny-1)=5;
% condição inicial no canto - espécie2
%
v0(19)=6;
v0(20)=6;
v0(25)=6;
v0(26)=6;
% Acompanhamento de dois nós da malha
%
u16(1)=u0(16);
v16(1)=v0(16);
u23(1)=u0(23);
v23(1)=v0(23);
ui=u0;
%
mlinuv2
%
smlin52
te=etime(clock,t1); % tempo de execução
*****

mlinuv2.m
%
% Matrizes Mu, Nu, Mv, Nv - sem termo não-linear - para Capítulos 5 e 6
%
% zerar matrizes
for i=1:nn
    for j=1:nn
        M0(i,j)=0;
        Mu(i,j)=0;
        Nu(i,j)=0;
        Mv(i,j)=0;
        Nv(i,j)=0;
    end
end
%
% Cálculo triângulo por triângulo
%
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    M0(igl,jgl)= M0(igl,jgl)+SMFI(il,jl);
                end
            end
        end
    end
end

```

```

Mlu(igl,jgl)= Mlu(igl,jgl)+(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
Nlu(igl,jgl)= Nlu(igl,jgl)-(alfa0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
Mlv(igl,jgl)= Mlv(igl,jgl)+(beta0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
Nlv(igl,jgl)= Nlv(igl,jgl)-(beta0*dt/2)*SMGFI(il,jl);
end
end
F(igl)= F(igl) + f(igl)*dx*dy/6;
G(igl)= G(igl) + g(igl)*dx*dy/6;
Ucha(igl)= Ucha(igl) + u0(igl)*dx*dy/6;
Vcha(igl)= Vcha(igl) + v0(igl)*dx*dy/6;
end
end
end
[L U]=lu(M0);
w=L\Ucha';
u0=U\w;
q=L\Vcha';
v0=U\q;
*****
nlin52.m
% Solução do sistema não-linear - para Capítulo5 - Ensaio 2
%
% montagem da malha para as soluções gráficas
%
x=0:dx/2:xf;
y=0:dy/2:yf;
%
% acerto da condição de contorno de Dirichlet
%
for i=1:2*nnx+1
    zu(i,1)=0;
    zv(i,1)=0;
end
for j=1:2*nny+1
    zu(2*nnx+1,j)=0;
    zv(2*nnx+1,j)=0;
end
% Solução do sistema não linear
%
u=u0;
v=v0;
im=0;
for i=1:n
    %
    % i
    u00=u;
    v00=v;
    vamortuv
    mnaolinu
    mmiguv
    Mu=Mu+Mlu+MGU;
    Nu=Nu+Nlu+NGU;
    C1=C1+Mu;
    D1=D1+Nu;
    [L U]= lu(C1);
    du=D1*u + dt*F';
    wu=L\du;

```

```

u1=U\wu;
u=(u1+u)/2;
mnaolinv;
Mv=Mv+Mlv+MGv;
Nv=Nv+Nlv+NGv;
C2=C2+Mv;
D2=D2+Nv;
[Li Ui]= lu(C2);
dv=D2*v00 + dt*'G';
wv=Li\dv;
v1=Ui\wv;
v=(v1+v)/2;
%
% Iterações internas
%
for l=1:ni
    mnaolinu
    C1=C1+Mu;
    D1=D1+Nu;
    [Lj Uj]= lu(C1);
    du=D1*u00 + dt*'F';
    wu=Lj\du;
    u1=Uj\wu;
    u=(u1+u00)/2;
    mnaolinv
    C2=C2+Mv;
    D2=D2+Nv;
    [Li Ui]= lu(C2);
    dv=D2*v00 + dt*'G';
    wv=Li\dv;
    v1=Ui\wv;
    v=(v1+v00)/2;
end
% Volta ao sistema linear - solução final armazenada em u1
%
im=im+1;
u=u1;
v=v1;
%
% Acompanhamento de dois nós da malha
%
u16(im+1)=u(16);
v16(im+1)=v(16);
u23(im+1)=u(23);
v23(im+1)=v(23);
%
% Situação intermediária
%
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        zu(i+1,j+1)= u((i-1)*2*nny+j);
        zv(i+1,j+1)= v((i-1)*2*nny+j);
    end
end
surf(y,x,zu),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie1')
drawnow
pause(1)

```

```

surf(y,x,zv),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie2')
drawnow
end
*****

vamortuv.m
%
% Programa para Capítulo5 - Ensaio 2 - variações na mortalidade
%
% Matrizes Mu, Nu, Mv, Nv
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        Mu(i,j)=0;
        Nu(i,j)=0;
        Mv(i,j)=0;
        Nv(i,j)=0;
    end
end
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl=malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl=malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    Mu(igl,jgl)=Mu(igl,jgl)+(1+sig(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);
                    Nu(igl,jgl)=Nu(igl,jgl)+(1-sig(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);
                    Mv(igl,jgl)=Mv(igl,jgl)+(1+mi(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);
                    Nv(igl,jgl)=Nv(igl,jgl)+(1-mi(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);
                end
            end
        end
    end
end
end
*****

```

PROGRAMAS PARA CAPÍTULO 6

```

cap6s1.m
%
% Programa principal - difusão densidade-dependente; alfa1=beta1=0.0005.
% elementos finitos de ordem 2 - caso bidimensional - Capítulo 6 Ensaio 1
%
clear all
t1=clock;
malha2
dt=0.25;
alfa0=0.005; % difusibilidade espécie 1 - coeficiente linear
alfa1=0.0005; % difusibilidade espécie 1 - coeficiente não-linear
beta0=0.005; % difusibilidade espécie 2 - coeficiente linear
beta1=0.001; % difusibilidade espécie 2 - coeficiente não-linear
a=0;
b=0.01; % coef. interação espécie u - r no caso do capítulo 5
c=0;
d=-0.01; % coef. interação espécie v - s no caso do capítulo 5

```

```

sumfi
sumgfi
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5
sumtri6
sumitri1;
sumitri2;
sumitri3;
sumitri4;
sumitri5;
sumitri6;
% número de iterações
%
n=100;
T=50; % índice do período das funções migração e mortalidade
ni=2;
%
pe=round(T/2);
% Coeficientes de decaimento
%
for i=1:pe
    sig(i)=-0.05;
    mi(i)=-0.05;
end
for i=pe+1:T
    sig(i)=-0.05;
    mi(i)=-0.05;
end
if (n > T),
    for i=T+1:n
        sig(i)=sig(i-T);
        mi(i)=mi(i-T);
    end
end
% funções fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
    G(i)=0;
    g(i)=0;
end
%af(4*nnx*nnny)=0.1;
%af(4*nnx*nnny-1)=0.1;
%af((2*nnx-1)*2*nnny)=0.1;
%af((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.1;
% Vetores de condições iniciais
%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
    v0(i)=0;
    Vcha(i)=0;
end
% condição inicial no canto - espécie1

```

```

%
u0(4*nnx*ny)=5;
u0(4*nnx*ny-1)=5;
u0((2*nnx-1)*2*ny)=5;
u0((2*nnx-1)*2*ny-1)=5;
% condição inicial no meio - espécie2
%
v0(19)=6;
v0(20)=6;
v0(25)=6;
v0(26)=6;
% Acompanhamento de um nó da malha
%
u23(1)=u0(23);
v23(1)=v0(23);
ui=u0;
vi=v0;
grafci
pause
mlinuv2
%
sclin61
te=etime(clock,t1); % tempo de execução
*****

```

sclin61.m

```

%
% Solução do sistema não-linear - para Capítulo 6 - Ensaio 1
%
x=0:dx/2:xf;
y=0:dy/2:yf;
% acerto da condição de contorno de Dirichlet
%
for i=1:2*nnx+1
    zu(i,1)=0;
    zv(i,1)=0;
end
for j=1:2*ny+1
    zu(2*nnx+1,j)=0;
    zv(2*nnx+1,j)=0;
end
% Solução do sistema não linear
%
u=u0;
v=v0;
im=0;
for i=1:n
    i
    u00=u;
    v00=v;
    vamortuv
    mnaolinu
    Mu=Mu+MIu;
    Nu=Nu+NIu;
    C1=C1+Mu;
    D1=D1+Nu;
    [L    = lu(C1);

```

```

du=D1*u + dt*F';
wu=L\du;
u1=U\wu;
u=(u1+u)/2;
mnaolinv;
Mv=Mv+Mfv;
Nv=Nv+Nfv;
C2=C2+Mv;
D2=D2+Nv;
[Li Ui]= lu(C2);
dv=D2*v00 + dt*G';
wv=Li\dv;
v1=Ui\wv;
v=(v1+v)/2;
%
% Iterações internas
%
for l=1:ni
    mnaolinu
    C1=C1+Mu;
    D1=D1+Nu;
    [Lj Uj]= lu(C1);
    du=D1*u00 + dt*F';
    wu=Lj\du;
    u1=Uj\wu;
    u=(u1+u00)/2;
    mnaolinv
    C2=C2+Mv;
    D2=D2+Nv;
    [Li Ui]= lu(C2);
    dv=D2*v00 + dt*G';
    wv=Li\dv;
    v1=Ui\wv;
    v=(v1+v00)/2;
end
% Volta ao sistema linear - solução final armazenada em u1
%
im=im+1;
u=u1;
v=v1;
% Acompanhamento de um nó da malha
%
u23(im+1)=u(23);
v23(im+1)=v(23);
end
% Situação intermediária
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        zu(i+1,j+1)= u((i-1)*2*nny+j);
        zv(i+1,j+1)= v((i-1)*2*nny+j);
    end
end
surf(y,x,zu),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie1')
drawnow
pause(1)
surf(y,x,zv),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie2')
drawnow

```

vamortuv.m

```
%  
% Programa para Capítulo 6 - Ensaio 1 e 2 - mortalidade variável  
%  
% Matrizes Mu, Nu, Mv, Nv  
%  
for i=1:nn  
    for j=1:nn  
        Mu(i,j)=0;  
        Nu(i,j)=0;  
        Mv(i,j)=0;  
        Nv(i,j)=0;  
    end  
end  
for k=1:nt  
    for il=1:6  
        igl=malha(k,il);  
        if (igl ~= 0),  
            for jl=1:6  
                jgl=malha(k,jl);  
                if (jgl ~= 0),  
                    Mu(igl,jgl)=Mu(igl,jgl)+(1+sig(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);  
                    Nu(igl,jgl)=Nu(igl,jgl)+(1-sig(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);  
                    Mv(igl,jgl)=Mv(igl,jgl)+(1+mi(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);  
                    Nv(igl,jgl)=Nv(igl,jgl)+(1-mi(im+1)*dt/2)*SMFI(il,jl);  
                end  
            end  
        end  
    end  
end  
end
```

mnaolinu.m

```
%  
% Monta a matriz do termo não-linear espécie 1 - Capítulo 6 - Ensaio 1 e 2  
%  
% zerar as matrizes  
%  
for i=1:nn  
    for j=1:nn  
        C1(i,j)=0;  
        D1(i,j)=0;  
    end  
end  
%  
% cálculo das matrizes C1 e D1  
%  
for k=1:nt  
    for il=1:6  
        igl= malha(k,il);  
        if (igl ~= 0),  
            for jl=1:6  
                jgl= malha(k,jl);  
                if (jgl ~= 0),  
                    Matriuv;  
                    C1(igl,jgl)= C1(igl,jgl)+(alfa1*dt/2)*su1+(a*dt/2)*su2+(b*dt/2)*sv2;
```

```

        D1(igl,jgl)= D1(igl,jgl)-(alfa1*dt/2)*sv1-(a*dt/2)*sv2-(b*dt/2)*sv2;
    end
end
end
end
end

```

mnaolinv.m

```

%
% Monta a matriz do termo não-linear espécie 2-Capítulo 6 - Ensaio 1 e 2
%
% zerar as matrizes
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        C2(i,j)=0;
        D2(i,j)=0;
    end
end
%
% cálculo das matrizes C2 e D2
%
for k=1:nt
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);
        if (igl ~= 0),
            for jl=1:6
                jgl= malha(k,jl);
                if (jgl ~= 0),
                    Matriuv;
                    C2(igl,jgl)= C2(igl,jgl)+(beta1*dt/2)*sv1+(c*dt/2)*sv2+(d*dt/2)*su2;
                    D2(igl,jgl)= D2(igl,jgl)-(beta1*dt/2)*sv1-(c*dt/2)*sv2-(d*dt/2)*su2;
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

cap6s2.m

```

%
% Programa principal - Sistema interespecífico
% Difusão densidade-dependente; alfa1=beta1=0.0005 e Migração.
% elementos finitos de ordem 2 - caso bidimensional - Capítulo 6 Emsaio 2
%
clear all
t1=clock;
malha2
dt=0.25;
alfa0=0.005; % difusibilidade espécie 1 - coeficiente linear
alfa1=0.0005; % difusibilidade espécie 1 - coeficiente não-linear
beta0=0.005; % difusibilidade espécie 2 - coeficiente linear
beta1=0.001; % difusibilidade espécie 2 - coeficiente não-linear
a=0;
b=0.01;
c=0;
d=-0.01;

```

```

sumfi
sumgfi
sumtri1
sumtri2
sumtri3
sumtri4
sumtri5
sumtri6
sumitri1;
sumitri2;
sumitri3;
sumitri4;
sumitri5;
sumitri6;
% número de iterações
%
n=100;
T=50; % índice do período das funções migração e mortalidade
ni=2;
% Definição dos vetores de velocidades da migração
%
pe=round(T/2);
for i=1:pe
    Wu1(i)=0.026;
    Wv1(i)=0;
end
for j=pe+1:T
    Wu1(j)=0.026;
    Wv1(j)=0;
end
if (n > T),
    for l=T+1:n
        Wu1(l)=Wu1(l-T);
        Wv1(l)=Wv1(l-T);
    end
end
for i=1:n
    Wu2(i)=0;
    Wv2(i)=0.026;
end
% Coeficientes de decaimento
%
for i=1:pe
    sig(i)=-0.05;
    mi(i)=-0.05;
end
for i=pe+1:T
    sig(i)=-0.05;
    mi(i)=-0.05;
end
if (n > T),
    for i=T+1:n
        sig(i)=sig(i-T);
        mi(i)=mi(i-T);
    end
end
%
V1=dy*[-1/15 1/10 -1/30 -1/30 0 1/30

```

```

-1/10 0 1/10 2/15 0 -2/15
1/30 -1/10 1/15 -1/30 0 1/30
1/30 -2/15 1/10 4/15 0 -4/15
1/30 0 -1/30 1/15 0 -1/15
-1/10 2/15 -1/30 4/15 0 -4/15];
%
V2=dx*[-1/15 1/30 0 -1/30 -1/30 1/10
-1/10 -4/15 0 4/15 -1/30 2/15
1/30 -1/15 0 1/15 -1/30 0
1/30 -4/15 0 4/15 1/10 -2/15
1/30 1/30 0 -1/30 1/15 -1/10
-1/10 -2/15 0 2/15 1/10 0];
% funções fonte
%
for i=1:nn
    F(i)=0;
    f(i)=0;
    G(i)=0;
    g(i)=0;
end
%af(4*nnx*nnny)=0.1;
%af(4*nnx*nnny-1)=0.1;
%af((2*nnx-1)*2*nnny)=0.1;
%af((2*nnx-1)*2*nnny-1)=0.1;
% Vetores de condições iniciais
%
for i=1:nn
    u0(i)=0;
    Ucha(i)=0;
    v0(i)=0;
    Vcha(i)=0;
end
%
% condição inicial no canto - espécie1
%
u0(4*nnx*nnny)=5;
u0(4*nnx*nnny-1)=5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny)=5;
u0((2*nnx-1)*2*nnny-1)=5;
% condição inicial no meio - espécie2
%
v0(19)=6;
v0(20)=6;
v0(25)=6;
v0(26)=6;
% Acompanhamento de um nó da malha
%
u23(1)=u0(23);
v23(1)=v0(23);
ui=u0;
vi=v0;
grafci
pause
%
mlinuv2
%
snlin62
te=etime(clock,t1); % tempo de execução

```

snlin62.m

%

% Solução do sistema não-linear - para Capítulo 6 - Ensaio 2

%

x=0:dx/2:xf;

y=0:dy/2:yf;

% acerto da condição de contorno de Dirichlet

%

for i=1:2*nnx+1

 zu(i,1)=0;

 zv(i,1)=0;

end

for j=1:2*nnx+1

 zu(2*nnx+1,j)=0;

 zv(2*nnx+1,j)=0;

end

% Solução do sistema não linear

%

u=u0;

v=v0;

im=0;

for i=1:n

 i

 u00=u;

 v00=v;

 vamortuv

 mnaolinu

 mmiguv

 Mu=Mu+Mfu+MGu;

 Nu=Nu+Nfu+NGu;

 C1=C1+Mu;

 D1=D1+Nu;

 [L U]= lu(C1);

 du=D1*u + dt*F';

 wu=L\du;

 u1=U\wu;

 u=(u1+u)/2;

 mnaolinv;

 Mv=Mv+Mfv+MGv;

 Nv=Nv+Nfv+NGv;

 C2=C2+Mv;

 D2=D2+Nv;

 [Li Ui]= lu(C2);

 dv=D2*v00 + dt*G';

 wv=Li\dv;

 v1=Ui\wv;

 v=(v1+v)/2;

% Iterações internas

%

 for l=1:ni

 mnaolinu

 C1=C1+Mu;

 D1=D1+Nu;

 [Lj Uj]= lu(C1);

 du=D1*u00 + dt*F';

 wu=Lj\du;

```

u1=Uj\wu;
u=(u1+u00)/2;
mnaolinv
C2=C2+Mv;
D2=D2+Nv;
[Li Ui]= lu(C2);
dv=D2*v00 + dt*G';
wv=Li\dv;
v1=Ui\wv;
v=(v1+v00)/2;
end
% Volta ao sistema linear - solução final armazenada em u1
%
im=im+1;
u=u1;
v=v1;
% Acompanhamento de um nó da malha
%
u23(im+1)=u(23);
v23(im+1)=v(23);
end
% Situação intermediária
%
for i=1:2*nnx
    for j=1:2*nny
        zu(i+1,j+1)= u((i-1)*2*nny+j);
        zv(i+1,j+1)= v((i-1)*2*nny+j);
    end
end
surf(y,x,zu),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie1')
drawnow
pause(1)
surf(y,x,zv),xlabel('eixo y'),ylabel('eixo x'),zlabel('Dens.Pop.espécie2')
drawnow
*****

mmiguv.m
%
% Matrizes MGu, NGu, MGv, NGv - matrizes da migração - Capítulo 6 - Ensaio 2
%
for i=1:nn
    for j=1:nn
        MGu(i,j)=0;
        NGu(i,j)=0;
        MGv(i,j)=0;
        NGv(i,j)=0;
    end
end
end
%
% Cálculo triângulo por triângulo
%
for k=1:nt
    m=-1;
    for l=1:k
        m=-1*m;
    end
    for il=1:6
        igl= malha(k,il);

```

```

if (igl ~= 0),
    for jl=1:6
        jgl= malha(k,jl);
        if (jgl ~= 0),
            MGu(igl,jgl)= MGu(igl,jgl)+m*(dt/2)*(Wu1(im+1)*V1(il,jl)+Wu2(im+1)*V2(il,jl));
            NGu(igl,jgl)= NGu(igl,jgl)-m*(dt/2)*(Wu1(im+1)*V1(il,jl)+Wu2(im+1)*V2(il,jl));
            MGv(igl,jgl)= MGv(igl,jgl)+m*(dt/2)*(Wv1(im+1)*V1(il,jl)+Wv2(im+1)*V2(il,jl));
            NGv(igl,jgl)= NGv(igl,jgl)-m*(dt/2)*(Wv1(im+1)*V1(il,jl)+Wv2(im+1)*V2(il,jl));
        end
    end
end
end
end
end
*****

```

BIBLIOGRAFIA

- 1 ADAMS, R.A. *Sobolev spaces*. Academic Press: New York, 1975.
- 2 AMANN, H. Quasilinear evolution equations and parabolic systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, v.293, n.1, p.191-227, 1986.
- 3 AUGER, P., POGGIALE, J.C. Emergence of population growth models: fast migration and slow growth. *J. of Theor. Biology*, v.182, p.99-108, 1996.
- 4 AZAR, C. et al. Stability analysis of harvesting in a predator-prey model. *J. of Theor. Biology*, v.174, p.13-19, 1995.
- 5 BANKS, H.T. et al. Modeling insect dispersal and estimating parameters when mark-release techniques may cause initial disturbances. *J. Math. Biol.* n.22, p.259-77, 1985.
- 6 BASSANEZI, R.C., FERREIRA JR., W.C. *Equações diferenciais com aplicações*. Campinas: Harbra Ltda, 1988.
- 7 BERNARDES, M., MEYER, J.F.C.A. A aproximação de soluções de problemas populacionais densidade dependente: a relação interespecífica (parte iv). *XIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, livro de resumo*, 1996.
- 8 BRAUN, M., COLEMAN, C.S., DREW, D.A. *Differential equation models: modules in applied mathematics* v.1. New York: Lucas, W.F., 1983, 380.
- 9 BROOKS, N., HUGHES, T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Meth. in Applied Mech. and Eng.*, v.32, p.199-259, 1982.
- 10 BROWDER, F. E. Nonlinear equations of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces. *Bull. Am. Math. Soc.*, v.73, p.867-74, 1967.
- 11 CANTRELL, R.S., COSNER, C. Practical persistence in ecological models via comparison methods. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, v.126A, p.247-72, 1996.

- 12 CANTRELL, R.S., COSNER, C. Models for predator-prey systems at multiple scales. *SIAM Review, Society for Industrial and Applied Mathematics*, v.38, n.2, p.256-86, 1996.
- 13 CANTRELL, R.S., COSNER, C. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. *J. of Math. Biology*, v.37, p.103-45, 1998.
- 14 CANTRELL, R.S., COSNER, C. Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, v.112A, p.293-318, 1989.
- 15 CANTRELL, R.S. et al. Spatially explicit models for the population dynamics of a species colonizing an island. *Mathematical Biosciences*, v.136, p.65-107, 1996.
- 16 CAREY, G.F., ODEN, J.T. *Finite elements: a second course* v.2. New Jersey: Prentice Hall, 1984.
- 17 CAREY, G.F., ODEN, J.T. *Finite elements: computational aspects* v.3. New Jersey: Prentice Hall, 1984.
- 18 CAREY, G.F., ODEN, J.T. *Finite elements: mathematical aspects* v.4. New Jersey: Prentice Hall, 1984.
- 19 CARL, E.A. Population control in arctic ground squirrels. *Ecology* n.52, p.395-413, 1971.
- 20 CHATTOPADHYAY, J., et al. Formation of a dissipative structure: a nonlinear analysis. *Ecological Modelling* n.73, p.205-14, 1994.
- 21 CHUNG, T.J. *Finite element analysis in fluid dynamics*. USA: McGraw-Hill, 1978.
- 22 CIARLET, P.G. *The finite element method: study in mathematics and its applications*. Amsterdam: Publishing Company, 1978.
- 23 COSNER, C. Variability, vagueness and comparison methods for ecological models. *Bulletin of Math. Biol.*, v.58, n.2, p.207-46, 1996.
- 24 DING DA-FU et al. Bifurcation analysis of a nonlinear field model of regeneration. *J. of Math Biology* n.30, p.355-77, 1992.
- 25 DINIZ, L.G. *A Mudança no habitat de populações de peixes: de rio a represa - o modelo matemático. Tese de Mestrado*. Campinas: Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - Universidade Estadual de Campinas, 1994.

- 26 DODDS, W., HENEERY, G.M. The effect of density dependence on community structure. *Ecological Modelling*, v. 93, p.33-42, 1996.
- 27 DOUGLAS, J., T., DUPONT, T. Galerkin methods for parabolic equations. *SIAM J. Num. Anal.*, v.7, n.4, p.575-625, 1970.
- 28 DUBEY, B. Modelling the depletion and conservation of resources: effects of two interacting populations. *Ecological Modelling*, v. 101, p.123-36, 1997.
- 29 DUGUNDJI, J. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1978.
- 30 EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. New York: Random House, 1988.
- 31 FLETCHER, C.A.J. *Computational techniques for fluid dynamics 1*. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- 32 FREEDMAN, H.I., YUANTONG, X. Models of competition in the chemostat with instantaneous and delayed nutrient recycling. *J. of Math Biology* n.31, p.513-27, 1991.
- 33 FRIEDMAN, A. *Foundations of modern analysis*. New York: Holt, Reinhart and Winston, 1970.
- 34 GURNEY, W.S.C., NISBET, R.M. The regulation of inhomogeneous populations. *J. Theor. Biol.* n.52, p.441-57, 1975.
- 35 GURTIN, M.E., MACCAMY, R.C. On the diffusion of biological populations. *Math. Biosciences* n.33, p.35-49, 1977.
- 36 HASLINGER, J., NEITTAANMAKI, P. *Finite element approximation for optimal shape design: theory and applications*. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1988.
- 37 HEINRICH, J.C. et al A upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation, *Intern. J. for Num. Meth. in Eng.*, n.11, p.131-43, 1977.
- 38 IKEDA, T., MIMURA, M. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. *J. of Math. Biology*, v31, p.215-40, 1993.
- 39 JENSEN, A.L. A process model for food competition. *Ecological Modelling*, v. 87, p.1-9, 1996.

- 40 JONHSON, C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- 41 KARDESTUNCER, H., NORRIE, D.H. *Finite Element Handbook*. MacGraw-Hill, New York, 1987.
- 42 KAREIVA, P.M. Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecologia*, v.57, p.322-27, 1983.
- 43 KATO, T. Nonlinear semigroups and evolution equations. *J. Math. Soc. Japan*, v.19, n.4, p.508-20, 1967.
- 44 KEITT, T.H., JOHNSON, R. Spatial heterogeneity and anomalous kinetics: emergent patterns in diffusion-limited predatory-prey interaction. *J. of Theor. Biology*, v.172, p.127-39, 1995.
- 45 KING, A.A. et al. Weakly dissipative predator-prey systems. *Bulletin of Math. Biology*, v.58, n.5, p.835-59, 1996.
- 46 KOHLMEIER, C., EBENHOH, W. The stabilizing role of cannibalism in a predator-prey system. *Bulletin of Math. Biology*, v.57, n.3, p.401-11, 1995.
- 47 LEVIN, S.A., SEGEL, L.A. Pattern generation in space and aspect - *SIAM* v.37, n.1, p.45-67, 1985.
- 48 LEUNG, A. W. *Sistems of nonlinear partial differetial equations*. Applications to Biology and Engineering. Kluwer Academic Publishers, London, 1989.
- 49 LIONS, J.L. *Equations differentielles operationelles et problèmes aux limites*. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1961.
- 50 LUDWIG, D. et al. Spatial patterning of the Spruce Budworm. *J. of Math. Biology*, v.8, p.217-58, 1979.
- 51 LUDWIG, D., JONES, C.S., HOLLING, C.S. Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and the forest. *J. of Animal Ecology*, v.47, p.315-32, 1978.
- 52 MEDEIROS, L.A., MIRANDA, M.M. *Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1989.
- 53 MEYER, J.F.C.A. *Modelagem e simulação numérica do transiente tèrmico em meios*

- compostos. Tese de Doutorado.* Campinas: Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação-Universidade Estadual de Campinas, 1988.
- 54 MEYER, J.F.C.A. et al. Otimização do esforço amostral para monitoramento de costões na região de São Sebastião (SP, Brasil). *Congresso Latino-Americano de Ciências del Mar*, Mar del Plata, 1995.
- 55 MILNER, F., RABBILOLO, G. Rapidly converging numerical algorithms for models of population dynamics. *J. of Math. Biology.* v30, p.733-53, 1992.
- 56 MITCHELL, A.R., WAIT, R. *The finite element method in partial differential equations.* John Wiley & Sons, London, 1977.
- 57 MOREIRA, H.N., YUQUAN, W. Global stability in a class of competitive cubic systems. *Ecological Modelling*, v. 102, p.273-85, 1997.
- 58 MURRAY, J.D. *Mathematical biology.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- 59 OKUBO, A. *Diffusion and ecological problems: mathematical models.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- 60 SKELLAM, J.G. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika.* v.38, p.196-218, 1951.
- 61 SOBOLEV, S.L. *Partial differential equations of mathematical physics.* Pergamon Press Ltd, Great Britain, 1964.
- 62 SOSSAE, R.C. *Dinâmica Populacional Densidade-Dependente em Processos de Dispersão e Migração. Tese de Mestrado.* Campinas: Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação-Universidade Estadual de Campinas, 1995.
- 63 TAYASU, I., SHIGESADA, N., MUKAI, H., CASWELL, H. Predator-mediated coexistence of epiphytic grass shrimps that compete for refuges. *Ecological Modelling*, v.84, p.1-10, 1996.
- 64 VAN DEN BOSCH, F., GABRIEL, W. Cannibalism in an age-structured predator-prey system. *Bulletin of Math. Biology*, v.59, p.551-67, 1997.
- 65 WAIT, R., MITCHELL, A.R. *Finite element analysis and applications.* John Wiley & Sons, New York, 1985.
- 66 WHEELER, M. F. A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, v.10, n.4, p.723-58, 1973.

- 67 **WEINBERGER, H.F.** *Equaciones diferenciales en derivadas parciales*. Editorial Reverté, S.A., España, 1970.
- 68 **WU, H., STOKER, R.L., GAO, L.** A modified Lotka-Volterra simulation model to study the interaction between arrow bamboo (*Sinarundinaria fangiana*) and giant panda (*Ailuropoda melanoleuca*). *Ecological Modelling*, v.84, p.11-7, 1996.