ALGEBRAS DE VALORIZAÇÃO EM K(x,y,z)

MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

ORIENTADOR

PROF.DR. JOHN EDMONDS DAVID

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq).

Fevereiro de 1977

A meus pais e José Antonio

Agradeço:

Ao Prof. John Edmonds David pela proposta do presente trabalho e sua segura orientação na elaboração do mesmo.

Aos meus pais, professores e colegas por seus estímulos e ensinamentos.

Ao CNPq e à FINEP, que, com seu apoio financeiro, possibilitaram a realização deste trabalho.

ALGEBRAS DE VALORIZAÇÃO EM K(x,y,z)

Notações i

Introdução ii

PARTE I

RESUMO DE ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS BASICOS

CAPITULO 1. Valorizações.

1.1. Definições e propriedades 2

1.2. Algebras de valorização 5

1.3. Localização de um anel 6

1.4. Anéis de Prüfer 7

CAPITULO 2. Alguns anéis especiais.

2.1. Anel graduado 10

2.2. O anel de polinômios K[x,y,z] 11

2.3. O anel das séries formais K[[t]] 15

CAPITULO 3. Funcionais lineares.

3.1. Definições e propriedades 21

PARTE II

ALGEBRAS DE VALORIZAÇÃO EM K(x,y,z)

CAPITULO 4. Algebras de valorização minimais.

4.1. Valorizações de K(x,y,z) do tipo V_ℓ 25

4.2. V_ℓ-álgebras de valorização e propriedades . . . 29

4.3. Interpretação Geométrica 32

4.4. Número de V_ℓ-álgebras de valorização minimais . 38

CAPITULO 5. Estudo de $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$.

5.1. Quando $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t}) \subset R \cap V_\ell$ 48

5.2. Quando $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$ é uma V_ℓ-álgebra de valorização 55

CAPITULO 6. Valorização não do tipo V_ℓ.

6.1. Propriedades de V_ℓ em função da mudança de bases de transcendência 57

6.2 Valorização de $K(x,y,z)$ não do tipo V_ℓ 62

BIBLIOGRAFIA 67

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$	conjunto dos inteiros não negativos
$\mathbb{Z}$	anel dos inteiros
$\mathbb{Q}$	corpo dos números racionais
$\mathbb{R}$	corpo dos números reais
$\vert\ \vert$	número de elementos
M_B	ideal maximal de B
$K(S)$	menor corpo contendo K e S
u/v	fração $\frac{u}{v}$
$u \mid v$	u divide v
$\langle u \rangle$	ideal gerado por u
x^{-1}	inverso multiplicativo de x
$S \setminus T$	conjunto diferença
$\bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} R_q$	soma direta de R_q
$S_1 \times \ldots \times S_n$	produto dos conjuntos $S_1, \ldots, S_n$
gr p	grau do polinômio p

INTRODUÇÃO

Seja R um domínio de integridade e seja L o corpo quociente de R. Um subconjunto A de R é uma álgebra de valorização de R se existe uma valorização V de L tal que $A = R \cap V$.

Neste trabalho, consideramos o anel de polinômios $K[x,y,z]$ sobre um corpo K, sendo que o corpo quociente $K(x,y,z)$ deste anel representará o corpo L.

O objetivo desta tese é estudar as álgebras de valorização, uma generalização da valorização de Krull.

Se $V_1,\ldots,V_t$ são valorizações do corpo L, com $t<\infty$, e se uma valorização V de L contém a intersecção finita $S = V_1 \cap \ldots \cap V_t$, então existe um índice $i \in \{1,\ldots,t\}$ tal que V contém V_i. Assim, $V_1,\ldots,V_t$ são chamadas valorizações minimais de S. Empregando um tratamento análogo, consideramos álgebras de valorização minimais, e verificamos, no capítulo 4, que o mesmo resultado não se estende necessariamente às álgebras de valorização.

As valorizações consideradas neste trabalho, são definidas a partir de funcionais lineares ℓ em KxKxK e denotadas por V_ℓ. Estudamos, através deste tipo de valorização, uma definição análoga para álgebras de valorização, comparando este caso com o definido para álgebras de valorização quaisquer Assim, na primeira parte desta tese, constando dos capítulos 1, 2 e 3, fazemos um resumo de alguns conceitos e resultados básicos sobre valorizações, funcionais lineares, e sobre o anel $K[x,y,z]$ e o das séries formais $K[[t]]$. A segunda parte contém uma exposição das álgebras de valorização do tipo $R \cap V_\ell$, com a finalidade de estudar as álgebras de valorização mínimais. Empregamos aqui as graduações do anel $K[x,y,z]$. Isto constituiu o capítulo 4. No capítulo 5, fazemos um estudo da intersecção $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$ das álgebras de valorização consideradas, e finalmente no capítulo 6, consideramos algumas propriedades de V_ℓ em função da mudança de bases de transcendência de $K(x,y,z)$ e um exemplo de uma valorização deste corpo não do tipo V_ℓ.

PARTE I

RESUMO DE ALGUNS CONCEITOS

E RESULTADOS BÁSICOS:

CAPÍTULO 1

VALORIZAÇÕES

1.1. Definições e Propriedades

Referências Principais: Endler, Cap. I e Cap. II; Zariski-Samuel, Cap. VI.

(1.1.1) Definições: Seja K um corpo, e denotemos por K' o grupo multiplicativo de K. Seja Γ um grupo aditivo abeliano totalmente ordenado.

i) Uma valorização do corpo K é uma aplicação V de K' em Γ satisfazendo às seguintes condições:

$$V(x.y) = V(x) + V(y)$$

$$V(x + y) \geq \min \{ V(x) , V(y) \} \qquad \forall\, x,y \in K'$$

ii) Sejam $x \in K'$ e V uma valorização de K. O elemento correspondente $V(x)$ de Γ é chamado valor de x na valorização V e o conjunto de todos os elementos de Γ que são valores de elementos de K' é um subgrupo de Γ, chamado grupo de valores de V, e denotado Γ_V.

iii) Uma valorização V é dita não trivial se $V(x) \neq 0$, para algum $x \in K'$; caso contrário, V é chamada trivial.

iv) Se S é subcorpo de K, então uma valorização V de

K é dita <u>valorização de K sobre S</u>, ou <u>valorização de K/S</u>, se para todo $s \in S$, $s \neq 0$, $V(s) = 0$.

(1.1.2) <u>Proposição</u>. Seja G um subgrupo não trivial do grupo aditivo dos números reais $\mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:

i) G é um subespaço discreto de $\mathbb{R}$

ii) G não é denso em $\mathbb{R}$

iii) $\{ g \in G;\ g > 0 \}$ possui um menor elemento

iv) $G = \rho\mathbb{Z}$, para algum $\rho > 0$

(Demonstração: Endler, p. 25).

(1.1.3) <u>Definição</u>. Dizemos que uma valorização V de K é <u>discreta</u> se seu grupo de valores Γ_V é discreto.

(1.1.4) <u>Definição</u>. Seja Γ um grupo aditivo abeliano totalmente ordenado. Um <u>subgrupo isolado de Γ</u> é um subgrupo Δ de Γ tal que, se um elemento γ de Γ pertence a Δ, então todos os elementos η de Γ que estão entre γ e $-\gamma$, também pertencem a Δ, isto é, $\gamma \in \Delta \rightarrow \{\eta \in \Gamma;\ -\gamma \leq \eta \leq \gamma\} \subset \Delta$. Denotaremos por $G(\Gamma)$ o conjunto de todos os subgrupos isolados de Γ. $G(\Gamma)$ é totalmente ordenado pela inclusão.

(1.1.5) <u>Definição</u>. Seja V uma valorização de K, com grupo de valores Γ. Definimos o <u>posto de V</u> como sendo o tipo ordinal do conjunto de todos os subgrupos isolados de Γ, diferentes de Γ, isto é, <u>o tipo ordinal de $G(\Gamma) \setminus \{\Gamma\}$</u>

(1.1.6) Propriedades de uma valorização V de K:

i) $V(1) = 0 = V(-1)$

ii) $V(-x) = V(x)$, $\forall x \in K'$

iii) $V(x-y) \geq \min\{V(x), V(y)\}$ $\forall x,y \in K'$

iv) $V(y/x) = V(y) - V(x)$

v) $V(x^{-1}) = -V(x)$

vi) $V(x) < V(y) \rightarrow V(x+y) = V(x) = \min\{V(x), V(y)\}$

vii) Generalização:

$$V(\sum_{i=1}^{n} x_i) \geq \min\{V(x_1),\ldots,V(x_n)\}$$

(Demonstração: Zariski-Samuel, p.33)

(1.1.7) Definição. Seja S um subanel de K. Dizemos que S é um anel de valorização de K se $x \in S$ ou $x^{-1} \in S$ para todo $x \in K \setminus \{0\}$.

(1.1.8) Proposição. Seja V uma valorização de K.

i) O conjunto $S_V = \{x \in K;\ V(x) \geq 0\}$ é um anel de valorização de K.

ii) O conjunto $M_V = \{x \in K;\ V(x) > 0\}$ é o único ideal maximal do anel S_V.

(Demonstração: Endler, p. 21)

(1.1.9) Proposição. Sejam R um domínio de integridade, K o corpo quociente de R, e v uma aplicação de $R \setminus \{0\}$ em um grupo aditivo abeliano totalmente ordenado Γ, satisfazendo as seguintes condições:

1) $v(x.y) = v(x) + v(y)$

2) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

Então, v pode ser estendida a uma valorização V de K, dada por $V(x/y) = v(x) - v(y)$, sendo tal valorização a única extensão de v a K.

(Demonstração: Zariski-Samuel, p.37)

(1.1.10) Definição. Sejam V e V' valorizações de K, com grupos de valores Γ e Γ', respectivamente. Dizemos que V e V' são equivalentes se existe um isomorfismo de grupos ordenados $i:\Gamma \to \Gamma'$, tal que $V' = i \circ V$. Duas valorizações equivalentes são identificadas, e a relação definida é uma relação de equivalência no conjunto das valorizações de K.

(1.1.11) Proposição. A aplicação $V \to S_V$ induz uma bijeção do conjunto de todas as classes de equivalência das valorizações de K sobre o conjunto de todos os anéis de valorização de K.

(Demonstração: Endler, p.46)

No que segue, usaremos a mesma notação V tanto para a valorização quanto para o anel de valorização correspondente.

1.2. Algebras de valorização

Referência Principal: Kirby.

(1.2.1) Definição. Sejam R um anel, K o corpo quociente de R e $A \subset R$. Dizemos que A é uma álgebra de valorização de R se existe uma valorização V de K tal que $A = V \cap R$.

(1.2.2) Proposição. Seja R um corpo. Então, $A \subset R$ é álgebra de valorização de R se e somente se A é um anel de valorização de R

Demonstração. Como R = K em (1.2.1), segue que $V \subset R$. Então vale a relação: $V = V \cap R = A$.

(1.2.3) Definição. $A \subset R$ é uma V-álgebra de valorização de R se dado $S \subset R$ satisfazendo:

i) $|S| < \infty$

ii) se V é uma valorização de K, e $V \supset A$, então $V \cap S \neq \emptyset$ então $S \cap A \neq \emptyset$.

(1.2.4) Observação. As definições (1.2.1) a (1.2.3) são equivalentes. Demonstração: Kirby, corolário 1, p.83.

1.3. Localização de um anel

Referências Principais: Barshay, Cap. III; Endler, Cap. II.

(1.3.1) Definição. Seja R um anel. Um subconjunto S de R é dito um conjunto multiplicativo em R, se:

i) $1 \in S$

ii) se $a,b \in S$ então $a.b \in S$

iii) $0 \notin S$.

(1.3.2) Definição. Seja S um conjunto multiplicativo em R. Consideremos o conjunto $\{r/s;\ r \in R \text{ e } s \in S\}$. Definamos uma relação de equivalência neste conjunto, colocando:

$$r_1/s_1 \sim r_2/s_2 \leftrightarrow \exists s \in S;\ s.(r_1s_2 - r_2s_1) = 0.$$

Denotemos agora por R_S o conjunto das classes de equivalência $[r/s]$ da relação dada. Sob as operações de adição e multiplicação dadas por:

$$[r_1/s_1] + [r_2/s_2] = [r_1s_2+r_2s_1/s_1s_2]$$

$$[r_1/s_1] \cdot [r_2/s_2] = [r_1r_2/s_1s_2]$$

R_S é um anel chamado anel de frações de R com respeito a S.

(1.3.3) Observação. Se P é um ideal primo de R, então $S=R \setminus P$ é um conjunto multiplicativo de R, e o anel R_S é usualmente denotado por R_P, e chamado localização de R em P.

Denotando o elemento $[r/s]$ simplesmente por r/s escrevemos $R_P = \{r/s;\ r \in R \text{ e } s \notin P\}$. Além disso, se R é um domínio de integridade e K o seu corpo quociente, então $R \subset R_P \subset K$.

(1.3.4) <u>Proposição</u>. Sejam V um anel de valorização de K, $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os ideais primos P de V e $\mathcal{B}$ o conjunto de todos os subanéis B de K que contém V. Então, todo $B \in \mathcal{B}$ é um anel de valorização de K, e existe uma bijeção entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$, a qual inverte a inclusão, e é dada por: $P = M_B$ e $B = V_P$ (localização de V em P). Além disso; $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ são totalmente ordenados pela inclusão.

(Demonstração: Endler, p.43)

(1.3.5) <u>Observação</u>. Dados R um domínio de integridade, K o seu corpo quociente e f um elemento primo em R, a localização $R_{<f>}$ é um anel de valorização de K. De fato, se $u/v \in K$ e $u/v \notin R_{<f>}$ então, por (1.3.2), $f \nmid u$ e $f|v$. Logo, $v/u \in R_{<f>}$.

1.4. <u>Anéis de Prüfer</u>.

Referência Principal: Endler, Cap. II.

(1.4.1) <u>Definição</u>. Sejam R um domínio de integridade, K um corpo e $R \subset K$. Um anel de valorização V de K é dito <u>essencial para R</u>, se V é um anel de frações de R, isto é, se $V = R_M$, para algum conjunto multiplicativo M de R.

Vamos denotar por $B(R)$ (resp. $E(R)$) o conjunto de todos os anéis de valorização de K que contém (resp. são essenciais para) R.

(1.4.2) <u>Definição</u>. Um domínio de integridade $R \subset K$ é chamado

<u>um anel de Prüfer de K</u> se $B(R) = E(R)$.

(1.4.3) <u>Proposição</u>. Seja R um domínio de integridade e seja K o seu corpo quociente. As seguintes condições são equivalentes

i) R é um anel de Prüfer de K

ii) R_M é um anel de valorização de K, qualquer que seja o ideal maximal M de R.

iii) R_P é um anel de valorização de K, qualquer que seja o ideal primo P de R.

Nesta caso, existe uma bijeção entre $B(R)$ e $P(R)$ dada por: $P = M_B \cap R$ e $B = R_P$

(Demonstração: Endler, p.74)

(1.4.4) <u>Proposição.</u> Se R é um anel de Prüfer de K, então todo elemento B de $B(R)$ contém um elemento minimal de $B(R)$.

(Demonstração. Endler, p.75)

(1.4.5) <u>Proposição</u>. Sejam $B_1, \ldots, B_m$ anéis de valorização de K, não comparáveis, dois a dois, em relação à inclusão. Então o anel $R = B_1 \cap \ldots \cap B_m$ <u>é um anel de Prüfer de K</u>, com exatamente m ideais maximais $M_{B_1} \cap R, \ldots, M_{B_m} \cap R$.

(Demonstração: Endler, p.78)

(1.4.6) <u>Observação</u>. De (1.4.3) e (1.4.5) concluímos que os anéis de valorização $B \in B(R) = E(R)$ estão em correspondência biunívoca com os ideais primos P de R, e que $B_1, \ldots, B_m$ <u>são os elementos minimais de $B(R)$</u>. Vamos provar a segunda afirmação. Seja B um anel de valorização de K que contém $R = B_1 \cap \ldots \cap B_m$. Como R é um anel de Prüfer de K, segue de (1.4.3) que $M_B \cap R$ é um ideal primo de R. Logo, $M_B \cap R \subset M_R$, onde M_R é um ideal maximal de R. Por (1.4.5), existe $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $M_R = M_{B_i} \cap R$. Portanto, $R_{M_B \cap R} \supset R_{M_{B_i} \cap R}$, ou seja, $B \supset B_i$, para algum $i \in \{1,\ldots,m\}$

00000000000

0000000

CAPITULO 2

ALGUNS ANÉIS ESPECIAIS

2.1. Anel graduado

Referência Principal: Zariski-Samuel, Cap. VII.

(2.1.1) Definições.

i) Sejam $G_1,\dots,G_r$ subgrupos aditivos do anel R. Então G é soma direta dos subgrupos $G_1,\dots,G_r$, e denotamos $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_r$, se:

1) G é soma dos subgrupos $G_1,\dots,G_r$,

2) $G_i \cap [G_1+\dots+G_{i-1}+G_{i+1}+\dots+G_r] = (0)$, $i = 1,\dots,r$.

ii) Um anel R é chamado anel graduado se R é soma direta de subgrupos aditivos R_q de R, satisfazendo:

3) $R_q \cdot R_{q'} \subset R_{q+q'}$.

Os índices q são elementos de um grupo abeliano C, totalmente ordenado.

iii) Se S é um subanel de R, dizemos que S é um sub-anel graduado de R se S é soma direta de seus subgrupos $S \cap R_q$.

(2.1.2) Definição. Seja R um anel graduado. Um elemento de R é dito homogêneo se pertence a um dos R_q; é chamado homogêneo de grau q se pertence a R_q e é diferente de zero.

(2.1.3) Observação. Se R é um anel graduado, então cada elemento não nulo de R pode ser representado, de maneira única, como u'a soma finita de elementos homogeneos não nulos, de graus distintos.

2.2. O anel de polinômios $K[x,y,z]$.

Referência Principal: Zariski-Samuel, Cap. II.

Consideremos um corpo K, e seja $K[x,y,z]$ o anel de polinômios sobre K, nas variáveis x,y,z.

(2.2.1) Lema. Sejam $R_\ell = K[x,y,z]$, $\ell=(a,b,c) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Qualquer elemento $f \in R_\ell$ pode ser escrito na forma:

$$f = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{ia+jb+kc=q} e_{ijk} x^i y^j z^k ,$$

onde $e_{ijk} \in K$ e $(i,j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

(2.2.2) Proposição. O anel $R_\ell = K[x,y,z]$ é um anel graduado, isto é, $R_\ell = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} R_q$, onde R_q são subgrupos aditivos de R_ℓ tais que $R_q . R_{q'} \subset R_{q+q'}$, e ainda $\ell \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $\ell=(a,b,c) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\ell \neq 0$. Para cada $q \in \mathbb{Z}$, consideremos o conjunto $S_q = \{f \in R_\ell ;\ f = \sum_{ia+jb+kc=q} e_{ijk} x^i y^j z^k\}$. Denotando por 0 o polinômio nulo de R_ℓ, seja $R_q = S_q \cup \{0\}$. Note que $R_o \supset K$. Para os elementos não nulos de R_q dados por:

$f = \sum_{ia+jb+kc=q} e_{ijk} x^i y^j z^k$ e $g = \sum_{ma+nb+rc=q} e'_{mnr} x^m y^n z^r$, definamos u'a adição por:

$$f + g = \sum_{ia+jb+kc=q} (e_{ijk} + e'_{ijk}) x^i y^j z^k .$$

Suponhamos que $f = u$ e $g = v$ em R_ℓ, onde $u = \sum_{ia+jb+kc=q} d_{ijk}x^iy^jz^k$ e $v = \sum_{ma+nb+rc=q} d'_{mnr}x^my^nz^r$. A igualdade de polinômios nos leva a concluir que $e_{ijk} = d_{ijk}$ para todo (i,j,k), e $e'_{mnr} = d'_{mnr}$, para todo (m,n,r). Segue daí que $e_{ijk}+e'_{ijk} = d_{ijk}+d'_{ijk}$, para todo (i,j,k), e como conseqüencia, $f + g = u + v$, isto é, a adição está bem definida.

Uma vez que K é um corpo e e_{ijk}, e'_{ijk}, e d_{ijk} são elementos de K, podemos concluir que $f + g = g + f$, e ainda $(f + g) + u = f + (g + u)$; logo, a adição é comutativa e associativa. Definindo $-f = \sum_{ia+jb+kc=q} (-e_{ijk})x^iy^jz^k$, temos que $-f \in R_q$ e $f + (-f) = (-f) + f = 0$. Assim, esta adição define uma estrutura de grupo abeliano em R_q, sendo que denotamos também por R_q, este grupo.

Sejam agora q e q' números inteiros, $q \neq q'$, e $h \in R_q . R_{q'}$. Então, existem $f \in R_q$ e $g \in R_{q'}$, tais que $h = f.g$. Se $f = \sum_{ia+jb+kc=q} e_{ijk}x^iy^jz^k$ e $g = \sum_{ma+nb+rc=q'} e'_{mnr}x^my^nz^r$, então $f.g = \sum_{pa+sb+tc=q} d_{pst}x^py^sz^t$, onde $p=i+m$, $s=j+n$, $t=k+r$ e ainda $d_{pst} = d_{i+m\ j+n\ k+r} = e_{ijk}.e'_{mnr}$. De fato, consideremos os monômios $e_{ijk}x^iy^jz^k$ e $e'_{mnr}x^my^nz^r$. Pelo produto de polinômios, temos que: $e_{ijk}x^iy^jz^k \cdot e'_{mnr}x^my^nz^r =$

$$= (e_{ijk} \cdot e'_{mnr})x^{i+m}y^{j+n}z^{k+r}.$$

Por definição, $e_{ijk}.e'_{mnr} = e_{i+m\ j+n\ k+r} = e_{pst}$, e temos ainda:

$pa+sb+tc = (i+m)a+(j+n)b+(k+r)c = ia+ma+jb+nb+kc+rc$
$=(ia+jb+kc) + (ma+nb+rc) = q + q'$. Logo, $h = f.g$ é um elemento de $R_{q+q'}$.

Segue imediatamente do Lema (2.2.1) e da definição de R_q que $R_\ell = \overset{\infty}{\underset{q=-\infty}{+}} R_q$. Observando esta mesma definição, concluímos que $R_{q'} \cap \left[\overset{\infty}{\underset{\substack{q=-\infty\\ q\neq q'}}{+}} R_q\right] = (0)$. Portanto, R_ℓ é soma direta dos subgrupos R_q de R_ℓ, ou seja, $R_\ell = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} R_q$.

(2.2.3) Consequência da Proposição (2.2.2). Como R_ℓ é um anel graduado, segue de (2.1.3) que todo elemento $f \in R_\ell$ pode ser escrito, de modo único, na forma: $f = f_w + f_{w+1} + \ldots + f_{w+v}$, onde $f_s \in R_s$, $f_w \neq 0$, $f_{w+v} \neq 0$ e $v \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{Z}$; $-\infty < w < \infty$.

(2.2.4) Definição. Seja f um polinômio não nulo. Se todos os monômios dos quais f é soma tem o mesmo grau m, então f é dito uma forma homogênea de grau m.

(2.2.5) Observação. Se $a=b=c=1$ na demonstração (2.2.2), então $R_q = \{f \in R \,;\, f = \sum_{i+j+k=q} e_{ijk} x^i y^j z^k\} \cup \{0\}$. Como $(i,j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ temos que $q \geq 0$; para $q=0$, $R_0 = K$. Neste caso, para cada q, f é uma forma de grau q sobre K, e R_q é o grupo das formas de grau q.

(2.2.6) Definição. Seja $R_\ell = K[x,y,z]$. Se $a=b=c=1$ em (2.2.2), dizemos que o anel $R_\ell = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} R_q$ está com uma graduação normal. Neste caso, $R_0 = K$.

(2.2.7) Definições. Seja K um corpo.

i) Uma extensão L de K é <u>transcendental sobre K</u> se L contém elementos transcendentais sobre K.

ii) Um conjunto de transcendência S de L é uma <u>base de transcendência de L sobre K</u> se S é maximal, isto é, se S não é um subconjunto próprio de outro conjunto de transcendência de L.

(2.2.8) <u>Observação</u>. O corpo quociente $K(x,y,z)$ do anel de polinômios $K[x,y,z]$ é uma extensão transcendental de K, e S, $S=\{x,y,z\}$ é uma base de transcendência de $K(x,y,z)$.

(2.2.9) <u>Proposição</u>. Seja L uma extensão de K, e denotemos por $K(S)$ o menor corpo contendo K e S. Então, qualquer subconjunto S de L tal que L é uma extensão algébrica de $K(S)$, contém uma base de transcendência de L sobre K.

(Demonstração: Zariski-Samuel, p.99)

(2.2.10) <u>Proposição</u>. Duas bases de transcendência de L sobre K tem a mesma cardinalidade.

(Demonstração: Zariski-Samuel, p.99)

(2.2.11) <u>Proposição</u>. O conjunto $S = \{x+y^2, y, z\}$ <u>é uma base de transcendência de $K(x,y,z)$</u>.

<u>Demonstração</u>. Como $K \subset K(x,y,z)$ e $S \subset K(x,y,z)$, concluímos que $K(S) \subset K(x,y,z)$. Se considerarmos agora o conjunto $\{x,y,z\}$, temos que $\{y,z\} \subset K(S)$, e ainda x pode ser escrito na forma:
$x = (x+y^2) - y^2 \in K(S)$. Segue daí que $K(x,y,z) \subset K(S)$, do que se conclui que $K(x,y,z) = K(S)$. Aplicando agora (2.2.9) para $L=K(x,y,z)$ e $S=\{x+Y^2,y,z\}$ segue que S faz parte de uma base de transcendência de $K(x,y,z)$. Mas, $\{x,y,z\}$ é também base de

transcendência de L o possui cardinalidade 3. Por (2.2.10), S é uma base de transcendência de $K(x,y,z)$. Além disso, como $\{x+y^2,y,z\} \subset K[x,y,z]$ e $\{x,y,z\} \subset K[S]$, temos que é válida a igualdade: $K[x,y,z] = K[x+y^2,y,z]$.

(2.2.12) <u>Observação</u>. Pelo fato de $K[x,y,z] = K[x+y^2,y,z]$, dizemos que $\{x+y^2,y,z\}$ é uma base de transcendência geradora de $K[x,y,z]$.

(2.2.13) <u>Observação</u>. Faremos algumas comparações da validade de certos resultados obtidos, em função da substituição de $K[x,y,z]$ por $K[x,y,z,x^{-1},y^{-1},z^{-1}]$. Notaremos que alguns variam com esta mudança.

2.3. <u>O anel das séries formais</u> $K[[t]]$.

Referências Principais: McCoy, Cap.I; Zariski-Samuel, Cap.VII.

(2.3.1) <u>Definição</u>. Sejam K um corpo e t uma indeterminada sobre K. Denotemos por $K[[t]]$ o conjunto das expressões da forma: $\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k t^k$ onde $\zeta_k \in K$, $k=0,1,2,\ldots\ldots$. Dado outro elemento $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k t^k$, onde $\psi_k \in K$, as operações de adição e multiplicação definidas por:

$$\zeta + \psi = \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta_k + \psi_k)\, t^k$$

$$\zeta \cdot \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k \ , \text{ onde } \sigma_k = \sum_{i+j=k} \zeta_i \psi_j \ , \quad k=0,1,2,\ldots$$

definem uma estrutura de anel em $K[[t]]$, o qual é agora chamado o anel das séries formais em t, com coeficientes em K.

Diz-se também que $\zeta=\psi$ se $\zeta_k=\psi_k$, para todo inteiro não negativo k.

O corpo quociente de $K[[t]]$ será denotado por $K((t))$.

(2.3.2) Proposição. Um elemento $\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k t^k$ de $K[[t]]$ possui inverso em $K[[t]]$ $\leftrightarrow$ ζ_o possui inverso em K $\leftrightarrow$ $\zeta_o \neq 0$.

(Demonstração: McCoy, p.16)

(2.3.3) Definição. Seja $\zeta \in K[[t]]$, $\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k t^k$. O menor índice k tal que $\zeta_k \neq 0$ é chamado ordem de ζ, e denotado $o(\zeta)$

Se $o(\zeta) = k$ então ζ_k é dito forma inicial de ζ.

(2.3.4) Observação. Se $\zeta \in K[[t]]$ e $o(\zeta) = r$, então ζ pode ser escrito na forma $\zeta = t^r . \rho$, onde ρ é uma unidade em $K[[t]]$. Este resultado segue diretamente da proposição(2.3.2)

(2.3.5) Proposição. Seja $K((t))$ o corpo quociente de $K[[t]]$. Todo elemento $\psi \in K((t))$ pode ser representado por $\psi = t^s . \tau$ onde $s \in \mathbb{Z}$ e τ é uma unidade em $K[[t]]$.

Demonstração. Seja $\psi = \zeta/\sigma \in K((t))$, onde $\zeta = t^r.\rho$ e $\sigma = t^h.\mu$ com $r, h \in \mathbb{N}$ e ρ,μ são unidades em $K[[t]]$. Escrevendo ψ explicitamente, vem que:

$$\psi = \frac{\zeta}{\sigma} = \frac{t^r.\rho}{t^h.\mu} = t^{r-h}(\rho.\mu^{-1}) = t^s.\tau$$

onde $s = r-h \in \mathbb{Z}$ e τ é uma unidade em $K[[t]]$, uma vez que τ é produto de duas unidades em $K[[t]]$.

(2.3.6) Proposição. Se ζ e ψ são elementos de $K[[t]]$, então:

$$o(\zeta.\psi) = o(\zeta) + o(\psi)$$

$$o(\zeta+\psi) \geq \min\{o(\zeta), o(\psi)\}.$$

Demonstração. Suponhamos que $o(\zeta) = r$ e $o(\psi) = s$. Então, como r e s são os menores índices tais que $\zeta_r \neq 0$ e $\psi_s \neq 0$, respectivamente, segue do fato de ζ_r, $\psi_s \in K$ e de K ser um corpo, que $\zeta_r.\psi_s \neq 0$ e ainda $\zeta_r.\psi_s$ é a forma inicial de $\zeta.\psi$. Portanto, $o(\zeta.\psi) = r+s = o(\zeta) + o(\psi)$. Se $r \leq s$, então $o(\zeta+\psi) \geq r = \min\{o(\zeta), o(\psi)\}$. Note que se $r=s$ e $\zeta_r = -\psi_r$, então $o(\zeta+\psi) > r$.

(2.3.7) Consequencia de (2.3.6). $K[[t]]$ é um anel de valorização discreto, de posto 1, de $K((t))$.

(2.3.8) Observação. De (2.3.3), (2.3.4) e (2.3.6) temos que o é uma aplicação de $K[[t]]\setminus\{0\}$ em $\mathbb{Z}$ (um grupo aditivo abeliano totalmente ordenado), satisfazendo as condições da proposição (1.1.9), desde que $K[[t]]$ é um domínio de integridade pois K é um corpo. Concluimos daí que o pode ser estendida a uma valorização U de $K((t))$, da seguinte maneira: $U(\zeta/\psi) = o(\zeta) - o(\psi)$, cujo grupo de valores é $\mathbb{Z}$.

Podemos também definir U através do resultado (2.3.5), colocando para $\sigma \in K((t))$, $\sigma = t^{s_0}.\tau$, com $s_0 \in \mathbb{Z}$ e τ uma unidade em $K[[t]]$, $U(\sigma) = s_0$. Notemos que de (2.3.7) segue que U é uma valorização discreta, de posto 1, de $K((t))$. Escrevendo ainda explicitamente, $\sigma = \sigma_o t^{s_o} + \sigma_1 t^{s_o+1} + \ldots\ldots + \sigma_n t^{s_o+n}$, com $\sigma_n \in K$, $s \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, colocamos $U(\sigma) = s_o$, se $\sigma_o \neq 0$.

(2.3.9) <u>Proposição</u>. Os elementos $u_1, u_2, \ldots, u_r$ são algebricamente independentes sobre K se, e somente se, para cada $i \leq r$, u_i é transcendente sobre $K(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1})$.

(Demonstração: Dean, p.213)

(2.3.10) Um isomorfismo de $K(x,y,z)$ sobre $K((t))$ é obtido escolhendo-se, para cada variável x,y e z, uma série (formal)de potencias $p_x(t)$, $p_y(t)$ e $p_z(t)$ em $K((t))$, de modo que as tres séries formais escolhidas sejam algebricamente independentes sobre K. Denotamos um isomorfismo arbitrário de $K(x,y,z)$ sobre $K((t))$, por I.

Apresentamos aqui um exemplo. Seja $p_x(t) = t$. Então, por (2.3.9), obtemos um conjunto $\{t, p(t)\}$ algebricamente independente, tomando para $p(t)$ um elemento transcendente sobre K. Vamos mostrar que $p(t) = t + t^{2!} + \ldots + t^{n!} + \ldots$ satisfaz tal propriedade.

Suponhamos que $p(t)$ seja raiz de um polinômio $F(T)$ de grau q: $F(T) = a_o(t)+a_1(t)T+\ldots+a_q(t)T^q$, onde $a_i(t) \in K[t]$, e seja $d = \max\{gr(a_i(t)),\ i=0,1,\ldots,q\}$. Assumimos $F(T)$ irredutível sobre $K(t)$. Para cada polinômio $s(t)$, a série $p(t)-s(t)$ é uma raiz do polinômio $G(T) = F(T+s(t))$. De fato, $G(p(t)-s(t)) = F(p(t)-s(t)+s(t)) = F(p(t)) = 0$, pois $p(t)$ é raíz de $F(T)$. Temos então que:

$$G(T) = b_o(t)+b_1(t)T+\ldots\ldots+b_q(t)T^q$$

onde $b_o(t) = a_o(t)+a_1(t).s(t)+\ldots\ldots+a_q(t).(s(t))^q$. Como $G(T)$ é irredutível sobre $K(t)$, porque $F(T)$ o é, vem que $b_o(t) \neq 0$. Por outro lado, $gr\ b_o = \max\{gr(a_i(t).(s(t))^i),\ i=0,1,\ldots,q\}$

$$\leq \max\{gr\ a_i(t) + gr\ (s(t))^i,\ i=0,\ldots,q\}$$

$$= \max\{gr\ a_i(t),\ i=0,\ldots,q\} + \max\{gr\ (s(t))^i, i=0,\ldots,q\}$$

$$= d + q.gr\ s(t)$$

Tomando para $s(t)$ o polinômio $t+t^{2!}+\ldots\ldots+t^{(n-1)!}$ onde n é um inteiro tal que $n>d+1$ e $n>q+1$, temos que $gr\ s(t) = (n-1)!$ e $gr\ b_o \leq d + q.(n-1)! \leq (n-1) + (n-1).(n-1)!$

$$< (n-1)! + (n-1).(n-1)!$$

$$= n!$$

Portanto, $gr\ b_o < n!$. Mas, na relação: $0 = G(p(t)-s(t))$

$$= b_o(t) + b_1(t)(t^{n!}+t^{(n+1)!}+\ldots\ldots) + \ldots + b_q(t)(t^{n!}+\ldots\ldots)^q$$

todos os termos, exceto os de $b_o(t)$, possuem $t^{n!}$ como fator. Então, $-b_o(t) = b_1(t)(t^{n!}+\ldots\ldots) + \ldots +b_q(t)(t^{n!}+\ldots\ldots)^q$, o que contradiz o fato de que $b_o(t) \neq 0$ e $gr\ b_o < n!$. Portanto, $\{t,\ p(t)\}$ é algebricamente independente.

Para obter um conjunto $\{t,\ p(t),\ p'(t)\}$ algebricamente independente, basta considerarmos as seguintes séries formais:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^{i!} \quad e \quad p'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} t^{i!}\Big)^{j!} .$$

Definindo-se então, $p_x(t) = t$, $p_y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^{i!}$ e $p_z(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} t^{i!} \Big)^{j!}$, obtemos um isomorfismo I de $K(x,y,z)$ sobre $K((t))$, tal que:

$$\begin{aligned} I: K(x,y,z) &\longrightarrow K((t)) \\ x &\longmapsto p_x(t) \\ y &\longmapsto p_y(t) \\ z &\longmapsto p_z(t) \end{aligned}$$

00000000000

0000000

C A P I T U L O 3

FUNCIONAIS LINEARES

3.1. Definições e Propriedades.

Referência Principal: Nering, Cap. IV.

(3.1.1) Definição. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $F \subset \mathbb{R}$. Uma transformação linear de E em F é chamada um funcional linear em E.

(3.1.2) Proposição. Se E é um espaço vetorial de dimensão finita n sobre F, então o conjunto de todos os funcionais lineares em E é um espaço vetorial de dimensão n, chamado o espaço dual de E, e denotado por $\hat{E}$.

(Demonstração: Nering, p.129)

(3.1.3) Proposição. Seja $A = \{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base de E. Se $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$, e se definirmos $\ell_i : E \longrightarrow F$ por $\ell_i(\alpha) = a_i$, vem

1) Para cada i, ℓ_i é um funcional linear em E.

2) $\hat{A} = \{\ell_1,\ldots,\ell_n\}$ é uma base de $\hat{E}$, dita base dual da base A.

3) $\ell_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker)

4) Se $\ell = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i$ e $\ell(\alpha_j) = \lambda_j$, então ℓ pode ser re

presentado pela matriz-linha 1xn, $[\lambda_1 \;....\; \lambda_n]$.

5) Se $x \in E$ é representado pela n-úpla $(x_1,\ldots,x_n)$ em relação à base $\{e_1,\ldots,e_n\}$, e ℓ pela matriz $[\lambda_1 \;...\; \lambda_n]$, então $\ell(x) = [\lambda_1 \ldots \lambda_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

(Demonstração: Nering, p.130,131)

(3.1.4) Proposição. Consideremos o seguinte sistema de inequações lineares:

$$a_{11}x_1+\ldots\ldots+a_{1n}x_n \geq 0$$
$$a_{21}x_1+\ldots\ldots+a_{2n}x_n \geq 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+\ldots\ldots+a_{mn}x_n \geq 0.$$

Se $a_1x_1+\ldots+a_nx_n \geq 0$ é uma inequação linear a qual é satisfeita sempre que o sistema dado também o é, então existem escalares não negativos $y_1,\ldots,y_m$ em F, tais que $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = a_j$, para todo j tal que $1 \leq j \leq n$.

(Demonstração: Nering, p.233)

(3.1.5) Proposição. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 2$ sobre F. Se ℓ e ℓ' são funcionais lineares em $\hat{E}$, tais que $\{\ell, \ell'\}$ é linearmente independente, então existe um vetor x em E tal que $\ell(x) = 1$ e $\ell'(x) = 0$.

Demonstração. Seja $B = \{\ell_1,\ldots,\ell_t\}$ um conjunto de elementos linearmente independentes de $\hat{E}$, tais que $\ell_1=\ell$ e $\ell_2=\ell'$. Então existem $\ell_{t+1},\ldots,\ell_n$ tais que $\ell_1,\ldots,\ell_n$ são linearmente independentes (base de $\hat{E}$). Suponhamos que para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, ℓ_i seja representado por $[a_{i1} \ldots a_{in}]$. Então, a matriz M, $M = (a_{ij})$ tem ordem $n \times n$, e $\det M \neq 0$. Concluímos daí que o sistema $M.x = (\delta_{ij})$ possui solução, onde $x = (x_1,\ldots,x_n)$ em relação à base dual, e δ_{ij} é o símbolo de Kronecker. Logo, existe $x \in E$ tal que $\ell(x) = 1$ e $\ell'(x) = 0$.

(3.1.6) Definição. Sejam F um corpo e $\ell: F^n \longrightarrow F$ um funcional linear em F^n. Definimos o conjunto:

$$\underline{H^+(\ell) = \{\alpha \in F^n;\ \ell(\alpha) \geq 0\}}$$

(3.1.7) Proposição. Sejam $\ell_1,\ldots,\ell_m$ funcionais lineares em F^n. Se $\bigcap_{i=1}^{m} H^+(\ell_i) \subset H^+(\ell)$, então existem escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ em F, $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1,\ldots,m$, tais que $\ell = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ell_i$.

Demonstração. Suponhamos que os ℓ_i sejam representados por $[a_{i1} \ldots a_{in}]$, $i = 1,\ldots,m$, e ℓ por $[a_1 \ldots a_n]$. Vamos denotar por $\alpha = (x_1,\ldots,x_n)$ os elementos de F^n. A inclusão $\bigcap_{i=1}^{m} H^+(\ell_i) \subset H^+(\ell)$, de acordo com (3.1.3), equivale a afirmar que se o sistema:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots\ldots+a_{1n}x_n \geq 0 \\ a_{21}x_1+\ldots\ldots+a_{2n}x_n \geq 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots\ldots+a_{mn}x_n \geq 0 , \end{array}$$

for satisfeito por α, então α também satisfaz a inequação : $a_1x_1+\ldots\ldots+a_nx_n \geq 0$. Segue de (3.1.4) que existem escalares não negativos $\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_m$ tais que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = a_j$, para todo j, $1 \leq j \leq n$. Daí, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ell_i = \ell$.

(3.1.8) <u>Consequencia da Proposição anterior</u>. Se $N(\ell_i)$ denota o núcleo do funcional linear ℓ_i, então $\bigcap_{i=1}^{m} H^+(\ell_i) \subset H^+(\ell)$ implica que $\bigcap_{i=1}^{m} N(\ell_i) \subset N(\ell)$.

0000000000

0000000

PARTE II

ÁLGEBRAS DE VALORIZAÇÃO EM $K(x,y,z)$

CAPITULO 4

ALGEBRAS DE VALORIZAÇÃO MINIMAIS

4.1. Valorizações de $K(x,y,z)$ do tipo V_ℓ.

(4.1.1) Definição. Sejam $F=\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais, e $\ell: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ o funcional linear representado por $[a\ b\ c]$. Definamos a aplicação $v_\ell : K[x,y,z]\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ colocando : $v_\ell(e_{ijk}x^iy^jz^k) = \ell(i,j,k) = ai+bj+ck$. Se f é um elemento de $K[x,y,z]$ dado pela soma finita $\Sigma\, e_{ijk}x^iy^jz^k$, então definimos $v_\ell(f) = \min\{\ell(i,j,k);\ \exists (i,j,k)$ tal que $e_{ijk}\neq 0\}$.

(4.1.2) Proposição. Seja $f = f_w+f_{w+1}+\ldots+f_{w+v}$ um elemento de $R_\ell=K[x,y,z]$, onde $f_s\in R_s$ para $w\leq s\leq w+v$, $f_w\neq 0$, $f_{w+v}\neq 0$ e $v\in\mathbb{N}$, $w\in\mathbb{Z}$, $-\infty<w<\infty$, segundo (2.2.3). Então, $v_\ell(f) = w$.

Demonstração. Qualquer elemento f de R_ℓ pode ser escrito, de acordo com (2.2.3), na forma $f = f_w+f_{w+1}+\ldots+f_{w+v}$, como acima. Se $f_s\in R_s$, e $f_s\neq 0$ então existem $(i,j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $e_{ijk}\in K$ $e_{ijk}\neq 0$, tais que $\ell(i,j,k) = ai+bj+ck = s$, e $e_{ijk}x^iy^jz^k$ é um termo não nulo do polinômio f. Uma vez que $w\leq s\leq w+v$ e $f_w\neq 0$ segue que: $\min\{s=\ell(i,j,k)\ ;\ \exists (i,j,k)$ com $e_{ijk}\neq 0\} = w$.

Assim, $v_\ell(f) = w$.

(4.1.3) Proposição. A aplicação v_ℓ satisfaz as seguintes condições:

1) $v_\ell(f.g) = v_\ell(f) + v_\ell(g)$,

2) $v_\ell(f + g) \geq \min\{v_\ell(f), v_\ell(g)\}$, para todo f,g em $K[x,y,z]$.

Demonstração. Sejam $f = f_w+\ldots+f_{w+v}$ e $g = g_u+\ldots+g_{u+t}$ elementos não nulos de $K[x,y,z]$, onde $f_w\neq 0$ e $g_u\neq 0$. Podemos escrever $f.g = f_wg_u+(f_wg_{u+1}+f_{w+1}g_u)+\ldots+f_{w+v}g_{u+t}$, ainda na forma $f.g = h_{w+u}+h_{w+u+1}+\ldots+h_{w+u+(v+t)}$, onde $h_{w+u} = f_wg_u\neq 0$ porque $f_w\neq 0$ e $g_u\neq 0$. A proposição (4.1.2) nos leva a concluir que $v_\ell(f) = w$, $v_\ell(g) = u$ e $v_\ell(f.g) = w+u$.

Vamos supor agora que $w \leq u$ e $w+v \leq u+t$. Então existem $s,s'\in\mathbb{N}$ tais que $w+s = u$ e $w+v+s' = u+t$, e podemos escrever $f + g = p_w+p_{w+1}+\ldots+p_{w+v+s'}$, onde $p_q = f_q+ g_q$, para $w \leq q \leq w+v+s'$. Como $v+s'\in\mathbb{N}$, segue da expressão de $f+g$ que $v_\ell(f+g) \geq w = \min\{w,u\} = \min\{v_\ell(f),v_\ell(g)\}$. A igualdade se verifica quando $w < u$.

(4.1.4) Proposição. A aplicação $V_\ell: K(x,y,z)\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por: $V_\ell(f/g) = v_\ell(f) - v_\ell(g)$ é uma valorização de $K(x,y,z)$ sobre K.

Demonstração. Segue diretamente dos resultados (4.1.3),(1.1.9) e do fato de $\mathbb{Q}$ ser um grupo aditivo abeliano totalmente ordenado pela restrição do valor absoluto do corpo dos reais.

(4.1.5) Observação. Da definição (4.1.1) vem que:

$$V_\ell(x) = v_\ell(x) = \ell(1,0,0) = a \; ,$$

$$V_\ell(y) = v_\ell(y) = \ell(0,1,0) = b \ ,$$
$$V_\ell(z) = v_\ell(z) = \ell(0,0,1) = c.$$

(4.1.6) Observação. Se $\{a,b,c\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, então V_ℓ é uma valorização de $K(x,y,z)/K$ discreta e de posto 1, uma vez que o grupo de valores de V_ℓ é agora $\mathbb{Z}$, um subespaço discreto de $\mathbb{R}$, segundo (1.1.2).

(4.1.7) Observação. O anel de valorização V_ℓ é dado por:

$$V_\ell = \{f/g \in K(x,y,z);\ V_\ell(f/g) \geq 0\}$$
$$= \{f/g \in K(x,y,z);\ v_\ell(f) \geq v_\ell(g)\}.$$

Um resultado bem conhecido é que se uma valorização V contém a intersecção finita $V_1 \cap \ldots \cap V_t$ de valorizações $V_1,\ldots,V_t$, então V contém V_i, para algum $i \in \{1,\ldots,t\}$. Este resultado constitui a nossa próxima proposição.

(4.1.8) Proposição. Se L é um corpo e $V_1,\ldots,V_t$ e V são anéis de valorização de L tais que $V_1 \cap \ldots \cap V_t \subset V$, então existe $i \in \{1,\ldots,t\}$ tal que $V_i \subset V$.

Demonstração. Faremos a prova para $t = 2$.

Suponhamos V_1 e V_2, anéis de valorização de L, não comparáveis em relação à inclusão, e denotemos $R = V_1 \cap V_2$. Pela hipótese, V é um anel de valorização de L, que contém R. Como supusemos V_1 e V_2 não comparáveis, segue de (1.4.5) que R é um anel de Prüfer de L. Assim, de $V \supset R$ segue que V contém um elemento minimal do conjunto de todos os anéis de valorização de L, que contém R, segundo (1.4.4). De (1.4.6) vem que $V \supset V_1$ ou $V \supset V_2$.

(4.1.9) Proposição. Seja ℓ o funcional linear representado por $[1\ 0\ 0]$. Então, $M_{V_\ell} \cap K[x,y,z] = \langle x \rangle$ = o menor ideal do anel $K[x,y,z]$ que contém $\{x\}$.

Demonstração. Concluímos de (4.1.5) que $V_\ell(x) = 1$. Portanto, $x \in M_{V_\ell} \cap K[x,y,z]$. Pela definição de $\langle x \rangle$, temos a inclusão: $\langle x \rangle \subset M_{V_\ell} \cap K[x,y,z]$. Seja $f \in M_{V_\ell} \cap K[x,y,z]$. Então, $V_\ell(f) > 0$ Suponhamos que f não possa ser escrito na forma $f = g.x$, onde $g \in K[x,y,z]$. Assim, existe um termo da forma $e_{0jk}y^j z^k$ na expressão de f. Vamos supor também que $f = e_{0jk}y^j z^k + g.x$. Mas, para todo $g \in K[x,y,z]$, $V_\ell(g) \geq 0$, do que se conclui que: $V_\ell(g.x) = V_\ell(g) + V_\ell(x) = V_\ell(g) + 1 > 0$. Logo, como $V_\ell(e_{0jk}y^j z^k) = 0$, segue das propriedades de valorização que $V_\ell(f) = \min\{V_\ell(e_{0jk}y^j z^k), V_\ell(g.x)\} = 0$, o que contraria a hipótese que $f \in M_{V_\ell} \cap K[x,y,z]$. Portanto, $f = g.x$, ou seja $f \in \langle x \rangle$.

4.2. V_ℓ-álgebras de valorização

(4.2.1) Definição. $A \subset R$, onde R é um anel e K o seu corpo quociente, é dito uma V_ℓ-álgebra de valorização de R se dado $S \subset R$ satisfazendo:

i) $|S| < \infty$

ii) se V_ℓ é um valorização de K e $V_\ell \supset A$, então $S \cap V_\ell \neq \emptyset$

então, $S \cap A \neq \emptyset$.

A proposição seguinte mostra que o resultado (4.1.8) não pode ser estendido para álgebras de valorização.

Note que aqui não se aplica Prüfer.

(4.2.2) Proposição. Sejam A_i as V_{ℓ_i}-álgebras de valorização $i=1,\dots,n$ e A uma V_ℓ-álgebra de valorização de R. Não é necessariamente verdade que se $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset A$, então existe um índice $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $A_j \subset A$.

Demonstração. Seja $R = K[x,y,z]$, e sejam ℓ_1, ℓ_2 e ℓ os funcionais lineares sobre $\mathbb{Q}$, representados, respectivamente, por: $[2\ -1\ 0]$, $[-2\ 0\ 1]$ e $[1\ -1\ 1]$. Se V_{ℓ_1}, V_{ℓ_2} e V_ℓ são os anéis de valorização correspondentes, de $K(x,y,z)$, consideremos os anéis $A_1 = V_{\ell_1} \cap R$, $A_2 = V_{\ell_2} \cap R$ e $A = V_\ell \cap R$, contidos em R. De acordo com (1.2.1), A_1, A_2 e A são álgebras de valorização de R. Podemos escrever:

$$A_1 = \{ f = \sum_{\text{finita}} e_{ijk} x^i y^j z^k \in R \ ; \ \ell_1(i,j,k) \geq 0\},$$

ou ainda,

$$A = \{ f = \sum_{\text{finita}} e_{ijk} x^i y^j z^k \in R \ ; \ 2i - j \geq 0\}.$$

Analogamente escrevemos:

$$A_2 = \{ g = \sum_{\text{finita}} e'_{ijk} x^i y^j z^k \in R \ ; \ -2i + k \geq 0\}, \text{ e}$$

$$A = \{ h = \sum_{\text{finita}} d_{ijk} x^i y^j z^k \in R \ ; \ i - j + k \geq 0\}.$$

Vamos considerar agora o anel $A_1 \cap A_2$. Seja $f \in A_1 \cap A_2$, $f = \sum_{\text{finita}} e_{ijk} x^i y^j z^k$ tal que $2i - j \geq 0$ e $-2i + k \geq 0$. Uma solução do sistema $\begin{cases} 2i - j \geq 0 \\ -2i + k \geq 0 \end{cases}$ é também solução da equação $-j + k \geq 0$. Como $i \in \mathbb{N}$, segue que tal solução satisfaz $i - j + k \geq 0$. Concluímos daí que $f \in A$. Logo, $A_1 \cap A_2 \subset A$.

Mostraremos a seguir, que $A_1 \not\subset A$ e $A_2 \not\subset A$. Sejam x^2y^3 um elemento de A_1 e xy^5z^3 um elemento de A_2. Tais elementos não pertencem, no entanto, a A, uma vez que para ambos $i - j + k = -1 < 0$. Concluímos assim a prova para $n = 2$.

(4.2.3) Observação. Se considerarmos os anéis de valorização V_{ℓ_1}, V_{ℓ_2} e V_ℓ em lugar das álgebras de valorização A_1, A_2 e A, então não vale mais a inclusão: $V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset V_\ell$. De fato, sejam $f = xyz$ e $g = x^2y^3z^3$, tais que $f/g \in K(x,y,z)$. Então,

$$V_{\ell_1}(f/g) = \ell_1(1,1,1) - \ell_1(2,3,3) = 0,$$

$$V_{\ell_2}(f/g) = \ell_2(1,1,1) - \ell_2(2,3,3) = 0, \text{ e}$$

$$V_\ell(f/g) = \ell(1,1,1) - \ell(2,3,3) = -1 < 0.$$

(4.2.4) Observação. Se na demonstração (4.2.2), substituirmos o anel $R = K[x,y,z]$ por $R' = K[x,y,z,x^{-1},y^{-1},z^{-1}]$ ainda continuam existindo anéis de valorização satisfazendo as mesmas condições do enunciado. Para mostrar isto, sejam ℓ_1, ℓ_2 e ℓ dados por $[0\ -1\ 0]$, $[0\ 0\ -1]$ e $[0\ -1\ -1]$, respectivamente, e A_1', A_2' e A' as álgebras de valorização de R' definidas por $A_1' = V_{\ell_1} \cap R'$, $A_2' = V_{\ell_2} \cap R'$ e $A' = V_\ell \cap R'$. Raciocinando de modo análogo ao da demonstração (4.2.2), temos que $A_1' \cap A_2' \subset A'$. As relações $A_1' \not\subset A'$ e $A_2' \not\subset A'$, seguem da existência dos elementos $y^{-1}z^2 \in A_1'$ e $y^2z^{-1} \in A_2'$, que não pertencem ambos a A'.

(4.2.5) Observação. Uma questão que se nos apresenta é a pos sibilidade da equivalência entre ser A uma V_ℓ-álgebra de valorização de R, segundo (4.2.1), e ser $A = R \cap V_\ell$. (é a validade de (1.2.4) para V_ℓ em lugar de V).

O que podemos afirmar sobre tais definições é que, se existe V_ℓ tal que $A = R \cap V_\ell$ então A é uma V-álgebra de valorização, de acordo com (1.2.4). Por outro lado, sendo $A = R \cap V_\ell$, temos que A é uma V_ℓ-álgebra de valorização de R. Será que para toda V_ℓ-álgebra de valorização A, existe uma valorização V_ℓ, tal que $A = R \cap V_\ell$?

4.3. Interpretação geométrica

No que segue, consideraremos a graduação normal do anel $R_\ell = K[x,y,z]$, segundo (2.2.6), e as álgebras de valorização A_1 e A_2 de R_ℓ definidas na demonstração (4.2.2), por:

$$A_1 = \{ f = \sum_{\text{finita}} a_{ijk} x^i y^j z^k \in R_\ell ;\ 2i - j \geq 0 \},$$

$$A_2 = \{ g = \sum_{\text{finita}} a'_{ijk} x^i y^j z^k \in R_\ell ;\ -2i + k \geq 0 \}.$$

(4.3.1) <u>Proposição</u>. As álgebras de valorização A_1 e A_2 de R_ℓ são <u>subanéis graduados</u> de R_ℓ, no sentido da definição (2.1.1)

<u>Demonstração</u>: Consideremos, primeiramente, o anel A_1. Pela definição de A_1 temos que $A_1 \supset K$. Pela graduação de R_ℓ, segue que $R_\ell = \bigoplus_{q=0}^{\infty} R_q$, onde os grupos abelianos R_q de R_ℓ são dados por: $R_q = \{ h \in R_\ell ;\ h = \sum_{i+j+k=q} d_{ijk} x^i y^j z^k \} \cup \{0\}$, sendo $R_0 = K$. Os sub

grupos $R_q \cap A_1$ de A_1 podem ser escritos na forma;

$A_1 \cap R_o = A_1 \cap K = K$

$A_1 \cap R_1 = < x,z >$

$A_1 \cap R_2 = < x^2, z^3, xy, xz >$

$\vdots$

$A_1 \cap R_q$ = subgrupo gerado pelos monômios $x^i y^j z^k$ tais que $i+j+k = q$ e $2i - j \geq 0$.

Seja f um elemento da soma $\dotplus_{q=0}^{\infty} (A_1 \cap R_q)$. Então $f = f_o + f_1 + \ldots + f_r$ onde $f_s \in A_1 \cap R_s$ para $s=0,1,\ldots,r$. Segue do fato de $A_1 \cap R_s \subset A_1$, para cada s, e de A_1 ser um anel, que $f_o + f_1 + \ldots + f_r \in A_1$, ou seja, $f \in A_1$. Consideremos agora, $f \in A_1$. Por (2.2.1), temos:

$$f = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{i+j+k=q} e_{ijk} x^i y^j z^k$$

onde $e_{ijk} \in K$ e $2i-j \geq 0$. Colocando $f_q = \sum\limits_{\substack{i+j+k=q \\ 2i-j\geq 0}}^{\infty} e_{ijk} x^i y^j z^k$ podemos concluir que $f_q \in A_1 \cap R_q$, e ainda que $f = \sum\limits_{q=0}^{\infty} f_q$. Logo $A_1 = \dotplus_{q=0}^{\infty} (A_1 \cap R_q)$. Como para cada q, R_q é o grupo das formas de grau q, segue que $(A_1 \cap R_{q'}) \cap (\dotplus_{\substack{q=0 \\ q\neq q'}}^{\infty} (A_1 \cap R_q)) = (0)$. Portanto A_1 é um subanel graduado de R_ℓ.

A demonstração para A_2 é análoga, e será portanto emitida.

(4.3.2) <u>Observação</u>. Dados os anéis A_1 e A_2, se considerarmos <u>o anel</u> $A = A_1 \cap A_2$, podemos defini-lo por:

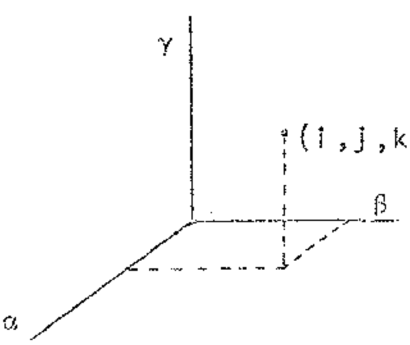
$$A = \{ f = \sum_{\text{finita}} e_{ijk} x^i y^j z^k \in R_\ell \, ; \; k \geq 2i \geq j \}.$$

(4.3.3) <u>Proposição</u>. O subanel $A = A_1 \cap A_2$ <u>é graduado</u>.

<u>Demonstração</u>. O raciocínio é idêntico ao usado na demonstração (4.3.1).

O objetivo da <u>interpretação geométrica</u> das V_ℓ-álgebras de valorização de $K[x,y,z]$ que damos a seguir, é associar tais anéis a subconjuntos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, de modo a se trabalhar com estes anéis através do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Consideremos os eixos reais denotados por α, β e γ. Primeiramente associamos a cada monômio $e_{ijk}x^iy^jz^k$ de $K[x,y,z]$, a terna (i,j,k) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, a qual pode ser representada graficamente, por um ponto no espaço $\mathbb{R}^3$. Notemos que todos os elementos do corpo K são associados à origem $(0,0,0)$.



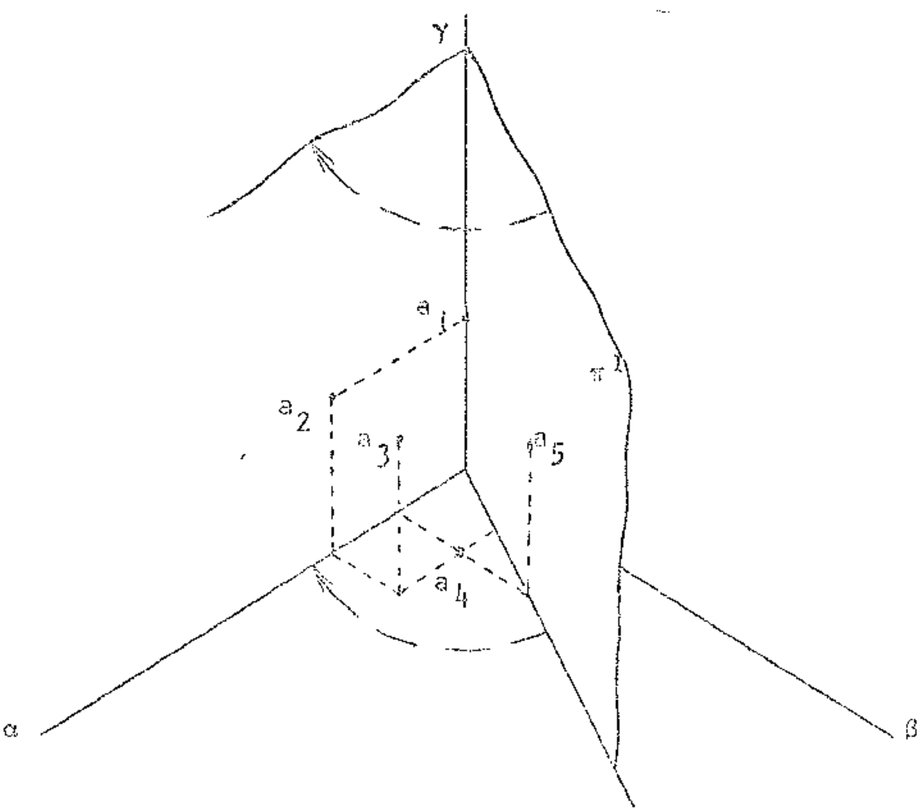
Vamos considerar agora, o anel de valorização A_1 de $K[x,y,z]$ definido por:

$$A_1 = \{ f = \sum_{\text{finita}} e_{ijk}x^iy^jz^k \ ; \ 2i - j \geq 0 \}.$$

Devido a associação definida acima, o monômio $xy \in A_1$, por exemplo, é associado ao ponto $(1,1,0)$; já ao binômio $f = xy + z$, associamos o ponto $(1,1,0) + (0,0,1) = (1,1,1)$. Procedemos assim, sucessivamente.

Podemos observar que os pontos (i,j,k) para os quais $2i - j = 0$ estão sobre o plano π^1 de equação $2\alpha-\beta=0$, que contém as retas $2\alpha=\beta$ e o eixo γ do espaço R^3. Por sua vez os pontos (i,j,k) tais que $2i - j > 0$ pertencem a um dos semi espaços determinados pelo plano π^1, a saber, o semi-espaço de π^1 que contém o ponto $(1,0,0)$. Concluímos daí que a álgebra de valorização A_1 pode ser interpretada como um conjunto de pontos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ contidos no plano $2\alpha-\beta=0$ e no semi-espaço determinado por este plano e contendo o ponto $(1,0,0)$. Ainda, como $(i,j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tal semi-espaço é limitado pelos planos $\gamma=0$ e $\beta=0$, sendo que existem pontos nesses planos associados a elementos de A_1.

Graficamente, temos:

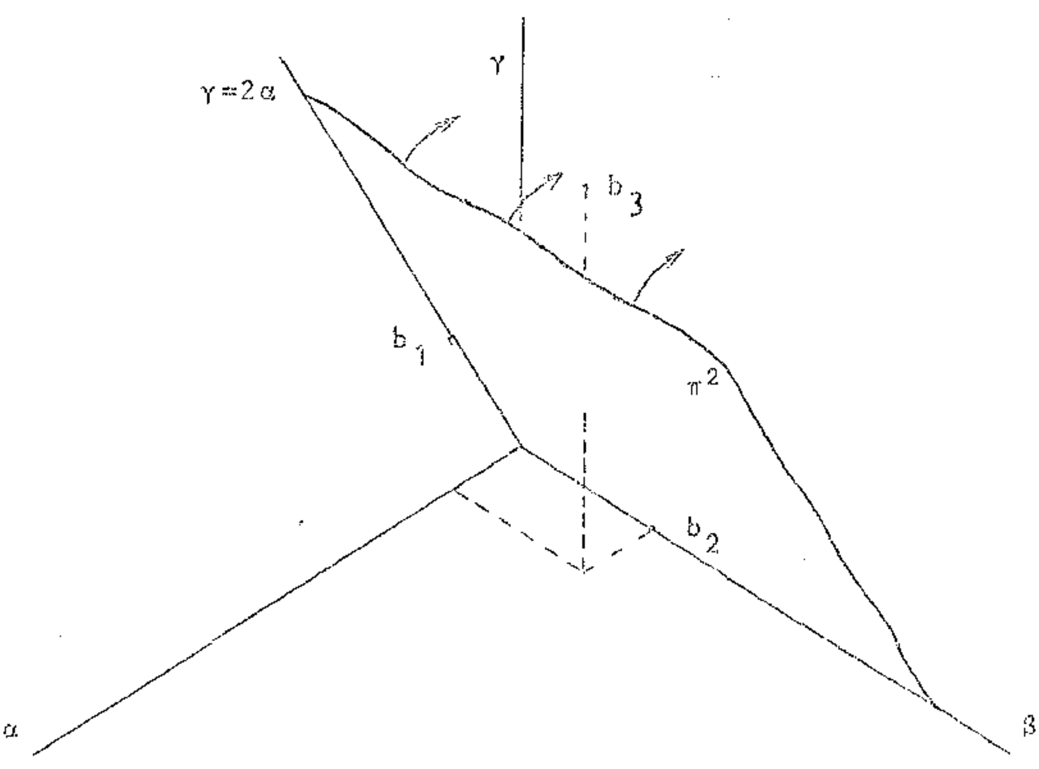


No gráfico, assinalamos alguns dos pontos que representam os elementos de A_1, denotados por a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Argumentando analogamente, obtemos uma interpretação geométrica para a álgebra de valorização A_2, definida por:

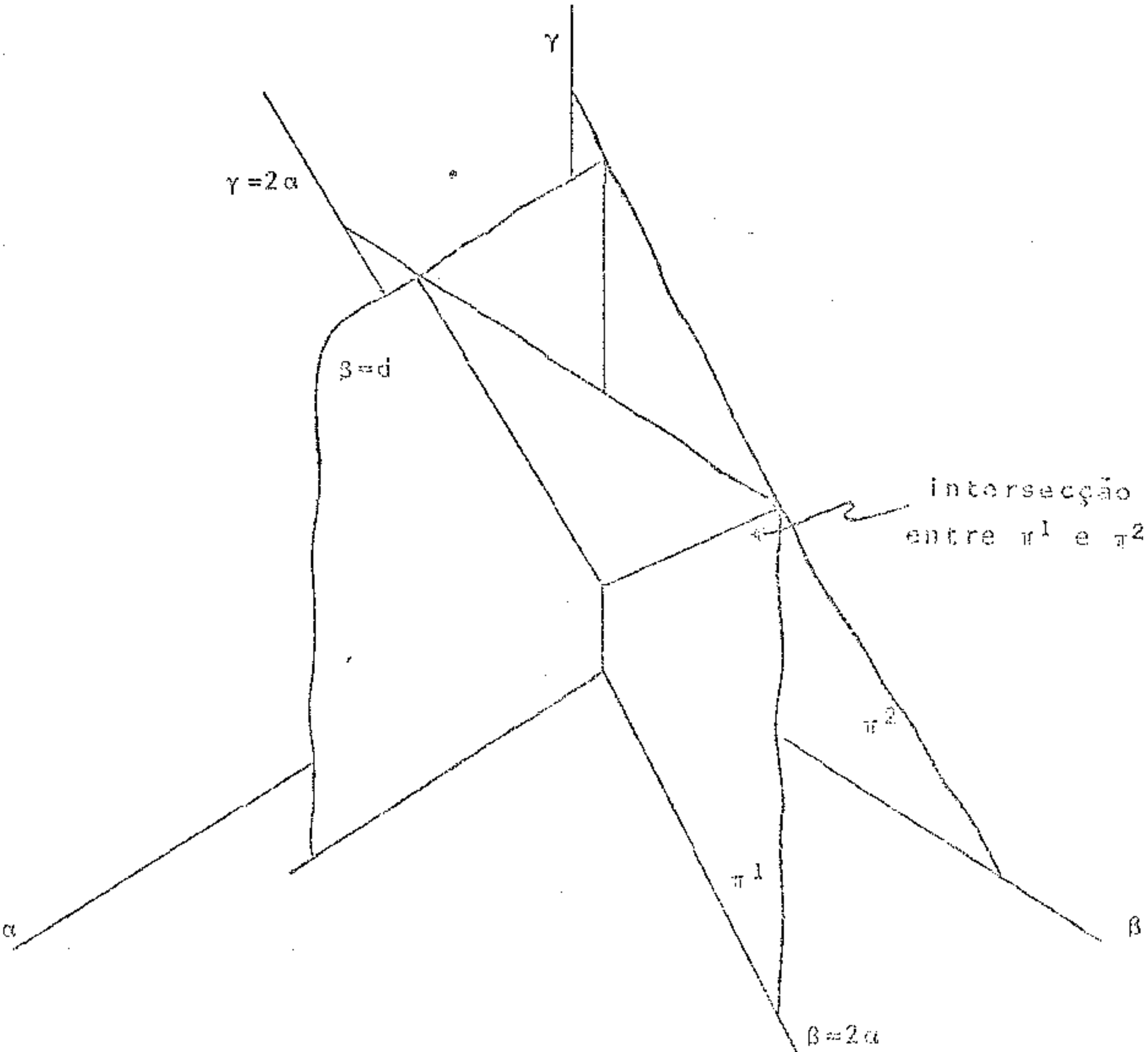
$$A_2 = \{ f = \sum_{\text{finita}} e'_{ijk} x^i y^j z^k \ ; \ -2i + k \geq 0 \}$$

como um subconjunto do plano π^2 de equação $-2\alpha+\gamma=0$ e do semi-espaço determinado por π^2 e contendo o ponto $(0,0,1)$, e ainda limitado pelos planos $\beta=0$ e $\alpha=0$. Observe que A_2 possui elementos representados em tais planos. Graficamente:

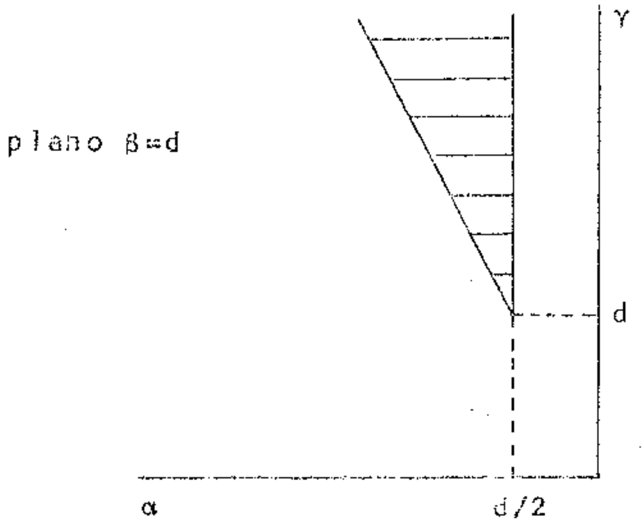


Os pontos b_1, pertencente aos planos π^2 e a $\beta=0$; b_2 pertencente a $\alpha=0$ e b_3 são alguns exemplos de representantes de A_2.

Vamos considerar agora <u>o anel A</u> = $A_1 \cap A_2$. Graficamente, A é um conjunto contido na intersecção de ambas as partes do espaço que representam A_1 e A_2, respectivamente. Para isso, vamos utilizar um mesmo gráfico para representar A_1 e A_2, onde se notará que A é um subconjunto da parte do espaço compreendida entre os planos π^1, π^2, $\beta=0$. É importante lembrar que $f \in A = A_1 \cap A_2$, $f = \sum_{\text{finita}} e_{ijk} x^i y^j z^k$, se e somente se: $2i - j \geq 0$ e $-2i + k \geq 0$, ou seja, $k \geq 2i \geq j$.



Queremos ressaltar que se fixarmos um valor arbitrário $d \in \mathbb{N}$ para j, então as ternas (i,j,k) que satisfazem $2i - j \geqslant 0$ e $-2i + k \geqslant 0$, isto é, os elementos de A, com um valor j fixado, estão na intersecção do plano $\beta = d$ com a parte do espaço que representa A. No gráfico abaixo, hachuríamos essa intersecção.



(4.3.4) Daqui em diante, usaremos, sem maiores comentários, apenas as partes positivas dos eixos α, β e γ, e as álgebras de valorização como subconjuntos deste triedro.

4.4. Número de V_ℓ-álgebras de valorização minimais.

A seguir, vamos considerar $R = K[x,y,z]$ e a base de transcendência $\{x,y,z\}$ do corpo quociente $K(x,y,z)$ de R

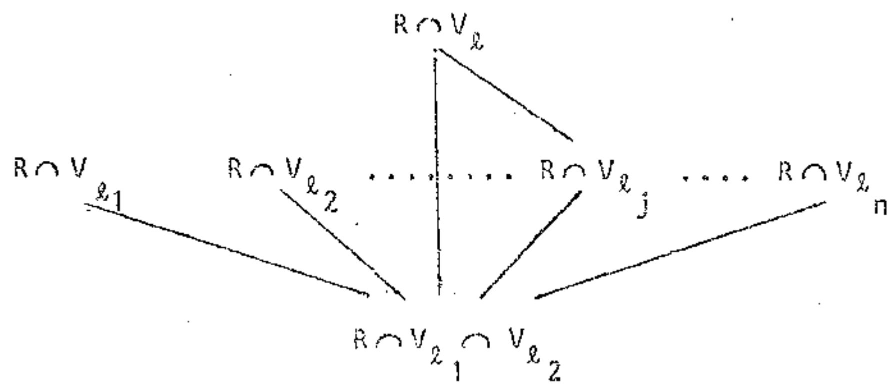
Dadas as valorizações do tipo V_ℓ, definidas em (4.1.1), queremos analisar o número de álgebras de valorização $R \cap V_\ell$ que são minimais no sentido da definição seguinte.

(4.4.1) Definição. Sejam $V_{\ell_1}, \dots, V_{\ell_n}$ valorizações do corpo $K(x,y,z)$. Dizemos que $R \cap V_{\ell_1}, \dots, R \cap V_{\ell_n}$ são álgebras de va-

<u>lorização minimais contendo $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$</u> se:

i) $R\cap V_{\ell_i} \supset R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$, $i=1,\dots,n$

ii) para todo $\ell\neq\ell_i$ tal que $R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$, existe um índice j, $1\leq j\leq n$, tal que $R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_j}$.



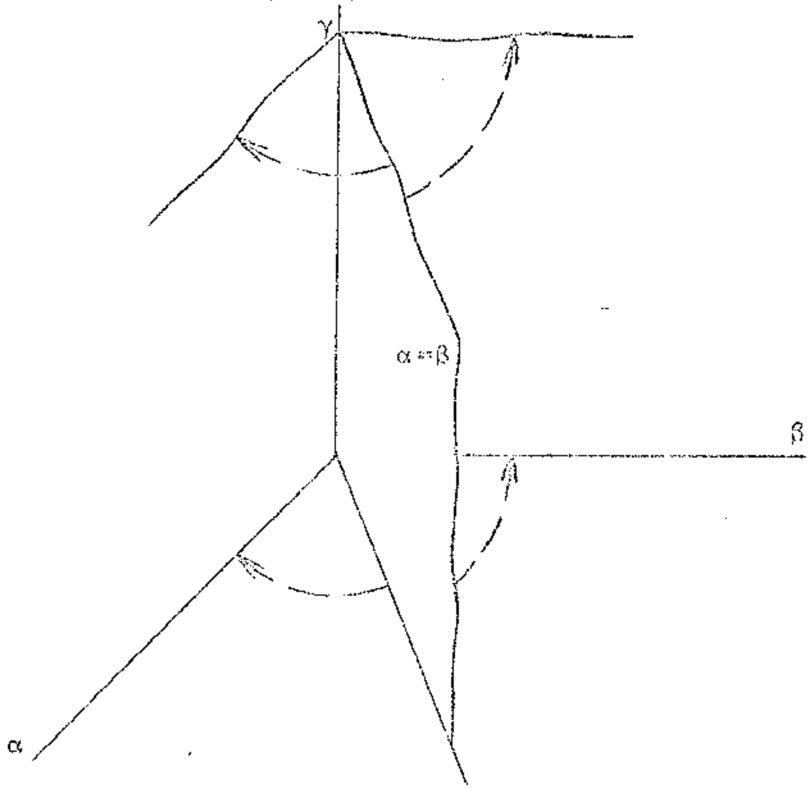
A primeira questão a que nos propusemos foi mostrar se este <u>número de álgebras de valorização minimais é finito ou não.</u> Para isso, obtivemos o resultado que constitui a nossa próxima proposição.

(4.4.2) <u>Proposição.</u> Existem álgebras de valorização $R\cap V_{\ell_1}$ e $R\cap V_{\ell_2}$ que são minimais contendo $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$.

<u>Demonstração.</u> Sejam ℓ_1 e ℓ_2 representados respectivamente, por $[1\ -1\ 0]$ e $[-1\ 1\ 0]$. Podemos mostrar que $R\cap V_{\ell_1}\neq R$ e $R\cap V_{\ell_2}\neq R$, exibindo os elementos $xy^2\in R$ e $x^2y\in R$ tais que $xy^2\notin V_{\ell_1}$ e $x^2y\notin V_{\ell_2}$. Também são distintas $R\cap V_{\ell_1}$ e $R\cap V_{\ell_2}$, pois $x\in R\cap V_{\ell_1}$ e $x\notin R\cap V_{\ell_2}$, e $y\in R\cap V_{\ell_2}$, $y\notin R\cap V_{\ell_1}$.

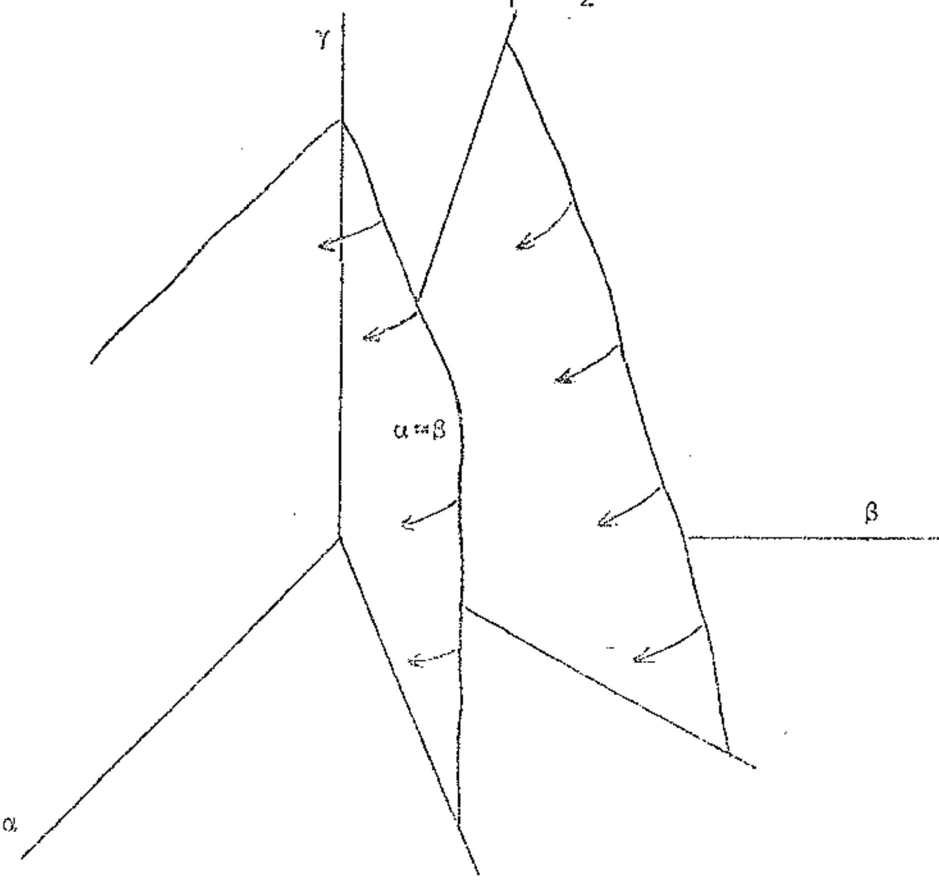
Usando a interpretação geométrica descrita em

4.3, concluímos que $R\cap V_{\ell_1}$ está contida no semi-espaço determinado pelo plano $\alpha=\beta$, contendo o ponto $(1,0,0)$ e limitado por $\gamma=0$ e $\beta=0$, enquanto que $R\cap V_{\ell_2}$ é subconjunto do semi-espaço determinado por $\alpha=\beta$ e contendo $(0,1,0)$, e limitado por $\gamma=0$ e $\alpha=0$. Observe que $R\cap V_{\ell_1}$ e $R\cap V_{\ell_2}$ estão contidos nos semi-espaços opostos de $\alpha=\beta$, tendo ambas, alguns pontos comuns no plano $\alpha=\beta$. Logo, $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$ é subconjunto do plano $\alpha=\beta$.



Seja V_ℓ uma valorização de $K(x,y,z)$ tal que: $R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$. Isto significa que $R\cap V_\ell$ contém os pontos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, contidos no plano $\alpha=\beta$. Verificamos, então, graficamente, que $R\cap V_\ell$ contém os pontos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, contidos em um ou em outro dos semi-espaços determinados pelo plano $\alpha=\beta$, conforme o semi-espaço que representa $R\cap V_\ell$, o que equivale dizer que

$R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_1}$ ou $R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_2}$. Concluímos daí, que $R\cap V_{\ell_1}$ e $R\cap V_{\ell_2}$ são minimais contendo $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$.

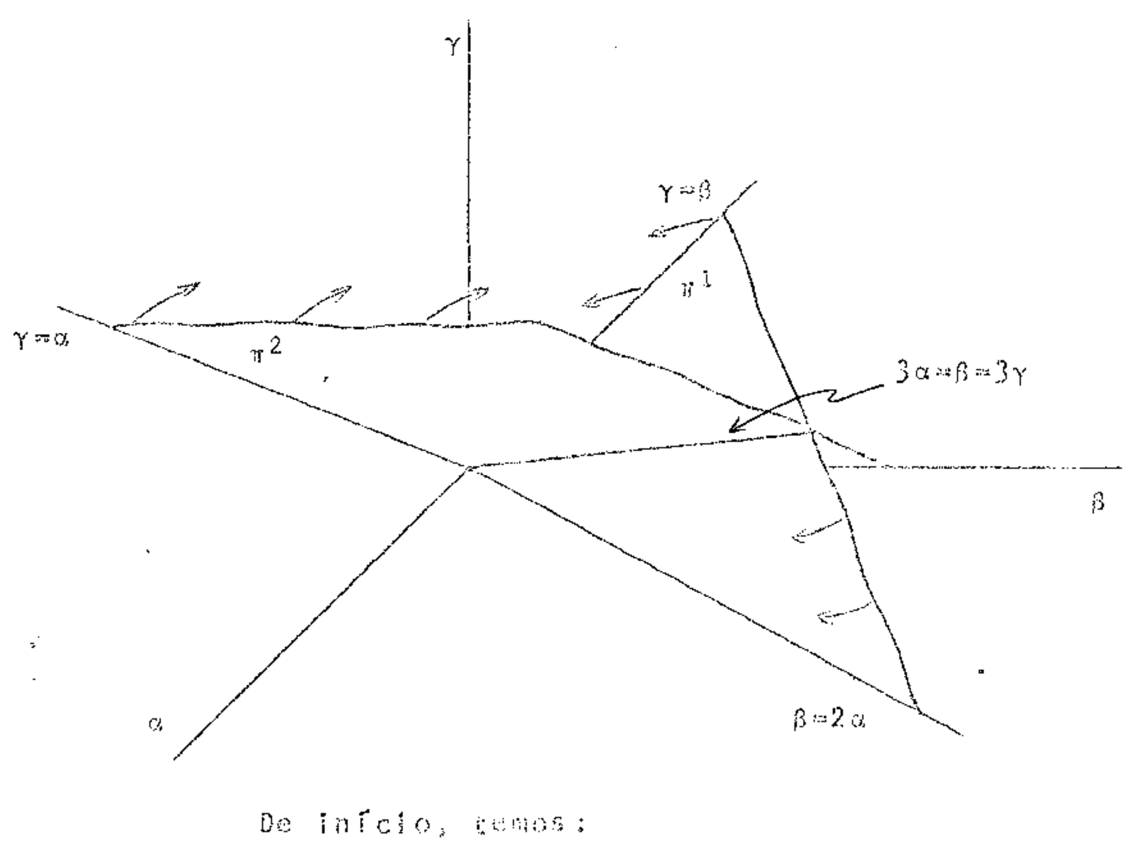


A proposição anterior nos mostra a existência de casos em que o número de álgebras de valorização minimais é finito.

(4.4.3) Observação. Na proposição (4.4.2) podemos tomar ℓ_1 e ℓ_2, de modo mais geral, como $[a\ b\ c]$ e $[-a\ -b\ -c]$, respectivamente, onde $a,b,c\in\mathbb{N}$. O fato principal é que $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$ é um subconjunto de um plano.

(4.4.4) Proposição. O número de álgebras de valorização minimais contendo $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$ não é sempre finito.

Demonstração. Vamos considerar os respectivos representantes de ℓ_1 e ℓ_2 como $[2\ -1\ 1]$ e $[-1\ 0\ 1]$, e as correspondentes álgebras de valorização $R\cap V_{\ell_1}$ e $R\cap V_{\ell_2}$. Estas são distintas pois $xy\in R\cap V_{\ell_1}$, $xy\notin R\cap V_{\ell_2}$ e $y^2z\in R\cap V_{\ell_2}$, $y^2z\notin R\cap V_{\ell_1}$. Ainda os elementos $y\in R$ e $x\in R$ mostram que $R\cap V_{\ell_1}\neq R$, $R\cap V_{\ell_2}\neq R$ porque $y\notin V_{\ell_1}$ e $x\notin V_{\ell_2}$. Com a interpretação anterior, temos que $R\cap V_{\ell_1}$ é um subconjunto da parte do espaço limitada pelos planos $2\alpha-\beta+\gamma=0$, $\gamma=0$, $\beta=0$ e $\alpha=0$, enquanto que $R\cap V_{\ell_2}$ está contida na região determinada pelos planos $-\alpha+\gamma=0$, $\beta=0$ e $\alpha=0$. Segue daí que $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$ é a intersecção de tais conjuntos, a qual faz parte da região determinada pelos planos $2\alpha-\beta+\gamma=0$, $-\alpha+\gamma=0$, $\beta=0$ e $\alpha=0$. No gráfico, denotamos por π^1 o plano de equação $2\alpha-\beta+\gamma=0$ e por π^2 o plano de equação $-\alpha+\gamma=0$.



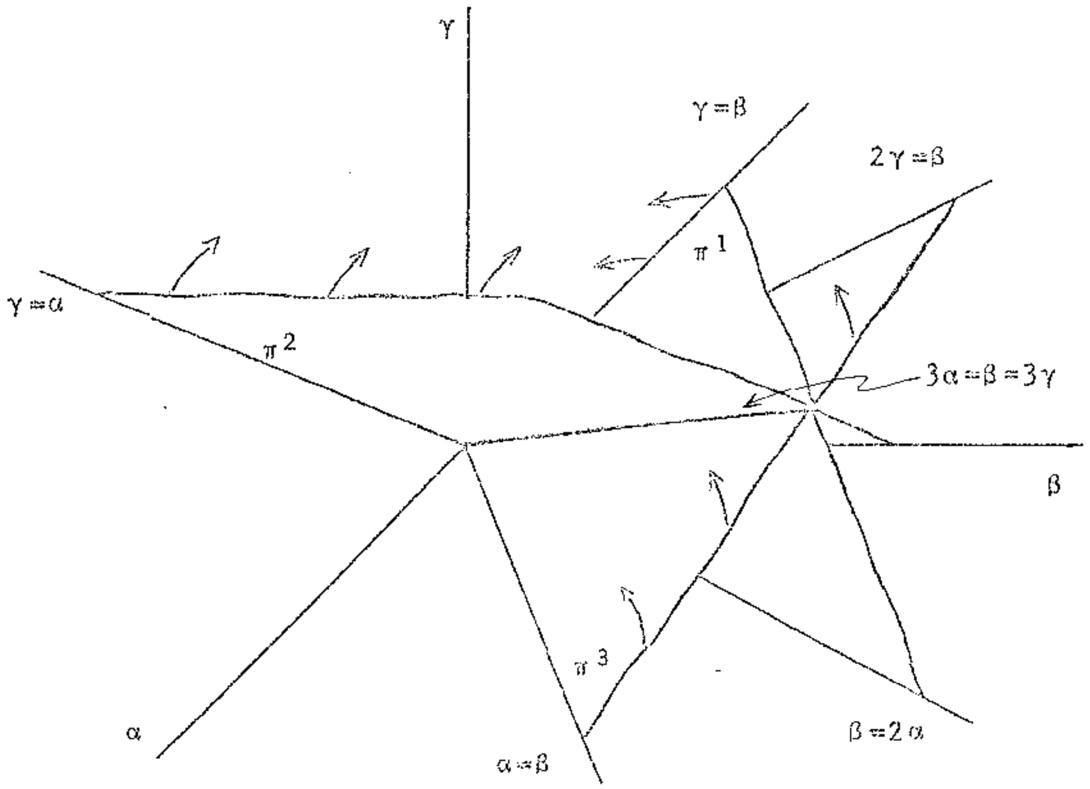
De início, temos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
R\cap V_{\ell_1} \arrow[dr, dash] & & R\cap V_{\ell_2} \arrow[dl, dash] \\
& R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2} &
\end{tikzcd}$$

Queremos encontrar outras álgebras de valorização $R\cap V_{\ell_i}$ com $i \neq 1,2$, contendo $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$ e distintas de $R\cap V_{\ell_1}$ e de $R\cap V_{\ell_2}$. Para tal, consideraremos as álgebras de valorização do tipo $R\cap V_{\ell}$, sendo ℓ dado por $[a\ b\ c]$, tais que o plano $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ contenha a reta $3\alpha=\beta=3\gamma$, intersecção dos planos $2\alpha-\beta+\gamma=0$ e $-\alpha+\gamma=0$, e ainda $R\cap V_{\ell}\supset R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$. Observe que a condição de conter a reta intersecção $3\alpha=\beta=3\gamma$ torna os planos $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ mínimos tais que $a\alpha+b\beta+c\gamma>0$ contém $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$, no sentido de que para outro plano Ω não contendo tal reta, o semi-espaço determinado por Ω e contendo o conjunto $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$, contém também o semi-espaço em que está contido $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$ e determinado por um plano que contém a reta $3\alpha=\beta=3\gamma$.

Seja ℓ_3 o funcional representado por $[1\ -1\ 2]$, e $R\cap V_{\ell_3}$ o conjunto determinado graficamente pela parte do espaço compreendida entre os planos $\alpha-\beta+2\gamma=0$, $\alpha=0$ e $\beta=0$, $\gamma=0$ e sendo que $\alpha-\beta+2\gamma=0$ contém a reta $3\alpha=\beta=3\gamma$. Como $(0,0,1)$ representa um elemento de $R\cap V_{\ell_3}$, temos que $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}\subset R\cap V_{\ell_3}$.

Na representação gráfica que segue, denotamos por π^1 o plano $2\alpha-\beta+\gamma=0$, por π^2 o plano $-\alpha+\gamma=0$ e por π^3 o de equação $\alpha-\beta+2\gamma=0$.



Verificamos que $R\cap V_{\ell_3}$ é distinto de $R\cap V_{\ell_1}$ e de $R\cap V_{\ell_2}$ através da tabela:

$R\cap V_{\ell_1}$	$R\cap V_{\ell_2}$	$R\cap V_{\ell_3}$
$xy^2 \in$		$xy^2 \notin$
$xy^5z^2 \notin$		$xy^5z^2 \in$
	$y^4z \in$	$y^4z \notin$
	$x^2yz \notin$	$x^2yz \in$

Temos agora:

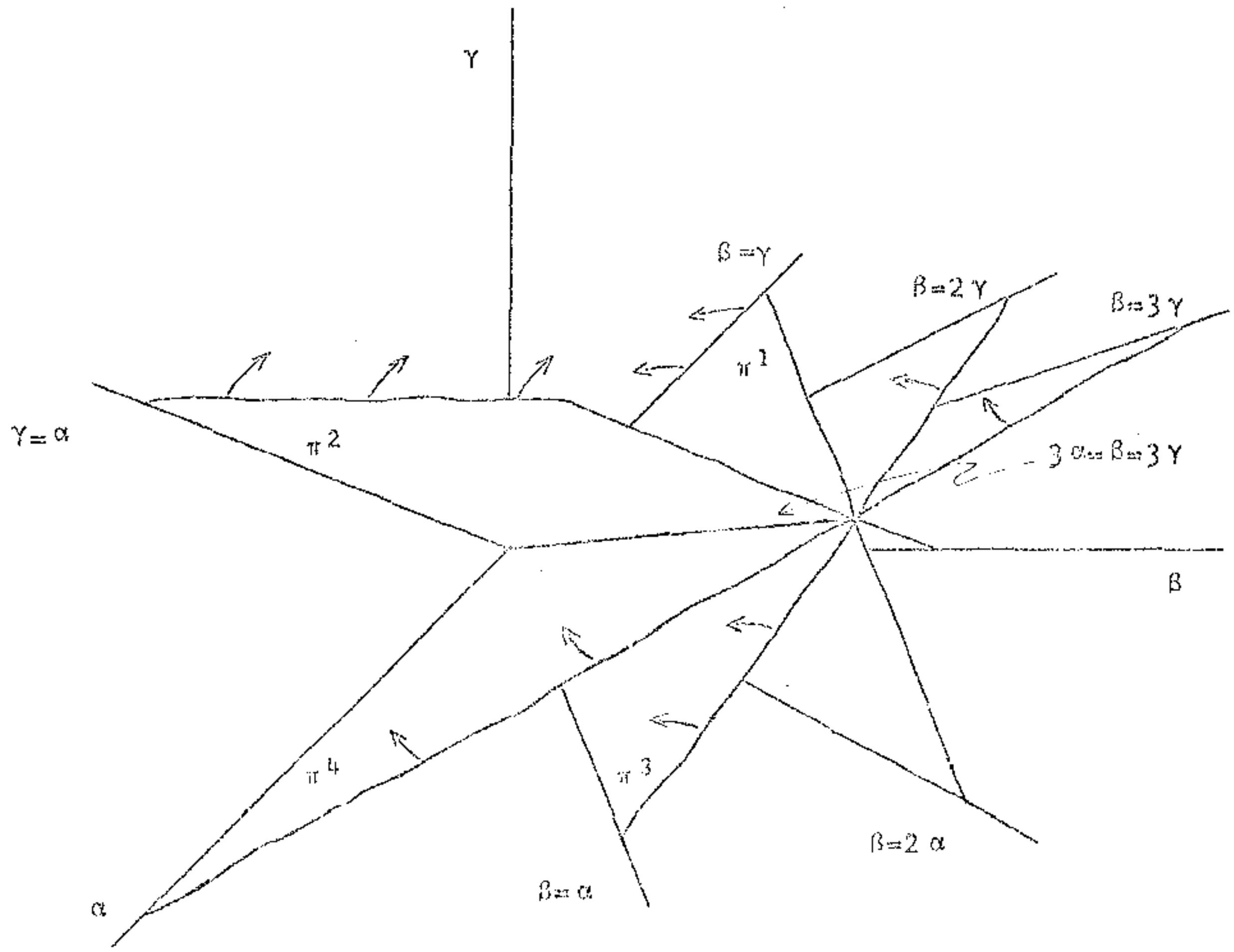
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] R\cap V_{\ell_1} \arrow[dr, no head] & R\cap V_{\ell_2} \arrow[d, no head] & R\cap V_{\ell_3} \arrow[dl, no head] \\ & R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2} & \end{tikzcd}$$

Consideremos a representação $[0\ -1\ 3]$ para ℓ_4 e a álgebra de valorização $R\cap V_{\ell_4}$. O plano $-\beta+3\gamma=0$ contém a reta $3\alpha=\beta=3\gamma$, e juntamente com $\beta=0$ e $\alpha=0$ determinam uma parte do espaço da qual $R\cap V_{\ell_4}$ é um subconjunto, satisfazendo a relação: $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}\subset R\cap V_{\ell_4}$. Além disso, a tabela abaixo mostra que $R\cap V_{\ell_4}$ é distinta de $R\cap V_{\ell_i}$ para $i=1,2,3$.

$R\cap V_{\ell_1}$	$R\cap V_{\ell_2}$	$R\cap V_{\ell_3}$	$R\cap V_{\ell_4}$
$x^2y^4z\in$			$x^2y^4z\notin$
$y^2z\notin$			$y^2z\in$
	$xy^4z\in$		$xy^4z\notin$
	$x^2z\notin$		$x^2z\in$
		$x^2y^4z\in$	$x^2y^4z\notin$
		$y^3z\notin$	$y^3z\in$

Vamos representar num mesmo gráfico $R\cap V_{\ell_i}$ para $i=1,2,3,4$, construindo os planos π^1, π^2, π^3 e acrescentando agora o plano π^4 de equação $-\beta+3\gamma=0$. Observe que os semi-espaços onde estão representados $R\cap V_{\ell_i}$, contém a intersecção $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$.

O gráfico é o seguinte:



Observe que o plano π^3 é determinado pelas retas $3\alpha=\beta=3\gamma$ e $\beta=2\gamma$; π^4 por $3\alpha=\beta=3\gamma$ e $\beta=3\gamma$. Se prosseguirmos construindo planos π^5 contendo $3\alpha=\beta=3\gamma$ e $\beta=4\gamma$; ......; π^n contendo $3\alpha=\beta=3\gamma$ e $\beta=(n-1)\gamma$; .... de tal modo que os semi-planos "positivos" destes contenham $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$, obtemos um número infinito de álgebras de valorização minimais contendo $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$. Por exemplo, π^5 é dado pela equação $-\alpha-\beta+4\gamma=0$, π^6 é dado por $-2\alpha-\beta+5\gamma=0$, e assim por diante. Note que para cada equação de um plano , determinado desse modo, os coeficientes de α,β e γ dão as componentes dos funcionais lineares que definirão as respectivas álgebras de valorização. Como exemplo ℓ_5 terá a representação $[-1\ -1\ 4]$, e ℓ_6 será representado por $[-2\ -1\ 5]$, de acordo com π^5 e π^6 .

(4.4.5) <u>Observação</u>. A proposição (4.4.2) mostra a existência das álgebras de valorização $R\cap V_{\ell_1}$ e $R\cap V_{\ell_2}$ tais que , se

$R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$, então, $R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_1}$ ou $R\cap V_\ell \supset R\cap V_{\ell_2}$

isto é, um exemplo em que o resultado (4.1.8) é válido. Por sua vez, (4.4.4) mostra que este resultado não é uma propriedade das álgebras de valorização em geral.

00000000000

0000000

CAPITULO 5

ESTUDO DE $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$

5.1. <u>Quando</u> $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t}) \subset R \cap V_{\ell}$.

(5.1.1) <u>Proposição</u>. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 funcionais lineares sobre $\mathbb{Q}$, e sejam V_{ℓ_1} e V_{ℓ_2} os anéis de valorização de $K(x,y,z)$, correspondentes a ℓ_1 e ℓ_2. Se λ_1 e λ_2 são escalares no corpo $\mathbb{R}$, então <u>não é verdade que</u> $V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset V_{\lambda_1\ell_1+\lambda_2\ell_2}$, <u>sempre</u>.

<u>Demonstração</u>. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 representados por $[1\ 0\ -1]$ e $[0\ 1\ -1]$, respectivamente, e sejam $\lambda_1=\lambda_2=1$. Mostraremos que $V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \not\subset V_{\ell_1+\ell_2}$. A representação de $\ell=\ell_1+\ell_2$ é $[1\ 1\ -2]$.

Consideremos $g = xy^4z^2 + x^4yz^2$ pertencente a $K[x,y,z]$, e seja $f = 1/g$ um elemento de $K(x,y,z)$. Sabemos que para qualquer valorização V_ℓ, temos $V_\ell(f) = -V_\ell(g)$. Pela definição de V_ℓ, obtemos: $V_{\ell_1}(g) = -1$, $V_{\ell_2}(g) = -1$ e $V_\ell(g) = 1$ doque se conclui que $V_{\ell_1}(f) = 1 = V_{\ell_2}(f)$ e $V_\ell(f) = -1$. Portanto, $f \in V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$ e $f \notin V_{\ell_1+\ell_2}$.

(5.1.2) Observação. Podemos concluir ainda, usando as valorizações definidas acima, que $R \cap V_{\ell_i} \not\subset R \cap V_{\ell_1+\ell_2}$, para $i=1,2$, exibindo os elementos $xz \in R \cap V_{\ell_1}$ e $yz \in R \cap V_{\ell_2}$ tais que, xz, $yz \notin R \cap V_{\ell_1+\ell_2}$.

(5.1.3) Proposição. Sejam V_{ℓ_1} e V_{ℓ_2} anéis de valorização de $K(x,y,z)$. Se λ_1 e λ_2 são escalares não ambos positivos, então não é verdade que $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset R \cap V_{\lambda_1\ell_1+\lambda_2\ell_2}$, sempre.

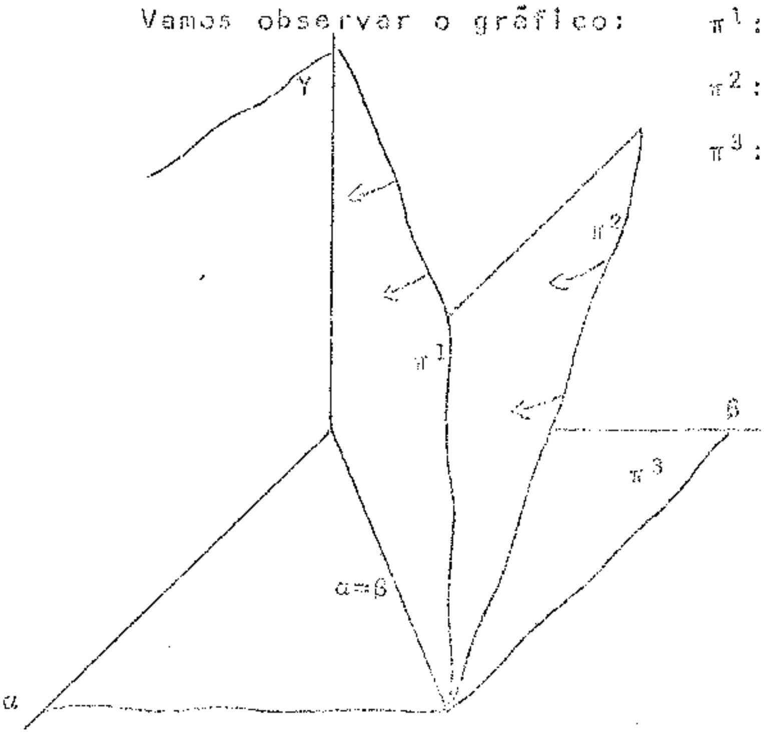
Demonstração. Recordamos aqui que $R = K[x,y,z]$. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 dados, respectivamente, por $[1\ -1\ 0]$ e $[1\ -1\ 1]$. Consideremos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, e $\ell = \ell_1 - \ell_2$, representado por $[0\ 0\ -1]$. Então, existe $z \in R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$ tal que $z \notin R \cap V_{\ell_1-\ell_2} \subset \pi^3$.

Vamos observar o gráfico:

π^1: plano $\alpha-\beta=0$

π^2: plano $\alpha-\beta+\gamma=0$

π^3: plano $\gamma=0$



Podemos notar que $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \cap V_{\ell_1 - \ell_2}$ é a reta $\alpha = \beta$, uma vez que $R \cap V_{\ell_1 - \ell_2}$ está contido no plano $\gamma = 0$, o que torna impossível a inclusão $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset R \cap V_{\ell_1 - \ell_2}$.

A proposição anterior nos levou a questionar o que aconteceria se os escalares fossem todos positivos. A resposta a isso é o resultado da seguinte proposição:

(5.1.4) Proposição. Se $\ell = \sum_{t=1}^{m} \lambda_t \ell_t$, onde ℓ_t são funcionais lineares e λ_t são escalares satisfazendo $\lambda_t \geq 0$, $\forall\, t$, então $R \cap V_\ell \supset R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$.

Demonstração. Sejam ℓ_t, λ_t e ℓ satisfazendo as hipóteses dadas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por ρ_n a terna de números naturais (i_n, j_n, k_n). Seja f um elemento de $K[x,y,z]$, dado por $f = \sum_n e_{i_n j_n k_n} x^{i_n} y^{j_n} z^{k_n}$, e suponhamos que f esteja em $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$. Segue daí que para todo $t \in \{1,\ldots,m\}$, temos $V_{\ell_t}(f) \geq 0$. Então, para todo t e todo n, $\ell_t(\rho_n) \geq 0$. Como $\lambda_t \geq 0$, para todo t, podemos concluir que $\sum_{t=1}^{m} \lambda_t \ell_t(\rho_n) \geq 0$, para todo n, ou seja, $\ell(\rho_n) \geq 0$, qualquer que seja n. Portanto, $\ell(f) \geq 0$, e $f \in R \cap V_\ell$.

Prosseguimos dando algumas consequencias de se ter $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t}) \subset R \cap V_\ell$.

(5.1.5) Proposição. Sejam V_{ℓ_t}, $t=1,\ldots,m$ e V_ℓ, anéis de valorização de $K(x,y,z)$. Sejam $H^+(\ell_t)$ e $H^+(\ell)$ os conjuntos definidos em (3.1.6). Então, $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t}) \subset R \cap V_\ell$, não implica que $\bigcap_{t=1}^{m} H^+(\ell_t) \subset H^+(\ell)$, no caso em que $R = K[x,y,z]$

Demonstração. Sejam ℓ_1, ℓ_2 e ℓ dados por $[1\ -1\ 0]$, $[-1\ 1\ 0]$, e $[2\ -1\ 0]$, respectivamente. Para mostrar que vale a inclusão $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset R \cap V_\ell$, observamos que $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$ é um subconjunto do plano $\alpha=\beta$, e que $R \cap V_\ell$ está contido no semi-espaço determinado pelo plano $2\alpha-\beta=0$, e contendo o ponto $(1,0,0)$. No entanto, $H^+(\ell_1) \cap H^+(\ell_2) \not\subset H^+(\ell)$. Para mostrar a última afirmação, seja $r=(-1,-1,0) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Então, $\ell_1(r) = \ell_2(r)=0$, mas $\ell(r)=-1$. Assim, $r \in H^+(\ell_1) \cap H^+(\ell_2)$ e $r \notin H^+(\ell)$.

(5.1.6) Observação. Das proposições (5.1.5) e (3.1.7) concluímos que se $R=K[x,y,z]$, então $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t}) \subset R \cap V_\ell$, não implica necessariamente que $\ell = \sum_{t=1}^{m} \ell_t$. Nota, no exemplo dado em (5.1.5), que $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset R \cap V_\ell$ e no entanto, $\ell \neq \lambda_1\ell_1+\lambda_2\ell_2$.

(5.1.7) Proposição. Se $R = K[x,y,z,x^{-1},y^{-1},z^{-1}]$ então temos $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t}) \subset R \cap V_\ell \longrightarrow \bigcap_{t=1}^{m} H^+(\ell_t) \subset H^+(\ell)$.

Demonstração. Sejam $r \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ tal que $r \in \bigcap_{t=1}^{m} H^{+}(\ell_t)$, isto é, $\ell_t(r) \geq 0$, para todo $t \in \{1,\ldots,m\}$. Dado $r \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, existe um inteiro positivo λ tal que $\lambda r \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, e ainda $\ell_t(\lambda r) \geq 0$, para todo $t \in \{1,\ldots,m\}$. Se $\ell_t(\lambda r) \geq 0$ $\forall t$, então, denotando por $X^{\lambda r}$ o monômio $x^{\lambda r_1} y^{\lambda r_2} z^{\lambda r_3}$, onde $r = (r_1, r_2, r_3)$, temos que $X^{\lambda r} \in V_{\ell_t}$ para todo t. Portanto, $X^{\lambda r}$ é um elemento de $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$, do que segue pela hipótese, que $X^{\lambda r} \in R \cap V_\ell$. Logo, $\ell(\lambda r) \geq 0$, e como $\lambda \geq 0$, vem que $\ell(r) \geq 0$, o que significa que $r \in H^{+}(\ell)$.

(5.1.8) Observação. Para $R = K[x,y,z,x^{-1},y^{-1},z^{-1}]$ temos que: $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t}) \subset R \cap V_\ell \longrightarrow \ell = \sum_{t=1}^{m} \lambda_t \ell_t$. Este resultado segue de (3.1.7) e de (5.1.7).

(5.1.9) Proposição. Se $\ell_3 = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2$ então não é sempre verdade que se $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \cap V_{\ell_3} \subset R \cap V_\ell$ então temos que $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset R \cap V_\ell$.

Demonstração. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 funcionais representados por: $[2\ -1\ 0]$ e $[-2\ 0\ 1]$, respectivamente. Seja $\ell_3 = -\ell_1 - \ell_2$, o qual possui a seguinte representação: $[0\ 1\ -1]$, e finalmente consideremos o representante $[-2\ 2\ -1]$ para ℓ. É válida a inclusão $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \cap V_{\ell_3} \subset R \cap V_\ell$, uma vez que o conjunto

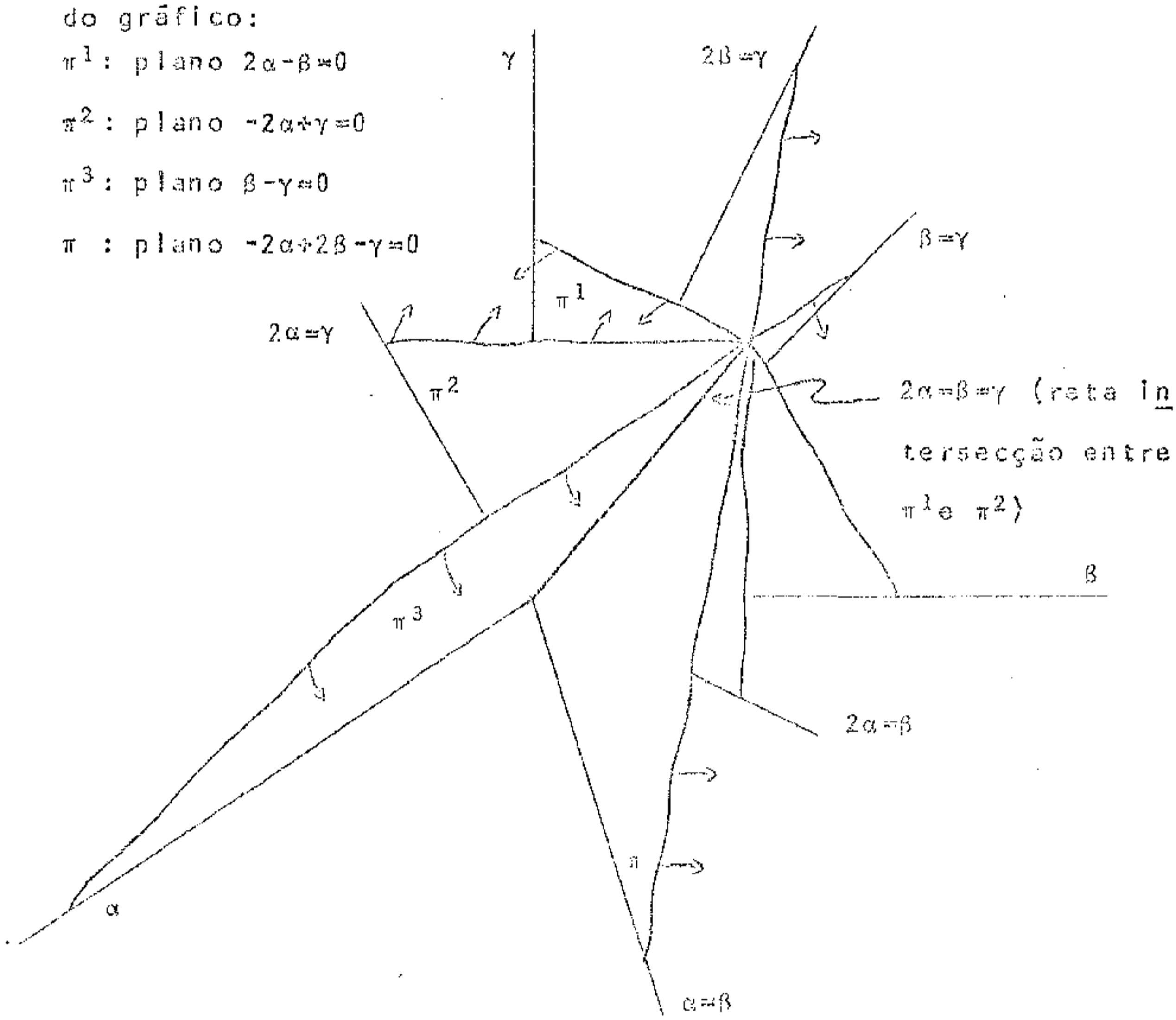
$R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \cap V_{\ell_3}$ consiste de um subconjunto da reta $2\alpha=\beta=\gamma$, a qual está contida em $R \cap V_\ell$. Podémos observar isso, através do gráfico:

π^1: plano $2\alpha-\beta=0$

π^2: plano $-2\alpha+\gamma=0$

π^3: plano $\beta-\gamma=0$

π : plano $-2\alpha+2\beta-\gamma=0$



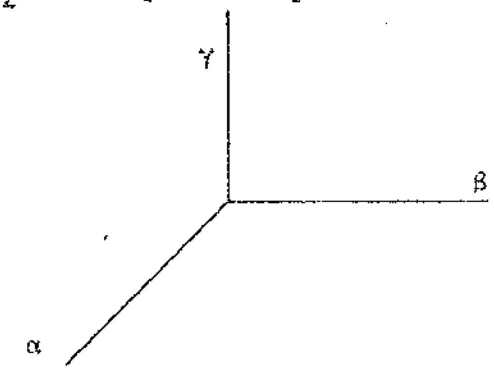
(5.1.10) <u>Observação.</u> Dado $R = K[x,y,z]$, existem anéis de valorização V_{ℓ_1}, V_{ℓ_2} e V_{ℓ_3} de $K(x,y,z)$ satisfazendo:

i) $R \cap V_{\ell_1} = K = R \cap V_{\ell_2}$, $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} \subset R \cap V_{\ell_3}$

ii) $V_{\ell_1} \not\subset V_{\ell_2}$, $V_{\ell_2} \not\subset V_{\ell_1}$; $V_{\ell_3} \not\subset V_{\ell_1}$, $V_{\ell_1} \not\subset V_{\ell_3}$.

De fato, sejam $[-1\ -1\ -1]$, $[-1\ -2\ -1]$, $[1\ 2\ 0]$ as representações de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, respectivamente. Então, $R\cap V_{\ell_1} = K = R\cap V_{\ell_2}$ e $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2} = K \subset R\cap V_{\ell_3}$. Para mostrar que $V_{\ell_1}\not\subset V_{\ell_2}$ e $V_{\ell_2}\not\subset V_{\ell_1}$ sejam $x^{-1}y$ um elemento de V_{ℓ_1} e $x^2y^{-2}z$ um elemento de V_{ℓ_2}, uma vez que $\ell_1(-1,1,0)=0$ $\ell_2(2,-2,1)=1$. Como $\ell_1(2,-2,1)=-1$ e $\ell_2(-1,1,0)=-1$, temos que $x^{-1}y \notin V_{\ell_2}$ e $x^2y^{-2}z \notin V_{\ell_1}$. Vamos considerar agora, o elemento $xy^{-1}\in V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$. De $\ell_3(1,-1,0)=-1$ segue que $xy^{-1}\notin V_{\ell_3}$, o que completa a prova de ii).

(5.1.11) <u>Observação</u>. Considerando ainda o anel $R = K[x,y,z]$, temos que $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2} = K \not\Longrightarrow R\cap V_{\ell_1} = K$ ou $R\cap V_{\ell_2} = K$. Isto pode ser facilmente verificado, tomando-se ℓ_1 como $[-1\ -1\ 0]$ e ℓ_2 como $[0\ -1\ -1]$.



Note que $R\cap V_{\ell_1}$ coincide com o eixo γ e $R\cap V_{\ell_2}$ com o eixo α, donde $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2}$ coincide, graficamente, com o ponto $(0,0,0)$. Logo, $R\cap V_{\ell_1}\cap V_{\ell_2} = K$. No entanto, $R\cap V_{\ell_1}\neq K$ e $R\cap V_{\ell_2}\neq K$.

5.2. <u>Quando</u> $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$ <u>é uma V_ℓ-álgebra de valorização</u>

O nosso objetivo aqui, foi discutir se dadas as álgebras de valorização $R \cap V_{\ell_t}$, $t=1,\ldots,m$ ainda poderíamos obter uma álgebra de valorização igual a $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$.

(5.2.1) <u>Proposição</u>. Dado $R = K[x,y,z]$ existem funcionais lineares ℓ_1 e ℓ_2 sobre $\mathbb{Q}$ tais que existe um elemento u.v na intersecção $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$, tal que $\{u,v\} \not\subset R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$.

<u>Demonstração</u>. Sejam $[1\ -1\ 0]$ e $[-1\ 1\ 0]$ as respectivas representações de ℓ_1 e ℓ_2, e sejam u=x e v=y elementos de R. Então, $V_{\ell_1}(x.y) = V_{\ell_1}(x) + V_{\ell_1}(y) = 0$ e $V_{\ell_2}(x.y) = 0$, donde $x.y \in R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$. Porém, $V_{\ell_1}(y) = -1 = V_{\ell_2}(x)$, o que implica em $\{x,y\} \not\subset R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$.

Um resultado importante que obtivemos, e que constitui nossa próxima proposição, afirma que <u>nem sempre</u> $R \cap (\bigcap_{t=1}^{m} V_{\ell_t})$ <u>é uma álgebra de valorização</u>.

(5.2.2) <u>Proposição</u>. Existem álgebras de valorização $R \cap V_{\ell_1}$ e $R \cap V_{\ell_2}$ tais que <u>não existe</u> uma valorização V satisfazendo a igualdade: $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} = R \cap V$, onde $R = K[x,y,z]$.

<u>Demonstração</u>. Consideremos as álgebras de valorização definidas em (4.4.2). Pelo resultado obtido em (5.2.1), temos que

existe o elemento $x.y \in R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$ tal que x e y não são elementos de $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2}$. Suponhamos que exista uma valorização V de $K(x,y,z)$ tal que $R \cap V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} = R \cap V$. Então, $x.y \in R \cap V$. Como V é um anel de valorização, segue que $x \in V$ ou $y \in V$. De fato, supondo que $x \notin V$, então concluímos de (1.1.7), que $x^{-1} \in V$. Portanto, $x^{-1}(xy) = y \in V$. Logo, se $x.y \in R \cap V$, então $x \in R \cap V$ ou $y \in R \cap V$. Isto contraria a proposição anterior.

0000000000

0000000

CAPITULO 6

VALORIZAÇÃO NÃO DO TIPO V_ℓ

6.1. Propriedades das valorizações V_ℓ em função da mudança de bases de transcendência de $K(x,y,z)$.

(6.1.1) Proposição. Existem bases de transcendência sobre um corpo K tais que a valorização V_{ℓ_1}, referente a uma das bases não é uma valorização V_ℓ, referente à outra.

Demonstração. Seja $K(x,y,z)$ o corpo quociente do anel de polinômios $K[x,y,z]$. De acordo com a proposição (2.2.11) e a observação (2.2.12), $\{x,y,z\}$ e $\{x+y^2,y,z\}$ são duas bases de transcendência geradoras de $K[x,y,z]$, as quais denotaremos, respectivamente, por S e S'. Então, $K[x,y,z]= K[x+y^2,y,z]$. Considerando o funcional linear ℓ_1, dado por $[1\ -1\ 0]$, e a valorização V_{ℓ_1} de $K(x+y^2,y,z)$, vamos denotar por v_{ℓ_1} a restrição de V_{ℓ_1} a $K[x+y^2,y,z]$. Pela definição de v_{ℓ_1}, segue que: $v_{\ell_1}(x+y^2)=1$, $v_{\ell_1}(y)=-1$ e $v_{\ell_1}(z)=0$. Como $x \in K[x+y^2,y,z]$ e sua representação, nesta base S', é $x = 1(x+y^2)+(-1)y^2$, temos que $v_{\ell_1}(x) = \min\{v_{\ell_1}(x+y^2)\ ,\ v_{\ell_1}(y^2)\} = -2$.

Vamos estudar agora, as possibilidades para que exista ℓ tal que $v_{\ell_1} = v_\ell$, sendo v_ℓ referente à base S . As primeiras condições necessárias para ℓ são que $v_\ell(x)=-2$, $v_\ell(y)=-1$ e $v_\ell(z)=0$. De (4.1.5) concluimos que a única representação para ℓ deve ser: $[-2\ -1\ 0]$. No entanto, para tal ℓ , não é satisfeita a condição que $v_{\ell_1} = v_\ell$, uma vez que para o elemento $x+y^2$ temos: $v_\ell(x+y^2) = -2 \neq 1 = v_{\ell_1}(x+y^2)$. Assim, para as bases S e S' , V_{ℓ_1} referente a S' não é do tipo V_ℓ referente a S.

(6.1.2) <u>Proposição</u>. Se u é primo e faz parte de uma base geradora $\{u,v,t\}$ de $K[x,y,z]$, então <u>existe um funcional linear ℓ tal que</u> $V_\ell = K[u,v,t]_{\langle u\rangle}$, com V_ℓ referente à base $\{u,v,t\}$.

<u>Demonstração</u>. Sejam ℓ representado por $[1\ 0\ 0]$ e $K[u,v,t]_{\langle u\rangle}$ a localização de $K[u,v,t]$ em $\langle u\rangle$, definida em (1.3.3). Consideremos um elemento f de V_ℓ , $f=g/h$, com g e h pertencentes a $K[u,v,t]$, e sem fatores comuns, e $h\neq 0$. Então, $V_\ell(f) \geq 0$, ou seja, $V_\ell(g) \geq V_\ell(h)$. Suponhamos que $u | h$ e $u \nmid g$. Como a base dada é geradora, $K[x,y,z] = K[u,v,t]$, e por (2.2.1), podemos escrever g e h na forma:

$$g = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{i=w} e_{ijk} u^i v^j t^k\ , \qquad h = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{i=w} d_{ijk} u^i v^j t^k$$

Se $u \nmid g$, então existe um termo $e_{0jk} v^j t^k$ na expressão de g, tal

que $e_{0jk} \neq 0$. Logo, $V_\ell(g) = 0$, pois $\ell(0,j,k)=0$. Como $u|h$, temos que existe $h' \neq 0$ tal que $h = u.h'$. Então,
$V_\ell(h) = V_\ell(u) + V_\ell(h') = 1 + V_\ell(h')$, onde $V_\ell(h') \geq 0$, pela definição de V_ℓ. Podemos concluir assim, que $V_\ell(g) < V_\ell(h)$, o que contraria a hipótese. Portanto, $u \nmid h$, isto é, f pertence a $K[u,v,t]_{<u>}$. Seja agora $g/h \in K[u,v,t]_{<u>}$. Então, g e h são elementos de $K[u,v,t]$, com $h \neq 0$, e $u \nmid h$. Raciocinando de modo análogo ao acima, segue que $V_\ell(h) = 0$. Como $V_\ell(g) \geq 0$, temos que $V_\ell(g) \geq V_\ell(h)$. Assim, $g/h \in V_\ell$.

Mostraremos a seguir, que existem elementos irredutíveis f de $K[x,y,z]$ tais que a localização $K[x,y,z]_{<f>}$ não é um anel de valorização de $K(x,y,z)$, do tipo V_ℓ. Para isso, precisamos da seguinte proposição:

(6.1.3) <u>Proposição</u>. Existem <u>elementos irredutíveis</u> sobre um corpo K, <u>que não fazem parte</u> de uma base de transcendência geradora de $K[x,y,z]$.

<u>Demonstração</u>. Consideremos $K = \mathbb{Q}$, o corpo dos números racionais, e seja $f=x^2+y^2$ um binômio sobre $\mathbb{Q}$. Para mostrar que f é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, suponhamos que existam g e h, não nulos, da forma $g=ax+by+c$ e $h=mx+ny+d$, com a,b,c,m,n,d em $\mathbb{Q}$, tais que $f=g.h$. Então,

$$x^2+y^2 = amx^2+bny^2+(an+bm)xy+(cm+ad)x+(cn+bd)y+cd \; .$$

Pela igualdade de polinômios, obtemos da expressão acima, um sistema de equações, o qual não admite solução em $\mathbb{Q}$. Logo, f é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Suponhamos agora, que f faça parte de uma base geradora $\{f,g,h\}$ de $\mathbb{Q}[x,y,z]$. Vamos supor também que g e h possuam termos constantes nulos. Da igualdade

$\mathbb{Q}[x,y,z] = \mathbb{Q}[x^2+y^2,g,h]$, segue que:

$$x = x(x^2+y^2,g,h)$$
$$y = y(x^2+y^2,g,h)$$
$$z = z(x^2+y^2,g,h)$$

cujo sistema pode ser transformado ainda em:

$$\begin{aligned} x &= x_1 g + x_2 h \\ y &= y_1 g + y_2 h \qquad (*) \\ z &= z_1 g + z_2 h \end{aligned}$$

onde x_i , y_i e z_i ,$i=1,2$, pertencem a $\mathbb{Q}$. Consideremos então as duplas (x_1,x_2), (y_1,y_2) e (z_1,z_2) de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ tem dimensão 2 sobre $\mathbb{Q}$, como espaço vetorial, temos que os tres vetores dados são linearmente dependentes, isto é, existem escalares a,b,c em $\mathbb{Q}$; não todos nulos, tais que :

$a(x_1,x_2) + b(y_1,y_2) + c(z_1,z_2) = 0$. Segue daí que

$ax_1+by_1+cz_1=0$ e $ax_2+by_2+cz_2=0$. Multiplicando-se a primeira equação do sistema (*) por a, a segunda por b, a terceira por c , e somando-se, obtemos:

$ax+by+cz = (ax_1+by_1+cz_1) + (ax_2+by_2+cz_2) = 0$. Podemos concluir daí que existem $a,b,c \in \mathbb{Q}$, não todos nulos, tais que

$ax+by+cz=0$, o que contraria o fato de x,y,z serem algebricamente independentes. Portanto, x^2+y^2 não faz parte de uma base geradora de $\mathbb{Q}[x,y,z]$.

Passamos agora ao resultado que queríamos.

(6.1.4) <u>Proposição</u>. Dado um anel de valorização V tal que $K[x,y,z] \subset V$, <u>não existe necessariamente</u> uma base de transcendência geradora de $K[x,y,z]$ tal que existe V_ℓ, referente a essa base, com $V = V_\ell$, onde ℓ é um funcional linear representado por $[a\ b\ c]$, sendo a,b,c elementos de $\mathbb{Z}$.

<u>Demonstração</u>. Consideremos $K = \mathbb{Q}$ e $f=x^2+y^2$ em $\mathbb{Q}[x,y,z]$, irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Seja $V = \mathbb{Q}[x,y,z]_{<f>}$ o anel de valorização de $\mathbb{Q}(x,y,z)$, segundo (1.3.5). Suponhamos agora que existe uma base $\{u,v,t\}$ nas condições do enunciado, e que $V(f)=1$. Se $V = V_\ell$, então $V_\ell(f)=1$ e a,b e c são não negativos, uma vez que $K[x,y,z] \subset V$. Sendo $\mathbb{Q}[x,y,z] = \mathbb{Q}[u,v,t]$, segue de (2.2.3) e de (4.1.2), que $f = f_w+f_{w+1}+\dots+f_{w+s}$, onde $f_w \neq 0$, $f_{w+s} \neq 0$, e $V_\ell(f) = w$. Então, de $1 = V_\ell(f) = w$, concluímos que existe um monômio $e_{ijk}u^i v^j t^k$ na expressão de f, tal que $V_\ell(e_{ijk}u^i v^j t^k) = \ell(i,j,k) = ai+bj+ck = 1$. Mas, como $\{i,j,k,a,b,c\} \subset \mathbb{N}$, obtemos apenas tres possíveis soluções para $ai+bj+ck = 1$, a saber:

1) $a=i=1$ e $bj = ck = 0$, ou
2) $b=j=1$ e $ai = ck = 0$, ou
3) $c=k=1$ e $ai = bj = 0$.

Consideremos a solução 1). De $a=1$, segue que $V(u)=1$. Então, vamos mostrar que $f|u$. Suponhamos que $f\nmid u$. Logo $f/u = g$ e $V(f/u) = V(f) - V(u) = 0 = V(u/f)$. Portanto, $u/f \in V$, o que é absurdo pois $V = \mathbb{Q}[x,y,z]_{<f>}$. Como f é irredutível e $f|u$, existe $q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ tal que $u=qf$. Logo, f faz parte de uma base geradora de $\mathbb{Q}[x,y,z]$ o que é falso pela proposição anterior. Concluimos daí que não existe uma base $\{u,v,t\}$ tal que $V = V_\ell$, com ℓ referente a essa base.

6.2. Valorização de $K(x,y,z)$ não do tipo V_ℓ.

(6.2.1) Definição. Seja $K((t))$ o corpo quociente de $K[[t]]$, o anel das séries formais em t com coeficientes em K. Sejam $U: K((t)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ a valorização definida em (2.3.8), por: $U(\zeta/\psi) = o(\zeta) - o(\psi)$, e I um isomorfismo entre $K(x,y,z)$ e $K((t))$, segundo (2.3.9). Definamos a aplicação:
$V: K(x,y,z) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $V = U \circ I$.

(6.2.2) Proposição. A aplicação $V: K(x,y,z) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida acima, é uma valorização de $K(x,y,z)$ sobre K, discreta, de posto 1.

Demonstração. Sejam f e g elementos de $K(x,y,z)$, não nulos. Então, $V(f.g) = U(I(f.g)) = U(I(f) . I(g)) = U(I(f)) + U(I(g))$

$$= V(f) + V(g)$$

onde as igualdades decorrem das propriedades da valorização U e do isomorfismo I.

Analogamente, $V(f+g) = U(I(f+g)) = U(I(f)+I(g)) \geq \min\{U(I(f)), U(I(g))\} = \min\{V(f),V(g)\}$. Além disso, se k é um elemento de K, então $V(k) = o(I(k)) = o(k') = 0$.

Mostraremos agora que o anel de valorização V não é do tipo V_ℓ.

(6.2.3) <u>Proposição</u>. Não existe uma base de transcendência de $K(x,y,z)$ para a qual $V = V_\ell$, com V_ℓ referente a essa base.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos que exista uma base $\{d,u,v\}$ tal que $K(x,y,z) = K(d,u,v)$, e $V = V_\ell$. Como $\{d,u,v\} \subset K(x,y,z)$, existem então as imagens $I(d)$, $I(u)$ e $I(v)$ em $K((t))$. Escrevamos: $I(d) = t^{s_d}.\zeta$, $I(u) = t^{s_u}.\psi$, e $I(v) = t^{s_v}.\tau$, onde ζ, ψ e τ são elementos de $K[[t]]$, e $\zeta_o \neq 0$, $\psi_o \neq 0$ e $\tau_o \neq 0$, segundo (2.3.5). Consideremos o elemento de $K[x,y,z]$ dado pela diferença: $\psi_o^{s_d} d^{s_u} - \zeta_o^{s_u} u^{s_d}$. Então,

$$
\begin{aligned}
V(\psi_o^{s_d} d^{s_u}) &= o(I(\psi_o^{s_d}.d^{s_u})) = o(\psi_o^{s_d}.I(d^{s_u})) \\
&= o(\psi_o^{s_d}(t^{s_d}.\zeta)^{s_u}) = o(t^{s_d s_u}.\psi_o^{s_d}.\zeta^{s_u}) \\
&= s_d.s_u
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
V(\zeta_o^{s_u} u^{s_d}) &= o(I(\zeta_o^{s_u}.u^{s_d})) = o(\zeta_o^{s_u}(t^{s_u}.\psi)^{s_d}) \\
&= o(t^{s_u.s_d}.\zeta_o^{s_u}.\psi^{s_d}) = s_u.s_d
\end{aligned}
$$

Como por hipótese, $V = V_\ell$, segue que:

$V_\ell(\psi_o^{s_d}.d^{s_u}) = s_d.s_u$ e $V_\ell(\zeta_o^{s_u}.u^{s_d}) = s_u.s_d$. Segue daí que $V(\psi_o^{s_d}.d^{s_u} - \zeta_o^{s_u}.u^{s_d}) = s_u.s_d$. Vamos calcular diretamente o valor de $V(\psi_o^{s_d}.d^{s_u} - \zeta_o^{s_u}.u^{s_d})$.

$$\begin{aligned} V(\psi_o^{s_d}.d^{s_u} - \zeta_o^{s_u}.u^{s_d}) &= U(I(\psi_o^{s_d}.d^{s_u} - \zeta_o^{s_u}.u^{s_d})) \\ &= U(t^{s_d.s_u}(\psi_o^{s_d}.\zeta^{s_u} - \zeta_o^{s_u}.\psi^{s_d})) \\ &= U(t^{s_d.s_u}.\sigma) \end{aligned}$$

onde $\sigma_o \neq 0$. Assim, podemos escrever $\sigma = t^r.\xi$, onde $r \geqslant 1$ e $\xi_o \neq 0$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(\psi_o^{s_d}.d^{s_u} - \zeta_o^{s_u}.u^{s_d}) &= U(t^{s_d.s_u+r}.\ \xi) \\ &= s_d.s_u+r \ > \ s_d.s_u \end{aligned}$$

o que contraria a hipótese que $V = V_\ell$, e demonstra a proposição.

Consideremos as séries formais em t com coeficientes em K, dadas por :

$$p_1(t) = t\ , \qquad p_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^{i!}, \qquad p_3(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} t^{i!} \Big)^{j!}$$

Estas séries são algebricamente independentes, segundo a prova feita em (2.3.10). Observamos aqui, que as suas ordens são as seguintes: $o(p_1(t)) = 1$, $o(p_2(t)) = 1$ e $o(p_3(t)) = 1$, de acordo com (2.3.3).

(6.2.4) Proposição. Se $p_1(t)$, $p_2(t)$ e $p_3(t)$ são as séries formais dadas acima, e se colocarmos para o isomorfismo I entre $K(x,y,z)$ e $K((t))$, $I(x) = p_1(t)$, $I(y) = p_2(t)$ e $I(z) = P_3(t)$, de acordo com (2.3.10), então a valorização V definida em (6.2.1), satisfaz o seguinte:

I) $K[x,y,z] \subset V$

II) $M_V \cap K[x,y,z] = \langle x,y,z\rangle$ = menor ideal que contém x,y e z.

Demonstração. Das séries dadas e dos valores de I em x,y,z , temos que $V(x) = V(y) = V(z) = 1$. Seja $f \in K[x,y,z]$ dado pela soma finita: $f = \Sigma\, e_{ijk}x^i y^j z^k$, onde $e_{ijk} \in K$, tal que f é não nulo. Então, para cada monômio $e_{ijk}x^i y^j z^k$ temos que: $V(e_{ijk}x^i y^j z^k) = V(e_{ijk})+V(x^i)+V(y^j)+V(z^k) = i+j+k \geq 0$. Portanto, $V(f) \geq 0$, e $f \in V$. Provemos agora II). Como $M_V \cap K[x,y,z]$ é um ideal de $K[x,y,z]$ e $\{x,y,z\} \subset M_V \cap K[x,y,z]$, segue que $M_V \cap K[x,y,z] \supset \langle x,y,z\rangle$. Seja f um elemento de $M_V \cap K[x,y,z]$. Então, $f \in K[x,y,z]$ e $V(f) > 0$. Suponhamos que $f \notin \langle x,y,z\rangle$. Isto significa que f possui um termo constante não nulo c. Escrevendo $f = g+c$, onde $g = \sum_{\text{finita}} r_i b_i$, com $b_i \in \{x,y,z\}$ e $r_i \in K[x,y,z]$, temos que:

$$V(r_i b_i) = V(r_i) + V(b_i) \geq 1$$

porque $V(b_i) = 1$, e $V(r_i) \geq 0$ por I).

Portanto, $V(f) = \min\{V(c), V(g)\} = 0$, o que contraria a hipótese. Logo, $M_V \cap K[x,y,z] = \langle x,y,z \rangle$.

ooooooooooo

ooooooo

BIBLIOGRAFIA

- BARSHAY, J.: Topics in Ring Theory. W.A.Benjamin, Inc. , New York (1969).
- BOURBAKI, N.: Algèbre Commutative, Cap.6. Hermann, Paris , (1964).
- DEAN, R. A.: Elementos de Algebra Abstrata. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (1974).
- ENDLER, O.: Valuation Theory. Spring-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).
- JACOBSON, N.: Lectures in Abstract Algebra, Vol. III. Van Nostrand, Princeton (1964).
- KIRBY, D.: Integral Dependence and Valuation Algebras . Proc. London Math. Soc.,20 (1970), 79-100.
- MCCOY, N. H.: The Theory of Rings. Chelsea Publishing Company, Bronx, New York.
- NERING, E. D.: Linear Algebra and Matrix Theory. John Wiley & Sons, Inc. (1970).
- RIBENBOIM, P.: Théorie des Groupes Ordennés. Imprenta Lopez Peru 666, Buenos Aires (1963).
- ZARISKI, O., SAMUEL, P.: Commutative Algebra, Vol. I, II , Van Nostrand, Princeton (1958-1960).