EJECUCION Y EVALUACION DE UN PROYECTO DE ENSEÑANZA PROGRAMADA PARA EL MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA DEL CALCULO EN LA UNIVERSIDAD DE PANAMA

WENCESLAO ROBERTO DE LOS RIOS CARRILLO

WENCESLAO ROBERTO DE LOS RIOS CARRILLO

EJECUCION Y EVALUACION DE UN PROYECTO DE ENSEÑANZA PROGRAMADA PARA EL MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA DEL CALCULO EN LA UNIVERSIDAD DE PANAMA

Tesis presentada en el Instituto de Matemática Estadística y Ciencia de la Computación de la Universidad de Campinas, para obtener el título de Master en Enseñanza de Las Ciencias.

Campinas, Sao Paulo - Brasil

1980

DEDICATORIA

A mi esposa Elvia por su apoyo
amor y comprensión.

A mis hijas Isis, Iris e Ileana

A mis Padres y Hermanos

Dedico con amor y cariño este trabajo.

Mi Agradecimiento a los Profesores Ubiratan D'Ambrosio, Henry G. Wetzler y Palmeron Mendes por la oportunidad, el apoyo y la orientación en la realización de este trabajo.

Mi Agradecimiento al Profesor
Antonio Altamar por sus sabios
consejos en la confección de
este trabajo.

Mi Agradecimiento a profesores y
estudiantes que colaboraron en
la realización de esta Tesis.

INDICE

PAGINA

INTRODUCCION

El trabajo que presentamos como tesis, es el resultado de una investigación en el área de educación y que hemos llevado a cabo durante dos años. El desarrollo del trabajo de investigación durante esos dos años ha sido lento pero continuo; es un trabajo que no se ha ceñido a normas específicas pero es objetivo, es el resultado de una investigación con algunas limitaciones, pero donde hemos realizado una actuación consciente de nuestro papel como docente preocupado por la enseñanza y sus problemas. Consideramos que es un trabajo original, a pesar de que, quizás, se hayan ejecutado trabajos semejantes; pues el nuestro es el resultado de una experiencia ganada en la práctica y no en teoría. No pretendemos haber resuelto un problema educativo, pero consideramos que sí hemos logrado un avance para su solución.

Sintetizando nuestro trabajo, podemos señalar que la inquietud por el mismo es causada por el bajo nivel cualitativo en la preparación académica de los estudiantes, en particular de los que acuden a la Universidad. El bajo rendimiento cualitativo de los estudiantes de primer ingreso es reflejado en el índice tan alto de fracasos en las asignaturas Científicas, especialmente en Matemáticas, pues el alumno recibe cursos de Matemática desde primer grado de la primaria hasta el sexto año de la secundaria. Por causa de este problema, dirigimos encuestas a profesores y estudiantes. Como resultado de las encuestas, elaboramos, ejecutamos y evaluamos un proyecto de enseñanza programada. Esta técnica de enseñanza la comparamos con el método tradicionalista de clases expositivas para determinar conclusiones y recomendaciones.

Todas las acciones que llevamos a cabo en la realización de esta tesis fueron estudiadas previamente y no improvisadas; pero ninguna acción fue tomada previendo algún resultado pre-fabricado. Los resultados obtenidos son reales y nuestras conclusiones objetivas. Las recomendaciones las hacemos en base a nuestras propias experiencias y no a planteamientos de libros o terceros.

Esperamos que el presente trabajo motive a nuestros colegas y a nosotros mismos a dinamizar el proceso enseñanza-aprendizaje através de investigaciones y proyectos semejantes o mejores, que sean efectivos en el mejoramiento de la enseñanza de las ciencias.

1- PANORAMA GENERAL DE LA SITUACION EDUCATIVA EN PANAMA.

En muchos países del mundo, el proceso educacional atraviesa por una crisis. Cada país, a través del departamento de planeamiento del ministerio de educación se ha propuesto alcanzar la meta de adecuar el complejo sistema educativo en un sistema operacional, que dinamice el desarrollo integral de la sociedad, y la transforme en una más progresista, acorde con los intereses de cada país. Panamá no está exenta de los planteamientos que aquí señalamos.

En Panamá, el ministerio de educación a través del departamento de reforma educativa ha implementado y llevado a cabo en forma experimental algunas recomendaciones hechas en el documento relativo a dicha reforma. Actualmente se hace un análisis objetivo, del trabajo realizado, con el propósito de impulsar el programa de reformas a la educación y cumplir las metas señaladas anteriormente.

Las causas y condiciones del actual sistema educativo no transformado de Panamá las señalamos en un estudio previo (Ensayo) que titulamos "Educación y Desarrollo en Latinoamérica y Panamá". Mencionábamos en este ensayo que el sistema educativo vigente hasta nuestros días era de carácter pasivo y humanístico, heredado de las viejas estructuras educativas españolas de la colonia. En cambio, el actual proyecto de reformas propugna porque la educación sea un agente dinámico y de carácter científico-tecnológico, sin dejar de lado el carácter humanístico de la misma.

Actualmente, el sistema educativo se encuentra en un período de transición. Por un lado nos encontramos con un sistema educativo tradicional y obsoleto, que no resuelve las aspiraciones de desarrollo del país. Por otro lado, la implementación de la reforma, educativa ha provocado confusión en sectores del personal docente y educando, así como entre padres de familia e instituciones de carácter social. Como una consecuencia grave del actual período de confusión, podemos señalar el problema del descenso del nivel cualitativo del proceso enseñanza-aprendizaje en los niveles primario y secundario y por consiguiente, un aumento significativo de los fracasos en el nivel universitario, principalmente en las carreras científicas y técnicas.

2- PROBLEMAS QUE CONFRONTA EL SISTEMA EDUCATIVO

2.1 Identificación del Problema Principal

La política actual del sistema educativo ha provocado un grave problema colateral en el proceso enseñanza-aprendizaje. En efecto, una de las normas dentro de la política actual del sistema educativo, a nivel nacional, es que la educación llegue y beneficie al mayor número posible de personas. Esto se puede apreciar en el cuadro No.1 que a continuación presentamos y que obtuvimos del departamento de estadística del ministerio de educación.

CUADRO No. 1

POBLACION ESTUDIANTIL A NIVEL NACIONAL EN LA REPUBLICA DE PANAMA

Años 1960 a 1978

Año	Pre-Escolar		Primaria		Secundaria		Superior *		Total	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1960	3,629	-	162,093	-	41,952	-	3,660	-	210,974	
1965	4,825	47.60%	203,810	25.74%	57,614	37.33%	7,091	93.74%	273,340	29.56%
1970	6,921	43.44%	256,642	25.92%	81,220	40.97%	8,947	26.17%	353,730	29.41%
1975	12,398	79.14%	345,473	34.61%	132,038	62,57%	26,219	193,05%	516,128	45.91%
1978	15,702	26.65%	373,090	8%	147,308	11.57%	36,079	37.61%	572,179	10.86%

1- Indica el número total de alumnos por nivel.

2- Indica el crecimiento porcentual de la población, estudiantil tomando como base la población estudiantil anterior.

* Incluye la matrícula a nivel nacional (Universidad de Panamá, USMA y otros Institutos de Enseñanza Superior).

Del cuadro anterior se sigue que en los últimos años ha habido un gran crecimiento de la población estudiantil. Este crecimiento se acentúa más en el quinquenio 70-75, donde el crecimiento de la población estudiantil es del orden del 46%. Obsérvese que el mayor crecimiento porcentual se da en la universidad, donde en 5 años casi se triplicó la población estudiantil.

Considerando que en 1960 la población en Panamá era de un millón de habitantes, y que en 1978 era de 1.8 millones podemos observar que, mientras la población total aumenta en el 80%, la población estudiantil aumenta en el 171%. Nuestra tasa de escolaridad es relativamente alta, y uno de cada tres panameños recibe educación en uno de los tres niveles educacionales.

Este crecimiento de la escolaridad estudiantil ha sido causa directa o indirecta de algunas condiciones que se han presentado en el sistema educativo. Veamos:

1- Mientras que en 1964 el personal educando de los niveles Primario y Secundario era de 7,000; en 1970 era de 11,100 y en 1978 ascendió a 23,100.

Para poder atender a la gran masa estudiantil en procura de educación, el sistema se vió en la necesidad de duplicar su personal de 1970 a 1978. Esta situación ha permitido el ingreso de cierta parte de personal no especializado, y por consiguiente un descenso del nivel cualitativo.

Sin embargo, existe una razón que ha influído más, en el descenso del nivel cualitativo en el proceso enseñanza-aprendizaje y que señalamos a continuación.

ii- El proceso inflacionario y el significativo aumento de docentes y educandos ha provocado un sensible aumento en los gastos del ministerio de éducación. En efecto, en 1965 el costo por estudiante a nivel primario era de 60 balboas, y de un estudiante de nivel medio era de 182 balboas; esto significa que en 1965 la erogación del sistema educativo era de 27 millones de balboas. En 1970 el costo por cada estudiante de nivel primario ascendió a 91 balboas y el nivel medio a 208 balboas, lo que ocasiona una erogación del orden de los 51 millones de balboas. En 1978 el costo por estudiante de primer nivel es de 143 balboas y el de segundo nivel es de 302 balboas, lo que representa una erogación del orden de los 100 millones de balboas.

Estos gastos han provocado una alarma dentro del sistema, que para contrarrestar el alto índice de gastos, adoptó ciertas medidas que han causado un cambio de actitud de parte del personal docente y educando. Cambio éste que ha ido en detrimento del proceso enseñanza-aprendizaje. Entre las medidas que adoptó el ministerio de educación podemos señalar algunas de ellas, como:

a- Coordinar a través de la dirección de cada plantel educativo un plan que redujera el número de fracasos.

b- Obligar a los docentes por ley, que a cada 4 años prestara servicio de rehabilitación gratuito.

c- Obligar a los docentes por ley a orientar y examinar en el período de vacaciones a los estudiantes que habían fracasado en sus cursos, sin derecho a retribución económica.

El docente sintiéndose afectado por las acciones tomadas por el ministerio, ha adoptado a su vez otras medidas, para sobrellevar esta situación, reduciendo en cada grupo el número de fracasos. De esta manera, un estudiante que antes podía fracasar de acuerdo al nivel académico exigido por el profesor, ahora sigue una carrera ascendente hasta llegar a la universidad, pues no se le exige tanto como antes para aprobar. La falta de motivación hacia el estudio de nuestros estudiantes ha causado un detrimento en el ya grave problema del rendimiento cualitativo, pues al percartarse del problema y estando consciente de las pocas probabilidades de no aprobar ha aplicado la ley del menor esfuerzo.

En síntesis, un sistema educativo en donde las partes involucradas en ellas no trabajan interrelacionadas en el desarrollo de la educación y sus metas, provocan un descenso sensible en el rendimiento cualitativo del proceso enseñanza-aprendizaje.

2.2 Delimitación Del Problema

Proponer alternativas que retribuyan en el mejoramiento académico en los tres niveles de todo el sistema educativo, sería una de las metas de este trabajo; sin embargo las limitaciones reales para investiçar e implementar proyectos en todo el sistema educativo, por ahora nos obliga a delimitar el problema a una parte del mismo que es "la gran cantidad de fracasos en el área de Matemáticas en la Universidad, en particular en el curso de Cálculo diferencial e integral dictado a los estudiantes de primer ingreso en el campus universitario".

2.3 Análisis Del Problema

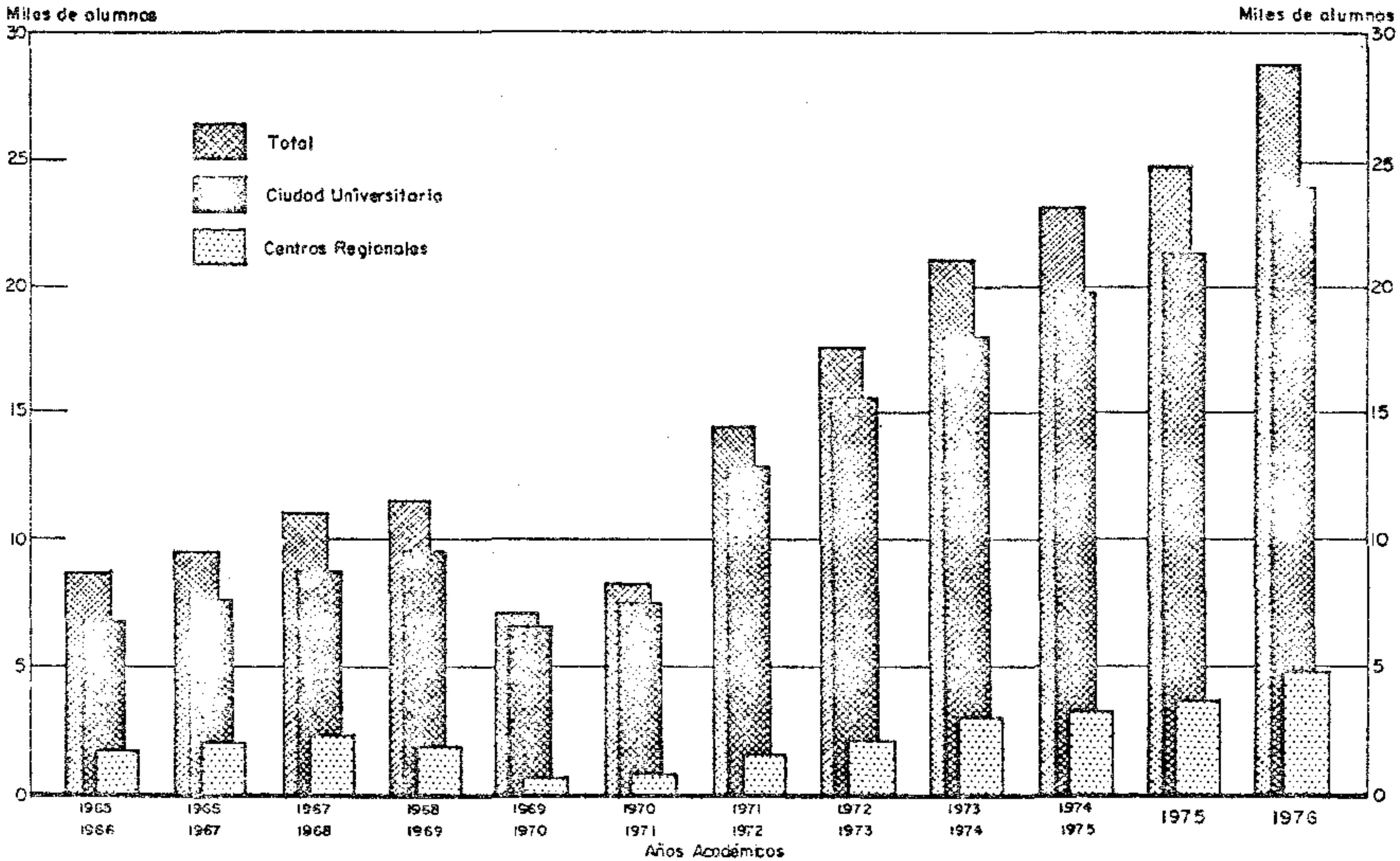
Para comenzar a analizar nuestro problema, veamos algunos cuadros obtenidos del departamento de Estadística de la Universidad de Panamá (año 1976), los cuales nos permitirán obtener importantes conclusiones en relación a la investigación que estamos llevando a cabo.

La siguiente, es una gráfica que nos muestra el incremento anual de la matrícula en la Universidad de Panamá entre los años 1965 y 1976.

Observando detalladamente la gráfica, podemos, concluír que la mayor tasa de crecimiento en la población estudiantil universitaria es entre los años 1971 a 1976. El crecimiento continúa en los años posteriores (Ver Cuadro No. 1).

GRAFICA No.1

INCREMENTO ANUAL DE LA MATRICULA EN LA UNIVERSIDAD DE PANAMA : AÑOS ACADEMICOS 1965-1966 A 1976



El cuadro No. 2 a continuación, muestra la matrícula en la Universidad de Panamá por Facultad entre los años académicos 1972 a 1976.

CUADRO No. 2

UNIVERSIDAD DE PANAMA

MATRICULA EN LA UNIVERSIDAD DE PANAMA, POR FACULTAD: AÑOS ACADEMICOS 1972 A 1976

Facultad	1972		1973		1974		1975		1976	
	Número	Porcentaje	Número	Porcentaje	Número	Porcentaje	Número	Porcentaje	Número	Porcentaje
Total	17,678	100.0	21,045	100.0	23,259	100.0	24,976	100.0	28,949	100.0
Admón. Pública y Comercio	7,341	41.6	8,260	39.3	9,464	40.7	9,841	39.4	11,287	39.0
Agronomía	383	2.2	557	2.6	755	3.2	970	3.9	1,365	4.7
Arquitectura	603	3.4	815	3.9	1,125	4.8	1,224	4.9	1,411	4.9
Ciencias Naturales y Farmacia	2,711	15.3	3,550	16.9	3,434	14.8	3,328	13.3	3,570	12.3
Derecho y Ciencias Políticas	853	4.8	1,035	4.9	1,108	4.8	1,121	4.5	1,260	4.4
Filosofía, Letras y Educación	4,597	26.0	5,009	23.9	5,243	22.5	5,416	21.7	5,944	20.5
Ingeniería	822	4.6	1,251	5.9	1,391	6.0	1,943	7.8	2,961	10.2
Medicina	197	1.1	304	1.4	486	2.1	804	3.2	839	2.9
Odontología	171	1.0	219	1.0	253	1.1	329	1.3	312	1.1
No Especificado	--	--	45	0.2	0	0.0	0	0.0	..	0.0
Ciudad Universitaria:	15,670	88.6	18,041	85.7	19,861	85.4	21,338	85.4	24,057	83.1
Admón. Pública y Comercio	6,964	39.4	7,566	36.0	8,495	36.5	8,638	34.6	9,363	32.2
Agronomía	375	2.1	465	2.2	601	2.6	787	3.2	1,048	3.6
Arquitectura	603	3.4	815	3.9	1,125	4.8	1,224	4.9	1,411	4.9
Ciencias Naturales y Farmacia	2,612	14.8	3,026	14.4	2,967	12.8	2,984	11.9	3,271	11.3
Derecho y Ciencias Políticas	853	4.8	1,035	4.9	1,108	4.6	1,121	4.5	1,260	4.4
Filosofía, Letras y Educación	3,137	17.7	3,513	16.7	3,576	15.3	3,753	15.0	4,173	14.4
Ingeniería	758	4.3	1,098	5.2	1,250	5.4	1,698	6.8	2,380	8.2
Medicina	197	1.1	304	1.4	486	2.1	804	3.2	839	2.9
Odontología	171	1.0	219	1.0	253	1.1	329	1.3	312	1.1
Centros Regionales:	2,008	11.4	3,004	14.3	3,398	14.6	3,638	14.6	4,892	16.9
Admón. Pública y Comercio	377	2.1	694	3.3	969	4.2	1,203	4.8	1,924	6.6
Agronomía	8	0.0	92	0.4	154	0.7	183	0.7	317	1.1
Arquitectura	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0
Ciencias Naturales y Farmacia	99	0.6	524	2.5	467	2.0	344	1.4	299	1.1
Derecho y Ciencias Políticas	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0
Filosofía, Letras y Educación	1,460	8.3	1,496	7.2	1,667	7.1	1,663	6.7	1,771	6.1
Ingeniería	64	0.4	153	0.7	141	0.6	245	1.0	581	2.0
Medicina	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0
Odontología	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0
No Especificado	---	--	45	0.2	0	0.0	0	0.0	0	0.0

Un dato muy interesante se desprende del cuadro anterior: observamos que la población estudiantil universitaria crece con un alto índice entre los años de 1972 a 1976. En efecto, de 17,678 estudiantes en 1972, pasa a 28,949 en 1976 lo que representa un 64% de crecimiento de la población estudiantil; mientras que en la facultad de Ciencias Naturales y Farmacia, la población estudiantil crece de 2711 a 3570 estudiantes, lo que representa un crecimiento del orden del 32%. Si comparamos el crecimiento en la Universidad con el crecimiento en la Facultad de Ciencias podemos deducir que el crecimiento de la población estudiantil en las carreras científicas es relativamente bajo. Es más, si observamos con cuidado el cuadro anterior, nos daremos cuenta que en los años de 1973 a 1975 hay un decrecimiento en el número de estudiantes de la Facultad de Ciencias. En efecto, en 1973 la Facultad de Ciencias cuenta con 3550 estudiantes y en 1974 se reduce a 3434 y a 3328 en 1975. Si tomamos en cuenta el ingreso anual de nuevos estudiantes, podemos fácilmente concluir que la Facultad de Ciencias cuenta con uno de los índices más altos de deserción, en toda la Universidad. Nos llama la atención este hecho, pues en la Facultad de Ciencias, a excepción de la escuela de enfermería, todas las demás escuelas: Biología, Farmacia, Química, Física y Matemática; deben tomar dos o más cursos semestrales de cálculo diferencial e integral.

Un estudio realizado en la Facultad de Ciencias, indica que entre los cursos científicos elementales: Biología, Química, Física y Matemática, este último muestra un alto índice de fracasos y deserciones que supera el 50% de estudiantes matrículados. En el cuadro No.3 a continuación presentamos una muestra de un grupo tomado al azar en la Facultad de Ciencias. Este grupo seguía la carrera de Química y tomaba los 4 cursos científicos básicos.

CUADRO No. 3

INDICE DE FRACASOS EN UN GRUPO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EN LOS CURSOS CIENTIFICOS BASICOS.

Curso	Aprobaron		Desaprobaron		Total
	1	2	1	2	de Est.
Matemática	36	48.65%	38	51.35	74
Biología	56	76.71%	17	23.29%	73
Física	12	17%	60	83%	72
Química	40	54.05%	34	45.95%	74

1- Número de Estudiantes

2- Porcentaje de Estudiantes

A pesarque en este grupo, Física fue la Ciencia en que más fracasos hubo; el número de fracasos y deserciones en Matemática es más alto que èl de las expectativas normales.

El siguiente cuadro nos muestra la matrícula por semestre y la deserción en el II Semestre de cada año académico desde 1973 a 1976.

CUADRO No. 4

UNIVERSIDAD DE PANAMA

Cuadro 52. MATRICULA EN LA UNIVERSIDAD DE PANAMA POR SEDE Y SEMESTRE: AÑOS ACADEMICOS 1973 A 1976

Sede	1973			1974			1975			1976		
	Semestre		Disminución en Porcentaje	Semestre		Disminución en Porcentaje	Semestre		Disminución en Porcentaje	Semestre		Disminución en Porcentaje
	Primero	Segundo		Primero	Segundo		Primero	Segundo		Primero	Segundo	
Total	21,045	18,881	10.3	23,259	20,769	10.7	24,976	22,797	8.7	28,949	25,628	11.5
* Ciudad Universitaria	18.041	16,087	10.8	19,861	17,736	10.7	21,338	19,222	9.9	24,057	20,901	13.1
Centros Regionales:	3,004	2,794	7.0	3,398	3,033	10.7	3,638	3,575	1.7	4,892	4,727	3.4
Colón	349	347	0.6	492	372	24.4	514	519	(1.0)	870	753	13.4
Chitré	466	385	17.4	414	351	15.2	388	473	21.9	458	382	16.6
David	1,422	1,279	10.0	1,557	1,330	14.6	1,734	1,530	11.8	2,152	2,224	(3.3)
Penonomé	57	164	(187.7)	228	207	9.2	108	209	(93.5)	178	170	4.5
Santiago	710	619	12.8	707	773	(9.3)	894	844	5.6	1,234	1,198	2.9

* De los datos en la tabla, podemos concluir que la deserción promedio en el II Semestre durante los años 1973 a 1976, es del orden del 11%

CUADRO No. 5

UNIVERSIDAD DE PANAMA

MATRICULA EN LA CIUDAD UNIVERSITARIA POR FACULTAD Y SEMESTRE

AÑOS ACADEMICOS 1973 A 1976

Facultad	1973			1974			1975			1976		
	Semestre		Disminución en Porcentaje	Semestre		Disminución en Porcentaje	Semestre		Disminución en Porcentaje	Semestre		Disminución en Porcentaje
	Primero	Segundo		Primero	Segundo		Primero	Segundo		Primero	Segundo	
Total	18,041	16,087	10.8	19,861	17,736	10.7	21,338	19,222	9.9	24,057	20,901	13.1
Administración Pública y Comercio	7,566	6,591	12.9	8,495	7,192	15.3	8,638	7,622	11.8	9,363	8,064	13.9
Agronomía	465	437	6.0	601	568	5.5	787	746	5.2	1,048	954	9.0
Arquitectura	815	772	5,3	1,125	1,013	10.0	1,224	1,151	6.0	1,411	1,269	10.1
Ciencias Naturales y Farmacia	3,026	2,765	8.6	2,967	2,682	9.6	2,984	2,694	9.7	3,271	2,871	12.2
Derecho y Ciencias Políticas	1,035	962	7.0	1,108	1,023	7.7	1,121	1,052	6.2	1,260	1,106	12.2
Filosofía, Letras y Educación	3,513	3,137	10.7	3,576	3,163	11.5	3,753	3,407	9.2	4,173	3,683	11.7
Instituto Politécnico	1,098	914	16.8	1,250	1,032	17.4	1,698	1,360	19.9	2,380	1,944	18.3
Medicina	304	263	13.5	486	817	(68.1)	804	924	(14.9)	839	753	10.2
Odontología	219	188	14.2	253	246	2.8	329	266	19.1	312	257	17.6
No Especificada	0	58	--	0	0	0.0	0	0	0.0	0	0	0.0

En el cuadro No.5, se puede apreciar que el promedio de deserción en el II Semestre en la Facultad de Ciencias es del orden del 10%. Resulta además muy importante señalar que el Instituto Politécnico, que presenta uno de los índices más altos de deserción en la Universidad, contiene en todas sus carreras dos o más cursos diferentes de Matemática, entre ellos el Cálculo Diferencial e Integral. En nuestro trabajo, sin embargo, nos limitaremos a la Facultad de Ciencias.

A continuación presentamos los cuadros 6 y 7. Estos cuadros se refieren a la matrícula en la Facultad de Ciencias (Ciudad Universitaria) en cursos de Cálculo Diferencial e Integral (I y II Semestre)de los años académicos 1976 hasta 1978. Estos datos fueron obtenidos del departamento de Matemática en las listas de calificaciones oficiales entregadas por los Profesores. No se omitieron datos; de modo que lo que a continuación se refleja es la información fidedigno de los resultados.

CUADRO No. 6

ALUMNOS APROBADOS Y DESAPROBADOS SEGUN MATRICULA OFICIAL. I SEMESTRE AÑOS 76-78.

Año	Nº de Alumnos		Aprobados con créditos		Aprobados sin créditos		Desaprobados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
1976	838	100%	240	28.64%	132	15.75%	466	55.61%
1977	815	100%	257	31.53%	123	15.09%	435	53.37%
1978	662	100%	154	23.26%	102	15.41%	406	61.33%

1- Nº de Alumnos

2- Porcentaje

CUADRO No. 7

ALUMNOS APROBADOS Y DESAPROBADOS SEGUN MATRICULA OFICIAL. II SEMESTRE AÑOS 76-78.

Año	Nº de Alumnos		Aprobados con créditos		Aprobados sin créditos		Desaprobados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
1976	486	100	144	29.63%	78	16.05%	264	54.32%
1977	571	100	248	43.44%	69	12.08%	254	44.48%
1978	497	100	204	41.05%	91	18.31%	202	40.64%

1- Nº de Alumnos

2- Porcentaje

El cuadro No.6 refleja los resultados durante el primer semestre en los años 1976-1978 de los estudiantes matriculados en el primer curso de Cálculo Diferencial. De los datos obtenidos, podemos deducir que el índice de deserción en el II Semestre del año 1976 en la matrícula del curso de cálculo es de 42%; en 1977 es 30% y otro tanto ocurre en 1978, mientras que el índice de deserción en la Facultad de Ciencias, ya habíamos visto, era del orden del 11%. Podemos también observar que el índice de desaprobados es muy alto, y si tomamos en cuenta que los aprobados sin créditos generalmente deben volver a tomar el curso, concluímos que de la matrícula total, sólo el 30% aproximadamente aprueba con provecho el curso de cálculo del primer semestre.

El cuadro No. 7 nos muestra los resultados en el segundo semestre de los mismos años anteriores. La matrícula en el segundo semestre aumenta en función de los estudiantes de años superiores que toman el curso nuevamente ya sea para mejorar la nota, o porque no lo habían aprobado anteriormente.

Conviene analizar los resultados en el transcurso de un año, tomemos como muestra el año de 1977. De 815 estudiantes matriculados, 257 aprobaron con créditos y 123 aprobaron sin créditos, de modo que 380 estudiantes de 815 pueden matricularse en el segundo semestre. Como la matrícula en el segundo semestre es de 571 estudiantes, esto indica que al menos 191 estudiantes de años superiores se matricularon únicamente en el segundo semestre. Así, podemos suponer que de un total de 1006 estudiantes en un año, sólo 248 aprueban el curso; lo cual representa el 24.65% del estudiantado matriculado. Si hacemos un estudio comparativo con otros años recientes, los resultados serían muy parecidos a los obtenidos en el año de 1977. En función de que las expectativas mínimas de aprovechamiento académico de un grupo debe ser alrededor del 60%, podemos concluir que la situación en el proceso enseñanza-aprendizaje a nivel de la enseñanza del Cálculo en la Universidad, es realmente grave.

2.4 Causas Probables del Problema

Lo alarmante del problema en la enseñanza del cálculo a nivel universitario nos motivó a investigar las razones por las cuales se da índice tan alto de fracasos. Esta investigación la hacemos con el fin de, si no resolver el problema por lo complejo que es, por lo menos si proporcionar datos, conclusiones y recomendaciones que atenúen la gravedad del problema y que sirva de inicio a modelos experimentales en la búsqueda de la solución del problema.

Con el objeto de detectar las principales causas de la gran cantidad de fracasos que se dan en la enseñanza del cálculo de una fuente de información fidedigna y afectada directamente en el proceso enseñanza-aprendizaje; confeccionamos y aplicamos dos encuestas. Una de las encuestas fue dirigida a una muestra de 154 estudiantes. Estos estudiantes fueron escogidos al azar entre 10 grupos diferentes de estudiantes que tomaban el curso de Cálculo. La segunda encuesta fue dirigida a 23 profesores colegas que dictaban cursos de Cálculo diferencial e integral. Las dos encuestas fueron aplicadas simultáneamente en el año de 1978. A continuación presentamos la encuesta dirigida a los profesores y estudiantes.

2.4.1 Estudio y Análisis de las Encuestas Dirigidas A Profesores y Estudiantes.

Consideraremos primero la encuesta dirigida a los estudiantes. Como decíamos anteriormente, la encuesta a los estudiantes va dirigida con el propósito de detectar las posibles fallas en el proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo a nivel universitario. En cada item, señalamos el número de estudiantes en cada respuesta, así como los comentarios principales dados por los estudiantes. A continuación la encuesta dirigida a los estudiantes.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD DE PANAMA

ENCUESTA

Estimado estudiante: Esta encuesta es realizada con el objetivo de detectar las posibles causas de los fracasos y fallas que ocurren en la enseñanza del cálculo universitario. La encuesta se divide en dos partes; la primera consiste en seleccionar una alternativa en cada pregunta propuewta, con la oportunidad de brindar comentarios; la segunda es de desarrollar ambas partes debes contestarla de acuerdo a tu criterio. Te solicitamos que respondas sinceramente a las preguntas propuestas.

Gracias por tu cooperación.

PRIMERA PARTE

1) Consideras que el conocimiento matemático que traes de secundaria es:

a) Deficiente = 30 * c) Bueno = 43

b) Regular = 75 d) Excelente = 5

Comentarios 1- La enseñanza del Cálculo no se profundiza en la secundaria. 2- No se cubren totalmente los programas.

2) La extensión del programa del curso de Cálculo resulta

a) Corto = 43 c) Largo = 7

b) Adecuado = 104

Comentarios Se debe dedicar más tiempo al cálculo, pues se avanzar muy rápido.

* Nª de Estudiantes.

3) La dificultad encontrada con el desarrollo del contenido del curso de Cálculo te parece

a) Poca = 35 c) Mucha = 41

b) Adecuada = 72

Comentarios 1- Poca base. 2- Poca práctica. 3- No se entiende al Profesor. 4- Muchos temas nuevos. 5- Poco tiempo.

4) El tiempo que dedicas a estudiar el contenido del curso de Cálculo es

a) Limitado = 91 c) Exagerado = 0

b) Suficiente = 62

Comentarios 1- No se dedica el tiempo necesario pues hay otras materias. 2- Quedan muchos problemas sin hacer.

5) El tono de voz del profesor de Cálculo es

a) Bajo = 17 c) Alto = 3

b) Adecuado = 133

Comentarios 1- En general los comentarios son favorables.

6) La velocidad con que habla el profesor al exponer los temas es

a) Lenta = 8 c) Rápida = 66

b) La correcta = 79

Comentarios Hay de todo tipo de comentarios:

1- Habla muy rápido. 2- Habla en la forma correcta. 3- La rapidez del profesor depende de la forma de captar del alumno.

7) La exposición de los temas por parte del profesor te parece

a) Clara = 113

b) Confusa = 40

Comentarios 1- Expone claro, pero hace falta práctica.

2- No siempre se capta todo, quizás porque no hay suficiente problema de aplicación. 3- Las explicaciones se entienden, pero los temas son confusos.

8) Las sesiones de clase por lo general resultan

a) Monótonas = 11 c) interesantes = 55

b) regulares = 86

Comentarios Hay de toda clase de comentarios, inclusive contradictorios (hay que tomar en cuenta que son diferentes grupos) en general. Los comentarios son satisfactorios para el profesor.

9) Las relaciones entre el grupo y el profesor de Cálculo, en general son:

a) Malas = 9 c) Buenas = 95

b) Regulares = 24 d) Excelentes = 26

Comentarios: 1- Profesor comprensivo. 2- Hay buenas comunicación. 3- Fuera de clase no hay diálogos. 4- Pueden mejorar las relaciones, etc.

SEGUNDA PARTE

1) Consideras que existe motivación para el curso de Cálculo? Explica Sí: 104. 1- El cálculo es importante. 2- Me gusta el Cálculo. 3- El Profesor anima al grupo.

No: 26. 4- No existe interés de parte del alumno. 5- No necesito Cálculo.

Sin responder: 24

2) El Profesor de Cálculo al desarrollar su clase da la debida importancia al grupo? Explica: Sí: 115, 1- El profesor trata de que el alumno comprenda la clase.

No: 22, 2- No se preocupa por el grupo.

Sin Responder: 17.

3) Tienes acceso a libros de Cálculo, o se te facilita apuntes y problemas? Explica. Sí: 114, 1- Si el profesor nos proporciona problemas y apuntes.

No, 28, 2- No sabemos a que libro acudir.

Sin Responder: 12

4) Te permiten tomar apuntes en clases? Explica.

Sí: 141, Nos permiten tomar apuntes.

No: 3, Borran antes de terminar de copiar.

Sin Responder: 10

5) El Profesor permite preguntas o cualquier otro tipo de intervención apropiada de parte del grupo? Explica.

Sí: 140, El Profesor pide que preguntan para aclarar las dudas.

No: 2, Sin comentarios.

Sin Responder: 12

6) Consideras que el profesor de Cálculo distribuye bien su tiempo en el desarrollo de la clase. Explica.

Sí: 125, 1-Explica la clase y resuelve problemas. 2- Termina a tiempo.

No: 16, 1-A veces toma hora de otro profesor. 2- A veces se demora mucho en un tema.

Sin Responder: 13.

7) El Profesor aplica diferentes técnicas de enseñanza en clases.

Sí: 58, No siempre explica de la misma forma.

No: 87, 1-El Profesor explica la clase y va. 2- Sólo hay una técnica de enseñar.

Sin Responder: 9.

8) Hay suficientes sesiones de prácticas en el curso de Cálculo?

Explica. Sí: 61, 1- Sí hay práctica pero, debiera haber más.

No: 80, 2- La práctica no es suficiente.

Sin responder: 13

9) Consideras que las pruebas de Cálculo efectivamente examina los temas desarrollados en clase? Explica.

Sí: 123, 1- Sí, pero los problemas de examen son difíciles.

No: 16: 2- Los problemas de examen no los practicamos en clase.

Sin responder 15.

10) La metodología de la evaluación del curso de cálculo te parece apropiada. Explica.

Sí: 83

No: 68

Sin responder: 3

11) Indica que actividades y/o medidas deben utilizarse de modo que se consolide el proceso enseñanza- aprendizaje del cálculo universitario y se disminuya el número de fracasos.

1- Más problemas de práctica, 2- Hay que fortalecer y mejorar el método de enseñanza en secundaria y la Universidad. 3- Los profesores deben perfeccionar el método de enseñar. 4- Horas de consulta fuera de clases, 5- Que dicten cursos de afianzamiento, 6- Hacer pruebas de recuperación, 7- Que se empleen otras técnicas de enseñanza (estudio dirigido, películas e instrucción programada).

12) Qué opinión te merece la organización de los planes de Estudio de tu carrera; y que papel juega el estudio del cálculo en la misma.

El cálculo es importante en la carrera. Los planes de estudio deben mejorarlos.

Desde todo punto de vista, los resultados de la encuesta son muy interesantes; sin embargo sólo vamos a analizar los items que a consideración de los estudiantes son las principales razones que afectan en la enseñanza del Cálculo. Interpretando las respuestas de los estudiantes, consideramos que la principal razón que incide en el bajo rendimiento del estudiante en un curso de Cálculo es:

a- La pobre preparación en matemática con que llega el estudiante a la Universidad.

Muchos estudiantes confiesan que no sabían nada de Cálculo al ingresar a la Universidad. Por experiencias personales, sé de muchos estudiantes que no se desenvuelven bien en el manejo del álgebra y la aritmética. Es lógico pensar que estudiantes con problemas en álgebra y aritmética han de pasar muchas dificultades en un curso de Cálculo. Otra opinión generalizada de los estudiantes es que:

b- Se deben realizar más sesiones de práctica.

De lo expresado anteriormente, podemos concluir que los estudiantes desean un reforzamiento continuo, y de alguien que los oriente en el estudio del Cálculo.

Lo ideal para el estudiante sería una instrucción personal, pero en la práctica esto no es tan fácil de realizar. También podemos señalar que la mayor parte del estudiantado opina que el desenvolvimiento del profesor (en el sistema clásico) es aceptable y que según los medios a su alcance trata de trasmitir nuevos conocimientos a los grupos a los cuales dictan los cursos de Cálculo; sin embargo, opinamos que otras de las causas que puede estar afectando el aprovechamiento académico, de los estudiantes de Cálculo es:

c- La técnica empleada por el profesor en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Veamos en que nos basamos para opinar así. Si consideramos la pregunta 7 de la segunda parte de la encuesta, podemos observar que 96 estudiantes opinan que el profesor usa sólo una técnica de enseñanza (el método clásico de clases expositivas), mientras que 58 estudiantes responden que el profesor aplica diferentes técnicas de enseñanza en clase; sin embargo, cuando leemos los comentarios al respecto, podemos concluir que el estudiante confunde el concepto de técnica de enseñanza con "la forma de explicar la clase" por el profesor. La forma en que se explica una clase, cambia de un docente a otro; puede ser que nn profesor aplique diferentes estilos al explicar en clases, pero en este caso, la técnica de enseñanza es la misma: " Exposición Sistemática de los temas". Lo expresado anteriormente, lo corroboramos al analizar la pregunta 11. En efecto, al solicitarle al estudiante que proponga alternativas que a su juicio ayuden a mejorar el rendimiento académico éste propone:

a- Más prácticas

b- Un mayor seguimiento al desenvolvimiento del estudiante.

c- Aplicar otros métodos de enseñanza, diferente al tradicional.

d- Reforzamiento de los temas expuestos en clases.

Hay otras recomendaciones, pero estas 4 son las más comunes. Podemos, pues, observar que el estudiante recomienda se utilicen métodos diferentes al tradicional. Finalmente, al cuestionar al estudiante sobre el contenido, la gran mayoría opinó que la extensión y la dificultad del contenido es la adecuada y no afecta decididamente en el aprovechamiento del estudiante.

En base al estudio hecho sobre la encuesta dirigida al alumno, pudiéramos hacer algunas recomendaciones, pero preferimos hacerlas después de analizar las respuestas de la encuesta de los profesores.

Igual que en la encuesta dirigida a los estudiantes, el propósito de la encuesta dirigida a los profesores es determinar las razones que provocan la cantidad tan alta de fracasos que ocurren en la enseñanza del cálculo a nivel universitario. Al lado de cada item aparece una cifra, que indica el número de profesores que opinan que tal item es una causa del número tan alto de fracasos en cálculo. Aparecen también en la sección de comentarios las opiniones más generalizadas entre las medidas y actividades a tomar de modo que se refuerce el proceso enseñanza-aprendizaje y se disminuya el número de fracasos. A continuación la encuesta.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE PANAMA
ENCUESTA

Estimado Profesor: Esta encuesta es realizada con el objetivo de detectar las posibles causas de los fracasos y fallas que ocurren en la enseñanza del Cálculo Universitario. La encuesta consiste en señalar, si las diferentes alternativas que la encuesta proporciona inciden o no en el alto índice de fracasos en la enseñanza del Cálculo; las alternativas escogidas pueden ser justificadas en un segmento opcional decomentarios, donde inclusive puedes señalar algunas causas posibles de los fracasos en Cálculo que así tú consideres, y que la encuesta ha omitido. Finalmente tienes la oportunidad de señalar algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza del Cálculo a nivel universitario. Te solicitamos que respondas sinceramente a las preguntas propuestas.

Gracias por tu cooperación.

Señala con una cruz las alternativas que tu consideres influyen en el gran número de fracaso del cálculo a nivel universitario.

1.- Deficiente preparación con que llega el estudiante de secundaria. = 23

2.- Poco tiempo que dedica el estudiante al curso de Cálculo. = 17

3.- Dificultad del contenido . = 2

4.- Pocas sesiones de práctica que se pueden realizar de acuerdo al horario. = 9

5.- La metodología empleada en el proceso enseñanza-aprendizaje = 9

6.- Las tensiones en la relación profesor-grupo. = 7

7.- El tipo de evaluación realizada en el proceso enseñanza-aprendizaje y promoción. = 8

8.- Falta de bibliografía al alcance del estudiante. = 8

9.- Poca motivación de parte del estudiante. = 13

10.- Falta de incentivos. = 5

Comentarios El número de estudiante por grupo se debe reducir. Revisión de los planes de secundaria. Seminarios de preparación al estudiante al ingreso a la Universidad.

11.- Indica que actividades y/o medidas deben utilizarse de modo que se consolide el proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo universitario y se disminuya el número de fracasos.

Fomentar círculos de estudio entre los estudiantes teniendo como guía a un profesor. Más sesiones de práctica. Utilizar nuevas técnicas en la enseñanza individual y grupal. Motivar al estudiante, dirigiendo el curso hacia las aplicaciones en la carrera. Fortalecer la capacidad de razonamiento. Promover el interés por la investigación.

Analizando las respuestas de los profesores, observamos que ellos indican que la gran cantidad de fracasos tienen su origen en el mismo estudiante. En efecto, señalan los profesores que una causa de fracasos es:

a- La mala preparación con que llega el estudiante a la Universidad.

Recordemos que esto mismo opinaban los estudiantes. Cabe señalar que absolutamente todos los profesores cuestionados opinan así, y consideran que ésta es la principal causa de fracasos. También consideran los profesores como una causa de fracasos.

b- La falta de motivación y el poco tiempo que dedica el alumno al estudio.

c- Las pocas sesiones de práctica.

d- La metodología empleada en clases.

Aparte de los criterios anteriores, los profesores no consideran que otros condiciones afecten tanto en los fracasos que se dan en los cursos de Cálculo. Es decir, el tipo de evaluación y la bibliografía no afectan en este caso el poco aprovechamiento académico del estudiante.

Al buscar los puntos de coincidencia entre profesores y estudiantes de las posibles causas de fracasos en la enseñanza del Cálculo, podemos señalar que:

a- La mala preparación del estudiante.

b- Pocas sesiones de práctica.

c- Poco tiempo que dedica el alumno al estudio del Cálculo por falta de motivación.

d- La técnica de enseñanza aplicada por el profesor en el curso de Cálculo.

Son las causas principales de fracaso que se dan en la enseñanza del Cálculo.

Por otro lado, descartamos como causas principales de fracasos las siguientes:

a- Dificultad del contenido

b- Falta de bibliografía

c- El tipo de evaluación

d- La tensión en las relaciones profesor-grupo.

El hecho de que descartamos los últimos cuatro criterios como causas de fracasos, no significan que ellas no afecten el proceso enseñanza-aprendizaje; sólo que en este caso no son causas principales de fracasos.

En las alternativas propuestas trataremos en la medida de lo posible de dar respuesta a las causas de fracasos, conjugando intereses de profesores y estudiantes.

3- ALTERNATIVAS PROPUESTAS CON EL OBJETO DE MEJORAR LAS CONDICIONES EN LA ENSEÑANZA DEL CALCULO.

En función de las conclusiones obtenidas de las encuestas dirigidas a profesores y estudiantes, nos atrevemos a proponer y ejecutar algunas alternativas que quizás ayuden a mejorar el método empleado en la enseñanza del Cálculo y que promueva un mayor aprovechamiento académico del estudiante. Las alternativas que proponemos son:

a- Proporcionar más horas de práctica.

b- Promover la enseñanza programada a través de folletos de auto-instrucción.

Consideramos que estas dos actividades no son las únicas que se pueden llevar a cabo ni mucho menos pensamos que son suficientes, pero son las que por ahora podemos ejecutar.

Las razones que nos lleva a ejecutar estas alternativas son sencillas:

i.- Estamos experimentando por primera vez nuevas técnicas de enseñanza.

ii.- No contamos con medios (humanos, económicos y de otra índole) que nos permita ejecutar proyectos más ambiciosos.

iii.-Opinamos que éstos son los pasos iniciales para ejecutar un plan a largo plazo de mejoramiento en la enseñanza del cálculo y la matemática en general en toda la Universidad.

iv.- Queremos obtener conclusiones objetivas en cuanto a la aplicación de la Técnica Enseñanza-Programada.

v.- Consideramos que así conjugamos intereses de estudiantes y profesores.

Así opinamos y esperamos que la técnica de enseñanza programada:

a- Estimule al alumno a estudiar,(consideramos que la falta de tiempo que indica el estudiante se puede deber a una falta de motivación).

b- Aclare ciertas dudas al estudiante, que una clase expositiva no haría.

c- Dinamice la participación del estudiante en el proceso enseñanza-aprendizaje a través del desarrollo de prácticas.

d- Presente otros modelos de enseñanza y nuevas experiencias a los profesores.

Con el objeto de aplicar la técnica de enseñanza-programada, elaboramos un folleto de auto-instrucción, en el que desarrollamos una unidad del programa de Cálculo diferencial. Escogimos por tema la unidad de <u>Desigualdades</u> que es el primer tópico visto en un curso introductorio de Cálculo, además es uno de los temas que más dificultades causan al estudiante. El folleto de auto-instrucción con el tema de desigualdades que presentamos al estudiante está dividido en:

1. Introducción
2. Ocho tareas de Contenido Programático.
3. Hoja de evaluación del folleto de auto-instrucción.

Cada tarea se subdivide en:

2.1 Información

2.2 Práctica

2.3 Retroinformación

A continuación el folleto de auto-instrucción

INTRODUCCION

Estimado alumno:

Esta unidad de autoinstrucción que te presentamos, tiene como una de sus metas principales evaluar la efectividad de la enseñanza individualizada. Este objetivo que presentamos está íntimamente ligado a tí. La efectividad de esta unidad de autoinstrucción consiste en el aprovechamiento que de ella hagas en el transcurso de las ocho tareas. De la motivación que recibas, de la información que recibas; de la práctica que recibas. El método de la enseñanza individualizada contempla el avance del estudiante a su propio rítmo bajo la guía del profesor o asistente; sin presiónes externas y constantes estímulos para seguir adelante.

La unidad de autoinstrucción que vamos a desarrollar es la de Resolución de Desigualdades. En ella iremos avanzando poco a poco hasta resolver una desigualdad cualquiera(de expresiones algebraicas). Presentamos el conjunto solución sobre la recta real; y en muchos casos construiremos en el plano cartesiano la gráfica de una función que representa el comportamiento de la desigualdad que estaremos analizando.

Hemos dividido la unidad en 8 tareas, con el fin de simplificar el proceso enseñanza-aprendizaje. Cada tarea está constituída por los siguientes aspectos:

1.- Número y título de la tarea

2.- Objetivos específicos que debes alcanzar

3.- Información del contenido

4.- Prácticas sobre el contenido

5.- Retroinformación

6.- Palabras de estímulo

Te proporcionaremos algunas recomendaciones con el fin de ayudarte en tu trabajo. En cada tarea:

1.- Lee con cuidado los objetivos específicos, pues ellos te indican lo que debes aprender.

2.- Estudia el contenido y analiza los conceptos fundamentales; participa activamente en el desarrollo de los ejemplos.

3.- Contest a las preguntas de la práctica individualmente y a conciencia del aprendizaje efectuado.

4.- Si fallas en una ó más respuestas, revisa cuidadosamente los temas nuevamente.

5.- Cada vez que tengas alguna dificultad consulta con tu profesor, o con algún compañero que te ayude sinceramente, es decir, que te guíe.

6.- No avances de un tema hasta estar completamente seguro de lo anterior.

Una vez concluído el estudio de las 8 tareas, realizarás una prueba, que permita evaluar el aprovechamiento alcanzado y consecuentemente, evaluar la efectividad de este método. La prueba la acompañarás de las sugerencias que consideres que permitan mejorar este método y la enseñanza en general. Te deseamos éxito, esperando que realices un provechoso aprendizaje sin ningún tipo de frustración.

Gracias

UNIDAD: DESIGUALDADES

OBJETIVO GENERAL DE LA UNIDAD:

Al terminar la unidad, el estudiante será capaz de resolver desigualdades en donde aparezcan suma, resta, multiplicación, división y valores absolutos de expresiones algebraicas.

Tarea 1

RELACIONES DE ORDEN EN R

Objetivos específicos:

Al terminar la tarea 1, el alumno será capaz de:

1.- Comparar dos números reales y establecer cuál es mayor y cuál menor.

2.- Definir cada una de las cuatro relaciones de orden estudiadas.

Información:

El conjunto de los números naturales N

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

es un conjunto ordenado(al orden de los elementos de N, se le llama el orden natural). En el orden de N, al 4 le sigue el 5, a n le sigue n+1. Generalizando, podemos decir que 8 sigue después de 5 y de 3.

Al comparar dos números naturales, por ejemplo 13 y 5, determinamos que en el orden de N, 13 sigue después del 5. Esto queda indicado, al decir que 13 es mayor que 5 ó que 5 es menor que 13. Si n y m son dos números naturales tales que m sigue después de n, decimos entonces que "m es mayor que n" ó que "n es menor que m".

En el conjunto de los números reales R, se define un orden, que permite comparar a dos números reales y decidir cuál es mayor y cuál es menor en caso de que no sean iguales. Denotamos por R^+ al sub-conjunto de R, consituido por los números reales positivos. Definimos el orden en R mediante 2 propiedades del conjunto R^+.

1.- Propiedad de Tricotomía:

Dado un número cualquiera x de R, se verifica sólo uno de los tres enunciados siguientes:

i.- $x \in R^+$ (x es positivo) ó

ii.- $-x \in R^{+}$ (-x es positivo) ó

iii.- $x = 0$

2.- Propiedad de Cierre de R^{+}

Sea $a \in R^{+}$ y $b \in R^{+}$. Entonces

i.- $a + b \in R^{+}$

ii.- $ab \in R^{+}$

La propiedad de tricotomía nos indica que dado un número real cualquiera, existen tres posibilidades excluyentes entre sí.

Ejemplo 1:

Sea $x = \sqrt{2}$; determinar cuál de los tres enunciados es cierto

i.- $\sqrt{2} \in R^{+}$ ó

ii.- $-\sqrt{2} \in R^{+}$ ó

iii.- $\sqrt{2} = 0$

por simple inspección, nos damos cuenta que el enunciado cierto es $\sqrt{2} \in R^{+}$, por lo tanto $-\sqrt{2} \notin R^{+}$ y $2 \neq 0$.

La propiedad de cierre de R^{+}, nos indica que la suma y el producto de dos números reales positivos dan por resultado números positivos.

Ejemplo 2:

Sea $a = \frac{3}{5}$ y $b = \frac{10}{9}$

comprobar que a+b y a.b pertenecen a R^{+}

i.- $a+b = \frac{3}{5} + \frac{10}{9}$

$= \frac{3x27 + 10x5}{45}$

$= \frac{81 + 50}{45}$

$= \frac{131}{45} \in R^{+}$

ii.- $ab = \frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$

$= \frac{30}{45}$

$= \frac{2}{3} \in R^{+}$

Definimos las relaciones de orden en $\mathbb{R}$

i.- "Mayor que", denotada por " $>$ "

ii.- "Mayor o igual que", denotada por " $\geqslant$ "

iii.- "Menor que", denotada por " $<$ "

iv.- "Menor o igual que", denotada por " $\leqslant$ "

Definición 1:

Dados dos números reales cualesquiera a y b; se dice que:

i.- a es mayor que b y se denota por $a > b$ si y sólo si $(a-b) \in R^+$

Ejemplo 3:

a) $5 > 2$, pues $5-2 = 3 \in R^+$

$-10 > -17$ pues $(-10)-(-17) = 7 \in R^+$

ii.- a es mayor o igual que b y se denota por $a \geqslant b$ si y sólo si, ocurre una de las dos posibilidades $a > b$ ó $a = b$.

Ejemplo 4:

a) $5 \geqslant 2$ pues $5 > 2$

b) $2\sqrt{2} \geqslant 2\sqrt{2}$ pues $2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

iii.- a es menor que b y se denota por $a < b$ si y sólo si $b > a$

Ejemplo 5:

a) $-4 < 3$ pues $3 > -4$

b) $\sqrt{3} < 5$ pues $5 > \sqrt{3}$

iv.- a es menor o igual que b y se denota por $a \leqslant b$ si y sólo si $a < b$ ó $a = b$.

Ejemplo 6:

a) $-\sqrt{10} \leqslant -2$ pues $-\sqrt{10} < -2$

b) $6 \leqslant 6$ pues $6 = 6$

TAREA 1

PRACTICA

1.1 Si comparas los números 8 y -1 por medio de la relación " $>$ ". Tenemos que ______________________

1.2 De acuerdo a la definición, $7 > 3$ pues ____________________

1.3 compara mediante la relación " $<$ " (menor que) los números -12 y $-\frac{1}{2}$ __________________

1.4 $7 \geqslant -\sqrt{2}$ ya que __________________

1.5 $1-\sqrt{3} \leqslant 4$ puesto que _______________.

Compara tus resultados, con las respuestas correctas en la siguiente página.

TAREA 1

RETROINFORMACION

1.1 $8 \geqslant -1$

1.2 $(7 - 3) \in R^+$

1.3 $-12 \leqslant -\frac{1}{2}$

1.4 $7 > -\sqrt{2}$

1.5 $(1 - \sqrt{3}) < 4$

Si has respondido correctamente te felicitamos y te invitamos a que continues en la segunda lección, en donde estudiaremos las propiedades de las relaciones de orden. Suerte!

TAREA 2

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DE ORDEN

Objetivos específicos:

1.- El estudiante debe ser capaz de ilustrar las propiedades con ejemplos numéricos.

Información:

Sean a, b, c y d cuatro números reales cualesquiera.

Propiedad 1

$a > 0 \Longleftrightarrow a \in R^+ \Longleftrightarrow$ a es positivo

Ejemplo 7:

$3 > 0 \Longleftrightarrow 3 \in R^+ \Longleftrightarrow 3$ es positivo

es decir, "3 es mayor que cero" es equivalente con que "3 es positivo".

Propiedad 2

$a < 0 \Longleftrightarrow -a \in R^+ \Longleftrightarrow -a$ es positivo

Ejemplo 8:

$-5 < 0 \Longleftrightarrow -(-5) = 5 \in R^+ \Longleftrightarrow -(-5) = 5$ es positivo.

Propiedad 3

$a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$

y

$a \geq 0 \Longleftrightarrow -a \leq 0$

Ejemplo 9:

$10 > 0 \Longleftrightarrow -10 < 0$

y

$5 \geq 0 \Longleftrightarrow -5 \leq 0$

Propiedad 4

$a > b \Longleftrightarrow -a < -b$

y

$a \geq b \Longleftrightarrow -a \leq -b$

Ejemplo 10:

$-4 > -10 \Longleftrightarrow -(-4) < -(-10)$

es decir

$$-4 > -10 \iff 4 < 10$$

y

$$2 \geq 1 \iff -2 \leq -1$$

Propiedad 5

$$a \geq a$$

y

$$a \leq a$$

<u>Ejemplo 11:</u>

$$\sqrt{3} \geq \sqrt{3}$$

y

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{3}$$

Observa que:

$a > a$ y $a < a$ no son ciertas

<u>Ejemplo 12:</u>

Ni $3 > 3$ ni $3 < 3$

Propiedad 6

$$(a \leq b \quad y \quad a \geq b) \iff a = b$$

<u>Ejemplo 13:</u>

$$(a \leq 2 \quad y \quad a \geq 2) \iff a = 2$$

Propiedad 7:

i.- $(a > b \quad y \quad b > c) \implies a > c$

<u>Ejemplo 14:</u>

$$(5 > 1 \quad y \quad 1 > -3) \implies 5 > -3$$

también se cumple que:

ii.- $(a \geq b \quad y \quad b \geq c) \implies a \geq c$

iii.- $(a < b \quad y \quad b < c) \implies a < c$

iv.- $(a \leq b \quad y \quad b \leq c) \implies a \leq c$

Propiedad 8

$$a > b \qquad a + c > b + c$$

<u>Ejemplo 15:</u>

Sea $c = -3$

tehemos que:

$$10 > 4 \implies 10+(-3) > 4+(-3) \iff 7 > 1$$

es decir

$$10 > 4 \Longrightarrow 7 > 1$$

también se cumple que:

ii.- $a \geqslant b \Longrightarrow a+c \geqslant b+c$

iii.- $a < b \Longrightarrow a+c < b+c$

iv.- $a \leqslant b \Longrightarrow a+c \leqslant b+c$

Propiedad 9:

i.- $\left.\begin{array}{r} a > b \\ y \\ c > d \end{array}\right\| \Longrightarrow a+c > b+d$

Ejemplo 16:

$$\left.\begin{array}{r} 7 > -2 \\ y \\ -12 > -15 \end{array}\right\| \Longrightarrow 7+(-12) > -2+(-15) \Longrightarrow -5 > -17$$

también se cumple que:

ii.- $\left.\begin{array}{r} a \geqslant b \\ y \\ c \geqslant d \end{array}\right\| \Rightarrow a+c \geqslant b+d$

iii.- $\left.\begin{array}{r} a < b \\ y \\ c < d \end{array}\right\| \Longrightarrow a+c < b+d$

iv.- $\left.\begin{array}{r} a \leqslant b \\ y \\ c \leqslant d \end{array}\right\| \Longrightarrow a+c \leqslant b+d$

Propiedad 10

i.- $\left.\begin{array}{r} a > b \\ y \\ c > 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow ac > bc$

Ejemplo 17:

$$\left.\begin{array}{r} 10 > 5 \\ y \text{ sea } c = 3 \end{array}\right\| \Longrightarrow 10x3 > 5x3 \Longrightarrow 30 > 15$$

también se cumple que:

ii.- $\left.\begin{array}{r} a \geqslant b \\ y \\ c > 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow ac \geqslant bc$

iii.- $\left.\begin{array}{r} a < b \\ y \\ c > 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow ac < bc$

iv.- $\left.\begin{array}{l} a \lneqq b \\ y \\ c > 0 \end{array}\right\|$ ac bc

Propiedad 11:

i.- $\left.\begin{array}{l} a > b \\ y \\ c < 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow ac < bc$

Ejemplo 18:

$\left.\begin{array}{l} 4 > 2 \\ y \\ \text{sea } c = -3 < 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow 4x(-3) < 2x(-3) \Rightarrow -12 < -6$

también se cumple que:

ii.- $\left.\begin{array}{l} a \geqslant b \\ y \\ c < 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow ab \leqslant bc$

iii.- $\left.\begin{array}{l} a < b \\ y \\ c < 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow ac > bc$

iv.- $\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ y \\ c < 0 \end{array}\right\| \Longrightarrow ac \geqslant bc$

Propiedad 12

i.- $a > 0 \Longrightarrow a^2 > 0$

Ejemplo 19:

$5 > 0 \Longrightarrow 25 > 0$

también se cumple que:

ii.- $a \ngtr 0 \Longrightarrow a^2 \geqslant 0$

iii- $a < 0 \Longrightarrow a^2 > 0$

iv.- $a \lneqq 0 \Longrightarrow a^2 \geqslant 0.$

La propiedad que acabamos de ver indica que:

Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0.$

y $a^2 = 0$ sólo cuando $a = 0$

Propiedad 13

i.- $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

Ejemplo 20:

$$2 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} > 0$$

también se cumple que:

ii.- $a < 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} < 0.$

Propiedad 14

i.- $a > b > 0 \Longrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0.$

Ejemplo 21;

$$10 > 2 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{10} > 0.$$

también se cumple que:

ii.- $a < b < 0 \Longrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

Ejemplo 22:

$$-10 < -2 < 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{10} < 0$$

Es importante observar que esta propiedad no es válida si a y b tienen signos opuestos.

Ejemplo 23;

$$10 > -5 \quad y \quad \frac{1}{10} > -\frac{1}{5}$$

también

$$-8 < 3 \quad y \quad -\frac{1}{8} < \frac{1}{3}$$

Propiedad 15

i.- $a > b > 0 \Longrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

Ejemplo 24:

$$16 > 10 \Longrightarrow \sqrt{16} > \sqrt{10} \Longrightarrow 4 > \sqrt{10}$$

también se cumple que:

ii.- $a \geqslant b \geqslant 0 \Longrightarrow \sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$

Propiedad de Densidad del Conjunto de los Números Reales:

Sea $x < y$. De ahí que

$$x + x < x + y$$

y

$$x + y < y + y$$

Luego

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

este procedimiento se puede repetir indefinidamente y comprobar que entre dos números reales cualesquiera, hay infinitos números reales.

Ejemplo 25:

Determinar 3 números reales entre 1 y 5/4.

i.- $1 < \frac{5}{4} \Longrightarrow 1 < \frac{1+5/4}{2} < 5/4 \Longrightarrow 1 < \frac{9}{8} < \frac{5}{4}$

ii.- $1 < \frac{9}{8} \Longrightarrow 1 < \frac{1+9/8}{2} < 9/8 \Longrightarrow 1 < \frac{17}{16} < \frac{}{8}$

iii.- $\frac{9}{8} < \frac{5}{4} \Longrightarrow \frac{9}{8} < \frac{9/8+5/4}{2} < 5/4 \Longrightarrow \frac{9}{8} < \frac{19}{16} < \frac{5}{4}$

Luego

$$1 < \frac{17}{16} < \frac{9}{8} < \frac{19}{16} < \frac{5}{4}$$

generalizando, podemos calcular infinitos números reales entre 1 y $\frac{5}{4}$.

Sólo los conjuntos numéricos de racionales irracionales y por consiguiente los reales poseen la propiedad de Densidad que dice que: Entre dos números reales distintos cualesquiera existen infinitos números reales.

TAREA 2

PRACTICA

2.1 La relación $\sqrt{5} > 0$, equivale a decir que $\sqrt{5}$ es

____

2.2 La relación $-4 < 0$, equivale con que $-(-4)$ es______________.

2.3 a) $15 > 0 \Longleftrightarrow -15$ ______ 0

b) $6 > 0 \Longleftrightarrow$ ____________

2.4 $12 > -4 \Longleftrightarrow -12$ _______ 4

y

$-3 > -7 \Longleftrightarrow$ ______________

2.5 Determina cuáles enunciados son verdaderos y cuáles falsos

a) $8 + \sqrt{3} \geq 8 + \sqrt{3}$ ________________________

b) $7 < 7$ ______________________

2.6 Si $(a \leq 1$ y $1 \geq a)$ entonces $a =$ ________

2.7 Como $8 > -2$ y $-2 > -\sqrt{10}$. Entonces __________________.

2.10 $-6 \geqslant -12$ entonces ____________ $\geqslant a-12$

2.11 a) $3 > 1$

y

$-4 > -6$

implican que: $3+(-4) >$ ____________

b) $\sqrt{2} + 1 \leqslant 6$

y

$5 \leqslant 12$

implica que: ____________________

2.12 a) como

$6 > 3$

y

$2 > 0$

entonces 6×2 _______________ 3×2

b) $-8 \leqslant 4$

y

$\frac{1}{2} > 0$

entonces________________________

2.13 a) $13 \geqslant -\sqrt{5}$

y

$-3 < 0$

implica que________________ $\leqslant (-\sqrt{5})(-3)$

b) $2 < 5$

$-4 < 0$

implica que $2 \times (-4)$__________$5 \times (-4)$

2.14 a) el cuadrado de cualquier número distinto de cero, es de signo_______________________.

b) Luego si $a = -5$. Entonces

$a^2 =$ ______ 0.

2.15 a) como $3 > 0$, entonces $\frac{1}{3}$__________ 0

y

b) como $-5 < 0$, entonces $-\frac{1}{5}$ __________ 0

2.16 a) como $7 > 3$, entonces $\frac{1}{7}$________$\frac{1}{3}$

b) como $-6 < -2$, entonces $-\frac{1}{6}$____________.

2.17 Responde si es verdadero o falso el siguiente enunciado.

$$6 > -4 \Longrightarrow \frac{1}{6} < -\frac{1}{4}$$

________________________.

2.18 $16 \geqslant 9 \Longrightarrow \sqrt{16}$ ______ $\sqrt{9}$

2.19 El punto medio de 4 y 8 es

$$m = \frac{4+8}{2} = 6$$

El punto medio entre 4 y 6 es

a)____________

b) y entre 4 y 5 es____________

2.20 Entre 4 y 8 hay_______________números reales

Compara tus resultados con las respuestas correctas en la siguiente página.

TAREA 2

RETROINFORMACION

2.1 Positivo

2.2 Positivo

2.3 a) $-15 < 0$

b) $-12 < 4$

2.4 $3 \leq 7$

2.5 a) verdadero

b) falso

2.6 $a = 1$

2.7 $8 > -\sqrt{10}$

2.8 $-6 \leq 7$

2.9 $x + 8 \leq x + 14$

2.10 $a - 6 \geq a - 12$

2.11 a) $3+(-4) > 1+(-6)$

b) $(\sqrt{2} + 1)+5 \leq 6+12$

2.12 a) $6 \times 2 > 3 \times 2$

b) $-8 \times \frac{1}{2} \leq 4 \times \frac{1}{2}$

2.13 a) $13 \times (-3) \leq (-\sqrt{5}) \times (-3)$

b) $2x\ (-4) > 5 \times (-4)$

2.14 a) Positivo

b) $a^2 = 25 > 0$

2.15 a) $\frac{1}{3} > 0$

b) $-\frac{1}{5} < 0$

2.16 a) $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{3}$

b) $-\frac{1}{6} > -\frac{1}{2}$

2.17 Falso

2.18 $\sqrt{16} \geq \sqrt{9}$

2.19 a) 5

b) 4.5

2.20 Infinitos

Muy bien, hemos avanzado bastante y con buen pie. Esperamos que sigas así. Continúa en la tarea 3.

TAREA 3

INTERVALOS

Objetivos Específicos:

El estudiante debe ser capaz de:

1.- Dados dos números reales, definir el conjunto de puntos que constituye el intervalo con extremos en los puntos dados.

2.- Ilustrar gráficamente un intervalo dado.

3.- Definido un intervalo por medio de una desigualdad, indicar simbólicamente el intervalo.

Información:

Sean a y b dos números reales tales que: $a < b$. Veamos las siguientes definiciones.

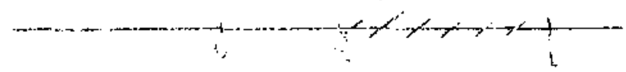
Intervalo Abierto (a,b)

Definición 2:

El intervalo (a,b), es el conjunto de puntos entre a y b. Se excluyen a y b. En símbolos:

$$(a,b) = \{ x / x \in R \, ; \, a < x < b \}$$

gráfica

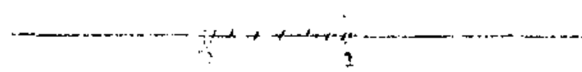


al punto a se le llama extremo inferior del intervalo y a b se le llama extremo superior del intervalo. $b - a$ es la longitud del intervalo.

Ejemplo 26:

$(0,1)$ es un intervalo abierto, de extremo inferior cero y extremo superior uno. Ni cero ni uno pertenecen a $(0,1)$. La longitud del intervalo es 1.

gráfica.



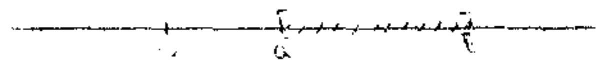
Intervalo cerrado $[a,b]$

Definición 3:

El intervalo cerrado $[a,b]$ es el conjunto de puntos entre a y b inclusive. En símbolos

$$[a,b] = \{ x \in R / \ a \leq x \leq b \}$$

gráfica



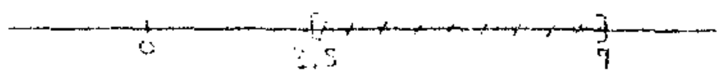
a es el extremo inferior y b el extremo superior del intervalo. $a \in [a,b]$ y $b \in [a,b]$ la longitud de $[a,b]$ es la misma que de (a,b), es decir $b-a$.

Ejemplo 27:

$[2.5, 7]$ es un intervalo cerrado, de extremo inferior 2.5 y extremo superior 7.

La longitud de $[2.5, 7]$ es 4.5.

gráfica



Observa que

$$[a,b] = (a,b) \cup \{ a,b \}$$

es decir que la diferencia entre un intervalo cerrado y uno abierto, es que el intervalo cerrado contiene a sus extremos, mientras que el abierto no.

Intervalo semi-abierto a izquierda ó semi-cerrado a derecha $(a,b]$

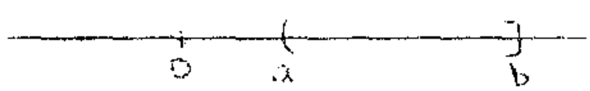
Definición 4:

El intervalo $(a,b]$ es el conjunto de puntos entre a y b, se excluye a y se incluye b. En símbolos.

$$(a,b] = \{ x / x \in R, \ a < x \leq b \}$$

los extremos del intervalo $(a,b]$ son a y b. La longitud del intervalo es $b - a$.

gráfica



Ejemplo 28:

$(3,4.7]$ es un intervalo semi-abierto a izquierda de extremo inferior 3 y extremo superior 4.7 y longitud 1.7.

$3 \notin (3,4.7]$ y $4.7 \in (3,4.7]$

gráfica

Intervalo semi-abierto a derecha ó semi-cerrado a izquierda $[a,b)$.

Definición 5:

El intervalo $[a,b)$ es el conjunto de puntos entre a y b; incluyendo a y excluyendo b. En símbolos

$$[a,b) = \{x \in R / \ a \leq x < b\}$$

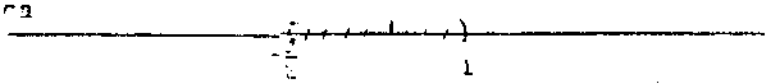
Ejemplo 29:

$\left[-\frac{3}{2}, 1\right)$ es un intervalo semi-cerrado a izquierda de extremo inferior $-\frac{3}{2}$ y extremo superior 1.

$$-\frac{3}{2} \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right) \text{ y } 1 \notin \left[-\frac{3}{2}, 1\right)$$

La longitud del intervalo es 2.5 unidades..

Gráfica



Es importante observar, que la propiedad de densidad del conjunto de los números reales se verifica también en los intervalos de extremos a y b $(a < b)$. Es decir que los intervalos de la forma (a,b); $(a,b]$; $[a,b)$; $[a,b]$,tienen infinitos puntos.

Intervalos especiales:

i.- $(a,a) = \emptyset$

en efecto, pues por definición

$(a,a) = \{x \in R / \ a < x < a\}$

no hay un sólo número real que sea mayor y menor que a simultáneamente.

Se verifica fácilmente que:

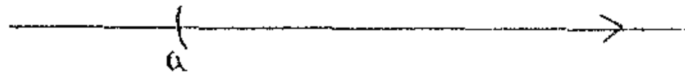
ii.- $(a,a] = \emptyset$

iii.- $[a,a) = \emptyset$

iv.- $[a,a] = \{a\}$

v.- $(a,+\infty) = \{x \in R / \ x > a\}$

gráficamente

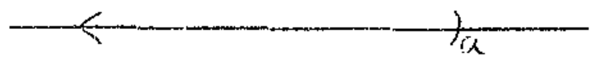


debes observar que $+\infty$ no es un número, lo que $+\infty$ indica es que la variable x no tiene extremo superior, o bien que x crece sin límite.

vi.- $[a, +\infty) = \{x \in R / x \geqslant a\}$

vii.- $(-\infty, a) = \{x \in R / x < a\}$

gráfica

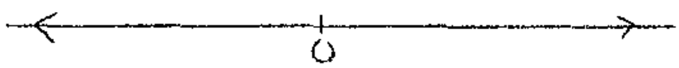


del mismo modo que antes, indicamos que $-\infty$ no es un número, sino que el intervalo no tiene extremo inferior.

viii.- $(-\infty, a] = \{x \in R / x \leqslant a\}$

ix.- $(-\infty, +\infty) = R.$

gráfica



Así, tenemos que R no tiene extremo inferior ni superior.

Ejemplo 31

Determinar los intervalos tales que :

i.- $3 < x$ y $x < 5$

ii.- $x < 3$ y $x < 5$

iii.- $x > 3$ y $x > 5$

iv.- $x < 3$ y $x > 5$

v.- $-2 \leqslant x$ y $x \leqslant 5$

vi.- $4 \leqslant x$

vii.- $x \leqslant 3$

viii.- $x > 2$

ix.- $x < 3$ ó $x > 6$

x.- $x > 5$ y $x < 1$

xi.- $x \leqslant -2$ ó $x \geqslant 4$

xii.- $x \leqslant 4$ ó $x > 2$

Solución:

i.- $(3,5)$

ii.- $(-\infty, 3)$

iii.- $(5, +\infty)$

iv.- $\emptyset$

v.- $[-2, 5]$

vi.- $[4, +\infty)$

vii.- $(-\infty, 3]$

viii.- $(2, +\infty)$

ix.- $(-\infty, 5) \cup (6, +\infty)$

x.- $\emptyset$

xi.- $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

xii.- $\mathbb{R}$

Esperamos que hayas estudiado los intervalos dados en el ejemplo 31 detenidamente. Observa en los primeros cuatro casos que:

i.- $3 < x \implies x \in (3, +\infty)$

$x < 5 \implies x \in (-\infty, 5)$

Luego

$$(3 < x \text{ y } x < 5) \implies x \in (3, +\infty) \text{ y } x \in (-\infty, 5)$$

Es decir:

$$x \in (-\infty, 5) \cap (3, +\infty) = (3, 5)$$

ii.- $x < 3 \implies x \in (-\infty, 3)$

y

$x < 5 \implies x \in (-\infty, 5)$

Luego

$$(x < 3 \text{ y } x < 5) \implies x \in (-\infty, 3) \text{ y } x \in (-\infty, 5)$$

Es decir

$$x \in (-\infty, 3) \cap (-\infty, 5) = (-\infty, 3).$$

iii.- $x > 3 \implies x \in (3, +\infty)$

y

$x > 5 \implies x \in (5, +\infty)$

Luego

$$(x > 3 \text{ y } x > 5) \implies x \in (3, +\infty) \text{ y } x \in (5, +\infty)$$

TAREA 3

PRACTICA

3.1 El intervalo abierto de extremos 1 y 5, se denota por________.

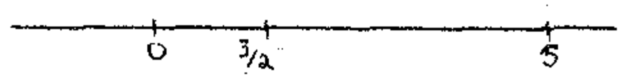
3.2 El intervalo $(4, 6]$ se define como__________________ .

3.3 El intervalo $[2,6]$ es cerrado porque contiene sus___________.

3.4 La longitud del intervalo $[\sqrt{2}, 4)$ es ____________________.

3.5 El intervalo de extremos en 1 y 3, semi-cerrado a izquierda, se denota por _______________.

3.6 Haz la representación gráfica del intervalo $[\frac{3}{2}, 5)$ en la recta real



3.7 El intervalo definido por la relación $x \geqslant -1$ es ___________.

3.8 Indica cuáles enunciados son verdaderos y cuáles falsos.

Las relaciones:

a) $x \leqslant -5$ y $x \geqslant 1$ define el intervalo $[-5, 1]$ ________

b) $x < 2$ y $x \leqslant 4$ define el intervalo $(-\infty, 4]$ ________

c) $x > -1$ y $x < 2$ define el intervalo $(-\infty, -1)$ ________

d) $x > 2$ ó $x < 3$ define el intervalo $(-\infty, +\infty)$ ________

e) $x \leqslant 0$ ó $x > 5$ define el intervalo $(-\infty, 0] \cup (5, +\infty)$________

3.9 Determina el intervalo definido por las relaciones

a) $x > 1$ y $x \geqslant 5$ __________________

b) $x < 1$ y $x \leqslant 5$ __________________

c) $x > 1$ y $x \leqslant 5$ __________________

d) $x > 0$ y $x < 0$ __________________

e) $x \geqslant 1$ ó $x \leqslant -2$ __________________

f) $x \geqslant 3$ ó $x > -5$ __________________

g) $x < 5$ ó $x > -2$ __________________

Compara tus resultados con las respuestas correctas en la siguiente página.

TAREA 3

RETROINFORMACION

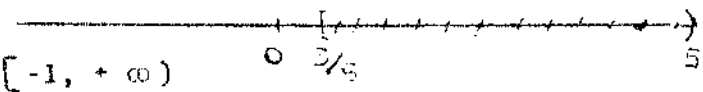
3.1 $(1,5)$

3.2 $(4,6] = \{ x \mid 4 < x \leq 6 \}$

3.3 extremos

3.4 $4 - \sqrt{2}$

3.5 $[1,3)$

3.6 

3.7 $[-1, +\infty)$

3.8 a) Falso

b) Falso

c) Falso

d) Verdadero

e) Verdadero

3.9 a) $[5, +\infty)$

b) $(-\infty, 1)$

c) $(1, 5]$

d) $\emptyset$

e) $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

f) $[3, +\infty)$

g) R

Muy bien, podemos seguir con la cuarta tarea.

TAREA 4

RESOLUCION DE DESIGUALDADES LINEALES

Objetivos Específicos:

Al terminar la tarea 4, el estudiante debe ser capaz de:

1.- Resolver desigualdades lineales, aplicando las propiedades de las relaciones de orden.

2.- Ilustar gráficamente en la recta real el conjunto solución de una desigualdad lineal.

Información:

Resolver una desigualdad es determinar el conjunto donde se cumple la desigualdad indicada.

Ejemplo 32:

Resolver la desigualdad

$x - 3 < 0.$

Solución:

$$x - 3 < 0 \implies (x-3) + 3 < 0 + 3$$
$$x < 3 \iff x \in (-\infty, 3).$$

Luego la solución de la desigualdad

$x - 3 < 0$ es el intervalo $(-\infty, 3)$.

para comprobar que nuestra solución es compatible con la desigualdad, tomemos 2 puntos, 1 y 5.

Tenemos que

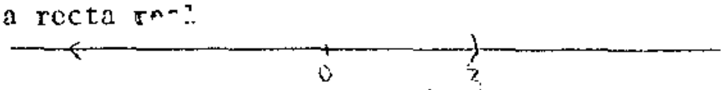
$1 - 3 = -2 < 0$

Luego 1 satisface la desigualdad

Tal como esperabamos, ya que $1 \in (-\infty, 3)$.

Además

$5-3 = 2$ y 2 no es menor que 0 y 5 no satisface la desigualdad tal como esperabamos ya que $5 \notin (-\infty, 3)$ grafiquemos la solución sobre la recta real



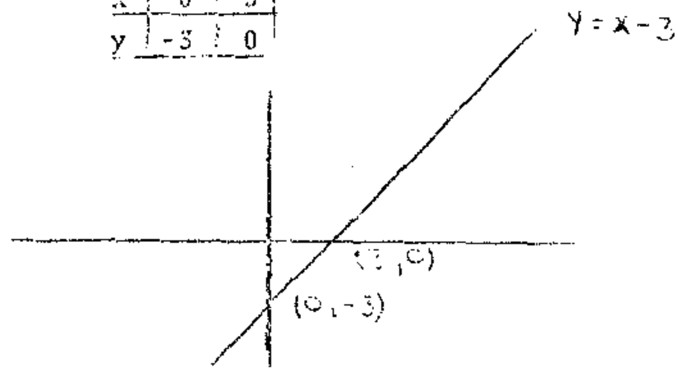
Podemos definir la función

$$y = x - 3$$

y hacer su gráfica en el plano cartesiano.

Tenemos que

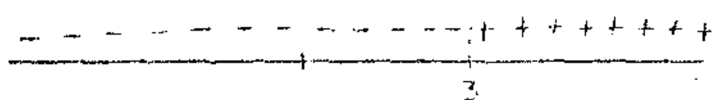
x	0	3
y	-3	0



Observa a partir de la gráfica que la ordenada y (y = x-3) es negativa, cuando $x < 3$.

Por último, es fácil deducir que $x - 3$ es positivo en $(3,+\infty)$ y $x - 3$ se anula en $x = 3$.

gráfiquemos el signo de $x - 3$ en la recta real.



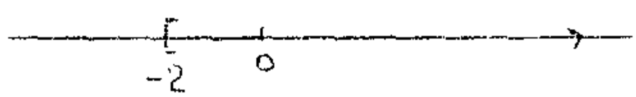
Ejemplo 33:

Resolver la desigualdad $x + 2 \geq 0$ y hacer la gráfica del conjunto solución en la recta real.

Solución:

$$x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2 \iff x \in [-2, +\infty)$$

gráfica



Ejemplo 34:

Resolver la desigualdad $4x + 5 \leq 2x - 8$

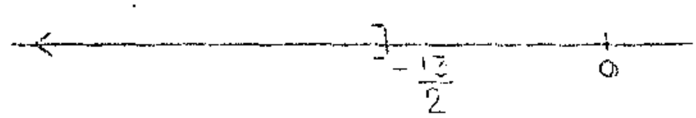
Solución:

$$4x + 5 \leq 2x - 8 \implies 4x - 2x \leq -8 - 5 \implies$$

$$\implies 2x \leq -13 \implies x \leq -\frac{13}{2} \iff x \in (-\infty, -\frac{13}{2}]$$

Recuerda que para resolver una desigualdad debemos despejar a x, para así poder determinar el intervalo solución.

gráfica

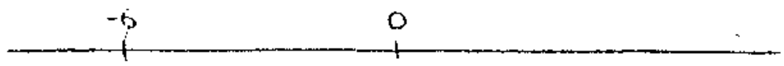


TAREA 4

PRACTICA

1.- La solución de la desigualdad $x + 6 > 0$ es el intervalo ________________.

2.- Su representación gráfica en la recta real es



3.- Indica el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

a) $x - 2 \leq 4$ ________________

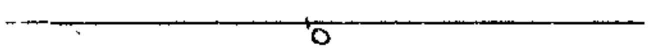
b) $x + 1 \geq -3$ ________________

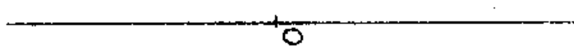
c) $x\ (x+1) \geq x^2+2$ ________________

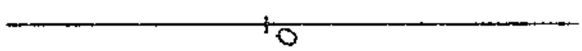
d) $x - 3 < 7$ y $2x - 5 > -9$ ________________

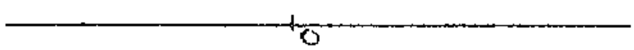
e) $3x + 6 < 1$ y $3x+2 > 4$ ________________

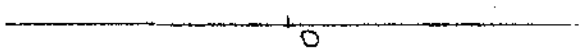
4.- Haz la representación gráfica en la recta real de la solución de las desigualdades anteriores, siempre que sea posible.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

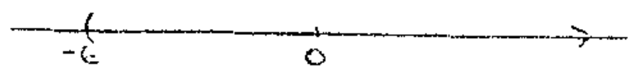
Compara tus resultados con las respuestas correctas, en la siguiente página.

TAREA 4

RETROINFORMACION

4.1 $(-6, +\infty)$

4.2



4.3 a) $(-\infty, 6]$

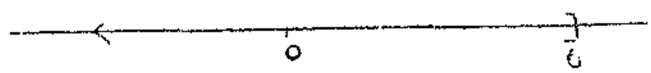
b) $[-2, +\infty)$

c) $[2, +\infty)$

d) $(-2, 4)$

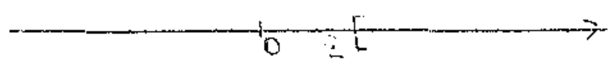
e) $\emptyset$

4.4 a)



b)

c)



d)

e) No hay representación de $\emptyset$.

Ya has terminado 4 tareas. Muy bien, en la tarea 5 resolverás desigualdades más interesantes.

TAREA 5

RESOLUCION DE DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO

Objetivos Específicos:

El alumno debe ser capaz de:

1.- Aplicar la ley de los signos para resolver desigualdades del producto de dos factores.

2.- Ilustrar en la recta real el conjunto solución de una desigualdad de segundo grado.

Información:

Para resolver desigualdades de segundo grado nos basamos en las leyes de los signos de dos cantidades. Es decir si x e y son 2 cantidades variables, entonces si

1.- $xy > 0$

existen 2 posibilidades:

i.- que los 2 factores sean positivos, es decir

$x > 0$

e

$y > 0$

ii.- Que los 2 factores sean negativos, es decir

$x < 0$

e

$y < 0$

Observa que en ambos casos los 2 factores tienen el mismo signo.

Ahora bien, si

$xy < 0$

existen también 2 posibilidades

i.- Que x sea positivo e y negativo, es decir

$x > 0$

e

$y < 0$

ii.- Que x sea negativo e y positivo, es decir

$x < 0$

e

$y > 0$

Ejemplo 35:

Resolver la desigualdad

$(x - 3)(x-8) > 0$

Caben 2 posibilidades.

i.- $x - 3 > 0$

y

$x - 8 > 0$

ó

ii.- $x - 3 < 0$

y

$x - 8 < 0$

i.- $x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3$

$x - 8 > 0 \Longrightarrow x > 8$

Ahora bien

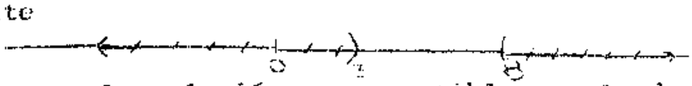
$$\left.\begin{array}{l} x > 3 \\ y \\ x > 8 \end{array}\right\| \Rightarrow x > 8 \Longleftrightarrow x \in (8, +\infty)$$

ii.- $$\left.\begin{array}{l} x - 3 < 0 \Longrightarrow x < 3 \\ x - 8 < 0 \Longrightarrow x < 8 \end{array}\right\| \Longrightarrow x < 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3)$$

Luego la solución es la unión de los 2 intervalos.

Solución: $(-\infty, 3) \cup (8, +\infty)$

gráficamente



comprobemos que la solución es compatible con la desigualdad.

Para esto tomemos los puntos $1 \in (-\infty, 3)$ y $12 \in (8, +\infty)$

Luego

$(1-3)(1-8) = (-2)(-7) = 14 > 0$

y

$(12-3)(12-8) = (9)(4) = 36 > 0$

Ahora tomemos $5 \in (3,8)$

$(5-3)(5-8) = (2)\cdot(-3) = -6 < 0$

Luego el 5 no satisface la desigualdad tal como esperamos.

Ejemplo 36:

Resolver la desigualdad

$$(x-3)(x-8) < 0$$

Caben 2 posibilidades

i.- $x-3 > 0$

y

$x-8 < 0$

ó

ii.- $x - 3 < 0$

y

$x - 8 > 0$

i.- $\left.\begin{array}{l} x-3 > 0 \implies x > 3 \\ x-8 < 0 \implies x < 8 \end{array}\right\| \implies 3 < x < 8 \iff x \in (3,8)$

ii.- $x-3 < 0 \implies x < 3$

y

$x-8 > 0 \implies x > 8$

pero

$x < 3$ y $x > 8$ es absurdo, luego

$$\text{y} \quad \left.\begin{array}{l} x < 3 \\ \\ x > 8 \end{array}\right\| \implies x \in \emptyset$$

De los ejemplos 32 y 33, se sigue que el producto

$$(x-3)(x-8)$$

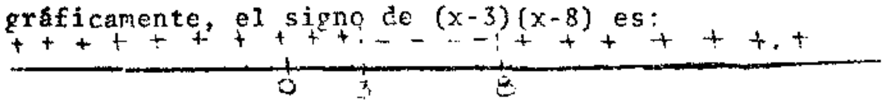
es positivo en

$$(-\infty, 3) \cup (8, +\infty)$$

y negativo en

$$(3, 8)$$

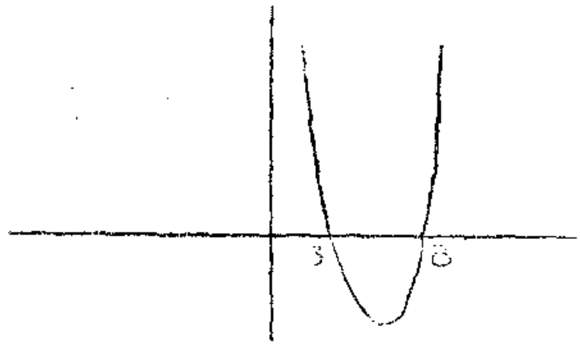
gráficamente, el signo de $(x-3)(x-8)$ es:



Definimos ahora, la función

$$f(x) = (x-3)(x-8)$$

y hagamos su gráfica en el plano cartesiano



podemos apreciar de la gráfica, que la función es positiva en $(-\infty, 3)$ y en $(8, +\infty)$, y es negativa en $(3,8)$. Así, es compatible el hecho que el producto $(x-3)(x-8)$ es positivo en el mismo conjunto donde la ordenada de la función $y = (x-3)(x-8)$ es positiva y el producto es negativo, donde la ordenada de la función es negativa.

Ejemplo 37:

Resolver la desigualdad

$$3x^2+4x \geqslant 2x^2+5x+2$$

Solución:

Lo primero es pasar todos los términos al miembro de la izquierda, de manera que podamos comparar la expresión con cero.

Así

$$3x^2+4x \geqslant 2x^2+5x+2$$

$$3x^2+4x-2x^2-5x-2 \geqslant 0$$

$$x^2 - x - 2 \geqslant 0$$

$$(x-2)(x+1) \geqslant 0$$

Aplicando la ley de los signos, caben 2 posibilidades:

i.- $x-2 \geqslant 0$ y $x+1 \geqslant 0$

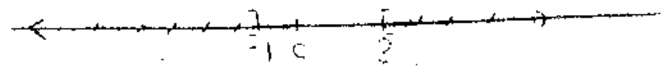
ii.- $x-2 \leqslant 0$ y $x+1 \leqslant 0$

i.- $$\left.\begin{array}{l} x-2 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 2 \\ \text{y} \\ x+1 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant -1 \end{array}\right\| \Longrightarrow x \geqslant 2 \Longleftrightarrow x \in [2, +\infty)$$

ii.- $$\left.\begin{array}{l} x-2 \leqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant 2 \\ \text{y} \\ x+1 \leqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant -1 \end{array}\right\| \Longrightarrow x \leqslant -1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1]$$

Solución:

$(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

Gráfica 

Ejemplo 38:

Resolver la desigualdad

$x^2 + x + 2 > 0.$

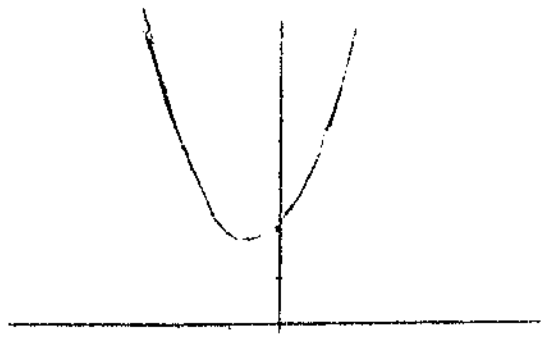
Solución:

La expresión x^2+x+2 no es factorizable, eso indica que tal expresión tiene el mismo signo para todo número real. En este caso la expresión es positiva para todo número real. Por lo tanto

$x^2+x+2 > 0 \Longrightarrow x \in R$

Sol; R.

Observemos la gráfica de la función $f(x) = x^2+x+2$ en el plano cartesiano



se puede apreciar que la ordenada de la función es positiva en todo número real, tal como se esperaba.

Es fácil deducir, que la solución de la desigualdad

$$x^2+x+2 \leq 0$$

es el conjunto vacío $\emptyset$.

TAREA 5

PRACTICA

5.1 Si el producto $(x+3)(x-9)$ es positivo hay 2 posibilidades, que los dos factores sean ____________________, ó que los dos factores sean ____________________.

5.2 Si los factores son positivos, entonces x pertenece al intervalo________________.

5.3 y si los factores son negativos, entonces x pertenece al intervalo________________.

5.4 Por tanto la solución a la desigualdad $(x-9)(x+3)$ es el conjunto________________.

5.5 La representación gráfica de la solución es ____________________________

5.6 Por simple deducción, podemos afirmar que la solución de la desigualdad $(x+3)(x-9) \leq 0$ es el conjunto____________.

5.7 Representa gráficamente el signo de la expresión $(x+3)(x-9)$, en la recta real ____

5.8 La desigualdad $x^2-3x+1 \leq 3-2x$ tiene por solución al conjunto________________.

5.9 La desigualdad $x^2+1 \geq 0$ tiene por solución el conjunto ____________________

5.10 La desigualdad $2x^2+5 \leq 1$ tiene por solución el conjunto ________________

Compara tus resultados con las respuestas correctas, en la siguiente página.

TAREA 5

RETROINFORMACION

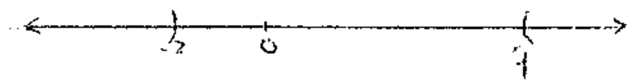
5.1 Positivos, negativos

5.2 $(9,+\infty)$

5.3 $(-\infty,-3)$

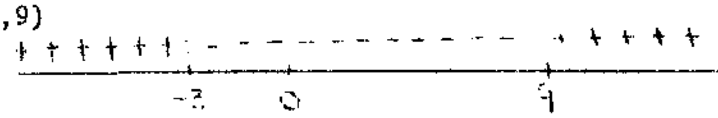
5.4 $(-\infty,-3) \cup (9,+\infty)$

5.5



5.6 $(3,9)$

5.7



5.8 $[-1,2]$

5.9 R. El conjunto de los números reales, pues la expresión x^2+1 es positiva para todo número real x.

5.10 Ø. Ningún número real satisface la desigualdad.

Si has contestado todas las preguntas correctamente te felicitamos y te exhortamos a continuar en la tarea 6.

RESOLUCION DE DESIGUALDADES, DONDE APARECEN FUNCIONES RACIONALES

Objetivos Específicos:

1.- El estudiante resolverá desigualdades, de cocientes de funciones lineales.

Información:

Ejemplo 39:

Resolver la desigualdad

$$\frac{x-2}{x+1} \geq 0$$

Solución:

Aplicando la ley de los signos para un cociente, caben 2 posibilidades:

i.- $x-2 \geq 0$ y $x+1 > 0$

ó

ii.- $x-2 \leq 0$ y $x+1 < 0$

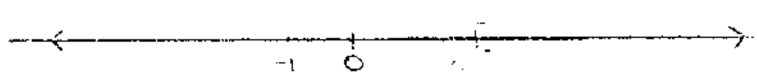
i.- $x-2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$ y $x+1 > 0 \Longrightarrow x > -1$ $\Longrightarrow x \geq 2 \Longleftrightarrow x \in [2,+\infty)$

ii.- $x-2 \leq 0 \Longrightarrow x \leq 2$ y $x+1 < 0 \Longrightarrow x < -1$ $\Longrightarrow x < -1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-1)$

Solución:

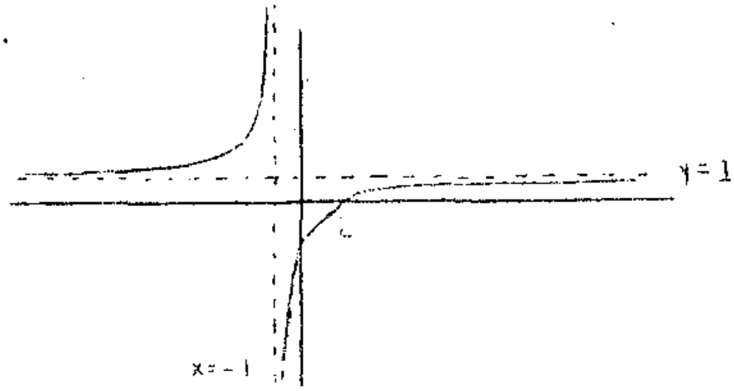
$$(-\infty,-1) \cup [2,+\infty)$$

Solución en la recta real



Observa que -1, no pertenece a la solución de la desigualdad, pues si $x = -1$ se anula la expresión del denominadpr, lo cual es imposible.

Definimos la función $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$. Construyamos la gráfica en el plano cartesiano.



como puedes apreciar la ordenada de la nción es positiva en el conjunto $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$.

Precisamente la solución de la desigualdad

$$\frac{x-2}{x+1} \geqslant 0$$

Sin necesidad de resolver la desigualdad, podemos deducir, que la solución de la desigualdad

$$\frac{x-2}{x+1} \leqslant 0$$

es el conjunto $(-1, 2]$

<u>Ejemplo 40:</u>

Resolver la desigualdad

$$\frac{2}{x-4} < -1$$

<u>Solución:</u>

$$\frac{6}{x-4} < -1$$

$$\frac{6}{x-4} + 1 < 0$$

$$\frac{6+(x-4)}{x-4} < 0$$

$$\frac{x+2}{x-4} < 0$$

Caben 2 posibilidades

i.- $x+2 > 0$ y $x-4 < 0$

ó

ii.- $x+2 < 0$ y $x-4 > 0$

i.- $\left.\begin{array}{l} x+2 > 0 \implies x > -2 \\ \text{y} \\ x-4 < 0 \implies x < 4 \end{array}\right\| \implies -2 < x < 4 \iff x \in (-2, 4)$

Por otro lado

ii.- $x+2 < 0 \Longrightarrow x < -2$

y

$x-4 > 0 \Longrightarrow x > 4$

pero $x < -2$ y $x > 4$ es absurdo, luego la solución para la parte ii es $x \in \emptyset$. Por lo tanto la solución es

$$(-2,4) \cup \emptyset = (-2,4)$$

TAREA 6

PRACTICA

6.1 La desigualdad $\frac{x}{x-1} \geq 2$ es equivalente a la desigualdad

____________ ≤ 0

6.2 De ahí que las posibilidades son dos. La primera es

$x-1 < 0$ y $x-2 \geq 0$

La segunda es ____________ y ____________

6.3 La solución de la primera posibilidad es____________.

6.4 La solución de la segunda posibilidad es____________.

6.5 La solución a la desigualdad $\frac{x}{x-1} \geq 2$ es por tanto

____

6.6 Representa la solución en la recta real

6.7 La solución de la desigualdad $\frac{x+9}{x} < 2$, es el conjunto

____

6.8 La solución de la desigualdad

$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{2x+3}{x+2}$ es el conjunto ____________

6.9 La solución de la desigualdad $\frac{x^2+1}{x} < 0$ es el conjunto____________.

Compara tus resultados con las respuestas correctas en la siguiente página.

TAREA 6

RETROINFORMACION

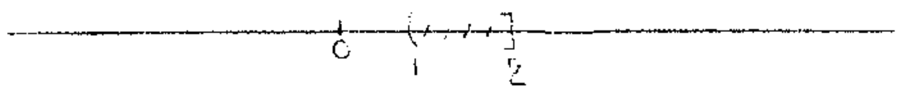
6.1 $\frac{x-2}{x-1} \leq 0$

6.2 $x-1 > 0$ y $x-2 \leq 0$

6.3 $\emptyset$

6.4 $(1,2]$

6.5 $(1,2]$

6.6 

6.7 $(-\infty,0) \cup (9,+\infty)$

6.8 $(-\infty,-4] \cup (2,+\infty)$

6.9 $(-\infty,0)$

Muy bien, podemos seguir adelante. En la próxima tarea veremos un método que simplifica la resolución de desigualdades.

RESOLUCION DE DESIGUALDADES EN GENERAL

Objetivos Específicos:

Al terminar la séptima tarea, el estudiante será capaz de:

1.- Dada una expresión algebraica de dos ó más factores, establecer en orden creciente los números que anulan los factores.

2.- Construir un cuadro, que indique el signo de cada uno de los factores en cada uno de los intervalos determinados por los ceros de la expresión.

3.- Calcular el signo de la expresión algebraica en cada uno de los intervalos determinado por los ceros de la expresión.

4.- Indicar el conjunto solución de la expresión algebraica de acuerdo a la desigualdad dáda.

Información:

Hemos visto que, para resolver una desigualdad, nos basamos en la ley de los signos. Esta idea se puede generalizar a más de dos factores. Para resolver una desigualdad, donde aparecen tres factores existen 4 posibilidades para cada uno de los dos casos en que la expresión sea positiva o negativa. Es decir, si $x\,y\,z > 0$. existen 4 posibilidades:

i.- $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

ii.- $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$

iii.- $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$

iv.- $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$

Si en vez de tres factores, tenemos 4, las posibilidades para el producto positivo o negativo son 8 en cada caso; si fueran 5 factores fueran 16 posibilidades y así sucesivamente.

Para simplificar la resolución de desigualdades, principalmente donde aparecen más de dos factores, explicaremos un método que nos ayudará a calcular rápidamente el conjunto solución de la desigualdad dada. Este método que vamos a introducir, si bien no tiene la misma rigurosidad que el método que hemos empleado hasta ahora; si tiene la misma validez.

Consideremos la expresión $x-3$. Entonces :

$x-3 < 0 \Longrightarrow x < 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,3)$

y $x-3 > 0 \Longrightarrow x > 3 \Longleftrightarrow x \in (3,+\infty)$

$x-3 = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longleftrightarrow x \in \{3\}$

Consideremos también la expresión

$x+2$.

$x+2 < 0 \Longrightarrow x < -2 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-2)$

$x+2 > 0 \Longrightarrow x > -2 \Longleftrightarrow x \in (-2,+\infty)$

$x+2 = 0 \Longrightarrow x = -2 \Longleftrightarrow x \in \{-2\}$

Estudiemos el siguiente cuadro

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$(x+2)(x-3)$	+	-	+

Del cuadro se sigue que:

$(x+2)(x-3) > 0 \Longrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$.

$(x+2)(x-3) \geqslant 0 \Longrightarrow x \quad (-\infty,-2] \cup [3,+\infty)$

$\frac{x+2}{x-3} \geqslant 0 \Longrightarrow x \in (-\infty,-2] \cup (3,+\infty)$

$\frac{x+2}{x-3} > 0 \Longrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$

$\frac{x-3}{x+2} \geqslant 0 \Longrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup [3,+\infty)$

$(x+2)(x-3) < 0 \Longrightarrow x \in (-2,3)$

$(x+2)(x-3) \leqslant 0 \Longrightarrow x \in [-2,3]$

$\frac{x-3}{x+2} < 0 \Longrightarrow x \in (-2,3)$

$\frac{x-3}{x+2} \leqslant 0 \Longrightarrow x \in (-2,3]$

$\frac{x+2}{x-3} \leqslant 0 \Longrightarrow x \in [-2,3)$

gráficamente

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	- - - - - - -	+ + + + + + + + +	+ + + + + + + +
$x-3$	- - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + +
$(x+2)(x-3)$	+ + + + +	- - - - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + +

$-2 \qquad 0 \qquad 3$

Este método se puede generalizar a más de 2 factores. Entonces para resolver una desigualdad de n factores lineales de la forma $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Seguimos los siguientes pasos:

1.- Ordenamos los factores, de manera que en el nuevo orden

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots \quad a_{n-1} \leq a_n.$

2.- Dividimos la recta real en los intervalos

$(-\infty, a_1);\ (a_1, a_2);\ (a_2, a_3)\ldots;(a_{n-1}, a_n);\ (a_n, +\infty)$

es decir en un total de n+1 intervalos, donde $-\infty$ es el extremo izquierdo del primer intervalo; a_i es el extremo derecho del i-ésimo intervalo y extremo izquierdo del i+1-ésimo intervalo y $+\infty$ es el extremo derecho del último intervalo.

3.- Construir un cuadro donde se determine el signo de cada uno de los factores $(x-a)$ en los n+1 intervalos definidos en el paso 2.

4.- Determinar el signo del producto (ó cociente) donde intervienen tales factores y dar la solución a la desigualdad pedida.

Ejemplo 41:

Resolver la desigualdad

$x(x+1)(x-5)(x-4)(x+8) \leq 0$

Paso 1:

Como $-8 \leq -1 \leq 0 \leq 4 \leq 5$

entonces la desigualdad a resolver es

$(x-(-8))(x-(-1))(x-0)(x-4)(x-5)$

Paso 2:

Dividimos a R en los intervalos

$(-\infty,-8);\ (-8,-1)\ ;\ (-1,0)\ ,\ (0,4)\ ;(4,5);\ (5,+\infty)$

Paso 3:

Sea $P = (x+8)(x+1)x(x-4)(x-5)$.

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 4)$	$(4, 5)$	$(5, +\infty)$
$x+8$	-	+	+	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+	+
x	-	-	-	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	+	+
$x-5$	-	-	-	-	-	+
P	-	+	-	+	-	+

Paso 4:

La solución a la desigualdad

$(x+8)(x+1)x(x-4)(x-5) \leq 0$

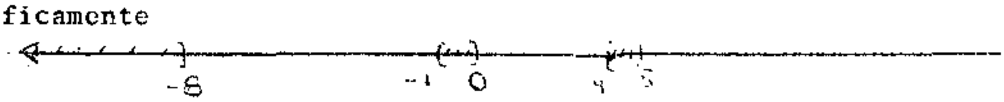
es la unión de los intervalos, donde el producto P es negativo, y el conjunto de valores que anulan el producto.

Solución:

$S = (-\infty, -8) \cup (-1,0) \cup (4,5) \cup \{-8, -1, 0, 4, 5\}$

$S = (-\infty, -8] \cup [-1, 0] \cup [4, 5]$

gráficamente



Ejemplo 42:

Resolver las desigualdades

a) $2x^3+x^2-x \geq x^3+2x^2-1$

b) $x^3 \leq 1$

Solución:

a) $2x^3+x^2-x \geq x^3+2x^2-1$

$2x^3-x^3+x^2-2x^2-x+1 \geq 0$

$x^3-x^2-x+1 \geq 0$

$x^2(x-1)-(x-1) \geq 0$

$(x-1)(x^2-1) \geq 0$

$(x-1)(x-1)(x+1) \geq 0$

Paso 1:

$(x+1)(x-1)(x-1) \geq 0$

Paso 2:

$(-\infty, -1)$; $(-1,1)$; $(1, +\infty)$

Paso 3:

Sea $P = (x-1)^2(x+1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1,1)$	$(1, +\infty)$
$(x+1)$	-	+	+
$(x-1)$	-	-	+
$(x-1)$	-	-	+
P	-	+	+

Paso 4:

La solución a la desigualdad

$$(x+1)(x-1)^2 \geq 0$$

es el intervalo $S = (-1,1) \cup (1,+\infty) \cup \{-1,1\}$

$$= [-1 + \infty)$$

Si observas bien el cuadro anterior, te puedes dar cuenta que el signo de $(x+1)(x-1)^2$ depende del signo de $(x+1)$ ya que el de $(x-1)^2$ es siempre positivo excepto cuando $x = 1$. Siempre que un factor sea positivo en todo R, podremos omitir la línea del signo de tal factor si así lo deseamos y la respuesta sería la misma. En el ejemplo anterior.

	$(-\infty, -1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
x+1	-	+	+
P	-	+	+

Solución

$$S = (-1,1) \quad (1+\infty) \cup \{-1,1\}$$

$$S = [-1,+\infty)$$

b) $x^3 \leq 1$

$x^3 - 1 \leq 0$

$(x-1)(x^2+x+1) \leq 0$

el factor x^2+x+1 no se anula y siempre es positivo, luego.

Paso 2:

Dividimos a R en los intervalos

$(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$.

Paso 3:

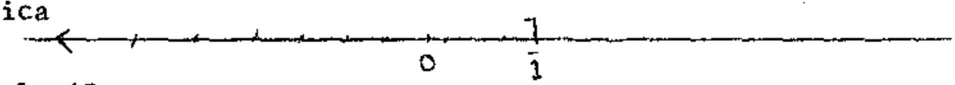
	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	-	+
x^3-1	-	+

Paso 4:

$$S = (-\infty, 1) \cup \{1\}$$

$$S = (-\infty, 1]$$

gráfica



Ejemplo 43:

Resolver la desigualdad

$$\frac{2}{x+3} \geqslant \frac{5}{4-x}$$

Solución:

$$\frac{2}{x+3} - \frac{5}{4-x} \geqslant 0$$

$$\frac{2}{x+3} + \frac{5}{x-4} \geqslant 0$$

$$\frac{2(x-4)+5(x+3)}{(x+3)(x-4)} \geqslant 0$$

$$\frac{7x+7}{(x+3)(x-4)} \geqslant 0$$

$$\frac{x+1}{(x+3)(x-4)} \geqslant 0$$

podemos ver que la expresión $\frac{x+1}{(x+3)(x-4)}$ se anula sólo cuando $x = -1$ y tiene el mismo signo que la expresión $(x+1)(x+3)(x-4)$.

Luego

$$(x+1)(x+3)(x-4) > 0$$

Paso 1

$$(x+3)(x+1)(x-4) > 0$$

Paso 2

Dividimos a R en los intervalos

$(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 4)$; $(4, +\infty)$

Paso 3

Sea $P = (x+3)(x+1)(x-4)$

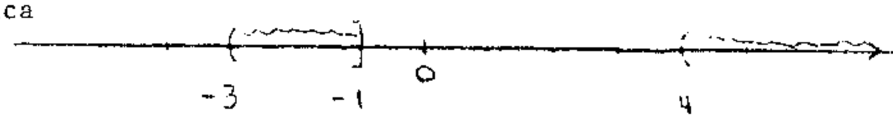
	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 4)$	$(4, +\infty)$
$x+3$	-	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
P	-	+	-	+

Paso 4:

$S = (-3,-1) \cup (4,+\infty) \cup \{-1\}$

$S = (-3, -1] \cup (4,+\infty)$

gráfica



TAREA 7

PRACTICA

7.1 Al factorizar la expresión $x^3-7x^2+7x-15$ resulta

$x^3-7x^2+7x-15 =$ ____________________________.

7.2 Ordena los números que anulan la expresión anterior en forma creciente____________________________

7.3 Para hacer el cuadro donde estudiamos el signo de los factores, dividimos a R en los intervalos(se excluyen los valores que anulan la expresión).

____

____

____

____

7.4 Determina el signo de cada factor en el siguiente cuadro.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, +\infty)$
$x+1$				
$x-3$				
$x-5$				
$(x+1)(x-3)(x-5)$				

7.5 De acuerdo al cuadro anterior. La solución de la desigualdad $x^3-7x^2+7x-15 > 0$ es el conjunto____________________

7.6 La solución de la desigualdad $x^3-7x^2+7x-15 < 0$ es el conjunto ______________.

7.7 El signo de la expresión $x^3-7x^2+7x-15$ gráficamente en la recta real es ______________ 0 ______________.

7.8 Construye el cuadro correspondiente para resolver la desigualdad $x(x-5)(x+3)(x-16) \geq 0$

7.9 De acuerdo al cuadro construido en el item 8, la solución a la desigualdad es el conjunto ______________.

7.10 Resuelve la desigualdad

$\frac{x-5}{x^2+4x-32} \leq 0$. De acuerdo al método empleado en esta tarea.

7.11 Resuelve la desigualdad $\frac{x^2+x+1}{x-1} \geq 0$

Compara tus resultados con las respuestas correctas en la siguiente página.

TAREA 7

RETROINFORMACION

7.1 $x^3-7x^2+7x-15 = (x+1)(x-3)(x-5)$

7.2 $-1 \leq 3 \leq 5$

7.3 $(-\infty,-1)$, $(-1,3)$, $(3,5)$, $(5,+\infty)$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,5)$	$(5,+\infty$
$(x+1)$	-	+	+	+
$(x-3)$	-	-	+	+
$(x-5)$	-	-	-	+
$(x+1)(x-3)(x-5)$	-	+	-	+

7.5 $(-1,3) \cup (5,+\infty)$

7.6 $(-\infty,-1) \cup (3,5)$

7.7

7.8 Sea $P = (x+3)x(x-5)(x-16)$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,5)$	$(5,16)$	$(16,+\infty)$
$x+3$	-	+	+	+	+
x	-	-	+	+	+
$x-5$	-	-	-	+	+
$x-16$	-	-	-	-	+
P	+	-	+	-	+

7.9 $S = (-\infty,-3) \cup (0,5) \cup (16,+\infty) \cup \{-3,0,5,16\}$

$= (-\infty,-3] \cup [0,5] \cup [16,+\infty)$.

7.10 $\dfrac{x-5}{x^2+4x-32} \leq 0 \qquad \dfrac{x-5}{(x+8)(x-4)} \leq 0$

	$(-\infty,-8)$	$(-8,4)$	$(4,5)$	$(5,+\infty)$
$x+8$	-	+	+	+
$x-4$	-	-	+	+
$x-5$	-	-	-	+
$\dfrac{x-5}{(x+8)(x-4)}$	-	+	-	+

$S = (-\infty, -8) \cup (4,5) \cup \{5\}$
$S = (-\infty, -8) \cup (4,5]$

7.11 La expresión x^2+x+1 no es factorizable y siempre es positiva. Luego

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
x^2+x+1	+	+
$x-1$	-	+
$\frac{x^2+x+1}{x-1}$	-	+

Por tanto $\frac{x^2+x+1}{x-1} \geq 0 \implies$

$\implies \quad S = (1+\infty) \cup \{x \;/\; x^2+x+1 = 0\}$
$= (1,+\infty) \cup \emptyset$
$= (1,+\infty)$

Muy bien. Ahora que has llegado hasta aquí, puedes resolver cualquier desigualdad que te presenten. En la última tarea (la N°8) veremos ligados el valor absoluto de una expresión algebraica con la resolución de desigualdades.

TAREA 8

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

Objetivos Específicos:

1.- El estudiante podrá resolver desigualdades, donde aparece el valor absoluto de una o más expresiones algebraicas.

Información:

El valor absoluto de 2 es 2; el de -2 es 2. En general el valor absoluto de un número y su opuesto son iguales.

Definición

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

observa pues que el valor absoluto de un número real siempre es positivo, a menos que el número sea cero.

Ejemplo 44:

a) $|5| = 5$

b) $|3 + \sqrt{2}| = 3 + \sqrt{2}$

c) $|-12| = -(-12) = 12$

d) $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$

e) $|0| = 0$

Dado el intervalo $(-2,2)$, podemos darnos cuenta que el valor absoluto de cualquier punto de este intervalo es menor que 2. Es decir

$$x \in (-2,2) \Longleftrightarrow |x| < 2$$

y resulta que si

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Longleftrightarrow |x| > 2$$

Lo anterior nos ayuda a comprender mejor la aplicación de las dos propiedades fundamentales que nos permiten resolver desigualdades con valor absoluto.

Si $a > 0$ entonces

1) $|x| < a \qquad -a < x < a$

2) $|x| > a \qquad x < -a$ ó $x > a$

o bien

1) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

y

2) $|x| \geq a \iff x \leq -a$ ó $x \geq a$

Ejemplo 45:

Resolver la desigualdad

$$|x-2| \leq 3$$

Solución

$$|x-2| \leq 3 \iff -3 \leq x-2 \leq 3$$

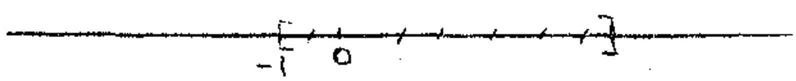
esta desigualdad se puede resolver simultáneamente de la siguiente manera.

$$-3 \leq x-2 \leq 3 \implies -3+2 \leq x \leq 3+2$$

es decir

$$|x-2| \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 5 \iff x \in [-1,5]$$

gráfica



Ejemplo 46:

Resolver la desigualdad

$$|2x^2-4| > 12$$

Solución:

$$|2x^2 - 4| > 12 \iff 2x^2- 4 > 12 \quad \text{ó} \quad 2x^2-4 < -12$$

Vamos a resolver la desigualdad analíticamente.

Caso 1:

$$2x^2 - 4 > 12$$

$$2x^2 - 16 > 0$$

$$x^2 - 8 > 0$$

$$(x- 2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) > 0$$

1.a $\left.\begin{array}{l} x-2\sqrt{2} > 0 \implies x > 2\sqrt{2} \\ \text{y} \\ x+2\sqrt{2} > 0 \implies x > -2\sqrt{2} \end{array}\right\| \implies x > 2\sqrt{2}$

1.b $\left.\begin{array}{l} x-2\sqrt{2} < 0 \implies x < 2\sqrt{2} \\ \text{y} \\ x+2\sqrt{2} < 0 \implies x < -2\sqrt{2} \end{array}\right\| \implies x < -2\sqrt{2}$

Solución parcial (Caso 1) $S_1 = (-\infty\ ,\ -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}\ ,+\infty)$

Caso 2

$$2x^2-4 < -12$$

$$2x^2+8 < 0$$

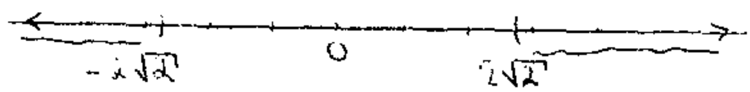
pero $2x^2+8 < 0 \implies x \in \emptyset \ldots$ Luego $S_2 = \emptyset$

finalmente $S = S_1 \cup S_2$

Es decir $S = (-\infty\ ,\ -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty) \cup \emptyset$

$= (-\infty\ ,\ -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}\ , +\infty)$

gráfica



Ejemplo 47:

Resolver la desigualdad

$$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| \leq 1$$

Solución:

$$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{3x}{x^2-4} \leq 1$$

resolviendo las 2 desigualdades a partes, tenemos

I $\quad -1 \leq \dfrac{3x}{x^2-4} \implies \dfrac{3x}{x^2-4} \geq -1$

$$\frac{3x}{x^2-4} + 1 \geq 0$$

$$\frac{3x+x^2-4}{x^2-4} \geq 0$$

$$\frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

Dividimos a R en los intervalos

$(-\infty\ ,\ -4)$; $(-4,\ -2)$; $(-2,1)$; $(1,2)$; $(2,\ +\infty)$

Luego sea $P = \dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$

	$(-\infty\ ,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x+4	-	+	+	+	+
x+2	-	-	+	+	+
x-1	-	-	-	+	+
x-2	-	-	-	-	+
P	+	-	+	-	+

Solución de la primera desigualdad

$$S_1 = (-\infty,-4) \cup (-2,1) \cup (2,+\infty) \cup \{-4,1\}$$

$$S_1 = (-\infty,-4] \cup (-2,1] \cup (2,+\infty)$$

Segunda desigualdad

$$\frac{3x}{x^2-4} \leq 1 \implies \frac{3x}{x^2-4} - 1 \leq 0$$

$$\frac{3x-x^2+4}{x^2-4} \leq 0$$

$$\frac{x^2-3x-4}{x^2-4} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)} \leq 0$$

Dividamos a R en los intervalos

$(-\infty,-2)$; $(-2,-1)$; $(-1,2)$; $(2,4)$;$(4,+\infty)$.

Sea $P = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}$

Tenemos que:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
x+2	-	+	+	+	+
x+1	-	-	+	+	+
x-2	-	-	-	+	+
x-4	-	-	-	-	+
P	+	-	+	-	+

Solución de la segunda desigualdad

$$S_2 = (-\infty,-2) \cup (-1,2) \cup (4,+\infty) \cup \{-1,4\}$$

$$S_2 = (-\infty,-2) \cup [-1,2) \cup [4,+\infty)$$

La solución de la desigualdad es

$$S = S_1 \cap S_2$$

es decir

$$S = \big((-\infty,-4] \cup (-2,1] \cup (2,+\infty)\big) \cap \big((-\infty,-2) \cup [-1,2) \cup [4,+\infty)\big)$$

Sean A_1, A_2 y A_3 tales que

$$A_1 = \big((-\infty,-4] \cap (-\infty,-2)\big) \cup \big((-\infty,-4] \cap [-1,2)\big) \cup \big((-\infty,-4] \cap [4,+\infty)\big)$$

$$A_1 = (-\infty,-4] \cup \emptyset \cup \emptyset$$

$$A_1 = (-\infty,-4]$$

$$A_2 = \big((-2,1] \cap (-\infty,-2)\big) \cup \big((-2,1] \cap [-1,2)\big) \cup \big((-2,1] \cap [4,+\infty)\big)$$

$$A_2 = \emptyset \cup [-1,1] \cup \emptyset$$

$$A_2 = [-1,1]$$

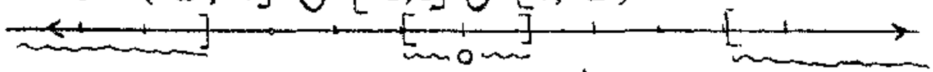
$A_3 = \big((2,+\infty) \cap (-\infty,-2)\big) \cup \big((2,+\infty) \cap [-1,2)\big) \cup \big((2,+\infty) \cap [4,+\infty)\big)$

$A_3 = \emptyset \cup \emptyset \cup [4,+\infty)$

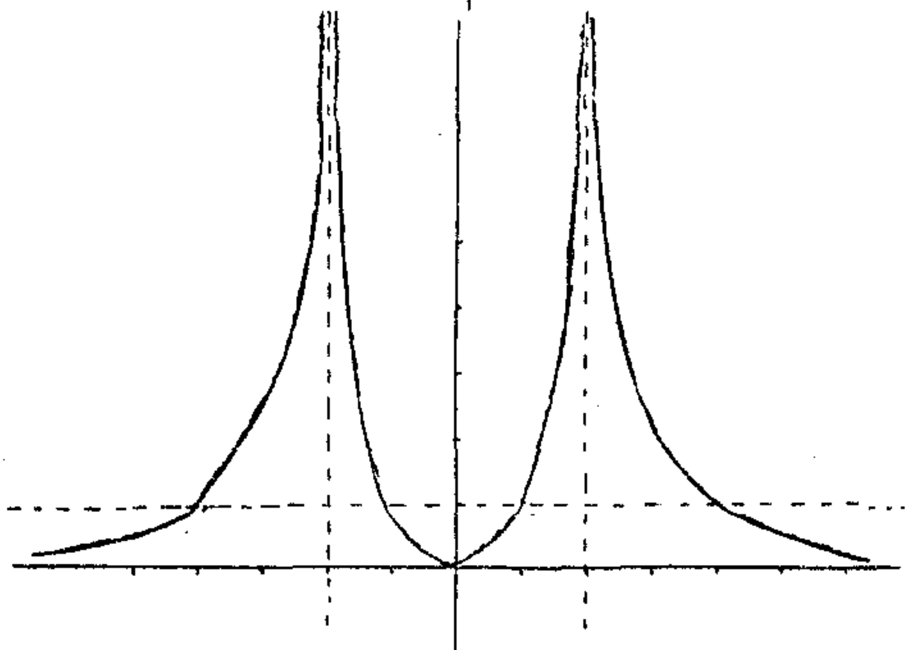
$A_3 = [4,+\infty)$

Luego

$$S = (-\infty,-4] \cup [-1,1] \cup [4,+\infty)$$



Veamos la gráfica de $f(x) = \left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|$ en el plano cartesiano



como puedes observar, la ordenada de la función $f(x) = \left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|$, es menor o igual que uno, en el mismo conjunto solución de la desigualdad $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right| \leq 1$

Ejemplo 48:

Resolver la desigualdad

$|x-3| < -2 \quad 0)$

Solución:

El valor absoluto de $|x-3|$ es positiva o a lo sumo igual a cero; por tanto $|x-3|$ no puede ser negativa, es decir

$|x-3| \quad -2 \Longrightarrow x \in \emptyset$

Entonces la solución de la desigualdad

$|x-3| < -2$ es el conjunto vacío $\emptyset$.

Debes observar que la solución de la desigualdad

$|x-3| > -2$ es por tanto R.

TAREA 8

PRACTICA

8.1 a) $|6| =$ ____________

b) $|3 - \sqrt{5}| =$ ________

c) $|-21| =$ __________

8.2 a) $|x| \leqslant 3$ es equivalente a las desigualdades____________

b) Luego el conjunto solución es__________________

8.3 a) $|x| > 2$ es equivalente a las desigualdades

_________________.

b) Por tanto el conjunto solución es _____________

8.4 La desigualdad $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| \geqslant 2$ equivale con las desigualdades

$\frac{x+1}{x-2} \leqslant -2$ ó ________________

8.5 Al comparar la primera desigualdad con cero resulta

__________________.

8.6 Construye el cuadro para resolver la primera desigualdad.

8.7 La solución a la desigualdad $\frac{x+1}{x-2} \leqslant -2$ es por tanto el conjunto__________________

8.8 Al comparar la segunda desigualdad con cero, resulta

____

8.9 Construye el cuadro para resolver esta segunda desigualdad

8.10 Por tanto la solución de la desigualdad

$\frac{x+1}{x-2} \geqslant 2$ es_______________

8.11 La solución a la desigualdad $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| \geqslant 2$ es por tanto:

8.12 a) La solución a la desigualdad

$|x-2| < -2$ es __________________

b) La solución a la desigualdad

$|2x+1| > -5$ es _________________

Compara tus resultados con las respuestas correctas en la siguiente página.

TAREA 8

RETROINFORMACION

8.1 a) $|6| = 6$

b) $|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$

c) $|-21| = 21$

8.2 a) $|x| \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 3$

b) $[-3,3]$

8.3 a) $|x| > 2 \iff x < -2$ ó $x > 2$

b) $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

8.4 $\frac{x+1}{x-2} \geq 2$

8.5 $\frac{3(x-1)}{x-2} \leq 0$ ó bien $\frac{x-1}{x-2} \leq 0$

8.6

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x-1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$\frac{x-1}{x-2}$	+	-	+

8.7 $[1,2)$

8.8 $\frac{x-5}{x-2} \leq 0$

8.9

	$(-\infty,2)$	$(2,5)$	$(5,+\infty)$
$(x-2)$	-	+	+
$(x-5)$	-	-	+
$\frac{x-5}{x-2}$	+	-	+

8.10 $(2,5]$

8.11 $[1,2) \cup (2,5]$ ó $[1,5] - \{2\}$

8.12 a) $\emptyset$. El conjunto vacío, pues el valor absoluto de ningún número real puede ser negativo.

b) R. El conjunto de los números reales, pues el valor absoluto de cualquier número real es positivo y por tanto mayor que -5.

Muy bien, te felicitamos por haber cubierto todo el material. Te invitamos ahora a realizar la prueba en desigualdades, que te proporcionará tu profesor.

REVISION DE LA UNIDAD DE AUTOINSTRUCCION

INSTRUCCIONES:

Por favor, revise la unidad de autoinstrucción. Nos interesa que ud. identifique las partes donde hemos fracasado en proveer una adecuada instrucción. Siéntese libre de comentar cualquier tarea en todas sus partes; información, práctica (s) y retroinformación (e).

Esta revisión de datos será estudiada con gran interés, porque deseamos pulir el trabajo en todas sus fases y presentar a los estudiantes futuros un trabajo que contenga más aciertos y un mínimo de errores. Ayúdenos!

Tarea # ______________ OBSERVACIONES

INFORMACION____
EJEMPLOS ____
PRACTICAS____
RETROINFORMACIONES_____________________________________

Tarea # ______________
INFORMACION____
EJEMPLOS____
PRACTICAS____
RETROINFORMACIONES_____________________________________

Qué sugiere Ud para mejorar esta unidad de autoinstrucción?

__________acortarla _______dar instrucciones más claras

__________alargarla _______reducir terminología técnica

__________hacerla menos confusa ______hacerla más interesante

OBSERVACIONES ADICIONALES:Escríbalas en el reverso de la hoja.

4- EJECUCION DE LAS ALTERNATIVAS PROPUESTAS

Para ejecutar y evaluar las alternativas propuestas, seleccionamos cuatro grupos de control que recibieron el mismo contenido de desigualdades, pero diferentes técnicas de enseñanza.

i- Grupo A.

Técnica Empleada: Clases Expositivas.

Número de Estudiantes: 34.

Metodología:
1- El profesor realizaba la exposición de los temas en la forma tradicional.
2- El profesor resolvía las dudas surgidas durante las explicaciones.
3- La práctica de problemas era a nivel grupal.
4- El profesor resolvía algunos ejemplos y enviaba a algunos alumnos al tablero.
5- No se hacía un reforzamiento del contenido.

ii- Grupo B

Técnica Empleada: Clases Expositivas. Grupos dirigidos.

Número de Estudiantes: 25

Metodología:
1- El profesor motivaba el tema al grupo.
2- Presentaba los objetivos de la Unidad del grupo.
3- El profesor realizaba la presentación del tema por clases expositivas.

4- Se dividía el grupo Total, en pequeños grupos de 5 estudiantes.

5- Las prácticas en cada grupo eran dirigidas por un jefe de grupo (seleccionado por el profesor) bajo la guía del profesor y de un profesor asistente.

6- Las dudas y dificultades de cada estudiante eran resueltas a nivel de estudiante por el jefe de grupo o por los profesores.

7- Cada estudiante participaba en la resolución de problemas a nivel de grupo.

iii- Grupo C.

Técnica Empleada: Enseñanza Programada.

Número de Estudiantes: 10

Metodología: 1- Los estudiantes recibieron el folleto de autoinstrucción y se les informó que el contenido sería evaluado.

2- No hubo ningún tipo de orientación. El esdiante no recibió otro tipo de información hasta el momento de ser evaluado.

iv.- Grupo D.

Técnica Empleada: Enseñanza Programada. Grupos Dirigidos.

Número de Estudiantes: 35.

Metodología: 1- Los estudiantes recibieron el folleto de autoinstrucción.

2- Se explicó a los alumnos la forma en que debían estudiar en el folleto y se les recomendó revisar los objetivos específicos.

3- El profesor realizaba un seguimiento en el avance del grupo. El alumno estudiaba el contenido correspondiente en casa. Al día siguiente, el profesor daba explicaciones precisas del tema con el objeto de reforzar el contenido.

4- En el período de prácticas se dividía al grupo en pequeños grupos de 4 ó 5 estudiantes. Durante este período el profesor era ayudado por 2 profesores asistentes.

5- Se promovía en los pequeños grupos las discusiones sobre el contenido y la resolución de los problemas de práctica. Estas acciones eran supervisadas por los profesores quienes resolvían las dudas surgidas en el grupo.

Las condiciones en que fueran tratados los grupos y la motivación que propició el profesor, fueron factores que decidieron en el aprovechamiento académico de cada grupo. En efecto, las mejores condiciones se propiciaron al grupo D, luego al grupo B; el grupo A recibió atenciones regulares y el grupo C no fue atendido. Los grupos B y D fueron motivados constantemente, mientras que los grupos A y C no fueron motivados en ningún momento.

Los resultados de cada grupo lo veremos en detalle más adelante, pero por ahora adelantaremos que los mejores resultados se obtuvieron en los grupos D y B., y en los grupos C y A el aprovechamiento académico fue sumamente bajo.

Para evaluar objetivamente la técnica enseñanza-programada y compararla con el método tradicional de clases expositivas, vamos a evaluar por separado el documento preparado y el método en sí; pues consideramos que la preparación del documento influyó en el aprovechamiento y rendimiento de los estudiantes.

4.1 Evaluación del Documento Elaborado

En la elaboración del folleto, implementado con la técnica de la enseñanza-programada nos documentamos y nos asesoramos por profesores conocedores de esta técnica de enseñanza a nivel universitario. El contenido matemático lo desarrollamos cuidadosamente y procuramos redactar el documento lo mejor posible. Antes del tiraje, revisamos nuevamente el documento y corregimos los errores encontrados. A pesar del cuidado que tuvimos en la confección del folleto, en la evaluación del documento, los estudiantes encontraron varios errores que a continuación señalamos:

i- Tarea No.4. En la retroinformación había dos errores:

Item 4·3·b y 4·3·d.

ii- Tarea No.5. En la retro-información había un error:

Item 5·6.

iii- Tarea No.6. En la retro-información había un error:

Item 6·8.

iv- Tarea No.7. En la retro-información había un error:

Item: 7·1.

Además de los errores anteriores, los estudiantes (Grupos C y D) señalaron que:

i- Se debe alargar las secciones de práctica.

ii- Se deben proporcionar instrucciones más claras.

iii- Se debe reducir la terminología técnica.

iv- El documento resultaba interesante y novedoso.

v- En general completo y bien elaborado.

Cabe señalar que la evaluación del documento fue hecha durante el período de estudio del folleto.

4.2 Evaluación del Método

Después de haber sido utilizado el folleto y aplicado el método de la enseñanza-programada, este método fue sometido a evaluación por parte de los estudiantes. A los estudiantes se les pidió objetividad en sus apreciaciones y que evaluaran la técnica de enseñanza. Debido a las condiciones de los grupos C y D sus apreciaciones difirieron sobre el método, aunque poco y por lo tanto preferimos separar las opiniones de los dos grupos. Vale la pena señalar que estamos presentando las opiniones más comunes de los estudiantes. El hecho de que algunas opiniones parezcan contrarias se debe a que son diferentes estudiantes.

<u>Grupo C</u>

i- El método es bueno, siempre y cuando se oriente al estudiante.

ii- El método en sí es excelente, pero el contenido es un poco confuso.

<u>Grupo D</u>

i- Magnífico método de estudio, le permite al estudiante profundizar en conceptos que en clases (clases expositivas) no quedan claros.

ii- Es una forma orientada de estudiar, donde se excluyen las presiones externas.

iii- Es muy bueno el método, pues permite al estudiante avanzar a su propio ritmo.

iv- Es un método que motiva al estudiante. lo cual le permite estudiar cómodamente, y en el lugar que se considere conveniente.

v- El método es apropiado y efectivo en cada estudiante porque nos indica los objetivos que debemos alcanzar.

vi- Antes de estudiar en el documento, el profesor debe hacer una explicación o introducción del tema.

vii- El método es bueno, pero no se considera a los estudiantes que por su base deficiente no lo puede captar todo.

viii- Es un método recomendable, si el material ofrecido es asequible al estudiante y se diseña el documento en forma adecuada.

Además de las opiniones anteriores proporcionadas por los alumnos en la evaluación de la técnica enseñanza-programada, en general, ellos recomiendan que este método de enseñanza se debe adoptar en todos los otros cursos que se dictan en la Universidad.

4.3 Evaluación del Aprovechamiento del Contenido

Con el fin de comparar entre sí la eficacia de los técnicos de enseñanza aplicadas, y las condiciones en que fueron implementadas estas técnicas, efectuamos una evaluación del aprovechamiento académico de cada uno de los cuatro grupos sobre el contenido de desigualdades. La evaluación se efectuó en base a los objetivos específicos señalados en el folleto de auto-instrucción elaborado. El puntaje total de la prueba fue de cincuenta (50), puntos. A los 4 grupos fue aplicada la misma prueba. A continuación la prueba.

EXAMEN DE DESIGUALDADES

PROFESOR:____________________

FECHA:________________________

I.- Señala en la recta real, el signo de la expresión $x-5$.

II.- Resuelve la desigualdad $2x+3 \geq 1$.

Indica la solución sobre la recta real.

III.- Resuelve la desigualdad $5x^2 - 3x-8 \leq 4x^2 - 5x$

Indica la solución sobre la recta real.

IV.- Resuelve la desigualdad

$$\frac{(x+3)(x-5)}{(x-8)(x+1)} \geq 0$$

Mediante un cuadro, donde se establezca el signo de la expresión $\frac{(x+3)(x-5)}{(x-8)(x+1)}$ en los diferentes intervalos de la recta real determinados por los números que anulan cada uno de los factores de la expresión anterior.

Indica la solución sobre la recta real.

V.- Resuelve la desigualdad $\left|\frac{x}{x+3}\right| \leq 2$

Indica la solución sobre la recta real.

4.3.1 Cuadros de los Resultados En los 4 grupos.

En los cuadros siguientes mostraremos los resultados de cada grupo y luego haremos un estudio comparativo de los resultados.

Explicaciones:

F Menos de 30 puntos

D desde 30 hasta 35 puntos

C desde 35.1 hasta 40 puntos

B desde 40.1 hasta 45 puntos

A desde 45.1 hasta 50 puntos

CUADRO No. 8

RESULTADO DE LA PRUEBA APLICADA AL GRUPO A

Nota	Nº de Estudiante	Porcentaje
A	1	2.94%
B	3	8.82%
C	3	8.82%
D	3	8.82%
F	24	70.59%
TOTAL	34	100 %
Promedio del Grupo	23/50	

CUADRO No. 9

RESULTADO DE LA PRUEBA APLICADA AL GRUPO B

Nota	Nº de Estudiantes	Porcentaje
A	6	24%
B	5	20%
C	3	12%
D	5	20%
F	6	24%
TOTAL	25	100%
Promedio del Grupo	$\frac{36,6}{50}$	

CUADRO No. 10

RESULTADO DE LA PRUEBA APLICADA AL GRUPO C

Nota	Nº de Estudiantes	Porcentaje
A	1	10%
B	1	10%
C	1	10%
D	1	10%
F	6	60%
TOTAL	10	100%
Promedio del Grupo:	$\frac{31}{50}$	

CUADRO No. 11

RESULTADO DE LA PRUEBA APLICADA AL GRUPO D

Nota	Nº de Estudiantes	Porcentaje
A	22	62.86%
B	7	20%
C	1	2.86%
D	2	5.7%
F	3	8.57%
TOTAL	35	100%
Promedio del Grupo: $\frac{44}{50}$		

Volvemos a reiterar que a pesar de las diferencias tan marcadas en los resultados de los cuatro grupos, la prueba fue la misma.

4.3.2 Estudio Comparativo De los Resultados en los 4 Grupos.

i- Grupos A y B.

Como podemos apreciar en los cuadros 8 y 9, el aprovechamiento académico del grupo A fue sumamente bajo (apenas el 20.5% aprobó el examen con nota superior a 35 puntos) mientras que el aprovechamiento académico del grupo B fue relativamente aceptable (56% del grupo aprobó el examen con nota superior a 35 puntos). Recordemos que la técnica de enseñanza en los 2 grupos fue la misma (clases expositivas). La diferencia entre los dos grupos radica en:

a- La atención brindada a cada grupo

b- La motivación dada a cada grupo

c- La metodología empleada en las sesiones de práctica.

Por la diferencia en los resultados de cada grupo, concluímos que la motivación y las sesiones de práctica brindadas a un grupo influye bastante en el aprovechamiento académico del contenido.

ii- Grupos A y C

Al grupo C se le entregó el folleto de auto-instrucción, pero sin motivar al grupo y sin brindarle ningún tipo de orientación. Además el grupo nunca fue atendido por el profesor. Podemos observar que el rendimiento del Grupo fue bajo, (sólo el 30% del grupo aprobó satisfactoriamente), pero superior al del grupo A. Estos datos muestran que en condiciones semejantes la técnica "enseñanza-programada" es mejor que la técnica "clases expositivas".

iii- Grupos A y D

Estos son casos opuestos. El aprovechamiento académico del grupo D fue bastante alto (85.73% del grupo aprobó el examen satisfactoriamente). Es cierto que mientras el grupo A fue prácticamente mal atendido, el grupo D fue muy bien atendido pero los resultados indican que la técnica enseñanza-programada bien orientada es superior a la enseñanza por clases expositivas. Cuando comparemos los grupos B y D podremos obtener mejores conclusiones, pues la atención brindada a los dos grupos fue semejante.

iv- Grupos B y C

Por los cuadros 9 y 10 podemos apreciar que los resultados del grupo B fueron superiores a los del grupo C. Esto indica que los resultados con la técnica "clases expositivas" fueron superiores a los resultados con la técnica "enseñanza-programa". Podemos concluir que las condiciones que causaron el bajo aprovechamiento en el grupo C fueron:

a- Falta de orientación

b- Falta de Motivación

c- Fallas técnicas en la elaboración del folleto de auto-instrucción.

d- Falta de sesiones de práctica.

Cabe en este momento señalar que el grupo C estaba consciente que el contenido del tema de desigualdades no se tomaría en cuenta para la nota semestral y que su participación en el proyecto era voluntaria. Por lo anterior pensamos que los integrantes de este grupo no estaban realmente motivados a estudiar el contenido de este folleto. En los grupos A, B y D la prueba era sumativa, es decir que se tomaba en cuenta para la nota semestral, mientras que en el grupo C, el resultado de la prueba nofounaría parte de la nota semestral.

v- Grupos B y D

Los grupos B y D resultan ser los más interesantes para analizar, pues las atenciones brindadas a cada grupo fueron esencialmente las mismas. La única diferencia real entre los dos grupos fue la técnica de enseñanza aplicada. En los cuadros 9 y 11 podemos apreciar que el aprovechamiento con la técnica "enseñanza-programada" fue superior al aprovechamiento con la técnica "clases-expositivas". En efecto, mientras que en el grupo B el 76% aprobó el examen; en el grupo D el 91.43% aprobó lo que hace una diferencia de 15.43%. Ya anteriormente habíamos señalado, que en el grupo B el 56% del grupo había aprobado satisfactoriamente, mientras que en el grupo D el 85.73% aprobó satisfactoriamente lo que hace una diferencia de casi el 30%. Estos datos nos hacen pensar que un grupo que se le aplique la "enseñanza-programada, pero bien orientada, muestra un mayor aprovechamiento que otro grupo en el cual se emplee la técnica de "clases expositivas".

vi- Grupos C y D

La diferencia de los resultados en los grupos C y D es marcada, a pesar que la técnica empleada en los dos grupos es la misma. Consideramos que las justificaciones de la diferencia en los resultados de los dos grupos son:

a- Falta de Motivación

b- Falta de orientación y

c- Falta de sesiones de práctica en el grupo C.

En síntesis y analizando globalmente los resultados de los cuatro grupos, opinamos que:

a- La técnica de enseñanza-programada.

b- La motivación del alumno por el estudio, y

c- La ayuda prestada por el profesor al grupo (en relación a explicaciones, aclaración de dudas, guía en la resolución de problemas y la cantidad y tipo de sesiones de práctica).

Fueron los principales factores que influyeron positivamente en el aprovechamiento del estudiante.

Luego de desarrollada la unidad de desigualdades, los 4 grupos fueron atendidos por igual. El cuadro No. 12 a continuación muestra los resultados al final del semestre.

CUADRO No. 12

RESULTADOS AL FINAL DEL SEMESTRE DE

LOS 4 GRUPOS CONTROL

Grupo	Nº de Estudiante que aprobaron	Porcentaje
A	14	41.72%
B	14	56%
C	6	60%
D	24	68,57%

Del cuadro anterior, podemos apreciar que los resultados entre los grupos al final del semestre no difieren tanto, como en la prueba sobre el contenido de Desigualdades. Podemos pues deducir que los resultados en la prueba se debieron a la técnica de enseñanza empleada y las condiciones en que fue realizado el proceso enseñanza-aprendizaje en cada uno de los 4 grupos de control.

5- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Dentro del panorama de nuestro sistema educativo, hemos analizado la problemática de la enseñanza del cálculo en la Universidad. Podemos señalar que la causa fundamental de la gran cantidad de fracasos radica en el propio sistema. Sistema este, que no motiva al alumno y que prácticamente obliga al docente a utilizar como única técnica de enseñanza el sistema tradicional de exposición de temas frente a un grupo de estudiantes desorientados. Durante el desarrollo de este proyecto, pudimos observar que el solo hecho de presentar una técnica de enseñanza diferente a la tradicional fue motivador para el alumno. La investigación llevada a cabo, nos compromete a recomendar a nuestros colegas profesores a ser agentes dinámicos, creativos, transformadores y no limitarse a ser apenas simples repetidores de los conocimientos que aparecen en los libros. Opinamos que en el proceso enseñanza-aprendizaje, no existe categóricamente un método de enseñanza mejor que los otros; para un grupo dado una técnica de enseñanza puede ser más eficaz que otra. El papel del profesor es determinar la técnica o técnicas de enseñanza que aplicadas a un grupo son las más eficaces. El Profesor debe ser un investigador y descubrir un medio que permita a los estudiantes lograr el mayor provecho posible de los contenidos que se han de enseñar. Sin embargo, en la realidad de nuestro sistema, el profesor está recargado de horas y de estudiantes, lo cual dificulta la labor del docente y mucho menos le permite realizar las acciones que aquí le proponemos. Por lo anterior, recomendamos a la organización administrativa del sistema que en la medida de sus posibilidades debe proveer condiciones favorables al docente que le permitan un mejor desempeño oomo docente dinámico y creativo. Al mismo tiempo el sistema debe crear mecanismos que motiven al estudiante de modo que se den mejores condiciones que las actuales en el proceso enseñanza-aprendizaje.

En cuanto a la técnica "enseñanza-programada" a través de folletos de auto-instrucción; la efectividad del mismo depende del grado de elaboración del folleto. Lo ideal sería que el estudiante trabajará con el folleto, sin necesidad de ayuda externa; por lo tanto al aplicar la técnica con un folleto, este debe ser evaluado, revisado y mejorado constantemente. Además, en la investigación que hemos realizado el éxito de la técnica dependió de la ayuda que prestó el profesor al grupo orientándolo y aclarando las dudas surgidas al estudiante sobre el contenido. El Profesor debe guiar al grupo en la solución de problemas durante las sesiones de práctica. En base a los resultados de nuestro trabajo, recomendamos a los profesores que pongan en práctica dentro de sus respectivos grupos la técnica de "enseñanza-programada" como un medio para tratar de mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje.

En relación a la investigación que hemos llevado a cabo, consideramos que es apenas el paso inicial de una lucha que trataremos de superar. Por lo pronto, la tarea inmediata será la de mejorar el documento de auto-instrucción, y brindar al estudiante la oportunidad de estudiar mejor y más libremente que antes con el folleto. Nos proponemos también aumentar el contenido hasta cubrir el material del primer semestre del Cálculo diferencial y seguir analizando la técnica de enseñanza-programada. Trataremos de promover entre nuestros colegas actitudes semejantes, tomando como base nuestras propias experiencias. Nos proponemos crear un círculo científico-educativo por medio del cual trataremos de implementar diferentes técnicas enseñanza-aprendizaje que en la Universidad, a nivel de la enseñanza del cálculo no se han practicado usualmente. Entre otras, podemos recomendar:

i- Enseñanza-programada.

ii- Enseñanza por medios Audio-Visuales.

iii- Grupos Dirigidos (Tipo taller)

iv- Mesas Redondas.

v- Técnica de Proyectos

Posteriormente, cuando tengamos una mayor experiencia, nos proponemos ejecutar proyectos educacionales más amplios, de modo que podamos hacer recomendaciones positivas que incidan en el mejoramiento del proceso enseñanza-aprendizaje a nivel del sistema educativo nacional.

BIBLIOGRAFIA

1- Julie S. Vargas. Formular objetivos Comportamentais Uteis. Editora Pedagógica e Universitaria Ltda. S.P. Brasil 1974.

2- J. Batista Araujo e Oliveira. Tecnología Educacional. Teorías de Instrusao. Editora Vozes Ltda. R.J. Brasil 1975.

3- Centro Regional de Ayuda Técnica. Adiestramiento Eficaz, Una Guía para Instructores. International Textbook Company. 1968. Páginas 9 a 27 y 36 a 52.

4- Ruth Beard. Pedagogía y Didáctica De La Enseñanza Universitaria. Páginas 181 - 197.

5- Rita y Stuart Johnson. Como asegurar El Aprendizaje con Unidades De Auto-instrucción. Fondo Educativo Interamericano S.A. 1974.

6- Thomas S. Nagel - Paul T. Richman. Instrucción Basada En la Capacidad. Editora Trillas México 1974.

7- Comisión Nacional de Reforma Educativa. Informe General. Centro De Impresión Educativa. Panamá 1971. Páginas 1 a 41.

8- Dirección de Planificación Universitaria. Estadísticas Universitarias. Editora Universitaria. Panamá 1978. Páginas 69 a 101.

9- Dirección Nacional de Planeamiento y Reforma Educativa. Ministerio de Educación. Estadística de 1978. Panamá.

10- Luis Leithold. El Cálculo con Geometría Analítica. Editora Harper and Row Latinoamericana. México 1975. Páginas 1 a 17.

11- Edw n Purcell. Cálculo y Geometría Analítica. Editorial Norma. Colombia. Páginas 1 a 19.