

Potências Simbólicas de Ideais Monomiais

Carlos E. N. Bahiano

*Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
13083-970 Campinas, São Paulo, Brasil*

Dissertação submetida para obtenção
do título de Doutor em Matemática Pura
pela Universidade Estadual de Campinas

Orientadores: Aron Simis (PhD, Queen's University, Canada)
Paulo Roberto Brumatti (Doutor, IMPA, Rio de Janeiro)
Data de apresentação: ...20 de julho de 1999

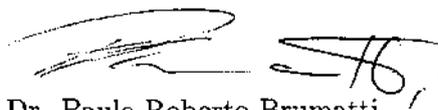
Potências simbólicas de ideais monomiais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por *Carlos Eduardo Nogueira Bahiano* e aprovado pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de julho de 1999



Prof. PhD. Aron Simis
Orientador



Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti
Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Aron Simis
2. Wolmer Verçosa Vasconcelos
3. Philippe Gimenez
4. Israel Vainsencher
5. Antonio José Engler

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do **Título de Doutor em Matemática.**

UNIDADE	BC		
V. CHAMADA:			
V.	Ex.		
FOMBO BC/	38985		
PROC.	229199		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00		
DATA	09/10/99		
N.º CPD			

CM-00126432-8

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bahiano, Carlos Eduardo Nogueira

B149p Potências simbólicas de ideais monomiais / Carlos E. N. Bahiano -
- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientadores : Aron Simis, Paulo Roberto Brumatti

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

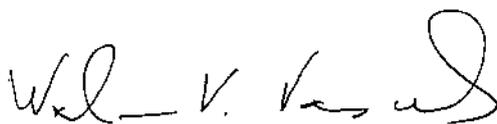
1. Algebra comutativa. 2. Análise combinatória. I. Simis, Aron. II.
Brumatti, Paulo Roberto. III. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV.
Título.

Tese de Doutorado defendida em 20 de julho de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.:



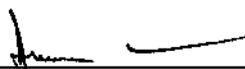
Prof (a). Dr (a). ARON SIMIS



Prof (a). Dr (a). WOLMER VERÇOSA VASCONCELOS



Prof (a). Dr (a). PHILIPPE GIMENEZ



Prof (a). Dr (a). ISRAEL VAINSENCER



Prof (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Resumo

Nesta tese estudamos os geradores mínimos da álgebra de Rees simbólica de ideais gerados por monômios livres de quadrados, dedicando especial atenção ao caso em que o ideal é o ideal de arestas de um grafo simples.

Entre vários outros resultados destacamos a determinação de quais tipos de estruturas contribuem para a determinação e crescimento do tipo de geração da álgebra de Rees simbólica, a construção de vários exemplos de estruturas (grafos) que aparecem como geradores genuínos do ideal de aresta, e a obtenção da melhor quota inferior e superior para o grau de geradores mínimos do módulo simbólico não trivial.

Abstract

We study minimal generators of symbolic Rees algebra to monomial radical ideal, with special attention to the case of edge-ideals of simple graphs. The main results are the determination of which kind of structures contribute to increase the generation type of the symbolic Rees algebra, the construction of several examples of these structures and finally the best range to degrees of minimal generators (fresh generators) of symbolic powers of an edge-ideal.

Agradecimentos e Dedicatória

GOSTARIA DE AGRADECER A TODAS AS PESSOAS QUE DE UMA FORMA OU DE OUTRA CONTRIBUÍRAM PARA A REALIZAÇÃO DESTES TRABALHOS, EM PARTICULAR AO ARON PELA SUA ETERNA PACIÊNCIA E BOA VONTADE, AO BRUMATTI PELA ORIENTAÇÃO INICIAL, AO ALVINO POR SER MEU PROCURADOR DURANTE MINHA AUSÊNCIA, AOS MEUS PAIS, IRMÃOS E AMIGOS PELO CONSTANTE INCENTIVO.

DEDICO ESTE TRABALHO A MINHA MÃE E AO AMIGO CLÁUDIO CASTILHO, QUE INFELIZMENTE PARTIRAM ANTES DA CONCLUSÃO DA TESE.

Ignorar sua Ignorância

Quem conhece a sua ignorância revela a mais alta sapiência.

Quem ignora a sua ignorância vive na mais profunda ilusão.

Não sucumbe a ilusão quem conhece a ilusão como ilusão.

O sábio conhece o seu Não-saber

E essa consciência do Não-saber

O preserva de toda a ilusão.

Índice

1	INTRODUÇÃO	1
2	Potências simbólicas	5
2.1	Operadores diferenciais e o teorema de Zariski-Nagata	6
2.2	Cômputo de potências simbólicas via matrizes jacobianas	7
3	Álgebras e módulos simbólicos	9
3.1	Álgebra de Rees simbólica	10
3.1.1	Tipo de geração (posto simbólico)	10
3.1.2	Condições de finitude	11
3.2	Sub-álgebras graduadas e potências simbólicas	14
4	Geradores do módulo simbólico	17
4.1	Ideais gerados por monômios livres de quadrados	17
4.1.1	O Polinômio condutor de um monômio	17
4.1.2	A função de ordem simbólica	20
5	Grau dos geradores simbólicos mínimos	25
5.1	Grafos e complexos simpliciais	25
5.2	Generalização de ciclos e cones	28
5.2.1	Ciclos e pseudo-ciclos	28
5.2.2	Cones e suspensões	39
5.3	Graus dos geradores de $\mathcal{F}_r(I)$	44
5.4	Outras questões	49
A	Noções de grafos	51
B	Generalidades sobre ideais monomiais	53
B.1	Decomposição primária de ideais monomiais.	53

B.2	Ideal de arestas de um grafo	53
B.3	Anéis de Stanley-Reisner	55
B.3.1	Complexos simpliciais	55
C	Aspectos Computacionais	57
C.1	Cálculo das potências simbólicas	57
C.2	Cálculo dos módulos $\mathcal{F}_r(I)$	58
C.3	Cálculo de grau de incidência, suporte e subgrafos	58

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A noção de potência simbólica de um ideal foi introduzida por W. Krull, nos anos 30. Trata-se de um objeto extremamente natural em Álgebra Comutativa, cujo primeiro significado geométrico foi dado por O. Zariski em sua célebre memória sobre funções holomorfas (“Main Lemma”). Foi ainda Zariski quem aplicou a teoria das potências simbólicas para deduzir, de forma elegante, resultados de estrutura em Álgebra Comutativa (cf. [19]). Cerca de 15-20 anos depois, M. Hochster ([8]) chamou a atenção para o comportamento peculiar dessas potências no caso de certos ideais primos. Em particular, observou que se o ideal era gerado pelos elementos de uma sequência regular, então as potências simbólicas coincidiam com as potências ordinárias. Paralelamente, vários autores deram partida ao estudo abstrato das filtrações simbólicas, introduzindo formalmente a álgebra de Rees simbólica, culminando com o problema da finitude desta álgebra no caso de curvas monomiais em \mathbb{A}^3 . A bibliografia de potências simbólicas enriqueceu-se aceleradamente nas duas últimas décadas, com a descoberta de vários teoremas de estrutura e aplicações a outros problemas.

Por outro lado, com a intensificação dos métodos da função de Hilbert tornou-se acentuado o interesse por ideais monomiais - assim chamados os ideais de um anel de polinômios sobre um corpo cujos geradores são monômios. A interpretação de um tal ideal como fibra especial de uma família, do lado geométrico, só fez aumentar o interesse por suas propriedades. Finalmente, a contribuição espetacular advinda da Combinatória, devida a R. Stanley e vários outros (cf. *Apêndice C*), entronaram os ideais monomiais como parada obrigatória da Álgebra Comutativa recente.

No final da década anterior, Villareal ([17]) e posteriormente, Simis, Vasconcelos e Villarreal ([16]) introduziram sistematicamente o estudo de ideais de arestas de grafos (vide *Apêndice A*). A motivação vinha, parcialmente, dos vários experimentos de Villarreal em sua tese de doutorado de Rutgers University, sob orientação de

Vasconcelos. Neste trabalho, os autores deram uma condição necessária e suficiente em termos da teoria dos grafos, a fim de que o ideal de arestas de um grafo fosse normalmente livre de torção. A condição era, exatamente, que o grafo fosse bipartido.

Abria-se, assim, um horizonte natural para o estudo do comportamento das potências simbólicas de um ideal de arestas admitindo ciclos ímpares. Numa sequência natural, a monografia [14], pontuou várias dessas questões, deixando claro que a grafologia correspondente não era de forma alguma trivial. Algumas delas, em fase preliminar, diziam respeito à natureza dos monômios geradores das potências simbólicas de um ideal monomial radical (isto é, gerado por monômios livres de quadrados) e, mais particularmente, de um ideal de arestas. A experimentação desta fase convergiu para duas questões básicas, de simples enunciado:

Questão 1.1 Fixado um corpo k , dado um ideal $I \subset R = k[\underline{X}]$ gerado por monômios livres de quadrados, então os geradores mínimos do módulo

$$I^{(m)} / (I I^{(m-1)} + I^{(2)} I^{(m-2)} + \dots + I^{(m-1)} I),$$

são monômios livres de quadrados (possivelmente $\{0\}$).

(N.B. $I^{(r)}$ denota a potência simbólica de ordem r do ideal I . Em particular, para $m = 2$, perguntava-se quais os geradores da segunda potência simbólica que não eram produtos de monômios de I)

Questão 1.2 Seja G um grafo. Se I é o ideal de arestas de G , então os ciclos ímpares sem cordas que sejam arestas de G e os cliques de G são os geradores mínimos livres de quadrados dos módulos em 1.1, para os vários $m \geq 2$.

Uma terceira pergunta subjacente, de caráter técnico, dizia respeito à possibilidade de reduzir o problema ao estudo de geradores cujo suporte contivesse todas as variáveis. Mais precisamente, seria preciso verificar a validade da seguinte formulação.

Questão 1.3 Seja $I \subset R = k[\underline{X}]$ um ideal gerado por monômios livres de quadrados. Dado $\underline{X}^\alpha \in I$, colocamos $S = k[\text{Supp}(\underline{X}^\alpha)]$, e $J = I \cap S$. Então,

$$\underline{X}^\alpha \in I^{(r)} \setminus (\underline{X})I^{(r)} \Leftrightarrow \underline{X}^\alpha \in J^{(r)} \setminus (\text{Supp}(\underline{X}^\alpha))J^{(r)}$$

Nesta tese, estudamos as questões acima, bem como outros aspectos da teoria para ideais monomiais radicais. No caso de ideais de arestas, mais manejáveis, este estudo revelou problemas de complexidade inesperada. As respostas às duas primeiras questões são negativas em geral. A terceira questão tem, esperadamente, resposta afirmativa.

A seguir, comentamos nossos resultados, seção por seção, de maneira sucinta. O capítulo 2 é introdutório, revendo algumas técnicas para o cômputo efetivo das potências simbólicas de ideais monomiais radicais.

O capítulo 3, ainda de natureza geral, introduz as noções de módulo simbólico, álgebra de Rees simbólica, tipo de geração e geradores genuínos. Aqui indicamos a relação entre as duas primeiras noções.

No capítulo 3, olhamos um contexto mais especial, em que os anéis são graduados. Na seção 3.2 observamos relações entre potências simbólicas e módulos conormais numa extensão de álgebras graduadas. Esta seção poderá ter interesse para o estudo dos sistemas lineares de hipersuperfícies que se anulam até uma determinada ordem ao longo de variedades projetivas.

Os dois capítulos seguintes contêm o núcleo desta tese.

O capítulo 4 estuda a natureza dos geradores do módulo simbólico de um ideal $I \subset R$ (denotado $\mathcal{F}(I)$), no caso de ideais de não faces de um complexo simplicial, introduzindo as ferramentas básicas necessárias à abordagem feita nos capítulos subsequentes. Introduce-se, aqui, a função de ordem simbólica, explicitando-se seu exato valor para cada monômio e estabelecendo-se a relação entre a ordem de um monômio e a altura do ideal do subcomplexo gerado pelo seu suporte. O Teorema 4.14 determina a ordem simbólica dos geradores de $\mathcal{F}(I)$.

No capítulo 5 consideramos os geradores de $\mathcal{F}(I)$, no caso em que I é um ideal de arestas de um grafo simples. A complexidade familiar de questões da teoria dos grafos se reflete aqui de modo natural. As estruturas típicas em que geradores simbólicos são, por assim dizer, incubados, são os grafos completos e os ciclos ímpares. Um estudo mais cuidadoso mostrará que estas estruturas são básicas mas estruturas mais complexas, montadas sobre estas, introduzem fenômenos imprevistos. Talvez o mais inquietante, neste contexto, seja a existência de geradores genuínos mínimos não livres de quadrados. Isto nos levou a estudar com detalhe outras classes de grafos, tais como cones, suspensões e alguns de seus *isótopos*, que convencionamos chamar de pseudo-ciclos e pseudo-cones. Descrevemos, completamente, os geradores mínimos da álgebra de Rees simbólica nos casos do cone e da suspensão de um grafo G , em função dos geradores da álgebra de Rees simbólica de G . No caso particular da suspensão de G , mostra-se que a álgebra de Rees simbólica tem os mesmos geradores mínimos da álgebra de Rees simbólica do grafo G .

Em 5.3 introduzimos uma versão da familiar *polarização*, adaptada ao presente contexto de ideias de arestas. Polarizando o ideal dado, reduzimos o estudo dos geradores genuínos mínimos ao dos geradores genuínos mínimos que são livres de quadrados. Como consequência, obtemos a melhor cota superior para o grau dos geradores mínimos da potência simbólica de um ideal de arestas.

A subseção 5.4 discorre brevemente sobre questões em aberto, relativas a cotas superiores para o tipo de geração da Rees simbólica.

Capítulo 2

Potências simbólicas

Definição 2.1 Seja R um anel noetheriano. Dado um ideal $I \subset R$, e um inteiro $r \geq 0$, a r -ésima potência simbólica de I , é o ideal

$$I^{(r)} := \{f \in R \mid \exists s \in R \setminus \bigcup_{P \in \text{Ass}(R/I)} P, \text{ com } sf \in I^r\}.$$

O seguinte resultado geral mostra que, em princípio, a determinação de uma potência simbólica reduz-se ao caso de ideais primários.

Proposição 2.2 *Seja R um anel noetheriano e seja $J \subset R$ um ideal sem primos associados imersos. Se $J = \cap_i Q_i$ é a decomposição primária de J , então*

$$J^{(r)} = \cap_i Q_i^{(r)}, \text{ para todo } r \geq 0.$$

Demonstração. Cf., e.g., [13, Apêndice]. □

Para outras considerações e para questões de efetividade de cálculo, utilizaremos dois resultados relevantes, a saber:

- O teorema de Zariski-Nagata.
- O método de A. Simis para o cálculo efetivo de potências simbólicas de ideais polinomiais (em característica 0).

Passamos a uma revisão das idéias principais envolvidas.

2.1 Operadores diferenciais e o teorema de Zariski-Nagata

É conveniente introduzir a seguinte noção.

Definição 2.3 Seja $R = k[X_1 \dots X_n]$. Dado $r \geq 0$, e um ideal $I \subset R$, a r -ésima potência infinitesimal de I é o ideal

$$I^{<r>} := \{f \in R \mid \frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} \in I, \forall \alpha, |\alpha| \leq r-1\}.$$

Esta noção goza de propriedades bastante semelhantes às da potência simbólica. A seguir assinalamos algumas delas.

Proposição 2.4 *Seja $R = k[X_1 \dots X_n]$ e $I \subset R$ um ideal.*

- (i) *Para todo $r \geq 0$, o anulador do R -módulo $I^{<r>}/I^{<r+1>}$ contém I*
- (ii) *Se I não tem primos associados imersos então R/I e $R/I^{<r>}$ têm os mesmos primos associados*
- (iii) *A sequência $\{I^{<r>}\}_{r \geq 0}$ é uma filtração (descendente) multiplicativa.*

Não faremos a demonstração, remetendo o leitor a um resultado mais geral em [9, Proposition 6]. O ingrediente crucial é o caráter recursivo da noção, que isolamos para eventual referência.

Lema 2.5 *Seja $R = k[X_1 \dots X_n]$, $r \geq 0$, e $I \subset R$, um ideal. Então*

$$I^{<r>} = \{f \in R \mid \frac{\partial f}{\partial X_i} \in I^{<r-1>}, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Demonstração. Basta observar que todo operador $\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}$ é composto de derivações ordinárias. □

A semelhança entre $I^{<r>}$ e $I^{(r)}$ não é casual.

Teorema 2.6 (Zariski-Nagata) (char $k = 0$.) *Se k é algebricamente fechado e P é um ideal primo, então $P^{(r)} = P^{<r>}$, $\forall r \geq 0$.*

Demonstração. Cf. [5, Theorem 3.14].

Corolário 2.7 (char $k = 0$.) *Se I é um ideal radical, então $I^{(r)} = I^{<r>}$ para $r \geq 0$.*

Demonstração. Trata-se de uma consequência imediata da Proposição 2.2 e do Teorema 2.6, observando-se que a potência infinitesimal comuta com interseções. □

2.2 Cômputo de potências simbólicas via matrizes jacobianas

Dado um ideal de dimensão pura $J \subset R = k[\underline{X}]$, consideramos a segunda sequência fundamental do módulo das diferenciais de Kähler

$$J/J^2 \rightarrow (R/J)^n \rightarrow \Omega_k(R/J) \rightarrow 0,$$

Escolhendo um sistema de geradores $\mathbf{f} := \{f_1, \dots, f_m\} \subset R$ de J , a aplicação à esquerda é induzida pelo homomorfismo de R/J -módulos livres definido pela matriz jacobiana transposta de \mathbf{f} . O núcleo desta aplicação é o submódulo de torção T/J^2 do conormal J/J^2 . Por definição, vemos que $J^2 \subset J^{(2)} \subset T$. Resulta uma sequência exata de quatro termos

$$0 \rightarrow T/J^{(2)} \rightarrow J/J^{(2)} \rightarrow (R/J)^n \rightarrow \Omega_k(R/J) \rightarrow 0.$$

Em geral, $T \neq J^{(2)}$ (uma exceção familiar é quando J é radical e k é perfeito). A observação crucial em [15], aparentemente despercebida antes, é que, para obter-se um conjunto de geradores de $J^{(2)}$, a sequência dos tres primeiros termos (a partir da direita) é suficiente uma vez que a torção será anulada pela ação da matriz jacobiana transposta. A vantagem do método é que se aplica a ideais puros quaisquer e usa apenas relações de matrizes com elementos no anel R/J .

Dado um conjunto de polinômios $\mathbf{f} := \{f_1, \dots, f_m\} \subset R$, designamos por $\Theta(\mathbf{f})$ a transposta da matriz jacobiana de \mathbf{f} . Para cada inteiro $r \geq 0$, $\Psi^{(r)}(\mathbf{f})$ denotará um “levantamento” (*lifting*) para R , da matriz de relações de $\Theta(\mathbf{f})$ sobre o anel quociente $R/(\mathbf{f})^{(r)}$, enquanto que $I_1((\mathbf{f}) \cdot \Psi(\mathbf{f}))$ denotará o ideal gerado pelos elementos do produto de matrizes $[f_1, \dots, f_m] \cdot \Psi^{(r)}(\mathbf{f})$.

Proposição 2.8 ([15, Proposition 1.3]) *Seja $R = k[\underline{X}]$ um anel de polinômios sobre um corpo de característica zero e $I \subset R$, um ideal. Dado $r \geq 0$, seja $\mathbf{f} := \{f_1, \dots, f_m\}$ um conjunto de geradores de $I^{<r>}$. Então*

$$I^{<r+1>} = I_1((\mathbf{f}) \cdot \Psi(\mathbf{f})) + I \cdot I^{<r>}.$$

Demonstração. Cf. [loc. cit.].

A proposição fornece um método para obter, recursivamente, as potências simbólicas de um ideal $I \subset R = k[\underline{X}]$ tal que $I^{(r)} = I^{<r>}$, para todo $r \geq 0$. Pelo resultado de Zariski–Nagata, este é o caso se I é radical e $\text{char } k = 0$ (ou se $\text{char } k$ é suficientemente alta). É uma questão aberta, em geral, decidir quando se dá a igualdade das duas noções quando uma dessas condições falha.

O método presta-se bem ao cálculo efetivo, permitindo a construção de algoritmos razoavelmente rápidos. Existe uma implementação na forma de “script”

para *Macaulay* ([1]), feita por D. Eisenbud (os scripts são “next-symbolic-power” e “symbolic-power”). A implementação para *Macaulay2* ([7]) está no *Apêndice D.1*.

Capítulo 3

Álgebras e módulos simbólicos

Definição 3.1 Seja R um anel (sempre comutativo com identidade). Dado um ideal $I \subset R$, introduzimos o ideal

$$\Sigma_r(I) = \sum_{i=1}^{r-1} I^{(i)} I^{(r-i)}.$$

O módulo $\mathcal{F}(I) = \bigoplus_{r \geq 2} \frac{I^{(r)}}{\Sigma_r(I)}$ é chamado o *módulo simbólico* (ou *módulo genuíno*) de I .

Observemos que, como $I^{(r)} \subseteq I^{(r-1)}$ para $r \geq 1$, resulta que $\mathcal{F}(I)$ é um R/I -módulo. Fixado o ideal I na discussão, usaremos Σ_r em lugar de $\Sigma_r(I)$ e, analogamente, $\mathcal{F}_r(I) = \frac{I^{(r)}}{\Sigma_r}$.

Os elementos de $\mathcal{F}_r(I) \setminus \Sigma_r$ serão chamados de *geradores simbólicos genuínos de ordem r* , ou simplesmente de *genuínos de ordem r* , enquanto que Σ_r será chamado de *submódulo trivial* de $I^{(r)}$. Observemos que

$$\Sigma_r \subset \Sigma_{r-1} \subset \cdots \subset \Sigma_2.$$

Se (R, \mathfrak{m}) é local ou graduado e se $I \subset \mathfrak{m}$, então $\Sigma_2 \subset \mathfrak{m}I$. Por conveniência, poremos $\Sigma_1 = \mathfrak{m}I$.

3.1 Álgebra de Rees simbólica

Dada uma filtração multiplicativa de ideais $\mathcal{F} = \{I_r\}_{r \in \mathbb{N}}$, a álgebra de Rees associada a \mathcal{F} é o subanel $\mathcal{R}(R, \mathcal{F}) \subset R[t]$ dado por:

$$\mathcal{R}(R, \mathcal{F}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} I_r t^r.$$

Existem três versões que são relevantes em álgebra comutativa e geometria algébrica, são elas:

- A álgebra de Rees (ordinária) de um ideal $I \subset R$, associada à filtração I -ádica, $\{I^r\}_{r \in \mathbb{N}}$.
- A álgebra de Rees simbólica, associada à filtração $\{I^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- A álgebra de Rees associada à filtração dos fechos inteiros das potências de um ideal I .

Derivado de cada uma das estruturas acima temos o anel graduado associado, dado por

$$\mathcal{G}(R, \mathcal{F}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \frac{I_r}{I_{r+1}},$$

e uma das principais preocupações é saber quais as propriedades da álgebra de Rees que são herdadas pelo anel graduado associado e vice-versa. É imediato que se a álgebra de Rees é noetheriana, então o graduado associado também o é. Curiosamente, no caso da álgebra simbólica de certos ideais radicais, estabelecemos a recíproca (cf. Proposição 3.5).

3.1.1 Tipo de geração (posto simbólico)

Se $I = (f_1, \dots, f_m) \subset R$, então é imediato que $\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} I^r t^r = R[f_1 t, \dots, f_m t] = R[It]$. Em particular, a álgebra de Rees associada à filtração I -ádica $\{I^r\}_{r \in \mathbb{N}}$ é finitamente gerada sobre R .

Definição 3.2 Seja $\{I_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ uma filtração do anel R , e \mathcal{R} a álgebra de Rees associada. O *tipo de geração* de \mathcal{R} é o número natural

$$\text{tg} = \text{tg}(\mathcal{R}) := \min\{s \mid \mathcal{R} = R[I_1 t, I_2 t^2, \dots, I_s t^s]\}.$$

Caso tg não exista, diremos que o tipo de geração é infinito. Neste caso, a álgebra de Rees associada não é uma R -álgebra finitamente gerada.

Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(I)}$ é a álgebra de Rees simbólica do ideal I , então o tipo de geração de \mathcal{R} coincide com o posto simbólico $s(I)$ de I , onde $s(I) := \min\{r \mid I^{(m)} = \Sigma_m \ \forall m > r\}$.

Exemplo 3.3 Se I é o ideal de arestas de um ciclo puro com $2h - 1$ ($h \geq 2$) vértices, sem cordas, então o tipo de geração de $\mathcal{R}^{(I)}$ é igual a altura de I . Mas precisamente:

$$\mathcal{R}^{(I)} = R[It, (X_1 \cdots X_{2h-1})t^h].$$

Isto será uma consequência da Proposição 5.8, e do fato que $h = \text{ht } I$.

3.1.2 Condições de finitude

Teorema 3.4 *Seja $I \subset R$ um ideal, R noetheriano. São equivalentes :*

- (1) $\mathcal{R}^{(I)}$ é uma R -álgebra finitamente gerada.
- (2) $\mathcal{F}(I)$ é um $\frac{R}{I}$ -módulo noetheriano.
- (3) $I^{(s)} = \Sigma_s \ s \gg 0$.

Demonstração.

(2 \Leftrightarrow 3) É imediato.

(1 \Rightarrow 3) Sabemos que $\mathcal{R}^{(I)}$ é \mathbb{N} -graduado com ideal homogêneo $\mathcal{R}_+^{(I)} = \sum_{r>0} I^{(r)}t^r$. Neste caso, $\mathcal{R}_+^{(I)}$ é finitamente gerado por elementos homogêneos: F_1, F_2, \dots, F_m respectivamente, de graus d_1, d_2, \dots, d_m e, cada parte homogênea de $\mathcal{R}^{(I)}$ de grau n e dada por: $\mathcal{R}_n^{(I)} = F_1 \mathcal{R}_{n-d_1}^{(I)} + \dots + F_m \mathcal{R}_{n-d_m}^{(I)}$

Se $ft^s \in I^{(s)}t^s = \mathcal{R}_s^{(I)}$, então $f \in \sum_{i=1}^m F_i \mathcal{R}_{s-d_i}^{(I)}$. Tomando $s > \max\{d_1, \dots, d_m\}$ teremos $I^{(s)} = \Sigma_s$.

(3 \Rightarrow 1) Seja $q = \max\{s \mid I^{(s)} \neq \Sigma_s\}$, $I = (f_1, \dots, f_u)$, e sejam, respectivamente, $\{F_{i1}, \dots, F_{iu_i}\}, \{G_{i1}, \dots, G_{im_i}\}$ geradores de $\mathcal{F}_i(I)$ e Σ_i , $i = 2, \dots, q$. Considere o anel $k[\underline{X}, \underline{Z}, \underline{T}, \underline{Y}]$, onde $\underline{Z} = Z_1, \dots, Z_u, \underline{T} = T_{21}, \dots, T_{qu_q}, \underline{Y} = Y_{21}, \dots, Y_{qm_q}$. e o homomorfismo de R -álgebras, dado por:

$$\begin{aligned} \theta : k[\underline{X}, \underline{Z}, \underline{T}, \underline{Y}] &\rightarrow \mathcal{R}^{(I)} \\ Z_k &\mapsto f_k t \\ T_{ij} &\mapsto F_{ij} t^i \\ Y_{ic} &\mapsto G_{ic} t^i \end{aligned}$$

Afirmamos que θ é sobrejetiva. De fato, suponha $s \leq q$ e seja $ft^s \in I^{(s)}t^s$. Sabemos que como R -módulo temos $I^{(s)} = \langle F_{s1}, \dots, F_{su_s}, G_{s1}, \dots, G_{sm_s} \rangle$. Logo para todo elemento $g \in \mathcal{R}^{(I)}$ de grau menor ou igual a q , existe um polinômio $p_g \in k[\underline{X}, \underline{Z}, \underline{T}, \underline{Y}]$

tal que $\theta(p_g) = g$. Suponha $s = q + 1$, como $I^{(s)} = \Sigma_s, \forall ft^s \in I^{(s)}t^s$ podemos escrever $f = \sum_{i=1}^q f_{1i}f_{2s-i}$ com $f_{1i} \in I^{(i)}$ e $f_{2s-i} \in I^{(s-i)}$. Sejam p_{1i} e p_{2s-i} os polinômios para os quais $\theta(p_{1i}) = f_{1i}t^i$ e $\theta(p_{2s-i}) = f_{2s-i}t^{s-i}$. Desta forma, o polinômio $\sum p_{1i}p_{2s-i}$ satisfaz $\theta(\sum p_{1i}p_{2s-i}) = ft^s$. Portanto se $ft^s \in I^{(s)}t^s, s > q$, obtemos após um número finito de substituições um polinômio cuja imagem via θ é ft^s . Concluimos que θ é sobrejetor sobre as partes homogêneas de $\mathcal{R}^{(I)}$ e conseqüentemente, sobre todo $\mathcal{R}^{(I)}$. \square

De um modo geral a condição (3) equivale a dizer que a filtração $\{I^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, é uma *e.p.f.* (“essentially power filtration”) na terminologia de [12, Theorem 2.7].

Proposição 3.5 *Seja R um anel noetheriano e $I \subset R$, um ideal. Se $I^{(q+1)} \subset \Sigma_q$ para $q \gg 0$, então são equivalentes:*

- (a) $\mathcal{R}^{(I)}$, é uma R -álgebra finitamente gerada.
- (b) $\mathcal{G}^{(I)}$ é uma R/I -álgebra finitamente gerada.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Óbvio.

(b) \Rightarrow (a) Queremos mostrar que $I^{(r)} = \Sigma_r(I)$ para todo $r \gg 0$. Como $\mathcal{G}^{(I)}$ é R/I -graduada, podemos escolher um conjunto de geradores homogêneos. Sejam, então, $\{G_j \in I^{(s_j)} \setminus I^{(s_j+1)} \mid 1 \leq j \leq m\}$ tais que os respectivos resíduos geram $\mathcal{G}^{(I)}$ como R/I -álgebra. Ponhamos $d := \max\{s_j \mid 1 \leq j \leq m\}$.

A afirmação é que $I^{(r)} = \Sigma_r(I)$ para $r \geq \max\{q_0, d\}$, onde q_0 é tal que $I^{(q+1)} \subset \Sigma_q \forall q \gg q_0$. Ora, dado $f \in I^{(r)} \setminus I^{(r+1)}$, temos $f = \sum_{j=1}^m H_j G_j + F$, onde o resíduo de H_j em $\mathcal{G}^{(I)}$ é homogêneo de grau $r - s_j \leq r$ e $F \in I^{(r+1)}$. Resulta que $f \in \sum_{j=1}^m I^{(r-s_j)} I^{(s_j)} + I^{(r+1)} \subset \Sigma_r + I^{(r+1)} \subset \Sigma_r$, onde foi usado que $I^{(r+1)} \subset \Sigma_r$ pois $r \geq q_0$. \square

Observação 3.6 veremos adiante que o ideal de arestas de um grafo satisfaz as condições da Proposição 3.5.

Um resultado de Lyubeznik [10] nos diz que se I é ideal gerado por monômios então a álgebra de Rees simbólica é finitamente gerada. A título de ilustração, damos a demonstração deste resultado, com pequenas modificações, para o caso em que I é radical (isto é, gerado por monômios livres de quadrados).

Dado um ideal monomial radical $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$, sejam $P_1, \dots, P_q \in \text{Ass}(I)$ os primos mínimos de I , e ν_{P_i} para $i = 1, \dots, q$ a ordem simbólica associada à filtração $\{P_i^r\}_{r \geq 1}$. Observe que dado \underline{X}^α , temos $\nu_I(\underline{X}^\alpha) = \text{Min}_{i=1, \dots, q} \{\nu_{P_i}(\underline{X}^\alpha)\}$.

Considere o conjunto \mathbb{Z}_+^{n+q} parcialmente ordenado pela ordem induzida pela ordem \geq em cada componente \mathbb{Z} , i.é,

$$(z_1, \dots, z_{n+q}) \geq (z'_1, \dots, z'_{n+q}) \Leftrightarrow z_j \geq z'_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n+q\}.$$

Sabe-se que todo subconjunto não vazio de \mathbb{Z}_+^n admite um conjunto finito de elementos minimais para a ordem induzida. Definimos

$$\mathbb{Z}(I) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu_{P_1}(\alpha) - \nu_I(\alpha), \dots, \nu_{P_q}(\alpha) - \nu_I(\alpha)), \underline{X}^\alpha \in I\}.$$

Um elemento típico de $\mathbb{Z}(I)$ será denotado por $z(\underline{X}^\alpha)$.

Teorema 3.7 *Se $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ é um ideal monomial radical, então $\mathcal{R}^{(I)}$ é finitamente gerada.*

Demonstração. De acordo com 3.4, basta mostrar que existe $m \gg 0$ tal que $I^{(r)} = \Sigma_r$ para $r \geq m$. Sejam $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_t \in I$ monômios tais que $z(\mathcal{M}_1), \dots, z(\mathcal{M}_t)$ são os elementos minimais de $\mathbb{Z}(I)$ e $m := \text{Max}\{\nu_I(\mathcal{M}_1), \dots, \nu_I(\mathcal{M}_t)\}$.

Consideremos $\underline{X}^\alpha \in I^{(r)}$, $r \geq m$. Por hipótese, $z(\underline{X}^\alpha) \geq z(\mathcal{M}_{j_0})$, para algum $j_0 \in \{1, \dots, t\}$. Como a restrição da ordem parcial de \mathbb{Z}_+^{n+q} a \mathbb{Z}_+^n corresponde à divisibilidade de monômios em $k[\underline{X}]$, temos $\underline{X}^\alpha = \underline{X}^\theta \mathcal{M}_{j_0}$, para algum $\theta \in \mathbb{Z}_+^n$. Para $i = 1, \dots, q$ obtemos

$$\nu_{P_i}(\underline{X}^\theta) = \nu_{P_i}(\underline{X}^\alpha) - \nu_{P_i}(\mathcal{M}_{j_0}) \tag{3.1}$$

$$\geq \nu_I(\underline{X}^\alpha) - \nu_I(\mathcal{M}_{j_0}) \tag{3.2}$$

$$\geq r - \nu_I(\mathcal{M}_{j_0})$$

onde a primeira desigualdade resulta de que $z(\underline{X}^\alpha) \geq z(\mathcal{M}_{j_0})$ inclui a condição $\nu_{P_i}(\underline{X}^\alpha) - \nu_I(\underline{X}^\alpha) \geq \nu_{P_i}(\mathcal{M}_{j_0}) - \nu_I(\mathcal{M}_{j_0})$ para todo P_i .

Logo, $\nu_I(\underline{X}^\theta) \geq r - \nu_I(\mathcal{M}_{j_0})$, e conseqüentemente,

$$\underline{X}^\alpha = \mathcal{M}_{j_0} \underline{X}^\theta \in I^{(\nu_I(\mathcal{M}_{j_0}))} I^{(r - \nu_I(\mathcal{M}_{j_0}))} \subseteq \Sigma_r.$$

□

Exemplo 3.8 Seja $I = (XY, XZ, YZ)$.

Os seus primos associados são: $P_1 = (X, Y)$, $P_2 = (X, Z)$ e $P_3 = (Y, Z)$. Neste caso, temos:

$$\nu_{P_1}(a, b, c) = a + b$$

$$\nu_{P_2}(a, b, c) = a + c$$

$$\nu_{P_3}(a, b, c) = b + c$$

$$\nu_I(a, b, c) = \min\{a + b, a + c, b + c\}$$

Segue que

$$\mathbb{Z}(I) = \{(a, b, c, a + b - \nu_I(a, b, c), a + c - \nu_I(a, b, c), b + c - \nu_I(a, b, c)) \mid X^a Y^b Z^c \in I\}.$$

Além disto para cada $X^a Y^b Z^c \in I$ temos apenas quatro possibilidades:

(1) $a = 0$ e $b, c \geq 1$ e isto implica $b + c - \nu_I(a, b, c) \geq 1$. Logo,

$$z(a, b, c) \geq (0, 1, 1, 0, 0, 1).$$

(2) $b = 0$ e $a, c \geq 1$ e isto implica $a + c - \nu_I(a, b, c) \geq 1$. Logo,

$$z(a, b, c) \geq (1, 0, 1, 0, 1, 0).$$

(3) $c = 0$ e $a, b \geq 1$ e isto implica $a + b - \nu_I(a, b, c) \geq 1$. Logo,

$$z(a, b, c) \geq (1, 1, 0, 1, 0, 0).$$

(4) e finalmente, $a, b, c \geq 1$ e isto implica

$$z(a, b, c) \geq (1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Segue que os elementos mínimos de $\mathbb{Z}(I)$ são:

$$\{(0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0)\}$$

Lemos os monômios correspondentes nas três primeiras coordenadas. Obtemos, assim, que a álgebra simbólica é gerada, como $k[\underline{X}]$ -subálgebra de $k[\underline{X}, t]$, pelos elementos $X_1 X_2 t, X_1 X_2 t, X_2 X_3 t, X_1 X_2 X_3 t^2$.

Engenhoso e essencialmente algorítmico, o método se presta pouco a conclusões teóricas gerais. No capítulo 4 veremos outra forma de estudar os geradores da álgebra simbólica.

3.2 Sub-álgebras graduadas e potências simbólicas

Seja B um anel \mathbb{N} -graduado. Poremos $A := B_0$. Seja $J \subset B$ um ideal homogêneo e $I := J_0 = J \cap A$.

Lema 3.9 $J^m \cap A = I^m$ para $m \geq 1$.

Proof. Para qualquer $d \geq 0$, tem-se

$$(J^m)_d = \sum_{i_1 + \dots + i_m = d} J_{i_1} \cdots J_{i_m}.$$

Em particular, para $d = 0$, obtem-se $(J^m)_0 = J_0 \cdots J_0$ (m vezes), o que é I^m por definição. \square

Proposição 3.10 *Sejam A, B, I e J como acima. Então:*

(i) *As inclusões naturais $I^m \subset J^m$, $m \geq 0$, induzem um homomorfismo injetivo de A/I -álgebras graduadas*

$$\text{gr}_I(A) \rightarrow \text{gr}_J(B).$$

(ii) *Se J é um ideal radical e B/J é uma A/I -álgebra livre de torção, então J normalmente livre de torção $\Rightarrow I$ normalmente livre de torção.*

(iii) *Seja $A = k[\underline{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$ (k um corpo de característica zero) e $B = A[\underline{Y}] = A[Y_1, \dots, Y_r]$ (com a graduação canônica onde $B_0 = A$). Se J é um ideal radical, então existem injeções naturais*

$$\text{gr}_{(I)}(A) = \bigoplus_{l \geq 0} I^{(l)} / I^{(l+1)} \rightarrow \text{gr}_{(J)}(B) = \bigoplus_{l \geq 0} J^{(l)} / J^{(l+1)},$$

de A/I -álgebras, e

$$\bigoplus_{l \geq 0} I^{(l)} / \Sigma_l(I) \rightarrow \bigoplus_{l \geq 0} J^{(l)} / \Sigma_l(J),$$

de A/I -módulos.

Demonstração. (i) As aplicações induzidas

$$I^l / I^{l+1} \rightarrow J^l / J^{l+1}$$

são aplicações de A/I -módulos (via a injeção $A/I \rightarrow B/J$). Isto claramente induz uma aplicação de A/I -álgebras $\text{gr}_I(A) \rightarrow \text{gr}_J(B)$. Esta aplicação é injetiva pois $I^l \cap J^{l+1} = I^{l+1}$ para todo l o que, por sua vez, segue imediatamente do Lema 3.9

(ii) Isto é imediato e vale em uma forma mais geral: Se $C \subset D$ são anéis tais que D é uma C -álgebra livre de torção, então qualquer D -módulo que seja livre de torção sobre D , é também livre de torção sobre C .

(iii) Usando o Teorema 2.6, é fácil ver que as igualdades $A \cap J^{(l+1)} = I^{(l+1)}$, valem para todo l . Estas igualdades, por sua vez, implicam as igualdades $I^{(l)} \cap J^{(l+1)} = I^{(l+1)}$, para todo l .

Conseqüentemente, a aplicação natural de A/I -módulos $\text{gr}_{(I)}(A) \rightarrow \text{gr}_{(J)}(B)$ é injetiva. Para mostrar o análogo para os módulos simbólicos, é suficiente verificar as igualdades $A \cap J^{(t)}J^{(l-t)} = I^{(t)}I^{(l-t)}$ (as quais implicam, de forma imediata, as igualdades desejadas, que são: $I^{(t)} \cap J^{(t)}J^{(l-t)} = I^{(t)}I^{(l-t)}$). Mas isto é novamente é imediato pois $J^{(m)}$ é um ideal homogêneo na graduação de $B = A[\underline{Y}]$. Em particular, tem-se $A \cap J^{(t)}J^{(l-t)} = (J^{(t)}J^{(l-t)})_0 = (J^{(t)})_0(J^{(l-t)})_0$ e o termo da direita é igual a $I^{(t)}I^{(l-t)}$ pelos cálculos anteriores. \square

Observação 3.11 Seria de algum interesse saber se o item (iii) da Proposição 3.10 se estende a um contexto mais geral.

Capítulo 4

Geradores do módulo simbólico

4.1 Ideais gerados por monômios livres de quadrados

Seja Δ um complexo simplicial nas variáveis X_1, \dots, X_n . $I = I_\Delta$ o ideal gerado pelos monômios que correspondem às não faces de Δ . Dado um monômio \underline{X}^α , escrevemos $\Delta(\alpha)$ para denotar o subcomplexo induzido pelo suporte de \underline{X}^α , enquanto que $I_\alpha = I \cap k[\text{Supp}(\underline{X}^\alpha)]$ será o ideal das não faces do subcomplexo induzido. Nosso objetivo é estudar os geradores mínimos de $\bigoplus_{r \geq 2} \frac{I^{(r)}}{\Sigma_r(I)}$ e determinar de que maneira eles contribuem para o tipo de geração da álgebra de Rees simbólica. Para isto vamos determinar o exato valor da função de ordem associada à filtração simbólica. Em particular, estabeleceremos uma relação entre a ordem do monômio $X_1 \cdots X_n$ e a altura do ideal monomial I .

4.1.1 O Polinômio condutor de um monômio

A título de notação, dada uma face $G = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}\} \in \Delta$, designaremos o produto $X_{i_1} \cdots X_{i_r}$ por \underline{X}_G . Por definição de Δ e de I_Δ , para qualquer face $G \in \Delta$, tem-se $\underline{X}_G \notin I = I_\Delta$.

Os ideais condutores da forma $(I : X_i)$ detectam uma boa parte da estrutura das vizinhanças dos vértices em Δ e têm sido usados com sucesso na descrição de construções algébricas associadas a I (vide, por exemplo, [4]). É imediato que se F é uma faceta que não contém X_i , então, por maximalidade, $\underline{X}_F \in (I : X_i)$. Em geral, \underline{X}_F não é um gerador mínimo do condutor $(I : X_i)$ uma vez que as faces $G \in \Delta$ tais que $G \cup \{X_i\} \notin \Delta$ têm a prioridade.

Mais geralmente, poderíamos considerar uma face $G \in \Delta$ e averiguar a estrutura do condutor $(I : \underline{X}_G)$. Usando monômios associados a facetas convenientemente

posicionadas relativamente a G , podemos obter certos polinômios regulares módulo I . Precisamente, temos:

Proposição 4.1 *O polinômio*

$$p_a(G) := \underline{X}_G + \sum_{F \cap G \neq G} \underline{X}_F$$

é regular em $k[\Delta] = k[\underline{X}]/I$ com $(I = I_\Delta)$.

Demonstração. Suponhamos que $p_a(G)$ fosse divisor de zero módulo I . Seja P um primo associado de $k[\underline{X}]/I$ contendo $p_a(G)$. Ora, P é gerado pelo complementar de uma faceta $F' \in \Delta$ (vide *Apêndice C*). Então cada um dos monômios constituintes de $p_a(G)$ também pertence a P . Em particular, $\underline{X}_G \in P$ o que implica em dizer que $G \cap F' \neq G$. Logo F' é uma das facetas que contribuem um monômio $\underline{X}_{F'}$ de $p_a(G)$, portanto $\underline{X}_{F'} \in P$. Isto é absurdo pois, por hipótese, P é gerado pelo complementar de F' . \square

Observação 4.2 Por maximalidade das facetas, temos $\underline{X}_G \underline{X}_F \in I$ para toda faceta F tal que $F \cap G \neq G$. Assim, designando $p_c(G) := \sum_{F \cap G \neq G} \underline{X}_F$, vemos que $p_c(G) \underline{X}_G \in I$. Como $\underline{X}_G \notin I$, $p_c(G)$ é divisor de zero módulo I .

Isto sugere a terminologia seguinte.

Definição 4.3 Seja $G \in \Delta$. O polinômio $p_a(G)$ (resp. $p_c(G)$) é o *polinômio adjacente* (resp. o *polinômio condutor*) de G .

A pergunta surge se é possível estender a noção de polinômio condutor a um conjunto $C \subset \{X_1, \dots, X_n\}$ arbitrário de tal forma a se prestar como teste de pertinência $X_1 \cdots X_n \in I$. Uma forma natural de generalizar a expressão acima de $p_c(G)$ seria através de

$$p_c(C) := \sum_{C \not\subseteq F} \underline{X}_F.$$

Por razões que se esclarecerão mais adiante, é conveniente ter uma expressão que atenda ao caso de um *multiconjunto* de variáveis, que seria o adequado para lidar com monômios arbitrários (não necessariamente livres de quadrados). Por esta razão, definiremos:

Definição 4.4 O *polinômio condutor* de um monômio $\underline{X}^\alpha \in k[\underline{X}]$ é o polinômio

$$p_c[\underline{X}^\alpha] := \left(\prod p_a[X_i^{\alpha_i}] \right) - \underline{X}^\alpha - \sum_I,$$

onde \sum_I designa a soma dos monômios de $(\prod p_a[X_i^{\alpha_i}] - \underline{X}^\alpha)$ que pertencem a I .

Proposição 4.5 *Seja $\underline{X}^\alpha \in k[\underline{X}]$. Então:*

- (i) $\underline{X}^\alpha \in (I : p_c[\underline{X}^\alpha])$
- (ii) $p_c[\underline{X}^\alpha]$ é regular em $k[\Delta]$ se, e somente se, $\underline{X}^\alpha \in I_\Delta$.

Demonstração. (i) Em geral, se um monômio \underline{X}^β é tal que $\text{Supp}(\underline{X}^\beta)$ é uma faceta, então, por maximalidade, $X_j \underline{X}^\beta \in I, \forall X_j \notin \text{Supp}(\underline{X}^\beta)$. Resulta, assim, pela definição de $p_c[\underline{X}^\alpha]$, que seus monômios constituintes são da forma

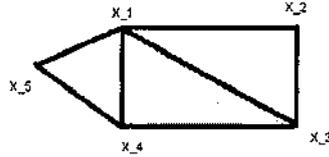
$$X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots X_{i_{r_i}}^{\alpha_{i_{r_i}}} \cdot \underline{X}_F^{|\alpha| - (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{r_i}})},$$

onde $\text{Supp}(X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots X_{i_{r_i}}^{\alpha_{i_{r_i}}}) \subseteq F$, e F é uma faceta de Δ . Segue que $\underline{X}^\alpha \in (I : p_c[\underline{X}^\alpha])$.

(ii) Uma implicação resulta imediatamente do item (i). Reciprocamente, se $p_c[\underline{X}^\alpha]$ não é regular em $k[\Delta]$ e $\underline{X}^\alpha \in I$, então existe uma faceta F para a qual $p_c[\underline{X}^\alpha] \in P_F$. Segue que $p_c[\underline{X}^\alpha] + \underline{X}^\alpha \in P_F$ e isto implica em que $\prod p_a[X_i]^{\alpha_i} \in P_F$. Assim, existiria um índice i tal que $p_a[X_i] \in P_F$. Isto contradiz a Proposição 4.1. \square

Um exemplo simples poderá ser útil para ilustrar esta ordem de idéias.

Exemplo 4.6 *Seja $I_\Delta = (X_2X_4, X_2X_5, X_3X_5, X_1X_2X_3, X_1X_4X_5)$.*



A área hachuriada é uma faceta.

Consideremos o monômio $\underline{X}^\alpha = X_1X_3X_4$. Obtemos $p_c(X_1X_3X_4) = X_1^2X_2^2 + X_2^2X_3^2 + X_1^2X_5^2 + X_4^2X_5^2$ pela Definição 4.4 (enquanto que, pela noção que estenderia naturalmente a Definição 4.3, obteríamos $p_c(X_1X_3X_4) = X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_5 + X_4X_5$). Vemos que, por exemplo, $X_1X_3 \in (I : p_c(X_1X_3X_4)) \setminus I$.

4.1.2 A função de ordem simbólica

Dado um polinômio $f \in k[\underline{X}]$, escreva $f = \sum f_d$, onde f_d é a sua parte homogênea de grau d , na graduação canônica de $k[\underline{X}]$.

Definição 4.7 Dado um polinômio não nulo $f = \sum f_d \in k[\underline{X}]$, e um ideal homogêneo $I \subset k[\underline{X}]$, definimos

$$\begin{aligned} \text{indeg}(f) &:= \min\{d \mid f_d \neq 0\} \\ \text{indeg}(I) &:= \min\{\text{indeg}(g) \mid g \in I \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

Proposição 4.8 *Seja $R = k[\underline{X}]$ um anel de polinômios sobre um corpo de característica zero, e $I \subset R$ um ideal radical. Seja*

$$\begin{aligned} \nu_I : R \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \infty \\ \nu_I(f) &= \text{Max}\{r; f \in I^{(r)}\} \end{aligned}$$

a função de ordem associada à filtração $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$. Então:

- (1) Se I é homogêneo, então $\nu_I(f) \leq \text{indeg}(f) - \text{indeg}(I) + 1$ para todo $f \in R \setminus \{0\}$;
- (2) Escreva $f = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}^n} c_{\sigma} \underline{X}^{\sigma}$, onde $\underline{X}^{\alpha} \neq \underline{X}^{\beta}$, sempre que $c_{\alpha}, c_{\beta} \neq 0$. Se I é monomial, então

$$\nu_I(f) = \min\{\nu_I(\underline{X}^{\sigma}) \mid c_{\sigma} \neq 0\}.$$

Demonstração. (1) Basta utilizar o critério de Zariski–Nagata Teorema 2.6: se $f \in I^{(r)}$ então $\partial^{|\mathbf{b}|} f / \partial \underline{X}^{\mathbf{b}} \in I$ para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\mathbf{b}| \leq r - 1$. Por outro lado temos:

- (1) $\text{indeg}(\partial^{|\mathbf{b}|} f / \partial \underline{X}^{\mathbf{b}}) = \text{indeg}(f) - |\mathbf{b}|$
- (2) $\partial^{|\mathbf{b}|} f / \partial \underline{X}^{\mathbf{b}} \in I \Rightarrow \text{indeg}(\partial^{|\mathbf{b}|} f / \partial \underline{X}^{\mathbf{b}}) \geq \text{indeg}(I)$

Segue, portanto, que $\text{indeg}(f) \geq \text{indeg}(I) + |\mathbf{b}|$, $\forall |\mathbf{b}| \leq r - 1$. Em particular, $r \leq \text{indeg}(f) - \text{indeg}(I) + 1$, como esperávamos.

(2) Segue imediatamente do fato que, neste caso, para todo operador diferencial $\frac{\partial}{\partial \underline{X}^{\alpha}}$, de ordem menor ou igual a $\nu(f) - 1$, tem-se $\frac{\partial f}{\partial \underline{X}^{\alpha}} = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}^n} c_{\sigma} \frac{\partial \underline{X}^{\sigma}}{\partial \underline{X}^{\alpha}} \in I$ se, e somente se, $\frac{\partial \underline{X}^{\sigma}}{\partial \underline{X}^{\alpha}} \in I$, sempre que $c_{\sigma} \neq 0$. Esta última afirmação decorre da aditividade do operador e do fato de I ser monomial. \square

Quando $f = \underline{X}^{\alpha}$, escreveremos por simplicidade $\nu_I(\alpha)$ em lugar de $\nu_I(\underline{X}^{\alpha})$.

No que segue, denotaremos por $\mathfrak{F}(\Delta)$ o conjunto das facetas do complexo simplicial Δ .

Dado $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}$, introduzimos as seguintes notações:

- (i) $\mathcal{B}(\underline{\alpha}) := \{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^n : \underline{X}^{\underline{\beta}} | \underline{X}^{\underline{\alpha}}, \text{Supp}(\underline{X}^{\underline{\beta}}) \in \mathfrak{F}(\Delta(\underline{\alpha}))\}$
- (ii) $\mathbf{b}(\underline{\alpha}) := \text{Max}\{|\beta|; \underline{X}^{\underline{\beta}} \in \mathcal{B}(\underline{\alpha})\}$
- (iii) $j(\underline{\alpha}) = \max\{r : \exists F \in \mathcal{F}(\Delta(\underline{\alpha})), \exists \underline{\beta} \in \mathcal{B}(\underline{\sigma}) \text{ tais que } \underline{X}_F \cdot \underline{X}^{\underline{\beta}} \in I^{(r)}\}$

No ítem (iii) $\sigma_i = \alpha_i - 1 \forall X_i \in \text{Supp}(\underline{X}^{\underline{\alpha}})$. Com esta notação, temos:

Proposição 4.9 *Seja $I \subset k[\underline{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$ um ideal monomial radical e $\underline{X}^{\underline{\alpha}} \in I$. Então*

$$\underline{X}^{\underline{\alpha}} \in (I^{|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha})} : p_c[\underline{X}^{\underline{\alpha}}]).$$

Demonstração. Sabemos que as parcelas de $p_c[\underline{X}^{\underline{\alpha}}]$ são da forma $X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_{m_i}}^{\alpha_{i_{m_i}}} \cdot \underline{X}_F^{|\underline{\alpha}| - (\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{m_i}})}$ onde $\text{Supp}(X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_{m_i}}^{\alpha_{i_{m_i}}})$ é uma faceta de $\Delta(\underline{\alpha})$, contida na faceta $F \in \Delta$. Desta forma, $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{m_i}} \leq \mathbf{b}(\underline{\alpha})$. Ao olharmos uma das parcelas do produto de $\underline{X}^{\underline{\alpha}}$ por $p_c[\underline{X}^{\underline{\alpha}}]$, digamos $\underline{X}^{\underline{\alpha}} \cdot X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_{m_i}}^{\alpha_{i_{m_i}}} \cdot \underline{X}_F^{|\underline{\alpha}| - (\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{m_i}})}$, observamos que são possíveis $|\underline{\alpha}| - (\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{m_i}})$ produtos de não-faces de Δ . Por outro lado, como $\text{Supp}(X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_{m_i}}^{\alpha_{i_{m_i}}})$ é uma face de $\Delta(\underline{\alpha})$, temos que $|\underline{\alpha}| - (\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{m_i}}) \geq |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha})$. \square

Proposição 4.10 *Para todo monômio $\underline{X}^{\underline{\alpha}}$, tem-se $\nu_I(\underline{X}^{\underline{\alpha}}) = |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha})$.*

Demonstração. Se $\underline{X}^{\underline{\alpha}} \notin I$, temos $\nu(\underline{X}^{\underline{\alpha}}) = |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) = 0$.

Suponhamos que $\underline{X}^{\underline{\alpha}} \in I$. Pela Proposição 4.9 e pela Proposição 4.5, (ii), resulta que $|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) \leq \nu_I(\underline{X}^{\underline{\alpha}})$. Imaginemos, por redução ao absurdo, que $|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) < \nu_I(\underline{X}^{\underline{\alpha}})$. Seja $\underline{X}^{\underline{\beta}} \in \mathcal{B}(\underline{\alpha})$ tal que $|\underline{\beta}| = \mathbf{b}(\underline{\alpha})$. Defina $\underline{X}^{\underline{\theta}} = \frac{\underline{X}^{\underline{\alpha}}}{\underline{X}^{\underline{\beta}}}$, e considere a diferencial $\frac{\partial}{\partial \underline{X}^{\underline{\theta}}}$. Temos $|\underline{\theta}| = |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) \leq \nu_I(\underline{X}^{\underline{\alpha}}) - 1$. Pela caracterização das potências simbólicas, via operadores diferenciais, temos $\frac{\partial \underline{X}^{\underline{\alpha}}}{\partial \underline{X}^{\underline{\theta}}} = c \underline{X}^{\underline{\beta}} \in I$, o que contradiz a escolha de $\underline{X}^{\underline{\beta}}$. Logo $\nu_I(\underline{X}^{\underline{\alpha}}) = |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha})$. \square

Corolário 4.11 *Se $\underline{X}^{\underline{\alpha}}$, é livre de quadrados, então $|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) = \text{ht}(I_{\underline{\alpha}})$.*

Demonstração. Neste caso os elementos de $\mathcal{B}(\underline{\alpha})$ são as faces de $\Delta(\underline{\alpha})$, e portanto, $\mathbf{b}(\underline{X}^{\underline{\alpha}})$ é o máximo das cardinalidades das faces de $\Delta(\underline{\alpha})$, o que é obtido exatamente para as facetas maximais de $\Delta(\underline{\alpha})$. Por outro lado, sabe-se que tal cardinalidade é a dimensão de $k[\Delta(\underline{\alpha})] = k[\text{Supp}(\underline{X}^{\underline{\alpha}})]/I_{\underline{\alpha}}$, que por sua vez é igual a $|\underline{\alpha}| - \text{ht}(I_{\underline{\alpha}})$. \square

O que a Proposição 4.10 diz é que o produto das variáveis associadas aos vértices de um complexo simplicial, pertence à potência simbólica de ordem igual à altura h do ideal das não faces, mas não a uma potência simbólica de ordem superior a h .

Proposição 4.12 *Seja Δ um complexo simplicial, $I = I_\Delta$ e $\underline{X}^\alpha \in I$. Tem-se*

$$\mathbf{b}(\alpha) - s \leq \mathbf{b}(\sigma) \leq \mathbf{b}(\alpha) - s + j(\underline{\alpha})$$

onde $s = \dim \Delta(\underline{\alpha}) + 1$, $\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) = \{X_1, \dots, X_m\}$ e $\underline{X}^\alpha = \underline{X}^\alpha / (X_1 \cdots X_m)$. Se, em particular, $\mathbf{b}(\sigma) = \mathbf{b}(\alpha) - s$, então $\underline{X}^\alpha \in I^{(\text{ht } I_\alpha)} I^{(|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\alpha) - \text{ht } I_\alpha)}$.

Demonstração. Como $\underline{X}^\alpha \in I^{(\text{ht } (I_\alpha))} I^{(|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\sigma))}$, resulta

$$m - s + |\underline{\sigma}| - \mathbf{b}(\underline{\sigma}) = \text{ht}(I_\alpha) + |\underline{\sigma}| - \mathbf{b}(\underline{\sigma}) \leq |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha})$$

Logo, $\mathbf{b}(\alpha) - s \leq |\alpha| - m - (|\underline{\sigma}| - \mathbf{b}(\underline{\sigma})) = \mathbf{b}(\sigma)$. Isto prova a primeira desigualdade do enunciado.

Para verificar a segunda desigualdade, consideremos a diferencial $\frac{\partial^\gamma}{\underline{dX}^\gamma} = \frac{\partial^\beta}{\underline{dX}^\beta} \frac{\partial^\beta}{\underline{dX}^\beta}$, onde $\frac{X_1 \cdots X_m}{\underline{X}^\beta}$, é uma faceta maximal de $\Delta(\underline{\alpha})$, e $\frac{X^\alpha}{\underline{X}^\beta} \in \mathcal{B}(\underline{\sigma})$, com $|\underline{\beta}| = |\underline{\sigma}| - \mathbf{b}(\underline{\sigma})$. Como $\frac{X^\alpha}{\underline{X}^\beta \underline{X}^\beta} \notin I^{(j(\underline{\alpha})+1)}$, existe diferencial, $\frac{\partial^\mu}{\underline{dX}^\mu}$ tal que $|\underline{\mu}| = j(\underline{\alpha})$, e $\frac{\partial^\mu}{\underline{dX}^\mu} (\frac{X^\alpha}{\underline{X}^\beta \underline{X}^\beta}) \notin I$. Conseqüentemente, a diferencial $\mathcal{D} = \frac{\partial^\gamma}{\underline{dX}^\gamma} \frac{\partial^\mu}{\underline{dX}^\mu}$, satisfaz $\mathcal{D}(\underline{X}^\alpha) \notin I$. Portanto, $|\mathcal{D}| = |\gamma| + j(\underline{\alpha}) \geq |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha})$. Como $|\underline{\theta}| = m - s$, obtemos:

$$\begin{aligned} m - s + |\underline{\sigma}| - \mathbf{b}(\underline{\sigma}) + j(\underline{\alpha}) &\geq |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) \\ |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\sigma) - s + j(\underline{\alpha}) &\geq |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) \\ \mathbf{b}(\alpha) - s + j(\underline{\alpha}) &\geq \mathbf{b}(\sigma). \end{aligned}$$

Em particular se $\mathbf{b}(\sigma) = \mathbf{b}(\alpha) - s$, então:

$$|\underline{\sigma}| - \mathbf{b}(\underline{\sigma}) = |\underline{\alpha}| - m - \mathbf{b}(\sigma) = |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) - (m - s)$$

□

Corolário 4.13 *Se $\Delta(\underline{\alpha})$ é puro, e $|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) > \text{ht}(I_\alpha)$, então*

$$\underline{X}^\alpha \in I^{(\text{ht } (I_\alpha))} I^{(|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\alpha) - \text{ht } I_\alpha)}.$$

Demonstração. Como $\Delta(\underline{\alpha})$ é puro, podemos escrever $\underline{X}^\alpha = X_1 \cdots X_m \cdot \underline{X}^\alpha$, com $\underline{X}^\alpha \in I$ pois caso contrário, bastaria escolher $\mathbf{F} = (X_{i_1}, \dots, X_{i_{\text{ht}(I_\alpha)}}) \in \mathfrak{F}(\Delta(\alpha))$, contendo $\text{Supp}(\underline{X}^\alpha)$, e considerar a diferencial $\frac{\partial^{\text{ht}(I_\alpha)}}{\underline{dX}_{i_1} \cdots \underline{dX}_{i_{\text{ht}(I_\alpha)}}}$, de modo a obter a contradição $\frac{\partial^{\text{ht}(I_\alpha)} \underline{X}^\alpha}{\underline{dX}_{i_1} \cdots \underline{dX}_{i_{\text{ht}(I_\alpha)}}} \notin I$. Por outro lado, toda faceta de $\Delta(\sigma)$, estende-se naturalmente para uma faceta de $\Delta(\alpha)$, e isto é suficiente para garantir que $\mathbf{b}(\sigma) = \mathbf{b}(\alpha) - (\dim \Delta(\alpha) + 1)$. □

Teorema 4.14 *Dado um complexo simplicial Δ , com ideal $I = I_\Delta$, ponhamos $c = \text{Max}\{|\underline{\beta}| : \underline{X}^\beta \in I \setminus (\underline{X})I\}$. Se $\underline{X}^\alpha \in \mathcal{F}_r(I)$ é um elemento não nulo, então :*

- (1) $r \geq \nu_I(\alpha) - c + 1 \geq \text{ht } I_\alpha - c + 1$.
- (2) Se \underline{X}^α é gerador mínimo de $\mathcal{F}_r(I)$, então $r = \nu_I(\alpha)$.
- (3) Se $c = 2$, i.é, I_Δ é gerado por monômios de grau dois, livres de quadrados, então $r = \nu_I(\alpha)$.

Demonstração. No ítem (1), como $\nu_I(\alpha) \geq \text{ht } I_\alpha$, basta mostrar a primeira desigualdade.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que $r \leq \nu_I(\alpha) - c$. Seja $X_{i_1} \cdots X_{i_t} \in I$, um gerador mínimo de I , dividindo \underline{X}^α . Neste caso $t \leq c$, e então considerando a diferencial $\frac{\partial}{\partial X_{i_1} \cdots X_{i_t}}$ e a definição de potências simbólicas via operadores diferenciais, obtemos

$$\frac{\underline{X}^\alpha}{X_{i_1} \cdots X_{i_t}} \in I^{(|\alpha| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) - t)} \subseteq I^{(|\alpha| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) - c)} \subseteq I^{(\nu_I(\alpha) - c)} \subseteq I^{(r-1)}.$$

Desta forma, $\underline{X}^\alpha = X_{i_1} \cdots X_{i_t} \cdot \frac{\underline{X}^\alpha}{X_{i_1} \cdots X_{i_t}} \in II^{(r-1)}$, o que é uma contradição. Logo, $r > \nu_I(\alpha) - c$, i.é, $r \geq \nu_I(\alpha) - c + 1$.

Para o ítem (2), basta observar que se \underline{X}^α é gerador mínimo então $\underline{X}^\alpha \notin (\underline{X})I^{(r)}$, portanto $\underline{X}^\alpha \notin I^{(r+1)}$, e conseqüentemente $\nu_I(\alpha) = r$.

Para o ítem (3), se $r < \nu_I(\alpha)$ então, tomando uma não face (aresta!) $X_i X_j$ dividindo \underline{X}^α , teremos $\frac{\underline{X}^\alpha}{X_i X_j} \in I^{(\nu_I(\alpha))}$. Por outro lado, $\nu_I(\alpha) - 2 \geq r - 1$, e portanto $I^{(\nu_I(\alpha)-2)} \subseteq I^{(r-1)}$. Conseqüentemente $\underline{X}^\alpha \in II^{(r-1)}$, contradizendo o fato de que a classe de \underline{X}^α é não nula em $\mathcal{F}_r(I)$. \square

Proposição 4.15 *Seja Δ um complexo simplicial nos vértices $\{X_1, \dots, X_n\}$, $h = \text{ht } I(\Delta) = n - s$. Dado $\underline{X}^\alpha = \underline{X}^\beta \cdot X_1 \cdots X_n \in I$, tem-se $|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) > h$ se, e somente se, $\text{Supp}(\underline{X}^\beta) \not\subseteq F$ para qualquer faceta maximal $F \in \Delta$.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Seja $F = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}\}$, uma faceta maximal. Defina $\underline{X}^\theta = \frac{X_1 \cdots X_n}{X_{i_1} \cdots X_{i_s}}$. De acordo com a definição de potência simbólica via operadores diferenciais, teremos $\frac{\partial^\theta \underline{X}^\alpha}{\partial \underline{X}^\theta} \in I$ pois, $|\theta| = n - s \leq |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha})$. Por outro lado, $\frac{\partial^\theta \underline{X}^\alpha}{\partial \underline{X}^\theta} = q \underline{X}^\beta \cdot X_{i_1} \cdots X_{i_s}$, logo $\text{Supp}(\underline{X}^\beta) \not\subseteq F$.

Reciprocamente, para cada faceta $F = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_t}\}$, escreva $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}\} = \text{Supp}(\underline{X}^\alpha) \cap F$, e $\mathbf{b}(F) = \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_m\}} \alpha_j = \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_m\}} \beta_j + t \leq \mathbf{b}(\underline{X}^\alpha)$. Logo

$$|\alpha| - \mathbf{b}(F) = n + |\beta| - \mathbf{b}(F) = n - t + (|\beta| - \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_m\}} \beta_j).$$

Se F é uma faceta maximal, então $t = s$ e $|\beta| - \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_m\}} \beta_j > 0$. Se F não é uma faceta maximal, então $n - t > n - s$. Portanto em qualquer caso, $|\alpha| - \mathbf{b}(F) \geq \text{ht } I + 1$. Como $|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) = \text{Min}\{|\alpha| - \mathbf{b}(F) | F \in \Delta\}$, concluímos :

$$|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) \geq \text{ht } I + 1$$

□

Corolário 4.16 *Seja Δ puro e $\underline{X}^\alpha \in I_\Delta$ tal que $\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) = \mathcal{V}(\Delta) = \{X_1, \dots, X_n\}$. Se $|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) > \text{ht } I$, então $\underline{X}^\alpha \in I^{(\text{ht } I)} I^{(|\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) - \text{ht } I)}$.*

Demonstração. Neste caso $\underline{X}^\beta \in I$ e $\text{Min}\{|\alpha| - \mathbf{b}(F) | F \in \Delta\} = n - s + \text{Min}\{|\beta| - \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_m\}} \beta_j\}$, isto é, $|\underline{\beta}| - \mathbf{b}(\underline{\beta}) = |\underline{\alpha}| - \mathbf{b}(\underline{\alpha}) - (n - s)$. □

Capítulo 5

Grau dos geradores simbólicos mínimos

Nesta seção consideramos ideais de arestas. O objetivo é responder à questão 1.1, além de estabelecer uma condição sobre o grau de um monômio \underline{X}^α , para que ele possa ser um gerador genuíno mínimo. Vamos mostrar também que os genuínos mínimos de um grafo dividem-se, a grosso modo, em duas famílias: a dos que se “comportam” como os ciclos ímpares e a dos que se “comportam” como cones.

5.1 Grafos e complexos simpliciais

Dado um grafo G , com vértices $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ e ideal de arestas $I(G)$, associaremos o complexo simplicial grafal, $\Delta(G)$, cujo ideal das não faces é $I(G)$, i.é, as faces de $\Delta(G)$ são complementares de coberturas de $I(G)$, e conseqüentemente suas facetras são os complementares de coberturas mínimas.

Estudaremos três classes de grafos. Além de fornecer contra-exemplos para certas questões, eles indicam o caminho para aprofundar a teoria.

Exemplo 5.1 Grafos completos. Neste caso, o complexo simplicial associado é trivial, i.é, um conjunto de pontos isolados. Vale:

Proposição 5.2 *Seja $I \subset R$ o ideal das não faces do complexo simplicial Δ . Se $\dim \Delta = 0$, então:*

- (i) *Os geradores de $\mathcal{F}_r(I)$ são os monômios, livres de quadrados, de grau $r + 1$.*
- (ii) $\bigoplus_{r \geq 2} \frac{I^{(r)}}{\Sigma_r(I)}$ *é um espaço vetorial de dimensão $\sum_{r=2}^{n-1} \binom{n}{r+1} = 2^n - \left[\binom{n+1}{2} + 1 \right]$*
- (iii) *O tipo de geração de $\mathcal{R}^{(I)}$ é $n - 1$.*

Demonstração. Neste caso o complexo trivial é associado a um grafo completo.

(i) É uma consequência do corolário 4.13, visto que todo subcomplexo de um complexo simplicial trivial é puro e seu correspondente ideal das não faces tem altura igual ao número de vértices menos 1. De fato, dado $\underline{X}^\alpha \in \frac{I^{(r)}}{(\underline{X}) \cdot I^{(r)} + \Sigma_r}$, então $r = \text{ht}(I_\alpha)$ e portanto $\underline{X}_\alpha = \prod_{\{X_i \in \text{Supp}(\underline{X}^\alpha)\}} X_i \in I^{(r)}$.

(ii) É uma consequência direta do primeiro, pois se $\mathcal{F}_r(I) \neq 0$, então $(\underline{X}) = \text{Ann}_{\mathcal{F}_r(I)}$, e existem para cada $r \in \{2, \dots, n-1\}$, exatamente $\binom{n}{r+1}$ genuínos mínimos.

(iii) Segue diretamente do fato de que se $n = \#V(G)$, então $\mathcal{F}_r(I) = 0 \quad \forall r \geq n$, enquanto que $\mathcal{F}_{n-1}(I) = \langle X_1 \cdots X_n \rangle$, isto é, $\mathcal{F}_{n-1}(I)$ é um k -espaço vetorial de dimensão 1, gerado pela classe de $X_1 \cdots X_n$. Logo

$$\mathcal{R}^{(I)} = R[It, I^{(2)}t^2, \dots, I^{(n-2)}t^{n-2}, X_1 \cdots X_n t^{n-1}]$$

□

Exemplo 5.3 Complexo simplicial não grafal. Este exemplo mostra que um complexo simplicial pode ser tal que seu ideal admita geradores genuínos não livres de quadrados. Isto dá uma resposta negativa à questão 1.1, em sua forma geral. Considere

$$I = (X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, X_1X_3X_4) = (X_1) \cap (X_2, X_3) \cap (X_2, X_4) \cap (X_3, X_4).$$

Este complexo simplicial é o 1-esqueleto de um tetraedro, incluindo uma das faces de dimensão 2. Uma verificação direta mostra que $X_1^2X_2X_3X_4$ pertence a $I^{(2)}$ mas não a $(X_1, X_2, X_3, X_4) \cdot I^{(2)} + I^2$.

Usando *Macaulay*, obtemos $I^{(2)} = (X_1^2X_2X_3X_4) + I^2$.

A seguir damos um exemplo de um ideal de arestas que possui gerador genuíno não livre de quadrados, fornecendo uma resposta negativa para a questão 1.1 no caso de ideais de arestas.

Exemplo 5.4 O ideal

$$I = (YX_1, YX_2, YX_3, YX_4, YX_5, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5X_1)$$

é o ideal de arestas de um cone sobre um ciclo simples com 5 vértices.

Uma verificação direta mostra que $Y^2X_1X_2X_3X_4X_5 \in \frac{I^{(5)}}{(\underline{X}) \cdot I^{(5)} + \Sigma_5}$.

Usando *Macaulay2*, obtivemos que o tipo de geração da álgebra de Rees simbólica neste caso é 5 (cf. também Teorema 5.28 para uma demonstração indireta) e que $\mathcal{R}^{(I)}$ é dada por

$$R[It, YX_1X_2t^2, \dots, YX_4X_5t^2, YX_5X_1t^2, X_1 \cdots X_5t^3, YX_1 \cdots X_5t^4, Y^2X_1 \cdots X_5t^5].$$

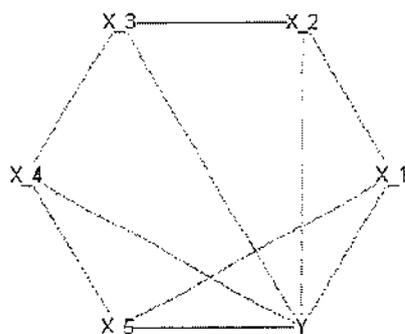
Em resumo, neste exemplo, temos:

(1) Os geradores de $\mathcal{F}_r(I)$ são:

$$\begin{aligned} \{YX_1X_2, YX_2X_3, YX_3X_4, YX_4X_5, YX_5X_1\} & \text{ se } r = 2; \\ \{X_1X_2X_3X_4X_5\} & \text{ se } r = 3; \\ \{YX_1X_2X_3X_4X_5\} & \text{ se } r = 4; \\ \{Y^2X_1X_2X_3X_4X_5\} & \text{ se } r = 5; \\ \{0\} & \text{ se } r \geq 6. \end{aligned}$$

(2) $\bigoplus_{r \geq 2} \frac{I^{(r)}}{\Sigma_r(I)}$ é um $\frac{k[X]}{I}$ -módulo de dimensão zero. Como k -espaço vetorial, sua dimensão é 8.

Para verificar o item (2), observe que $\text{Ann}_{\frac{k[X]}{I}} = (Y, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, sempre que $\mathcal{F}_r(I) \neq 0$.



Cone

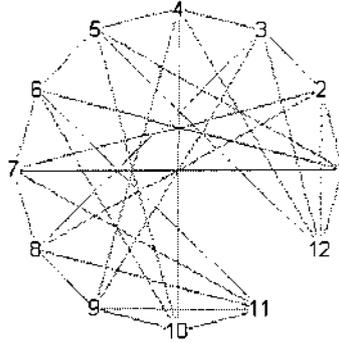
Para dirimir expectativas otimistas estimuladas pelos exemplos anteriores, em que I não é de dimensão pura, fornecemos o seguinte exemplo.

Exemplo 5.5 A suspensão do grafo do exemplo anterior é um grafo puro e, uma vez mais, tem-se $Y^2X_1X_2X_3X_4X_5 \in \frac{I(S(G))^{(5)}}{(X) \cdot I(S(G))^{(5)} + \Sigma_5 I(S(G))}$. Mais do que pura, a suspensão é Cohen-Macaulay, o que mostra que mesmo hipóteses algébricas razoavelmente fortes, falham em assegurar a ausência de geradores mínimos não livres de quadrados em $\mathcal{F}(I)$.

Exemplo 5.6 Um caso regular.

O grafo abaixo contém dois cones sobre um pentágono e, portanto, dois geradores mínimos que não livres de quadrados na potência simbólica de ordem 5. Isto mostra

que também hipóteses fortes em teoria de grafos falham em assegurar a ausência de geradores mínimos não livres de quadrados em $\mathcal{F}(I)$.



Grafo 5-regular de dimensão três.

5.2 Generalização de ciclos e cones

5.2.1 Ciclos e pseudo-ciclos

A caracterização clássica de grafos bipartidos diz que um grafo não orientado é bipartido se, e somente se, ele não contém ciclos ímpares (cf. *Apêndice A*).

A seguinte caracterização foi estabelecida em [16, Theorem 5.9].

Teorema 5.7 *Seja G um grafo conexo e I seu ideal de arestas. Então G é bipartido se e só se $I^{(r)} = I^r$, para todo $r \geq 0$.*

Demonstração. Cf. [loc. cit.]

Proposição 5.8 *Seja G um grafo puro, de vértices $V(G) = \{X_1, \dots, X_n\}$, tal que $X_1 \cdots X_n \in \frac{I^{(r)}}{(X)I^{(r)} + \Sigma_r}$. São equivalentes:*

- (1) G é um ciclo de ordem ímpar sem subciclos próprios.
- (2) $I^{(r)} = \Sigma_r, \forall r \neq \text{ht}(I)$
- (3) $I^{(r)} = \Sigma_r, 2 \leq r < \text{ht}(I)$

Demonstração. De acordo com a Proposição 4.10, temos $r = \text{ht } I$.

((1) \Rightarrow (2)) Para cada $X_i \in V(G)$, $G - X_i$ é um grafo bipartido. Dado $\underline{X}^\alpha \in I^{(m)}$,

segue imediatamente do Teorema 5.7, que se $\#\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) \leq n - 1$ então $\underline{X}^\alpha \in I^{\nu_I(\alpha)}$. Por outro lado, como G é puro, segue do corolário 4.13 que se $\#\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) = n$, tem-se $\underline{X}^\alpha \in \Sigma_{\nu_I(\alpha)}$ sempre que $\nu_I(\alpha) > \text{ht}(I)$. Portanto se $m > \text{ht} I$, então $\underline{X}^\alpha \in \Sigma_m$. Agora se $m < \text{ht} I$ então como $X_1 \cdots X_n \in II^{(r-1)}$, $\underline{X}^\alpha \in \Sigma_m$. Logo $\forall m \neq \text{ht} I$ e $\forall \underline{X}^\alpha \in I^{(m)}$ tem-se $\underline{X}^\alpha \in \Sigma_m$. Isto é, $I^{(m)} = \Sigma_m$.

((2) \Rightarrow (3)) imediato.

((3) \Rightarrow (1)) Como G não é bipartido, G tem um ciclo ímpar, digamos G' , necessariamente sem subciclos, pois caso contrário este ciclo se subdividiria em ciclos menores e para algum $m < \text{ht} I$ teríamos $I^{(m)} \neq \Sigma_m$, uma contradição.

Como G' é um subgrafo de G , temos $\text{ht} I(G') \leq \text{ht} I$ e, necessariamente, $\text{ht} I(G') = \text{ht} I$, pois ciclos ímpares sem subciclos são sempre genuínos. Como G não tem vértices supérfluos, i.é, $\underline{X} \in \frac{I^{(r)}}{(X)I^{(r)} + \Sigma_r}$, temos $G = G'$. \square

Observação 5.9 Muito embora tenhamos exigido a hipótese de G ser puro, na proposição acima, acreditamos que a mesma não seja uma hipótese essencial, e que, portanto, a mesma fornece uma caracterização dos ciclos ímpares sem subciclos próprios entre todos os grafos.

Observemos que, em geral, um ciclo sem subciclos próprios não é de dimensão pura, como é o caso de C_9 .

Proposição 5.10 *Seja $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ o ideal de arestas de um grafo G . São equivalentes:*

(a) $X_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo.

(b) Para qualquer partição $\{X_1, \dots, X_n\} = M \cup N$, com $M \cap N = \emptyset$, tem-se :

$$\dim \frac{k[N]}{I \cap k[N]} + \dim \frac{k[M]}{I \cap k[M]} \geq \dim k[G] + 1.$$

Demonstração. Seja $I_M = I \cap k[M]$, respectivamente $I_N = I \cap k[N]$, i.é, I_M , resp. I_N é o subgrafo de G gerado pelos elementos de M , resp. N . Sejam \underline{X}_M , e \underline{X}_N os monômios dados pelos produtos dos elementos de M , e N .

De acordo com a Proposição 4.11, temos $\nu_I(\underline{X}_M) = \text{ht} I_M$, resp. $\nu_I(\underline{X}_N) = \text{ht} I_N$. Conseqüentemente,

$$\dim \frac{k[M]}{I \cap k[N]} = \#M - \text{ht} I_M$$

resp.

$$\dim \frac{k[N]}{I \cap k[N]} = \#N - \text{ht } I_N$$

Além disto, $\nu_I(\underline{X}_M) + \nu_I(\underline{X}_N) \leq \nu_I(X_1 \cdots X_n)$. Portanto, pondo :

$$d_1 := \dim \frac{k[N]}{I \cap k[N]}$$

$$d_2 := \dim \frac{k[M]}{I \cap k[M]}$$

temos:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 < \dim k[G] + 1 &\Leftrightarrow \#M - \text{ht } I_M + \#N - \text{ht } I_N < n - \text{ht } I + 1 \\ &\Leftrightarrow \text{ht } I_M + \text{ht } I_N > \text{ht } I - 1 \\ &\Leftrightarrow \nu_I(\underline{X}_M) + \nu_I(\underline{X}_N) > \nu_I(X_1 \cdots X_n) - 1 \\ &\Leftrightarrow \nu_I(\underline{X}_M) + \nu_I(\underline{X}_N) = \nu_I(X_1 \cdots X_n). \end{aligned}$$

Suponhamos que $X_1 \cdots X_n \notin (\underline{X})I^{(r)} + \Sigma_r$. Pelo Teorema 4.14, $r = \nu_I(X_1 \cdots X_n) = \text{ht } I$. Portanto, as desigualdades acima demonstram a proposição, exceto quando $\nu_I(\underline{X}_M) = 0$. Neste caso M é um conjunto de vértices isolados e conseqüentemente:

$$\nu_I(\underline{X}_M) + \nu_I(\underline{X}_N) = \nu_I(X_1 \cdots X_n) \Leftrightarrow X_1 \cdots X_n \in (\underline{X})I^{(\nu_I(X_1 \cdots X_n))}$$

□

Corolário 5.11 *Dado $r \geq 2$. Seja C_{2r-1} um ciclo ímpar sem subciclos próprios, de vértices $\{X_1, \dots, X_{2r-1}\}$, então $X_1 \cdots X_{2r-1}$ é um genuíno mínimo.*

Demonstração. Seja $I = I(C_{2r-1})$. Temos $\text{ht } I = r$, e $\dim k[C_{2r-1}] = r - 1$. De fato, para qualquer X_i , o subgrafo induzido pelo suporte de $\frac{X_1 \cdots X_{2r-1}}{X_i}$ é um produto de $r - 1$ arestas e, portanto, $X_1 \cdots X_{2r-1} \in I^{(r)}$. Por outro lado, se indexarmos os vértices de forma que $\{X_1 X_2, \dots, X_{2r-2} X_{2r-1}, X_{2r-1} X_1\}$ sejam as arestas de C_{2r-1} , o operador diferencial ∂^θ de ordem r , dado por $\partial^\theta = \frac{\partial^r}{dX_1 X_2 X_4 \cdots X_{2r-2}}$, satisfaz $\partial^\theta X_1 \cdots X_{2r-1} \notin I$. Logo, $\text{ht } I = \nu_I(X_1 \cdots X_{2r-1}) = r$.

Suponha $X_1 \cdots X_{2r-1} = \underline{X}^\alpha \underline{X}^\beta$, com $|\alpha|$ ímpar. Como o subgrafo induzido $G(\alpha)$ é bipartido, temos

$$2 \dim k[G(\alpha)] \geq |\alpha| + 1.$$

Por outro lado, como $|\beta|$ é necessariamente par e o subgrafo induzido pelo seu suporte é também bipartido, temos

$$2 \dim k[G(\beta)] \geq |\beta|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2(\dim k[G(\alpha)] + \dim k[G(\beta)]) &\geq |\alpha| + |\beta| + 1 = 2r \\ &= 2(\dim k[C_{2r-1}] + 1) \end{aligned}$$

Observação 5.12 A Proposição 5.10 é, evidentemente, válida para complexos simpliciais em geral.

Definição 5.13 Dado um vértice X de um grafo G , definimos sua *vizinhança* :

$$\Gamma(X) = \{X_i | X_i \in \mathbf{Ann}_{k[G]}(X)\}.$$

Do ponto de vista de Teoria dos Grafos, $\Gamma(Y)$ é o conjunto dos vértices de G que são adjacentes ao vértice Y (cf. *Apêndice A*). Aqui, como antes, abusamos da identificação entre os vértices de G e as variáveis de $k[\underline{X}]$.

Proposição 5.14 *Seja G' um grafo nos vértices $\{X_1, \dots, X_n, Y\}$, $G = G' - Y$, I', I os respectivos ideais de arestas. Se $\Gamma(Y)$ não é subconjunto de nenhuma cobertura minimal de G , então:*

- (1) $\text{ht}(I') = \text{ht}(I) + 1$
- (2) Se $X_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo, então $YX_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo.

Demonstração. Seja P' um primo mínimo de I' . O primo $P = P' \cap k[\underline{X}]$ é uma cobertura de G e portanto contém um primo mínimo de I . Logo $\text{ht}(P') \geq \text{ht}(P) \geq \text{ht}(I)$. Se $Y \in P'$, então $\text{ht}(P') - 1 \geq \text{ht}(P)$ e, portanto, $\text{ht}(P') \geq \text{ht}(I) + 1$. Por outro lado se $Y \notin P'$, então $\Gamma(Y) \subseteq P'$ e $P' = P$. Por hipótese P' não é primo minimal de I , e portanto $\text{ht}(P') \geq \text{ht}(I) + 1$.

Resta mostrar que I' tem um primo mínimo de altura $\text{ht}(I) + 1$. Este fato é imediato pois se P é um primo minimal de I , então (P, Y) é um primo mínimo de I' . Isto demonstra o item (1).

Para o item (2), seja $h = \text{ht}(I)$. Suponha por absurdo que $X_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo, e $YX_1 \cdots X_n$ não o seja. Obrigatoriamente, após uma re-indexação, temos $YX_1 \cdots X_n = YX_1 \cdots X_t \cdot X_{t+1} \cdots X_n$, em que $YX_1 \cdots X_t \in I^{(r)}$, e $X_{t+1} \cdots X_n \in I^{(h+1-r)}$, $r \leq h$.

- (a) Se $r = 1$, então $X_{t+1} \cdots X_n \in I^{(h)}$ e, portanto, $X_1 \cdots X_n \in (X_1, \dots, X_t) \cdot I^{(h)}$, contradizendo o fato de $X_1 \cdots X_n$ ser genuíno mínimo.
- (b) Se $r > 1$, então $\frac{YX_1 \cdots X_t}{Y} \in I^{(r-1)}$, e portanto $X_1 \cdots X_n \in I^{(r-1)} \cdot I^{(h-(r-1))}$, contradizendo o fato de $X_1 \cdots X_n$ ser genuíno.

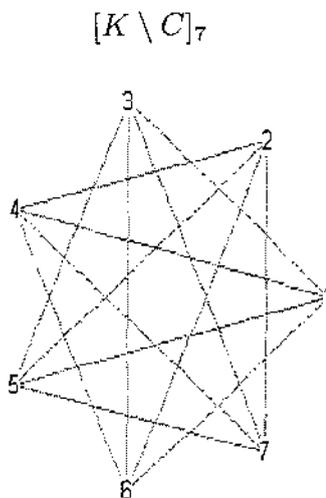
Em ambos os casos (a) e (b) estamos usando implicitamente a injetividade $I^{(r)} \hookrightarrow I^{(r)}$, descrita na Proposição 3.10. \square

Observação 5.15 Ao adicionar-se um novo vértice a um grafo G , a altura do ideal de arestas pode aumentar no máximo de uma unidade. Este aumento acontecerá se, e somente se, a vizinhança do novo vértice não estiver contida em nenhum primo minimal do ideal de aresta do grafo original. Esta afirmação é um corolário imediato da Proposição 4.15 e, portanto, o item (1) é um caso particular da mesma.

A recíproca do item (2) da proposição anterior não é válida. De fato, qualquer ciclo de ordem ímpar contraria a recíproca, uma vez que retirando-se qualquer um dos vértices, obtemos um grafo bipartido e, portanto, o produto dos vértices restantes não pode ser genuíno. Curiosamente, estes não são os únicos exemplos que a contrariam, conforme pode ser verificado nos exemplos a seguir.

Exemplo 5.16 No grafo abaixo, o produto dos vértices é genuíno mínimo de ordem 5. Retirando-se qualquer um dos vértices, obtemos um subgrafo cujo ideal tem altura 4 e cujo produto dos vértices não é um elemento genuíno.

Em geral, dado um ciclo de ordem $2r - 1$, sem subciclos próprios, C_{2r-1} , o seu complemento em relação ao grafo completo com $2r - 1$ vértices, K_{2r-1} , para $r \geq 3$, é um grafo cujo produto dos vértices é minimalmente genuíno, isto é, ao retirar-se qualquer um dos seus vértices, obtemos um elemento não genuíno de ordem igual a altura do subgrafo induzido.



Grafo não planar 4-regular de dimensão 2.

Proposição 5.17 Dado $n = 2r - 1 \geq 5$. Seja $[K \setminus C]_n$ o complemento, em K_n , de um ciclo de ordem n , sem subciclos próprios. Seja $V([K \setminus C]_n) = \{X_1, \dots, X_n\}$, e $I \subset k[\underline{X}]$ seu ideal de arestas, então $X_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo e $\frac{X_1 \cdots X_n}{X_i} \in \Sigma_{\text{ht}(I)-1}(I) \quad \forall i$. Em particular, estes são os únicos grafos de dimensão 2 com tal propriedade.

Demonstração. Usando o critério dado em 5.10, vemos que $[K/C]_n$ é genuíno mínimo pois, qualquer que seja a partição, $V([K \setminus C]_n) = M \cup N$, teremos ao menos dois independentes em um dos conjuntos, isto é,

$$\dim \frac{k[M]}{I \cap k[M]} + \dim \frac{k[N]}{I \cap k[N]} \geq 3.$$

Após uma re-indexação, se necessário, podemos supor que o ciclo retirado, tem arestas $\{X_i, X_{i+1}\}$. Eliminando-se um dos vértices, digamos X_1 , considere a partição, onde M é dado pelos vértices de índice ímpar, e N é dado pelos vértices de índice par. Os subgrafos gerado pelos elementos de N , e $M - \{X_1\}$, são grafos completos com $\frac{n-1}{2}$ elementos. Isto mostra que

$$\frac{X_1 \cdots X_n}{X_1} \in I^{\binom{n-3}{2}} \cdot I^{\binom{n-3}{2}} \subseteq \Sigma_{\text{ht}(I)-1}(I).$$

Para um outro vértice qualquer, basta fazer uma translação nos índices dos vértices e repetir o raciocínio.

Para demonstrar que estes são os únicos grafos de dimensão 2, tais que o produto dos vértices é um genuíno mínimo, basta observar que o complemento de um tal grafo é, necessariamente, um ciclo sem subciclo próprio. \square

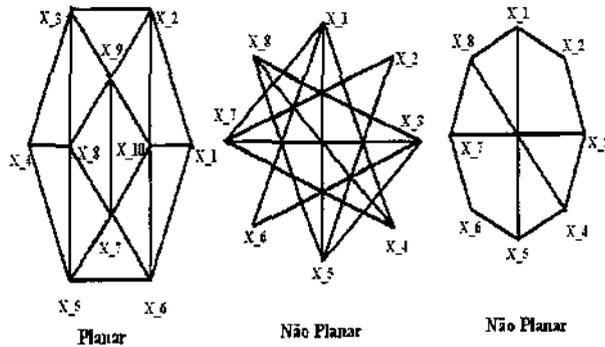
Observação 5.18 Se $G = [K \setminus C]_{2r}$, então $X_1 \cdots X_{2r}$ não é genuíno. De fato, seu ideal de arestas tem altura $2r - 2$, enquanto que o conjunto dos vértices de índice par, e o conjunto dos vértices de índice ímpar geram ambos, subgrafos completos com r vértices e portanto de altura $r - 1$.

Definição 5.19 Seja G um grafo nos vértices $\{X_1, \dots, X_n\}$, e $h = \text{ht } I(G)$. G é um *pseudo-ciclo* se é um triângulo ou se o produto de seus vértices satisfaz as condições:

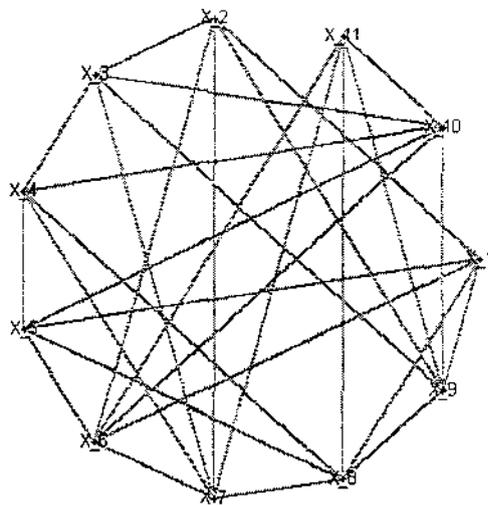
- (a) $X_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo, isto é, $X_1 \cdots X_n \notin (\underline{X}) \cdot I^{(h)} + \Sigma_h$;
- (b) $\frac{X_1 \cdots X_n}{X_i} \in \Sigma_{h-1}, \forall i$.

Os ciclos de ordem ímpar são exemplos de pseudo-ciclos, assim como os grafos $[K \setminus C]_n$ descritos acima, e os quatro exemplos a seguir.

Pseudo-ciclos de dimensão 3



Triangulação do plano projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (abaixo)



Cf. [6]

Seja C_n um ciclo sem cordas de vértices $V = \{X_1, \dots, X_n\}$, enumerados de forma que $I(C_n) = (X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_{n-1}X_n, X_nX_1)$ seja seu ideal de arestas. Dado um natural $i > n$, a notação X_i é usada para o vértice $X_{i \bmod (i,n)}$.

Proposição 5.20 Dado $m \geq 1$, seja $G' = C_{4m}$ um ciclo sem cordas cujos vértices foram enumerados como acima. Seja I' seu ideal de arestas e $h_c = \text{ht}(I')$. O algoritmo a seguir gera um pseudo-ciclo cujo ideal de arestas tem altura $h = h_c + 1$.

Algoritmo

Input : $I := I(G')$
Set variable $j=1$
While $j \leq 4m$ **do** $I = I + (X_jX_{j+h_c})$
Set variable $j = j + 2$
end do
Set $I(G) := I + (X_2X_{2+h_c})$
Output : $I(G)$

Demonstração. Seja G o grafo de vértices $\{X_1, \dots, X_{4m}\}$, cujo ideal de arestas é dado por $I = I(G)$. Em primeiro lugar mostraremos que $h = \text{ht}(I) = h_c + 1$. Uma vez que G' é um ciclo sem cordas, é fácil ver que $h_c = 2m$. Como $\{X_1, X_3, \dots, X_{4m-1}, X_2\}$ é uma cobertura mínima com $2m + 1$ elementos, temos que $h \leq h_c + 1$. Para mostrar a igualdade, basta mostrar que $X_1 \cdots X_{4m} \in I^{(h_c+1)}$ ou, equivalentemente, que $\frac{X_1 \cdots X_{4m}}{X_i} \in I^{(h_c)}$.

Definamos

$$j = \begin{cases} i + 1 & \text{se } i \equiv 0 \pmod{2} \\ i + 4, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, o subgrafo gerado pelos vértices $\{X_j, X_{j+2}, \dots, X_{j+h_c+1}\}$, onde os índices devem ser tomados módulo $4m$, é um ciclo sem cordas com $2m + 1$ vértices e portanto um elemento de $I^{(m+1)} = I^{(\frac{h_c}{2}+1)}$. Por outro lado o subgrafo gerado pelos demais vértices, excluindo-se o X_i , é um produto de $\frac{h_c}{2} - 1 = m - 1$ arestas, i.e, um elemento de $I^{(\frac{h_c}{2}-1)}$. Logo $\frac{X_1 \cdots X_{4m}}{X_i} \in I^{(m-1)} I^{(m+1)} \subseteq I^{(2m)} = I^{(h_c)}$. De acordo com a Proposição 4.8 temos $h = \nu_I(X_1 \cdots X_{4m}) \geq h_c + 1$ e, portanto, $\text{ht}(I) = h_c + 1$.

Vamos agora mostrar que o produto $X_1 \cdots X_{4m}$ é um elemento genuíno de ordem $h_c + 1$. Mostremos, primeiramente, que $X_1 \cdots X_{4m} \notin \mathbf{II}^{(h_c)}$.

Seja $X_i X_j$ uma aresta. Se i, j são ambos ímpares, o ideal primo

$$(X_1, X_3, \dots, X_{4m-1}, X_2) \cap k[\underline{X} \setminus \{X_i, X_j\}]$$

é uma cobertura do subgrafo induzido e tem altura $h_c - 1$, logo $\frac{X_1 \cdots X_{4m}}{X_i X_j} \notin I^{(h_c)}$.

Se $i = 2, j = 2 + h_c$, o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial \underline{X}^\alpha}$, em que

$$\underline{X}^\alpha = X_3 X_5 \cdots X_{2+h_c-1} X_{2+h_c+2} X_{2+h_c+4} \cdots X_{4m},$$

tem ordem $h_c - 1$ e satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial \underline{X}^\alpha} \frac{X_1 \cdots X_{4m}}{X_2 X_{2+h_c}} \notin I.$$

Suponha $i < j$, com i ímpar e j par. Considere os conjuntos:

$$V_1 = \{X_j, X_{j+2}, \dots, X_{i+h_c-1}\}$$

e

$$V_2 = \{X_{i+h_c}, X_{i+h_c+2}, \dots, X_{i+2h_c}\}.$$

Temos $\#V_1 = \#V_2 - 1 = \frac{h_c}{2} = m$ e, conseqüentemente, o conjunto $M = V_1 \cup V_2 \setminus \{X_i, X_j\}$ tem cardinalidade $h_c - 1$ e

$$\frac{X_1 \cdots X_{4m}}{X_j X_{j+2} \cdots X_{i+h_c-1} X_{i+h_c} \cdots X_i} \notin I.$$

Com isto concluímos que $X_1 \cdots X_{4m} \notin II^{(h_c)}$. Para mostrar que $X_1 \cdots X_{4m} \notin \Sigma_{h_c+1}$, basta observar que o grafo G não possui subciclos ímpares de ordem menor que $h_c + 1$ e, portanto, todo subgrafo de G cujo ideal de aresta tem altura menor ou igual a $\frac{h_c}{2}$ é bipartido. Em outras palavras, todo monômio livre de quadrado em $I^{(r)}$, com $1 \leq r \leq \frac{h_c}{2}$, é um produto de arestas, i.é, está em I^r .

Suponha $X_1 \cdots X_{4m} \in I^{(r)}I^{(h_c+1-r)}$ com $1 \leq r \leq \frac{h_c}{2}$, então ou $r \leq \frac{h_c}{2}$ ou $h_c+1-r \leq \frac{h_c}{2}$. Neste caso, $X_1 \cdots X_{4m} \in II^{(h_c)}$; contradição.

Concluímos portanto que $X_1 \cdots X_{4m}$ é genuíno. Como G é conexo e todo vértice tem grau de incidência no mínimo 2, temos que $X_1 \cdots X_{4m} \notin (\underline{X})I^{(h_c+1)}$, logo é um genuíno mínimo. O argumento utilizado para mostrar a altura do ideal de arestas de G também mostra que $\frac{X_1 \cdots X_{4m}}{X_i} \in I^{(m-1)}I^{(m+1)} \subseteq \Sigma_{h_c}, \forall i$. Portanto, G é um pseudo-ciclo. \square

Um *pseudo-cone de ordem 1* é um grafo G tal que para algum vértice X_j , $G - X_j$ é um pseudo-ciclo e $\text{ht}(I(G)) = \text{ht}(I(G - X_j)) + 1$. Um pseudo-cone de ordem q é um grafo tal que para algum vértice X_j , $G - X_j$ é um pseudo-cone de ordem $q - 1$ e $\text{ht}(I(G)) = \text{ht}(I(G - X_j)) + 1$. Observemos que grafos completos K_n são pseudo-cones de ordem $n - 3$, e que o grafo do Exemplo 5.6 é um pseudo-cone de ordem 2.

Teorema 5.21 *Os monômios livres de quadrados cujos suportes são pseudo-cones, são sempre genuínos mínimos.*

Demonstração. Por indução sobre a ordem do pseudo-cone. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o pseudo-cone é todo o grafo. Para pseudo-cones de ordem 1, o teorema segue do fato mais geral dado pela Proposição 5.14.

Suponhamos válido para pseudo-cones de ordem q e seja G' um pseudo-cone de ordem $q + 1$, com $V(G') = \{X_1, \dots, X_n\}$. Pela definição, existe um vértice, digamos X_n , tal que $X_1 \cdots X_{n-1}$ é um pseudo-cone de ordem q . Por hipótese de indução, o subgrafo G induzido por $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ é genuíno mínimo. Por outro lado, se $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_u}\}$ é primo minimal do ideal de arestas do subgrafo G , então $\Gamma(X_n) \not\subseteq \{X_{i_1}, \dots, X_{i_u}\}$, pois caso contrário $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_u}\}$ seria um primo minimal do grafo G' , o que nos daria $\text{ht}(I(G')) = \text{ht}(I(G - X_j))$, contradizendo a definição de pseudo-cone. Aplicando a Proposição 5.14 a G e G' temos que $X_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo.

Proposição 5.22 *O subgrafo induzido pelo suporte de um elemento genuíno mínimo, livre de quadrados, é 2-conexo.*

Demonstração. Em geral se G' e G'' são duas componentes conexas disjuntas, de um grafo G , isto é, $V(G') \times V(G'') \cap \mathcal{A}(G) = \emptyset$ e $V(G) = V(G') \cup V(G'')$, então os

primos mínimos do ideal de arestas $I(G)$ são todos da forma $P' + P''$, onde P' e P'' são, respectivamente, primos mínimos de G' e G'' .

Suponhamos que $V(G) = X_1, \dots, X_n, Y$, e que $X_1 \cdots X_n \cdot Y$ é genuíno mínimo e que Y é um vértice desconector com $M = \{X_1, \dots, X_t\}$, e $N = \{X_{t+1}, \dots, X_n\}$ os vértices das componentes conexas resultantes da retirada de Y . Sejam $\Gamma_M = \Gamma(Y) \cap M$, e $\Gamma_N = \Gamma(Y) \cap N$ as vizinhanças de Y nos subgrafos induzidos por M e N , respectivamente. Temos $\text{ht } I(G) - 1 = \text{ht } I_M + \text{ht } I_N$. Afirmamos que

$$\text{ht } I_{M \cup \{Y\}} = \text{ht } I_M + 1, \text{ ou } \text{ht } I_{N \cup \{Y\}} = \text{ht } I_N + 1.$$

De fato, $\text{ht } I_{M \cup \{Y\}} = \text{ht } I_M$, e $\text{ht } I_{N \cup \{Y\}} = \text{ht } I_N$, se, e somente se existem, respectivamente, $P' \subset k[M]$ e $P'' \subset k[N]$ primos minimais de I_M e I_N tais que $\Gamma_M \subseteq P'$ e $\Gamma_N \subseteq P''$. Segue-se que $P' + P'' \subset k[X_1, \dots, X_n]$ é um primo minimal de $G - \{Y\}$ e conseqüentemente de G . Isto significa que $\text{ht } I(G) = \text{ht } I_{M \cup N}$, isto é, $X_1 \cdots X_n \cdot Y \in (Y) \cdot I(G)^{(\text{ht } I(G))}$, contradizendo o fato de ser genuíno mínimo. Outrossim, temos, digamos, $\text{ht } I_{M \cup \{Y\}} = \text{ht } I_M + 1$ e portanto, $X_1 \cdots X_n \cdot Y \in I^{(\text{ht } I_M + 1)} \cdot I^{(\text{ht } I_N)} \subseteq \Sigma_{\text{ht } I(G)}$, contradizendo o fato de ser genuíno. Concluimos, portanto, que se o produto dos vértices é um genuíno mínimo, o subgrafo induzido não pode ter vértices desconectores, i.é, tem necessariamente que ser 2-conexo. \square

Teorema 5.23 *Seja G um grafo simples, I o seu ideal de arestas. São equivalentes:*

- (a) *Para todo gerador mínimo livre de quadrados $\underline{X}^\alpha \in \mathcal{F}_r(I)$, tem-se $\frac{X_i^\alpha}{X_i} \in \Sigma_{r-1}, \forall i$ se, e somente se, o subgrafo gerado pelo suporte de \underline{X}^α é um ciclo ímpar sem cordas.*
- (b) *Os geradores genuínos, mínimos, livres de quadrados são ciclos ímpares sem subciclos, e pseudo-cones sobre ciclos ímpares sem subciclos.*

Demonstração. ((a) \Rightarrow (b)). Por indução sobre $\text{ht } I$. Para $\text{ht } (I) = 2$, já sabemos que os genuínos são triângulos e, portanto, ciclos ímpares sem subciclos próprios.

Suponhamos válido para grafos cujos ideais de arestas têm altura q e seja G um grafo cujo ideal de arestas tem altura $q + 1$. Dado um genuíno livre de quadrados, se o ideal de arestas do subgrafo gerado pelo seu suporte tem altura menor ou igual a q , usamos a hipótese de indução. Podemos, portanto supor que $X_1 \cdots X_n$ é genuíno mínimo e o ideal de arestas do subgrafo gerado pelo seu suporte tem altura $q + 1$. Se existe X_j tal que $\frac{X_1 \cdots X_n}{X_j}$ é genuíno então o subgrafo gerado pelo suporte de $\frac{X_1 \cdots X_n}{X_j}$ é um ciclo ímpar sem subciclos, ou um pseudo-cone. Em qualquer dos casos G é um pseudo-cone (grafo completo, se $G - X_n$ for completo). Se por outro lado $\frac{X_1 \cdots X_n}{X_j} \in \Sigma_{h-1}, \forall j$, então por hipótese temos que G é um ciclo ímpar sem subciclos.

A recíproca segue, imediatamente, da definição de pseudo-cone. Isto é, se \underline{X}^α é um gerador genuíno mínimo de $I^{(m)}$, tal que o subgrafo gerado pelo seu suporte não é um ciclo, então existe $X_i \in \text{Supp}(\underline{X}^\alpha)$ tal que $\frac{X_i^\alpha}{X_i}$ é genuíno. \square

5.2.2 Cones e suspensões

Dado um grafo G nos vértices $V(G) = \{X_1, \dots, X_n\}$, a *suspensão* $S(G)$ de G é o grafo obtido de G por inclusão de n novos vértices $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ e n novas arestas $\{Y_1X_1, \dots, Y_nX_n\}$. Observemos que, por definição, os novos vértices introduzidos têm grau de incidência igual a 1.

O *Cone sobre G* é o grafo $C(G)$ tal que $V(C(G)) = V(G) \cup \{Y\}$ e $\mathcal{A}(C(G)) = \mathcal{A}(G) \cup \{X_iY \mid X_i \in V(G)\}$.

O objetivo é estabelecer uma relação entre o módulo não-trivial de um grafo e os módulos não-triviais de $S(G)$ e de $C(G)$.

Faremos uso do seguinte resultado.

Lema 5.24 *Seja J o ideal de arestas de um grafo G . Dado $\underline{Z}^\alpha \in J$, seja $G(\alpha)$ o subgrafo induzido pelo suporte de \underline{Z}^α . Então:*

- (1) *Se $G(\alpha)$ contém um elemento de grau de incidência zero, digamos Z_i , então $\underline{Z}^\alpha \in (Z_i) \cdot J^{(\nu_J(\alpha))}$.*
- (2) *Se $G(\alpha)$ contém um vértice terminal, digamos Z_i , então $\underline{Z}^\alpha \in J \cdot J^{(\nu_J(\alpha)-1)}$. Neste caso $\underline{Z}^\alpha \in \Sigma_r$, $2 \leq r \leq \nu_J(\alpha)$.*

Demonstração. (1) Neste caso, considerando o complexo simplicial associado ao subgrafo $G(\alpha)$, vemos que Z_i é um elemento de todas as suas facetas, e de acordo com a Definição 4.8 e pela Proposição 4.10 é fácil ver que $\frac{\partial \underline{Z}^\alpha}{Z_i} \in J^{(\nu_J(\alpha))}$.

(2) Seja Z_{i_0} o elemento de $V(G(\alpha))$ que é adjacente a Z_i . Pondo $\underline{Z}^{\alpha'} = \frac{\partial \underline{Z}^\alpha}{Z_{i_0}Z_i}$, temos $\underline{Z}^{\alpha'} \in J^{(\nu_J(\alpha)-1)} = J^{\nu_J(\alpha')}$, e conseqüentemente $\underline{Z}^\alpha \in J \cdot J^{(\nu_J(\alpha)-1)}$. De fato, para cada primo mínimo do ideal de arestas do subgrafo induzido pelo suporte de $\underline{Z}^{\alpha'}$, digamos P , tem-se, excludentemente, $Z_{i_0} \in P$ ou $Z_i \in P$. segue-se que $\mathbf{b}(\alpha') = \mathbf{b}(\alpha) - 1$, e portanto,

$$\nu_J(\alpha') = |\alpha| - 2 - (\mathbf{b}(\alpha')) = |\alpha| - \mathbf{b}(\alpha) - 1.$$

A segunda afirmação segue do fato que $\Sigma_m \subseteq \Sigma_{m-1}$, $\forall m \geq 2$. \square

Proposição 5.25 *Dado um grafo G , se $I(G)^{(r)} = J + \Sigma_r$, em que J é o ideal gerado pelos geradores genuínos de $I^{(r)}$, então $I(S(G))^{(r)} = J \cdot k[\underline{X}, \underline{Y}] + \Sigma_r(I(S(G)))$.*

Demonstração. Ponhamos $I = I(G)$, $I' = I(S(G))$, $\Sigma'_r = \sum_{i=1}^{r-1} I^{(i)} I^{(r-i)}$.

Seja $D = \{\underline{X}^\alpha \in k[\underline{X}]; \underline{X}^\alpha \notin (\underline{X}) \cdot I^{(r)} + \Sigma'_r\}$, e $H = \{\underline{Y}^\beta \cdot \underline{X}^\theta \in k[\underline{Y}, \underline{X}]; \underline{Y}^\beta \cdot \underline{X}^\theta \notin (\underline{Y}, \underline{X}) \cdot I^{(r)} + \Sigma'_r\}$. Pela Proposição 3.10, tem-se $(D) = (H) \cap k[\underline{X}]$. Para concluir, basta mostrar que todo monômio da forma $\underline{Y}^\beta \cdot \underline{X}^\theta$ é um elemento de $(\underline{Y}, \underline{X}) \cdot I^{(r)} + \Sigma'_r$, mas isto resulta do Lema 5.24. \square

Corolário 5.26 *Se $I = I(G)$ é o ideal de arestas de um grafo G , os monômios pertencentes a $I^{(2)} \setminus I^2 \cup (\underline{X})I^{(2)}$ são da forma $X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}$, onde $\{X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}\}$ é um ciclo de G .*

Demonstração. Seja $\underline{X}^\alpha \in \mathcal{F}_2(I)$ um gerador mínimo. Pelo Lema 5.24, todo vértice de $G(\alpha)$ tem grau de incidência ≥ 2 . Resulta $d := \#\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) \geq 3$.

Suponhamos que fosse $d \geq 4$. Dado $X_i \in \text{Supp}(\underline{X}^\alpha)$, sejam $X_j, X_t \in \text{Supp}(\underline{X}^\alpha)$ adjacentes a X_i . De acordo com a caracterização de $I^{(2)}$ via operadores diferenciais, temos $\frac{\partial \underline{X}^\alpha}{\partial X_i} \in I$. Duas possibilidades podem ocorrer. A primeira seria $X_j X_t \in I$, e neste caso $\underline{X}^\alpha \in (\underline{X}) \cdot I^{(2)}$. A segunda seria que um quarto vértice, digamos X_m , fosse adjacente a X_j ou a X_t . Neste caso $\underline{X}^\alpha \in I^2$. Ambas possibilidades levam a uma contradição, e portanto $d = 3$. Forçosamente, $G(\alpha)$ é um triângulo. \square

Em seguida, coletamos algumas propriedades do cone $C(G)$ que, certamente, fazem parte do folclore elementar.

Lema 5.27 *Seja $I = I(G) = \cap_l P_l$ a decomposição primária do ideal de aresta de G . Então:*

- (i) $I(C(G)) = (\underline{X}) \cap (\cap_l (Y, P_l))$.
- (ii) $C(G)$ é puro se, e somente se, G é um grafo completo K_n (em cujo caso, $C(G)$ é um K_{n+1}).
- (iii) Para todo $m \geq 0$, tem-se $I(C(G))^{(m)} = (\underline{X})^m \cap (\cap_l (Y, P_l))^m$.

Demonstração. (i) Isto segue diretamente da definição, pois primos mínimos correspondem a coberturas mínimas.

(ii) Se G é completo, claramente $C(G)$ também o é. Reciprocamente, se $C(G)$ é puro então $\text{ht}(Y, P_l) = n$ para todo l . Segue-se que $\text{ht} P_l = n - 1$ para todo l , portanto G deve ser completo.

(iii) Segue diretamente do Corolário 2.2, e do fato que, em nosso caso, cada um dos ideais primários da decomposição é um primo gerado por uma seqüência regular. \square

Teorema 5.28 *Dado um grafo G de vértices $\{X_1, \dots, X_n\}$, seja G' o cone sobre G , e $I \subset k[\underline{X}]$, $J \subset k[\underline{X}, \underline{Y}]$ os respectivos ideais de arestas. Então:*

- (1) $\underline{X}^\alpha \in I^{(r)} \Leftrightarrow Y \cdot \underline{X}^\alpha \in J^{(r+1)}$.
- (2) $Y \cdot \underline{X}^\alpha \in (Y, \underline{X})^{J^{(\nu_J(\alpha)+1)} + \Sigma_{\nu_J(\alpha)+1}(J)} \Leftrightarrow \underline{X}^\alpha \in (\underline{X}) \cdot I^{(\nu_I(\alpha))} + \Sigma_{\nu_I(\alpha)}$.
- (3) Dado $q \geq 0$, $Y^q \cdot \underline{X}^\alpha$ é genuíno mínimo se, e somente se, \underline{X}^α é genuíno mínimo e $q \leq \mathbf{b}(\alpha)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.10, $I^{(r)} = J^{(r)} \cap k[\underline{X}]$.

(1) Considerando os complexos simpliciais $\Delta(\alpha)$ e Δ' , associados respectivamente aos subgrafos gerados pelos suportes de \underline{X}^α e $Y\underline{X}^\alpha$, vemos que as facetas de Δ' são dadas pelas facetas de $\Delta(\alpha)$ e $\{Y\}$. Logo, de acordo com a Definição 4.8, temos $\mathbf{b}(Y\underline{X}^\alpha) = \mathbf{b}(\alpha)$ e, portanto aplicando a Proposição 4.10 temos $\nu_J(Y\underline{X}^\alpha) = |\alpha| + 1 - \mathbf{b}(\alpha) = \nu_I(\alpha) + 1$. Conseqüentemente, pela definição de ν ,

$$\underline{X}^\alpha \in I^{(r)} \Leftrightarrow \nu_I(\alpha) \geq r \Leftrightarrow \nu_J(Y\underline{X}^\alpha) \geq r + 1 \Leftrightarrow Y\underline{X}^\alpha \in J^{(r+1)}.$$

(2) Se $Y\underline{X}^\alpha \in (\underline{X}, Y) \cdot J^{(r+1)}$, temos duas possibilidades: $Y\underline{X}^\alpha = YX_{i_1} \cdots X_{i_t} \cdot \underline{X}^\beta$, com $\underline{X}^\beta \in J^{(r+1)}$, o que implica $\underline{X}^\alpha \in I^{(r+1)} \subseteq \Sigma_r$ ou $Y\underline{X}^\alpha = X_{i_1} \cdots X_{i_t} \cdot Y\underline{X}^\beta$, com $Y\underline{X}^\beta \in J^{(r+1)}$. Neste caso, pelo item (1), $\underline{X}^\beta \in I^{(r)}$ e, portanto, $\underline{X}^\alpha \in (\underline{X}) \cdot I^{(r)}$.

Podemos, portanto, supor

$$Y\underline{X}^\alpha = Y\underline{X}^\beta \cdot \underline{X}^\ell, \text{ com } Y\underline{X}^\beta \in J^{(r+1-\ell)} \text{ e } \underline{X}^\ell \in J^{(\ell)} \quad 1 \leq \ell \leq r.$$

Se $r + 1 - \ell = 1$, então $r = \ell$ e portanto $\underline{X}^\alpha \in (\text{Supp}(\underline{X}^\beta)) \cdot I^{(r)}$. Por outro lado, se $r + 1 - \ell \geq 2$, então $\ell \leq r - 1$ e pela parte (1), $\underline{X}^\beta \in I^{(r-j)}$, o que nos fornece $\underline{X}^\alpha \in \Sigma_r$.

Reciprocamente. $\underline{X}^\alpha = X_{i_1} \cdots X_{i_t} \cdot \underline{X}^\beta$, com $\underline{X}^\beta \in I^{(r)}$, então $YX_{i_1} \cdots X_{i_t} \in J$ e conseqüentemente $Y\underline{X}^\alpha \in J \cdot J^{(r)}$. Por outro lado, se $\underline{X}^\alpha = \underline{X}^\beta \cdot \underline{X}^\ell$, com $\underline{X}^\beta \in I^{(r-\ell)}$ e \underline{X}^ℓ , respectivamente em $I^{(r-\ell)}$ e $I^{(\ell)}$, então $Y\underline{X}^\beta \in J^{(r-\ell+1)}$ e portanto $Y\underline{X}^\alpha \in J^{(r+1-\ell)} \cdot J^{(\ell)}$.

(3)(\Leftarrow) Indução sobre q . Pelo item (2) acima, afirmação é válida para $q = 1$. Suponha que seja válida para $q \geq 1$, e que $q + 1 \leq \mathbf{b}(\alpha)$. Queremos mostrar que $Y^{q+1}\underline{X}^\alpha$ é genuíno. Suponha por absurdo que não, i.é :

$$Y^{q+1}\underline{X}^\alpha = Y^{q'}\underline{X}^{\alpha'} \cdot Y^{q''}\underline{X}^{\alpha''}$$

Com

$$\nu_J(Y^{q+1}\underline{X}^\alpha) = \nu_J(Y^{q'}\underline{X}^{\alpha'}) + \nu_J(Y^{q''}\underline{X}^{\alpha''}).$$

Como $q + 1 \leq \mathbf{b}(\alpha)$, temos

$$\mathbf{b}(Y^{q+1}\underline{X}^\alpha) = \mathbf{b}(Y^q\underline{X}^\alpha) = \mathbf{b}(\alpha),$$

e de acordo com 4.10, $\nu_J(Y^q\underline{X}^\alpha) = \nu_J(Y^{q+1}\underline{X}^\alpha) - 1$. Portanto ao derivar em relação a Y , obtemos :

$$\begin{aligned} Y^q\underline{X}^\alpha &= Y^{q'-1}\underline{X}^{\alpha'} \cdot Y^{q''}\underline{X}^{\alpha''} \\ &= Y^{q'}\underline{X}^{\alpha'} \cdot Y^{q''-1}\underline{X}^{\alpha''} \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned} \nu_J(Y^{q'-1}\underline{X}^{\alpha'}) + \nu_J(Y^{q''}\underline{X}^{\alpha''}) &= \nu_J(Y^q\underline{X}^\alpha) \\ \text{ou} \\ \nu_J(Y^{q'}\underline{X}^{\alpha'}) + \nu_J(Y^{q''-1}\underline{X}^{\alpha''}) &= \nu_J(Y^q\underline{X}^\alpha) \end{aligned}$$

conseqüentemente $Y^q\underline{X}^\alpha$ não é genuíno, e isto contradiz a hipótese de indução. Logo $Y^{q+1}\underline{X}^\alpha$ é genuíno.

(3)(\Rightarrow) Se $q > \mathbf{b}(\alpha)$, então para todo $X_i \in \text{Supp}(\underline{X}^\alpha)$, $\mathbf{b}(Y^{q-1} \cdot \frac{X_i^\alpha}{X_i}) = q - 1$. Portanto:

$$\begin{aligned} \nu_J\left(\frac{Y^{q-1}\underline{X}^\alpha}{X_i}\right) &= (q - 1 + |\alpha| - 1 - (q - 1)) \\ &= (q + |\alpha| - q) - 1 \\ &= \nu_J(Y^q\underline{X}^\alpha) - 1 \end{aligned}$$

logo

$$Y^q\underline{X}^\alpha = YX_i \cdot \frac{Y^{q-1}\underline{X}^\alpha}{X_i} \in J \cdot J^{(\nu_J(Y^q\underline{X}^\alpha)-1)}$$

nos leva a uma contradição, e isto prova $q \leq \mathbf{b}(\alpha)$.

Se $\underline{X}^\alpha = X_i \cdot \underline{X}^\beta$, com $\nu_J(\beta) = \nu_J(\alpha)$, então : $\mathbf{b}(\beta) = \mathbf{b}(\alpha) - 1 \geq q - 1$, donde $\mathbf{b}(Y^{q-1}\underline{X}^\beta) = \mathbf{b}(\alpha) - 1$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \nu_J(Y^{q-1}\underline{X}^\beta) &= q - 1 + |\beta| - (\mathbf{b}(\alpha) - 1) \\ &= q - 1 + |\alpha| - 1 - (\mathbf{b}(\alpha) - 1) \\ &= q + |\alpha| - \mathbf{b}(\alpha) - 1 \\ &= \nu_J(Y^q\underline{X}^\alpha) - 1 \end{aligned}$$

Desta forma $YX_i \cdot Y^{q-1} \cdot \frac{X_i^\alpha}{X_i} \in J \cdot J^{(\nu_J(Y^q\underline{X}^\alpha)-1)}$, nos leva a uma nova contradição. Isto mostra que $\underline{X}^\alpha \notin (\underline{X})I^{(\nu_J(\alpha))}$.

Finalmente, suponha $\underline{X}^\alpha = \underline{X}^\sigma \cdot \underline{X}^\beta$, com $\nu_I(\underline{X}^\sigma) + \nu_I(\underline{X}^\beta) = \nu_I(\underline{X}^\alpha)$. Neste caso, $\mathbf{b}(\alpha) = \mathbf{b}(\beta) + \mathbf{b}(\sigma)$. Uma vez que $q \leq \mathbf{b}(\alpha)$, podemos escrever $q = q' + q''$ com $q' \leq \mathbf{b}(\beta)$, e $q'' \leq \mathbf{b}(\sigma)$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\nu_J(Y^{q'} \cdot \underline{X}^\beta) &= q' + \nu_I(\underline{X}^\beta) \\ \nu_J(Y^{q''} \cdot \underline{X}^\sigma) &= q'' + \nu_I(\underline{X}^\sigma).\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\nu_J(Y^{q'} \cdot \underline{X}^\beta) + \nu_J(Y^{q''} \cdot \underline{X}^\sigma) &= q' + \nu_I(\underline{X}^\beta) + q'' + \nu_I(\underline{X}^\sigma) \\ &= q + \nu_I(\underline{X}^\alpha) \\ &= \nu_J(Y^q \underline{X}^\alpha)\end{aligned}$$

e isto significa que :

$$Y^q \underline{X}^\alpha \in J^{(q' + \nu_I(\underline{X}^\beta))} \cdot J^{(\nu_J(Y^q \underline{X}^\alpha) - (q' + \nu_I(\underline{X}^\beta)))}.$$

Contradizendo o fato de $Y^q \underline{X}^\alpha$ ser genuíno.

Concluimos, portanto que $\underline{X}^\alpha \notin (\underline{X}) \cdot I^{(\nu_I(\alpha))} + \Sigma_{\nu_I(\alpha)}$. \square

O Teorema 5.28 acima mostra que os cones sobre os subgrafos cujos produtos de vértices são elementos genuínos também são genuínos e por isso estes novos elementos contribuem para o incremento do tipo de geração de G . Em particular, para um ciclo puro de ordem ímpar, C_n , o tipo de geração da álgebra de Rees simbólica do cone, $C(C_n)$, é exatamente n . Mais precisamente, se $I = I(C(C_n))$, pondo $h = \text{ht } I(C_n)$, $V(C_n) = \{X_1, \dots, X_n\}$, e $V(C(C_n)) = \{Y, X_1, \dots, X_n\}$. Tem-se

$$\mathcal{R}^{(I)} = R[It, I^{(2)}, X_1 \cdots X_n t^h, Y X_1 \cdots X_n t^{h+1}, \dots, Y^{h-1} X_1 \cdots X_n t^n]$$

De um modo geral se a álgebra de Rees simbólica de um grafo G é dada por:

$$R[It, \mathcal{M}_1 t^{\nu_I(\mathcal{M}_1)}, \dots, \mathcal{M}_p t^{\nu_I(\mathcal{M}_p)}],$$

então a álgebra de Rees simbólica do cone sobre G é dada por:

$$R[It, I^{(2)} t^2, \mathcal{M}_1 t^{\nu_I(\mathcal{M}_1)}, \dots, Y^{\mathbf{b}(\mathcal{M}_1)} \mathcal{M}_1 t^{|\mathcal{M}_1|}, \dots, \mathcal{M}_p t^{\nu_I(\mathcal{M}_p)}, \dots, Y^{\mathbf{b}(\mathcal{M}_p)} \mathcal{M}_p t^{|\mathcal{M}_p|}]$$

Aqui, $|\mathcal{M}_p|_{\nu_I(\mathcal{M}_p) + \mathbf{b}(\mathcal{M}_p)}$ denota o grau de \mathcal{M}_p . A necessidade de considerar os termos de $I^{(2)} t^2$ justifica-se pela existência de novos triângulos cujas bases são as arestas de G e que obviamente não podem ser obtidos como combinação dos outros termos de $\mathcal{R}^{(I)}$.

5.3 Graus dos geradores de $\mathcal{F}_r(I)$.

Polarização

Seja $I = I(G)$ o ideal de arestas de um grafo G nos vértices X_1, \dots, X_n . Dado um monômio $\underline{X}^\alpha \in I$, com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, considere o anel de polinômios a $|\alpha|$ variáveis:

$$k[\underline{Y}] = k[\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_n], \text{ onde } \underline{Y}_i = Y_{i1}, \dots, Y_{i\alpha_i} \text{ é um bloco com } \alpha_i \text{ variáveis.}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) = X_1, \dots, X_n$, e conseqüentemente $I_\alpha = I$. Considere o ideal $J \subset k[\underline{Y}]$ cujos geradores são os elementos

$$\{Y_{it}Y_{j\ell} \mid X_iX_j \in I\},$$

e o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \Theta_\alpha := k[\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_n] &\longrightarrow k[\underline{X}] \\ Y_{ij} &\longmapsto X_i \quad j_i = 1, \dots, \alpha_i. \end{aligned}$$

O ideal J descrito acima, é o ideal do grafo G_α^* obtido adicionando-se, para cada vértice X_i , $\alpha_i - 1$ novos vértices de mesma vizinhança que X_i . Defina $\underline{Y}^* = \prod_{i=1, \dots, n} \prod_{t_i=1, \dots, \alpha_i} Y_{it_i}$.

Proposição 5.29 (*char $k = 0$*) *Com a notação acima, temos:*

- (i) $\Theta_\alpha(J^{(r)}) = I^{(r)}$;
- (ii) $\text{ht}(J) = \nu_J(\alpha)$ e, para todo $\beta \in \mathbb{N}^{\alpha_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{\alpha_n}$, $\nu_J(\underline{Y}^\beta) = \nu_I(\Theta_\alpha(\underline{Y}^\beta))$;
- (iii) \underline{X}^α é genuíno se, e somente se, $\underline{Y}^* = \prod_{i=1, \dots, n} \prod_{t_i=1, \dots, \alpha_i} Y_{it_i}$ é genuíno.

Demonstração. (i) Claramente temos $\Theta_\alpha(J) = I$, e $I^{(r)} \subseteq \Theta_\alpha(J^{(r)}) \quad \forall r$.

Para mostrar a inclusão contrária, procederemos por indução sobre r . Supondo válida para $r \geq 1$, seja $\underline{Y}^\beta \in J^{(r+1)}$. De acordo com a caracterização das potências simbólicas via operadores diferenciais, temos que:

$$\underline{Y}^\beta \in J^{(r+1)} \Leftrightarrow \frac{\underline{Y}^\beta}{Y_{ij}} \in J^{(r)}, \quad \forall Y_{ij} \in \text{Supp}(\underline{Y}^\beta).$$

Usando a hipótese de indução temos:

$$\Theta_{\underline{\alpha}}\left(\frac{\underline{Y}^{\beta}}{\underline{Y}_{ij}}\right) = \frac{\Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\beta})}{X_i} \in I^{(r)},$$

e novamente pela definição de potência simbólica, temos $\Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\beta}) \in I^{(r+1)}$.

(ii) É imediato que $\Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^*) = \underline{X}^{\alpha}$. Além disto, já sabemos que

$$\nu_J(\underline{Y}^*) = \text{ht}(J).$$

Isto por sua vez, significa que $\underline{Y}^* \notin J^{(\text{ht}(J)+1)}$. Pelo item (i), $\underline{X}^{\alpha} \notin I^{(\text{ht}(J)+1)}$. Por outro lado, $\underline{X}^{\alpha} \in I^{(\text{ht}(J))}$, e portanto, pela definição de ν_I , temos $\text{ht}(J) = \nu_I(\alpha)$. O mesmo argumento demonstra o caso geral.

(iii) Basta observar que para cada monômio dividindo \underline{X}^{α} , existe um monômio de $k[\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_n]$ livre de quadrado, na sua pré imagem pela $\Theta_{\underline{\alpha}}$. Os itens (i) e (ii), juntamente com a Proposição 5.10, completam a demonstração. De fato, Se \underline{Y}^* é não genuíno, digamos $\underline{Y}^* = \underline{Y}^{\beta} \underline{Y}^{\sigma}$, com $\nu_J(\underline{Y}^{\beta}) + \nu_J(\underline{Y}^{\sigma}) = \text{ht}(J)$, então $\nu_J(\underline{Y}^{\beta}) + \nu_J(\underline{Y}^{\sigma}) = \nu_I(\alpha)$. Por outro lado, $\underline{X}^{\alpha} = \Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\beta}) \Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\sigma})$, e pelo item (i) $\nu_I(\Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\beta})) + \nu_I(\Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\sigma})) = \nu_I(\alpha)$. Portanto \underline{X}^{α} é não genuíno.

Reciprocamente, se $\underline{X}^{\alpha} = \underline{X}^{\omega} \underline{X}^{\eta}$, com $\nu_J(\omega) + \nu_I(\eta) = \nu_I(\alpha)$, defina $\underline{Y}^{\beta} = \prod_{\substack{\{i|X_i \in \text{supp}(\underline{X}^{\omega})\} \\ i=1, \dots, \omega_i}} Y_{it_i}$. Temos $\Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\beta}) = \underline{X}^{\omega}$. Por outro lado, uma vez que $Y_{it} Y_{jt} \in J \Leftrightarrow X_i X_j \in I$, vemos que a dimensão do subgrafo de G_{α}^* gerado pelo suporte de \underline{Y}^{β} é igual a $\mathbf{b}(\omega)$, e portanto

$$\begin{aligned} \text{ht } I(G(\underline{Y}^{\beta})) &= \nu_J(\underline{Y}^{\beta}) \\ &= |\beta| - \mathbf{b}(\omega) \\ &= |\omega| - \mathbf{b}(\omega) \\ &= \nu_I(\omega). \end{aligned}$$

Defina $\underline{Y}^{\sigma} = \frac{\underline{Y}^*}{\underline{Y}^{\beta}}$, temos $\Theta_{\underline{\alpha}}(\underline{Y}^{\sigma}) = \underline{X}^{\eta}$, e novamente pelo mesmo argumento $\text{ht } I(G(\underline{Y}^{\sigma})) = \nu_J(\underline{Y}^{\sigma}) = \nu_I(\eta)$. Concluimos, portanto, que :

$$\text{ht } J = \nu_I(\alpha) = \nu_J(\beta) + \nu_J(\sigma),$$

isto é,

$$\underline{Y}^* = \underline{Y}^{\beta} \underline{Y}^{\sigma} \in J^{(\nu_J(\beta))} J^{(\text{ht } J - \nu_J(\beta))}.$$

□

A polarização permite implementar com um “custo computacional” baixo, a ordem simbólica ν_I , descrita em 4.8. De fato ela permite calcular em *Macaulay2* ([7]), o valor de ν_I para monômios cujos suportes tem cardinalidade razoavelmente grande, e desta forma possibilita a procura de novos exemplos de elementos genuínos. Além disto, a polarização permite transportar as propriedades e limitações dos genuínos livres de quadrado para os não livres de quadrados.

A função de ordem associada a filtração simbólica, ajuda a estabelecer a posição exata em que um monômio ocorre como elemento genuíno (se ele for genuíno em alguma ordem). O teorema a seguir nos fornece cotas inferiores e superiores para o grau dos elementos genuínos em um grafo. Estas cotas não podem ser melhoradas, visto que elas são alcançadas respectivamente pelos grafos completos e pelos ciclos de ordem ímpar.

Lema 5.30 *Seja G um grafo simples, com n vértices e $I = I(G) \subset k[\underline{X}]$, seu ideal de arestas. Se $\dim k[G] \geq \frac{n}{2}$ então $X_1 \cdots X_n \in \Sigma_h + (\underline{X})I^{(h)}$, onde $h = \text{ht}(I)$.*

Demonstração. Se G não é conexo, digamos $G = D \cup H$, com $V(D) \times V(H) \cap \mathcal{A}(G) = \emptyset$, então $\text{ht } I(G) = \text{ht } I(D) + \text{ht } I(H)$, e conseqüentemente $X_1 \cdots X_n \in I^{(\text{ht } I(D))} I^{(\text{ht } I(H))}$. Podemos portanto supor que G é conexo.

Ponhamos $s := \dim k[G] = n - h$. Para cada conjunto maximal S' de vértices independentes, seja $q(S')$ o máximo das cardinalidades de subconjuntos de arestas independentes (emparelhamento) $M_{S'} \subseteq \mathcal{A}(G)$, possuindo a seguinte propriedade:

$$X_i X_j \in M_{S'} \Rightarrow X_i \in S' \text{ ou } X_j \in S'.$$

Defina $q = \max\{q(S') \mid S' \text{ é conjunto maximal de independentes}\}$. Seja S o conjunto maximal de independentes para o qual $q = q(S)$. Rotulemos os vértices de G de forma que:

- $S = \{Y_1, \dots, Y_s\}$ e $\mathcal{V}(G) \setminus S = \{X_1, \dots, X_h\}$
- $M_S = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_q, Y_q)\}$

Se $q = h$, o resultado segue de imediato. Suponhamos portanto que $q < h \leq s$. Como G é conexo, podemos sem perda de generalidade, supor que $X_1 \in \Gamma(Y_{q+1}, \dots, Y_s) = \bigcup_{q+1 \leq i \leq s} \Gamma(Y_i)$, digamos $X_1 \in \Gamma(Y_{q+1})$. Consideremos a seguinte recursão:

$$N_1 = \{(X_1, Y_1)\};$$

$$N_2 = N_1 \cup \{(X_i, Y_i) \mid (X_i, Y_i) \in M_S \text{ e } X_i \in \Gamma(Y_1)\};$$

$$N_r = N_{r-1} \cup \{(X_i, Y_i) \mid (X_i, Y_i) \in M_S \text{ e } X_i \in \Gamma(Y_b) \text{ para algum } Y_b \text{ tal que } (X_b, Y_b) \in N_{r-1}\}$$

Como $V(G)$ é finito, a seqüência

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_r \subseteq \dots$$

estabiliza, fornecendo um subconjunto $N \subset M_S$ tal que :

$$(X_i, Y_i) \notin N \Rightarrow X_i \notin \Gamma(Y_b) \quad \forall (X_b, Y_b) \in N.$$

Se $t := \#N$, podemos re-indexar os vértices presentes nas arestas de M_S , de forma que :

$$(P1) \quad S = \{Y_1, \dots, Y_s\} \text{ e } \mathcal{V}(G) \setminus S = \{X_1, \dots, X_h\}$$

$$(P2) \quad M_S = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_q, Y_q)\}$$

$$(P3) \quad N = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_t, Y_t)\}$$

(P4) Se $(X_i, Y_i) \in N$, então existe um caminho da forma:

$$X_1, Y_1, X_{i_1}, Y_{i_1}, \dots, X_{i_a}, Y_{i_a}, X_i, Y_i$$

inteiramente contido no subgrafo gerado por N

$$(P5) \quad \{Y_1, \dots, Y_t\} \cap \Gamma(X_{t+1}, \dots, X_h) = \emptyset.$$

A propriedade **P4** segue imediatamente da definição de N . Para provar que N possui **P5**, suponhamos que para algum $i \geq t+1$, tenha-se $X_i \in \Gamma(Y_j)$, com $(X_j, Y_j) \in N$. Pela maximalidade de N , devemos ter necessariamente $i > q$. Aplicando **P4**, e a escolha de X_1 , obtemos um caminho :

$$Y_{q+1}, X_1, Y_1, X_{i_1}, Y_{i_1}, \dots, X_{i_a}, Y_{i_a}, X_j, Y_j, X_i.$$

Defina $Q = \{(X_1, Y_1), (X_{i_1}, Y_{i_1}), \dots, (X_{i_a}, Y_{i_a}), (X_j, Y_j), (X_i, Y_i)\} \subseteq N \subset M_S$. O emparelhamento dado por :

$$\{(X_1, Y_{q+1}), (X_{i_1}, Y_1), (X_{i_2}, Y_{i_1}), \dots, (X_j, Y_{i_a}), (X_i, Y_j)\} \cup M_S \setminus Q$$

tem cardinalidade $q+1$, contradizendo a maximalidade de q . Logo **P5** é verdadeira.

Considere os subgrafos G_1 e G_2 induzidos, respectivamente, por N e por $V(G) \setminus V(G_1)$. Como $S \setminus \{Y_1, \dots, Y_t\} \subset V(G_2)$, temos $\dim k[G_2] \geq s-t$. Por outro lado, se fosse estritamente maior que $s-t$, como $\Gamma(V(G_2)) \cap \{Y_1, \dots, Y_t\} = \emptyset$, obteríamos

em G um conjunto com $s + 1$ vértices independentes, contrariando o fato de que $s = \dim k[G]$. Sendo assim, $\dim k[G_2] = s - t$, e portanto $\text{ht}(I(G_2)) = n - 2t - (s - t) = n - s - t = h - t$.

Por outro lado, como G_1 possui um produto de t arestas, $\text{ht}(I(G_1)) \geq t$. Entretanto como $\text{ht}(I(G_1)) + \text{ht}(I(G_2)) \leq h$, temos obrigatoriamente $\text{ht}(I(G_1)) = t$. Portanto $X_1 \dots X_n \in I^{(t)} I^{(h-t)}$. \square

Teorema 5.31 *Seja G um grafo, $I = I(G)$ seu ideal de arestas. Se \underline{X}^α é genuíno mínimo (isto é, se $\underline{X}^\alpha \in I^{(r)} \setminus \Sigma_r \cup (\underline{X})I^{(r)}$), então*

$$r + 1 \leq |\alpha| \leq 2r - 1.$$

Demonstração. A primeira desigualdade é imediata. Pelo Teorema 4.14, temos $r = \nu(\alpha)$. Considere G_α^* o grafo associado a α pela Polarização. De acordo com 5.29 $\text{ht} I(G_\alpha^*) = \nu(\alpha)$ e Y é genuíno mínimo. Aplicando o lema anterior, vemos que $b(\alpha) = \dim k[G_\alpha^*] \leq \text{ht} I(G_\alpha^*) - 1$. Conseqüentemente:

$$|\alpha| = \nu(\alpha) + b(\alpha) \leq \nu(\alpha) + \text{ht} I(G_\alpha^*) - 1 = 2\nu(\alpha) - 1.$$

\square

Proposição 5.32 *Seja I o ideal de arestas de um grafo G . Se $\underline{X}^\alpha \in I^{(r)}$, com $|\alpha| = r + 1$, então \underline{X}^α é livre de quadrados e $G(\alpha)$ é um grafo completo. A recíproca vale se $r = \nu(\alpha)$.*

Demonstração. Dado Se $r = 1$, então $G(\alpha)$ é uma aresta. Suponhamos, portanto, que $r \geq 2$. Seja $\{X_i, X_j\} \subseteq V(G(\alpha))$. Defina $\underline{X}^\beta = \frac{X_i^\alpha}{X_i X_j}$, e considere o operador diferencial dado por $\frac{\partial^\beta}{\partial \underline{X}^\beta}$. Temos $|\beta| = |\alpha| - 2 \leq r - 1$, e portanto $\frac{\partial^\beta X_i^\alpha}{\partial \underline{X}^\beta} = c X_i X_j \in I$, com $c \neq 0$. Segue que $G(\alpha)$ é completo.

Para mostrar que \underline{X}^α é livre de quadrado, suponhamos que $\alpha_i > 1$, para algum i , e escolha $X_j = X_i$ na definição de $\frac{\partial^\beta}{\partial \underline{X}^\beta}$, para obter $X_i^2 \in I$. Um absurdo. Logo \underline{X}^α é livre de quadrado. A segunda parte é imediata. \square

Corolário 5.33 *Seja G um grafo simples, $I = I(G)$ seu ideal de arestas. Se $\underline{X}^\alpha \in I^{(r)} \setminus \Sigma_r \cup (\underline{X})I^{(r)}$ e $\alpha_i > 1$, para algum i , então*

$$r + 2 \leq |\alpha| \leq 2r - 1.$$

Demonstração. Imediata.

Corolário 5.34 Dado $r \geq 1$, seja $I \subset k[\underline{X}]$ o ideal de arestas de um grafo G . Se $\underline{X}^\alpha \in I^{(r)} \setminus (\underline{X})I^{(r)}$, então $|\alpha| \leq 2r$. Em particular,

$$r + 1 \leq \text{indeg}(I^{(r)}) \leq 2r, \quad \forall r > 1.$$

Demonstração. Se $r = 1$ o resultado é imediato.

Suponhamos válido para $r \leq t-1$ e seja $\underline{X}^\alpha \in \frac{I^{(t+1)}}{(\underline{X})I^{(t+1)}}$, não nulo. Como $I^{(t+2)} \subset (\underline{X})I^{(t+1)}$, temos $\nu_I(\alpha) = t + 1$.

Se \underline{X}^α é genuíno, o resultado segue do Teorema 5.31. Se por outro lado $\underline{X}^\alpha = \underline{X}^\theta \underline{X}^\beta \in \Sigma_{t+1}$, com $\nu_I(\theta) + \nu_I(\beta) = \nu_I(\alpha)$, então, obrigatoriamente, temos $\underline{X}^\theta \in \frac{I^{(\nu_I(\theta))}}{(\underline{X})I^{(\nu_I(\theta))}}$, e $\underline{X}^\beta \in \frac{I^{(\nu_I(\beta))}}{(\underline{X})I^{(\nu_I(\beta))}}$, não nulos. Portanto, usando a hipótese de indução, obtém-se

$$\begin{aligned} |\alpha| = |\theta| + |\beta| &\leq 2(\nu_I(\theta) + \nu_I(\beta)) \\ &\leq 2\nu_I(\alpha) \\ &\leq 2(t + 1) \end{aligned}$$

□

5.4 Outras questões

Dado um complexo simplicial Δ , diremos que o ideal das não faces, $I = I_\Delta$ é *sensível ao suporte* se para todo par de monômios $(\underline{X}^\alpha, \underline{X}^\beta)$ de mesmo suporte com $\underline{X}^\alpha | \underline{X}^\beta$, e $\nu_I(\beta) = \nu_I(\alpha) + 1$, tem-se:

$$\underline{X}^\alpha \in \Sigma_{\nu_I(\alpha)} \Rightarrow \underline{X}^\beta \in \Sigma_{\nu_I(\beta)}.$$

Observe que os complexos associados aos ciclos puros e aos grafos completos são sensíveis ao suporte.

Teorema 5.35 Seja $I = I_\Delta$ ideal das não faces de um complexo simplicial sensível ao suporte. Sejam $\underline{X}^\alpha, \underline{X}^\beta \in I$, de mesmo suporte. Se $\underline{X}^\alpha | \underline{X}^\beta$, e $\underline{X}^\alpha \in \Sigma_{\nu_I(\alpha)}$, então $\underline{X}^\beta \in \Sigma_{\nu_I(\beta)}$.

Demonstração. (indução sobre $\nu_I(\beta) - \nu_I(\alpha)$)

Se $\nu_I(\beta) - \nu_I(\alpha) = 0$, então $\underline{X}^\beta = \underline{X}^\alpha \cdot \underline{X}^\gamma = \underline{X}^{\alpha'} \cdot \underline{X}^{\alpha''} \cdot \underline{X}^\gamma$. Com $\underline{X}^{\alpha'} \cdot \underline{X}^{\alpha''} \in \Sigma_{\nu_I(\alpha)}$.

Suponhamos que a proposição seja válida sempre que $\nu_I(\beta) - \nu_I(\alpha) \leq q$ e sejam $\underline{X}^\alpha | \underline{X}^\beta \in I$, de mesmo suporte, com $\nu_I(\beta) - \nu_I(\alpha) = q + 1$, e $\underline{X}^\alpha \in \Sigma_{\nu_I(\alpha)}$. Existem

$X_{i_1}, \dots, X_{i_t} \in \text{Supp}(\underline{X}^\beta)$ tais que $\beta_{i_j} \geq \alpha_{i_j} + 1$ com $\underline{X}^\theta = \frac{\underline{X}^\beta}{X_{i_1} \cdots X_{i_t}} \in I^{(\nu_I(\beta)-1)}$ satisfazendo $\nu_I(\theta) = \nu_I(\beta) - 1$, e $\text{Supp}(\underline{X}^\theta) = \text{Supp}(\underline{X}^\alpha)$. Isto é imediato pois caso contrário teríamos $\nu_I(\beta) = \nu_I(\alpha)$.

Temos $\underline{X}^\alpha | \underline{X}^\theta$, ambos de mesmo suporte e $\nu_I(\theta) - \nu_I(\alpha) = q$. Por hipótese de indução, $\underline{X}^\theta \in \Sigma_{\nu(\theta)}$. Por outro lado $\underline{X}^\theta | \underline{X}^\beta$, e $\nu_I(\beta) - \nu_I(\theta) = 1$ e como Δ tem a propriedade de base, $\underline{X}^\beta \in \Sigma_{\nu_I(\beta)}$. \square

Dado $\underline{X}^\alpha \in I$, $X_{\underline{\alpha}}$ designará o (único) monômio livre de quadrados de mesmo suporte que \underline{X}^α .

Corolário 5.36 *Seja $I = I(G)$ o ideal de arestas de um grafo G , satisfazendo à conclusão do Teorema 5.35. Se $\underline{X}^\alpha \in I$ é genuíno e mínimo, então $X_{\underline{\alpha}}$ é genuíno e mínimo.*

Demonstração. O Teorema 5.35 garante que $X_{\underline{\alpha}}$ é genuíno. Suponhamos, por via de redução ao absurdo, que $X_{\underline{\alpha}} = X_{i_1} \cdots X_{i_t} \cdot \underline{X}^\theta$, com $\nu_I(\theta) = \text{ht}(I_{\underline{\alpha}})$. Os vértices X_{i_1}, \dots, X_{i_t} são necessariamente independentes. Afirmamos que eles são vértices isolados do subgrafo gerado pelo suporte de \underline{X}^α . De fato se existisse $X_{i_r} \in \text{Supp}(\underline{X}^\theta)$, adjacente sobre algum elemento de X_{i_1}, \dots, X_{i_t} , então $X_{\underline{\alpha}} \in I \cdot I^{(\text{ht}(I_{\underline{\alpha}})-1)}$, uma contradição. Portanto X_{i_1}, \dots, X_{i_t} faz parte de todo conjunto maximal de independentes e, conseqüentemente, $\underline{X}^\alpha \in (X_{i_1}, \dots, X_{i_t}) \cdot I^{(\nu_I(\alpha))}$. Uma contradição, logo $X_{\underline{\alpha}} \notin (\underline{X}) \cdot I^{(\text{ht}(I_{\underline{\alpha}}))}$. \square

Observemos que, em verdade, o Teorema 5.35 diz que todos os monômios de mesmo suporte que um genuíno não livre de quadrado, e que o dividem, também são genuínos.

Parece, então, natural propor a seguinte

Conjectura 5.37

- Todos os ideais de arestas são sensíveis ao suporte.
- Os pseudo-ciclos têm posto simbólico igual a sua altura.

Um corolário imediato da validade destas conjecturas é que o tipo de geração da álgebra de Rees simbólica é menor ou igual ao número de vértices do grafo.

Apêndice A

Noções de grafos

A referência básica é [2]. Todos os grafos nesta tese serão finitos e *simples* (isto é, desprovidos de orientação ou lacetes). Um grafo G será também indicado por $\{\mathcal{V} = \mathcal{V}(G), \mathcal{A} = \mathcal{A}(G)\}$ para enfatizar seus elementos de definição (*vértices e arestas*, respectivamente).

Vértices $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ são ditos *adjacentes* se $(v_1, v_2) \in \mathcal{A}(G)$. Dois vértices $v_1, v_2 \in \mathcal{V}(G)$ de um grafo G são ditos *independentes* se $(v_1, v_2) \notin \mathcal{A}(G)$. Um subconjunto $S \subseteq \mathcal{V}$ é dito um *conjunto de vértices independentes* se v_1, v_2 são independentes para todos $v_1, v_2 \in S$, com $v_1 \neq v_2$.

Um grafo é *completo* se seus vértices são adjacentes, dois a dois.

Se G, H são grafos, dizemos que H é *subgrafo* de G , e escrevemos $H \subseteq G$, se $\mathcal{V}(H) \subseteq \mathcal{V}(G)$ e $\mathcal{A}(H) \subseteq \mathcal{A}(G)$. Se, além disto, $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(G) \cap (\mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H))$, H é dito um *subgrafo induzido* de G , e, neste caso, denotamos por $G \sqsubseteq H$.

Observe que dado um grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A}(G))$, e um subconjunto $V' \subseteq \mathcal{V}$, existe um único subgrafo induzido de G , cujos vértices são os elementos de V' . O subgrafo induzido é denominado *subgrafo gerado* por V' .

Um *caminho*, de comprimento r , escrito \wp_r , é um grafo cujos vértices e arestas são, respectivamente, a menos de notação,

$$\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, r\} \text{ e } \mathcal{A} = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{r-1, r\}\}$$

Caminhos que são subgrafos de um grafo G são ditos *caminhos em G* .

Dado $r \in \mathbb{N}(r > 2)$, um *ciclo*, de ordem r , escrito C_n , é um grafo cujos vértices e arestas são, respectivamente, a menos de notação,

$$\mathcal{V} = \{1, \dots, r\} \text{ e } \mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \dots, \{r-1, r\}, \{r, 1\}\}$$

Ciclos que são subgrafos de um grafo G são ditos *ciclos de G* .

Dado um ciclo C em G , as arestas do subgrafo induzido por C , complementares às do subgrafo C são chamadas sugestivamente *cordas* de C . Se $C \subseteq G$ coincidir com o subgrafo induzido correspondente, diremos que o subgrafo induzido é um *ciclo simples* (ou um *ciclo sem cordas*).

Um grafo G é dito *conexo* se para todo par de vértices de G existe um caminho em G ligando estes vértices. Um grafo r -*conexo* ($r \in \mathbb{N}_+$) se para todo subconjunto $V' \subset \mathcal{V}(G)$, de cardinalidade menor ou igual a $r - 1$, o subgrafo induzido $G(\mathcal{V}(G) \setminus V')$ é conexo.

Um grafo G é uma *árvore* se é conexo e todos os seus subgrafos conexos são caminhos.

Seja G um grafo. Dado $v \in \mathcal{V}(G)$, o *grau de incidência* de v em G , escrito $d_G(v)$ é a cardinalidade do conjunto de vértices de G que são adjacentes a v . Os vértices de grau de incidência zero em G são chamados de vértices isolados.

Se G é r -conexo, então $d_G(v) \geq r$ para todo vértice.

Um dos invariantes básicos de um grafo é o máximo das cardinalidades de conjuntos de vértices independentes. Este invariante desempenhou um importante papel no desenvolvimento deste trabalho.

Seja G um grafo de vértices $\mathcal{V}(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Uma *cobertura* de G é um subconjunto $P \subset \mathcal{V}(G)$ tal que para toda aresta $\{v_i, v_j\}$ tem-se $v_i \in P$ ou $v_j \in P$. Uma cobertura é ser *mínima* se nenhum de seus subconjuntos próprios é uma cobertura de G , e será dita *minimal* se não existe cobertura de cardinalidade menor. A cardinalidade de uma cobertura minimal de G , escrita $\alpha_o(G)$, é também designada como o *número de cobertura* de G , enquanto $\beta_o(G) := \#\mathcal{V}(G) - \alpha_o(G)$ é dito ser a dimensão de G .

Da definição segue que o complementar de uma cobertura é um conjunto de vértices independentes em G , e vice-versa. Portanto, o complementar de cobertura mínima (resp. minimal) corresponde a um conjunto máximo (resp., maximal) de vértices independentes em G . Também se ve que se $V' \subset \mathcal{V}(G)$ é o conjunto de vértices de um subgrafo $G' \subset G$, e P é uma cobertura de G , então $P' = P \cap V'$ é uma cobertura do grafo G' . Reciprocamente, toda cobertura de G' pode ser completada de forma a tornar-se uma cobertura de G .

Um grafo G é dito *bipartido* se admite uma cobertura composta por vértices independentes. Se G é bipartido, então G admite uma cobertura minimal composta por vértices isolados.

Teorema A.1 *Um grafo não trivial, G , é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de ordem ímpar.*

Demonstração. Cf., e.g., [2].

Apêndice B

Generalidades sobre ideais monomiais

Estruturas combinatórias, tais como grafos e complexos, podem ser codificadas em termos de certas álgebras graduadas cujo ideal de definição é um ideal monomial. A decomposição primária deste ideal determina completamente a natureza combinatória do grafo ou do complexo simplicial em questão.

B.1 Decomposição primária de ideais monomiais.

Nesta seção reveremos brevemente as principais propriedades de ideias monomiais usadas nesta tese são. Seja $R = k[X_1, \dots, X_n]$ um anel de polinômios e $I \subset R$, um ideal gerado por monômios.

- (a) Se $f = \sum \lambda_i \mathcal{M}_i \in I$, então $\mathcal{M}_i \in I$, para todo $\lambda_i \neq 0$.
- (b) Dados monômios $\underline{X}^\alpha, \underline{X}^\beta \in R$. Se $\text{MDC}(\underline{X}^\alpha, \underline{X}^\beta) = 1$, então:

$$(\underline{X}^\alpha \underline{X}^\beta, I) = (\underline{X}^\alpha, I) \cap (\underline{X}^\beta, I).$$

- (c) Os primos associados de I são gerados por subconjuntos de variáveis.
- (d) I é gerado por monômios livres de quadrados se e so se I é ideal monomial radical.

B.2 Ideal de arestas de um grafo

Esta ordem de idéias foi originalmente introduzida por A. Simis, W. Vasconcelos e R. Villarreal (cf. [16], [14]).

Definição B.1 Dado um grafo Grafo G de vértices $\mathcal{V}(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$, seja $R = k[X_1, \dots, X_n]$ e ψ como acima. O ideal das arestas de G é o ideal gerado pelos monômios $X_i X_j \in R$, tais que $\{\psi(X_i), \psi(X_j)\}$ é uma aresta de G . Escrevemos,

$$I(G) = (X_i X_j | x_i x_j \in \mathcal{A}(G)).$$

O anel do grafo (denominado Anel de Petersen em [14]) é o anel de classes $k[G] := k[\underline{X}]/I(G)$.

O teorema abaixo relaciona os primos mínimos do ideal de arestas de um grafo G com as suas coberturas, e a dimensão de G com a dimensão do anel de Petersen de G .

Teorema B.2 Dado um grafo simples G , com n vértices, seja $I = I(G) \subset k[\underline{X}]$ seu ideal de arestas. Os conjuntos de geradores (mínimos) dos primos mínimos de $I(G)$ correspondem a coberturas de G . Em particular, $\text{ht } I(G) = \alpha_o(G)$, e $\dim k(G) = \beta_o(G) = \dim G$.

Demonstração. Uma vez que I é gerado por monômios livres de quadrados, I é ideal radical, e seus primos mínimos são gerados por variáveis.

Dado um primo mínimo $P = (X_{i_1}, \dots, X_{i_t})$ de I , onde $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_t}\}$ é um conjunto mínimo de geradores de P , seja $C_P = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$. Afirmamos que C_P é uma cobertura mínima de G .

De fato, dado uma aresta $x_i x_j \in \mathcal{A}(G)$, temos $X_i X_j \in I \subset P$, e portanto, $X_i \in P$ ou $X_j \in P$, o que implica $x_i \in C_P$ ou $x_j \in C_P$. Segue que C_P é uma cobertura de G . Para mostrar que C_P é uma cobertura mínima, basta observar que se $P' \subset P$ é gerado por subconjunto próprio de $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_t}\}$, então $I \not\subset P'$. Como P' é monomial, existe aresta $X_{i_o} X_{j_o} \in I$ tal que $X_{i_o}, X_{j_o} \notin P'$. Logo, $x_{i_o}, x_{j_o} \notin C_{P'} \subset C_P$.

Reciprocamente, dado uma cobertura mínima $C = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$ de G , o primo $P = (X_{i_1}, \dots, X_{i_t})$ contém I , e nenhum primo $P' \subset P$ contém I , pois neste caso, P' deveria conter um subconjunto de variáveis propriamente contida em P e portanto pela primeira parte acima, $C_{P'} \subset C$ e C não seria uma cobertura mínima.

Para concluir a demonstração do teorema, observamos que coberturas minimais correspondem a primos minimais e vice-versa, logo $\text{ht } (I)$ é igual a cardinalidade da menor cobertura possível, i.é, $\text{ht } (I) = \alpha_o(G)$. Em particular,

$$\dim k[G] = n - \text{ht } (I) = \#\mathcal{V}(G) - \alpha_o(G) = \beta_o(G) = \dim G.$$

□

B.3 Anéis de Stanley-Reisner

B.3.1 Complexos simpliciais

Como de hábito, dado um conjunto \mathcal{V} , escreveremos $2^{\mathcal{V}}$ para denotar o conjunto de todos os subconjuntos de \mathcal{V} .

Seja $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto finito. Um *complexo simplicial (finito)* Δ sobre \mathcal{V} , é uma coleção finita de subconjuntos de \mathcal{V} , $\Delta(\mathcal{V}) \subseteq 2^{\mathcal{V}}$, tal que:

$$\begin{aligned} \{v_i\} \in \Delta \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ F \in \Delta \Rightarrow G \in \Delta \quad \forall G \subset F. \end{aligned}$$

Os elementos $F \in \Delta$ são chamados de *faces*, e sua dimensão, $\dim F$, é $\#F - 1$. A dimensão do complexo simplicial é o máximo das dimensões de suas faces. Uma face que não é subconjunto de nenhuma outra face, é dito ser uma *faceta*. As faces de dimensão 1, são chamadas de *arestas*, enquanto que as de dimensão zero são chamados de *vértices*. Denotaremos por $F(\Delta)$ o conjunto de todas as facetas de Δ .

As noções de subcomplexo e subcomplexo induzido são paralelas àquelas dadas para grafos. Ainda como lá, dado um complexo simplicial Δ de vértices \mathcal{V} , para cada subconjunto $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, existe um único subcomplexo induzido de Δ , cujo conjunto de vértices é dado por \mathcal{V}' . Observe que um complexo simplicial fica perfeitamente determinado quando identificamos suas facetas, e é deste fato que resulta a unicidade de um subcomplexo gerado (isto é, induzido) por \mathcal{V}' .

Dado um grafo G em um conjunto finito de vértices \mathcal{V} , o subconjunto $\Delta(G) \subseteq 2^{\mathcal{V}}$ cujos elementos são conjuntos de vértices independentes em G , formam um complexo simplicial. De fato, todo subconjunto de um conjunto de vértices independentes, é novamente um conjunto de vértices independentes, inclusive os subconjuntos unitários.

Por comodidade, um complexo simplicial cujas faces são conjuntos de vértices independentes de um grafo G será dito *grafal*.

A exemplo do que foi feito para grafos, os complexos simpliciais também admitem uma formulação algébrica que permite a aplicação de ferramentas de Álgebra Comutativa para resolver problemas puramente combinatórios, veja [3].

Definição B.3 Seja Δ um complexo Simplicial de vértices $\mathcal{V}(\Delta) = \{x_1, \dots, x_n\}$, e k um corpo de característica zero. O *Anel de Stanley-Reisner* ou *Anel das faces*, de Δ , é a k -álgebra

$$k[\Delta] = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I_{\Delta}},$$

onde I_{Δ} , chamado *ideal das não-faces*, é o ideal gerado por todos os monômios cujo suporte **não** é uma face de Δ .

Pela definição de I_Δ vemos que ele é um ideal monomial gerado por monômios livres de quadrados. De fato, se $\underline{X}^\alpha \in I_\Delta$ tem suporte $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$, então $X_{i_1} \cdots X_{i_t} \in I_\Delta$.

A cada faceta $F \in F(\Delta)$ corresponde um primo $P_F \subset k[\underline{X}]$, cujos geradores mínimos são as variáveis cujo suporte **não está** em F , i.e., $P_F = (X_i \text{ tal que } x_i \notin F)$. O teorema a seguir mostra que estes são os primos mínimos do ideal I_Δ . É um exercício simples verificar que $I_\Delta = \bigcap_{F \in F(\Delta)} P_F$ é a decomposição primária reduzida de I_Δ - em particular, $\dim k[\Delta] = \dim \Delta + 1$.

Senão vejamos. Se $\underline{X}^\alpha \in I$, então para toda faceta $F \in \Delta$, $\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) \not\subseteq F$, e portanto $\underline{X}^\alpha \in P_F$. Logo $I \subseteq \bigcap_{F \in F(\Delta)} P_F$.

Reciprocamente, suponha $\underline{X}^\alpha \in \bigcap_{F \in F(\Delta)} P_F$. Temos $\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) \not\subseteq H, \forall H \in \Delta$, logo $\text{Supp}(\underline{X}^\alpha) \not\subseteq \Delta$, e $\underline{X}^\alpha \in I$. Isto mostra que $\bigcap_{F \in F(\Delta)} P_F$ é uma decomposição primária de I . Por outro lado, dados duas facetas distintas, $F, F' \in \Delta$, tem-se, obrigatoriamente, $P_F \not\subseteq P_{F'}$. Isto demonstra que a decomposição é reduzida e, portanto, que os primos P_F acima são os primos mínimos de I .

Para cada faceta $F \in \Delta$, tem-se

$$\dim F = \#F - 1 = n - \text{ht } P_F - 1.$$

Em particular se F é uma faceta maximal, então P_F é um primo minimal. Segue que $\dim \Delta = \dim k[\Delta] - 1$.

□

Apêndice C

Aspectos Computacionais

Nesta seção descreveremos os algoritmos usados nesta tese, apoiados em *Macaulay2*, versão 0.8.46. O formato utilizado para descrever cada rotina será:

- Utilização;
- Código — *deve ser digitado exatamente como está escrito.*
- Comentários sobre o **output** da rotina.

C.1 Cálculo das potências simbólicas

```
nextsymbolicpower = method();
nextsymbolicpower (Ideal):= I -> (n:= numgens ring I ;
  nc:= numgens I ;
  jac:= map(jacobian I, Degree = >-1);
  iden:= map((ring I)\^{n},(ring I)\^{n} ) ;
  Im := gens I ;
  tt:= iden ** Im ;
  RI:= syz (concat(jac,tt));
  FI:= submatrix(RI,{0..nc-1}, );
  ideal (mingens ideal (Im * FI )));

symbolicpower = method() ;
symbolicpower(Ideal,ZZ):= (I,r)->( II:= I;clearAll;
  if r==1 then (I)
  else (nextsymbolicpower(symbolicpower(I,r-1))));
```

A primeira rotina recebe como **input** a potência simbólica de ordem r de um ideal monomial radical, e tem como **output** a potência simbólica de ordem $r + 1$. A segunda rotina (`symbolicpower`) tem como **input** um ideal monomial radical e um inteiro positivo r . O seu **output** é sua potência simbólica de ordem r .

C.2 Cálculo dos módulos $\mathcal{F}_r(I)$.

```
sigma =method();
sigma(Ideal,ZZ):= (I,r)-> ( S:= 0*I; a:=0;
  d := u-> u+1;
  if r <=1 then (a =-2;(ring I)/I )
  else (while member(d(a),1..(r+1)//2) do
    (S=S+(symbolicpower(I,r - d(a)) * symbolicpower(I,d(a)));
    a = d(a));
  trim S ) ) ;

freshmodule=method();
freshmodule(Ideal,ZZ):=(I,r)->
  (trim image( gens (symbolicpower(I,r)) % gens(sigma(I,r))));
```

A primeira rotina (`sigma`) Tem como **input** um ideal monomial radical I e um inteiro r . `Sigma` calcula o submódulo trivial de ordem r , que é dado por $\Sigma_r(I) = \sum_{1 \leq i \leq r-1} I^{(i)} I^{(r-i)}$. A segunda rotina tem o mesmo **input** que `sigma`, e calcula o submódulo não trivial $\mathcal{F}_r(I)$, tendo como **output** um ideal, cujos geradores mínimos são os geradores de $\mathcal{F}_r(I)$.

C.3 Cálculo de grau de incidência, suporte e subgrafos

```
grau=method();
grau(RingElement,Ideal):=(f,I)->(
  numgens ideal compress diff(f,gens I));
```

Calcula o grau de incidência de um vértice f no grafo cujo ideal de arestas é I . O grau também pode ser obtido calculando-se a altura do ideal quociente $(I : f)$.

```
support=method();
support(RingElement):=(F)->( N:=ideal (vars ring F);
  n:= numgens N; r:=0; B := {};
  if F==0 then (B={0_(ring F)};r=n);
```

```

while r<=n-1 do ( if F%N_r ==0
  then ( B = append( B ,N_r) ; r=r+1) else r=r+1 );
B );

```

```

support(Matrix):=(M)->( N:= ideal vars ring M; B:={}; r:=0;
n:= numgens N;
if M==0 then (B={0_(ring M)}; r=n);
while r<=n-1 do ( if (M%N_r) != M
  then ( B = append( B ,N_r); r=r+1)
  else r=r+1 );
B );

```

```

support(Ideal):= I->(support gens I);
support(Module):= M->(support gens M);

```

A rotina de cálculo “support” tem como **input** um monômio, uma matrix cujos elementos são monômios, ou um ideal monomial. O **output** é um conjunto de variáveis que define o menor anel de polinômios contendo o monômio, as entradas da matrix, ou o ideal.

```

subgraph=method();
subgraph(RingElement,Ideal):=(L,I)->( quote M;
quote N; quote B; B:={0_(ring I)}; quote r; r:=0;
M:=substitute(power(ideal support(ideal L),2), ring I);
N:= numgens I;
if L==0 then(B={0_(ring L)}; r=N);
while r<=N-1 do (if I_r%M==0
  then (B=append(B,I_r);r=r+1;) else r=r+1);
ideal mingens ideal B );

```

```

subgraph(List,Ideal):=(L,I)->(quote M; quote N; quote B;
quote r; B:={0_(ring I)}; r:=0; N:= numgens I;
if L=={} then r= N ;
M:=power(ideal support(ideal L),2);
while r<=N-1 do (
  if I_r%M==0 then (B=append(B,I_r);r=r+1;)
  else r=r+1);
ideal mingens ideal B );

```

A rotina `subgraph` tem como **input** um monômio ou uma lista de variáveis e um ideal de arestas. O **output** é o ideal de arestas do subgrafo gerado pelo suporte do monômio ou pela lista de variáveis.

```
sqffresh=method();
sqffresh(RingElement,Ideal):=(f,I)->( quote LT1;
  quote LT2;quote result;
  quote h1; quote h2;quote r; quote B; quote t;
  quote q; quote h; quote L; quote controle;
  h:= codim subgraph(f,I); LT1:= 0; LT2:=0;
  h1:=0; h2:=0; r:=1; q:=0;
  result:={true}; controle:={};L:={};
  B:=support f; t:=(#B/2)+1;
  if f%I==0 and (degree f)=={2}
    then (result={true} ; r=t+2;);
  if f%I!=0 then (result= {"Produto de vertices isolados"};
    r=t+2;);
  while r<= t do ( L=subsets(B,r);q=0; N=#L;
    while q<= N-1 do ( LT1=subgraph(L_q,I);
      LT2=subgraph( support(matrix{B}%ideal(L_q)),I);
      h1= codim LT1; h2= codim LT2;
      if h1+h2==h then(controle=false;
        result={{Msupport(idealL_q)},
          {Msupport(matrix{B}%ideal(L_q))}};
          ;q=N+1;);
        else (controle=true; q=q+1;); );
    if controle then r=r+1 else r=t+1; );
  result );
```

Dados um ideal de arestas I e um monômio f , livre de quadrados, esta rotina baseia-se no resultado da Proposição 5.10 para decidir se f é um elemento genuíno mínimo em alguma potência simbólica de I . Seu **output** é “true” se f é genuíno ou, caso contrário, é um par de monômios que descreve f como elemento do submódulo trivial na ordem dada pela ordem simbólica de f , ou como múltiplo de um genuíno, se for o caso.

```
Msupport=method();
Msupport(List):= (L)->( N:=#L; r:=0; ps:=1;
  while r<=N-1 do ( ps=ps*L_r ; r=r+1;);
```

```
ps );
```

```
Msupport(Matrix):= M->(Msupport(support(M)));
Msupport(Ideal):=I->(Msupport(support(I)));
Msupport(Module):=M->(Msupport(support(M)));
Msupport(RingElement):= f->(Msupport(support(f)));
```

A rotina `Msupport` calcula o monômio livre de quadrados, cujo suporte é o conjunto de variáveis que determina o menor anel de polinômio contendo a lista L de variáveis, o ideal monomial I , o módulo monomial M , ou as entradas da matriz monomial M .

```
multsupport=method();
multsupport(RingElement):= f->( quote h; quote ff;
  quote L; quote Ra; quote pare;
  pare:=false; ff:=0;
  L:=support(f); h:=Msupport(support(f));
  while f!=h do ( ff=substitute(f/h, ring f );
  L=join(L, support(ff));
  h=Msupport(L); ) ;
  L );
```

A rotina `multsupport` tem como **input** um monômio f e calcula o suporte de f , com as multiplicidades de cada variável. Seu **output** é uma lista das variáveis que dividem f , onde cada uma delas aparece um número de vezes igual ao seu grau em f .

```
Lgraph=method();
Lgraph(RingElement,Ideal):=(f,I)->(quote B; quote n;
  quote S;quote L; i:=0; j:=0;
  B:=multsupport(f); n:=#B ;
  S:= coefficientRing(ring I)[s_1..s_n]; L:={0_S};
  while i<= n-1 do (j=0;
    while j<=n-1 do (if (B_i*B_j)%I ==0
      then (L=append(L, S_i*S_j));
      j=j+1;);
    i=i+1;);
  ideal mingens ideal L);
```

`Lgraph` tem como **input** um monômio $f = X^{\alpha}$ e um ideal de aresta de um grafo G . A rotina `Lgraph` calcula o ideal de arestas do grafo obtido do subgrafo de G ,

gerado pelo suporte de f adicionando para cada vértice X_i tal que $X_i \nmid f$, α_i novos vértices de mesma vizinhança que X_i .

```

symbolicvalue=method();
symbolicvalue(RingElement,Ideal):=(f,I)->( quote B;
  quote n; quote S; quote L; i:=0; j:=0;
  B:=multsupport(f); n:=#B ;
  S:= coefficientRing(ring I)[s_1..s_n];
  L:={0_S};
  while i<= n-1 do (j:=0;
    while j<=n-1 do (
      if (B_i*B_j)%I ==0 then (L=append(L, S_i*S_j));
      j=j+1;);
    i=i+1;);
  codim ideal L);

```

A rotina `symbolicvalue` calcula a ordem simbólica de um monômio f em relação ao ideal de arestas I . Esta rotina baseia-se no resultado da Proposição 5.29.

```

isfresh=method();
isfresh(RingElement,Ideal):=(f,I)->(
  quote result; quote B; quote FM;
  quote L; quote q; quote retorno;
  quote i; quote j; quote n; quote S; quote h;
  result:={true}; L:={}; FM:=Msupport(subgraph(f,I));
  pule:=false; h:=subgraph(f,I); B:=multsupport f;
  retorno:=matrix{B}; n:=#B ;
  S:=coefficientRing(ring I)[s_1..s_n]; L={0_S};
  if (Msupport(f)!= FM )then
    (q:=substitute(Msupport(f)/FM, ring I);
     result={q,substitute(f/q, ring I)};
     pule=true);
  if f%I!=0 then ( result={"Produto de vertices isolados"};
    pule=true;);
  if (Msupport f )== f then(result=sqffresh(f,I); pule=true;);
  if pule == false then ( i:=0; j:=0;
    while i<= n-1 do (j:=0;
      while j<=n-1 do (if (B_i*B_j)%I ==0
        then (L=append(L, S_i*S_j)););

```

```

        j=j+1;);
    i=i+1; );
    result=sqffresh(Msupport ideal L,ideal L);
    if #result !=1 then
    ( result=transpose substitute(matrix(result),
                                retorno);););
result );

```

Esta rotina baseia-se nas Proposições 5.29 e 5.10 para decidir se o monômio f , não necessariamente livre de quadrados, é genuíno mínimo em alguma potência simbólica do ideal de arestas I . O monômio f e o ideal de arestas I são o **input** desta rotina. A saída é “true” se f é genuíno ou, caso contrário, é um par de monômios que descrevem f como elemento do submódulo trivial de ordem igual a ordem simbólica de f . ou como múltiplo de um genuíno, se for o caso.

```

isfreshbasico=method();
isfreshbasico(RingElement,Ideal):=(f,I)->( quote j;
    quote result; quote pule; quote n; n:=numgens ideal support(f);
    j:=0; quote L; L:=support(f);
    if (f%I)==0_(ring I)then pule = false else pule= true ;
    while j<=n-1 and pule==false do (
        if member(true,isfresh(diff(L_j,f),I))
            then (result={diff(L_j,f),"is fresh." };j=n;)
            else (result=true, j=j+1 ););
    result );

```

Tendo como **input** um monômio f , que é um elemento genuíno mínimo para o ideal de arestas I , esta rotina decide se f é um pseudo-ciclo ou um Pseudo-cone. O **output** é “true” se for pseudo-ciclo ou um monômio $\frac{f}{x_i}$ que é genuíno na ordem igual a ordem simbólica de f menos 1.

Conclusão Geral

Os geradores mínimos das potências simbólicas de um ideal monomial radical, que não podem ser obtidos como combinação de produtos de elementos em potências de ordem menor, os chamados, elementos genuínos, não são, todos, monômios livres de quadrado. Este resultado é verdadeiro mesmo no caso especial de ideais de arestas de um grafo simples.

No caso particular, em que o ideal é o ideal de arestas de um grafo, simples, os ciclos de ordem ímpar e os subgrafos completos contribuem de forma decisiva para que o ideal não seja normalmente livre de torção, entretanto, estas não são as únicas estruturas que aparecem como geradores mínimos da álgebra de Rees simbólica e que contribuem para a determinação do tipo de geração da mesma.

O estudo dos geradores mínimos das potências simbólicas de um ideal de arestas, reduz-se, via polarização, ao estudo dos geradores mínimos que são livres de quadrado.

Ainda no caso de ideais de arestas, concluímos que em geral o grau dos geradores mínimos, genuínos, de uma potência simbólica de ordem r , encontra-se limitado inferiormente pelo valor $r + 1$, e superiormente pelo valor $2r - 1$. Além disto estes dois valores são os melhores limitantes possíveis.

Bibliografia

- [1] Bayer, D., and M. Stillman, *Macaulay: A system for computation in algebraic geometry and commutative algebra*, 1982-1994. Source and object code available for Unix and Macintosh computers. Contact the authors, or download from math.harvard.edu via anonymous ftp.
- [2] Bollobás, B., *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics **63**, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.
- [3] Bruns, W. and Herzog, J., *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge 1993.
- [4] P. Brumatti and A. Simis, The module of derivations of a Stanley–Reisner ring, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1309-1318.
- [5] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **150**, Springer-Verlag, 1995.
- [6] Estrada, M. and Villarreal, R., Cohen-Macaulay bipartite graphs, Archiv der Mathematik, **68**(1997) 124-128, Birkhäuser Verlag, Basel 1997.
- [7] Grayson, D.R. and Stillman, M., *Macaulay2*: Macaulay2 is a computer software system designed to support research in commutative algebra and algebraic geometry, whose creation has been funded by the NSF. It is a successor to Macaulay. Source and object code available for Unix, DOS, Win95. Download from [http:// www.math.uiuc.edu/macaulay2/](http://www.math.uiuc.edu/macaulay2/)
- [8] Hochster, M., Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes, Math. Z., **133**(1973), 53-65.
- [9] G. Jiang and A. Simis, Higher relative primitive ideals, preprint, 1999.
- [10] Lyubeznik, Gennady., On Arithmetical Rank of monomial Ideals, Journal of Algebra, **112**(1988), 87-89.

- [11] Matsumura, H., *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, New York, 1986.
- [12] Ratliff Jr., J.L., Notes on essentially powers filtrations, *Michigan Math. J.*, **26**(1979), 313-324.
- [13] Simis, A., *Algebras Graduadas Direcionais*, Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como documento para Concurso Público de Professor Titular, 1997
- [14] Simis, A., *Combinatória Algébrica*, XVIII Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [15] Simis, A., Effective computation of symbolic powers by jacobian matrices, *Communications in algebra*, **24** (11), 3561-3565 (1996)
- [16] Simis, A., Vasconcelos, W. & Villarreal, R. On the ideal theory of graphs, *Journal of Algebra*, Vol. 167, No 2, 389-416 july 15, 1994.
- [17] Villarreal, R., *Cohen-Macaulay graphs*, *Manuscripta Math.*, No 66, 277-293 (1990)
- [18] Vasconcelos, W., *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, *Algorithms and Computation in Math.*, Vol 2, Springer, 1998.
- [19] Zariski, O. and Samuel, P., *Commutative Algebra* vol I, *Graduate Texts in Mathematics* **28**, Springer-Verlag.