DUALIDADE DE RETICULADOS DISTRIBUTIVOS
E ALGUMAS APLICAÇÕES ALGÉBRICAS

Aparecida Francisco da Silva

Orientador:
Prof. Dr. Roberto Leonardo O. Cignoli

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/1983

Aos meus pais.

AGRADEÇO,

Ao Professor Dr. Roberto Cignoli pela paciente e segura orientação.

Aos meus pais e amigos, pelos incentivos recebidos.

À UEM pela redução do tempo de trabalho semanal.

À CAPES/CNPq.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Na primeira metade do século XIX, George Boole, ao tentar formalizar a lógica proposicional, introduziu o conceito de Álgebra de Boole. Já no final do século, enquanto estudavam as axiomáticas das álgebras booleanas, Charles Pierce e Ernest Schröder introduziram o conceito de reticulado. Independentemente, Richard Dedekind, investigando ideais de números algébricos, chegou ao mesmo conceito e também introduziu o de modularidade, que é uma forma mais fraca de distributividade.

Foi, entretanto, o trabalho de Garrett Birkhoff que iniciou o desenvolvimento da teoria dos reticulados. Dentro desta teoria, um capítulo extenso é o da teoria dos *reticulados distributivos*, que tem propiciado a motivação necessária para muitos resultados na teoria geral (muitas condições sobre reticulados, elementos e ideais de reticulados são formas mais fracas de distributividade).

As conexões da topologia com a teoria dos reticulados são variadas. Stone, em 1937, desenvolveu uma teoria da representação para reticulados distributivos, generalizando o que já havia sido feito para Álgebras de Boole [11]. Isto foi conseguido pela introdução, no conjunto X dos ideais primos de um reticulado distributivo A, com primeiro elemento, da topologia que tem por base $\{p_a : a \in A\}$, onde p_a denota o conjunto dos ideais primos que não contém a. Stone mostrou que a aplicação $a \to p_a$ é um isomorfismo e representou A como o reticulado de todos os sub conjuntos abertos e compactos do espaço topológico X .

Priestley, em 1970, mostrou que esta caracterização torna-se muito mais simples em termos de espaços topológicos ordenados que foram introduzidos por L.Nachbin [8]. A partir dos trabalhos de Priestley, certos resultados novos foram obtidos e o teorema da representação e muito da teoria da dualidade tornaram-se naturais.

Em linguagem de categorias, temos que a categoria dos reticulados distributivos é equivalente à dual da categoria dos espaços topológicos ordenados, compactos, totalmente desconexos na ordem.

Em 1975, Cornish [3] mostrou que a categoria dos espaços espectrais e funções fortemente contínuas é isomorfa à categoria dos espaços ordenados e compactos, totalmente desconexos na ordem e derivou o teorema de Priestley da dualidade clássica de Stone.

Nosso trabalho se baseia nestes fatos e reune o estudo das técnicas de Priestley para reticulados distributivos da qual se derivam a representação clássica de Birkhoff para reticulados distributivos finitos, a de Stone, para álgebras de Boole; o trabalho de Cornish e Fowler (1977) para as álgebras de De Morgan; a caracterização das álgebras de Heyting por meio de espaços topológicos ordenados, que segundo o nosso conhecimento ainda não havia sido feito; a caracterização das congruências definidas nestas álgebras, por meio da representação de Priestley [9], bem como o trabalho de Cornish [3].

Chamaremos de capítulo 0 o capítulo introdutório, onde serão relacionados os conceitos básicos que serão utilizados no desenvolvimento de nosso trabalho.

No primeiro capítulo apresentamos a teoria da representação para reticulados distributivos por meio de espaços topológicos compactos e ordenados, totalmente desconexos na ordem, desenvolvida por Priestley ([9] e [10]), bem como a caracterização do espaço de Priesltey para as álgebras de Boole, as de Heyting, de De Morgan e de Kleene.

O segundo capítulo é dedicado à caracterização das congruências definidas nestas álgebras por meio da teoria de Priestley e também a algumas aplicações do método de Priestley na demonstração de alguns resultados conhecidos, como, por exemplo, a caracterização das álgebras subdiretamente irredutíveis em algumas classes de álgebras. Destacamos, todavia, que o método utilizado nas demonstrações não é o mesmo utilizado por Priestley [10].

No terceiro capítulo mostramos a equivalência entre as representações de Priestley e Stone. Destacamos que esta equivalência não invalida o trabalho de Priestley, uma vez que as condições com que trabalhou são mais naturais, no sentido de que estão mais próximas da teoria da dualidade para álgebras de Boole, que foi a geradora de toda essa teoria. Além disso, a simplicidade da teoria de Priestley permitiu que se obtivesse resultados significativos nas teorias cujo reduto é um reticulado distributivo. Vide por exemplo [2] e [4].

CAPÍTULO 0

Destacaremos neste capítulo os conceitos básicos que serão utilizados durante todo o desenvolvimento de nosso trabalho, com o objetivo de fixar a nomenclatura e as notações.

Os conceitos e notações concernentes à teoria das categorias, bem como os de álgebra universal estarão de acordo com os dados no livro de Balbes e Dwinger. [1]

Destacaremos, entretanto, alguns destes conceitos e notações:

01. Uma álgebra universal de tipo de similaridade $\sigma = (n_1,\ldots,n_m)$, onde $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, é um par (A,F) onde A é um conjunto não vazio e F é uma m-upla $(f_1,\ldots,f_m)$ tal que para cada i, $1 \leq i \leq m$, f_i é uma operação n_i-ária definida em A, isto é, $f_i : A^{n_i} \to A$. Destacamos que uma operação f é zero-ária se fixa uma constante.

02. Dizemos que $B \subset A$ é uma sub-álgebra de (A,F) se B é fechado para toda operação de F; isto é, (B,F), onde as operações de F são restritas a B, é uma álgebra de mesmo tipo de similaridade que A.

03. Seja A uma álgebra de tipo de similaridade σ. Uma relação de congruência em A é uma relação de equivalência θ definida em A que satisfaz a seguinte propriedade: "Para cada $i \in \{1,\ldots,\partial(\sigma)\}$, se $(a_j,a_j') \in \theta$ para $j = 1,\ldots,n_i$, então $(f_i(a_1,\ldots,a_{n_i}),f_i(a_1',\ldots,a_{n_i}')) \in \theta$".

04. O conjunto $C(A)$ das relações de congruências definidas em A é parcialmente ordenado (pela inclusão de conjuntos) e tem primeiro e último elementos, a saber: $\Delta_A = \{(x,x) : x \in A\}$ e $A \times A$, respectivamente. Δ_A é chamada relação trivial de congruência em A. Observamos, também, que a intersecção de relações de congruência é uma relação de congruência.

05. Dada uma relação de congruência θ definida em uma álgebra (A,F), de tipo de similaridade σ, chamaremos de *álgebra quociente* a álgebra $(A_{/\theta},F)$, onde $A_{/\theta} = \{x/\equiv : x \in A\}$; ($x/\equiv$ denota o conjunto $\{a \in A : (x,a) \in \theta\}$), tal que para cada $1 \leq i \leq o(\sigma)$ tem-se: $f_i(a_{1/\equiv},\ldots,a_{n_i/\equiv}) = f_i(a_1,\ldots,a_{n_i})_{/\equiv}$, onde $(a_1,\ldots,a_{n_i}) \in A^{n_i}$.

06. Sejam A e B álgebras de mesmo tipo de similaridade σ. Uma função $h : A \to B$ é um *homomorfismo* se para cada $1 \leq i \leq o(\sigma)$, $f_i(h(a_1),\ldots,h(a_{n_i})) = h(f_i(a_1,\ldots,a_{n_i}))$, onde $(a_1,\ldots,a_{n_i}) \in A^{n_i}$.

07. Para um homomorfismo $h : A \to B$, definimos "núcleo de h" ($\ker h$) como a relação definida em A por "$(a,a') \in \ker h$ se, e somente se, $h(a) = h(a')$". Esta relação é uma relação de congruência (vide, por exemplo, Balbes e Dwinger [1] pag. 9).

08. (Teorema do homomorfismo): Se $h : A \to B$ é um homomorfismo de A em B e θ é uma relação de congruência em A tal que $\theta \subseteq \ker h$, então existe um único homomorfismo sobrejetor $g : A_{/\theta} \to B$ tal que $g \circ \nu_\theta = h$ (ν_θ é o homomorfismo natural $\nu_\theta : A \to A_{/\theta}$, $x \to x_{/\equiv}$).

Se, ainda, $\theta = \ker f$ então g é um isomorfismo.

09. Um reticulado distributivo com primeiro e último elementos é uma álgebra de tipo de similaridade $(2,2,0,0)$, a saber $(A,\vee,\wedge,0,1)$ tal que, para quaisquer $a,b,c \in A$, tem-se:

i) $a \vee a = a$ $\qquad$ $a \wedge a = a$

ii) $a \vee b = b \vee a$ $\qquad$ $a \wedge b = b \wedge a$

iii) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ $\qquad$ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

iv) $a \wedge (a \vee b) = a$ ou $a \vee (a \wedge b) = a$

v) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ e $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

vi) $a \wedge 1 = a$ $\qquad$ $a \vee 1 = 1$

vii) $a \wedge 0 = 0$ $\qquad$ $a \vee 0 = a$.

10. Um subreticulado de um reticulado $(A,\vee,\wedge,0,1)$ é um subconjunto $B \subset A$ fechado para as operações $(\vee,\wedge,0,1)$, isto é, $B \subset A$ é um subreticulado se $(B,\vee,\wedge,0,1)$ é um reticulado.

11. Um homomorfismo de reticulados $h : A \to B$ é, então, uma função tal que para todo $a,b \in A$ tem-se

i) $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$

ii) $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$

iii) $h(0) = 0$

iv) $h(1) = 1$.

12. Observamos que um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado com a ordem definida por $(a \leq b) \Leftrightarrow (a \vee b = b)$; ou, dualmente

por $(a \leq b) \Leftrightarrow (a \wedge b = a)$.

13. Dado um reticulado distributivo A com primeiro e último elementos, respectivamente 0 e 1, dizemos que $F \subseteq A$ é um filtro se:

i) $F \neq \emptyset$

ii) $(\forall b \in A), (\forall a \in F) : a \leq b \Rightarrow b \in F$

iii) $(\forall a, b \in F) \Rightarrow (a \wedge b) \in F$.

Observemos que ii) implica em $1 \in F$. A é sempre um filtro. F se diz próprio se $F \neq A$.

14. Um filtro F de um reticulado distributivo A é primo se

i) $F \neq A$

ii) $(\forall x, y \in A)$ se $x \vee y \in F$ então $x \in F$ ou $y \in F$.

Observemos que por i), todo filtro primo é próprio.

15. As definições duais de 13 e 14 são as de ideal e de ideal primo. Observamos, também, que se P é um filtro primo, então P^c é um ideal primo.

16. (Teorema de Birkhoff-Stone): Sejam A um reticulado distributivo com primeiro e último elementos, F um filtro e I um ideal de A tais que $F \cap I = \emptyset$. Então, existe um filtro primo de A com $F \subseteq P$ e $I \cap P = \emptyset$. (A demonstração deste fato encontra-se, por exemplo, em [1] pag. 70, e [6] pag. 74.)

17. Seja L' um sub-reticulado de L e P' um filtro primo de L. Então existe P, filtro primo de L, tal que $P' = P \cap L'$.

De fato: Seja P' filtro primo de L'. Consideremos F o filtro de L gerado por P' e J o ideal gerado por $L' \setminus P'$ e mostremos que $F \cap J = \emptyset$.

Se existisse $x \in F \cap J$, existiriam $a \in P'$ e $b \in L' \setminus P'$ com $a \leq x$ e $x \leq b$. Mas, então, $a \leq x \leq b$ e $a \in L' \setminus P'$! Assim, existe P, filtro primo de L, com $F \subset P$ e $P \cap J = \emptyset$. Agora, $P \cap L' = P'$, pois se $\exists\, x \in P \cap L'$, $x \notin P'$, então $x \in L' \setminus P' \subset J$.

18. O conjunto dos filtros primos de A pode ser identificado com o conjunto dos 0,1-homomorfismos definidos de A em $\{0,1\}$.

De fato:

Seja A um objeto da categoria $\mathcal{D}_{0,1}$.

Consideremos $X(A) = \{h : A \to \{0,1\}$, 0,1-homomorfismos$\}$ e $\mathcal{F}(A) = \{F \subseteq A : F$ é filtro primo de $A\}$. Definimos

$$\varepsilon : \mathcal{F}(A) \to X(A) \text{ por}$$

$$\varepsilon(F) \text{ é a função característica de } F.$$

i) ε está bem definida.

De fato, se $P = Q$, $\forall x \in A$ tem-se $h_P(x) = 1 \Leftrightarrow x \in P \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in Q \Leftrightarrow h_Q(x) = 1$.

Além disso, a função característica de um filtro primo F é um homomorfismo de reticulados: de fato, se $x,y \in A$ podem ocorrer:

a) $x \in F$, $y \in F$ daí $h(x \wedge y) = 1 = h(x) \wedge h(y)$ e $h(x \vee y) = 1 = h(x) \vee h(y)$

b) $x \notin F$ e $y \in F$ daí $h(x \wedge y) = 0 = h(x) \wedge h(y)$ e $h(x \vee y) = 1 = h(x) \vee h(y)$

c) $x \notin F$ e $y \notin F$ daí $h(x \wedge y) = 0 = h(x) \wedge h(y)$ e $h(x \vee y) = 0 = h(x) \vee h(y)$.

ii) ε é 1-1.

Suponhamos $h_P = h_Q$. Então $\forall x \in A$, $h_P(x) = h_Q(x)$. Assim $x \in P$ se e somente se $h_P(x) = 1 = h_Q(x)$ se, e somente se $x \in Q$.

$$\therefore P = Q$$

iii) ε é sobre, isto é, dado $h \in X(A)$, $\exists\, P \in \mathcal{F}(A)$ tal que $h = h_P$. Consideremos $h \in X(A)$ e $U = h^{-1}(\{1\})$. Assim, $\forall x \in U$, $h(x) = 1$.

Mostremos que U é um filtro primo, pois U é tal que $\varepsilon(U) = h_U = h$.

a) Sejam $u, v \in U$. Então $h(u) = h(v) = 1$. Assim $h(u \wedge v) = h(u) \wedge h(v) = 1$. Portanto $(u \wedge v) \in U$.

b) $1 \in U$, pois h é 0,1-homomorfismo.

c) Suponhamos $x \vee y \in U$. Então $h(x \vee y) = 1$. Mas $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y) = 1$, se e somente se $h(x) = 1$ ou $h(y) = 1$ ou seja $x \in U$ ou $y \in U$.

Daí, temos $U \in \mathcal{F}(A)$ e $\varepsilon(U) = h$.

Assim, uma vez que os dois conjuntos podem ser identificados, durante o desenvolvimento de nosso trabalho usaremos ora um ora outro, indistintamente.

19. Uma categoria $\mathcal{A}$ é uma classe Ob $\mathcal{A}$ cujos membros são denominados objetos de $\mathcal{A}$, junto com:

i) Uma classe de conjuntos disjuntos $[A,B]_{\mathcal{A}}$, onde $A,B \in \text{Ob}\,\mathcal{A}$, cujos membros são denominados morfismos de $\mathcal{A}$.

ii) Uma função que associa a cada terna $(A,B,C) \in \text{Ob}\,\mathcal{A}$ uma função de $[B,C]_{\mathcal{A}} \times [A,B]_{\mathcal{A}} \to [A,C]_{\mathcal{A}}$.

iii) Se $f \in [A,B]_{\mathcal{A}}$ e $g \in [B,C]_{\mathcal{A}}$ então o valor da função em (ii) no ponto (g,f) será denotado por $g \circ f$ e chamado composição de f e g.

iv) Se $A,B,C,D \in \text{Ob}\,\mathcal{A}$, $f \in [A,B]_{\mathcal{A}}$, $g \in [B,C]_{\mathcal{A}}$ e $h \in [C,D]_{\mathcal{A}}$ então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

v) Para cada $A \in \text{Ob}\,\mathcal{A}$ existe um morfismo $1_A \in [A,A]_{\mathcal{A}}$ chamado *morfismo identidade* de A que satisfaz, para cada $f \in [B,A]_{\mathcal{A}}$ e $g \in [A,C]_{\mathcal{A}}$ as condições: $1_A \circ f = f$ e $g \circ 1_A = g$.

20. Uma categoria $\mathcal{B}$ é uma subcategoria de $\mathcal{A}$ se

i) $\text{Ob}\,\mathcal{B} \subseteq \text{Ob}\,\mathcal{A}$

ii) $[A,B]_{\mathcal{B}} \subseteq [A,B]_{\mathcal{A}}$ para todo $A,B \in \text{Ob}\,\mathcal{B}$

iii) Os morfismos identidade em $\mathcal{B}$ são os mesmos que em $\mathcal{A}$

iv) Composição de morfismos em $\mathcal{B}$ é a mesma que em $\mathcal{A}$.

Se ainda, $\mathcal{B}$ satisfaz a condição:

v) $[A,B]_{\mathcal{B}} = [A,B]_{\mathcal{A}}$ para todo $A,B \in \text{Ob}\,\mathcal{B}$ então $\mathcal{B}$ é denominada uma subcategoria plena de $\mathcal{A}$.

21. Se $\mathcal{A}$ é uma categoria, a categoria dual de $\mathcal{A}$, denotada por

$\mathcal{A}^*$ é a categoria cuja classe de objetos é a mesma classe de objetos de $\mathcal{A}$ e tal que para $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $[A,B]_{\mathcal{A}^*} = [B,A]_{\mathcal{A}}$. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são morfismos em $\mathcal{A}^*$ então a composição $g \circ f$ em $\mathcal{A}^*$ é definida como a composição $f \circ g$ em $\mathcal{A}$.

22. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são categorias, um funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma função que associa a cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ um objeto $\mathcal{F}(A)$ de $\mathcal{B}$ e a cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{A}$ um morfismo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$ de $\mathcal{B}$ tal que:

i) para todo $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$

ii) Se $f \circ g$ está definida em $\mathcal{A}$, então $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

Em nosso trabalho denominaremos funtor ao funtor contravariante.

23. Um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é chamado *equivalência* se

i) para cada objeto B de $\mathcal{B}$ existe um objeto A de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{F}(A)$ e B são isomorfos.

ii) Para A,B objetos de $\mathcal{A}$, a função de $[A,B]_{\mathcal{A}}$ em $[\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B)]$ induzida por $\mathcal{F}$ é 1-1 e sobre.

24. Duas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são equivalentes se existe uma equivalência $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

25. As categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *naturalmente equivalentes* se existem funtores $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tais que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ ($\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ é o

funtor identidade de $\mathcal{B}$) $Id_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é tal que para cada objeto B de $\mathcal{B}$ $Id_{\mathcal{B}}(B) = B$ e para todo morfismo f $Id_{\mathcal{B}}(f) = f$.

26. Usaremos $\mathcal{D}_{0,1}$ para denotar a categoria cujos objetos são reticulados distributivos com primeiro e último elementos, e os morfismos são 0,1-homomorfismos de reticulados, isto é, $h : L \to L'$ é um 0,1-homomorfismo de reticulados se $h(0) = 0'$ e $h(1) = 1'$ (0,1 e 0',1' denotam, respectivamente, os primeiros e últimos elementos de L e L').

CAPÍTULO I

DUALIDADE DE PRIESTLEY

1. Como expusemos na introdução apresentaremos neste capítulo a representação para reticulados distributivos desenvolvida por Priestley [9] e [10], bem como a caracterização do espaço de Priestley correspondente a várias subcategorias dos reticulados distributivos: as álgebras de Boole, de Heyting e as cadeias. Também estudaremos a caracterização do espaço de Priestley para álgebras de De Morgan e de Kleene.

Começaremos por algumas definições:

1.1. Se $(X,\leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, um subconjunto E de X é *crescente* se dados $x \in E$ e $y \in X$ com $x \leq y$ então $y \in E$.

1.2. Analogamente, um subconjunto $E \subset X$ é *decrescente* se dados $x \in E$ e $y \in X$ com $y \leq x$, então $y \in E$.

1.3. Para um conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$ e $A \subset X$, definimos $(A] = \{x \in X : x \leq a,$ para algum $a \in A\}$ e $[A) = \{x \in X : \exists\, a \in A$ com $a \leq x\}$.

1.4. Se $(X,\leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado e $A \subset X$ então temos, trivialmente, que:

i) A é *crescente* se e somente se $A = [A)$

ii) A é *decrescente* se e somente se $A = (A]$

iii) A é *crescente* se e somente se A^c é *decrescente*.

1.5. Sejam X e Y conjuntos parcialmente ordenados e $\phi : X \to Y$ uma função. Dizemos que ϕ é *crescente* se dados x e y em X com $x \leq y$, então $\phi(x) \leq \phi(y)$.

1.6. Dizemos que uma função $\phi : X \to Y$, onde X e Y são conjuntos parcialmente ordenados, é um *isomorfismo na ordem* se $(x \leq y$ em $X) \Leftrightarrow (\phi(x) \leq \phi(y)$ em $Y)$. Observamos que ϕ é, necessariamente, injetora, mas não sobre.

1.7. Chamaremos de *espaço topológico ordenado* uma terna $(X,\tau,\leq)$ onde X é um conjunto, τ é uma topologia definida em X e $\leq$ é uma relação de ordem parcial em X.

1.8. Dizemos que um espaço topológico ordenado é *totalmente desconexo na ordem*, se dados $x,y \in X$ com $x \not\leq y$, então existem U subconjunto aberto, fechado e crescente e V subconjunto aberto, fechado e decrescente com $U \cap V = \emptyset$ e $x \in U$, $y \in V$. Chamaremos *espaço de Priestley* qualquer espaço topológico compacto, ordenado e totalmente desconexo na ordem $(x,\tau,\leq)$.

1.9. Façamos, agora, algumas observações a respeito de um espaço de Priestley $(x,\tau,\leq)$ qualquer:

1.9.1. É imediato que X *é de Hausdorff*.

1.9.2. *Se* X *é finito, então a topologia de* X *é a topologia discreta*.

De fato, como X é um espaço de Hausdorff $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$. Mas, X é finito, então $\{x\}^c = \{x_1\} \cup \ldots \{x_n\}$ é aberto e fechado, de onde segue-se que todo conjunto unitário é aberto e fechado, ou seja, a topologia de X é a topologia discreta.

Assim, a noção de espaço topológico compacto, ordenado, totalmente desconexo na ordem e finito, se reduz à de conjunto finito, parcialmente ordenado.

1.9.3. *Se a ordem de* X *é a ordem trivial*, isto é, $x \leq y$ se, e somente se, $x = y$, *então a total desconexão na ordem se reduz à total desconexão* (no sentido usual em topologia geral isto é, as únicas componentes conexas são os pontos [vide, por exemplo, [5] pag. 111] .

De fato, se Y é um subconjunto de X e se $y \in Y$ com $x \neq y$, então existe um subconjunto U de X, aberto, fechado e crescente, com $x \in U$ e $y \notin U$. Mas $(U \cap Y) \cup (U^c \cap Y) = Y$ e $(U \cap Y) \cap (U^c \cap Y) = \emptyset$ de onde segue-se que Y é desconexo.

1.9.4. *Se* $(X, \tau, \leq)$ *é um espaço de Priestley então a família dos subconjuntos abertos, fechados e crescentes e seus complementares formam uma sub-base para os abertos de* X.

Vejamos, seja $G \subset X$, $G \neq \emptyset$; $G \neq X$, um subconjunto aberto.

Sejam $x \in G$ e $y \in G^c$. Então $x \neq y$. Portanto, podem ocorrer:

1) $x \not\leq y$ neste caso existe U_y aberto, fechado e crescente tal $x \in U_y$ e $y \notin U_y$, ou

2) $y \not\leq x$ e então existe V_y aberto, fechado e crescente tal que $x \notin V_y$ e $y \in V_y$.

Consideremos $I = \{y \in G^c, x \not\leq y\}$ e $J = \{y \in G^c : y \not\leq x\}$. Daí, $G^c \subseteq \bigcup_{y \in I} U_y^c \cup \bigcup_{y \in J} V_y$. Mas, G^c é fechado e X compacto, logo existem $y_1, \ldots, y_n \in I$ e $y_1', \ldots, y_k' \in J$ tais que $G^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^c \cup \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i'}$. Se $U_x^c = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^c = (\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i})^c$ e $V_x = \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i'}$ então $G^c \subseteq U_x^c \cup V_x$. (Observe que U_x e V_x são abertos, fechados e crescentes.) Como $x \in U_{y_i}$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $x \in U_x$. Também, $x \notin V_{y_i'}$, $\forall i = 1, \ldots, k$, logo $x \notin V_x$. Assim, $x \in U_x \cap V_x^c \subseteq G$ ou seja $G = \bigcup_{x \in G} (U_x \cap V_x^c)$.

1.9.5. Podemos verificar, também, que *se* $(X, \tau, \leq)$ *é um espaço de Priestley os subconjuntos abertos, fechados e crescentes de* X *formam uma base para os abertos crescentes.*

De fato, seja $G \subseteq X$ um subconjunto aberto e crescente (Se $G = X$ ou $G = \emptyset$ verifica-se trivialmente).

Se G é crescente e $x \in G$, $y \in G^c$ então $x \not\leq y$. Daí o conjunto J da demonstração anterior é vazio, de onde segue-se $G^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^c = U^c$, ou seja $x \in U \subseteq G$.

1.10. Um exemplo de um espaço de Priestley é o seguinte: Seja I um conjunto qualquer e 2 a cadeia com dois elementos $\{0,1\}$ com a topologia discreta. Então $2^I = \{f : I \to 2\}$ é um espaço de

Hausdorff compacto, com a topologia produto, uma vez que cada componente do produto é compacta (Teorema de Tichonov). Com a ordem natural (isto é, $f \leq g$ see $f(a) \leq g(a)$, $\forall a \in I$) é um espaço topológico ordenado.

Mostremos, então que 2^I é totalmente desconexo na ordem.

Seja $f \not\leq g$. Então existe $a \in I$ com $f(a) = 1$ e $g(a) = 0$. Seja $U = \{h \in 2^I : h(a) = 1\}$. U é aberto e fechado, pois $U = p_a^{-1}(\{1\})$ e $p_a : 2^I \to 2$ é a projeção, portanto contínua e $\{1\}$ é aberto e fechado. Além disso, se $h \in U$, $k \in 2^I$ com $h \leq k$, então $h(a) \leq k(a) \to k(a) = 1$, ou seja $k \in U$. Assim $f \in U$, $g \in U^c$ e U é aberto, fechado e crescente.

1.11. Vejamos, agora, que *a todo reticulado distributivo* A *podemos associar um espaço de Priestley que denotaremos por* $Pr(A)$. Seja $Pr(A)$ o conjunto dos 0,1-homomorfismos de A em 2, com a topologia e a ordem induzidas de 2^A. $Pr(A)$ é fechado em 2^A.

De fato, seja $f \in 2^A$ com $f \notin Pr(A)$. Então, pode ocorrer

a) $f(a) = 1$ c) $f(a \vee b) \neq f(a) \vee f(b)$

b) $f(1) = 0$ d) $f(a \wedge b) \neq f(a) \wedge f(b)$

Vejamos que, em qualquer dos casos acima, existe aberto de 2^A que contém f e está contido em $Pr(A)^c$.

a) $f(a) = 1 \Leftrightarrow f \in p_o^{-1}(\{1\}) \subseteq (Pr(A))^c$

b) $f(1) = 0 \Leftrightarrow f \in p_1^{-1}(\{0\}) \subseteq (Pr(A))^c$

c) $f(a \vee b) \neq f(a) \vee f(b)$ temos:

$[f(a \vee b) = 1$ e $f(a) \vee f(b) = 0]$ ou $[f(a \vee b) = 0$ e $f(a) \vee f(b) = 1]$.

Mas $f(a \vee b) = 1 \iff f \in p_{a \vee b}^{-1}(\{1\})$ e

$$(f(a) \vee f(b) = 0) \iff (f(a) = f(b) = 0) \iff$$
$$\iff (f \in p_a^{-1}(\{0\}) \quad \text{e} \quad f \in p_b^{-1}(\{0\})) .$$

Portanto, temos $f \in p_{a \vee b}^{-1}(\{1\}) \cap p_a^{-1}(\{0\}) \cap p_b^{-1}(\{0\})$. Agora, se $g \in p_{a \vee b}^{-1}(\{1\}) \cap p_a^{-1}(\{0\}) \cap p_b^{-1}(\{0\})$ tem-se $g(a \vee b) = 1$ e $g(a) = g(b) = 0$, ou seja $g \notin \mathcal{Pr}(A)$.

d) Analogamente se demonstra se $f(a \vee b) = 0$ e $f(a) \vee f(b) = 1$ e para $f(a \wedge b) \neq f(a) \wedge f(b)$.

Desta forma temos que $\mathcal{Pr}(A)$ é fechado.

Mas, um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto, logo, como 2^A é compacto e $\mathcal{Pr}(A)$ é fechado, $\mathcal{Pr}(A)$ é compacto.

Ainda mais, $\mathcal{Pr}(A)$ é totalmente desconexo na ordem. Se $h_1 \not\leq h_2$, $h_1, h_2 \in \mathcal{Pr}(A)$, $h_1 \not\leq h_2$ em 2^A . Logo existe U aberto, fechado e crescente de 2^A tal que $h_1 \in U$ e $h_2 \in U^c$. Como $U \cap \mathcal{Pr}(A)$ é aberto, fechado e crescente em $\mathcal{Pr}(A)$, e $h_1 \in (U \cap \mathcal{Pr}(A))$ e $h_2 \in (U^c \cap \mathcal{Pr}(A))$, temos a total desconexão na ordem de $\mathcal{Pr}(A)$.

1.12. A categoria cujos objetos são espaços de Priestley e os morfismos são funções contínuas crescentes será denotada por *Todc*.

1.13. Vimos que a todo reticulado distributivo com primeiro e último elementos está associado um espaço de Priestley. Também, dado um espaço de Priestley $(X,\tau,\leq)$, o conjunto de todos os subconjuntos abertos, fechados e crescentes de X, com as operações de união e intersecção de conjuntos, forma um reticulado distributivo que tem por primeiro e último elementos os conjuntos vazio e X, respectivamente. Chamaremos este reticulado de *reticulado dual* de X e denotaremos por $\mathcal{D}(X)$.

Podemos observar que:

i) *Se* X *é um conjunto finito,* $\mathcal{D}(X)$ *é o reticulado dos conjuntos crescentes*, pois se X é finito, a topologia é a topologia discreta (vide 1.9.2).

ii) *Se a ordem de* X *é a trivial, então* $\mathcal{D}(X)$ *é o reticulado dos abertos e fechados*, pois todo subconjunto é trivialmente crescente.

Vejamos, agora, a teoria da dualidade de Priestley [9].

1.14. PROPOSIÇÃO: *"Sejam* A *um objeto de* $\mathcal{D}_{0,1}$ *e* $Pr(A)$ *o espaço de Priestley associado a* A*. Então* A *é isomorfo a* $\mathcal{D}(Pr(A))$*."*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\sigma : A \longrightarrow \mathcal{D}(Pr(A))$ definida por $\sigma(a) = \{h \in X(A) : h(a) = 1\} = \{P \in F(A) : a \in P\}$.

Como vimos em 0.18 há uma equivalência entre o conjunto dos filtros primos e dos 0,1-homomorfismos definidos de A em $\{0,1\}$. Faremos a demonstração utilizando os filtros primos e des tacamos que a vantagem da mesma é que dá uma idéia de como se poderia definir a topologia no conjunto dos filtros primos, sem recorrer ao teorema de Tichonov.

De acordo com 1.10, $\sigma(a)$ é aberto, fechado e crescente em $Pr(A)$. Logo $\sigma(A) \subseteq D(Pr(A))$.

Ainda, σ é um isomorfismo de reticulados:

i) σ *é morfismo de* $D_{0,1}$:

a) $[P \in \sigma(a \wedge b)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \in P] \Leftrightarrow [a \in P \text{ e } b \in P] \Leftrightarrow [P \in (\sigma(a) \cap \sigma(b))]$.

b) $[P \in \sigma(a \vee b)] \Leftrightarrow [(a \vee b) \in P] \Leftrightarrow [a \in P \text{ ou } b \in P] \Leftrightarrow [P \in (\sigma(a) \cup \sigma(b))]$.

c) $\sigma(0) = \{P \in Pr(A) : 0 \in P\} = \emptyset$.

d) $\sigma(1) = \{P \in Pr(A) : 1 \in P\} = X$.

ii) σ *é injetora:*

Se $\sigma(a) = \sigma(b) \Leftrightarrow [P \in \sigma(a) \Leftrightarrow P \in \sigma(b)] \Leftrightarrow [a \in P \Leftrightarrow b \in P$, para todo $P \in Pr(A)]$. Se $a \neq b$, então $a \not\leq b$ ou $b \not\leq a$. Logo $(a] \cap [b) = \emptyset$ ou $[a) \cap (b] = \emptyset$, donde segue-se $a \notin [b)$ ou $b \notin [a)$. Portanto, pelo teorema de Stone-Birkhoff (vide capítulo 0.16), existe $P \in Pr(A)$ com $a \notin P$ e $[b) \subset P$ ou $b \notin P$ e $[a) \subset P$!!! Logo $a = b$.

iii) σ *é sobrejetora:*

Seja $U \in D(Pr(A))$. Queremos encontrar $a \in A$ tal que $\sigma(a) = U$. Como U é aberto e fechado, U é compacto, daí $U = \bigcup_{i \in I} \sigma(a_i)$ onde I é finito. Seja $a = \bigvee_{i \in I} a_i$, então

$U = \sigma(a)$.

Temos, então que A é isomorfo a $\mathcal{D}(Pr(A))$.

Com esta proposição estabelecemos uma correspondência 1-1 entre reticulados distributivos quaisquer e os reticulados duais de seus espaços de Priestley.

Vejamos, agora, a correspondência que há entre objetos X da categoria *Tode* e os espaços de Priestley de seus respectivos reticulados duais.

1.15. PROPOSIÇÃO: *"Sejam $(X,\tau,\leq)$ um espaço de Priestley e $\mathcal{D}(X)$ seu reticulado dual. Então X e $Pr(\mathcal{D}(X))$ são homeomorfos como espaços topológicos e isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.*

De fato

Seja $\delta : X \longrightarrow Pr(\mathcal{D}(X))$ definida por $\delta(X) = F_x$ onde $F_x = \{U \in \mathcal{D}(X) : x \in U\}$.

Mostremos que F_x é um filtro primo de $\mathcal{D}(X)$.

i) $X \in F_x$.

ii) Se $U, V \in F_x$ temos que $x \in U$ e $x \in V$. Logo $x \in U \cap V$, de onde segue-se que $U \cap V \in F_x$.

iii) Se $(U \cup V) \in F_x$ temos $x \in (U \cup V)$. Logo $x \in U$ ou $x \in V$. Portanto $U \in F_x$ ou $V \in F_x$.

Vejamos, sucessivamente, que δ é contínua, sobre e isomorfismo de ordem.

a) *δ é contínua.*

Os abertos sub-básicos de $Pr(\mathcal{D}(X))$ são da forma $\sigma(U)$ e $\sigma(U)^c$, onde $\sigma(U) = \{P \in Pr(\mathcal{D}(X)) : U \in P\}$. Consideremos um ponto arbitrário x de $\delta^{-1}(\sigma(U))$. Então, $\delta(x) \in \sigma(U)$. Portanto, $\delta(x) = F_x \in \sigma(U) = \{P \in Pr(\mathcal{D}(X)) : U \in P\}$ é equivalente a $U \in \delta(x)$, ou seja, $x \in U$. Mostremos, agora, que $U \subset \delta^{-1}(\sigma(U))$. Seja $y \in U$. Então $\delta(y) = F_y$ onde $U \in F_y$ pois $y \in U$. Assim, $\delta(y) \in \sigma(U)$, ou seja, $y \in \delta^{-1}(\sigma(U))$. Portanto δ é contínua.

b) *δ é sobrejetora.*

Seja $P \in Pr(\mathcal{D}(X))$. Queremos mostrar que existe $x \in X$ com $\delta(x) = P$.

Seja $Q = P^c$. Então Q é um ideal primo. Consideremos $F = \bigcap_{V \in Q} V^c$, V^c são abertos, fechados e decrescentes, logo, $F = (\bigcup_{V \in Q} V)^c$ é fechado e decrescente.

Vejamos que $F \cap (\bigcap_{U \in P} U) \neq \emptyset$. Para tanto, como o espaço é compacto, bastará mostrar que $\mathcal{F} = \{F\} \cup P$ tem a P.I.F. Suponhamos $U_i \in P$, $i = 1,\dots,n$ e $F \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$. Como $U_i \in P$, $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in P$ e se $F \cap U = \emptyset$ segue-se que $U \subseteq F^c \subset \bigcup_{V \in Q} V$.

Como U é compacto, existem $V_1,\dots,V_k$ em Q tais que $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_i$.

Mas $U \in P$, logo $\bigcup_{i=1}^{k} V_i \in P$ e como Q é ideal $\bigcup_{i=1}^{k} V_i \in Q$, o que é uma contradição!! Portanto $F \cap (\bigcap_{U \in P} U) \neq \emptyset$.

Seja agora, $x \in F \cap (\bigcap_{U \in P} U)$. Afirmamos que $\delta(x) = P$. Suponhamos que $\delta(x) \neq P$. Como, para todo U pertencente a P tem-se $x \in U$, então $P \subseteq \delta(x)$. Seja, então, $V \in \delta(x)$, com $V \notin P$. Mas, se $V \notin P$ tem-se que $V \in P^c = Q$. Mas $x \in F$ e então $x \in \bigcap_{V \in Q} V^c$, ou seja $x \notin V$, $(\forall V \in Q)$ o que é uma contradição!

Logo $\delta(x) = P$.

c) *δ é isomorfismo de ordem.*

Seja $\delta(x) = \{U \in \mathcal{D}(X) : x \in U\}$.

i) Sejam $x, y \in X$ com $x \leq y$. Daí, $\forall U \in \mathcal{D}(X)$, se $x \in U$, então $y \in U$, ou seja, se $U \in \delta(x)$ então $U \in \delta(y)$. Portanto $\delta(x) \leq \delta(y)$.

ii) Suponhamos $\delta(x) \leq \delta(y)$ e $x \not\leq y$. Logo, $\exists\, U \in \mathcal{D}(X)$ com $x \in U$ e $y \notin U$, de onde segue-se $U \in \delta(x)$ e $U \notin \delta(y)$. (Contradição !!)

Agora, como δ é isomorfismo de ordem, em particular é injetora e como X e $Pr(\mathcal{D}(X))$ são compactos e Hausdorff, resulta que δ é homeomorfismo. [Vide Dugundji [5]: "uma função contínua e bijetora entre espaços compactos e Hausdorff é um homeomorfismo".]

Completamos, assim, a demonstração da proposição.

Em termos de categorias, o que vimos até aqui é o seguinte: *"Dado um objeto de $\mathcal{D}_{0,1}$, existe em correspondência um objeto de Tode, a saber $Pr(A)$ e, dado um objeto X de Tode existe em* *correspondência um objeto* $D(X)$ *de* $D_{0,1}$.

Desta forma, temos correspondências entre objetos das categorias *Top* e $D_{0,1}$. Com o objetivo de definirmos funtores entre estas categorias vamos definir as correspondências entre os morfismos das mesmas.

Se $f : A_1 \to A_2$ é um morfismo de $D_{0,1}$, seja $Pr(f) : Pr(A_2) \to Pr(A_1)$ definido por $(\forall P \in Pr(A_2))$, $Pr(f)(P) = f^{-1}(P)$. Muitas vezes notaremos $Pr(f)$ por ϕ_f.

1.16. LEMA: *Nas condições do parágrafo anterior,* $Pr(f)$ *é uma função contínua e crescente. Mais ainda,*

i) *f é sobre se e somente se* $Pr(f)$ *é isomorfismo na ordem.*

ii) $Pr(f)$ *é sobre se, e somente se,* f *é 1-1.*

DEMONSTRAÇÃO: Para mostrarmos que $Pr(f)$ é contínua, basta ver que $\forall a_1 \in A_1$, tem-se que $\phi_f^{-1}(\sigma(a_1)) = \sigma(f(a_1))$, pois isto implica que a imagem inversa de todo aberto sub-básico de $Pr(A_1)$ é um sub-básico de $Pr(A_2)$.

De fato,

$$P \in \phi_f^{-1}(\sigma(a_1)) \Leftrightarrow \phi_f(P) \in \sigma(a_1) \Leftrightarrow f^{-1}(P) \in \sigma(a_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 \in f^{-1}(P) \Leftrightarrow f(a_1) \in P \Leftrightarrow P \in \sigma(f(a_1)).$$

Agora, se $P \leq Q$, $P,Q \in Pr(A_2)$, então $\phi_f(P) = f^{-1}(P) \subseteq f^{-1}(Q) = \phi_f(Q)$. Assim, ϕ_f é crescente.

Continuando, vejamos que f é sobre se e somente se ϕ_f é isomorfismo na ordem. Para tanto, consideremos as seguintes afirmações equivalentes:

1) ϕ_f é isomorfismo na ordem.

2) Se $x \not\leq y$, $\exists\, a_1 \in A_1 : x \in \phi_f(\sigma(a_1))$ e $y \notin \phi_f^{-1}(\sigma(a_1))$.

3) $\forall\, a_2 \in A_2 : \exists\, a_1 \in A_1 : \sigma(a_1) = \phi_f^{-1}(\sigma(a_2))$.

4) $f: A_1 \to A_2$ é sobre.

De fato

$(1 \Rightarrow 2)$ Como ϕ_f é isomorfismo na ordem, se $x \not\leq y$, com $x, y \in Pr(A_2)$, então $\phi_f(x) \not\leq \phi_f(y)$. Mas, $Pr(A_1)$ é totalmente desconexo na ordem, logo existe $U \in D(Pr(A_1))$ tal que $\phi_f(x) \in U$ e $\phi_f(y) \notin U$. A afirmação 2) resulta do fato que $U = \sigma(a_1)$ para algum $a_1 \in A_1$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Consideremos $L = \{\phi_f^{-1}(U) : U \in D(Pr(A_1))\}$. L é um reticulado e $L \subseteq D(Pr(A_2))$. Mostremos que $D(Pr(A_2) \subseteq L$.

Como $\phi = \sigma(0) = \phi^{-1}(\sigma(0))$ e $Pr(A_2) = \sigma(1) = \phi_f^{-1}(\sigma(1))$, para provarmos a inclusão deveremos ver que se $V \in D(Pr(A_2))$, $V \neq \emptyset$ e $V \neq Pr(A_2)$, então $V = \sigma(a_1)$, para $a_1 \in A_1$. Seja $x \in V$ e $y \notin V$. Então $x \not\leq y$ e por 2) $\exists\, a_y \in A_1$ tal que $x \in \phi_f^{-1}(\sigma(a_y))$ e $y \notin \phi_f^{-1}(\sigma(a_y))$. Logo $V \subset \bigcup_{y \in V} \phi_f^{-1}(\sigma(a_y))$ e pela compacidade de V resulta que existem $y_1, \ldots, y_n \in V$ com $V \subset \bigcup_{i=1}^{n} \phi_f^{-1}(\sigma(a_{y_i})) = \phi_f^{-1}(\sigma(a_{y_1} \vee \ldots \vee a_{y_n})) = \phi_f^{-1}(\sigma(a_x))$, onde $a_x = a_{y_1} \vee \ldots \vee a_{y_n}$. Ainda, $y \notin \phi_f^{-1}(\sigma(a_x))$, pois $y \notin \phi_f^{-1}(\sigma(a_y))$ e $x \in \phi_f(\sigma(a_y))$ para $y \in V$. Logo $V = \bigcap_{x \in V} \phi_f^{-1}(\sigma(a_x))$. Como

$\phi_f^{-1}(\sigma(a_x)) \in L$ temos que $V \in L$. Assim podemos afirmar que $\forall\, a_2 \in A_2$, $\exists\, a_1 \in A_1$: $\sigma(a_2) = \phi_f^{-1}(\sigma(a_1))$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Suponhamos que exista $a_2 \in A_2$ tal que para todo $a_1 \in A_1$, $a_2 \neq f(a_1)$. Daí, segue-se que, para todo $a_1 \in A_2$, tem-se $a_2 \not\leq f(a_1)$ ou $f(a_1) \not\leq a_2$.

Se $a_2 \not\leq f(a_1)$, existe $P \in \mathcal{Pr}(A_2)$: $a_2 \in P$ e $f(a_1) \notin P$ ou seja, $[a_2 \in P$ e $a_1 \notin f^{-1}(P)] \Leftrightarrow [P \in \sigma(a_2)$ e $f^{-1}(P) \notin \sigma(a_1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [P \in \sigma(a_2)$ e $\phi_f(P) \notin \sigma(a_1)] \Leftrightarrow [P \in \sigma(a_2)$ e $P \notin \phi_f^{-1}(\sigma(a_1))]$.

Logo, se $a_2 \not\leq f(a_1)$: $\sigma(a_2) \neq \phi_f^{-1}(\sigma(a_1))$. (1). Ainda, se $f(a_1) \not\leq a_2$, $\exists\, P \in \mathcal{Pr}(A_2)$: $a_2 \notin P$ e $f(a_1) \in P$, ou seja, $[f(a_1) \in P$ e $a_2 \notin P] \Leftrightarrow [P \in \phi_f^{-1}(\sigma(a_1)$ e $P \notin \sigma(a_2)]$.

$$\therefore\quad \phi_f^{-1}(\sigma(a_1)) \neq \sigma(a_2). \quad (2)$$

(1) e (2) contrariam a hipótese pois, $\forall\, a_2 \in A_2$, $\exists\, a_1 \in A_1$ $\sigma(a_1) = \phi_f^{-1}(\sigma(a_2))$.

Finalmente, vejamos $(4 \Rightarrow 1)$.

Como ϕ_f é crescente basta ver que $\phi_f(P) \subseteq \phi_f(Q)$ implica que $P \subseteq Q$.

Suponhamos que $\phi_f(P) \subseteq \phi_f(Q)$ e $P \not\subseteq Q$. Então existe a_2 em A_2, com $a_2 \in P$ e $a_2 \notin Q$. Como f é sobre, $a_2 = f(a_1)$ para algum $a_1 \in A_1$. Daí, $f(a_1) \in P$ e $f(a_1) \notin Q$, ou seja, $a_1 \in f^{-1}(P) = \phi_f(P)$ e $a_1 \notin f^{-1}(Q) = \phi_f(Q)$ (Contradição !!). Logo $P \subseteq Q$.

Para finalizar, mostremos que ϕ_f é sobre se e somente se

f é 1-1.

($\Rightarrow$) Se $f(a) = f(b)$ para a e b elementos de A_1, então para todo $P \in Pr(A_2)$, $f(a) \in P \Leftrightarrow f(b) \in P$, ou ainda $a \in f^{-1}(P) = \phi_f(P)$ se e somente se $b \in f^{-1}(P) = \phi_f(P)$ e como ϕ_f é sobre, todos os filtros primos de A_1 são da forma $\phi_f(P)$ para $P \in Pr(A_2)$, logo $a = b$.

($\Leftarrow$) Demonstraremos, agora, que dado P_1 filtro primo de A_1, existe P_2, filtro primo de A_2 tais que $\phi_f(P_2) = P_1$.

Por hipótese, $f: A_1 \to A_2$ é injetora.

Seja P_1 um filtro de A_1 $f(P_1) \subseteq f(A_1)$ e $f(A_1)$ é sub-reticulado de A_2.

De fato:

Sejam $a', b' \in f(A_1)$. Então $\exists\, a,b \in A_1$ tais que $a' = f(a)$, $b' = f(b)$. Daí, $a' \vee b' = f(a \vee b) \in f(A_1)$ e $a' \wedge b' = f(a \wedge b) \in f(A_1)$.

AFIRMAÇÃO: $f(P_1)$ é um filtro primo de $f(A_1)$.

Sejam $a' \in f(P_1)$ e $b' \in f(A_1)$. Então $\exists!$ $a \in P_1$ e $b \in A_1$ com $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$. Mas $a' \vee b' = f(a \vee b)$. Sendo P_1 filtro primo de A_1, $a \vee b \in P_1$, logo $a' \vee b' \in f(P_1)$.

Portanto $f(P_1)$ é filtro de $f(A_1)$.

Ainda, sejam a', b' elementos de $f(A_1)$ tais que $a' \vee b' \in f(P_1)$. Então $a' = f(a)$, $b' = f(b)$, para $a,b \in A_1$.
$a' \vee b' = f(a \vee b) \in f(P_1) \Leftrightarrow [(a \vee b) \in P_1] \Leftrightarrow [a \in P_1 \text{ ou } b \in P_1] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [a' \in f(P_1) \text{ ou } b' \in f(P_1)]$.

Temos, também, (conforme 0.17), que $\exists\, P_2$, filtro primo de A_2, tal que $f(P_1) = f(A_1) \cap P_2$. Então, $f^{-1}(P_2) = f^{-1}(P_2 \cap f(A_1)) =$

$= f^{-1}(f(P_1)) = P_1$ pois f é 1-1. Logo $\phi_f(P_2) = f^{-1}(P_2) = P_1$.

Até aqui vimos a correspondência existente entre os objetos das categorias $\mathcal{D}_{0,1}$ e *Todo*, vejamos a correspondência que existe entre os morfismos: *Dada uma função contínua e crescente* ϕ *definida de* X *em* Y, *onde* X *e* Y *são objetos de* *Todo*, *se* $\mathcal{D}(\phi) : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$ *é definida por* $\mathcal{D}(\phi)(U) = \phi^{-1}(U)$ *então temos:*

1.17. LEMA: Nestas condições $\mathcal{D}(\phi)$ *é um morfismo da categoria* $\mathcal{D}_{0,1}$.

Como ϕ é contínua e crescente é claro que $\mathcal{D}(\phi)$ transforma $\mathcal{D}(X)$ em $\mathcal{D}(Y)$. Além disso, como a imagem inversa preserva as operações triviais de conjuntos, $\mathcal{D}(\phi)$ é um morfismo de $\mathcal{D}_{0,1}$.

Observemos agora que:

i) $\forall X \in$ Ob *Todo*, $\mathcal{D}(id_X) = id_{\mathcal{D}(X)}$.

ii) Se $\phi \circ \rho$ está definida em *Todo*, então $\mathcal{D}(\phi \circ \rho) = \mathcal{D}(\phi) \circ \mathcal{D}(\rho)$.

i) Seja X um objeto da categoria *Todo* e $id_X : X \to X$ a função identidade. Então, $\mathcal{D}(id_X) : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$ é tal que para todo $U \in \mathcal{D}(X)$ tem-se $\mathcal{D}(id_X)(U) = id_X^{-1}(U) = U$ ou seja $\mathcal{D}(id_X) = id_{\mathcal{D}(X)}$.

ii) Suponhamos que $\phi : X \to Y$ e $\rho : Y \to Z$ são morfismos de *Todo*. Então, $\mathcal{D}(\rho \circ \phi) = \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Z)$ é dada por:

$$\mathcal{D}(\rho \circ \phi)(U) = (\rho \circ \phi)^{-1}(U) = (\phi^{-1} \circ \rho^{-1})(U) = \phi^{-1}(\rho^{-1}(U)) =$$
$$= \mathcal{D}(\phi)(\mathcal{D}(\rho)(U)) = \mathcal{D}(\phi) \circ \mathcal{D}(\rho)(U) .$$

$$\therefore \quad \mathcal{D}(\rho \circ \phi) = \mathcal{D}(\phi) \circ \mathcal{D}(\rho)$$

Ainda, para $Pr : \mathcal{D}_{0,1} \longrightarrow Todo$ temos:

i) Se A é um objeto de $\mathcal{D}_{0,1}$ e $id_A : A \longrightarrow A$ é o homomorfismo identidade, então $Pr(id_A) : Pr(A) \to Pr(A)$ é definido por, $\forall\, P \in Pr(A)$, $Pr(id_A)(P) = id_A^{-1}(P) = P$. Logo $Pr(id_A) = id_{Pr(A)}$.

ii) Se $g : A \longrightarrow B$ e $f : B \longrightarrow C$ são morfismos de $\mathcal{D}_{0,1}$, então temos $Pr(f \circ g) : Pr(C) \longrightarrow Pr(A)$ é tal que se $P \in Pr(C)$ então $Pr(f \circ g)(P) = (f \circ g)^{-1}(P) = (g^{-1} \circ f^{-1})(P) = Pr(g) \circ Pr(f)(P)$.

Podemos, portanto, resumir o que foi exposto de 1.14. em diante na seguinte proposição:

1.18. PROPOSIÇÃO: *$\mathcal{D}$ e Pr são funtores de $Todo^*$ em $\mathcal{D}_{0,1}$ e $\mathcal{D}_{0,1}$ em $Todo^*$, respectivamente.*

Mais precisamente, podemos afirmar que:

1.19. TEOREMA DA DUALIDADE DE PRIESTLEY [9]: *As categorias $\mathcal{D}_{0,1}$ e a dual de $Todo$ são naturalmente equivalentes.*

DEMONSTRAÇÃO: Queremos mostrar que $Pr \circ \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \circ Pr$ são naturalmente equivalentes às identidades I_{Todo^*} e $I_{\mathcal{D}_{0,1}}$, respectivamente.

De fato:

$Pr \circ D : Tode^* \to Tode^*$ associa a cada objeto X de $Tode^*$ o objeto de $Tode^*$, $Pr(D(X))$ que por 1.15. são homeomorfos como espaços topológicos e isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados, o isomorfismo sendo dado por $\delta_X : X \to Pr(D(X))$ e $\delta_Y : Y \to Pr(D(Y))$ funções contínuas crescentes tais que se ϕ é um morfismo de $Tode^*$, $\phi : X \to Y$ então temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\delta_X"'] & Y \arrow[d, "\delta_Y"] \\ Pr(D(X)) \arrow[r, "Pr(D(\phi))"] & Pr(D(Y)) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Temos, também, que $D \circ Pr : D_{0,1} \longrightarrow D_{0,1}$ associa um objeto A de $D_{0,1}$ ao objeto $D(Pr(A))$ de $D_{0,1}$, que por 1.14. são isomorfos, com o isomorfismo dado por $\sigma_A : A \to D(Pr(A))$, $\sigma_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$. Além disso, se $h : A \to B$ é um morfismo de $D_{0,1}$ temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & B \arrow[d, "\sigma_B"] \\ D(Pr(A)) \arrow[r, "D \circ Pr(h)"] & D(Pr(B)) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

$\therefore$ $D \circ Pr$ é naturalmente equivalente a $I_{D_{0,1}}$ e

$Pr \circ D$ é naturalmente equivalente a I_{Todc^*} .

2. Consideraremos, agora, a representação de Priestley para algumas subcategorias de $D_{0,1}$.

2.1. Vejamos, primeiramente, a subcategoria dos reticulados distributivos finitos.

Seja A um reticulado distributivo. Diremos que $a \in A$ é um *elemento primo* de A se $a = x \vee y$ implicar que $a = x$ ou $a = y$. (Vários autores usam a denominação de irredutível em lugar de primo.)

Se A é um reticulado finito, então todo filtro é principal e um filtro principal é primo se e somente se o seu gerador é primo. Ainda, p e q são primos e $[p) \subseteq [q)$ se e somente se $q \leq p$. Logo $Pr(A)$ pode ser identificado, como conjunto ordenado, com o dual na ordem do conjunto dos elementos primos de A .

Além disso, conforme vimos em 1.9.2., a topologia de $Pr(A)$ é a topologia discreta, se onde segue-se (conforme 1.13. i) que $D(Pr(A))$ *é o reticulado dos subconjuntos crescentes de* $Pr(A)$.

Destas observações decorre o clássico teorema de Birkhoff (1933): "*Seja* A *um reticulado distributivo finito e* X *o conjunto ordenado de seus elementos primos. Então* A *é isomorfo ao reticulado* 2^X *formado pelos subconjuntos crescentes de* X ".

2.2. Vejamos agora, o caso das álgebras de Boole.

Um objeto B de $\mathcal{D}_{0,1}$ tal que para todo $a \in B$, existe um elemento $\bar{a} \in B$ tal que $a \wedge \bar{a} = 0$ e $a \vee \bar{a} = 1$ será chamado *álgebra de Boole*. Notemos que a categoria das álgebras de Boole é uma subcategoria plena de $\mathcal{D}_{0,1}$ isto é, os morfismos são os mesmos.

2.2.1. OBSERVAÇÃO: Notemos que se considerarmos a operação que a cada elemento $a \in B$ associa o complemento booleano $\bar{a}$ temos que uma álgebra de Boole $(B,\vee,\wedge,-,0,1)$ é uma álgebra de tipo de similaridade $(2,2,1,0,0)$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $(B,\vee,\wedge,0,1)$ é um reticulado distributivo com primeiro e último elementos.

b) Para todo $a \in B$, existe $\bar{a} \in B$ tal que $a \wedge \bar{a} = 0$ e $a \vee \bar{a} = 1$.

Desta forma como os tipos de similaridade das álgebras de Boole e dos Reticulados distributivos são diferentes, temos que as álgebras de Boole formam uma subcategoria de $\mathcal{D}_{0,1}$ mas não uma subvariedade da variedade dos reticulados distributivos.

Isto posto, observemos que se B *é uma álgebra de Boole, então a ordem de* $Pr(B)$ *é a ordem trivial*. Para tanto, sejam P e Q elementos de $Pr(B)$ com $P \leq Q$. Suponhamos que $\exists\, x \in Q$ tal que $x \notin P$. Então, como $x \vee \bar{x} = 1 \in P$, $\bar{x} \in P$. Daí, segue-se que $\bar{x} \in Q$ e então $x \wedge \bar{x} = 0$ é um elemento de Q, ou equivalentemente, $Q = A$.

$\therefore$ $P \leq Q$ se, e somente se, $Q = P$.

Mais ainda, se a ordem de $Pr(A)$ é a ordem trivial, já vimos que $Pr(A)$ é um espaço totalmente desconexo. Notemos, também, que os espaços de Priestley com a ordem trivial, (isto é, $x \leq y$ see $x = y$) são chamados de Espaços Booleanos. Ou seja, a restrição do funtor Pr à subcategoria B de $D_{0,1}$ coincide com o funtor clássico de Stone (1936) e recuperamos assim o teorema clássico deste autor: *"a categoria cujos objetos são as álgebras de Boole e os morfismos são homomorfismos de Boole é naturalmente equivalente à categoria cujos objetos são espaços topológicos booleanos e os morfismos são as funções contínuas definidas entre estes espaços"*.

2.3. Faremos, a seguir, a caracterização de Priestley para as álgebras de Heyting.

Lembremos (ver, por exemplo, Balbes e Dwinger [1]) que se L é um objeto da categoria $D_{0,1}$ e a,b são elementos de L, se existir um maior elemento x tal que $a \wedge x \leq b$, este elemento será chamado pseudocomplemento de a em relação a b e será denotado por $a \rightarrow b$. Uma álgebra de Heyting será, então, um objeto L de $D_{0,1}$ para o qual existe $a \rightarrow b$ para todo $a,b \in L$.

Observemos, no entanto, que um homomorfismo de reticulados não preserva, necessariamente, a implicação.

Vamos considerar também, uma álgebra de Heyting como uma álgebra $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo de similaridade $(2,2,2,0,0)$ satisfazendo os seguintes axiomas:

i) $(L,\wedge,\vee,0,1)$ é um reticulado distributivo com primeiro e último elementos.

ii) para todo $a,b \in L$, $\exists\ a \to b$ e é o maior dos elementos $x \in L$ tais que $a \wedge x \leq b$.

Observemos que assim temos a mesma observação que fizemos para as álgebras de Boole, isto é, as álgebras de Heyting formam uma subcategoria, mas não uma subvariedade dos reticulados distributivos.

2.3.1. Denominaremos *Espaço de Heyting* a todo espaço de Priestley X tal que para todo $U,V \in \mathcal{D}(X)$, $(U \cap V^c]$ é aberto.

Observemos que $(F]$ é fechado para todo F subconjunto fechado do espaço de Priestley. De fato, se $x \notin (F]$ temos, $x \not\leq y$, para todo $y \in F$. Como X é um espaço de Priestley, para cada $y \in F$, $\exists\ U_y \in \mathcal{D}(X)$ tal que $x \in U_y$ e $y \in U_y^c$. Daí, $F \subset \bigcup_{y \in F} U_y^c$. Mas F é fechado e X compacto, logo $\exists\ y_1,\ldots,y_n \in F$ tais que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^c$. Seja, agora $a \in (F]$. Por definição, $\exists\ f \in F$ tal que $a \leq f$. Como $f \in F$ e $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^c$, $\exists\ k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $f \in U_{y_k}^c$. Mas $U_y \in \mathcal{D}(X)$ para todo y e $a \leq f$; logo $a \in U_{y_k}^c$.

$$\therefore\ (F] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^c .$$

Ocorre, também, que $x \in U_y$, para todo $y \in F$, logo

$x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \subset (F]^c$, ou seja $(F]$ é fechado.

(Analogamente, podemos mostrar que $[F)$ é fechado.)

Assim, $(U \cap V^c]^c$ é aberto, fechado e crescente num espaço de Heyting X, isto é, $(U \cap V^c]^c \in \mathcal{D}(X)$.

Se X é um espaço de Heyting e $\mathcal{D}(X)$ seu reticulado dual temos que $U \to V = (U \cap V^c]^c$ define em $\mathcal{D}(X)$ uma álgebra de Heyting. De fato, sendo X um espaço de Heyting, X é um espaço de Priestley e $\mathcal{D}(X)$ é um objeto da categoria $\mathcal{D}_{0,1}$. Mostremos que $U \to V$ está bem definido:

i) temos que $U \cap V^c \subseteq (U \cap V^c]$. Logo $(U \cap V^c]^c \subseteq (U^c \cup V)$. Daí, $U \cap (U \cap V^c]^c \subseteq U \cap (U^c \cup V) = \emptyset \cup (U \cap V) = U \cap V \subseteq V$.

ii) se $U \cap W \subseteq V$, com $W \in \mathcal{D}(X)$, tem-se que $U \cap W \cap V^c = \emptyset$. Daí, segue-se que $U \cap V^c \subseteq W^c$, que é aberto fechado e decrescente, portanto $(U \cap V^c] \subseteq W^c$, ou seja $W \subseteq (U \cap V^c]^c = U \to V$.

Reciprocamente, se A é uma álgebra de Heyting então $Pr(A)$ é um espaço de Heyting e $\begin{aligned} \sigma : A &\to \mathcal{D}(Pr(A)) \\ a &\mapsto \{P \in Pr(A) : a \in P\} \end{aligned}$ é um isomorfismo de álgebra de Heyting. Como vimos para reticulados distributivos σ é um isomorfismo de reticulados distributivos. Restanos mostrar que $\sigma(a \to b) = \sigma(a) \to \sigma(b)$.

Vejamos, $a \wedge (a \to b) \leq b$ para todo $a,b \in A$. Então $\sigma(a) \cap (\sigma(a \to b)) \subseteq \sigma(b)$, ou seja $\sigma(a) \cap \sigma(a \to b) \cap \sigma(b)^c = \emptyset$. Portanto temos: $\sigma(a) \cap \sigma(b)^c \subseteq \sigma(a \to b)^c$ que é aberto, fechado e decrescente. Daí, $(\sigma(a) \cap \sigma(b)^c] \subseteq \sigma(a \to b)^c$, ou equivalentemente, $\sigma(a \to b) \subseteq (\sigma(a) \cap \sigma(b)^c]^c$. Restamos mostrar que $(\sigma(a) \cap \sigma(b)^c]^c \subseteq \sigma(a \to b)$.

Seja $P \in \sigma(a \to b)^c$. Então, pela definição de σ, temos $a \to b \notin P$, de onde segue-se que $b \notin P$, pois $b \leq a \to b$. Se $a \in P$, então $P \in \sigma(a) \cap \sigma(b)^c \subseteq (\sigma(a) \cap \sigma(b)^c]$. Se $a \notin P$, seja F o filtro gerado por P e a. F é próprio, pois $b \notin F$. (se $b \in F$, teríamos $b \geq a \wedge c$ com $c \in P$. Então, $(c \wedge a) \to b = 1$, ou equivalentemente, $c \to (a \to b) = 1$, ou seja, $c \leq a \to b$. Como $c \in P$, $a \to b \in P$!!) Logo, existe Q filtro primo tal que $F \subseteq Q$ e $b \notin Q$. Mas, se $a \in Q$ e $b \notin Q$ temos que $Q \in \sigma(a) \cap \sigma(b)^c$. Como, também, $P \subseteq Q$ (observe que $F \subseteq Q$), tem-se $P \in (\sigma(a) \cap \sigma(b)^c]$. Logo $\sigma(a \to b)^c \subseteq (\sigma(a) \cap \sigma(b)^c]$

Assim, para todo $a,b \in L$, $\sigma(a \to b) = \sigma(a) \to \sigma(b)$.

Verifiquemos o que ocorre com os morfismos entre espaços de Heyting.

Seja $\phi : X \to Y$, onde X, Y são espaços de Heyting e ϕ função contínua crescente. Verifiquemos que para todo $U,V \in D(X)$ temos $\phi((U \cap V^c]^c) \subseteq (\phi(U) \cap \phi(V)^c]^c$. De fato, seja $P \in \phi(U \cap V^c]^c$. Então $\phi^{-1}(P) \in (U \cap V^c]^c$, ou seja $\forall\, Q \in U \cap V^c$, $\phi^{-1}(P) \not\leq Q$. Como ϕ é contínua e crescente, $P \not\leq \phi(Q)$, $\forall\, Q \in U \cap V^c$, ou seja, $P \not\leq \phi(Q)$ $\forall\, \phi(Q) \in \phi(U) \cap \phi(V)^c$. Assim, $P \notin (\phi(U) \cap \phi(V)^c]$, ou ainda, $P \in (\phi(U) \cap \phi(V)^c]^c$. Portanto para que ϕ seja um morfismo na categoria dos espaços de Heyting basta que $(\phi(U) \cap \phi(V)^c]^c \subseteq$ $\subseteq (\phi(U \cap V^c]^c)$ para todo $U,V \in D(X)$, uma vez que sempre temos $\phi(U \cap V^c]^c \subseteq (\phi(U) \cap \phi(V)^c]^c$.

Podemos resumir as observações anteriores da seguinte forma: *A categoria cujos objetos são as álgebras de Heyting e os morfismos os 0,1-homomorfismos de álgebras de Heyting é equivalente* *à categoria cujos objetos são espaços de Heyting e os morfismos são funções contínuas crescentes* ϕ, *tais que* $(\phi(U) \cap \phi(V)^c]^c \subseteq \phi(U \cap V^c]^c$, *para todo* $U,V \in D(X)$".

2.4. Notemos que a categoria das álgebras de Boole é subcategoria também da categoria H cujos objetos são álgebras de Heyting e os morfismos 0,1-homomorfismos de álgebras de Heyting.

2.5. Verifiquemos o que ocorre com os reticulados distributivos pseudocomplementados. Lembramos, aqui, que (vide, por exemplo, Balbes e Dwinger [1]) um reticulado distributivo L com primeiro e último elementos é *pseudocomplementado* se para todo $a \in L$, $\exists a^* \in L$, onde definimos a^* como sendo o maior elemento $x \in L$ tal que $a \wedge x = 0$. Notemos que toda álgebra de Heyting é um reticulado distributivo pseudocomplementado onde $a^* = a \to 0$.

Argumentos similares aos usados para as álgebras de Heyting nos permite enunciar o seguinte resultado de Priestley [10]: "L *é um reticulado distributivo pseudocomplementado se, e somente se,* $Pr(L)$ *tem a propriedade de* $(\sigma(a)]$ *ser aberto para todo* $a \in L$".

2.6. Finalmente, observamos que A é uma cadeia se, e somente se, o seu espaço dual é totalmente ordenado.

De fato:

Suponhamos que A é uma cadeia e que existam $P,Q \in Pr(A)$ com $P \not\leq Q$ e $Q \not\leq P$. Então, como $Pr(A)$ é totalmente desconexo na ordem, $\exists U,V \in D(Pr(A))$ tais que $P \in U$ e $Q \in U^c$, $Q \in V$

e $P \in V^c$. Daí, como $U,V \in \mathcal{D}(Pr(A))$, existem $a,b \in A$ com $U = \sigma(a)$ e $V = \sigma(b)$. De onde segue-se $P \in \sigma(a)$, $Q \notin \sigma(a)$, $Q \in \sigma(b)$ e $P \notin \sigma(b)$. Mas, então $\sigma(a) \nsubseteq \sigma(b)$ nem $\sigma(b) \nsubseteq \sigma(a)$!!!

Por outro lado, suponhamos $P \leq Q$ ou $Q \subseteq P$ para todo $P,Q \in Pr(A)$. Se existem $a,b \in A$ com $a \nleq b$ e $b \nleq a$ isto é equivalente a dizer que $\sigma(a) \nsubseteq \sigma(b)$ e $\sigma(b) \nsubseteq \sigma(a)$. Daí, $\exists\, P \in \sigma(a)$ com $P \notin \sigma(b)$ e $\exists\, Q \in \sigma(b)$ com $Q \notin \sigma(a)$, ou seja $\exists\, P,Q$ com $a \in P$, $a \notin Q$, $b \notin P$, $b \in Q$ de onde segue-se $P \nsubseteq Q$ e $Q \nsubseteq P$.

Vimos assim, que *"o espaço de Priestley para as cadeias são espaços topológicos compactos, totalmente ordenados e totalmente desconexos na ordem".*

3. ÁLGEBRAS DE MORGAN E DE KLEENE

Lembremos que uma álgebra de De Morgan é uma álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo de similaridade $(2,2,1,0,0)$ tal que:

1. $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ é um reticulado distributivo com primeiro e último elementos.
2. $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$ e $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, $\forall\, x,y \in A$.
3. $\sim(\sim x) = x$, $\forall\, x \in A$.

A partir desta definição podemos fazer as seguintes observações:

1. A aplicação $\delta : A \to A$ definida por $\delta(x) = \sim x$ satisfaz as seguintes condições:

a) $x \leq y \Rightarrow \delta(y) \leq \delta(x)$

b) $\delta^2(x) = x$.

Observemos que como (b) indica que $\delta = \delta^{-1}$ temos, de fato, que δ é um isomorfismo de ordem, isto é, $x \leq y \iff \delta(x) \leq \delta(y)$

Para provar (a) basta observar que $(x \leq y) \iff [(x \wedge y) = x] \iff [\nu(x \wedge y) = \nu x] \iff [\nu x \vee \nu y = \nu x] \iff (\nu y \leq \nu x)$. Assim, ϕ é um antiautomorfismo de A .

A condição (b) é equivalente a 3.

Uma aplicação δ definida num conjunto parcialmente ordenado que satisfaz (a) e (b) é chamada *involução*.

Lembremos que, de acordo com as definições gerais, um homomorfismo de álgebras de De Morgan é um 0,1-homomorfismo de reticulados tal que $h(\nu x) = \nu h(x)$.

Observemos, agora, que pode haver mais de uma álgebra de De Morgan associada a um mesmo reticulado distributivo. Um exemplo de tal situação é o seguinte:

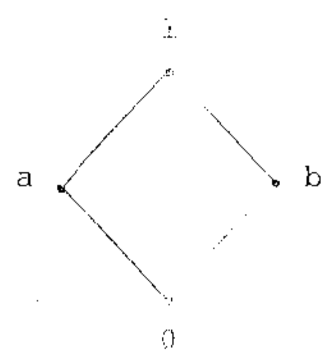


Figura 1.

Associado ao reticulado da Fig. 1 há duas álgebras de De Morgan distintas, a saber: aquela para a qual $\nu a = a$ e $\nu b = b$ e uma outra tal que $\nu a = b$ e $\nu b = a$. Desta forma, temos que a categoria das álgebras de De Morgan não é subcategoria de $\mathcal{D}_{0,1}$.

Para diferenciarmos as diferentes estruturas de álgebra de De Morgan associadas a um mesmo reticulado distributivo, fixaremos um homeomorfismo involutivo $g : \mathcal{P}r(A) \longrightarrow \mathcal{P}r(A)$.

3.1. Um par ordenado (X,g) onde X é um objeto de *Todc* e $g : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo involutivo será chamado *Espaço de De Morgan*. Denotaremos por G a classe dos espaços de De Morgan.

3.2. Se (X,g) e (X',g') são elementos de G e $f : X \longrightarrow X'$ diremos que f é uma G-função se f for um morfismo em *Todc* e $f \circ g = g' \circ f$.

Denotaremos por $\mathcal{G}$ a categoria cujos objetos são elementos de G e os morfismos são G-funções.

3.3. Se (X,g) é um elemento de G e $U \in D(X)$, definimos $\nu U = X \setminus g(U)$.

3.4. Observemos que $M(X,g) = \langle \mathcal{D}(X), \cup, \cap, \nu, \emptyset, X \rangle$ é uma álgebra de De Morgan.

Sabemos que $\langle \mathcal{D}(X), \cup, \cap, \emptyset, X \rangle$ é um reticulado distributico com primeiro e último elementos.

Resta-nos verificar que:

i) $\nu(U \cap V) = \nu U \cup \nu V$ e

$\nu(U \cup V) = \nu U \cap \nu V$.

ii) $\nu(\nu U) = U$.

De fato:

i) $\nu(U \cap V) = X \setminus g(U \cap V) = X \setminus [g(U) \cap g(V)] =$

$= (X \setminus g(U)) \cup (X \setminus g(V)) = \nu U \cup \nu V$.

ii) $\nu(\nu U) = \nu(X \setminus g(U)) = X \setminus g(X \setminus g(U)) = X \setminus [g(X) \setminus U] =$

$= X \setminus [X \setminus U] = U$.

Com esta observação estamos estabelecendo uma correspondência entre os objetos da categoria $\mathcal{G}$ e os da categoria das álgebras de De Morgan.

Vejamos, então, como esta correspondência pode ser estendida aos morfismos das categorias, para, então, termos um funtor definido entre as mesmas.

Seja f uma G-função, f $(X,g) \to (X',g')$. Definimos $\mathcal{M}(f) : \mathcal{D}(X') \to \mathcal{D}(X)$ por $\mathcal{M}f(U') = f^{-1}(U')$.

Segue-se do exposto para reticulados distributivos que $\mathcal{M}(f)$ é um morfismo de $\mathcal{D}_{0,1}$, e

$$\mathcal{M}(f)(\nu U') = \mathcal{M}(f)[X' \setminus g'(U')] = f^{-1}[X' \setminus g'(U')] = f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(g'(U') =$$

$$= X \setminus g(f^{-1}(U')) = X \setminus g(\mathcal{M}f(U')) = \nu\mathcal{M}f(U') .$$

Consideremos, agora, a categoria $\mathcal{A}$ cujos objetos são as álgebras de De Morgan e os morfismos são os homomorfismos de ál gebras de De Morgan.

Do que foi exposto até aqui temos:

3.5. PROPOSIÇÃO: *$\mathcal{M}$ é um funtor de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{A}^*$.*

DEMONSTRAÇÃO: Conforme 3.4., se (X,g) é um objeto de $\mathcal{G}$, $\mathcal{M}(X,g)$ é uma álgebra de De Morgan, ou seja, um objeto de $\mathcal{A}^*$.

Também, conforme 3.4., se $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de $\mathcal{G}$, então $\mathcal{M}f : \mathcal{D}(B) \to \mathcal{D}(A)$ é um homomorfismo de álgebras de De Morgan.

Agora, dado $id_X : (X,g) \longrightarrow (X,g)$, $\mathcal{M}(id_X) : \mathcal{M}(X,g) \to \mathcal{M}(X,g)$ é tal que para todo $U \in \mathcal{M}(X,g)$, $\mathcal{M}(id_X)(U) = id_X^{-1}(U) = U$.

$$\therefore \quad \mathcal{M}(id_X) = id_{\mathcal{M}(X,g)} .$$

Finalmente, dados $f : (X,g) \longrightarrow (X',g')$ e $h : (X',g') \longrightarrow$ $\to (X'',g'')$ temos: $\mathcal{M}(h \circ f) : \mathcal{M}(X'',g'') \longrightarrow \mathcal{M}(X,g)$ é tal que para $U'' \in \mathcal{M}(X'',g'')$, $\mathcal{M}(h \circ f)(U'') = (h \circ f)^{-1}(U'') = (f^{-1} \circ h^{-1})(U'') =$ $= f^{-1}(\mathcal{M}(h)(U'')) = \mathcal{M}(f)(\mathcal{M}(h)(U''))$.

$\therefore$ $\mathcal{M}(h \circ f) = \mathcal{M}(f) \circ \mathcal{M}(h)$, e assim, $\mathcal{M}$ é um funtor.

3.6. Seja A um objeto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}r(A) = (X(A),g)$ onde $X(A)$ é o espaço de Priestley associado ao reticulado distributivo A e $g : X(A) \longrightarrow X(A)$ é definida por $g(P) = A \setminus \{ \sim a : a \in P\}$ para todo $P \in X(A)$. Então $(X(A),g)$ é um espaço de De Morgan.

De fato:

Como vimos para reticulados distributivos $X(A)$ é um obje to de *Todo*. Resta-nos mostrar que g é um homeomorfismo involutivo. Então, vejamos:

1) g *está bem definida:*

Dados P_1 e $P_2 \in X(A)$ com $P_1 = P_2$ tem-se

$$g(P_1) = A \setminus \{\nu a : a \in P_1\} = A \setminus \{\nu a : a \in P_2\} = g(P_2) .$$

Seja $F = A \setminus \{\nu a : a \in P\}$ para algum $P \in X(A)$. Mostremos que $F \in X(A)$.

a) Se $x, y \in F$ tem-se $x, y \in A \setminus \{\nu a : a \in P\}$ ou seja $\nu x, \nu y \notin P$. Logo $\nu(x \wedge y) = \nu x \vee \nu y \notin P$ (pois P é filtro primo) e, portanto, $x \wedge y \in F$.

b) Seja $a \in F$ e $b \in A$, tais que $a \leq b$. Se $b \notin F$, $\nu b \in P$. Mas $\nu b \leq \nu a$, logo $\nu a \in P$ e então $a \notin F$. Assim, $b \in F$.

c) Se $a \vee b \in F$ então $\nu(a \vee b) \notin P$ ou seja $(\nu a \wedge \nu b) \notin P$. Suponhamos $a \in F$ e $b \notin F$. Daí $\nu a \in P$ e $\nu b \in P$, ou seja, $\nu a \wedge \nu b \in P$.

I) g *é uma involução:*

a) $g^2 = id$.

Seja $H = g(g(P)) = A \setminus \{\nu a : a \in A \setminus \{\nu a : a \in P\}\}$. Agora $x \in H$ é equivalente a $x \notin \{\nu a : a \in A \setminus \{\nu a : a \in P\}\}$ ou seja, $\nu x \in \{\nu a : a \in P\}$ ou ainda, $\nu\nu x \in P$. Portanto $H = P$.

b) g preserva a ordem.

Suponhamos que $P \subseteq Q$ e $\exists\, x \in g(Q)$ com $x \notin g(P)$. Então, $x \in g(Q)$ se, e somente se, $\nu x \notin Q$ e $x \notin g(P)$ se, e somente se, $\nu x \in P$ e $P \subseteq Q$, portanto $g(Q) \subseteq g(P)$.

3) g *é contínua:*

Seja $\sigma(a)$ um aberto básico de $Pr(A)$. Queremos mostrar que $g^{-1}(\sigma(a))$ é aberto.

Seja

$$Q \in g^{-1}(\sigma(a)) \iff [g(Q) \in \sigma(a)] \iff [a \in g(Q)] \iff$$
$$\iff [a \in A \setminus \{\nu x : x \in Q\}] \iff [a \neq \nu x \ (\forall\ x \in Q)] \iff$$
$$\iff [\nu a \notin Q] \iff [Q \notin \sigma(\nu a)] \iff [Q \in (\sigma(\nu a))^c] .$$

Como $g = g^{-1}$, temos que g é, de fato, um homeomorfismo.

3.7. Se A_1 e A_2 são objetos da categoria A e $h: A_1 \to A_2$ é um morfismo de A definimos $Pr'(h) = Pr(h)$, isto é, $Pr'(h) : Pr'(A_2) \longrightarrow Pr'(A_1)$ é dada por $Pr'(h)(P) = g^{-1}(P)$.

Vejamos que $Pr'(h)$ é uma G-função.

De fato:

Como já vimos para reticulados distributivos $Pr(h)$ é uma função contínua e crescente. Resta-nos mostrar que $Pr'(h) \circ g_2 = g_1 \circ Pr'(h)$, onde $g_1 : Pr'(A_1) \to Pr'(A_1)$ $g_2 : Pr'(A_2) \longrightarrow Pr'(A_2)$ são homeomorfismos involutivos e anti-isomorfismos na ordem.

Seja $P \in Pr(A_2)$.

$$(Pr'(h) \circ g_2)(P) = h^{-1}(g_2(P)) =$$
$$= h^{-1}(A_2 \setminus \{\nu a : a \in P\}) =$$
$$= A_1 \setminus h^{-1}\{\nu a : a \in P\}$$

Agora $x \in h^{-1}\{\sim a : a \in P\} \Leftrightarrow h(x) \in \{\sim a : a \in P\} \Leftrightarrow h(x) = \sim a$ para algum $a \in P \Leftrightarrow h(\sim x) \in P \Leftrightarrow \sim x \in h^{-1}(P) \Leftrightarrow x \in \{\sim a : a \in h^{-1}(P)\}$.

$$\therefore \quad h^{-1}\{\sim a : a \in P\} = \{\sim a : a \in h^{-1}(P)\}$$

e daí, segue-se que $g_1(h^{-1}(P)) = (g_1 \circ \mathcal{P}r'(h))(P) = (\mathcal{P}r'(h) \circ g)(P)$.

$\therefore$ $\mathcal{P}r'(h)$ é uma G-função.

Do que vimos em 3.6 e 3.7 podemos afirmar que:

3.8. PROPOSIÇÃO: *$\mathcal{P}r'$ é um funtor A em G^*.*

Das proposições 3.5. e 3.8. segue-se

3.9. TEOREMA: *As categorias A^* e G^* são naturalmente equivalentes.*

3.10. Verifiquemos como é o espaço de representação de Priestley para álgebras de Kleene.

Lembremos, primeiramente, que uma álgebra de Kleene A é uma álgebra de De Morgan, para a qual se tem $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$ para quaisquer que sejam $x, y \in A$. Observemos, então, que a categoria das álgebras de Kleene é uma subcategoria plena da categoria das álgebras de De Morgan.

Seja A uma álgebra de Kleene e $(X(A), g)$ o espaço de De Morgan associado a A, como em 3.6. Observemos que para todo $P \in X(A)$ tem-se que P e $g(P)$ são comparáveis, isto é, ou $P \subseteq g(P)$ ou $g(P) \subseteq P$. De fato, suponhamos que $g(P) \not\subseteq P$. Logo existe $x \in g(P)$ tal que $x \not\in P$. Assim $x \in g(P)$ e $\sim x \in g(P)$ de onde segue-se $x \wedge \sim x \in g(P)$. Consideremos $y \in P$. Então $\sim y \notin g(P)$. Mas $\sim x \wedge x \leq y \vee \sim y$ para quaisquer $x,y \in A$. Logo $y \vee \sim y \in g(P)$, ou seja, $y \in g(P)$, pois $\sim y \notin g(P)$.

$$\therefore \quad P \subseteq g(P).$$

Assim, o espaço de Priestley para uma álgebra de Kleene A é o espaço de De Morgan $(X(A),g)$ tal que P e $g(P)$ são comparáveis, para todo $P \in X(A)$.

Reciprocamente, seja (X,g) um espaço de De Morgan para o qual P e $g(P)$ são comparáveis, para todo $P \in X$.

Mostremos que $M(X,g)$ é uma álgebra de Kleene.

Já vimos em 3.4 que $M(X,g)$ é uma álgebra de De Morgan, restando-nos mostrar que para quaisquer $U,V \in M(X,g)$ $U \cap \sim U \subseteq V \cup \sim V$. Seja $P \in U \cap \sim U$. Então $P \in U$ e $P \in \sim U$, ou seja $P \in U$ e $P \notin g(U)$. Daí decorre que $g(P) \leq P$.

Suponhamos, agora, $P \notin V$. Se, ainda, $P \notin \sim V$ teríamos $P \in g(V)$, ou seja $g(P) \in V$. Mas $g(P) \leq P$, de onde segue-se $P \in V$ (contradição!). Logo $P \in \sim V$.

Assim, $U \cap \sim U \subseteq V \cup \sim V$, $\forall\ U,V \in M(X,g)$.

Se chamarmos os espaços de De Morgan (X,g), em que para todo elemento x, x e $g(x)$ são comparáveis, de espaços de Kleene, temos que a *"categoria dos espaços de Kleene e G-funções é equivalente à categoria das álgebras de Kleene"*.

3.11. Observemos, ainda, que uma álgebra de Boole A é uma álgebra de Kleene, onde $\sim a = \bar{a}$ para todo $a \in A$. Daí, segue-se que $g : X(A) \to X(A)$ é o homeomorfismo involutivo associado a A, g é a função identidade. (De fato, se $a \in P$, $\bar{a} \notin P$ pois se $\bar{a} \in P$, $0 = a \wedge \bar{a} \in P$ e então $P = A$. Assim,

$$a \in P \Leftrightarrow \bar{a} \notin P \Leftrightarrow \bar{\bar{a}} \notin \{\bar{a} : a \in P\} \Leftrightarrow a \in g(P) .$$

Logo g é a identidade.) Portanto o teorema de Stome pode ser derivado também desta representação para álgebra de De Morgan.

CAPÍTULO II

CONGRUÊNCIAS EM RETICULADOS DISTRIBUTIVOS

1. INTRODUÇÃO

Estudaremos, neste capítulo, as congruências definidas num reticulado distributivo com primeiro e último elementos, do ponto de vista da Teoria da Representação de Priestley. Destacaremos entretanto que o método utilizado nas demonstrações não é o que aparece nos trabalhos de Priestley.

Para começar recordemos que um reticulado distributivo com primeiro e último elementos é uma álgebra $\langle L,\vee,\wedge,0,1\rangle$ de tipo de similaridade $(2,2,0,0)$. Portanto, uma relação de congruência em $\langle L,\vee,\wedge,0,1\rangle$ será uma relação de equivalência θ tal que: se $a \equiv a' \pmod{\theta}$ e $b \equiv b' \pmod{\theta}$, com a,a',b,b' elementos de L, então:

i) $a \wedge b \equiv a' \wedge b' \pmod{\theta}$

ii) $a \vee b \equiv a' \wedge b' \pmod{\theta}$

Vejamos, agora, um exemplo de congruência definida sobre um reticulado L:

1.1. Seja L um reticulado distributivo com primeiro e último elementos, isto é, seja L é um objeto da categoria $\mathcal{D}_{0,1}$. Dado π um conjunto de filtros primos de L, definimos em L a relação θ_π da seguinte forma: "dados a,b elementos de L, dizemos que $a \equiv b \pmod{\theta_\pi}$ se, e somente se, para todo $P \in \pi$,

$a \in P \Leftrightarrow b \in P$". Esta relação assim definida é uma relação de congruência e para todo $a \in L$,

$$(1) \quad a_{/\equiv} = \bigcap_{\substack{P \in \pi \\ a \in P}} P \cap \bigcap_{\substack{P \in \pi \\ a \notin P}} P^c .$$

Em particular,

$$(2) \quad 1_{/\equiv} = \bigcap_{P \in \pi} P \qquad \text{e}$$

$$(3) \quad 0_{/\equiv} = \bigcap_{P \in \pi} P^c .$$

De fato:

Verifica-se, facilmente, que θ_π é uma relação de equivalência. Sejam, agora, $a \equiv a' (\text{mod } \theta_\pi)$ e $b \equiv b' (\text{mod } \theta_\pi)$. Se $a \vee b \in P$, com $P \in \pi$, então $a \in P$ ou $b \in P$. Assim, pela definição de θ_π, tem-se que $a' \in P$ ou $b' \in P$. Daí, segue-se que $a' \vee b' \in P$. Por outro lado se $a \vee b \notin P$, tem-se que $a \notin P$ e $b \notin P$. Daí $a' \notin P$ e $b' \notin P$, de onde segue-se que $a' \vee b' \notin P$. Assim temos:

$$a \vee b \equiv a' \vee b' \ (\text{mod } \theta_\pi) .$$

Ainda, nas mesmas condições, se $a \wedge b \in P$, para $P \in \pi$, então $a \in P$ e $b \in P$, de onde segue-se que $a' \in P$ e $b' \in P$. Daí, $a' \wedge b' \in P$. Por outro lado, se $a \wedge b \notin P$ temos que $a \notin P$ ou $b \notin P$. Assim, $a' \notin P$ ou $b' \notin P$, de onde segue-se que $a' \wedge b' \notin P$.

Assim $a' \wedge b' \equiv a \wedge b \ (\text{mod } \theta_\pi)$

As fórmulas (1), (2) e (3) são, agora, imediatas.

1.2. Observemos que se L/θ_π é o reticulado quociente e $h : L \to L/\theta_\pi$ é o homomorfismo canônico, como h é sobrejetor, se F é filtro de L, $h(F)$ é um filtro de L/θ_π. Mas, não temos, necessariamente, que a imagem por h de todo filtro primo de L seja um filtro primo em L/θ_π. Vejamos, entretanto, que $h(P)$ é primo para todo P na família π. Notemos primeiro que como $0 \notin P$, para todo $P \in \pi$, temos que (3) implica que $h(0) \notin h(P)$ e portanto $h(P) \neq L/\theta_\pi$. Sejam, agora, $\alpha, \beta \in L/\theta_\pi$ tais que $\alpha \vee \beta \in h(P)$. Então existem $a,b \in L$ e $c \in P$ de modo que $\alpha = h(a)$, $\beta = h(b)$ e $\alpha \vee \beta = h(c)$. Daí, $\alpha \vee \beta = h(a) \vee h(b) = h(a \vee b) = h(c)$. Consequentemente, $a \vee b \equiv c \pmod{\theta_\pi}$. Como $c \in P$ e $P \in \pi$, temos $a \vee b \in P$ e então $a \in P$ ou $b \in P$. Logo $\alpha \in h(P)$ ou $\beta \in h(P)$. Assim, $h(P)$ é filtro primo em L/θ_π.

Por 1.1. vimos que dada uma família π de filtros primos de um objeto L em $\mathcal{D}_{0,1}$, determinamos uma relação de congruência em L, a saber, θ_π.

Queremos mostrar, agora, que toda relação de congruência definida em L é da forma θ_π para alguma família π de filtros primos. Para tanto, vejamos a proposição a seguir. Antes de enunciá-la, porém, destacamos que uma família π de filtros primos de L é separadora se dados dois elementos distintos de L, existe $P \in \pi$ tal que contém um deles mas não o outro.

1.3. PROPOSIÇÃO: *Sejam* L *e* L' *objetos de* $D_{0,1}$, $h : L \to L'$ *um homomorfismo sobrejetor,* π' *é uma família separadora de filtros primos de* L' *e* $\pi = \{h^{-1}(Q) : Q \in \pi'\}$. *Então* $h(a) = h(b)$ *se, e somente se,* $a \equiv b \pmod{\theta_\pi}$.

De fato,

Como π' é uma família separadora de filtros primos de L', temos que $\{a'\} = \bigcap_{\substack{Q \in \pi' \\ a' \in Q}} Q \cap \bigcap_{\substack{Q \in \pi' \\ a' \notin Q}} Q^c$, para todo $a' \in L'$. Logo:

$$(1.3.1) \quad h^{-1}(\{a'\}) = \bigcap_{\substack{Q \in \pi' \\ a' \in Q}} h^{-1}(Q) \cap \bigcap_{\substack{Q \in \pi' \\ a' \notin Q}} h^{-1}(Q^c) .$$

Sejam, então, a e b elementos de L tais que $h(a) = h(b) = a'$. Por (1)

$$a,b \in \left[\bigcap_{\substack{Q \in \pi' \\ a' \in Q}} h^{-1}(Q) \cap \bigcap_{\substack{Q \in \pi' \\ a' \notin Q}} h^{-1}(Q^c) \right]$$

e, então, $a \in h^{-1}(Q)$ se, e somente se, $b \in h^{-1}(Q)$, $\forall\, Q \in \pi'$. Por outro lado, se $a \equiv b \pmod{\theta_\pi}$ então $a \in h^{-1}(Q)$ se, e somente se $b \in h^{-1}(Q)$, para todo $Q \in \pi'$, de onde segue-se de (1.3.1) que $h^{-1}(\{h(a)\}) = h^{-1}(\{h(b)\})$ e então $b \in h^{-1}(\{h(a)\})$, de onde segue-se $h(b) \in \{h(a)\}$, ou equivalentemente, $h(a) = h(b)$.

Como, para toda congruência definida em L, existe, em correspondência, um homomorfismo sobrejetor $h : L \longrightarrow L_{/\theta}$, temos que toda congruência θ é da forma θ_π onde $\pi = \{h^{-1}(Q) : Q \in \pi'\}$ e π' é uma família separadora de filtros primos de $L_{/\theta}$. Entre tanto, mais de uma família separadora de filtros primos do reticulado quociente $L/_{\theta}$ pode determinar a congruência θ .

Um exemplo para esta situação é o seguinte: $L = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Os filtros primos de L são da forma $[x,1]$ $\forall\, x \in (0,1]$ e $(x,1]$, $\forall\, x \in [0,1]$, e qualquer das duas famílias é separadora e determinam a mesma congruência em L .

Uma vantagem da representação topológica de Priestley é que nos permite fixar uma dessas famílias e assim, caracterizar a congruência através de uma única família de filtros primos de L . Vejamos algumas proposições que confirmam esta afirmação.

1.4. PROPOSIÇÃO: *Sejam* L *e* L' *objetos de* $\mathcal{D}_{0,1}$, $h : L \to L'$ *morfismo sobrejetor de* $\mathcal{D}_{0,1}$, π' *uma família de filtros primos de* L' *e* $\pi = \{h^{-1}(Q) : Q \in \pi'\}$. *Se* $P \notin \pi$, $\exists\, a,b \in L$ *com* $h(a) = h(b)$, $a \in P$ *e* $b \notin P$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $P \notin \pi$ e consideremos as seguintes situações:

a) $h(P)$ não é filtro próprio de L' .

$\exists\, x \in P$ tal que $h(x) = 0' = h(0)$. Basta então tomar $a = x$ e $b = 0$.

b) $h(P)$ é filtro próprio de L' .

i) se $h(P)$ é primo, então, $P \subsetneq h^{-1}(h(P))$. Assim, $\exists\, x \in h^{-1}(h(P))$ e $x \notin P$, de onde segue-se $h(x) \in h(P)$ e $x \notin P$. Logo existe $y \in P$ com $h(x) = h(y)$. Daí, basta considerar $a = y$ e $b = x$.

ii) se $h(P)$ não é filtro primo, $\exists\, x', y' \in L'$ com $x' \vee y' \in h(P)$ e $x' \notin h(P)$, $y' \notin h(P)$. Como h é homomorfismo sobrejetor $x' = h(x)$ e $y' = h(y)$ para algum $x, y \in L$ e, como $x', y' \notin h(P)$, $x \notin P$, $y \notin P$, $h(x \vee y) = x' \vee y' \in h(P)$, logo $\exists\, z \in P$ com $h(x \vee y) = h(z)$. Como P é primo $x \vee y \notin P$. Logo basta tomar $a = z$ e $b = x \vee y$.

1.5. PROPOSIÇÃO: *Sejam* L *e* L' *objetos de* $\mathcal{D}_{0,1}$, $h : L \to L'$ *um homomorfismo sobrejetor,* π' *o conjunto de todos os filtros primos de* L' *e* $\pi = \{h^{-1}(Q) : Q \in \pi'\}$. *Se* $\pi_1' \subset \pi'$ *é uma família separadora de filtros primos de* L' *e* $\pi_1 = \{h^{-1}(Q) : Q \in \pi_1'\}$, *então no espaço* $Pr(L)$, π *é fechado e o fecho de* π_1 *é* π.

DEMONSTRAÇÃO: Vejamos, primeiramente, que π é fechado.

De acordo com 1.2., π é uma família de filtros primos de L. Ainda, por 1.4., se $P \notin \pi$, $\exists\, a, b \in L$ tais que $h(a) = h(b)$, $a \in P$ e $b \notin P$. Consequentemente se $P \notin \pi$, $P \in \sigma(a) \cap (\sigma(b))^c$ e para esses elementos a, b de L temos: $\sigma(a) \cap (\sigma(b))^c \cap \pi = \emptyset$, de onde segue-se $P \in \sigma(a) \cap (\sigma(b))^c \subseteq \pi^c$. Portanto π é fechado.

Agora, como $\pi_1 \subset \pi$ temos $\overline{\pi_1} \subseteq \overline{\pi} = \pi$.

Por outro lado se $P \notin \pi_1$, $\exists\, a, b \in L$ com $h(a) = h(b)$, $a \in P$ e $b \notin P$. Suponhamos $P \in \pi$. Então $P = h^{-1}(Q)$ para algum $Q \in \pi' \setminus \pi_1'$. Como $h(a) = h(b)$, $h(a \wedge b) = h(a)$. Mas $a \in P \Rightarrow h(a) \in h(P) \Rightarrow h(a) \in Q$. Portanto $h(a \wedge b) \in Q$, de onde segue-se $a \wedge b \in h^{-1}(Q) = P$. Mas então como $a \wedge b \leq b$, $b \in P$ (contradição!)

Assim, $\pi_1^c \subset \pi^c$, ou seja, $\pi \subset \pi_1 \subset \bar{\pi}_1$.

Logo, $\bar{\pi}_1 = \pi$.

Com estas proposições concluímos que há uma correspondência 1-1 entre o conjunto das congruências definidas sobre L e a família dos subconjuntos fechados de $Pr(L)$. Observemos entretanto que $\theta \subset \theta_1$ se, e somente se, $\pi_{\theta_1} \subset \pi_\theta$. Mais precisamente:

1.6. **TEOREMA DE PRIESTLEY** [10]: *Sejam* L *um objeto de* $D_{0,1}$, $C(L)$ *o conjunto das congruências de* L *e* $O(Pr(L))$ *o reticulado dos subconjuntos fechados de* $Pr(L)$. *Então* $C(L)$ *e* $O(Pr(L))$ *são anti-isomorfos e o anti-isomorfismo é dado por*

$$\begin{aligned} \theta : O(Pr(L)) &\longrightarrow C(L) \\ Y &\longrightarrow \theta(Y) \end{aligned}$$

que é definido por $(a,b) \in \theta(Y) \Leftrightarrow \sigma(a) \cap Y = \sigma(b) \cap Y$.

Uma classe importante de congruências em reticulados distributivos é a das congruências determinadas por um filtro próprio F de L , θ_F , definida por $(a,b) \in \theta_F$ se e somente se existe $f \in F$ tal que $a \wedge f = b \wedge f$. (Estamos nos referindo a filtro próprio pois se $F = L$ então $\theta_F = L \times L$) .

A verificação de que θ_F é uma relação de congruência é simples e a representação de Priestley permite uma caracterização simples, também para este caso.

Observemos, então, que:

1.7. **PROPOSIÇÃO**: *Sejam* L *um objeto de* $D_{0,1}$, F *um fil-*

tro (próprio) de L *e* $\sigma(F)$ *o conjunto de todos os filtros primos* P *de* L *tais que* $F \subseteq P$. *Então as congruências* θ_F *e* $\theta_{\sigma(F)}$ *coincidem.*

Seja $(a,b) \in \theta_F$. Então $\exists f \in F$ com $a \wedge f = b \wedge f$. Como $F \subseteq P$, $a \in P \Leftrightarrow a \wedge f \in P \Leftrightarrow b \wedge f \in P \Leftrightarrow b \in P$. Logo $(a,b) \in \theta_{\sigma(F)}$ e, portanto $\theta_F \subseteq \theta_{\sigma(F)}$.

Suponhamos, agora, que $(a,b) \notin \theta_F$. Então, para todo $f \in F$, $a \wedge f \neq b \wedge f$. Observemos que se $\exists f_o \in F$ tal que $b \wedge f_o \leq a \wedge f_o$, então $a \wedge f \not\leq b \wedge f$, $\forall f \in F$. De fato, se existisse $f_1 \in F$ tal que $a \wedge f_1 \leq b \wedge f_1$ teríamos

$$(a \wedge f_1) \wedge f_o \leq (b \wedge f_1) \wedge f_o = (b \wedge f_o) \wedge f_1 \leq$$

$$\leq (a \wedge f_o) \wedge f_1 = (a \wedge f_1) \wedge f_o .$$

Como $f_o \wedge f_1 \in F$, teríamos $(a,b) \in \theta_F$. Logo podemos supor que $a \wedge f \not\leq b \wedge f$, $\forall f \in F$. Em particular, $\forall f \in F$ temos $a \wedge f \not\leq b$, ou seja $b \notin F_1$ onde F_1 representa o filtro gerado por F e a. Logo, pelo teorema de Birkhoff-Stone [0.16], $\exists P$ tal que $F_1 \subseteq P$ e $b \notin P$. Portanto $\exists P \in \sigma(F)$ tal que $a \in P$ e $b \notin P$, ou seja $(a,b) \notin \theta_\pi$.

$$\therefore \quad \theta_{\sigma(F)} = \theta_F .$$

1.8. PROPOSIÇÃO: *Seja* L *um objeto de* $D_{0,1}$ *e* $X = Pr(L)$. *As seguintes afirmações são equivalentes, para todo* $Y \subseteq X$:

1) Y *é fechado e crescente.*

2) *Se* $Q \notin Y$, *existe* $U \in D(X)$ *tal que* $Q \in U^c \subseteq Y^c$.

3) *Se* $Q \notin Y$, *existe* $a \in L$ *tal que* $a \notin Q$ *e* $a \in P$, $\forall P \in Y$.

4) *Existe um filtro* F *de* L *tal que* $\sigma(F) = Y$.

DEMONSTRAÇÃO: $(1 \Rightarrow 2)$ Seja Y fechado e crescente em X tal que $Q \notin Y$. Daí, $P \not\leq Q$, $\forall P \in Y$ e então, pela total desconexão na ordem de X, para cada $P \in Y$, podemos obter $U_p \in \mathcal{D}(X)$ tal que $P \in U_p$ e $Q \notin U_p$.

Como Y é compacto, temos $\exists P_1, \ldots, P_n$ tais que $Y \subseteq U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_n}$ e $Q \in U^c_{p_1} \cap \ldots \cap U^c_{p_n}$. Logo se $U = U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_n}$ temos $Y \subseteq U$ e $Q \in U^c \subseteq Y^c$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Basta tomarmos a tal que $\sigma(a) = U$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Seja $F = \bigcap_{P \in Y} P$ e vejamos que $\sigma(F) = Y$.

De fato, se $Q \notin Y$, $\exists a \in L$ tal que $a \notin Q$ e $a \in \bigcap_{P \in Y} P = F$. Logo, $Q \in Y \Rightarrow F \not\subseteq Q$ e como, obviamente, $F \subseteq P$, $\forall P \in Y$, temos que $\sigma(F) = Y$.

$(4 \Rightarrow 1)$ Vejamos que $\sigma(F) = \bigcap_{a \in F} \sigma(a)$, o que implicará que $Y = \sigma(F)$ é fechado e crescente. Mas, $(P \in \sigma(F)) \Leftrightarrow (F \subseteq P) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [P \in \sigma(a), \forall a \in F] \Leftrightarrow [P \in \bigcap_{a \in F} \sigma(a)]$.

Assim, estabelecemos uma correspondência 1-1 entre a família dos subconjuntos fechados e crescentes do espaço de Priestley de um objeto L de $\mathcal{D}_{0,1}$ e o conjunto das congruências determinadas por filtros próprios de L, ou seja, *a relação* $\theta(Y)$ *definida por* $(a,b) \in \theta(Y)$ *se, e somente se* $\sigma(a) \cap Y = \sigma(b) \cap Y$ *define* *um isomorfismo entre a família dos sub-conjuntos fechados e crescentes de* $Pr(L)$ *e a família dos filtros próprios de* L .

2. CONGRUÊNCIAS DEFINIDAS EM ALGUMAS SUBCATEGORIAS DE $\mathcal{D}_{0,1}$.

Faremos, agora, um estudo das congruências definidas em álgebras de Boole e álgebras de Heyting.

2.1. Seja B uma álgebra de Boole, considerada como uma álgebra de tipo (2,2,1,0,0) (vide I 2.2), e θ uma relação de congruência definida em B . Assim, de acordo com a definição de congruências para álgebras, θ é uma relação de congruência de reticulados, tal que se $a \equiv b \pmod{\theta}$ então, $\bar{a} \equiv \bar{b} \pmod{\theta}$.

Tomemos a congruência θ considerada como congruência de reticulados.

Seja π a família de filtros primos que corresponde a θ , ou seja tal que $\theta = \theta_{\pi}$.

Então, $a \equiv b \pmod{\theta}$ se, e somente se, $\forall\, P \in \pi$, $a \in P \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b \in P$. Mas se P é filtro próprio de B e $a \in P$ então $\bar{a} \notin P$, caso contrário $0 \in P$. Assim, se $a \equiv b \pmod{\theta}$, $\bar{a} \equiv \bar{b} \pmod{\theta}$.

Portanto, temos que há uma correspondência 1-1 entre os fechados do espaço de Priestley de uma álgebra de Boole e as congruências definidas sobre a mesma.

Ainda, como todo conjunto fechado do espaço de Priesltey é crescente, temos a conexão direta com os filtros.

2.2. Consideremos uma álgebra de Heyting A . Lembremos que uma congruência definida em A é uma congruência de reticulados que satisfaz, ainda, a seguinte condição: se $a \equiv b \pmod{\theta}$ e $a' \equiv b' \pmod{\theta}$ então $a \to b \equiv a' \to b' \pmod{\theta}$. (Observemos que da mesma forma que para álgebras de Boole as álgebras de Heyting estão sendo consideradas como álgebras de tipo de similaridade $(2,2,2,0,0)$, portanto diferente de reticulados distributivos, (vide I.2.3)).

Vejamos que toda congruência θ definida em uma álgebra de Heyting A é da forma θ_F para algum filtro próprio de A.

De fato, se θ é uma relação de congruência qualquer em A e $F = \{x \in L : (x,1) \in \theta\}$, então F é um filtro, pois se $a,b \in F$ temos $(a,1) \in \theta$ e $(b,1) \in \theta$ de onde segue-se $(a \wedge b, 1) \in \theta$. Além disso, se $a \in F$ e $b \geq a$ temos: $(a,1) \in \theta$ e $a \to b = 1$. Então $(a, a \to b) \in \theta$ e $(b,b) \in \theta$, de onde segue-se que $(a \vee b, b \vee (a \to b)) \in \theta$, ou equivalentemente $(b,1) \in \theta$, ou seja, $b \in F$.

Mostremos, agora, que $\theta = \theta_F$.

De fato, se $(a,b) \in \theta$ temos $(a \to b, 1) = (a \to b, b \to b) \in \theta$ e $(b \to a, 1) = (b \to a, a \to a) \in \theta$. Logo $a \to b$ e $b \to a \in F$, ou seja $(a \to b) \wedge (b \to a) \in F$. Mas $a \wedge (a \to b) \wedge (b \to a)) = a \wedge b = b \wedge ((a \to b) \wedge \wedge (b \to a))$. Daí, $(a,b) \in \theta_F$.

Por outro lado, se $(a,b) \in \theta_F$ então $a \wedge f = b \wedge f$ para algum $f \in F$. Daí, $(f,1) \in \theta$ de onde segue-se que $(a \wedge f, a) \in \theta$ e $(b \wedge f, b) \in \theta$, ou seja, $(a,b) \in \theta$.

Mas, pelo que vimos em 1.3., há uma correspondência 1-1 entre a família dos subconjuntos fechados e crescentes de $Pr(A)$

e o conjunto das congruências de A definidas pelos filtros próprios de A. Daí, "*se* A *é uma álgebra de Heyting,* $C(A)$ *é isomorfo à família dos subconjuntos fechados e crescentes de* $Pr(A)$ ". Mais precisamente:

2.2.1. TEOREMA: *Sejam* A *uma álgebra de Heyting,* $F(Pr(A))$ *a família dos subconjuntos fechados e crescentes de* $Pr(A)$ *e* $C(A)$ *a família das congruências definidas em* A. *Então,* $F(Pr(A))$ *e* $C(A)$ *são anti-isomorfos e o anti-isomorfismo é definido por* $\theta : F(Pr(A)) \to C(A)$ *tal que* $(a,b) \in \theta(Y)$ *se, e somente se* $\sigma(a) \cap Y = \sigma(b) \cap Y$.

3. CONGRUÊNCIAS DEFINIDAS EM ÁLGEBRAS DE DE MORGAN

No primeiro parágrafo desta capítulo vimos que há uma correspondência 1-1 entre o reticulado dos subconjuntos fechados do espaço de Priestley de um rericulado distributivo L com primeiro e último elementos e o dual na ordem do reticulado das congruências de L. Estenderemos, neste parágrafo, esta correspondência ao caso das álgebras de De Morgan. Os resultados foram obtidos por Cornish e Fowler, mas, outra vez, os métodos usados na demonstração são diferentes.

3.1. Se $(X,g) \in G$, dizemos que $Y \subseteq X$ é um conjunto involutivo se $g(Y) = Y$.

3.2. Seja A uma álgebra de De Morgan, $(X,g) = Pr'(A)$ e

$Y \subseteq X$ um subconjunto fechado e involutivo.

Então, se θ_Y é a relação definida, como em 1.1, por $a \equiv b \pmod{\theta_Y}$ se, e somente se $a \in P \Leftrightarrow b \in P$ para todo $P \in Y$, então θ_Y é uma relação de congruência em A.

De fato,

Por 1.1. temos que θ_Y é uma relação de congruência de A considerado como objeto de $\mathcal{D}_{0,1}$. Resta-nos mostrar que se $a \equiv b \pmod{\theta_Y}$ então $\nu a \equiv \nu b \pmod{\theta_Y}$.

Como Y é involutivo temos que $Y = g(Y)$, ou seja $P \in Y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(P) \in Y$.

Seja $a \equiv b \pmod{\theta_Y}$ então, por definição, $a \in P \Leftrightarrow b \in P$, $\forall\, P \in Y$. Agora,

$$(\nu a \in P) \Leftrightarrow [a \notin g(P)] \overset{g(P) \in Y}{\Longleftrightarrow} [b \notin g(P)] \Leftrightarrow [\nu b \in P] .$$

Portanto se $a \equiv b \pmod{\theta_Y}$ então $\nu a \equiv \nu b \pmod{\theta_Y}$.

Assim, dado um subconjunto fechado e involutivo de $X(A)$ há em correspondência uma congruência θ_Y definida em A.

3.3. Mostremos, agora, que se A é uma álgebra de De Morgan, toda congruência θ em A é da forma θ_Y para algum Y subconjunto fechado e involutivo de $\mathcal{Pr}(A)$.

De fato,

Seja θ uma congruência definida em A (álgebra de De Morgan) e $h : A \to A_{/\theta} = A'$ o homomorfismo canônico ($\therefore$ sobrejetor). Então, se π' é a família de todos os filtros primos de A' e

$\pi = \{h^{-1}(Q) : Q \in \pi'\}$, tem-se que $\theta = \theta_\pi$ como congruência de reticulados distributivos.

Agora, se $a \equiv b \pmod{\theta}$ então $\sim a \equiv \sim b \pmod{\theta}$ ou seja $h(\sim a) = h(\sim b)$. Assim $\sim a \in h^{-1}(Q) \Leftrightarrow \sim b \in h^{-1}(Q)$ para todo $Q \in \pi'$, ou ainda $\sim a \in P \Leftrightarrow \sim b \in P$ para todo P de π. $\therefore\ \sim a \equiv \sim b \pmod{\theta_\pi}$.

De 1.5. segue-se que π é um subconjunto fechado de $Pr(A)$. Resta-nos mostrar, então, que $g(\pi) = \pi$, ou seja que π é involutivo.

Bem, $P \in g(\pi) \Leftrightarrow P = g(Q)$ com $Q \in \pi \Leftrightarrow P = g(Q)$ e $Q = h^{-1}(Q_1)$ com $Q_1 \in \pi' \Leftrightarrow P = g(h^{-1}(Q_1))$ com $Q_1 \in \pi' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(P) = h^{-1}(Q_1)$ para algum $Q_1 \in \pi'$, pois g é involução $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(P) \in \pi$.

$$\therefore\ g(\pi) = \pi .$$

Logo, cada congruência θ é da forma θ_π onde π é um subconjunto fechado e involutivo de $Pr(A)$.

Temos, como consequência de 3.2. e 3.3., que há uma correspondência 1-1 entre subconjuntos fechados involutivos do espaço dual de uma álgebra de De Morgan e as congruências definidas sobre a mesma, mais precisamente:

3.3. TEOREMA [ ]: *Seja uma álgebra de De Morgan e* $(X(A),g) = Pr'(A)$. *Então a correspondência* $Y \to \theta(Y)$ *estabelece um isomorfismo na ordem do reticulado dos subconjuntos fechados involutivos de* $Pr'(A)$ *sobre o dual na ordem do reticulado* $C(A)$ *das congruências definidas em* A.

4. ALGUMAS APLICAÇÕES DA TEORIA DE PRIESTLEY

Para ilustrar o interesse da teoria da dualidade para congruências vista nos parágrafos anteriores, vamos utilizá-la para provar alguns resultados algébricos conhecidos. Para o estudo de certas estruturas algébricas mais complicadas estes métodos são essenciais. Veja por exemplo [2] , [4].

4.1. TEOREMA (Vide, por exemplo, [6], pag. 90): *Sejam* K *um sub-reticulado de um reticulado distributivo* L *com primeiro e último elementos e* θ *uma relação de congruência em* K . *Então, existe uma relação de congruência* ϕ *em* L*, tal que* $\phi \cap K^2 = \theta$.

DEMONSTRAÇÃO: Dados $\theta \subset \mathbb{K}^2$ relação de congruência e $\mathbb{K} \subset L$ sub-reticulado, sabe-se que:

i) $i : K \to L$ inclusão de K em L é 1-1. Portanto $\phi_i : Pr(L) \to Pr(K)$ é sobre, conforme I.1.8.

ii) $\pi_\theta : K \longrightarrow K_{/\theta}$ a projeção canônica é sobre e, então $\phi_{\pi_\theta} : Pr(L_{/\theta}) \longrightarrow Pr(K)$ é isomorfismo na ordem e homeomorfismo sobre a imagem (conforme I.1.8.).

Consideremos $P \in Pr(K_{/\theta})$. Então, $\phi_{\pi_\theta}(P) \in Pr(K)$. $\therefore$ $\phi_{\pi_\theta}(P)$ é um filtro primo de K . Como ϕ_i é sobre, $\exists\, P_1 \in Pr(L)$ tal que $\phi_i(P_1) = \phi_{\pi_\theta}(P)$.

Seja $A = \{Q \in Pr(L) : \phi_i(Q) = \phi_{\pi_\theta}(P)$ para algum

$$P \in Pr(K_{/\theta})\} = \phi_i^{-1}(\phi_{\pi_\theta}(Pr(K_{/\theta}))) .$$

Então, A é fechado.

Definindo-se α por: dados $x, y \in L$, $x \equiv y \pmod{\alpha}$ se, e somente se, $\forall\, Q \in A$, $x \in Q \Leftrightarrow y \in Q$. α assim definido é uma relação de congruência em L, conforme 1.

Resta-nos mostrar que $\alpha = K^2 \cap \theta$.

Temos que

$$(x,y) \in \theta \Leftrightarrow \sigma(x) \cap \phi_{\pi_\theta}(Pr(K/_\theta)) = \sigma(y) \cap \phi_{\pi_\theta}(Pr(K/_\theta)),$$

onde $\sigma(x) = \{P \in Pr(K) : x \in P\}$. Então, para qualquer $P \in Pr(K)$, temos:

$$P \in \sigma(x) \cap \phi_{\pi_\theta}(Pr(K/_\theta)) \Leftrightarrow P \in \sigma(y) \cap \phi_{\pi_\theta}(Pr(K/_\theta)),$$

ou equivalentemente, $x \in P$ sse $y \in P$, $\forall\, P \in Pr(K)$. Como ϕ_i é sobre, $P = \phi_i(Q)$ para algum $Q \in Pr(L)$. Assim, temos: $x \in \phi_i(Q) \Leftrightarrow y \in \phi_i(Q)$. Mas, $\phi_i(Q) = Q \cap K$, portanto, $x \in Q \cap K \Leftrightarrow y \in Q \cap K$.

$$\therefore\ (x,y) \in K^2 \cap \alpha\ .$$

Por outro lado, se $x \equiv y \pmod{\alpha}$ então, para qualquer $Q \in A$ tem-se $\phi_i(Q) \in \sigma(x) \Leftrightarrow \phi_i(Q) \in \sigma(y) \Rightarrow (x/_\equiv, y/_\equiv \in P)$ ou $(x/_\equiv, y/_\equiv \in (K/_\theta) \setminus P$.

4.2. Dizemos que uma álgebra A é *subdiretamente irredutível* se, e somente se, tem uma relação de congruência mínima não trivial, isto é, diferente de $\omega = \{(x,x) : x \in A\}$.

Nos termos da teoria de Priestley esta definição equivale a:

i) se L é um reticulado distributivo com primeiro e último elementos, então L *é subdiretamente irredutível se, e somente se, existe um subconjunto fechado e próprio, máximo de* $Pr(L)$.

ii) se L é uma *álgebra de Heyting*, então L *é subdiretamente irredutível se, e somente se, existe um conjunto de* $Pr(L)$*; fechado, crescente, máximo e próprio.*

iii) se L é uma *álgebra de De Morgan* então L *é subdiretamente irredutível se, e somente se, existe um subconjunto próprio, fechado e involutivo, máximo de* $Pr(L)$.

Vejamos, então, a caracterização dos reticulados distributivos, das álgebras de Heyting e de De Morgan subdiretamente irredutíveis.

4.3. Um reticulado distributivo é subdiretamente irredutível se, e somente se $L = \{0,1\}$

De fato,

($\Leftarrow$) Seja $L = \{0,1\}$ então $Pr(L) = \{[1)\}$. Daí o conjunto vazio é o subconjunto fechado e próprio, máximo de $Pr(L)$, de onde segue-se que existe congruência mínima não trivial. Portanto, L é subdiretamente irredutível.

($\Rightarrow$) Seja L subdiretamente irredutível e $X = Pr(L)$. Então existe $Y \subset X$ subconjunto fechado, próprio tal que para todo Z, subconjunto fechado de $Pr(L)$ se $Z \neq X$, então $Z \subset Y$.

Como Y é subconjunto próprio, $X \setminus Y \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $X \setminus Y$ é unitário. De fato, se $X \setminus Y \supseteq \{x,y\}$ com $x \neq y$ en tão $\{x\} \cup Y \neq X$ e como X é um espaço de Hausdorff $\{x\}$ é fechado e $\{x\} \cup Y \not\subset Y$! Logo $X \setminus Y = \{x\}$.

Além disso $\{x\}$ é fechado e $\{x\} \not\subset Y$. Portanto $X = \{x\}$ e $Y = \emptyset$.

Daí, $X = Pr(L)$ tem um único elemento e então $L = \{0,1\}$.

4.4. *Uma álgebra de Heyting* L *é subdiretamente irredutível se, e somente se,* $\exists\, u \in L$, $u \neq 1$, *tal que para todo* $x \in L$, $x \neq 1$, *tem-se* $x \leq u$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\exists\, u \in L$, $u \neq 1$ tal que para todo $x \in L$, $x \neq 1$, tem-se $x \leq u$. Então $\sigma(u) = Y$ é um subconjunto aberto, fechado e crescente. Como $u \neq 1$, $\sigma(u) \neq X$ e como também, $\sigma : L \to P(Pr(L))$ é um isomorfismo sobrejetor temos que todo aberto, fechado, crescente e próprio está contido em Y. Notemos, também, que o conjunto unitário $\{1\}$ é um filtro primo, portanto $z = \{1\}$ é o ponto mínimo de X e $z \not\subset Y$.

Se existir $x \neq z$, $x \not\subset Y$, existirá U aberto, fechado crescente tal que $x \in U$ e $z \notin U$. Então $Y \cup U$ é aberto, fechado crescente, $Y \cup U \neq X$ e $Y \cup U \not\subset Y$. Portanto, $X = Y \cup \{z\}$.

Seja Z um conjunto fechado crescente. Se $Z \not\subset Y$ então $z \in Z$ e (como z é mínimo) $Z = X$.

Logo Y é máximo entre os fechados e crescentes próprios de X, e L é subdiretamente irredutível.

($\Rightarrow$) Por outro lado, seja L uma álgebra de Heyting, subdiretamente irredutível e $X = Pr(L)$. Então, existe $Y \subset X$, sub conjunto fechado e crescente tal que

i) $Y \neq X$.

ii) $\forall\, Z$ subconjunto fechado e crescente de $\mathcal{Pr}(L)$, $Z \neq X$, tem-se $Z \subset Y$.

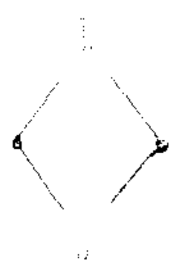
Suponhamos que $x, y \in X \setminus Y$ com $x \neq y$. Então $x \not\leq y$ ou $y \not\leq x$. Podemos supor que $x \not\leq y$. Daí, $\exists\, V \in \mathcal{D}(X)$ com $x \in V$ e $y \notin V$. Agora, $Y \cup V$ é um fechado crescente, $Y \cup V \neq X$ pois $y \notin V$, $y \notin Y$ e $Y \cup V \not\subset Y$!!

$\therefore$ $X \setminus Y = \{x\}$ e então Y é um subconjunto aberto, fechado e crescente, máximo de X.

Seja, então, $u \in L$ tal que $\sigma(u) = Y$. Como $X \setminus Y = \{x\}$, $u \neq 1$. Além disso, como para todo $a \in L$, $a \neq 1$ $\sigma(a)$ é um subconjunto aberto, fechado e crescente, $\sigma(a)$ é, em particular, fechado e crescente, logo $\sigma(a) \subset \sigma(u)$, de onde segue-se $a \leq u$.

4.5. Vejamos, agora, o teorema de J.A. Kalman [1] que caracteriza as álgebras de De Morgan subdiretamente irredutíveis, do ponto de vista da teoria de Priestley:

"Os objetos subdiretamente irredutíveis da categoria das álgebras de De Morgan são: M_o, M_1 e M_2 onde: M_o e M_1 são as cadeias com dois e três elementos, respectivamente, e M_2 é

$\nu a = a$  $b = \nu b$ ".

($\Leftarrow$) i) Se $L = M_2$ então $X = \{p_a, p_b\}$ onde $p_x = [x)$ para $x = a,b$. Neste caso, a involução g é definida por $g(p_a) = p_b$. Assim, o único subconjunto próprio, fechado e involutivo de X é $Y = \emptyset$. E, então, L é subdiretamente irredutível.

ii) Se $L = M_1$ então $X = \{p_a, p_1\}$ e a involução g é dada por $g(p_a) = p_1$. Assim, também, o único subconjunto próprio e involutivo de X é $Y = \emptyset$. Portanto L é subdiretamente irredutível.

iii) Se $L = M_o$, $X = \{p_1\}$ e g é a identidade. Aqui, também, o único subconjunto próprio e involutivo é $Y = \emptyset$ e portanto, L é subdiretamtne irredutível.

($\Rightarrow$) Suponhamos L uma álgebra de De Morgan, subdiretamente irredutível e $Pr'(L) = (X,g)$. Então existe Y subconjunto fechado tal que

i) $g(Y) = Y$.

ii) $Y \neq X$.

iii) se $Z \subset X$ é fechado com $g(Z) = Z$ e $Z \neq X$, então $Z \subset Y$.

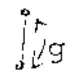
Agora, $X \setminus Y \neq \emptyset$ e $g(X \setminus Y) = X \setminus Y$, isto é, se $x \in X \setminus Y$, então $g(x) \in X \setminus Y$. (Se $\exists\, x \in X \setminus Y$ com $x \notin g(X \setminus Y) \Rightarrow g(x) \notin X \setminus Y \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x) \in Y \Rightarrow x \in Y$!)

Suponhamos que existam $y \neq x$, $y \neq g(x)$ com $y \in X \setminus Y$. Então $g(y) \in X \setminus Y$ e $Y \cup \{y, g(y)\}$ é um fechado involutivo com $Y \cup \{y, g(y)\} \neq X$ e $y \notin Y$. (Contradição!) Logo $X = Y \cup \{x, g(x)\}$. Como $\{x, g(x)\} \not\subseteq Y$ e $\{x, g(x)\}$ é fechado involutivo,

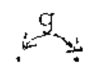
$X = \{x, g(x)\}$. Portanto $Y = \emptyset$.

Agora, como $X = \{x, g(x)\}$, pode ocorrer:

1) $x = g(x)$. Daí $X = \{x\}$ e $L = \{0,1\}$.

2) $x < g(x)$ ou $g(x) < x$. Neste caso $X =$ 

e $L = M_1$.

3) x e $g(x)$ são incomparáveis. Então $X =$ 

e $L = M_2$.

CAPÍTULO III

A REPRESENTAÇÃO DE PRIESTLEY E A DE STONE

Mostramos, na primeira parte capítulo I, que as categorias *Todc* e $D_{0,1}$ são naturalmente equivalentes.

Lembremos, também, que o *espaço de Stone* de um objeto de $D_{0,1}$ é um espaço (X,τ) satisfazendo as seguintes condições:

(S1) *X é um espaço* T_0 *e compacto.*

(S2) *A família* $C(X)$ *dos subconjuntos compactos e abertos de* X *é um anel de subconjuntos de* X *que é uma base para os conjuntos abertos.*

(S3) *Se* F *é fechado em* X *e* C_1 *é qualquer subfamília de* $C(X)$ *tal que* $\cap F_1 \cap F \neq \emptyset$ *para toda subfamília finita* F_1 *de* C_1 então $\cap C_1 \cap F \neq \emptyset$.

Ainda, diremos que uma função f é fortemente contínua se f for contínua e a imagem inversa por f de subconjunto aberto e compacto for um subconjunto aberto e compacto.

Seja, então, *St* a categoria cujos objetos são os espaços de Stone e os morfismos são funções fortemente contínuas.

Os trabalhos clássicos de Stone [12] (Vide também Balbes e Dwinger, cap. IV) estabelecem a equivalência natural entre as categorias $D_{0,1}$ e St^*. Portanto as categorias *Todc* e *St* são naturalmente equivalentes.

Mostraremos, no entanto, que as categorias *St* e *Todc* são, de fato, isomorfas: têm os mesmos objetos e os mesmos morfismos.

Como consequência, as representações de Stone e de Priestley são equivalentes, podendo-se, então, derivar uma da outra de forma canônica. (No final deste capítulo derivaremos a representação de Stone da de Priestley.)

Começaremos fixando algumas definições e notações:

1. Seja (X,τ) um espaço topológico. $\mathcal{C}(X)$ denotará a família dos subconjuntos compactos e abertos de X e $\mathcal{C}(X)'$ a família dos complementares de elementos de $\mathcal{C}(X)$.

2. Se $\mathcal{A}$ é uma família de sunconjuntos de X, então $\tau(\mathcal{A})$ será usado para denotar a topologia definida em X que tem $\mathcal{A}$ como uma sub-base para os conjuntos abertos.

3. Se (X,τ) é um espaço T_0, a *ordem topológica* em X é a ordem parcial $\leq_\tau$ definida por:

$$(\forall\, x,y \in X) \qquad x \leq_\tau y \iff x \in \overline{\{y\}}$$

Observemos que, com esta definição, todo aberto é crescente.

Com esta definição temos:

4. PROPOSIÇÃO: *Sejam* (X,τ_0) *e* f, *um objeto e um morfismo de* St, *respectivamente. Então,* $\Omega : St \longrightarrow Todc$ *definido por* $\Omega(X,\tau_0) = (X,\tau(\mathcal{C}(X) \cup \mathcal{C}(X)'), \leq_{\tau_0})$ *e* $\Omega f = f$ *é um funtor. Além disso, o conjunto dos subconjuntos abertos, fechados e cres-*

centes de $\Omega(X,\tau_o)$ *é precisamente o conjunto dos subconjuntos abertos e compactos de* (X,τ_o).

De fato,

Observemos que os elementos de $\mathcal{C}(X) \cup \mathcal{C}(X)'$ são, simultaneamente, abertos e fechados em $\Omega(X,\tau_o)$. Temos, também, que $\mathcal{C}(X) \cup \mathcal{C}(X)'$ forma uma sub-base para os fechados de $\Omega(X,\tau_o)$.

Mostremos, agora, que $\Omega(X,\tau_o)$ é um objeto de *Tode*.

i) Vejamos a compacidade de X em relação a $\tau_1 = \tau(\mathcal{C}(X) \cup \mathcal{C}(X)')$. Para tanto, sejam $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{C}(X)'$ tais que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_o \cup \mathcal{F}_1$ tem a p.i.f.

$\therefore$ $\mathcal{F}_o$ e $\mathcal{F}_1$, em particular, têm a p.i.f.

Os elementos de $\mathcal{F}_1$ são fechados em (X,τ_o) e (X,τ_o) é compacto. Logo, $\bigcap_{V \in \mathcal{F}_1} V = F \neq \emptyset$, F é fechado.

Ainda, para todo $U \in \mathcal{F}_o$ e $V \in \mathcal{F}_1$, $U \cap V$ é fechado em U e, como U é compacto, $U \cap F = \bigcap_{V \in \mathcal{F}_1} (U \cap V) \neq \emptyset$. Portanto, como (X,τ_o) é um espaço de Stone, aplicando a condição (S3) da definição a F e $\mathcal{F}_o$ temos:

$$\bigcap \mathcal{F}_o \cap F \neq \emptyset, \text{ ou seja, } \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \neq \emptyset .$$

Logo, como toda família de fechados sub-básicos com a p.i.f. tem intersecção não vazia, resulta que X é compacto com a topologia τ_1. (Teorema de Alexander, vide, por exemplo, [7], pag. 139).

ii) $\Omega(X,\tau_o)$ é totalmente desconexo na ordem.

Sejam $x,y \in X$ com $x \leq_{\tau_o} y$. Então, $x \notin \overline{\{y\}}^{\tau_o}$. Assim, por (S2) existe $V \in \mathcal{C}(X)$ tal que $x \in V$ e $V \cap \{y\} = \emptyset$. Logo V é aberto e fechado na topologia $\Omega(X,\tau)$ e, pelo observado em 3. é crescente.

iii) Seja, agora $f : (X,\tau_o) \to (Y,\tau_2)$ uma função fortemente contínua. Como τ_1 é a topologia que tem por base os subconjuntos abertos e compactos e seus complementares, f é contínua.

Ainda, sejam $a,b \in X$; $a \leq_{\tau_o} b$ e suponhamos $f(a) \not\leq_{\tau_2}$ $\not\leq_{\tau_2} f(b)$. Logo $f(a) \notin \overline{\{f(b)\}}^{\tau_2}$, ou seja, existe $V \in \mathcal{C}(Y)$ tal que $f(a) \in V$ e $f(b) \notin V$. Assim temos: $b \notin f^{-1}(V)$. Mas, $W = f^{-1}(V) \in \mathcal{C}(X)$ e $W \cap \{b\} = \emptyset$!

$\therefore$ $f(a) \leq_{\tau_2} f(b)$ se $a \leq_{\tau_o} b$.

iv) Os subconjuntos abertos, fechados e crescentes de $\Omega(X,\tau_o)$ são os abertos e compactos de (X,τ).

Seja $A \neq \emptyset$ um subconjunto aberto, fechado e crescente de $\Omega(X,\tau_o)$. Como $\Omega(X,\tau_o)$ é compacto, A e $X \setminus A$ são compactos.

Se $x,y \in X$ com $x \in A$ e $y \in X \setminus A$, temos $x \not\leq_{\tau_o} y$. Daí, existe $U_{x,y} \in \mathcal{C}(X)$ tal que $x \in U_{x,y}$ e $y \notin U_{x,y}$. Agora, $X \setminus A \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus A} (X \setminus U_{x,y})$. Logo, pela compacidade de $X \setminus A$, $\exists\, y_1,\ldots,y_n \in X \setminus A$ com $X \setminus A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_{x,y_i})$.

Resulta de (S2) que para cada $x \in A$, $V_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$ é um elemento de $\mathcal{C}(X)$.

Mas, $X \setminus A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_{x,y_i})$ é equivalente a $X \setminus A \subseteq X \setminus V_x$.

Ainda, $A \subset \bigcup_{x \in A} V_x$. Logo, pela compacidade de A , $\exists\, x_1, \ldots, x_m \in A$ tais que $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$.

Se $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$, então $V \in \mathcal{C}(X)$, pois $V_x \in \mathcal{C}(X)$, para todo $x \in A$, e $A \subset V$.

Mais ainda, como $X \setminus A \subseteq X \setminus V_x$, $(\forall\, x \in A)$, tem-se $V_x \subset A$, $(\forall\, x \in A)$. Daí , $\bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j} \subset A$, ou seja $V \subseteq A$.

$\therefore$ $A = V$, donde segue-se que $A \in \mathcal{C}(X)$.

Até aqui temos, então, que para todo (X, τ_o) objeto de *St* e f morfismo de *St*, $\Omega(X, \tau_o)$ e Ωf são objeto e morfismo de *Tode*, respectivamente.

Também, decorrem trivialmente da definição de Ω que $\Omega(id_X) = id_{\Omega(X)}$ e se f e g são morfismos tais que $g \circ f$ é um morfismo de *Tode*, então $\Omega(g \circ f) = \Omega g \circ \Omega f$.

Portanto, $\Omega : St \to Tode$ é um funtor.

Veremos, agora, a construção do isomorfismo inverso. Antes, porém, lembremos que se $(X, \tau, \leq)$ é um espaço topológico ordenado, $\mathcal{D}(X)$ indica a família de todos os subconjuntos de X que são abertos, fechados e crescentes.

5. PROPOSIÇÃO: *Se* $\psi : Tode \to St$ *é definido por*

$\psi(X,\tau_o,\leq) = (X,\tau(\mathcal{D}(X))$ *e* $\psi(f) = f$ *então* ψ *é um funtor. Além disso os subconjuntos abertos e compactos em* $\psi(X,\tau_o,\leq)$ *são os abertos, fechados e crescentes de* $(X,\tau_o,\leq)$ *e* $\leq$ *é a ordem topológica de* $\Omega(X,\tau_o,\leq)$.

DEMONSTRAÇÃO: Denotaremos $\tau(\mathcal{D}(X))$ por τ_1 .

i) $\psi(X,\tau_o,\leq)$ é T_o e compacto.

Sejam $x,y \in X$ com $x \neq y$. Logo $x \not\leq y$ ou $y \not\leq x$. Assim, como $(X,\tau_o,\leq)$ é totalmente desconexo na ordem, $\exists\ U \in \mathcal{D}(X)$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$ ou $y \in U$ e $x \notin U$. Portanto $\psi(X,\tau_o,\leq)$ é T_o .

Ainda, como τ_1 é uma topologia menos fina que τ_o e (X,τ_o) é compacto, (X,τ_1) é compacto.

ii) Vejamos que a família dos subconjuntos abertos e compactos de (X,τ_1) forma uma base para os abertos e que $\mathcal{C}(X,\tau_1) = \mathcal{D}(X,\tau_o)$.

Se $U \in \mathcal{D}(X,\tau_o)$, U é aberto, fechado e crescente em (X,τ_o) , logo compacto (em (X,τ_o)). Mas τ_1 é uma topologia menos fina que τ_o , logo U é aberto e compacto de τ_1 .

Por outro lado se U é aberto e compato em (X,τ_1) , $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ com $U_i \in \mathcal{D}(X)$ $i = 1,\ldots,n$, ou seja, $U \in \mathcal{D}(X)$.

Temos, assim, que $\mathcal{C}(\tau(\mathcal{D}(X))) = \mathcal{D}(X)$ e em particular $\mathcal{C}(\tau(\mathcal{D}(X)))$ é uma base para os abertos de (X,τ_1) .

iii) Vejamos que vale (S3) da definição de espaço de Stone, para $\psi(X,\tau_o,\leq)$.

Seja F um fechado de (X,τ_1) e $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{D}(X)$ tal que para todo $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{C}_1$ finito, $(\bigcap_{A \in \mathcal{F}_1} A) \cap F \neq \emptyset$. Como a topologia τ_o mais fina que τ_1, F é fechado em τ_o.

Ainda, como $\{F\} \cup \mathcal{C}_1$ é uma família de fechados no espaço compacto τ_o, com a p.i.f.,

$$\bigcap \mathcal{C}_1 \cap F \neq \emptyset .$$

iv) Se f é morfismo de *Todo*, f é morfismo de *St*. Sejam f um morfismo de *Todo*. $f : (X,\tau_o,\leq_o) \to (Y,\tau_2,\leq_2)$ e B subconjunto aberto e compacto de $\psi(Y,\tau_2,\leq_2)$. Então por (ii) B é aberto, fechado e crescente de $(Y,\tau_2,\leq_2)$. Como f é contínua e crescente $f^{-1}(B)$ é aberto, fechado e crescente de $(X,\tau_o,\leq_0)$. Outra vez por (ii) $f^{-1}(B)$ é um subconjunto aberto e compacto em $\psi(X,\tau_o,\leq_o)$.

v) Mostremos, agora, que $\leq$ é a ordem topológica de (X,τ_1).

Sejam $x,y \in X$, $x \not\leq_{\tau_1} y \Leftrightarrow x \notin \overline{\{y\}}^{\tau_1}$. Isto equivale a dizer que existe $U \in \mathcal{D}(X)$ tal que $x \in U$ e $U \cap \{y\} = \emptyset$, ou seja, $\exists\, U \in \mathcal{D}(X)$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Mas, isto é equivalente a $x \not\leq y$.

vi) Observa-se ainda, facilmente, que $\psi(id_X) = id_{\psi(X)}$ e se f e g são morfismos de *St* tais que $g \circ f$ também o é, então $\psi(g \circ f) = \psi g \circ \psi f$.

Decorre destas proposições:

6. TEOREMA: *O funtor* $\Omega : St \rightarrow Tode$ *é um isomorfismo cujo inverso é o funtor* $\psi : Tode \rightarrow St$.

Vejamos, agora, como a representação de Stone decorre naturalmente da de Priestley.

Lembremos que, de acordo com o visto no capítulo I, $Pr : \mathcal{D}_{0,1} \rightarrow Tode^*$ e $D : Tode^* \rightarrow \mathcal{D}_{0,1}$ estabelecem uma equivalência natural entre $Tode$ e $\mathcal{D}_{0,1}$.

Também:

1) Dado L objeto de $\mathcal{D}_{0,1}$, $Pr(L)$ é o espaço topológico compacto, ordenado e totalmente desconexo na ordem $(X(L), \tau, \leq)$, onde $X(L)$ é o conjunto dos filtros primos de L ; τ é a topologia que tem por base a família $\{\sigma(a)\}_{a \in L}$ onde $\sigma(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$; e a ordem é a inclusão de conjuntos.

2) Se $h : L_1 \rightarrow L_2$ é um morfismo de $\mathcal{D}_{0,1}$, $Prh : Pr(L_2) \rightarrow Pr(L_1)$ é definido por $Prh(P) = h^{-1}(P)$.

Assim, $\psi \circ Pr : \mathcal{D}_{0,1} \rightarrow St^*$ é definido por:

a) Seja L um objeto de $\mathcal{D}_{0,1}$. Então $(\psi \circ Pr)(L) = \psi(Pr(L)) = (X(L), \tau(D(Pr(L))))$.

b) Seja $h : L_1 \rightarrow L_2$ um morfismo de $\mathcal{D}_{0,1}$. $(\psi \circ Pr)(h) : \psi(Pr(L_2)) \rightarrow \psi(Pr(L_1))$ é definida por: $\forall\, P \in L_2$, $(\psi \circ Pr)(h)(P) = Prh(P) = h^{-1}(P)$.

$\therefore$ $\psi \circ Pr$ estabelece a equivalência entre $\mathcal{D}_{0,1}$ e St^* .

BIBLIOGRAFIA

[1] BALBES, R. & DWINGER, Ph.: *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri 65201, 1974.

[2] CIGNOLI, R. & GALLEGO, M.S.: "Dualities for some De Morgan Algebras with operators and Lukasiewicz Algebras". *J. Austral. Math. Soc.* (Series A), 34. 1982.

[3] CORNISH, W.H.: "On H. Priestley dual of the category of bounded distributive lattices". *Matematyk Bechk* 12 (27), 1975.

[4] DAVEY, B.A.: "Subdirectly Irreducible Distributive double p-algebras". *Algebra Universalis* 8, 73-88.

[5] DUGUNDJI, J.: *Topology*. Boston, Allyn and Bacon, 1970.

[6] GRÄTZER, G.: *Lattice theory: First concepts and distributive lattices*, W.H. Freeman Co., San Francisco, 1971.

[7] KELLEY, J.L.: *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1970.

[8] NACHBIN, L.: *Topology and Order*, Van Nostrand Mathematical Studies # 4, 1965.

[9] PRIESTLEY, H.: "Representation of distributive lattices by means of ordered Stone space", *Bull. London Math. Soc.* 2: 186-190, 19[illegible].

[10] PRIESTLEY, H.: "Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices". *Proc. London Math. Soc.* 3 (24), 507-530, 1972.

[11] STONE, M.H.: "The theory of representations for Boolean Algebra", *Trans. Amer Math. Soc.* 40 (1936), 37-111.

[12] STONE, M.H.: "Topological Representation of distributive Lattices and Browwerian logics", *Casopis Pest Math.*, 67 (1937).