

ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLOGICOS
DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

SAMUEL NAVARRO ✓

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática , Estatística e Ciencia da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática .

Orientador :

Prof.Dr.João B.Prolla.

CAMPINAS

Dezembro de 1981

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A G R A D E C I M E N T O S

Quero expresar meu sincero agradecimento ao professor João B.Prolla , pela segura orientação e grande dedicação dispensada antes e durante a elaboração deste trabalho.

Um especial reconhecimento aos professores Mario Matos e Jorge Mujica pelas valiosas e produtivas discussões sostenidas, e aos colegas do grupo de Análise Funcional e Teoria de Aproximação pela constante disposição ao intercambio de ideias .

Agradezco o apoio outorgado pela Organização de Estados Americanos , o Conselho Nacional de Pesquisa , a Universidade Estadual de Campinas e a Universidade de Santiago de Chile .

O agradecimento inexpressavel pelo sacrificio , estímulo e amor para Rosa Maria , Ana e Antonio.

INDICE

INTRODUÇÃO	i-iv
CAPITULO 1 : Preliminares.	1
§ 1 Corpos valorizados e espaços vetoriais topológicos.	1
§ 2 Classes de espaços localmente F-convexos.	5
§ 3 Espaços de transformações lineares.	6
§ 4 Dualidade.	8
§ 5 DF-espaços e espaços reflexivos.	9
§ 6 Classes de espaços topológicos.	11
§ 7 Espaços de funções.	12
CAPITULO 2 : Espaços F-tonelados.	14
§ 1 Relações entre $C(X;F)$, E , e $C(X;E)$.	14
§ 2 Propriedades dos espaços F-tonelados.	21
§ 3 Condições para que $C(X;E)$ seja F-tonelado.	26
CAPITULO 3 : Espaços F-bornológicos.	39
CAPITULO 4 : DF-espaços.	44
§ 1 Propriedades dos DF-espaços.	44
§ 2 Condições para que $C(X;F)$ e $C(X;E)$ sejam DF-espaços.	50
CAPITULO 5 : Espaços reflexivos, de Schwartz e de Montel.	59
§ 1 Propriedades dos espaços de Schwartz e quase - normados.	59
§ 2 Condições para que $C(X;F)$ e $C(X;E)$ sejam espaços de Schwartz ou quase normados.	63
§ 3 Completude de $C(X;F)$.	67
§ 4 Espaços reflexivos e de Montel.	70
BIBLIOGRAFIA.	76

INTRODUÇÃO

Em 1954 , L.Nachbin [15], apresentou teoremas de caracterização dos espaços topológicos para os quais o espaço de funções contínuas sobre R ou C , munido da topologia compacto aberta , resultasse topológico ou bornológico .

Estes resultados foram também obtidos independentemente por T. Shirota [20], e são agora conhecidos como os teoremas de Nachbin-Shirota .

Posteriormente em 1971-75 ,G.Bachman , E.Beckenstein , L.Narici e S.Warner [1], [2], [3] provaram os teoremas de Nachbin-Shirota para o caso de um corpo valorizado não arquimedeano completo . W.Govaerts [7], apresentou em 1980 um teorema de Nachbin-Shirota para o caso F -bornológico sem a hipótese do corpo ser completo .

A partir de 1975 varios autores procuraram teoremas do tipo Nachbin-Shirota para o caso vetorial (real ou complexo),isto é , para espaços de funções contínuas definidas num espaço topológico X e com valores num espaço vetorial topológico localmente convexo E sobre o corpo R ou C .

Os resultados mais importantes nessa direção , são devidos a Schmets [18], Mujica [14], R. Hollstein [9], e Mendoza [11] .

Nosso estudo é dedicado a obter teoremas do tipo Nachbin-Shirota para o espaço de funções contínuas definidas num espaço topológico ultraregular X e com valores num espaço localmente F -convexo E . O estudo é estendido a outros tipos de espaços além dos F -tonelados e F -bornológico.

Os espaços localmente F -convexos foram introduzidos por A. Monna e tratados detalhadamente na tese de Van Tiel [22].

Desde a definição de Monna, a teoria dos espaços localmente F -convexos teve um gradual desenvolvimento que ainda não alcança o nível dos espaços localmente convexos reais ou complexos. Introduziremos algumas definições ainda não consideradas nos trabalhos de espaços vetoriais topológicos não arquimedeanos. Nessa preocupação foram os resultados essenciais para uma boa análise do espaço de funções contínuas.

Depois de introduzir alguns tipos de espaços localmente F -convexos, analisamos o espaço de funções contínuas escalares, isto é, as funções definidas num espaço topológico ultraregular X com valores num corpo valorizado $(F, |\cdot|)$, e obtivemos alguns resultados do tipo teoremas de Nachbin [15] e Warner [23].

No primeiro capítulo apresentamos um resumo das definições e proposições principais que usaremos nos capítulos posteriores.

No segundo capítulo, parágrafo primeiro, apresentamos resultados importantes do espaço de funções contínuas que permitem dar condições necessárias

para propriedades do espaço localmente F -convexo $C(X;E)$. No segundo paragrafo damos as principais propriedades dos espaços F -tonelados. No § 3, apresentamos uma extensão de um teorema de Mujica [14], que permitirá junto a uma extensão de um teorema de Mendoza [11], obter um dos resultados mais gerais sobre condições para $C(X;F)$ e E que implicam ser $C(X;E)$ um espaço F -tonelado.

No capítulo 3 estudamos condições para que o espaço $C(X;E)$ seja F -bornológico. Neste capítulo como também no anterior são considerados as noções de suporte de um subconjunto F -convexo de $C(X;E)$ e de um funcional linear contínuo sobre $C(X;E)$. O método de demonstração dos teoremas principais do capítulo 2 e 3 seguem o esquema de demonstração dos teoremas 1 e 2 de Nachbin [15].

No capítulo 4 consideramos o análogo para o caso de espaços localmente F -convexos dos DF -espaços definidos por Grothendieck [8] para o caso real ou complexo. No primeiro parágrafo damos as propriedades gerais dos DF -espaços e no segundo extendemos um teorema de Hollstein ao caso não arquimedeano. Obtemos também um teorema para o caso de funções escalares que estende o teorema de Warner [23]. Aqui consideramos os espaços topológicos que chamamos de W -compacto (espaços com a condição dada por Warner em [23] Th. 12).

No primeiro paragrafo do capítulo 5 introduzimos uma definição de espaço de Schwartz que é análoga à definição de Grothendieck [8]. Damos as propriedades gerais destes espaços e obtemos um teorema de caracterização para o caso do espaço de funções escalares e condições para o caso vetorial. Os espaços quase normados são definidos também em forma análoga à de Grothendi-

ek [8] . As propriedades e o estudo de $C(X;F)$ e $C(X;E)$ são apresentados .

No segundo paragrafo do capítulo 5, provamos um análogo do teorema de Warner [23] Th. 1., sobre a completude e quase completude do espaço $C(X;F)$, usamos na demonstração essencialmente o teorema de Tietze provado por Ellis [6] para o caso não arquimedeano .

No ultimo parágrafo os espaços reflexivos , semi reflexivos , Montel , semi Montel , c-Montel e semi-c-Montel são introduzidos , apresentamos algumas propriedades gerais e obtemos condições sobre X e sobre E para que $C(X;F)$ e $C(X;E)$ tenham algumas destas propriedades .

PRELIMINARES

§ 1 Corpos valorizados e espaços vetoriais topológicos.

Um corpo valorizado não arquimedeano (n.a.) $(F, | \cdot |)$ é um par onde F é um corpo e $| \cdot |$ é uma valorização não arquimedea, isto significa que a função

$$| \cdot | : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

verifica as seguintes propriedades:

- i) $|\lambda| \geq 0$ para todo $\lambda \in F$ e $|\lambda| = 0$ se e somente se $\lambda = 0$
- ii) $|\lambda \cdot \gamma| = |\lambda| \cdot |\gamma|$ para todo $\lambda, \gamma \in F$
- iii) $|\lambda + \gamma| \leq \max\{|\lambda|, |\gamma|\}$ para todo λ, γ em F

1.1 OBSERVAÇÃO : a) iii) implica que $|\lambda + \gamma| \leq |\lambda| + |\gamma|$ para todo $\lambda, \gamma \in F$.

b) Se $|\lambda| \neq |\gamma|$ então $|\lambda + \gamma| = \max\{|\lambda|, |\gamma|\}$

1.2 DEFINIÇÃO : a) Uma valorização é dita trivial e $(F; | \cdot |)$ é dito trivialmente valorizado se $|\lambda| = 1$, para todo $\lambda \in F, \lambda \neq 0$

b) Se $(F; | \cdot |)$ é um corpo não trivialmente valorizado e $G = \{\alpha \in |F| ; \alpha > 1\}$, então a valorização é dita discreta se G possui um elemento mínimo, em caso contrario a valorização é dita densa.

1.3 OBSERVAÇÃO : Uma valorização de um corpo F define uma topologia que converte F num corpo topológico de maneira natural.

1.4 DEFINIÇÃO : Um corpo não trivialmente valorizado n.a. $(F, | \cdot |)$ é um corpo local se é um corpo topológico localmente compacto quando $(F, | \cdot |)$ é munido da topologia natural. Isto equivale a dizer que $(F, | \cdot |)$ tem valorização discreta, que o corpo

dos restos $\bar{e}$ finito (o corpo dos restos $\bar{e}$ o quociente do anel $\{\lambda \in F ; |\lambda| \leq 1\}$ e o ideal $\{\lambda \in F ; |\lambda| < 1\}$), e que o corpo topológico $(F, | \cdot |)$ é completo.

- 1.5 EXEMPLO : O exemplo mais importante de corpo local é o do completamento de $\mathbb{Q}$ (corpo dos números racionais) munido da valorização p -ádica. Esta valorização é definida da seguinte forma: p tem que ser um número primo e para cada x em $\mathbb{Q}$ escrever $x = p^k a/b$ onde k é um número inteiro e p não divide o produto ab , então

$$|x|_p = p^{-k} \quad \text{se } x \neq 0 \quad |x|_p = 0 \quad \text{se } x = 0.$$

- 1.6 DEFINIÇÃO : Um corpo valorizado n.a. $(F, | \cdot |)$ é esfericamente completo se dada uma família de bolas de F , duas a duas com interseção não vazia, essa família tem interseção não vazia. Isto é equivalente a dizer que toda coleção de bolas fechadas totalmente ordenada $(\subseteq)$ tem interseção não vazia.

- 1.7 OBSERVAÇÃO : a) Todo corpo esfericamente completo é completo (Van Tiel [22] Th, 1.2.)
b) Todo corpo local é esfericamente completo (Van Tiel [22] Th, 1.2 Cor.)

Um estudo mais detalhado e completo sobre corpos valorizados pode ser visto em Prolla [17] Chap.1, e em Narici et al. [16] Chap.1.

- 1.8 DEFINIÇÃO : Um espaço vetorial topológico (e.v.t) sobre um corpo $(F, | \cdot |)$ é um par (E, τ_E) onde E é um espaço vetorial sobre F e τ_E é uma topologia sobre E compatível com a estrutura de espaço vetorial. Isto quer dizer que as aplicações

$$(x, y) \longrightarrow x+y \quad \text{e} \quad (\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$$

de $E \times E$ em E e de $F \times E$ em E respectivamente, são contínuas.

nuas. ($E \times E$ e $F \times E$ munidos de suas correspondientes topologias produto).

1.9 DEFINIÇÃO : Seja E um espaço vetorial e M um subconjunto de E ;

a) M é dito não arquimedeano se

$$M + M \subsetneq M$$

b) M é dito F-convexo se para todo $\lambda, \gamma \in F$ tal que $|\lambda|, |\gamma| \leq 1$ e para todo $x, y \in M$, o vetor $\lambda x + \gamma y$ pertence a M .

1.10 OBSERVAÇÃO : Seja (E, τ_E) um e.v.t. e M um subconjunto de E ;

a) Se M é F-convexo então o fecho de M , $\bar{M}$, é F-convexo.

b) Se M é F-convexo então M é aberto ou o interior, $\overset{\circ}{M}$, de M é vazio.

c) Existe um menor conjunto F-convexo em E que contém M . Este conjunto é chamado envoltória F-convexa de M e é denotado por $\langle M \rangle$

d) $\langle \bar{M} \rangle = \overline{\langle M \rangle}$

e) Se M é aberto, $\langle M \rangle$ é aberto.

1.11 DEFINIÇÃO : Seja E um e.v.t., $\mathcal{F}$ um filtro em E . Se possui uma base de conjuntos F-convexos, então $\mathcal{F}$ é dito um filtro F-convexo.

1.12 DEFINIÇÃO : Se o filtro de vizinhanças da origem em (E, τ_E) é um filtro F-convexo então (E, τ_E) é dito um espaço localmente F-convexo.

1.13 EXEMPLO : Um corpo valorizado $(F, |\cdot|)$ não arquimedeano é de maneira natural um espaço localmente F-convexo, pois as bolas abertas centradas em 0 são F-convexas

1.14 DEFINIÇÃO : Um subconjunto M de (E, τ_E) é dito c-com

pacto se todo filtro F -convexo em M possui algum ponto aderente em M . Esta definição é devida a T.A Springer (ver [21], p.21)

1.15 OBSERVAÇÃO : Um corpo $(F, | \cdot |)$ é esféricamente completo se e somente se a bola unitária é $\cdot$ -compacta. (T.A Springer [21] p.21)

1.16 DEFINIÇÃO : Sejam M, N, L , subconjuntos de (E, τ_E) ;

a) M absorve N se existe $\delta > 0$ tal que $N \subseteq \lambda M$ para todo $\lambda \in F$ tal que $|\lambda| \geq \delta$

b) M é absorvente se absorve todos os pontos de E .

c) L é limitado se é absorvido por todas as vizinhanças da origem de (E, τ_E) .

d) M é bornívoro se absorve todos os conjuntos limitados de (E, τ_E) .

1.17 OBSERVAÇÃO : Se M é F -convexo então M absorve N se existe $\lambda \in F$ tal que $N \subset \lambda M$.

1.18 DEFINIÇÃO : Uma função $p: E \longrightarrow R_+$ é uma seminorma não arquimedea (n.a) sobre o espaço vetorial E , se satisfaz:

- i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $\lambda \in F$, $x \in E$
- ii) $p(x + y) \leq \max \{p(x), p(y)\}$ para todo $x, y \in E$

1.19 NOTAÇÃO : Denotamos por $\Gamma(\tau_E)$ o conjunto de seminormas n.a. continuas sobre o espaço vetorial topológico (E, τ_E) tais que $p(E) \subset |F|$. Quando não houver perigo de confusão escreveremos Γ em vez de $\Gamma(\tau_E)$.

§ 2 Classes de espaços localmente F-convexos.

Nesta seção (E, τ_E) é um espaço localmente F-convexo sobre $(F, | \cdot |)$, um corpo valorizado não arquimedeano.

1.20 DEFINIÇÃO : (E, τ_E) é um espaço metrizável não arquimedeano se verifica alguma das condições seguintes:

a) A topologia τ_E é definida por uma distância d , invariante por translações e verificando

$$d(x, y) \leq \max \{ d(x, z), d(y, z) \}$$

para todo x, y, z em E .

b) Existe um sistema fundamental enumerável de vizinhanças F-convexas da origem, que pode ser escolhido decrescente.

c) A topologia τ_E é definida por uma família enumerável crescente de seminormas não arquimedeanas.

1.21 DEFINIÇÃO : Se (E, τ_E) é metrizável n.a. e completo, diz-se que (E, τ_E) é um espaço de Fréchet.

1.22 DEFINIÇÃO : Um subconjunto T de um e.v.t. (E, τ_E) é chamado F-tonel se é F-convexo, absorvente e fechado.

1.23 DEFINIÇÃO : Um espaço localmente F-convexo (E, τ_E) é dito F-tonelado, se todo F-tonel de (E, τ_E) for τ_E -vizinhança da origem.

1.24 EXEMPLOS : a) Se (E, τ_E) é um espaço localmente F-convexo de Baire, então (E, τ_E) é F-tonelado.

b) Como consequência de a), todo espaço de Fréchet (em particular todo espaço normado n.a. completo) é F-tonelado.

Para a) e b) ver Monna([12] p.366).

1.25 DEFINIÇÃO : Se todo conjunto F -convexo e bornívoro de (E, τ_E) é uma vizinhança da origem, então (E, τ_E) é dito um espaço F -bornológico .

1.26 EXEMPLO : Se (E, τ_E) é um espaço metrizável n.a., então (E, τ_E) é F -bornológico. (Van Tiel [22] Th.3.17 e Th, 4.30).

1.27 DEFINIÇÃO : Seja (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo , dizemos que:

a) (E, τ_E) é um espaço semi-c-Montel se todo conjunto fechado e limitado em E é c -compacto.

b) (E, τ_E) é um espaço semi-Montel se todo conjunto fechado e limitado em E é compacto.

c) (E, τ_E) é um espaço $c\text{-Montel}$ se (E, τ_E) é F -tonelado e semi-c-Montel .

d) (E, τ_E) é um espaço de Montel se (E, τ_E) é F -tonelado e semi-Montel .

§ 3 Espaços de transformações lineares.

Nesta seção (E, τ_E) e (G, τ_G) são espaços localmente F -convexos sobre o mesmo corpo valorizado n.a. $(F, | \cdot |)$. $\mathcal{L}(E, G)$ denota o espaço de transformações lineares contínuas de E em G .

Dada uma cobertura $\mathcal{G}$ de E por conjuntos limitados, define-se em $\mathcal{L}(E, G)$ uma topologia τ . Um sistema fundamental de vizinhanças da origem em τ é formado pelos conjuntos $\bigcap_i M(A_i, U_i)$, onde $m \in \mathbb{N}$, $M(A_i, U_i) = \{f \in \mathcal{L}(E, G) ; f(A_i) \subseteq U_i\}$, $A_i \in \mathcal{G}$ e U_i é uma τ_G -vizinhança da origem em G , para todo i .

1.28 EXEMPLOS a) A topologia definida pela família $\mathcal{G}$ dos conjuntos finitos de E . Esta topologia é denotada por τ_s .

b) A topologia definida pela família $\mathcal{G}$ dos conjuntos compactos de E . Esta topologia é denotada por τ_c .

c) A topologia definida pela família $\mathcal{G}$ dos conjuntos limitados de E . Esta topologia é denotada por τ_b .

1.29 NOTAÇÕES : a) No caso particular em que (G, τ_G) é o corpo $(F, | |)$, $\mathcal{L}(E, G)$ é denotado por $(E, \tau_E)'$, e é dito o dual topológico de (E, τ_E) . Quando não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente E' .

b) (E', τ_s) é denotado por E'_σ ou também por $(E', \sigma(E', E))$ e é dito dual fraco de E .

c) (E', τ_b) é denotado por E'_β ou também por $(E', \beta(E', E))$ e é dito o dual forte de E .

1.30 OBSERVAÇÃO : Se $\delta_x : E' \longrightarrow F$ é a função definida por $\delta_x(f) = f(x)$ para $f \in E'$ e $x \in E$, a aplicação $x \longmapsto \delta_x$ é uma aplicação de E sobre $(E'_\sigma)'$ (Van Tiel, [22] Th.4.10). Por tanto pode-se identificar E com $(E'_\sigma)'$. Como consequência disto, existe em E uma topologia induzida pela topologia τ_s de $(E'_\sigma)'$, esta topologia é chamada topologia fraca sobre E e denotada por $\sigma(E, E')$, e o espaço E com a topologia $\sigma(E, E')$

é denotado por E_σ .

§ 4 Dualidade.

Se (E, τ_E) é um espaço localmente F -convexo, diremos que uma topologia τ sobre E é compatível com a dualidade (entre E e E') se (E, τ) é localmente F -convexo e $(E, \tau_E)' = (E, \tau)'$.

1.31 EXEMPLO : A topologia fraca de E é uma topologia compatível com a dualidade e é a menos fina das topologias compatíveis sobre E .

Suporemos de agora em diante que o corpo $(F, | \cdot |)$ é esfericamente completo, já que esta hipótese garante a não trivialidade do dual de um espaço localmente F -convexo. Isto é consequência do teorema de Ingleton [10] e sua generalização para espaços F -convexos (ver Monna [16] e Van Tiel [22]).

1.32 DEFINIÇÃO : Dado M um subconjunto de E , definimos:

a) O polar de M em E' como o conjunto

$$M^0 = \{f \in E' ; |f(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in M\}$$

b) O bipolar de M em E como o conjunto

$$M^{00} = \{f \in E ; |f(x)| \leq 1 \text{ para todo } f \in M^0\}$$

1.33 DEFINIÇÃO : Dado M um subconjunto de E , dizemos que M é Γ -fechado se para todo $x \in E$, $x \notin M$, existe uma seminorma $p \in \Gamma = \Gamma(\tau_E)$ tal que $p(M) \leq 1$ e $p(x) > 1$.

1.34 EXEMPLO : Se $(F, | \cdot |)$ é um corpo esfericamente com -

pleto e $M \subseteq E$ é um subespaço fechado de (E, τ_E) , então M é Γ -fechado. (A prova segue dos teoremas 3.11 e 4.7 de Van Tiel [22]).

1.35 OBSERVAÇÃO : Se M é um subconjunto de E , então

a) $M = M^{00}$ se e somente se M é Γ -fechado (Van Tiel [22] Th.4.13, 2º).

b) Numa $\mathcal{G}$ -topologia sempre se pode supor que todo $M \in \mathcal{G}$ é Γ -fechado (Van Tiel [22] Th.4.9).

c) Se M é Γ -fechado, então M é F -convexo e fechado.

Na teoria da dualidade não arquimedea, não existe um análogo geral do teorema dos bipolares do caso arquimedeano. Existem dois resultados que dependem das propriedades do corpo $(F, |\cdot|)$;

1.36 PROPOSIÇÃO : a) Se $(F, |\cdot|)$ é um corpo discreto e se M é um subconjunto F -convexo e fechado de (E, τ_E) , então

$$M = M^{00}$$

b) Se $(F, |\cdot|)$ é um corpo denso e se M é um subconjunto F -convexo e fechado de (E, τ_E) , então

$$M^{00} \subseteq \lambda M$$

para todo $\lambda \in F$ tal que $|\lambda| > 1$.

§ 5 DF-espaços e espaços reflexivos.

1.37 DEFINIÇÃO : Uma família $\{B_i\}_{i \in I}$ de conjuntos limitados de (E, τ_E) é dita fundamental se para todo limitado L

de (E, τ_E) , existe $j \in I$ tal que $L \subseteq B_j$.

1.38 DEFINIÇÃO : Um espaço localmente F -convexo (E, τ_E) é um DF-espaço se:

i) Existe uma família fundamental enumerável de limitados de (E, τ_E) .

ii) Todo conjunto bornívoro que é interseção de uma família enumerável de vizinhanças F -convexas da origem em E , é uma vizinhança da origem em E .

1.39 OBSERVAÇÃO : Se $(F, | \cdot |)$ é um corpo esfericamente completo, a condição ii) de 1.38 pode ser enunciada da seguinte forma equivalente:

ii)' Todo conjunto fortemente limitado de E' que é união enumerável de conjuntos equicontínuos de E' é um conjunto equicontínuo.

1.40 EXEMPLOS : a) Todo espaço normado n.a. é um DF-espaço.

b) Todo espaço em que os F -toneis bornívoro são vizinhanças da origem e que possui uma família fundamental enumerável de limitados, é um DF-espaço.

c) Todo corpo valorizado, com a topologia induzida pela valorização, é um DF-espaço.

1.41 DEFINIÇÃO : Seja (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo, dizemos que:

a) (E, τ_E) é um espaço semi-reflexivo se

$$E'' = (E'_\beta)' = (E'_\sigma)' = E$$

isto significa que a topologia forte $\beta(E', E)$ é compatível com a dualidade entre E' e E .

b) (E, τ_E) é um espaço reflexivo se (E, τ_E) é semi-reflexivo e a topologia τ_E é a topologia $\beta(E, E')$ isto significa que E é o dual forte de E'_β .

§ 6 Classes de espaços topológicos.

1.42 DEFINIÇÃO : Um espaço topológico X é dito ultraregular se é Hausdorff e cada ponto tem um sistema fundamental de vizinhanças abertas e fechadas.

1.43 OBSERVAÇÃO : Um espaço topológico que verifica a segunda propriedade de 1.42 i.e. que cada ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças abertas e fechadas, é chamado de espaço 0-dimensional.

Pode-se ver facilmente que um espaço é ultraregular se e somente se é 0-dimensional e T_1 .

Se X é um espaço ultraregular, existe uma compactificação $\beta_0 X$ de X , que é chamada a compactificação de Banaschewski, tal que:

a) $\beta_0 X$ é um espaço ultraregular.

b) Dado um espaço ultraregular Y e uma função f de X em Y contínua, existe uma única extensão contínua $\beta_0 f$ de $\beta_0 X$ em $\beta_0 Y$.

c) Se C é um subconjunto aberto e fechado de X , então o fecho de C em $\beta_0 X$ é um conjunto aberto e fechado de $\beta_0 X$.

d) Dois conjuntos abertos e fechados disjuntos em X tem fechos abertos e fechados disjuntos em $\beta_0 X$.

A demonstração dos enunciados anteriores e mais detalhes sobre a compactificação de Banaschewski podem ser vistos em Bachman et al. [3] .

1.44 NOTAÇÃO : Dado um espaço X ultraregular denotamos por $\nu_0 X$ o conjunto dos $x \in \beta_0 X$ tais que se $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de vizinhanças de x abertas e fechadas em $\beta_0 X$, então

$$\left(\bigcap_n V_n \right) \cap X \neq \emptyset$$

1.45 DEFINIÇÃO : Um espaço X ultraregular é um Q_0 -espaço se $X = \nu_0 X$.

1.46 DEFINIÇÃO : a) Um espaço topológico X é dito W-compacto se toda união enumerável de compactos de X é relativamente compacta.

b) Um espaço topológico X é dito fortemente contavelmente compacto se toda sequência em X é relativamente compacta.

1.47 EXEMPLOS : a) Todo espaço compacto é W-compacto e consequentemente fortemente contavelmente compacto.

b) Se Ω é o primeiro ordinal não contável, então o espaço $[0, \Omega]$ com a topologia da ordem é um espaço W-compacto que não é compacto.

§ 7 Espaços de funções

Vamos supor nesta seção que X é um espaço topológico, (E, τ_E) é um espaço vetorial topológico sobre $(F, |\cdot|)$, um corpo valorizado não arquimedeano.

1.48 NOTAÇÃO : a) Denotamos por E^X o espaço das funções de X em E , munido da topologia que tem uma base de vizinhanças da origem dada pelos conjuntos

$$M(S, U) = \{f \in E^X ; f(S) \subseteq U\}$$

onde $S \subseteq X$ é finito e U é uma vizinhança da origem em (E, τ_E) .

b) Denotamos por $C(X, E)$ o espaço das funções contínuas de X em E , munido da topologia compacto-aberta, isto é, a topologia que tem uma base de vizinhanças da origem dada pelos conjuntos

$$M(K, U) = \{f \in C(X, E) ; f(K) \subseteq U\}$$

onde $K \subseteq X$ é compacto e U é uma vizinhança da origem em (E, τ_E) .

c) Denotamos por $C^*(X, E)$ o espaço das funções contínuas de X em E tal que sua imagem é relativamente compacta em E , munido da topologia da convergência uniforme, isto é, a topologia que tem uma base de vizinhanças da origem dada pelos conjuntos

$$M^*(X, U) = \{f \in C^*(X, E) ; f(X) \subseteq U\}$$

onde U é uma vizinhança da origem em (E, τ_E) .

CAPÍTULO 2

E S P A Ç O S F - T O N E L A D O S

§1 Relações entre $C(X,F)$, E , e $C(X,E)$.

Consideraremos nesta seção X um espaço topológico ultraregular, $(F, | |)$ um corpo valorizado não arquimedeano esfericamente completo, $C(X,F)$ o espaço das funções contínuas sobre X com valores no corpo F , $C(X,F)$ é considerado com a topologia compacto - aberta . Consideraremos também (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo e $C(X,E)$ o espaço das funções contínuas com valores em E , munido da topologia compacto - aberta . Supomos (E, τ_E) Hausdorff .

2.1 PROPOSIÇÃO : $C(X,F)$ pode ser identificado com um subespaço fechado complementado de $C(X,E)$.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $e_0 \in E$ e $\gamma \in E'$, $\gamma(e_0) = 1$, a existência de $\gamma \in E'$ com esta condição é garantida pela hipótese de completude esférica do corpo $(F, | |)$.

Considerar a função $\psi: C(X,F) \rightarrow C(X,E)$ definida por $\psi(f) = f \cdot e_0$. Claramente ψ é injetora.

Vamos mostrar que $\psi(C(X,F))$ é fechado em $C(X,E)$. Seja h uma função de $C(X,E)$ no fecho de $\psi(C(X,F))$, então existe um net $\{f_\alpha\}$ em $C(X,F)$ tal que

$$(1) \quad \psi(f_\alpha) = f_\alpha \cdot e_0 \longrightarrow h \quad \text{em } C(X,E)$$

Logo como γ é contínua resulta que $f_\alpha \longrightarrow \gamma \circ h$ em $C(X,F)$ donde

$$(2) \quad f_\alpha \cdot e_0 \longrightarrow (\gamma \circ h) e_0 \quad \text{em } C(X,E) .$$

como $C(X, E)$ é Hausdorff de (1) e (2) tem-se que $h = \psi(\gamma h)$, isto mostra que $h \in \psi(C(X, F))$.
 Note-se que $\psi: C(X; F) \longrightarrow \psi(C(X; F))$ é um isomorfismo vetorial topológico.

a) Seja $f_\alpha \longrightarrow f$; temos que demonstrar que $\psi(f_\alpha) \longrightarrow \psi(f)$. Seja $M(K; U)$ uma vizinhança F -convexa de 0 em $\psi(C(X; F))$, então existe $B_\delta \subset F$ tal que $B_\delta \cdot e_0 \subset U$, então para $\alpha \geq \alpha_0$, existe α_0 , tem-se que $(f_\alpha - f)(K) \subset B_\delta$, donde $(f_\alpha - f)e_0(K) \subset B_\delta e_0 \subset U$.

b) Seja $\psi(f_\alpha) \longrightarrow \psi(f)$ temos que demonstrar que $f_\alpha \longrightarrow f$. Seja $M(K; B_\delta)$ uma vizinhança de 0 em $C(X; F)$, então existe U vizinhança de 0 em E tal que $p_U(e_0) < 1/\delta$ ($p_U(e) = \inf \{|\lambda|; e \in \lambda U\}$), para $M(K; U)$ existe α_0 tal que $\alpha > \alpha_0$, $\psi(f_\alpha) - \psi(f) \in M(K; U)$ isto é $p_U((f_\alpha e_0 - f e_0)(k)) \leq 1$ para todo $k \in K$. Logo para $\alpha > \alpha_0$, $|f_\alpha(k) - f(k)| \cdot 1/\delta \leq 1$ para todo $k \in K$. Donde $(f_\alpha - f)(K) \subset B_\delta$.

Falta mostrar que $\psi(C(X; F))$ é complementado em $C(X; E)$. Para isto consideremos

$$\pi : C(X; E) \longrightarrow \psi(C(X; F))$$

a função definida por $\pi(h) = (\gamma h)e_0$. Claramente a função π é linear e sobrejetora; vamos mostrar que ela é idempotente, isto é que $\pi^2 = \pi$.

Se $h = g \cdot e$ onde $g \in C(X; F)$, então $\gamma h = g$ e $(\gamma h)e_0 = g \cdot e_0 = h$ por tanto $\pi(h) = h$ se $h \in \psi(C(X; F))$. Logo se $h \in C(X; E)$ como $\pi(h) \in \psi(C(X; F))$ resulta $\pi(\pi(h)) = \pi(h)$. Donde $\pi^2 = \pi$.

Finalmente vamos provar que π é contínua. Seja $M(K; B_\delta)$ uma vizinhança de 0 em $C(X; F)$, como γ é um elemento de E' , existe uma vizinhança U de 0 em E tal que $\gamma(U) \subset B_\delta$, então $\pi(M(K; U)) \subset \psi(M(K; B_\delta))$. Concluimos que π é uma projeção contínua de $C(X; E)$ sobre $\psi(C(X; F))$.

2.2 PROPOSIÇÃO : E pode ser identificado com um subespaço fechado complementado de $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO : Considerar a função $\gamma: E \longrightarrow C(X;E)$ definida por $\gamma(e) = f_e$ onde $f_e(x) = e$ para todo $x \in X$. Claramente γ é injetora sobre o subespaço de $C(X;E)$ das funções constantes. Vamos provar que $\gamma(E)$ é fechado em $C(X;E)$. Seja h um elemento no fecho de $\gamma(E)$ em $C(X;E)$, então existe um net $\{e_\alpha\}$ em E tal que $f_{e_\alpha} \longrightarrow h$ em $C(X;E)$. Vamos provar que h é constante. Sejam $x, y \in X$, considerar a vizinhança de 0 $M(\{x, y\}, U)$ de $C(X;E)$ onde U é F -convexa, então existe α_0 tal que $\alpha \geq \alpha_0$ implica

$$(f_{e_\alpha} - h) \in M(\{x, y\}, U)$$

donde $e_{\alpha_0} - h(x) \in U$, $e_{\alpha_0} - h(y) \in U$ e como U é F -convexa $h(x) - h(y) \in U$ logo como E é Hausdorff temos que $h(x) = h(y)$ logo $h \in \gamma(E)$.

Nóte-se que γ é um isomorfismo vetorial topológico de E sobre $\gamma(E)$.

a) Seja $e_\alpha \longrightarrow e$; temos que demonstrar que $\gamma(e_\alpha) \longrightarrow \gamma(e)$. Seja $M(K; U)$ uma vizinhança F -convexa da origem em $C(X;E)$, então existe α_0 tal que $\alpha \geq \alpha_0$ implica $e_\alpha - e_0 \in U$. Logo $(f_{e_\alpha} - f_e)(K) \subset U$ de aqui resulta que $(\gamma(e_\alpha) - \gamma(e))(K) \subset U$.

b) Seja $\gamma(e_\alpha) \longrightarrow \gamma(e)$ em $C(X;E)$ temos que demonstrar que $e_\alpha \longrightarrow e$ em E . Seja U uma vizinhança F -convexa de 0 em E , então existe α_0 tal que $\alpha \geq \alpha_0$, $\gamma(e_\alpha) - \gamma(e)(\{x\}) \subset U$ logo resulta que $(f_{e_\alpha} - f_e)(x) = e_\alpha - e \in U$.

Falta mostrar que E é complementado, Para isto consideremos a função

$$\pi : C(X;E) \longrightarrow \gamma(E)$$

a função definida por $\pi(f) = \gamma(f(x_0))$ onde x_0 é um elemento arbitrário fixo de X . Podemos anotar $\pi = \gamma \circ \delta_{x_0}$ (δ_{x_0} é a função avaliação). Claramente π é linear. Vamos mostrar que $\pi^2 = \pi$. Seja $f \in \gamma(E)$, então existe $e \in E$ tal que $f = \gamma(e)$, isto é $f(x) = e$ para todo $x \in X$. Logo $\delta_{x_0}(f) = e$, então $\gamma(\delta_{x_0}(f)) = \gamma(e) = f$ portanto $(\gamma \circ \delta_{x_0})(f) = \pi(f) = f$. Logo se $f \in C(X;E)$ como $\pi(f) \in \gamma(E)$ temos que $\pi(\pi(f)) = \pi(f)$ donde resulta que $\pi^2 = \pi$.

Finalmente vamos provar que π é contínua. Como γ é uma função contínua basta provar que δ_{x_0} é contínua. Seja U uma vizinhança de 0 em E , então $\delta_{x_0}(M(\{x_0\}, U)) \subset U$ logo δ_{x_0} é contínua de $C(X;E)$ sobre $\gamma(E)$.

2.3 NOTAÇÃO : Sejam (E_n, τ_n) uma sequência de espaços localmente F -convexos;

a) $(E, \tau) = \varinjlim (E_n, \tau_n)$ denota o limite indutivo dos espaços localmente F -convexos (E_n, τ_n) .

b) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ denota o conjunto de todas as somas finitas $\sum_i x_i$ onde $x_i \in V_i$.

2.4 PROPOSIÇÃO : Seja $(E, \tau) = \varinjlim (E_n, \tau_n)$ onde a sequência dos espaços (E_n, τ_n) é crescente, então uma base de vizinhanças da origem em E é dada pela família

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} V_n ; V_n \in \mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n \text{ é uma base de vizinhanças } F\text{-convexas de } 0 \text{ em } (E_n, \tau_n) \right\}$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja U uma vizinhança F -convexa da origem em (E, τ) . Como a topologia induzida por τ sobre E_n é menos fina que τ_n , existe para cada $n \in \mathbb{N}$

uma vizinhança $V_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $V_n \subset U$.

Seja $y \in \sum_{n=1}^{\infty} V_n$, existe N_0 tal que

$$y \in \sum_{i=1}^{N_0} V_i \subset U + \dots + \sum_{i=1}^{N_0} V_i \subset U \subset U$$

a última inclusão obtem-se da condição que U é F -convexa. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} V_n \subset U$. Concluimos que a família $\{\sum_{n=1}^{\infty} V_n\}$ é uma base de vizinhanças de 0 .

2.5 TEOREMA : Seja X um espaço ultraregular, W -compacto e (E_n, τ_n) uma sequência crescente de espaços localmente F -convexos. Se $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$, então $\lim C(X; E_n)$ é um subespaço topológico denso em $C(X; E)$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $i: \lim C(X; E_n) \longrightarrow C(X; E)$ a função inclusão que é evidentemente contínua, vamos mostrar que i é aberta na imagem para concluir que o espaço $\lim C(X; E_n)$ tem a topologia induzida por $C(X; E)$.

Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança F -convexa de 0 em $\lim C(X; E_n)$, temos que provar que $i(\mathcal{U})$ é uma vizinhança de 0 em $i(\lim C(X; E_n))$, pela proposição 2.4, existe uma vizinhança da forma $\sum_{n=1}^{\infty} M(K_n, V_n)$ contida em $\mathcal{U}$, onde K_n é um subconjunto compacto de X para cada $n \in \mathbb{N}$ e V_n é uma vizinhança de 0 em E_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos o compacto K tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset K$$

e a vizinhança

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

Afirmamos que a vizinhança da origem $M(K, V)$ verifica

$$M(K, V) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} C(X; E_n) \subset i(\mathcal{U})$$

como $\mathcal{U}$ é um conjunto fechado, basta mostrar que

$$M(K;V) \cap \bigcup_1^\infty C(X;E_n) \subset \overline{\sum_1^\infty M(K_n;V_n)} \text{---} \lim$$

Sejam $g \in M(K;V) \cap C(X;E_p)$ e W uma vizinhança de 0 em $\lim_{\rightarrow} C(X;E_n)$, temos que mostrar a existência de uma função $v \in M(K_n;V_n)$ que satisfaz $v \in g + W$, mas como W é uma vizinhança de 0 no limite indutivo, existe $M(L_p, S_p)$ vizinhança de 0 em $C(X;E_p)$ tal que $M(L_p, S_p) \subset W$. Finalmente só temos que mostrar a existência de uma função $v \in \sum_1^\infty M(K_n;V_n)$ que satisfaz

$$v \in g + M(L_p; S_p)$$

Consideremos o conjunto seguinte

$$G(a) = \{ x \in X ; g(x) - g(a) \in S_p \}$$

$G(a)$ é uma vizinhança aberta e fechada de a em X como $K \subset X$ é compacto, existe $G(a_1), \dots, G(a_m)$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^m G(a_i)$. Sem perda de generalidade podemos supor que esta união é disjunta.

Por outra parte como $g \in M(K;V)$ e $a_i \in K$ para todo $i = 1, \dots, m$, temos que $g(a_i) \in V$ isto significa que existe $q_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$g(a_i) = \sum_{j=1}^{q_i} b_j^i$$

onde $b_j^i \in V_j$ para cada $j = 1, \dots, q_i$, e para cada $i = 1, \dots, m$. Vamos supor que $q_1 = q_2 = \dots = q_m = q$ onde $q \in \mathbb{Z}$ e q é maior que p .

Definimos $u_j \in C(X) \otimes E_j$ pela fórmula

$$u_j = \sum_{i=1}^m \chi_{G(a_i)} b_j^i$$

como $b_j^i \in V_j$ e V_j é F -convexo, resulta que $u_j(X) \subset V_j$

donde $u_j \in M(K_j; V_j)$. Podemos agora definir

$$u = \sum_{j=1}^q u_j \in \sum_{j=1}^q M(K_j; V_j)$$

temos então que

$$(*) \quad (u - g)(x) \in S_p$$

para cada $x \in \sum_{i=1}^m G(a_i)$. Com efeito, da equivalencia

$$u = \sum_{j=1}^q u_j = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^m \chi_{G(a_i)} b_j^i = \sum_{i=1}^m \chi_{G(a_i)} g(a_i)$$

$$\text{obtemos que } u(x) - g(x) = \sum_{i=1}^m \chi_{G(a_i)}(x)(g(a_i) - g(x))$$

Como a união dos $G(a_i)$ é disjunta, para cada x na união existe um único i_0 tal que $x \in G(a_{i_0})$, logo

$$u(x) - g(x) = g(a_{i_0}) - g(x) \in S_p$$

Definimos finalmente a função v como

$$v = \chi_{\mathcal{H}} \cdot u + (1 - \chi_{\mathcal{H}}) \cdot g$$

onde $\mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^m G(a_i)$, então $v - g = \chi_{\mathcal{H}}(u - g)$

Usando (*) pode-se ver claramente que $(v - g)(X) \subset S_p$ donde resulta que $(v - g)(L_p) \subset S_p$.

Afirmamos que a função assim definida é um elemento de $\sum_1^\infty M(K_j, V_j)$. Com efeito já que u é um elemento da soma finita $\sum_{j=1}^q M(K_j, V_j)$ tem-se que

$$\chi \cdot u \in \sum_{j=1}^q M(K_j, V_j)$$

também temos que

$$(1 - \chi_{\mathcal{H}}) \cdot g \in M(K_{q+1}, V_{q+1})$$

$$\text{logo } v \in \sum_{j=1}^q M(K_j, V_j) + M(K_{q+1}, V_{q+1})$$

temos mostrado que $i(\varinjlim C(X; E_n))$ tem a topologia induzida por $C(X; E)$.

Para concluir, a densidade $\tilde{E}$ é consequência da densidade do produto $C(X) \otimes E$ em $C(X; E)$ já que

$$C(X) \otimes E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C(X; E_n) .$$

§2 Propriedades dos espaços F-tonelados.

Nesta seção (E, τ_E) é um espaço localmente F-convexo sobre um corpo não trivialmente valorizado não arquimedeano.

2.6 PROPOSIÇÃO : Seja S um subespaço vetorial topológico denso de (E, τ_E) , então (E, τ_E) é F-tonelado se S é F-tonelado

DEMONSTRAÇÃO : Seja T um F-tonel em E , então $T \cap S$ é um F-tonel em S , logo existe U vizinhança aberta de 0 em S tal que $U \subset T \cap S$. Como U é aberto na topologia relativa, existe V vizinhança de 0 em E tal que $U = V \cap S$.

Afirmção : V está contido em T .

Com efeito suponhamos que $V \cap T^c \neq \emptyset$. Como $V \cap T^c$ é um aberto de E e S é denso em E existe $x \in V \cap T^c \cap S$. Logo existe x tal que $x \in V \cap S$ e $x \in T^c$, mas $V \cap S \subset T$. Esta contradição permite afirmar que T é uma vizinhança de 0 em E , logo E é F-tonelado.

2.7 PROPOSIÇÃO : Se (E, τ_E) é o limite indutivo de uma família $\{(E_i, u_i)\}_{i \in I}$ de espaços F-tonelados, então (E, τ_E) é F-tonelado

DEMONSTRAÇÃO : Isto é imediato da definição de limite indutivo. Com efeito se T é um F -tonel em E , então $u_i^{-1}(T)$ é um F -tonel em cada E_i que por ser F -tonelado é uma vizinhança de 0 em cada E_i do qual deduzimos que T é uma vizinhança de 0 em E na topologia limite indutivo.

2.8 COROLARIO : O quociente separado de um espaço F -tonelado é F -tonelado.

2.9 DEFINIÇÃO : Dado (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo Hausdorff, um subconjunto M de E , limitado e F -convexo, é dito completante se o espaço $([M], p_M)$ é um espaço normado não arquimedeano completo. ($[M]$ denota o subespaço vetorial de E gerado por M e p_M denota a seminorma n.a. definida por

$$p_M(e) = \inf \{ |\lambda| ; e \in \lambda M \}.$$

2.10 PROPOSIÇÃO : Sejam $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de espaços localmente F -convexos e Hausdorff, $(F, |||)$ um corpo esfericamente completo, $T \subset (E, \tau) = \prod_I (E_\alpha, \tau_\alpha)$ um subconjunto F -convexo que absorve os conjuntos completantes de E , então existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que $\bigoplus_{\alpha \in I-J} E_\alpha \subset T$

DEMONSTRAÇÃO : Podemos sem perda de generalidade supor que $T \neq E$. Para provar a proposição vamos supor contrariamente que para todo $J \subset I$, J finito, existe $e \in \bigoplus_{\alpha \in I-J} E_\alpha$ tal que $e \notin T$.

Se $J = \emptyset$ existe $e^1 \in \bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$, $e^1 = (s_\alpha^1)_{\alpha \in I}$

tal que se $|\lambda_1| > 1$, $e^1 \notin \lambda_1 T$. Chamemos $J_1 = \{ \alpha \in I ; s_\alpha^1 \neq 0 \}$.

Se $J = J_1$ existe $e^2 \in \bigoplus_{\alpha \in I-J_1} E_\alpha$, $e^2 = (s_\alpha^2)_{\alpha \in I}$

tal que se $|\lambda_2| > 2$, $e^2 \notin \lambda_2 T$. Chamemos J_2 o conjunto $J_2 = J_1 \cup \{\alpha \in I ; s_\alpha^2 = 0\}$. Por indução podemos formar as seguintes seqüências $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que verificam :

$$e^n \in \bigoplus_{\alpha \in I - J_{n-1}} E_\alpha, \quad J_{n-1} = J_{n-2} \cup \{\alpha \in I ; s_\alpha^{n-1} \neq 0\}$$

$$e^n \notin \lambda_n T, \quad |\lambda_n| > n.$$

Consideremos $B_n = \{e^n ; |\lambda| \leq 1\}$. $B_n \subset \prod_{\alpha \in I - J_{n-1}} E_\alpha$.

B_n é F -convexo, completo e limitado, já que B_n é isomorfo à bola unitária de $(F, |\cdot|)$, que é c -compacta e portanto completa (T.A.Springer [21], nº 2.1 e N.De Grande-De Kimpe, [5].prop. 1).

Podemos considerar $B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$, como um subconjunto de $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$. O conjunto B é F -convexo, limitado e completo em E , portanto B é completante. Logo existe $\delta \in F$, tal que $B \subset \delta T$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| > |\delta|$, para λ_n tem-se que $e^n \notin \lambda_n T$, isto contradiz a eleição dos e^n . Logo existe $J \subset I$, J finito que verifica $\bigoplus_{\alpha \in I - J} E_\alpha \subset T$.

2.11] PROPOSIÇÃO : Se (E, τ_E) é Hausdorff e $T \subset E$ é um F -tonel, então T absorve os conjuntos completantes de (E, τ_E) .

DEMONSTRAÇÃO : Seja M um conjunto F -convexo de E , e seja $([M], p_M)$ o espaço normado n.a completo correspondente. Pela observação 1.24.b), o espaço $([M], p_M)$ é F -tonelado.

O conjunto $T \cap M$ é um F -tonel em $([M], p_M)$ já que a topologia induzida por τ_E é menos fina que a topologia dada pela norma p_M sobre $[M]$.

Com efeito seja U uma τ_E -vizinhança de 0 , como M é limitado, existe $\lambda \in F$ tal que $\lambda M \subset U$, de aqui obtemos que a p_M -bola $B(0, |\lambda|) = \{x \in M : p_M(x) < |\lambda|\}$ é contida em $U \cap [M]$.

Logo $T \cap [M]$ é uma p_M -vizinhança da origem em $[M]$ que absorve o p_M -limitado conjunto M logo existe $\gamma \in F$ tal que

$$M \subset \gamma(T \cap [M]) \subset \gamma T$$

2.12 DEFINIÇÃO : Seja (E, τ) um espaço localmente F -convexo, consideremos sobre E a topologia τ^t que tem como um sistema fundamental de vizinhanças da origem a família de todos os F -tonéis de (E, τ) .

2.13 PROPOSIÇÃO : O espaço (E, τ) é F -tonelado se e somente se $\tau = \tau^t$

DEMONSTRAÇÃO : Supomos que (E, τ) é F -tonelado então todo τ - F -tonel é vizinhança de 0 logo τ é mais fina que τ^t .

Por outra parte, como (E, τ) é F -convexo as τ -vizinhanças de 0 que são F -convexas e τ fechadas formam um sistema fundamental, logo τ^t é mais fina que τ .

Supondo agora que $\tau = \tau^t$, resulta que todo F -tonel de (E, τ) é uma τ -vizinhança da origem. Logo (E, τ) é F -tonelado.

2.14 PROPOSIÇÃO : Sejam (E, τ_E) e (G, τ_G) dois espaços localmente F -convexos e $f: (E, \tau_E) \longrightarrow (G, \tau_G)$ uma aplicação linear contínua, então a aplicação $f: (E, \tau^t) \longrightarrow (G, \tau^t)$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO : Seja U uma τ_G -vizinhança de 0 ,

pela definição de τ_G^t , existe T um F -tonel em (G, τ_G) tal que $T \subset U$, como f é linear e continua o conjunto $f^{-1}(T)$ é uma τ_E^t -vizinhança de 0 e $f(f^{-1}(T)) \subset T \subset U$ logo f é continua.

2.15 TEOREMA : Seja $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de espaços localmente F -convexos e Hausdorff.

Se $(E, \tau) = \prod_{\alpha \in I} (E_\alpha, \tau_\alpha)$ e $(E, \gamma) = \prod_{\alpha \in I} (E_\alpha, \tau_\alpha^t)$ tem-se que $\gamma = \tau^t$

DEMONSTRAÇÃO : a) $\gamma \subset \tau^t$. Seja $i : (E, \tau^t) \longrightarrow (E, \gamma)$ temos que demonstrar que i é continua.

A projeção $p_\alpha : (E, \tau) \longrightarrow (E_\alpha, \tau_\alpha)$ é linear continua; logo pela proposição 2.14., a aplicação $p_\alpha : (E, \tau^t) \longrightarrow (E_\alpha, \tau_\alpha^t)$ é continua. Se q_α é a projeção do produto $\prod_{\alpha \in I} (E_\alpha, \tau_\alpha^t)$ sobre $(E_\alpha, \tau_\alpha^t)$ então i é continua se e somente se a composição $q_\alpha \circ i$ é continua para todo $\alpha \in I$, mas $q_\alpha \circ i = p_\alpha$ logo i é continua.

b) $\tau^t \subset \gamma$. 1º caso) I é finito. Então a topologia produto coincide com a topologia soma direta localmente F -convexa.

2º caso) I é infinito. Vamos mostrar que todo F -tonel T de (E, τ) é uma vizinhança de 0 em (E, γ) . Pela proposição 2.11., T absorve os conjuntos completantes de (E, τ) logo pela proposição 2.10., existe $J \subset I$, J finito, tal que

$\bigoplus_{\alpha \in I-J} E_\alpha \subset T$. Como T é fechado temos que

$$(1) \quad \prod_{\alpha \in I-J} E_\alpha \subset T$$

Por outra parte $T \cap (\prod_{\alpha \in J} E_\alpha)$ é um F -tonel em $\prod_{\alpha \in J} (E_\alpha, \tau_\alpha)$ portanto

$$(2) \quad T \cap \prod_{\alpha \in J} E_\alpha$$

é uma vizinhança de 0 em $\prod_{\alpha \in J} (E_\alpha, \tau_\alpha^t)$, de aqui obtemos que

$$T \cap \prod_{\alpha \in J} E_\alpha + \prod_{\alpha \in I-J} E_\alpha$$

é uma vizinhança de 0 em $\prod_{\alpha \in I} (E_\alpha, \tau_\alpha^t)$ e finalmente de (1) e (2) e da hipótese que T é F -convexo

$$T \cap \prod_{\alpha \in J} E_\alpha + \prod_{\alpha \in I-J} E_\alpha \subset T + T \subset T$$

logo T é uma vizinhança de 0 em $\prod_{\alpha \in I} (E_\alpha, \tau_\alpha^t)$.

2.16 COROLARIO : O produto de espaços F -tonelados é F -tonelado.

§3 Condições para que $C(X;E)$ seja F -tonelado.

Nesta seção X é um espaço topológico ultraregular e E é um espaço localmente F -convexo sobre um corpo esfericamente completo $(F, ||)$.

Nas proposições 2.1. e 2.2 temos mostramos que $C(X;F)$ e E são subespaços fechados complementados de $C(X;E)$ e portanto existem dois espaços quocientes separados de $C(X;E)$, isomorfos a $C(X;F)$ e E respectivamente. Pelo corolario 2.8. a propriedade de ser F -tonelado é invariante sob formação de quocientes separados. Logo podemos enunciar o seguinte teorema :

2.17 TEOREMA : Se $C(X;E)$ é F -tonelado, então $C(X;F)$ e E são F -tonelados.

A seguinte parte desta seção é dedicada à busca de condições suficientes para que $C(X;E)$ seja

F-tonelado.

2.18 LEMA : Dada uma função $\psi \in C(X;E)$, existem f, g em $C(X;E)$ e existem U, V abertos não vazios de $\beta_0 X$ tais que

$$1) \beta_0 f \text{ é nula em } U$$

$$2) \beta_0 g \text{ é nula em } V$$

$$3) \psi = f + g$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $U \neq \emptyset$ um conjunto aberto e fechado de X tal que $U^c \neq \emptyset$. Fazemos $V = U^c$ e definimos

$$f(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \in U \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in V \\ \psi(x) & \text{se } x \in U \end{cases}$$

Os fechados de U e V em $\beta_0 X$ são conjuntos abertos e fechados de $\beta_0 X$ (ver 1.43. d)) Pela continuidade tem-se $\beta_0 f$ e $\beta_0 g$ são nulas em $\bar{U}$ e $\bar{V}$ respectivamente e pela definição $\psi = f + g$.

2.19 PROPOSIÇÃO : Seja T um subconjunto próprio do espaço $C(X;E)$ tal que $0 \in T$ e T é não arquimedeano . Então existe um menor compacto $K(T) \subset \beta_0 X$ tal que , para todo $\psi \in C(X;E)$, se $\beta_0 \psi$ é nula numa vizinhança de $K(T)$ então $\psi \in T$.

DEMONSTRAÇÃO : Denotemos por A o conjunto de todos os compactos $K \subset \beta_0 X$ para os quais se verifica a propriedade :

(*) Se $\psi \in C(X;E)$ e $\beta_0 \psi$ é nula numa vizinhança de K então ψ é um elemento de T .

O conjunto A é não vazio já que a função 0 pertence-

ce a T donde $\beta_0 X$ pertence a A .

O conjunto vazio não é um elemento de A , com efeito, supomos que $\phi \in A$, então se $\psi \in C(X; E)$ e $\beta_0 \psi$ é nula num aberto de $\beta_0 X$ então $\psi \in T$, mas pelo lema anterior isto significa que toda função $\rho \in C(X; E)$ é um elemento de T já que existe f, g em T tal que $\rho = f + g$, como T é não arquimedeano $\rho \in T$, esta é uma contradição já que temos suposto $T \neq C(X; E)$.

Vamos mostrar agora que a interseção de dois elementos de A é um elemento de A . Sejam H e $K \in A$, seja $\psi \in C(X; E)$ tal que

$$\beta_0 \psi = 0 \quad \text{em } W$$

onde W é uma vizinhança aberta de $H \cap K$.

Sejam U vizinhança aberta e fechada de H em $\beta_0 X$ e V vizinhança aberta e fechada de $K \setminus W$ em $\beta_0 X$, disjunta de U , então definimos as seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} \beta_0 \psi(x) & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in U \\ \beta_0 \psi(x) & \text{se não} \end{cases}$$

já que U é aberto e fechado, f, g pertencem a $C(\beta_0 X; \beta_0 E)$ é ainda mais como $f(x) = 0$ se $x \in W \cup V$, que é uma vizinhança de K , resulta que f/X , a restrição de f a X , pertence a T ; da mesma forma como $g(x) = 0$ em U , e U é vizinhança de H , então g/X pertence a T . Podemos concluir então que

$$\psi = \beta_0 \psi / X = f/X + g/X \in T + T \subset T$$

o que prova que $H \cap K$ pertence a A .

Finalmente vamos mostrar que a interseção de todos os elementos de A é um elemento de A .

Seja W vizinhança de $\bigcap_{K \in A} K$, aberta em $\beta_0 X$, como o complemento W^c é compacto de $\beta_0 X$ e $W^c \subset \bigcup_{K \in A} K^c$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$W^c \subset \bigcup_{i=1}^n K_i^c,$$

para K_i , $i=1, \dots, n$, em A . De aqui obtemos que

$$\bigcap_{i=1}^n K_i \subset W$$

Seja $\psi \in C(X; E)$ e $\beta_0 \psi$ nula numa vizinhança W da interseção $\bigcap_{K \in A} K$, pelo anterior $\bigcap_{i=1}^n K_i \subset W$, logo $\beta_0 \psi$ é nula numa vizinhança de uma interseção finita de elementos de A , usando indução podemos concluir que pertence a T . Fazemos $K(T) = \bigcap_{K \in A} K$, $K(T)$ é o menor elemento de A .

2.20 DEFINIÇÃO : O conjunto $K(T)$ da proposição anterior é chamado de suporte de T

2.21 PROPOSIÇÃO : Seja $T \subset C(X; E)$ um conjunto não arquivimedeano tal que $0 \in T$ e o suporte $K(T)$ de T está contido em X . Se existe U vizinhança F -convexa de 0 em E tal que $M(X; U) \subset T$, então

$$M(K(T); U) \subset T$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja ψ uma função em $M(K(T); U)$. Considerar $\psi^{-1}(U)$, este conjunto é aberto e fechado de X que contém $K(T)$. Definimos as funções seguintes:

$$\rho = \chi_{\psi^{-1}(U)} \cdot \psi \quad \eta = (1 - \chi_{\psi^{-1}(U)}) \cdot \psi$$

ρ é um elemento de $M(X; U)$ logo $\rho \in T$, η é uma função nula numa vizinhança aberta de $K(T)$, logo $\eta \in T$

donde $\Psi = \rho + \eta \in T + T \subset T$, logo $\Psi \in T$.

2.22 NOTAÇÃO : Dado $\Lambda \in C(X;E)'$; D_Λ denotará a família de todos os conjuntos U abertos e fechados de X que verificam a condição :

$$\Lambda(\Psi \cdot \chi_U) = 0 \quad \text{para todo } \Psi \in C(X;E) .$$

2.23 PROPOSIÇÃO : Dado $U \in D_\Lambda$ e V um conjunto aberto e fechado de X tal que $V \subset U$, então $V \in D_\Lambda$.

DEMONSTRAÇÃO : $\chi_V = \chi_V \cdot \chi_U$, logo $\Lambda(\Psi \cdot \chi_V) = \Lambda((\Psi \cdot \chi_V) \cdot \chi_U)$

2.24 COROLARIO : D_Λ é um anel de conjuntos . Isto quer dizer que D_Λ é fechado para união finita e diferença de conjuntos .

2.25 DEFINIÇÃO : Dado $\Lambda \in C(X;E)'$ definimos o conjunto

$$\text{supp} \Lambda = \left(\bigcup_{V \in D_\Lambda} V \right)^c$$

que será chamado suporte do funcional .

2.26 OBSERVAÇÃO : Para cada $\Lambda \in C(X;E)'$ existe uma semi norma n.a. p_Λ em E , um compacto K de X e $\lambda_\Lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|\Lambda(\psi)| \leq \lambda_\Lambda \sup_{k \in K} p_\Lambda(\psi(k)) .$$

Como consequência disto tem-se que $\text{supp} \Lambda \subset K$.

2.27 PROPOSIÇÃO : Seja $\Lambda \in C(X;E)'$, $\Lambda \neq 0$, então o suporte de Λ é não vazio .

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos que $\text{supp} \Lambda = \emptyset = \left(\bigcup_{V \in D} V \right)^c$

ou equivalentemente que $X = \bigcup_{V \in D_A} V$.

Seja K o compacto da observação 2.26., então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$ com $V_i \in D_A$, como D_A é um anel de conjuntos a união, $\bigcup_{i=1}^n V_i$ pertence a D_A e portanto a função característica desta união, que chamaremos χ_A ($A = \bigcup_{i=1}^n V_i$), verifica

$$\Lambda(\psi \cdot \chi_A) = 0 \quad \text{para todo } \psi \in C(X; E),$$

finalmente pela propriedade de K e como $A^c \subset K^c$ temos

$$\Lambda(\psi) = \Lambda(\psi \cdot \chi_A) + \Lambda(\psi \cdot \chi_{A^c}) = 0 + 0 = 0$$

para todo $\psi \in C(X; E)$. Logo $\Lambda = 0$ o que contradiz nossa hipótese inicial.

2.28 PROPOSIÇÃO : Seja $\Lambda \in C(X; E)'$, $\Lambda \neq 0$, e A um subconjunto aberto de X que intersepta o suporte de Λ , então existe uma função $\psi \in C(X; E)$ tal que

$$\psi(A^c) = \{0\} \quad \text{e} \quad \Lambda(\psi) = 1$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $x \in A \cap \text{supp } \Lambda$, como A é aberto e X é ultraregular existe U aberto e fechado de X tal que $x \in U \subset A$, donde resulta que $U \cap \text{supp } \Lambda \neq \emptyset$. Logo $U \in D_A$ e pela definição de D_A existe $\rho \in C(X; E)$ tal que $\Lambda(\rho \cdot \chi_U) \neq 0$. Considerando a função

$$\psi = \chi_U \cdot \rho \cdot |\Lambda(\rho \cdot \chi_U)|^{-1}$$

resulta $\Lambda(\psi) = 1$ e como $A^c \subset U^c$, $\psi(A^c) = \{0\}$.

2.29 PROPOSIÇÃO : Seja $\Lambda \in C(X; E)'$, se $\Lambda(\psi) = 0$ para todo ψ que é nula numa vizinhança aberta e fechada de $\text{supp } \Lambda$, então $\Lambda(\rho) = 0$ para toda ρ que é nula em

$\text{supp } \Lambda$.

DEMONSTRAÇÃO : Supondo que $\psi(x) = 0$ para todo $x \in \text{supp } \Lambda$, seja p_Λ a seminorma não arquimedea em E considerada na observação 2.26. Seja

$$C_i = \{x \in X ; p_\Lambda(\psi(x)) < 1/i\}.$$

Cada C_i é um conjunto aberto e fechado que contém o supp_Λ . Como $\psi = \chi_{C_i} \cdot \psi + (1 - \chi_{C_i}) \cdot \psi$, resulta que

$$\Lambda(\psi) = \Lambda(\psi \cdot \chi_{C_i})$$

ja que a função $(1 - \chi_{C_i})$ é nula numa vizinhança aberta e fechada C_i do supp_Λ . Seja agora K o compacto considerado na observação 2.26. Resulta que

$$|\Lambda(\psi)| = |\Lambda(\chi_{C_i} \cdot \psi)| \leq \lambda_\Lambda \cdot \sup_{k \in K} p(\chi_{C_i}(x) \cdot \psi(x)) \leq \lambda_\Lambda \cdot (1/i)$$

Logo $\Lambda(\psi) = 0$.

2.30 NOTAÇÃO : Dado $W \subset C(X;E)'$ denotamos por $\text{supp } W$ a união dos conjuntos $\text{supp } \Lambda$ para todo $\Lambda \in W$.

2.31 DEFINIÇÃO : Um conjunto $L \subset X$ é dito F-limitante se toda função de $C(X;F)$ é limitada em L .

2.32 DEFINIÇÃO : Dados X um espaço ultraregular e (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo, diremos que X tem a propriedade do suporte anulante, se para todo Λ em $C(X;E)'$, ψ é nula no $\text{supp } \Lambda$ implica $\Lambda(\psi) = 0$.

2.33 PROPOSIÇÃO : Se X é ultraregular e Lindelof, então X tem a propriedade do suporte anulante.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $C(X;E)'$ e seja $W \subset X$ um con-

junto aberto e fechado que contém $\text{supp } \Lambda$, isto implica que $W^C \subset \bigcup_{V \in D_\Lambda} V$, como X é Lindelof e W^C é fechado temos que $W^C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ com $V_i \in D_\Lambda$. Supomos sem perda de generalidade que a união é disjunta.

Consideremos o conjunto aberto e fechado

$$U_i = W^C \cap V_i$$

pela proposição 2.23. $U_i \in D_\Lambda$, então em cada ponto x de X temos que

$$\chi_{W^C}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{U_i}(x)$$

vamos a mostrar que

$$\chi_{W^C} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{U_i}.$$

Seja $L \subset X$ um conjunto compacto então $L \cap W^C$ é compacto, logo $L \cap W^C \subset \bigcup_{i=1}^{N(L)} U_i \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, para todo $n > N(L)$.
 donde $L \cap W^C \subset L \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right)$, para todo $n > N(L)$.

Por outra parte como $U_i \subset W^C$ tem-se que $\bigcup_{i=1}^n U_i \subset W^C$
 portanto $L \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) \subset L \cap W^C$, para todo $n > N(L)$.

Resulta então que $L \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) = L \cap W^C$, para todo $n > N(L)$. Logo

$$\left(\sum_{i=1}^n \chi_{U_i} - \chi_{W^C} \right)(L) = \{0\}$$

para todo $n > N(L)$. Finalmente se ψ é nula em W

$$\begin{aligned}\Lambda(\psi) &= \Lambda(\psi \cdot \chi_W) + \Lambda(\psi \cdot \chi_{W^c}) = \Lambda(\psi \cdot \chi_{W^c}) = \\ &= \Lambda(\psi \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{U_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda(\psi \cdot \chi_{U_i}) = 0\end{aligned}$$

pela proposição 2.29. resulta que X tem a propriedade do suporte anulante.

2.34 PROPOSIÇÃO : Seja X um espaço topológico ultraregular com a propriedade do suporte anulante . Então dado um F -tonei T de $C(X;E)$, o conjunto $\text{supp } T^0$ é um conjunto F -limitante

DEMONSTRAÇÃO : Supomos que existe $f \in C(X;E)$ não limitada em $\text{supp } T^0$, então podemos escolher uma sequência de pontos $\{x_n\}$ em $\text{supp } T^0$ e uma sequência de funções $\{\Lambda_n\}$ em T^0 que verifiquem

- i) $f(x_n) + 1 < f(x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- ii) $x_n \in \text{supp } \Lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- iii) $x_n \notin \bigcup_{j < n} \text{supp } \Lambda_j$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Seja $V_n = \{x \in X ; |f(x) - f(x_n)| < 1/2\}$ e seja

$$B_n = V_n \cap \left(\bigcup_{j < n} \text{supp } \Lambda_j \right)^c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pode-se observar que $x_n \in B_n$ e $x_{n+1} \notin B_n$ e que B_n é um conjunto aberto que intersepta o suporte de Λ_n , pela proposição 2.28. , existe U_n conjunto aberto e fechado de X tal que

$$U_n \subset B_n$$

e existe $h_n \in C(X;E)$ que cumpre

$$\Lambda_n(h_n \cdot \chi_{U_n}) = 1$$

construímos a função $\psi = \sum_{t=1}^{\infty} c_t \cdot h_t \cdot x_{U_t}$, onde os c_t são definidos por

$$c_1 = f(x_1)$$

$$c_t = f(x_t) - \sum_{i=1}^{t-1} c_i \cdot \Lambda_t(h_i \cdot x_{U_i})$$

a sequência $\{U_n\}$ é localmente finita logo $\psi \in C(X;E)$.

Por outra parte já que $U_{n+j} \subset (\text{supp } \Lambda_n)^c$ tem-se que :

$$\Lambda_n(h \cdot x_{U_{n+j}}) = 0$$

para todo $h \in C(X;E)$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. (X tem a propriedade do suporte anulante) .

Obtemos então que :

$$|\Lambda_n(\psi)| = |\Lambda_n(\sum_{t=1}^{\infty} c_t \cdot h_t \cdot x_{U_t})| = |c_n + \sum_{t=1}^{n-1} c_t \cdot \Lambda_n(h_t \cdot x_{U_t})|$$

$$= |f(x_n)| > n - 1 .$$

podemos concluir com isto que a sequência $\{\Lambda_n\}$ de T_0 não é fracamente limitada, o que contradiz o fato que T é absorvente (ver Van Tiel [22] Th. 4.11, 5º) . Logo $\text{supp } T_0$ é um conjunto F -limitante de X .

2.35 TEOREMA : Seja X um espaço topológico ultraregular, com a propriedade do suporte anulante e tal que $C(X;E)$ é F -tonelado. Então se $C(\beta_0 X;E)$ é F -tonelado, $C(X;E)$ é F -tonelado.

DEMONSTRAÇÃO : Consideremos $C^*(X;E)$ o espaço definido em 1.48., c) . Observemos que $C^*(X;E)$ é isomorfo ao espaço $C(\beta_0 X;E)$.

Seja T um F -tonel em $C(X;E)$, já que

Seja T um F -tonel em $C(X;E)$, já que a inclusão

$$i : C^*(X;E) \longrightarrow C(X;E)$$

é contínua, resulta que $T \subset C^*(X;E)$ é um F -tonel em $C^*(X;E)$, como $C(\beta_0 X;E)$ é F -tonelado o espaço $C^*(X;E)$ é F -tonelado e portanto $T \subset C^*(X;E)$ é uma vizinhança de 0 em $C^*(X;E)$. Logo existe U vizinhança de 0 em E tal que

$$M^*(X;U) \cap T \subset C^*(X;E)$$

onde $M^*(X;U) = \{ f \in C^*(X;E) ; f(X) \subset U \}$ é uma vizinhança de 0 em $C^*(X;E)$.

Vamos mostrar que o fecho de $M^*(X;U)$ em $C(X;E)$ é o conjunto $M(X;U)$. Com efeito, seja ψ um elemento de $M(X;U)$ e seja $K \subset X$ compacto e seja V uma vizinhança F -convexa de 0 em E . Formamos os conjuntos

$$U_x = \{ y \in X ; \psi(x) - \psi(y) \in V \}$$

cada U_x é um conjunto aberto e fechado de X . Como K é compacto existe $k_1, \dots, k_n$ em K e $U_{k_1}, \dots, U_{k_n}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}$$

anotamos U_i em lugar de U_{k_i} . Podemos supor sem perda de generalidade que a união dos U_i é disjunta. Afirmamos que a função

$$\gamma = \sum_{i=1}^n x_{U_i} \cdot e_i$$

onde $e_i = \psi(k_i)$, é a função de $M^*(X;U)$ que verifica

$$\gamma - \Psi \in M(K; V)$$

mas isto é claro já que se $k \in K$ então $k \in U_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, logo

$$\begin{aligned} \gamma(k) - \Psi(k) &= \sum_{i=1}^n \chi_{U_i}(k) e_i - \Psi(k) \\ &= e_j - \Psi(k) = \Psi(k_j) - \Psi(k) \end{aligned}$$

donde $\gamma(k) - \Psi(k) \in V$.

Concluimos que dado T um F -tonel em $C(X; E)$, existe U vizinhança F -convexa de 0 em E tal que

$$(*) \quad M(X; U) \subset T$$

já que T é fechado e $M^*(X; U)$ está contido em T .

Analizamos agora o conjunto $\text{supp } T^0$. Pela proposição 2.34., $\text{supp } T^0$ é um conjunto limitante de X , como $C(X; F)$ é F -tonelado, pelo teorema de Nachbin-Shirota não arquimedeano provado por Bachman, Beckenstein e Narici (ver [1], e [2].§4.), podemos concluir que $\text{supp } T^0$ é um conjunto relativamente compacto de X .

Consideremos $\psi \in C(X; E)$ tal que ψ é nula em $\text{supp } T^0$. Tem-se que ψ é nula em $\text{supp } \Lambda$ para todo $\Lambda \in T^0$. Logo como X tem a propriedade do suporte anulante

$$\Lambda(\psi) = 0 \quad \text{para todo } \Lambda \in T^0$$

$$\Lambda(\lambda\psi) = 0 \quad \text{para todo } \lambda \in F, |\lambda| > 1 \text{ e } \Lambda \in T^0$$

onde $\lambda\psi \in T^{00} \subset \lambda T$ (ver proposição 1.36. a) e b)).
 Portanto ψ nula em $\text{supp } T^0$ implica que $\psi \in T$. Pela
 propriedade de $K(T)$ temos que

$$K(T) \subset \overline{\text{supp } T^0} \subset X$$

logo pela proposição 2.21 e por (*) obtem-se

$$M(K(T); U) \subset T$$

onde T é uma vizinhança de 0 em $C(X; E)$.

2.36 COROLARIO : Seja X um espaço ultraregular com a
propriedade do suporte anulante . Se $C(X; F)$ é F -tone-
lado e $E = \lim E_i$, onde E_i é uma sequência cres-
cente de espaços normados n.a. e completos (ou espaços
de Fréchet, mais geralmente) , então $C(X; E)$ é F -to-
nelado .

DEMONSTRAÇÃO : Se K é compacto e E_i é normado n.a e
 completo ou E_i é um espaço de Fréchet, então o espaço
 $C(K; E_i)$ é F -tonelado.

Pelo teorema 2.5 , o limite indutivo
 dos espaços $C(K; E_i)$ é um subespaço denso de $C(X; E)$.

Pela proposição 2.7 o limite indutivo
 dos espaços $C(K; E_i)$ é F -tonelado , e pela proposição
 2.6 , resulta que $C(K; E)$ é F -tonelado .

Em particular tomando $K = \beta_0 X$ resulta
 $C(\beta_0 X; E)$ F -tonelado . Pelo teotema 2.35 obtemos fi -
 nalmente que $C(X; E)$ é F -tonelado .

CAPÍTULO 3

E S P A Ç O S F - B O R N O L O G I C O S

Consideramos neste capítulo X espaço topológico ultraregular, (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo T_2 e $(F, | \cdot |)$ um corpo não trivialmente valorizado, não arquimedeano. $C(X; E)$ é o espaço definido em 1.48. b), isto é o espaço das funções contínuas com a topologia compacto aberta.

3.1 OBSERVAÇÃO : Da mesma forma trivial como foi provada a proposição 2.7. Pode provarse o seguinte:

O limite indutivo de espaços F -bornológicos é F -bornológico. Consequentemente, o quociente de um espaço F -bornológico é F -bornológico.

3.2 TEOREMA : Se $C(X; E)$ é F -bornológico, então $C(X; F)$ e E são F -bornológicos

DEMONSTRAÇÃO : Como a propriedade de ser F -bornológico é invariante sob formação de quocientes, das proposições 2.1 e 2.2., resulta que $C(X; F)$ e E são isomorfos a quocientes de $C(X; E)$ e portanto ambos são F -bornológicos.

3.3 PROPOSIÇÃO : Seja $T \subset C(X; E)$ um conjunto bornívoro. Se E é metrizável então existe uma vizinhança F -convexa U da origem em E tal que $M(X; U) \subset T$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{U_n\}$ uma sequência fundamental

de vizinhanças F -convexas de 0 em E , supomos que a sequência dos U_n é decrescente.

Vamos supor que a afirmação da proposição é falsa, então para cada n , existe $\lambda_n \in F$, $|\lambda_n| > n$ e existe $f_n \in M(X; \lambda_n^{-1} U_n)$, tal que $f_n \notin T$. Como a sequência dos U_n é decrescente temos que

$$\lambda_n f_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } C(X; E)$$

Com efeito seja $M(K; V)$ uma vizinhança de 0 em $C(X; E)$ existe N tal que $U_n \subset V$ e ainda mais $U_{n+j} \subset V$ para todo $j \in \mathbb{N}$, como $\lambda_{N+j} f_{N+j}(x) \in U_{N+j}$ para todo $x \in X$, temos que $\lambda_n f_n \in M(K; V)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T é bornívoro, existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda| > \delta$ implica que $\{\lambda_n f_n\} \subset \lambda T$, em particular para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ temos $|\lambda_j| > \delta$ e

$$\lambda_j f_j \in \lambda_j T$$

donde $f_j \in T$ isto contradiz a eleição de f_j . Logo existe U .

Da proposição 2.19 resulta que para um conjunto F -convexo e bornívoro $T \subset C(X; E)$, existe um conjunto compacto $K(T) \subset X$ chamado suporte de T que verifica o seguinte: Se $\beta_0 f \in C(\beta_0 X; E)$ é nula numa vizinhança aberta de $K(T)$, então $f \in T$.

3.4 PROPOSIÇÃO : Seja $T \subset C(X; E)$ um conjunto F -convexo e bornívoro e (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo metrizável. Se $K(T) \subset X$, então existe U uma vizinhança F -convexa de 0 em E tal que

$$M(K(T); U) \subset T$$

DEMONSTRAÇÃO : Pela proposição anterior, existe U vi

zinhança F -convexa de 0 em E tal que $M(X;U) \subset T$.
Pela proposição 2.21. concluímos que

$$M(K(T);U) \subset T.$$

3.5 PROPOSIÇÃO : Se $T \subset C(X;E)$ é F -convexo e bornivo -
ro , então $K(T) \subset \nu_0 X$

DEMONSTRAÇÃO : Supomos que $K(T) \not\subset \nu_0 X$, seja $x \in K(T)$ e $x \notin \nu_0 X$ então existe uma sequência $\{A_i\}$ de vizinhanças abertas e fechadas de x em $\beta_0 X$ tal que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cap X = \emptyset$$

podemos supor que $A_0 = \beta_0 X$ e que $\{A_i\}$ é decrescente. Consideramos

$$B_i = A_0 \setminus A_i$$

$\{B_i\}$ é uma sequência crescente de conjuntos abertos e fechados tal que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Temos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $f_i \in C(X;E)$ tal que

$$\beta_0 f_i(B_i) = 0 \quad \text{e} \quad f_i \notin T$$

a existencia das f_i é garantida pela definição de $K(T)$. Com efeito suponhamos que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $f \in C(X;E)$ se $\beta_0 f(B_{i_0}) = 0$ então $f \in T$, isto significa que $K(T)$ deve estar contido em B_{i_0} já que o conjunto B_{i_0} é compacto de $\beta_0 X$, esta é uma contradição já que $x \in K(T)$ e $x \notin B_{i_0}$.

Afirmção : Dado $\lambda_i \in F$, a sequência $\{\lambda_i f_i\}$ é convergente a 0 em $C(X;E)$. Para mostrar isto , consideremos

$M(K;U)$ uma vizinhança de 0 em $C(X;E)$. Como K é um subconjunto compacto de X , existe $J_n \subset N$ tal que J_n é finito e

$$K \subset \bigcup_{i \in J_n} B_i \cap X$$

seja $M = \max J_n$, já que $\{B_i\}$ é crescente tem-se

$$K \subset B_m \cap X \subset B_{M+j} \cap X$$

para todo $j \in N$. Então

$$\lambda_{M+j} f_{M+j}(K) \subset \lambda_{M+j} f_{M+j}(B_M \cap X)$$

$$\lambda_{M+j} f_{M+j}(B_{M+j} \cap X) = \{0\}$$

logo para todo $n \geq M$, $\lambda_n f_n \in M(K;U)$.

Consideremos $A = \{\lambda_i f_i\}$ onde $\lambda_i \in F$ e $|\lambda_i| \rightarrow \infty$, A é um conjunto limitado e T é bornívoro, logo existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$, $|\lambda| > \delta$ tem-se

$$A \subset \lambda T$$

em particular existe λ_M com $|\lambda_M| > \delta$ tal que

$$\lambda_M f_M \in \lambda_M T$$

onde $f_M \in T$; o que contradiz a eleição dos f_i . Esta contradição implica que $K(T) \subset v_0 X$.

3.6 TEOREMA : Se $C(X;F)$ é F-bornológico e (E, τ_E) é metrizável. Então $C(X;E)$ é F-bornológico.

DÉMONSTRAÇÃO : Seja $T \subset C(X;E)$ F -convexo e bornívoro

Vamos provar que T é vizinhança da origem de $C(X;E)$. Pela proposição 2.19., visto que T é F -convexo, existe um compacto $K(T) \subset \beta_0 X$, conjunto suporte de T . Pela proposição anterior, na verdade $K(T)$ está contido em $v_0 X$. Entretanto como $C(X;F)$ é F -bor-nológico, pelo teorema de Nachbin-Shirota não arquimedeano provado por Govaerts ([7]), podemos afirmar que X é um Q_0 espaço. Logo $K(T) \subset X$. Pela proposição 3.4. existe U vizinhança de 0 em E tal que

$$M(K(T);U) \subset T$$

onde T é uma vizinhança de 0 em $C(X;E)$.

CAPÍTULO 4

DF - ESPAÇOS

§ 1 Propriedades dos DF-espacos

Nesta seção (E, τ_E) é um espaço local - mente F -convexo $T_1, (F, | |)$ é um corpo valorizado não arquimedeano onde a valorização é não trivial .

4.1 PROPOSIÇÃO : Supomos que $(F, | |)$ é esfericamente completo . Se (E, τ_E) é metrizável n.a. , então E'_β é um DF-espaço .

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{U_n\}$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças da origem em (E, τ_E) . Consideremos $\{U_n^0\}$ a família dos polares de U_n em E' . $\{U_n^0\}$ resulta uma família enumerável de limitados em E'_β já que cada U_n^0 é equicontínuo (ver Van Tiel [22] . Th.4.3) portanto fortemente limitado .

A família $\{U_n^0\}$ é fundamental . Com efeito , se $L \subset E'_\beta$ é limitado , L^0 é uma vizinhança de 0 em E logo existe U_n tal que $U_n \subset L$. Portanto tem-se que $L^0 \subset U_n^0$. Isto prova (i) da definição 1.38.

Seja agora $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ um conjunto bor- nívoro , onde cada V_n é uma vizinhança F -convexa da origem em E'_β . V resulta F -convexa e fechada , logo pelo teorema dos bipolares não arquimedeano (Proposição 1.36) , dado $\lambda \in F$, $|\lambda| > 1$ obtem-se

$$(*) \quad V_{00} \subset V$$

Vamos mostrar que V_0 é limitado em (E, τ_E) . Seja U vizinhança de 0 em E , como U_0 é limitado em E' e V é bornívoros, existe $\lambda \in F$ tal que $U_0 \subset V$. Logo

$$V_0 \subset \alpha U_{00} \subset \alpha \gamma U$$

para algum $\gamma \in F$, $|\gamma| > 1$. Isto prova que V_0 é limitado. Portanto V_{00} é uma vizinhança de 0 em E' . Por $(*)$ o mesmo ocorre com V . Logo (ii) da Definição 1.38. está satisfeita então E' é um DF-espço.

4.2 PROPOSIÇÃO Seja (E, τ_E) um DF-espço, então E' é um espaço de Fréchet.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{B_n\}$ uma família fundamental enumerável de limitados de E , e seja U_m uma base enumerável de vizinhanças de 0 em $(F, |\cdot|)$, então a família $\{M(B_n, U_m)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ é uma base enumerável de vizinhanças da origem no espaço E'_β .

Para mostrar a completude, escolhemos $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em E' , esta sequência é fortemente limitada em E' , logo como (E, τ_E) é um DF-espço, (f_i) é equicontínuo. Por outra parte definimos $f(x) = \lim f_i(x)$ (a existência de $f(x)$ é garantida pela completude de $(F, |\cdot|)$). Então f pertence ao fecho de (f_i) na topologia da convergência simples em F^E . Finalmente por Prolla ([22], 2.57) obtemos que $f \in E'$ é portanto (f_i) é convergente.

4.3 PROPOSIÇÃO : Seja $(F, |\cdot|)$ um corpo esfericamente completo. Se E é um DF-espço e $M \subset E$ é um subes-

paço fechado de E , então E/M é um DF-espaço .

DEMONSTRAÇÃO : Para provar a existencia de uma famí -
lia fundamental enumerável de limitados em E/M vamos a
nalizar o dual forte de E/M .

Consideremos a função $\Psi : M^0 \longrightarrow (E/M)'$
definida por $\Psi(f) = f \circ v^{-1}$ onde v é a aplicação quocien
te. Vamos mostrar que Ψ é um isomorfismo vetorial topo-
logico do espaço $(M^0, \beta(E', E))$ sobre o espaço
 $((E/M)', \beta((E/M)', E/M))$:

Claramente podemos ver que Ψ é um iso -
morfismo vetorial . Para mostrar a continuidade de Ψ , co
mo M^0 é metrizável com a topologia induzida pelo dual
forte do DF-espaço E basta mostrar que Ψ leva sequên-
cias convergentes a 0 em M^0 sobre conjuntos limitados
em $(E/M)'$.

Seja $\{f_i\}$ uma sequencia convergente a
0 em M^0 , $\{f_i\}$ é um conjunto fortemente limitado em E'
logo $\{f_i\}$ é equicontínuo em E' , portanto $\{f_i \circ v^{-1}\}$ é
equicontínuo em $(E/M)'$, logo $\{f_i \circ v^{-1}\} = \{\Psi(f_i)\}$ é li-
mitado em $(E/M)'$.

Para mostrar que Ψ é aberta, considere-
mos a vizinhança de 0 seguinte $U = M^0 \cap A^0$, onde A
é um limitado de E , então

$$\begin{aligned}\Psi(U) &= \Psi(M^0 \cap A^0) = \\ &= \{ f \circ v^{-1} ; f \in M^0 \text{ e } f \in A^0 \}\end{aligned}$$

Pode-se verificar facilmente que $(v(A))^0$ é uma vizi -
nhança da origem em $(E/M)'$ que esta contida em $\Psi(U)$,
basta observar para isto que se $g \in (v(A))^0$ então

$g = (gov)ov^{-1}$ onde $gov \in M^0$ e $gov \in A^0$.

Assim mostramos que ψ é um isomorfismo vetorial topológico de M^0 sobre $(E/M)'$ com as correspondentes topologias fortes.

Seja agora L um limitado em (E/M) , então L^0 é uma vizinhança de 0 em $(E/M)'$. Pelo provado acima, afirmamos que existe $A \subset E$ limitado, que podemos ainda supor Γ -fechado pela observação 1.35. b) tal que

$$(*) \quad \psi(A^0 \cap M^0) \subset L^0$$

obtemos então que

$$v^{-1}(L) \subset (A^0 \cap M^0)^0$$

logo

$$L \subset v(A^{00} \cup M^{00}) = v(A^{00}) \cup v(M^{00})$$

como A e M são Γ -fechados então

$$L \subset v(A) \cup v(M) \subset v(A)$$

podemos portanto afirmar que dado um limitado L de E/M existe um limitado a em E tal que $L \subset v(a)$, logo existe em E/M um sistema fundamental enumerável de limitados $\{v(B_n)\}$ onde $\{B_n\}$ é o sistema fundamental enumerável de limitados de E .

Para mostrar a segunda condição de DF-espaço, seja V_n uma sequência de vizinhanças de 0 em E/M tal que a interseção $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ é um conjunto bornívoro em E/M . A seguinte relação é válida

$$v^{-1}(V) = v^{-1}\left(\bigcap_{n \in N} V_n\right) = \bigcap_{n \in N} v^{-1}(V_n)$$

é evidente que $v^{-1}(V)$ é bornivoro em E , já que se A é limitado em E , $v(A)$ é limitado em E/M . Logo existe $\lambda \in F$ tal que $v(A) \subset \lambda V$ ou seja

$$A \subset v^{-1}(v(A)) \subset \lambda v^{-1}(V)$$

$v^{-1}(V)$ é bornivoro e é a interseção de uma família enumerável de vizinhanças F -convexas de 0 no DF -espaço E e em consequência V é uma vizinhança de 0 em E/M .

4.4 LEMA : Seja E um espaço vetorial topológico com um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de 0 . Então dada uma sequência H_n de limitados, existe $\{\mu_n\}$ sequência limitada em $(F, |\cdot|)$ tal que

$$\bigcup_{n \in N} \mu_n H_n$$

é limitada.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{V_n\}$ sequência fundamental de crescente de vizinhanças de 0 em E . Dado o par (V_n, H_n) existe $\delta_n > 0$ tal que, para todo $\lambda \in F$ tal que $|\lambda| \geq \delta_n$ tem-se $H_n \subset \lambda V_n$.

Para (V_1, H_1) seja $\delta'_1 = \delta_1$, para (V_s, H_s) seja $\delta'_s = \max\{\delta_{s-1}', \delta_s\}$. Obtemos desta forma uma sequência crescente de números $\{\delta'_i\}$ em R . Escolhemos $\lambda_i \in F$ tal que $|\lambda_i| > \delta_i$.

Afirmção : $\bigcup_{i \in N} \lambda_i^{-1} H_i$ é um conjunto li-

mitado em E . Com efeito seja V uma vizinhança de 0 em E , temos que provar que existe 0 tal que para $\alpha \in F$ e $|\alpha| > \delta$ então $\bigcup_{i \in N} \lambda_i^{-1} H_i \subset \alpha V$.

Podemos supor sem perda de generalidade que V é equilibrada. Existe n_0 tal que $V_m \subset V$ para todo $m > n_0$.
 Onde $\lambda_m^{-1} H_m \subset V_m \subset V$ para todo $m > n_0$. Logo

$$(1) \quad \bigcup_{s=n_0}^{\infty} H_s \subset V$$

Por outra parte consideremos $A = \bigcup_{s=1}^{n_0-1} \lambda_s^{-1} H_s$, A é limitado logo existe $\delta > 1$ tal que se $\alpha \in F$ e $|\alpha| > \delta$

$$(2) \quad A = \bigcup_{s=1}^{n_0-1} \lambda_s^{-1} H_s \subset \alpha V$$

como V é equilibrado, de (1) e (2) obtemos que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i^{-1} H_i \subset \alpha V$, para todo $\alpha \in F$, $|\alpha| > \delta$. Fazemos

$\mu_i = \lambda_i^{-1}$ e resulta $\{\mu_i\}$ limitada.

4.5 PROPOSIÇÃO : Seja E um DF-espaco sobre $(F, ||)$ esfericamente completo. Dada $\{V_n\}$ uma sequência de vizinhanças de 0 em E , existe sequência $\{\lambda_n\}$ em F tal que $V = \bigcap \lambda_n V_n$ é uma vizinhança de 0 em E .

DEMONSTRAÇÃO : Podemos supor sem perda de generalidade que V_n é F -convexa para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $H_n = V_n^0$, H_n é equicontínuo, logo fortemente limitado em E' . Como E é um DF-espaco, E' é metrizável (ver proposição 4.2), logo pela proposição 4.4, existe uma sequência limitada $\{\mu_n\}$ em F tal que

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n H_n$$

é limitado em E' . Temos um conjunto H que é união enumerável de conjuntos equicontínuos e que é fortemente limitada. Usando novamente o fato que E é DF -

espaço , obtemos pela Observação 1.39. que H é equi-continuo . Logo H^0 é uma vizinhança de 0 . Considerando as relações seguintes ;

$$H^0 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n H_n \right)^0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^{-1} V_n^0 \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^{-1} \alpha_n V$$

onde $\alpha_n \in F$ e $|\alpha_n| > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos que

se $\lambda_n = \mu_n^{-1} \alpha_n$, então o conjunto

$$V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n V_n$$

é uma vizinhança de 0 em E .

§ 2 Condições para que $C(X;F)$ e $C(X;E)$ sejam DF-espaços.

Nesta seção o espaço topológico X é ultraregular , o espaço vetorial topológico (E, τ_E) é localmente F -convexo e o corpo $(F, |\cdot|)$ tem uma valorização não trivial não arquimedea.

4.6 PROPOSIÇÃO : Sejam $M_1, \dots, M_k$ conjuntos F -convexos de E , sejam U uma vizinhança F -convexa de 0 em E e K um conjunto compacto de X . Então

$$M(K; U + \sum_{m=1}^k M_m) \subset M(K; U) + \sum_{m=1}^k M(X; M_m)$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $f \in M(K; U + \sum_{m=1}^k M(X; M_m))$, consideremos o compacto

$$S = \{x \in K ; p_U(f(x)) \geq 1\} .$$

e consideremos os conjuntos abertos e fechados

$$V_j = \{x \in X ; p_U(f(x) - f(x_j)) < 1 \}$$

onde os x_j são elementos de S . Notamos que V_j é aberto e fechado porque a seminorma $\tilde{e}$ não arquimediana e V_j é imagem inversa por f da bola $B_{p_U}(f(x_j), 1/2)$.

A compacidade de S implica a existencia de $t \in \mathbb{N}$ tal que $S \subset \bigcup_{j=1}^t V_j$, podemos supor que esta união é disjunta

Por outra parte, para cada x_j , $j=1, \dots, t$, existe

$$\sum_{m=1}^k h_j^m \in \sum_{m=1}^k M_m$$

tal que

$$(*) \quad f(x_j) + \sum_{m=1}^k h_j^m \in U$$

Finalmente podemos mostrar que

$$f = f + \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^t \chi_{V_j} \otimes h_j^m = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^t \chi_{V_j} \otimes h_j^m$$

pertence ao conjunto

$$M(K;U) + \sum_{m=1}^k M(X;M_m)$$

para isso basta mostrar que

$$f + \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^t \chi_{V_j} \otimes h_j^m = f - \sum_{j=1}^t \chi_{V_j} \otimes f(x_j) + \sum_{j=1}^t \chi_{V_j} \otimes f(x_j)$$

$$+ \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^t x_{V_j} \otimes h_j^m$$

e que $G_1(K) = (f - \sum_{j=1}^t x_{V_j} \otimes f(x_j))(K)$

e $G_2(K) = (\sum_{j=1}^t x_{V_j} \otimes f(x_j) + \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^t x_{V_j} \otimes h_j^m)(K)$

verificam $G_1(K) \subset U$, $G_2(K) \subset U$.

Seja $x \in K$, se $x \in \cup V_j$ então existe j_0 tal que $x \in V_{j_0}$ logo $G_1(x) = f(x) - f(x_{j_0})$, portanto $p_U(G_1(x)) > 1$ o que significa $G_1(x) \in U$.

Seja $x \in K$, se $x \notin \cup V_j$ então $x \notin S$, logo $G_1(x) = f(x)$ como $x \notin S$, $p_U(f(x)) < 1$ logo $G_1(x) \in U$.

Seja $x \in K$, se $x \in \cup V_j$, existe j_0 tal que $x \in V_{j_0}$ então $G_2(x) = f(x_{j_0}) + \sum_{m=1}^k h_j^m$, logo por (*) tem-se

$G_2(x) \in U$.

Seja $x \in K$, se $x \notin \cup V_j$ $G_2(x) = 0 \in U$.

Concluimos que $f \in M(K; U) + \sum_{j=1}^k M(X; M_m)$.

4.7 PROPOSIÇÃO : Sejam X um espaço topológico fortemente contavelmente compacto. Se $\{B_n\}$ é uma sequência fundamental de limitados em E , então $M(X; B_n)$ é uma sequência fundamental de limitados em $C(X; E)$.

DEMONSTRAÇÃO : É evidente que cada $M(X; B_n)$ é limita-

do . Supomos contrariamente que existe $L \subset C(X;E)$ limitado tal que $L \setminus M(X;B_n) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $f_n \in L \subset M(X;B_n)$ e $x_n \in X$ tal que

$$f_n(x_n) \notin B_n .$$

Consideremos $A = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Pela hipótese sobre X sua aderência $\bar{A}$ é compacta em X .

Afirmamos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\bar{A})$ é limitado .

Com efeito , seja V uma vizinhança de 0 em E , como $L \subset C(X;E)$ é limitado , existe $\delta > 0$ tal que $\lambda \in F$, $|\lambda| > \delta$ implica

$$L \subset \lambda M(\bar{A};V)$$

Donde $\{f(a) ; f \in L \text{ e } a \in \bar{A}\} \subset V$, em particular $\{f_n(a) ; n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \bar{A}\} \subset V$, portanto o conjunto

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\bar{A})$ é limitado em E , e de aqui que existe $j \in \mathbb{N}$

tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\bar{A}) \subset B_j$. Em particular obtemos que

$f_j(\bar{A}) \subset B_j$ e ainda mais obtemos que $f_j(x_j) \in B_j$. Isto

contradiz a eleição dos f_j e x_j , e estabelece a proposição .

4.8 TEOREMA : Sejam X um espaço ultraregular e W -compacto e $(F, | \cdot |)$ um corpo esfericamente completo . Então se E é um DF-espaço , $C(X;E)$ é também um DF-espaço .

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{V_n\}$ uma sequência de vizinhan

ças F -convexas de 0 em $C(X;E)$. Seja $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Temos que mostrar que se V é bornívoro, então V é uma vizinhança de 0 em $C(X;E)$. A prova é por recorrência. Constroem-se sequências $\{\lambda_i\}$, $\{U_i\}$, $\{K_i\}$ de escalares de F , vizinhanças de 0 em E e compactos em X , respectivamente, com as propriedades seguintes

$$(1) \quad M(X; \lambda_i B_i) \subset V \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}$$

$$(2) \quad M(K_i, U_i) \subset V_i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad \lambda_j B_j \subset U_i \quad \text{para todo } i, j \text{ em } \mathbb{N}$$

cada B_i pertence a uma família fundamental de limitados de E que é enumerável, esta família existe já que E é um DF -espaço. Vamos supor que cada B_i é F -convexo e fechado.

Supomos que existe λ_i , U_i , K_i para $i = 1, \dots, n$, com as propriedades (1), (2), (3). Como B_{n+1} é limitado em E , existe $\lambda_{n+1} \in F$ tal que

$$a) \quad \lambda_{n+1} B_{n+1} \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$$

$$b) \quad M(X; \lambda_{n+1} B_{n+1}) \subset V$$

a existência de λ_{n+1} para o caso a) é garantida já que a interseção finita dos U_i é uma vizinhança de 0 em E , para o caso b) a hipótese que V é bornívoro garante a existência do λ_{n+1} .

Já que V_{n+1} é uma vizinhança de 0 em $C(X;E)$, existe K_{n+1} compacto de X e W_{n+1} vizinhança de 0 em E tal que

$$c) M(K_{n+1}; W_{n+1}) \subset V_{n+1} .$$

Construimos o conjunto $U_{n+1} = W_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i B_i$, U_{n+1}

é uma vizinhança de 0 F-convex e satisfaz

$$\lambda_j B_j \subset U_{n+1}$$

para todo $j = 1, \dots, n, n+1$. Por a) obtemos que $\lambda_{n+1} B_{n+1} \subset U_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo tem-se que $\lambda_j B_j \subset U_i$ para todo $i, j = 1, \dots, n+1$.

Então existem λ_{n+1} , U_{n+1} , K_{n+1} , que verificam as propriedades (1) e (3), falta mostrar que $M(K_{n+1}; U_{n+1}) \subset V_{n+1}$, o que estabeleceria (2)

$$\text{Como } \bigcap_{i \in N} V_i = V \subset V_{n+1} \text{ e como}$$

$M(X; \lambda_i B_i) \subset V$ para todo $i = 1, \dots, n+1$. Então , já que V_{n+1} é F-convexa

$$d) \sum_{i=1}^{n+1} M(X; \lambda_i B_i) \subset V_{n+1} .$$

Por c) e d) resulta

$$M(K_{n+1}; W_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1} M(X; \lambda_i B_i) \subset V_{n+1}$$

usando a proposição 4.6. resulta que

$$M(K_{n+1}; W_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} M(X; \lambda_i B_i)) \subset V_{n+1}$$

ou seja

$$M(K_{n+1}; U_{n+1}) \subset V_{n+1}$$

Logo $\{\lambda_i\}$, $\{U_i\}$, $\{K_i\}$ existem e verificam as propriedades (1), (2), (3).

Resulta da propriedade (3) que a sequência de vizinhanças F -convexas e fechadas $\{U_n\}$ tem interseção bornívora em E . Se chamamos $U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, então U é uma vizinhança de 0 no DF -espaço E .

Como X é W -compacto, existe K subconjunto compacto de X tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset K$. Pela propriedade (2) obtemos

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M(K; U_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M(K_n; U_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = V$$

Donde

$$M(K; U) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M(K; U_n) \subset V.$$

Logo V é uma vizinhança de 0 em $C(X; E)$.

A primeira parte da definição de DF -espaço é verificada neste caso já que existe uma sequência fundamental de limitados $\{B_n\}$ em E e pela proposição 4.7. a sequência $\{M(X; B_n)\}$ é uma família fundamental e numerável de limitados em $C(X; E)$.

4.9 TEOREMA : Seja $(F, | \cdot |)$ um corpo esfericamente completo. Então, $C(X; F)$ é um DF -espaço se e somente se, X é W -compacto.

DEMONSTRAÇÃO : Se X é W -compacto, como $(F, | \cdot |)$ é um DF -espaço, pelo teorema 4.8 resulta que $C(X; F)$ é um DF -espaço.

Reciprocamente, suponhamos que $C(X;F)$ é um DF-espço. Seja $\{K_n\}$ uma seqüência de subconjuntos compactos de X , devemos provar que existe $K \subset X$, compacto tal que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset K,$$

Formamos as vizinhanças de 0 em $C(X;F)$

$$M(K_n; B_1)$$

onde $B_\delta = \{\lambda \in F; |\lambda| < \delta\}$. Pela proposição 4.5. existe uma seqüência $\{\lambda_n\}$ em F tal que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n M(K_n; B_1)$$

é uma vizinhança de 0 em $C(X;F)$. Logo existe K subconjunto compacto de X tal que

$$(*) \quad M(K; B_\delta) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n M(K_n; B_1).$$

Afirmção : $K_n \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos contrariamente, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_{n_0} \not\subset K$. Então existe $x \in K_{n_0}$, $x \notin K$ e existe $f \in C(X;F)$ tal que

$$f(x) = 1 \quad \text{e} \quad f(K) = \{0\}$$

considerando $\gamma \in F$ tal que $|\gamma| > |\lambda_{n_0}|$, obtemos que $\gamma f \in M(K; B_\delta)$ já que $f(K) = \{0\} \subset B_\delta$.

Por outro lado $\gamma f \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n M(K_n; B_1)$, já que $\gamma f(x) = \gamma$ e $|\gamma| > |\lambda_{n_0}|$, o que contradiz (*).

Na proposição 4.3. mostramos que o quociente separado de um DF-espço é um DF-espço. No capítulo 2, teoremas 2.1 e 2.2 mostramos que $C(X;F)$

e E , podem ser considerados como subespaços fechados complementados de $C(X;E)$. Com estes elementos e com os teoremas 4.8 e 4.9., temos demonstrado o seguinte :

4.10 COROLARIO : Seja X um espaço topológico, $(F;| |)$ um corpo esfericamente completo, então $C(X;F)$ e E são DF-espaços se, e somente se, $C(X;E)$ é um DF-espaço.

CAPÍTULO 5

ESPAÇOS REFLEXIVOS , DE SCHWARTZ e DE MONTEL.

§ 1 Propriedades dos espaços de Schwartz e quase-normados .

Nesta seção $(F, | \cdot |)$ é um corpo não trivialmente valorizado , não arquimedeano e (E, τ_E) é um espaço vetorial topológico .

As definições apresentadas a continuação, são uma adaptação direta das definições apresentadas por Grothendieck [8] , ao caso não arquimedeano .

5.1 DEFINIÇÃO : Seja V um subconjunto de E , V é dito totalmente limitado relativamente a um subconjunto U de E se : dado $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, existe $x_1, \dots, x_n$ em E tal que

$$V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + \lambda U)$$

5.2 DEFINIÇÃO : Um espaço localmente F -convexo é chamado espaço de Schwartz se dada U uma vizinhança F -convexa de zero , existe uma vizinhança F -convexa de zero V que é totalmente limitada relativamente a U .

5.3 DEFINIÇÃO : Um subconjunto A de E , é dito totalmente limitado se é totalmente limitado relativamente a todas as vizinhanças de zero do espaço E .

5.4 OBSERVAÇÃO : Todo corpo local é um espaço de

Schwartz , já que existe uma vizinhança compacta de 0 que é totalmente limitada relativamente a qualquer outra vizinhança de 0 do corpo .

5.5 PROPOSIÇÃO : Seja $\{E_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços
de Schwartz e $E = \prod_{i \in I} E_i$, então E é também um espa-
ço de Schwartz .

DEMONSTRAÇÃO : Seja U uma vizinhança de 0 F -convexa em E , e seja $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$. Supomos sem perda de generalidade que

$$U = \prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i$$

onde J é um subconjunto finito de I e cada U_i , $i \in J$ é uma vizinhança F -convexa de 0 em E_i . Como E_i é um espaço de Schwartz , para cada $i \in J$, existe V_i vizinhança F -convexa de 0 em E_i tal que

$$(*) \quad V_i \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} (x_j^i + \lambda U_i)$$

Consideremos

$$V = \prod_{i \in J} V_i \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i$$

pela inclusão $(*)$ temos que

$$V \subset \prod_{i \in J} \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} (x_j^i + \lambda U_i) \right) \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i$$

por outra parte vemos claramente que

$$\prod_{i \in J} \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} (x_j^i + \lambda U_i) \right) \subset \bigcup_{s=1}^t \left(\alpha_s + \lambda \prod_{i \in J} U_i \right)$$

onde $\alpha_s \in \prod_{i \in J} \left(\bigcup_{j=1}^{m_j} x_j^i \right)$ e $t = \prod_{i \in J} m_i$

logo

$$V \subset \left(\bigcup_{s=1}^t \alpha_s + \lambda \prod_{i \in J} U_i \right) \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i$$

finalmente fazendo $\bar{\alpha}_s = (\alpha_s, 0)$

$$V \subset \bigcup_{s=1}^t \left(\bar{\alpha}_s + \lambda \left(\prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i \right) \right)$$

e portanto V é totalmente limitada relativa a U .

5.6 PROPOSIÇÃO : Todo subespaço de um espaço de Schwartz é um espaço de Schwartz.

DEMONSTRAÇÃO : Seja S subespaço de E , E espaço de Schwartz. Seja U uma vizinhança F -convexa de 0 em S então existe M vizinhança da origem em E tal que $U = M \cap S$, e existe N vizinhança da origem em E tal que N é totalmente limitada relativamente a M .

Afirmamos que $V = N \cap S$ é uma vizinhança de 0 em S , totalmente limitada relativamente a U .
Seja $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, então existe $x_1, \dots, x_n$ em E tal que $N \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + \lambda M)$. Consideremos

$$J = \{ i ; S \cap (x_i + \lambda M) \neq \emptyset \}$$

Para $i \in J$, seja $s_i \in S \cap (x_i + \lambda M)$, então se $v \in V$, $v = x_i + m$ e $v \in S$. De outra forma podemos anotar $v = s_i + x_i - s_i + m$, como M é F -convexo resulta $v = s_i + m'$. Logo $v - s_i \in \lambda M$ e $v - s_i \in S$, então $v \in (s_i + \lambda M \cap S)$.

5.7 PROPOSIÇÃO : Todo subconjunto limitado de um espaço

de Schwartz E , $\tilde{E}$ é totalmente limitado.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $A \subset E$ limitado e seja U uma vizinhança F -convexa da origem em E . Dado $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, temos que para λU existe uma vizinhança V da origem em E tal que dado $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, existe $g_1, \dots, g_n$ em E que verificam

$$(*) \quad V \subset \bigcup_{j=1}^n (g_j + \alpha(\lambda U))$$

Por outra parte $A \subset E$ é limitado. Logo para $\gamma \in F$ ($|\gamma|$ maior que um certo $\delta > 0$), tem-se

$$A \subset \gamma V$$

Fazendo $\alpha = \gamma^{-1}$ em $(*)$ resulta

$$\gamma V \subset \bigcup_{j=1}^n (\gamma g_j + \lambda U)$$

se $e_j = \gamma g_j$ resulta

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n (e_j + \lambda U)$$

logo $A \subset \tilde{E}$ é totalmente limitado em E .

5.8 DEFINIÇÃO : Seja (E, τ_E) um espaço localmente F -convexo. (E, τ_E) é chamado quase normado se para toda vizinhança U de zero em E , existe V vizinhança de zero em E tal que : dado $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, existe B_λ limitado em E que verifica

$$V \subset B_\lambda + U.$$

5.9 EXEMPLO : Todo espaço de Schwartz é quase normado.

5.10 PROPOSIÇÃO : Se E é quase normado e $M \subseteq E$ é um subespaço de E , então E/M é quase normado.

DEMONSTRAÇÃO : Seja U uma vizinhança de 0 no espaço quociente E/M então $U = v(S)$ onde S é uma vizinhança de 0 em E e v é a aplicação canônica de E sobre E/M . Para S existe T vizinhança de 0 em E tal que se $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ existe B_λ limitado em E tal que

$$T \subset B_\lambda + S$$

logo em E/M temos

$$v(T) \subset v(B_\lambda) + v(S)$$

portanto como $v(B_\lambda)$ é limitado em E/M , resulta o espaço E/M ser quase normado.

§ 2 Condições para que $C(X;F)$ e $C(X;E)$ sejam espaços de Schwartz ou quase normados.

Nesta seção supomos que X é um espaço topológico ultraregular, $(F, |\cdot|)$ é um corpo não trivialmente valorizado não arquimedeano, e $(E; \tau_E)$ um espaço localmente F -convexo, Hausdorff.

5.11 TEOREMA : Dadas as seguintes proposições

- a) $C(X;F)$ é um espaço de Schwartz.
- b) Todo subconjunto limitado de $C(X;F)$ é totalmente limitado.

c) Todo subconjunto compacto de X é finito .

d) A topologia induzida por F^X e a topologia compacto aberta coincidem em $C(X;F)$.

tem-se que 1º) a) implica b) , 2º) b) implica c) , 3º) c) implica d) , 4º) Se o corpo $(F, | \cdot |)$ for local d) implica a) .

DEMONSTRAÇÃO : 1º) segue da proposição 5.7.

2º) Seja K um subconjunto compacto e infinito de X . Denotamos por B_1 o conjunto

$$B_1 = \{ \alpha \in F ; |\alpha| \leq 1 \}$$

e por V_1 o conjunto

$$V_1 = \{ \alpha \in F ; |\alpha| < 1 \}$$

Então o conjunto limitado $M(X;B_1) = \{ f \in C(X;F) ; f(x) \leq 1 \}$ para todo $x \in X$ é totalmente limitado relativamente à vizinhança $M(K;V_1)$ de 0 em $C(X;F)$. Portanto existem $\{ f_i \}$, $i = 1, \dots, n$, em $C(X;F)$ tal que

$$M(X;B_1) \subset \bigcup_{i=1}^n (f_i + M(K;V_1)) .$$

Escolhendo $k_1, \dots, k_n$, n pontos diferentes de K , temos que para cada i , existe uma função $g_i \in C(X;F)$ tal que

$$|g_i(x)| < 1 \quad \text{para todo } x \in X$$

$$g_i(k_j) = \delta_{ij} \quad \text{para todo } i, j = 1, \dots, n .$$

Fazemos $\Psi = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ onde os a_i são elementos de F

que verificam as condições seguintes

$$|a_i| = 1 \quad \text{se} \quad |f_i(k_i)| < 1$$

$$a_i = 0 \quad \text{se} \quad |f_i(k_i)| \geq 1$$

Afirmção $\Psi \notin M(X; B_1)$.

Com efeito, para cada $i = 1, \dots, n$, temos que

$$\begin{aligned} |(\Psi - f_i)(k_i)| &= \left| \sum_{j=1}^n a_j g_j(k_i) - f_i(k_i) \right| = \\ &= |a_i - f_i(k_i)| \\ &= \max\{|a_i|, |f_i(k_i)|\} \geq 1 \end{aligned}$$

Logo $(\Psi - f_i) \notin M(K; V_1)$ para todo $i = 1, \dots, n$, (a última equivalência tem-se pela definição dos a_i e pela observação 1.1. b)).

Por outra parte, pela eleição das funções g_i e como B_1 é um conjunto F -convexo, tem-se que $\sum a_i g_i(x) \in B_1$, para todo $x \in X$. Esta contradição prova que K deve ser finito.

39) A topologia de $C(X; F)$ é a compacto aberta. Se todo compacto de X é finito, então a topologia da convergência simples e a topologia compacto aberta coincidem, (F^X tem a topologia da convergência simples).

49) Pela observação 5.4 se F é local então F é um espaço de Schwartz e pela proposição 5.5. o produto F^X é também um espaço de Schwartz donde o espaço $C(X; F)$ resulta ser de Schwartz.

5.12 OBSERVAÇÃO : Na demonstração de 39) do teorema

anterior, foi provado que se todo compacto de X é finito, então a topologia simples e a topologia compacto aberta coincidem em $C(X;F)$. Podemos também concluir que a topologia fraca $\sigma(C(X;F), C(X;F)')$ coincide com as anteriores. Com efeito seja $M(S;V)$ uma vizinhança de 0 na topologia simples, isto é $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ e V é uma vizinhança de 0 em F . Mas se considerarmos $U = \bigcap_{i=1}^n \delta_{x_i}^{-1}(V)$, onde δ_{x_i} é a função avaliação resulta que U é uma vizinhança de 0 em $\sigma(C(X;F), C(X;F)')$ tal que $U \subset M(S;V)$.

5.13 TEOREMA : Se (E, τ_E) é quase normado, então o espaço $C(X;E)$ é quase normado.

DEMONSTRAÇÃO : Seja W uma vizinhança de 0 em E , e seja $M(K;U) \subset W$ onde $K \subset X$ é compacto e U é uma vizinhança de 0 em E que é F -convexa. Como E é quase normado existe V vizinhança de 0 em E tal que para todo $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, existe B_λ limitado em E tal que

$$V \subset B_\lambda + \lambda U$$

por tanto no espaço $C(X;E)$ temos a relação

$$M(K;V) \subset M(K; \lambda U + B_\lambda) \subset \lambda M(K;U) + M(X;B_\lambda)$$

a última inclusão é consequência da proposição 4.6. Logo dado W existe a vizinhança $M(K;V)$ com as propriedades requeridas.

5.14 COROLARIO : Dado qualquer espaço ultraregular X $C(X;F)$ é sempre quase normado.

Pelas proposições 2.1 e 2.2., $C(X;F)$ e E são subespaços complementados de $C(X;E)$ e portanto isomorfos a quocientes separados de $C(X;E)$. Logo pela proposição 5.10. e pelo teorema anterior podemos enunciar o seguinte teorema :

5.14 TEOREMA : Os espaços $C(X;F)$ e E são quase normados se, e somente se, $C(X;E)$ é quase normado.

§ 3 Completeness de $C(X;F)$

Durante toda esta seção X é um espaço ultraregular, $(F, | \cdot |)$ é um corpo não trivialmente valorizado esfericamente completo.

No caso que $(F, | \cdot |)$ é um corpo local, Ellis [6], provô um análogo do teorema de extensão de Tietze para um espaço ultraregular.

Observamos que da prova do teorema de Ellis-Tietze, pôde-se deduzir que uma função f definida e continua num subconjunto K compacto de um espaço ultraregular X , tem uma extensão a todo o espaço X que resulta ser limitada pela mesma constante que limita f em K .

5.15 NOTAÇÃO : O conjunto $\mathcal{C}(X;F)$ denota o espaço das funções definidas em X com valores em F , com a topologia da convergência uniforme sobre os compactos de X .

5.16 OBSERVAÇÃO : Quando $(F, | \cdot |)$ é um corpo local não

trivial, $(F; | \cdot |)$ é completo, donde resulta que o espaço $\mathcal{C}(X; F)$ é completo (Bourbaki [4], Chap. X, § I, 5, th .1).

5.17 DEFINIÇÃO : Um espaço vetorial topológico é dito quase completo se todo subconjunto fechado e limitado é completo .

5.18 TEOREMA : Se $(F, | \cdot |)$ é um corpo local não trivial, as proposições seguintes são equivalentes

- a) $\mathcal{C}(X; F)$ é completo .
- b) $\mathcal{C}(X; F)$ é quase completo.
- c) Toda função $f \in \mathcal{C}(X; F)$, cujas restrições a cada compacto de X são contínuas, é um elemento de $\mathcal{C}(X; F)$.

DEMONSTRAÇÃO : 1º) a) implica b) segue da definição .

2º) Para mostrar b) implica c), vamos a considerar primeiro o caso em que f é uma função limitada. Denotaremos por f_K a restrição de f ao compacto K .

Supomos que f_K pertence a $\mathcal{C}(K; F)$, pela observação concernente ao teorema de Ellis-Tietze, existe $\tilde{f}_K$ em $\mathcal{C}(X; F)$, extensão de f_K tal que

$$\sup_X |\tilde{f}_K(x)| < \sup_X |f(x)|$$

Consideremos $\mathcal{K}$ o conjunto dos compactos de X e consideremos a rede trivial formada em $\mathcal{K}$, denotamos por $\mathcal{D}$ o filtro gerado pela rede. Seja α uma função definida em $\mathcal{K}$ tal que $\alpha(K) = \tilde{f}_K$. Seja

A o conjunto seguinte

$$A = \{ h \in C(X; F) \ ; \ \sup_X |h(x)| \leq \sup_X |f(x)| \}.$$

Resulta do anterior que $\alpha(D)$ é uma base de filtro em $C(X; F)$ e em A . Afirmamos que o filtro gerado é convergente a f em $\mathcal{G}(X; F)$. Com efeito, seja $M(K; U) + f$ uma vizinhança de f em $\mathcal{G}(X; F)$, então o conjunto $B_H = \{ \tilde{f}_S \ ; \ H \subset S, S \text{ compacto} \}$, pertence a $\alpha(D)$ e esta contido em $M(H; U) + f$, já que dado $\tilde{f}_S \in B_H$, tem-se que $\tilde{f}_S = \tilde{f}_S - f + f$, e como $H \subset S$ segue que $\tilde{f}_S - f = 0$ em H . Logo $\alpha(D)$ é convergente a f em $\mathcal{G}(X; F)$. O conjunto A é fechado e limitado em $C(X; F)$ logo é completo em $C(X; F)$, portanto A é fechado em $\mathcal{G}(X; F)$, resulta então que $f \in A \subset C(X; F)$.

Para o caso geral, supomos que f é um elemento de $\mathcal{G}(X; F)$ cujas restrições aos compactos de X são contínuas. Seja $(\alpha_n)_n$ uma sequência em F com valores absolutos estritamente crescente. Consideramos as funções f_n definidas por

$$f_n(x) = f(x) \quad \text{se } |f_n(x)| < \alpha_n$$

$$f_n(x) = \alpha_n \quad \text{se } |f_n(x)| > \alpha_n$$

cada f_n é uma função limitada cujas restrições aos conjuntos compactos de X são contínuas. A continuidade das restrições a cada compacto K de X segue do fato que

$$f^{-1}(B(0, |\alpha_n|) \cap K) \text{ e } f^{-1}(B(0, |\alpha_n|)^c \cap K)$$

são conjuntos abertos e fechados de K .

Pode-se concluir que $f_n \in C(X;F)$.

Por outra parte como $\lim_n f_n = f$ em $\mathcal{G}(X;F)$ e como o fecho da sequência f_n é completo em $C(X;F)$ e portanto fechado em $\mathcal{G}(X;F)$, resulta que $f \in C(X;F)$.

39) c) implica a) Ver Bourbaki ([4] Chap.X ,§1.5) .

§ 4 Espaços reflexivos e de Montel .

Nesta seção consideramos X ultraregular , (E, τ_E) espaço localmente F -convexo T_1 , $(F; | \cdot |)$ corpo esfericamente completo .

5.19 PROPOSIÇÃO : Se $\{ E_i \}_{i \in I}$ é uma família de espaços semi-c-Montel , então o produto cartesiano $E = \prod_{i \in I} E_i$ é um espaço semi-c-Montel .

DEMONSTRAÇÃO : Seja $A \subset E$ um conjunto limitado F -convexo , existe em cada E_i , conjuntos limitados A_i tais que $A \subset \prod_{i \in I} A_i$, podemos supor sem perda de generalidade que A_i é F -convexo . Como E_i é um espaço semi-c-Montel , cada A_i é relativamente c -compacto em E_i . Por um teorema de T.A.Springer [21] (Th,1.17) o produto $\prod_{i \in I} A_i$ é relativamente c -compacto, e como $A \subset \prod_{i \in I} A_i$, A é relativamente c -compacto .

5.20 OBSERVAÇÃO : a) Todo espaço reflexivo $\tilde{E}$ F -tonelado . (Van Tiel [22] ,Th,4.27.).

b) Todo espaço de Montel $\tilde{E}$ reflexivo.
(Van Tiel [22] , Th, 4.28. Cor. 1 .) .

c) Todo espaço c -Montel $\tilde{E}$ reflexivo.
(Van Tiel [22] , Th, 4.28. Cor. 1.) .

d) Todo espaço reflexivo $\tilde{E}$ c -Montel.
(De Grande-De Kimpe [5] p. 178 .) .

e) Todo espaço semi- c -Montel $\tilde{E}$ semi-reflexivo . (Van Tiel [22] Th. 4.26.) .

5.21 TEOREMA : Considerar as seguintes proposições

a) $C(X;F)$ é um espaço c -Montel.

b) $C(X;F)$ é um espaço reflexivo.

c) $C(X;F)$ é um espaço de Montel.

d) $C(X;F)$ é um espaço semi Montel.

e) $C(X;F)$ é um espaço semi- c -Montel.

f) $C(X;F)$ é um espaço semi reflexivo.

g) $C(X;F)$ é exatamente o espaço F^X .

então , a) implica b) , c) implica d) , d) implica e) , e) implica f) , g) implica a) . Se F é um corpo local então todas as proposições são equivalentes .

DEMONSTRAÇÃO : 1º) a) implica b) segue da observação 5.20. c) .

2º) Se $(F, | |)$ é um corpo local, N De Grande-De Kimpe ([5] p. 178) mostrou que todo espaço reflexivo é um espaço de Montel , logo temos a) implica b) , neste caso .

3º) c) implica d) e d) implica e) seguem diretamente das definições .

4º) e) implica f) segue da observação 5.20. e) .

5º) Supomos que $(F; | |)$ é um corpo local e que $C(X;F)$ é um espaço semireflexivo . Vamos provar que todo conjunto compacto K de X é finito.

Suponhamos contrariamente que K é compacto e infinito ; escolhemos uma sequência (k_i) de pontos diferentes de K , chamamos k o ponto aderente de (k_i) em K , supomos sem perda de generalidade que $k \neq k_i$ para cada i .

Como X é ultraregular, podemos construir uma sequência (f_n) de funções em $C(X;F)$ que cumprem

$$i) f_n(k_i) = 1 \quad \text{se } i \leq n$$

$$ii) f_n(k) = 0$$

$$iii) |f_n(x)| < 1 \quad \text{para todo } x \in X$$

da propriedade iii), segue que $\{f_n\}$ é um conjunto li

motado . Pela semireflexividade de $C(X;F)$ existe f , ponto aderente de f_n em $C(X;F)$ (Van Tiel [22] Th. 4.25. 2º .). Claramente se ve que f é também um ponto -aderente dos conjuntos $\{f_n ; n \geq m\}$, para qualquer m Temos então que dado δ positivo , existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ tal que

$$|f(k_m) - f_n(k_n)| < \delta .$$

de aqui necessariamente resulta que $|f(k_m)| = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Da mesma forma podemos obter que $f(k) = 0$. Como f é uma função continua e k é um ponto aderente de k_i , a contradição resultante nos indica que K é um conjunto finito.

Pela observação 5.12. , $C(X;F)$ tem a topologia fraca $\sigma(C(X;F), C(X;F)')$, logo $C(X;F)$ é quase completo , ja que todo limitado fechado é fracamente compacto, donde compacto em $C(X;F)$. Pelo teorema 5.18. toda função $f \in \mathcal{C}(X;F)$ cuja restrição aos compactos de X é continua é um elemento de $C(X;F)$, como os compactos de X são finitos tem-se que toda $f \in \mathcal{C}(X;F)$ pertence a $C(X;F)$.

6º) g) implica a) . Como todo corpo valorizado esfericamente completo é um espaço c -Montel (Van Tiel [22], p 271) , e como X resulta ter a topologia discreta então $C(X;F) = F^X$. Segue da proposição 5.19 e do corolario 2.16 , que $C(X;F)$ é um espaço c -Montel .

5.22 PROPOSIÇÃO : Se $(E_i)_{i \in I}$ é uma família de espaços localmente F -convexos semi reflexivos , então o produto cartesiano $E = \prod_{i \in I} E_i$ é um espaço localmente F -convexo semi reflexivo .

DEMONSTRAÇÃO : Seja A um subconjunto de E , F -convexo, fracamente limitado e fracamente fechado, então existe $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos fracamente limitados e fechados, que podemos supor que são F -convexos, tal que $A_i \subset E_i$ e $A \subset \prod_{i \in I} A_i$, segue de Van Tiel ([22] Th. 4.25.), que cada A_i é fracamente c -compacto e segue de T.A.Springer ([21], 1.17.), que o produto $\prod_{i \in I} A_i$ é fracamente c -compacto e como consequência de Van Tiel ([22], 4.26), resulta que E é semi reflexivo.

5.23 OBSERVAÇÃO : O produto de espaços de Montel é um espaço de Montel. A demonstração segue a mesma direção da prova da proposição 5.19., sobre o produto de espaços semi- c -Montel, e usa o resultado do corolário 2.16.

Temos mostrado que o produto de espaços reflexivos, semi reflexivos, Montel, semi Montel, c -Montel e semi- c -Montel, é novamente um espaço do mesmo tipo.

Do teorema 5.21. resulta que se $C(X;F)$ tem alguma das propriedades acima mencionadas e se o corpo é local, então X tem a topologia discreta e portanto $C(X;E) = E^X$ para todo espaço localmente F -convexo E . Podemos então enunciar o seguinte teorema:

5.24 TEOREMA : Se $(F, | |)$ é um corpo local e se os espaços $C(X;F)$ e E são ambos espaços localmente F -convexos reflexivos (respectivamente semi reflexivos, Montel, semi Montel, c -Montel, semi- c -Montel), então $C(X;E)$ é reflexivo (respectivamente semi reflexivo, Montel, semi Montel, c -Montel, semi- c -Montel).

No capítulo 2 , § 3 .provamos que se $C(X;E)$ é F -tonelado , então $C(X;F)$ e E são F -tonelados .

Facilmente se prova que se M é um sub espaço fechado de um espaço S semi reflexivo (respectivamente semi Montel , semi-c-Montel), então M é semi reflexivo (respectivamente semi Montel , semi-c-Montel) .

Destas observações concluímos que o recíproco do teorema 5.24. é verificado.Podemos enunciar:

5.25 TEOREMA : Se $(F, | |)$ é um corpo local, então $C(X;F)$ e E são reflexivos (respectivamente semi reflexivo , Montel , semi Montel , c-Montel , semi-c-Montel) se, e somente se , $C(X;E)$ é reflexivo (respectivamente semi reflexivo , Montel , semi Montel , c-Montel , semi-c-Montel) .

B I B L I O G R A F I A

- [1] G.Bachman,E.Beckenstein and L.Narici, Function algebras over valued fields , Pac.J.Math., 44 (1973), 45-57 .
- [2] G.Bachman,E.Beckenstein and L.Narici, Function algebras over valued fields and measures , I,II , Atti Acad.Naz. Lincei Rend.Cl.Sci.Fis.Mat.Nat.,51 (1971) , 293-300 ,52 (1972) , 120-125 .
- [3] G.Bachman,E.Beckenstein,L.Narici and S.Warner, Rings of continuous function with values in a topological field, Trans. Amer. Math. Soc. 204 (1975) , 91-112 .
- [4] N.Bourbaki, General Topology Chap. X , Addison-Wesley. Pub.Co.
- [5] N.De Grande-De Kimpe, c-compactness in locally K-convex spaces , Indag. Math. 33 (1971) , 176-180 .
- [6] R.Ellis, A non-archimedean analogue of the Tietze-Urysohn extension theorem , Indag. Math. 29 (1967) , 332-333 .
- [7] W.Govaerts, Bornological spaces of non-archimedean valued functions with the compact-open topology , Proc. A.M.S. 78 (1980) , 132-134 .
- [8] A.Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF) , Summa Brasiliensis Math. , 3 (1954) Fasc. 6 , 57-122 .
- [9] R.Hollstein, Permanence properties of $C(X;E)$, (por a-

parecer) .

- [10] A.Ingleton, The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields , Proc. Cambridge Phil. Society, 48 (1952) 41-45 .
- [11] J.Mendoza, Algunas propiedades de $C_c(X;E)$. (por aparecer) .
- [12] A.Monna, Espaces localement convexes sus un corps valué, Indag. Math. 21 (1959) , 391-405.
- [13] A.Monna, Espaces vectoriels topologiques sur un corps value, Indag. Math. 24 (1962) , 351-367 .
- [14] J.Mujica, Spaces of continuous functions with values in an inductive limit , Functional Analysis, Holomorphy and Approx. Theory (G.Zapata,ed) Marcel Dekher. New York. (por aparecer) .
- [15] L.Nachbin, Topological vector spaces of continuous functions , Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. , 40 (1954), 471-474 .
- [16] L.Narici, E.Beckenstein and G.Bachman , Functional analysis and valuation theory , Marcel Dekher. Inc. New York 1971 .
- [17] J.B.Prolla, Topics in functional analysis over valued division rings, North Holland Publ. Co. Amsterdam (por aparecer) .
- [18] J.Schmets, An example of the barrelled spaces associated to $C(X;E)$,(por aparecer).

- [19] J.Schmets, Bornological and ultrabornological $C(X;E)$ spaces , Manuscripta Math., 21 (1977) , 117-133 .
- [20] I.Shirota, On locally convex vector spaces of continuous function , Proc.Japan Acad. 30 (1954) , 294-298 .
- [21] I.A.Springer, Une notion de compacité dans la théorie des espaces vectoriels topologiques , Indag. Math. 27 (1965) , 182-189 .
- [22] J.Van Tiel, Espaces localement K-convexes, I,II,III, Indag.Math. 27 (1965) , 249-289 .
- [23] S.Warner, The topology of compact convergence on continuous function spaces , Duke Math. J. 25 (1958) , 265-282 .