O ESTUDO DOS RELACIONAMENTOS ENTRE OS VÁRIOS MÉTODOS PARA RESOLVER OS PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE RAÍZES DE UM POLINÔMIO.

ANAMARIA GOMIDE TAUBE

ORIENTADOR

Prof. Dr. Biswa Nath Datta.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Fundação de mparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (F.A.P.E.S.P.)

fevereiro de 1978.

A meus pais, Otto e Gustavo

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Biswa Nath Datta pela proposta e orientação do presente trabalho.

Aos meus pais, Otto, professores e colegas por seus estímulos, ensinamentos e discussões.

Ao Prof. José Vitório Zago pela cuidadosa revisão final.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - F.A.P.E.S.P. - que, com seu apoio financeiro, tornou possível a realização deste trabalho.

O ESTUDO DOS RELACIONAMENTOS ENTRE OS VÁRIOS MÉTODOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE RAÍZES DE UM POLINÔMIO

INTRODUÇÃO

Seja

$$\sum_{j=0}^{n} a_j D^j u(t) = v(t), \quad \ldots \qquad (1)$$

onde D^j denota $\dfrac{d^j}{dt^j}$, uma equação diferencial com coeficientes constantes. Essa equação é dita estável assintoticamente se o erro de $u(t)$, $\bar{u}(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$.

O conceito de estabilidade é um conceito muito importante na teoria matemática de controle.

Podemos provar que a equação (1) é estável assintoticamente se, e somente se as partes reais de todos os zeros do polinômio característico associado.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

são negativas.

Por outro lado, muitas vezes, procuramos na prática aproximar a equação diferencial (1) por uma equação de diferença e podemos mostrar que essa equação de diferença é assintoticamente estável (no sentido da definição acima) se, e somente se, todas as raízes do polinômio característico associado estão dentro do círculo unitário.

De fato, esses dois problemas são casos especiais de dois problemas antigos de matemática: o de Routh-Hurwitz e o de Schur-Cohn.

No primeiro devemos encontrar o número de zeros de um polinômio dado nos semi-planos direito e esquerdo, e o segundo é um problema relacionado com a localização de zeros de um polinômio dentro e fora do círculo unitário.

Existem vários métodos diferentes para a resolução desses problemas. Alguns são bem conhecidos na literatura: o método de solução através de formas quadráticas (como o método antigo de Fujiwara); a técnica de equações matriciais (discutidas por Taussky, Wimmer, Chen, Ostrowski e Schneider, Carlson e Schneider e outros); o método de Barnett e Datta usando uma certa matriz polinomial; o método das matrizes de Hankel dos parâmetros de Markov obtido recentemente por Datta.

Uma pergunta natural é: todos esses métodos são realmente independentes? Para responder essa questão, fazemos nessa tese um estudo sobre os relacionamentos entre os métodos mencionados acima.

Os resultados são de importância fundamental no sentido de que eles nos dão uma base racional para escolher uma ou outra avaliação para estes problemas de ponto de vista do cálculo automático.

CAPÍTULO I

ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS SOBRE TEORIA DE MATRIZES

Neste capítulo apresentamos um resumo de alguns resultados sobre a teoria de matrizes necessários para uma boa compreensão dos assuntos desenvolvidos nos capítulos subsequentes.

1.1 - MENOR DE UMA MATRIZ E O TEOREMA DE CAUCHY-BINET

DEFINIÇÃO 1.1

O determinante da matriz obtida pela intersecção das linhas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ e colunas $j_1, j_2, \ldots, j_k$ onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ é um menor, da matriz A, de ordem k

Notação: $$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix}$$

Se $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \ldots, i_k = j_k$ o menor é chamado menor principal.

Se $i_1 = j_1 = 1$, $i_2 = j_2 = 2, \ldots, i_k = j_k = k$ nós temos os chamados menores principais líderes.

Um interessante resultado sobre o menor do produto de matrizes é dado no Teorema de Cauchy-Binet.

TEOREMA 1.1 (Cauchy-Binet [14 - vol. I])

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz $m\times n$ e $B = (b_{ij})_{n\times q}$ uma matriz $n\times q$ e $C = A \cdot B$ o produto de A e B então:

$$C\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix} = \sum_{i \le k_1 < k_2 < \ldots < k_p \le n} A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ \\ k_1, k_2, \ldots, k_p \end{pmatrix} \times B\begin{pmatrix} k_1, k_2, \ldots, k_p \\ \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix}$$

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le m \qquad p \le m$

$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le q \qquad p \le q$

1.2 - FORMAS QUADRÁTICAS, HERMITIANAS E A REGRA DA INÉRCIA

Uma matriz A é hermitiana quando $A = A^*$, onde $A^* = (\bar{A})^T$, a transposta conjugada de A.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz hermitiana de ordem n.

Então uma forma hermitiana associada com A é dada por

$$x^* Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, \bar{x}_j$$

onde x é um vetor coluna com componentes x_i.

Uma forma hermitiana $x^* Ax$, pode ser escrita de várias maneiras na seguinte forma:

$x^* Ax = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \overline{X}_i$ onde a_i, $i = 1,\ldots,n$ são números reais

e $X_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_k$ $i = 1,\ldots,n$ . . . (0) são formas lineares independentes nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como $X_i \overline{X}_i = |X_i|^2$ o termo $a_i X_i \overline{X}_i$ é positivo,negativo ou nulo de acordo com $a_i > 0$, $a_i < 0$ ou $a_i = 0$. Então, uma forma hermitiana $A(x)$ pode ser representada na forma (0) como uma soma de quadrados. Essa representação é dita representação canônica da forma hermitiana $A(x)$.

REGRA DA INÉRCIA DE SYLVESTER

Numa representação canônica da forma $x^* Ax$, os números de quadrados positivos e negativos são independentes da seleção da representação.

Uma forma hermitiana é dita:

a) positiva definida se $x^* Ax > 0$ $\forall x \neq 0$

b) negativa definida se $x^* Ax < 0$ $\forall x \neq 0$

c) positiva semi-definida se $x^* Ax \geq 0$ $\forall x \neq 0$

d) negativa semi-definida se $x^* Ax \leq 0$ $\forall x \neq 0$

Uma matriz A é positiva definida (semi-definida) se, a forma hermitiana associada com A é positiva definida (semi-definida). Definimos matrizes negativas definidas (semi-definidas) analogamente.

Notação: $A > 0$ - positiva definida

$A < 0$ - negativa definida

$A \geq 0$ - positiva semi-definida

$A \leq 0$ - negativa semi-definida

TEOREMA 1.2 (Jacobi [14 - vol. I])

Sejam $D_1, D_2, \ldots, D_n$ os menores principais líderes de uma matriz hermitiana A. Se D_i, $i = 1, \ldots, n$ são diferentes de zero, os números de quadrados positivos e negativos numa representação canônica da forma hermitiana associada com A são respectivamente

$$P(1, D_1, D_2, \ldots, D_n) \text{ e } V(1, D_1, D_2, \ldots, D_n)$$

onde $P(1, D_1, D_2, \ldots, D_n)$ e $V(1, D_1, D_2, \ldots, D_n)$ denotam os números de permanência e variação dos sinais de sequência

$$1, D_1, \ldots, D_n.$$

Usando este teorema podemos obter, para uma matriz hermitiana A, os seguintes critérios:

i) A é positiva definida se, e somente se $D_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

ii) A é negativa definida se, e somente se, $(-1)^i D_i < 0$, $i = 1,\dots,n$.

iii) A é positiva semi-definida, se e somente se, $P_i \geq 0$, $i = 1,\dots n$, onde P_i são os menores principais de A.

iv) A é negativa semi-definida se, e somente se, $(-1)^i P_i \geq 0$, $i = 1, 2,\dots, n$.

Uma matriz A é dita simétrica quando $A = A^T$ onde A^T é a transposta de A.

No caso em que A é uma matriz simétrica, nós definimos $x^T Ax$ uma forma quadrática associada com A. Todos os resultados sobre a forma hermitiana, dados acima, são válidos também neste caso com algumas modificações óbvias.

1.3 - ALGUNS RESULTADOS SOBRE AUTOVALORES DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO 1.2.

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e λ um número complexo tal que

$$Ax = \lambda x \qquad \text{onde} \qquad x \neq 0$$

Então λ é chamado autovalor de A e x é chamado autovalor correspondente de λ.

O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado o polinômio característico de A e $p(\lambda) = 0$ é chamada a equação característica.

As raízes de $p(\lambda) = 0$ são os autovalores de A.

TEOREMA 1.3.

Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz triangular inferior (superior). Então os autovalores de A são os elementos da diagonal principal:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} .$$

COROLÁRIO 1.1

Os elementos da diagonal principal de uma matriz D são os autovalores de D.

Um importante resultado na teoria de autovalores é o Teorema de Cayley - Hamilton.

TEOREMA 1.4 (Cayley - Hamilton [14 - vol. I])

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $p(\lambda)$ o polinômio característico de A. Então $p(A) = 0$ onde 0 é a matriz nula.

Existe um conjunto de polinômios $q(x)$ tais que $q(A) = 0$. Um polinômio $m(x)$ de mínimo grau tal que $m(A) = 0$ é chamado polinômio minimal de A.

DEFINIÇÃO 1.3.

Uma matriz A é dita não-derogatória se o polinômio característico é igual ao polinômio minimal.

A transformação $T\,A\,T^{-1}$ é chamada transformação de similaridade. A e T são matrizes quadradas e T é não-singular.

TEOREMA 1.5.

$T\,A\,T^{-1}$ e A têm os mesmos autovalores.

As matrizes A e A^T têm os mesmos autovalores. Se os autovalores de A são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A^* são $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$.

TEOREMA 1.6

Seja A uma matriz quadrada de ordem n cujos autovalores são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Então os autovalores de A^m são $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m$.

Em geral se $P(A)$ é uma matriz polinômio na forma $P(A) = C_o A^n + C_1 A^{n-1} + \ldots + C_{n-1} A + C_n I$ então os autovalores de $P(A)$ são $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$ onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A.

Os autovalores de uma matriz simétrica ou hermitiana são reais.

1.4 - TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES E FORMA CANÔNICA DE JORDAN.

DEFINIÇÃO 1.4.

Uma matriz A é dita matriz de Hessenberg inferior(superior) se $a_{ij} = 0$ para $j > i + 1$ $(a_{ij} = 0$ para $i > j + 1)$.

Os elementos $a_{i,i+1}$ $(a_{i+1,i})$, $i = 1,\dots,n$ são chamados elementos da diagonal superior (inferior).

DEFINIÇÃO 1.5

Uma matriz C na forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \ddots & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

é chamada matriz companheira.

O polinômio característico de C é $\det(C - \lambda I) = \lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - \dots\dots - a_2\lambda - a_1$

A matriz C é uma matriz de Hessenberg inferior.

DEFINIÇÃO 1.6.

Uma matriz na forma

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -S_n & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -S_{n-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -S_2 & -S_1 \end{pmatrix}$$

é chamada matriz de Schwarz.

Essa matriz também é uma matriz de Hessenberg inferior.

É interessante observar que qualquer matriz de Hessenberg inferior(superior) com elementos não nulos na diagonal superior (inferior) é não-derogatória. Assim a matriz companheira e a de Schwarz são não-derogatórias.

Schwarz provou que para qualquer matriz A, não-derogatória sempre existe uma matriz T não-singular tal que

$$T A T^{-1} = S$$

onde S é uma matriz de Schwarz.

Além disso as partes reais de todos os autovalores de A são negativas, se e somente se, $S_i > 0 \quad i = 1, \ldots, n$.

DEFINIÇÃO 1.7

Uma matriz T é chamada tridiagonal se é matriz de Hessenberg inferior e superior.

Se $T = (t_{ij})$ é tridiagonal temos $t_{ij} = 0$ para $i > i + 1$ e $j < i - 1$, $i,j = 1,\ldots,n$.

Para o problema de autovalor podemos assumir, sem perda de generalidade, que dada uma matriz A ela é matriz de Hessenberg inferior(superior) pois existe um método bom e numericamente estável (por exemplo, o método de Householder [20]) para transformar qualquer matriz na forma de Hessenberg inferior (superior) por similaridade.

Além disso, podemos assumir que todos os elementos da diagonal superior (inferior) desta matriz são diferentes de zero. Pois, seja A uma matriz de Hessenberg inferior que tem um elemento nulo na diagonal superior. Então A pode ser escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$$

onde A_1 e A_2 são matrizes de Hessenberg inferior e pelo menos uma delas tem os elementos da diagonal superior diferentes de zero. Então

$$\det(A - \lambda I) = \det(A_1 - \lambda I) \cdot \det(A_2 - \lambda I)$$

Se A_1 ou A_2 tem um elemento nulo na diagonal superior ela pode ser decomposta na forma acima e

$$\det(A - \lambda I) = \det(A_1 - \lambda I)\ \det(A_2 - \lambda I)\ldots\ldots\det(A_k - \lambda I)$$

onde A_i $i = 1,\ldots,k$ são matrizes de Hessenberg e nenhuma destas matrizes tem zero na diagonal superior.

Então os autovalores de A são os autovalores de $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

O Teorema a seguir é um dos principais da Teoria de Matrizes.

TEOREMA 1.7

Para qualquer matriz de ordem n existe uma matriz P não-singular tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix}$$

onde J_i são submatrizes que têm a forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

e λ_i é um autovalor de A.

Suponhamos que $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ são as ordens de $J_1, J_2, \ldots, J_s$. Então $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s = n$. As ordens de $J_i = 1, \ldots, s$ correspondem a multiplicidade de λ_i. Essa forma é dita a FORMA CANÔNICA DE JORDAN e as matrizes J_i são chamados blocos de Jordan.

$\mathrm{Det}(J_i - \lambda I) = (\lambda_i - \lambda)^{\nu_i}$ são chamados divisores elementares da matriz A. Se tivermos $\nu_1 = \nu_2 = \ldots. = \nu_s = 1$ os divisores elementares são chamados divisores elementares lineares. Quando todos os autovalores de A são distintos os divisores elementares são lineares. Para uma matriz simétrica ou hermitiana os divisores elementares são sempre lineares.

1.5 - EQUAÇÕES MATRICIAIS

Toda equação da forma

$$A_1 X B_1 + A_2 X B_2 + \ldots + A_n X B_n = C \quad \ldots \quad (1)$$

é dita equação matricial geral. As matrizes A_i, B_i $i = 1, \ldots, n$ e C são conhecidas e a matriz X é incógnita.

Para o estudo de localização de autovalores de uma matriz interessa-nos apenas alguns casos especiais dessa equação geral:

$$AX + XB = C$$

$$X - AXA^* = I$$

Daremos agora alguns resultados básicos sobre a existência e unicidade das soluções dessas equações:

TEOREMA 1.8

A equação $AX + XB = C$ tem uma solução única se, e somente se A e $-B$ não tem nenhum autovalor em comum.

A equação de Lyapunov $AX + XA^* = -I$ é um caso particular da equação $AX + XB = C$.

Na próxima seção mencionaremos alguns teoremas importantes sobre esta equação. Todavia, apresentaremos aqui alguns resultados interessantes.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores da matriz A, então os autovalores de A^* são, $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$. Portanto do Teorema 1.8, obtemos o seguinte resultado sobre a unicidade da solução da equação de Lyapnov:

TEOREMA 1.9

A equação de Lyapunov $AX + XA^* = -I$ tem uma solução única se, e somente se $\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0$ para todos os i e j.

Para matrizes de Hessenberg, temos um resultado que nos dá um critério de existência e unicidade da solução da equação de Lyapunov, sem conhecimento dos autovalores.

TEOREMA 1.10.

Sejam A uma matriz de Hessenberg com co-diagonal não nula e $f(x)$ o polinômio característico de A. Então a equação de Lyapunov tem uma solução única se, e somente se, $f(-A)$ é não singular.

A equação $X - AXA^* = I$ é chamada da equação de Stein, pois foi P. Stein que a introduziu na literatura.

Um resultado básico sobre esta equação é:

TEOREMA 1.11.

A equação $X - AXA^* = I$ tem uma solução única se, e somente se, $\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_j - 1 \neq 0$ para todos os λ_i $i = 1,\ldots,n$ autovalores de A.

Temos um teorema análogo ao teorema 1.10.

TEOREMA 1.12.

Sejam A uma matriz de Hessenberg de ordem n com co-diagonal não-nula e $\psi(x) = x^n f(\frac{1}{x})$, onde $f(x)$ é o polinômio característico de A. Então a equação $X - AXA^* = I$ tem uma solução única se, e somente se, $\psi(A)$ é não-singular.

1.6. DEFINIÇÃO DE INÉRCIA DE UMA MATRIZ E ALGUNS TEOREMAS IMPORTANTES.

DEFINIÇÃO 1.8

A inércia de uma matriz A é definida pela tripla $(\pi(A), \nu(A), \delta(A))$ onde $\pi(A)$, $\nu(A)$, $\delta(A)$ são respectivamente os números de autovalores de A com partes reais positivas, negativas e nulas.

A inércia de A é denotada por $In(A)$.

Os teoremas sobre a inércia de uma matriz A e os que nos dão in formações sobre a localização de autovalores de A no círculo unitário, são chamados os Teoremas de Inércia. A seguir apresentaremos alguns teoremas de inércia que nós usaremos frequentemente.

A regra da inércia de Sylvester, dada anteriormente pode ser resumida da seguinte maneira:

Sejam A e P matrizes quadradas e P não-singular então:

$$\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(P A P^*)$$

Outro resultado muito interessante de Sylvester sobre a inércia de uma matriz A é

$$\mathrm{In}(P A) = \mathrm{In}(A)$$

onde P é positiva definida e A é hermitiana.

O resultado fundamental sobre a inércia de uma matriz é de Lyapunov:

TEOREMA 1.12. (Lyapunov)

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Então as partes reais de todos os autovalores de A são negativos (isto é $\mathrm{In}(A)=(0,n,0)$) se, e somente se, existe uma matriz X hermitiana e positiva definida tal que

$$X A + A^* X = - C$$

onde $A^* = (\bar{A})^T$ e C é qualquer matriz positiva definida.

É claro que o resultado de Lyapunov não dá a inércia de A em termos da inércia de X completamente. O seguinte teorema é uma generalização da idéia de Lyapunov.

TEOREMA 1.14 (Ostrowsky - Schneider [16] Taussky [19])

Dada uma matriz A, existe uma matriz hermitiana H tal que

$$A^*H + HA = C$$

onde C é positiva definida se, e somente se, $\delta(A) = 0$. Neste caso $In(A) = In(H)$.

Este teorema foi provado por Taussky para $C = I$ e por Ostrowski e Schneider para C qualquer.

Outros resultados mais gerais foram obtidos com os seguintes teoremas:

TEOREMA 1.15 (CARLSON E SCHNEIDER [2])

Se H é não-singular e A não tem autovalores no eixo imaginário (isto é $\delta(A) = 0$) então $AH + HA^* \geq 0$ implica $In(A) = In(H)$.

Baseado neste teorema Wimmer provou um outro resultado. Independentemente dele, Chen chegou à mesma conclusão.

TEOREMA 1.16 - (WIMMER - CHEN [22] [3])

Seja X uma matriz hermitiana tal que $XA + A^*X = S$, onde S é hermitiana positiva semi-definida e posto $(S, AS, A^2S, \ldots, A^{n-1}S) = n$. Então $In(A) = In(X)$ e também nas condições acima $\delta(A) = 0$.

A matriz $(S,\ AS,\ A^2S, \ldots, A^{n-1}S)$ é chamada a matriz de controlabilidade.

TEOREMA DE INÉRCIA PARA UMA MATRIZ DE HESSENBERG 1.17 (DATTA [8])

Seja A uma matriz de Hessenberg superior (inferior) com diagonal inferior (superior) não-nula, e X uma matriz simétrica tal que

$$AX + XA^T = W$$

onde W é uma matriz positiva semi-definida com uma coluna de forma $w = (\alpha, 0 \ldots 0)^T$ $\alpha \neq 0$ $[(0, \ldots, 0, \alpha)]$ $\alpha \neq 0$ então:

i) A não tem nenhum autovalor com parte real nula.

ii) Os números de autovalores de A com partes reais positivas e negativas são respectivamente os números de autovalores positivos e negativos de X. (isto é $In(A) = In(X)$).

TEOREMA 1.18. (TAUSSKY - HILL - WIMMER [18] , [15] , [21])

Seja A uma $n \times n$ matriz complexa. Então existe uma $n \times n$ matriz hermitiana H com $A^*HA - A > 0$ se, e somente se, A não tem autovalores de módulo unitário.

Se $A^*HA - H > 0$, então A tem $\pi(H)$ ($\nu(H)$) autovalores de módulo maior (menor) que um.

TEOREMA 1.19 (CARLSON - DATTA [5])

Seja A uma $n\times n$ matriz complexa sem autovalor de módulo um. Seja H uma $n\times n$ matriz hermitiana não-singular tal que $A^*HA - H \geq 0$. Então A tem $\pi(H)$ ($\nu(H)$) autovalores de módulo maior (menor) que um.

TEOREMA 1.20 (WIMMER - ZEIBUR [24])

Seja X uma matriz hermitiana tal que

$$A^*XA - X = C$$

onde C é uma matriz hermitiana, positiva semi-definida e posto $(C, A^*C, A^{*2}C, \ldots, A^{*n-1}C) = n$. Então A não tem nenhum autovalor z com $|z| = 1$, e o número de autovalores com módulo menor (maior) que um, é igual ao número de autovalores negativos (positivos) de X.

Um teorema análogo a este para matriz de Hessenberg é demonstrado por Datta.

TEOREMA 1.21 (DATTA [8])

Sejam A uma $n\times n$ matriz real de Hessenberg superior (inferior) com diagonal inferior (superior) não nula e H uma matriz simétrica tal que

$$A^T H A - H = W$$

onde W é uma matriz positiva semi-definida, que tem uma coluna na forma

$$W = (0,\ldots,0,\ \alpha)^T \quad \alpha \neq 0 \quad [(\alpha,\ 0,\ldots,0)\ \ \alpha \neq 0]$$

então:

i) A não tem nenhum autovalor com módulo unitário

ii) Os números de autovalores de A dentro e fora do círculo unitário são respectivamente os números de negativos e positivos autovalores de H.

1.7 - O BEZOUTIANTE

Sejam $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ $\quad a_o \neq 0$ e $g(x) = b_o x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$ $\quad b_o \neq 0$ dois polinômios de grau n. Então a forma

$$B(f,g;\ x_o,\ldots,x_{n-1}) = -B(g,f;\ x_o,\ldots,\ x_{n-1})$$

$$K(f) = \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} = \sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{k,\ell}\, x^k\, x^{\ell}$$

como função geradora, é chamada a forma de Bezout de f e g. A matriz simétrica $B = (b_{k,\ell})$ é chamada a MATRIZ DE BEZOUT.

Uma propriedade fundamental do Bezoutiante é: o posto de Bezoutiante é igual à ordem do último menor principal não-nulo da matriz de Bezout $B = (b_{k,\ell})$, se ao construírmos os concecutivos menores principais começarmos do canto direito inferior.

Algumas propriedades fundamentais da matriz de Bezout B são dadas nos seguintes lemas:

LEMA 1.1 (DATTA [5])

A matriz de Bezout B associada ao Bezoutiante de dois polinômios f(x) e g(x) de mesmo grau n, é tal quê

$$BA = A^T B$$

onde A é a matriz companheira associada a f(x).

LEMMA 1.2 (BARNETT [1] , DATTA [4])

A matriz de Bezout B associada com a Bezoutiante de dois polinômios f(x) e g(x) de mesmo grau satisfaz

$B = U\,g(A)$, onde A é a matriz companheira associada a

$$f(x) = x^n - a_n x^{n-1} - a_{n-1} x^{n-2} - \dots - a_2 x - a_1 \qquad \text{e}$$

$$U = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n & 1 \\ -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -a_n & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 - MATRIZES DE HANKEL DOS PARÂMETROS DE MARKOV E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES.

Seja $f(x) = a_{n+1}x^n - a_n x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} \ldots - a_2 x - a_1$ $(a_{n+1} = 1)$ e $g(x) = b_{m+1}x^m - b_m x^{m-1} - \ldots - b_2 x - b_1$ dois polinômios de grau n e m com coeficientes reais; $m \leq n$. As quantidades S_i, $i = -1, 0, 1, 2, \ldots$ definidas por

$$\frac{g(x)}{f(x)} = S_{-1} + \frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \ldots$$

são chamadas Parâmetros de Markov associados à função racional

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad .$$

As matrizes

$$H_{kk} = \begin{pmatrix} S_o & S_1 & \cdots & S_{k-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_k \\ \vdots & & & \\ S_{k-1} & S_k & \cdots & S_{2k-2} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

são as chamadas matrizes de Hankel dos Parâmetros de Markov.

Existe uma relação recursiva para gerar os coeficientes das matrizes de Hankel. Por exemplo, no caso $n = m$ esta relação é dada por

$$S_{-1} = b_{n+1}$$

$$S_o - a_n S_{-1} = - b_n \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$\vdots$$

$$S_{n-1} - a_n S_{n-2} - \cdots - a_1 S_1 = - b_1$$

$$S_t - a_n S_{t-1} - \ldots - a_1 S_{t-n} = 0 \qquad (t = n, n+1, n+2, \ldots)$$

Algumas propriedades das matrizes de Hankel são dadas nos seguintes lemas:

LEMA 1.3 - (DATTA [11])

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios de grau n. Então a H_{nn} matriz de Hankel dos Parâmetros de Markov é tal que

$$A\, H_{nn} = H_{nn}\, A^T$$

onde A é a matriz companheira de $f(x)$.

LEMA 1.4 (DATTA - [11])

Seja $$\frac{f(-x)}{f(x)} = S_{-1} + \frac{S_o}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \ldots$$

então $S_k^2 = 2(S_{k-1}\, S_{k+1} - S_{k-2}\, S_{k+2} + \ldots + (-1)^k\, S_{-1}\, S_{2k+1})$

$(K = 0, 1, 2, \ldots)$

LEMA 1.5 (DATTA [11])

Sejam $$\frac{f(-x)}{f(x)} = S_{-1} + \frac{S_o}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \ldots$$

e V a matriz definida por

$$V = \begin{pmatrix} s_{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_o & -s_{-1} & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & -s_o & -s_{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ s_{n-2} & -s_{n-3} & & \dots & (-1)^{n-1}\, s_{-1} \end{pmatrix}$$

então $V^2 = I$, onde I é matriz identidade de ordem n.

1.9 - A INÉRCIA DE UMA MATRIZ HERMITIANA.

Muitas vezes nesta tese, encontraremos o problema de achar a inércia de uma matriz hermitiana. Gostaríamos de discutir alguma maneira prática de se fazer isso.

Se os menores principais líderes de A são diferentes de zero, podemos usar o método de Jacobi dado anteriormente. Mas como no método de Jacobi precisa-se calcular os determinantes, ele não é útil na prática.

A melhor maneira é primeiramente transformar A numa matriz tridiagonal por similaridade usando o método estável e eficiente de Householder [20] e depois aplicar o seguinte teorema da inércia de uma matriz tridiagonal, obtido recentemente por Wimmer [23] .

TEOREMA 1.22

Seja

$$T = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & ib_2 & a_3 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & i\,b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & -c_n & i\,b_n \end{pmatrix}$$

uma matriz tridiagonal com a_i, b_i e c_i $i = 1,\dots,n$ reais $a_1 \neq 0$ e $a_i c_i \neq 0$ $i = 2, 3,\dots,n$.

Então

$$In(T) = In(D)$$

onde $D = dg(a_1,\ a_1a_2c_2,\ a_1a_2a_3c_2c_3,\dots,\ a_1a_2,\dots,a_nc_2c_3,\dots,c_n)$.

É claro que o teorema acima também tem algumas restrições. No caso deste teorema não poder ser aplicado, temos que resolver o problema de autovalores da matriz triadiagonal obtida.

CAPÍTULO II

DEFINIÇÕES E ALGUNS PROCESSOS PARA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE ROUTH-HURWITZ E SCHUR-COHN

Neste capítulo nós apresentaremos os problemas de Routh-Hurwitz e Schur-Cohn, e alguns métodos conhecidos para solução destes problemas.

2.1 - DEFINIÇÕES

O problema de Routh-Hurwitz consiste basicamente em localizar os zeros de um dado polinômio nos semi-planos esquerdo e direito, trata-se em particular de determinar condições necessárias e suficientes para que todos os zeros pertençam ao semi-plano esquerdo.

O problema de Schur-Cohn é o de encontrar o número de zeros de um polinômio dentro do círculo unitário, estabelecendo em particular uma condição necessária e suficiente para que todos os zeros pertençam ao círculo unitário.

2.2 - PROCESSOS DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE ROUTH-HURWITZ.

2.2.1 - PROCESSO DE ROUTH.

O algorítmo de Routh, que apresentaremos a seguir, determina o número de zeros de um polinômio real no semi-plano direito.

Dado um polinômio real

$$f(x) = a_o x^n + b_o x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \dots$$

forma-se o esquema abaixo conhecido como o Esquema de Routh.

$$\begin{array}{llll} a_o & a_1 & a_2 & \dots \\ b_o & b_1 & b_2 & \dots \\ c_o & c_1 & c_2 & \dots \\ d_o & d_1 & d_2 & \dots \\ \vdots & & & \end{array}$$

onde as quantidades c_o, d_o, c_1, d_1 etc. . . são encontradas a partir dos coeficientes do polinômio da seguinte maneira:

$$c_o = a_1 - \frac{a_o}{b_o} b_1 \qquad c_1 = a_2 - \frac{a_o}{b_o} b_2 \quad \dots$$

$$d_o = b_1 - \frac{b_o}{c_o} c_1 \qquad d_1 = b_2 - \frac{b_o}{c_o} c_2 \quad \dots$$

O teorema de Routh diz que o número de zeros de f(x) que está no semi-plano direito é igual ao número de variações de sinal da primeira coluna do Esquema de Routh. Em particular, todos os zeros tem parte real negativa se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna do esquema são diferentes de zero e de mesmo sinal.

2.2.2 - PROCESSO DE HURWITZ.

O critério de Hurwitz é obtido da seguinte maneira:

Seja $f(z) = a_o z^n + b_o z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \ldots$

um polinômio de grau n. Definimos Δ_i $i = 1,\ldots,n$ pelos determinantes:

$$\Delta_1 = b_o \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_o & b_1 \\ a_o & a_1 \end{vmatrix}$$

$$\ldots \qquad \Delta_n \quad \begin{vmatrix} b_o & b_1 \ldots & b_{n-1} \\ a_o & a_1 \ldots & a_{n-1} \\ 0 & b_o \ldots & n_{n-2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_k = 0 & \text{para} \quad k > [\frac{n}{2}] \\ b_k = 0 & \text{para} \quad k > [\frac{n-1}{2}] \end{cases}$$

O Teorema de Hurwitz estabelece que todos os zeros de $f(z)$ tem parte real negativa se, e somente se, os determinantes Δ_i $i = 1,\ldots,n$ são todos positivos. Os determinantes Δ_i $i = 1,\ldots,n$ são conhecidos como determinantes de Hurwitz.

2.2.3 - PROCESSO DE FUJIWARA.

Fujiwara, um matemático japonês, resolveu os problemas de Routh-Hurwitz e Schur-Cohn usando o conceito da Bezoutian.

Dado um polinômio $f(x)$, Fujiwara escolheu convenientemente outro polinômio $g(x)$, e mostrou que a inércia da matriz hermitiana, chamada a matriz de Fujiwara, construída da maneira, abaixo discutida, a partir da matriz de Bezout associada a $f(x)$ e $g(x)$, resolve o problema dado.

A seguir apresentaremos o método de Fujiwara para resolver o problema de Routh-Hurwitz.

TEOREMA 2.1 (ROUTH-HURWITZ - FUJIWARA [4])

Sejam $f(x) = x^n - a_n x^{n-1} - \ldots - a_2 x - a_1$ e $g(x) = f(-x)$. Defina a matriz de Fujiwara $F_{RH} = (f_{i,k})$ construída da matriz de Bezout $B = (b_{i,k})$ de $f(x)$ e $g(x)$ como

$$f_{i,k} = (-1)^i \, b_{i,k} \quad i,k = 0,1,\ldots, \; n - 1 \quad . \; . \; . \qquad (3)$$

Assuma que F_{RH} é não-singular $(\pi(F_{RH}) + \nu(F_{RH}) = n)$. Então:

i) os números de zeros de $f(x)$ com parte real negativa e positiva são respectivamente os números de autovalores positivos e negativos de F_{RH}; isto é, $In(A) = In(-F_{RH})$, onde A é a matriz companheira de $f(x)$.

ii) F_{RH} é positiva definida se, e somente se, todos os zeros de $f(x)$ tem parte real negativa.

2.2.4 - PROCESSO DAS EQUAÇÕES - MATRICIAIS

Baseado no Teorema 1.14 o problema de Routh-Hurwitz produz a conhecida equação matricial de Lyapunov

$$AX + XA^* = - I \quad . . . \qquad (4)$$

onde A é uma matriz companheira e I é a matriz identidade. Se $f(x)$ não tem zeros puramente imaginários, (isto é $\delta(A) = 0$) e se $In(X) = (\pi, \nu, \delta)$, então é o número de zeros de $f(x)$ no semi-plano esquerdo e ν é o número de zeros no semi-plano direito.

No caso em que A é uma matriz real a equação matricial (4) se reduz a

$$AX + XA^T = - I.$$

Das discussões acima, observa-se que para este processo precisa-se da resolução numérica da equação (4). Existem vários métodos na literatura para fazer isso. Apresentamos aqui um método de DATTA-DATTA, que funciona para uma matriz de Hessenberg inferior com elementos não nulos na diagonal superior. Como a matriz companheira é um caso especial desta matriz, este método pode ser usado para resolver, em particular, o problema de Routh-Hurwitz.

2.2.4.a) - MÉTODO DE DATTA-DATTA PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL (4) [7].

Sejam $A=(a_{ij})$ uma matriz de Hessenberg inferior com diagonal superior unitária e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as n sucessivas linhas de X. Então a equação matricial (4) se reduz para

$$x_i A^* + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + x_{i+1} = e_i \quad \ldots$$

$$(i = 1, \ldots, n-1) \qquad \ldots \qquad (5)$$

$$x_n A^* + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = e_n$$

onde e_i é a i-ésima linha da matriz identidade I. Eliminando $x_2, x_3, \ldots, x_n$ estas equações produzem um sistema de equações na forma:

$$- g(\bar{A})\, x_1^T = C \qquad \ldots \qquad (6)$$

onde $C = -e_n^T + g_{n-1}(\bar{A})\, e_{n-1}^T - g_{n-2} + \ldots + (-1)^n g_1(\bar{A})\, e_1^T$ e $g_i(x) = f_i(-x)$, $i = 1, \ldots, n-1$, sendo $f_i(x)$ o polinômio característico da submatriz obtida de A eliminando-se as i primeiras linhas e colunas. $g(x) = f(-x)$ onde $f(x)$ é o polinômio característico de A.

A primeira linha x_1 de X é encontrada resolvendo o sistema (6) e as outras são obtidas recursivamente de (5).

Um método, para calcular a matriz polinômio de uma matriz de Hessenberg inferior com diagonal superior unitária, é encontrado em [7]. No caso particular em que A é uma matriz companheira de ordem n e $g(x)$ é um polinômio de grau n, $g(x) = b_o x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$ o método de [7] nos dá o seguinte algorítmo para computar $g(A)$.

Sejam $g_1, g_2, \ldots, g_n$ as linhas de $g(A)$. Então

$$g_i = g_{i-1} A \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

$$g_1 = (b_n + b_o a_1, b_{n-1} + b_o a_2, \ldots, b_1 + b_o a_n)$$

Exemplo:

Seja

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

um polinômio de grau 3

Então:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & -8 \\ -8 & 4 & -14 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Seja $x_1 = (x_{11}\ x_{12}\ x_{13})$ a 1º linha de X.

Então resolvendo o sistema

$$-g(A)\ x_1^T = C \qquad \text{temos}$$

$$x_1 = (-8, -\frac{1}{2}, 4)$$

$$x_2 = -e_1 - x_1A^* = (-\frac{1}{2}, -4, -\frac{1}{2})$$

$$x_3 = -e_2 - x_2A^* = (4, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{3})$$

Logo

$$X = \begin{pmatrix} -8 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

2.2.5 - PROCESSO DA MATRIZ POLINÔMIO (DATTA [4]).

Vimos no método de Datta, apresentado na seção 2.2.4.a), que a matriz do sistema de equação lineares que soluciona a equação (4) é $-g(\overline{A})$. (a matriz A é a matriz companheira de $f(x)$).

Nós mostraremos agora que $\overline{g(\overline{A})} = \overline{g}(A)$ pode ser usado para resolver o problema de Routh-Hurwitz. Sabemos que o número de zeros de $f(x)$ com parte real positiva e negativa são iguais respectivamente ao número π' de quadrados negativos e ao número π de quadrados positivos na representação normal da matriz F_{RH} de Fujiwara. Seja

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 \dots 1 & 0 \\ \vdots & & \\ 1 & 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \quad (7)$$

uma matriz de permutação.

Desde que $P^{-1} F_{RH} P$ tem o mesmo número de quadrados positivos e negativos que a F_{RH}, pelo TEOREMA 1.2 (Jacobi) temos:

$$\begin{aligned} \pi &= P(1, F_1, \dots, F_n) \\ \pi' &= V(1, F_1, \dots, F_n) \end{aligned} \qquad \dots \quad (8)$$

onde $F_1, F_2, \dots, F_n$ são os menores principais líderes de $P^{-1} F_{RH} P$.

De (3) temos que $F_{RH} = BP$ e então podemos concluir que $F_h =$ $= (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} B_n$, $h = 1, 2, \ldots, n$ para n impar e $F_h = (-1)^{\frac{h(h+1)}{2}} B_h$, $h = 1, 2, \ldots, n$ para n par, onde B_i $i = 1, \ldots, n$ são os menores principais líderes de $P^{-1}BP$.

Então de (8) temos

$$\pi = P(1, \varepsilon_1 B_1, \varepsilon_2 B_2, \ldots, \varepsilon_n B_n)$$

$$\pi' = V(1, \varepsilon_1 B_1, \varepsilon_2 B_2, \ldots, \varepsilon_n B_n)$$

onde $\varepsilon_n = (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}}$ $h = 1, \ldots, n$ para n impar ... (9)

e $\varepsilon_n = (-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}$ $h = 1, \ldots, n$ para n par ... (10)

Sejam $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ as linhas de $\overline{g}(A)$ e $h_1, h_2, \ldots, h_n$ as linhas de Bezout B associada com $f(x)$ e $g(x) = f(-x)$.

Pelo lema 1.1 temos que

$$h_n = \rho_1$$

$$h_k = -a_{k+1} h_n + h_{k+1} A \qquad \ldots (11)$$

$(k = n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1)$

Definimos

$R = \overline{g}(A)\ P$, onde P é dada em (7), e

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ . \ . \ . \ 0 & 0 \\ -a_n & 1 & 0 \ . \ . \ . \ 0 & 0 \\ -a_{n-1} & -a_n & 1 \ . \ . \ . \ 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ -a_3 & -a_4 & -a_5 \ . \ . \ . \ 1 & 0 \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 \ . \ . \ . \ -a_n & 1 \end{pmatrix} \quad . \ . \ . \quad (12)$$

Sabemos de anterior que $\rho_i = \rho_{i-1} A$ $\quad i = 2, 3, \ldots, n$ e podemos verificar facilmente que $\rho_1 = h_n$. Então se $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_n'$ são as linhas de R, temos

$$\rho_1' = h_n P$$

$$\rho_2' = \rho_2 P = \rho_1 AP = h_n AP =$$

$$= h_n PP^{-1} AP = \rho_1' P^{-1} AP$$

anolagamente

$$\rho_i' = \rho_{i-1}' P^{-1} AP \ , \quad i = 3, 4, \ldots, n$$

Vamos supor agora que as linhas de LR são $w_1, w_2, \dots, w_n$, então:

$$w_1 = \rho_1' = h_n P$$

$$w_2 = -a_n \rho_1' + \rho_2' = a_n\, w_1 + \rho_1'\, P^{-1} AP$$

$$= -a_n h_n P + h_n\, PP^{-1}\, AP$$

$$= (-\, a_n h_n + h_n A)\, P$$

$$= h_{n-1}\, P \qquad \text{por} \qquad (11)$$

analogamente

$$w_i = h_{n-i+1}\, P \qquad\qquad i = 3, 4, \dots, n.$$

Como

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1\, P \\ h_2\, P \\ \vdots \\ \\ h_n P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_n\, P \\ h_{n-1}\, P \\ \vdots \\ \\ h_1\, P \end{pmatrix}$$

nós temos

$$LR = P^{-1} BP$$

ou

$$(PL)\ R = BP = F_{RH} \ .$$

Desde que, pelo Teorema 1.1 (Cauchy-Binet), os menores principais líderes de LR e R são os mesmos podemos enunciar o seguinte Teorema:

TEOREMA 2.2 (DATTA [4])

Seja $f(x)$ um polinômio de grau n cuja matriz companheira é A e seja R a matriz formada de $\overline{f}(-A)$ por troca da última coluna pela primeira, da penúltima com a segunda e assim sucessivamente. Então os menores principais líderes D_i de R, $i = 1,\dots,n$ são todos reais, e se nenhum deles é zero, $f(x)$ tem p zeros com parte real negativa e q zeros com parte real positiva, onde p e q são iguais respectivamente ao número de permanência e variação do sinal da sequência

$$1,\ \varepsilon_1 D_1\ ,\ \varepsilon_2 D_2, \dots, \varepsilon_n D_n$$

onde ε_n são definidas por (9) e (10).

Exemplo:

Seja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $(x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3)$

$a_1 = 6$ $\qquad a_2 = -11$ $\qquad a_3 = 6$

e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

Então

$$\overline{f}(-A) = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -12 \\ -72 & 120 & -72 \\ -432 & 720 & -312 \end{pmatrix}$$

e

$$R = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -12 \\ -72 & 120 & -72 \\ -312 & 720 & -432 \end{pmatrix}$$

onde $D_1 = -12$ $\qquad D_2 = -1440$ $\qquad D_3 = 172800$

Então o número de zeros de $f(x)$ com parte real positiva é igual a

$$V(1,\ \varepsilon_1 D_1,\ \varepsilon_2 D_2,\ \varepsilon_3 D_3) = V(1,\ -12,\ 1440,\ -172800) = 3.$$

2.2.6 - PROCESSO USANDO A MATRIZ DE SCHWARZ

Baseado no resultado de Schwarz apresentado no capítulo 1, enunciaremos um teorema que estabelece mais um processo para a solução do problema de Routh-Hurwitz.

TEOREMA 2.3 [10] .

Seja S uma matriz de Schwarz tal que $S_i \neq 0 \quad \forall_i \quad i = 1,\ldots,n$.

Então:

i) $f(x)$ não possui nenhum zero puramente imaginário.

ii) o número de zeros de $f(x)$ com partes reais negativas e positivas são respectivamente os números positivos e negativos da sequência.

$$S_1,\ S_1 \cdot S_2,\ S_1 \cdot S_2 \cdot S_3, \ldots,\ S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n.$$

É claro que para o uso deste processo, precisamos computar a matriz de Schwarz a partir da matriz companheira A do polinômio $f(x)$ dado. Realmente, o problema de Routh-Hurwitz é resolvido imediatamente logo que a matriz A seja transformada na matriz de Schwarz.

Abaixo, apresentaremos um método de Datta para fazer isso. Este método é válido para qualquer matriz de Hessenberg inferior, com elementos não nulos na diagonal superior, e assim pode ser usado para a matriz companheira em particular.

2.2.6.a) MÉTODO PARA CONSTRUIR UMA MATRIZ DE SCHWARZ A PARTIR DE UMA MATRIZ DE HESSENBERG.
(DATTA [10])

Seja H uma matriz de Hessenberg inferior com os elementos da diagonal superior não nulos. Então o seguinte algorítmo computa uma classe de matrizes X não-singulares tais que $XHX^{-1} = S$, onde S é a matriz de Schwarz.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as linhas de X.

i) Escolhe-se $x_1 = (\alpha, 0, \ldots, 0) \quad \alpha \neq 0$

ii) Calcula-se $x_2, x_3, \ldots, x_n$ recursivamente.

$$x_{i+1} = x_i H + S_{n-(i-2)}\, x_{i-1} \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

Exemplo:

$$\text{Seja} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sejam x_1, x_2, x_3 as linhas de X.

Escolhemos $x_1 = (1, 0, 0)$

$x_2 = (1, 1, 0)$

$x_3 = x_2 H + S_3 x_1 = (S_3, 2, 2)$

portanto $$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ S_3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e $$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2-S_3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X H X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -S_3 & 0 & 1 \\ 4-5S_3 & S_3-4 & 5 \end{pmatrix}$$

Como a matriz $X H X^{-1}$ é de Schwarz temos que $S_3 = \frac{4}{5}$

$$\text{Logo} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{16}{5} & 5 \end{pmatrix}$$

2.2.7 - PROCESSO DAS MATRIZES DE HANKEL DOS PARÂMETROS DE MARKOV

Baseado nos resultados sobre as matrizes de Hankel dos paramêtros de Markov, apresentados na seção 1.7 do capítulo 1 enunciaremos mais um teorema para resolver o problema de Routh-Hurwitz. Este teorema foi obtido por Datta recentemente.

TEOREMA 2.4 (DATTA [11])

Sejam $f(x)$ e $g(x) = f(-x)$ dois polinômios de grau n e seja H_{nn} a matriz de Hankel dos parâmetros de Markov associada a $f(x)$ e $g(x)$. Assuma que H_{nn} é não-singular e defina $H'_{nn} = VH_{nn}$ (V definida no lema 1.5).

Então:

a) i) $f(x)$ não tem nenhum autovalor puramente imaginário.

ii) os números de zeros de $f(x)$ com partes reais positivas e negativas são respectivamente os números de autovalores positivos e negativos de H'_{nn}.

b) todos os zeros de $f(x)$ tem parte real positiva (negativa) se, e somente se H'_{nn} é positiva (negativa) definida.

Exemplo:

Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad (x_1 = 1, \ x_2 = 2)$

$g(x) = f(-x) = x^2 + 3x + 2$

Calculando os coeficientes de Markov pela relação (2) temos:

$$S_{-1} = 1, \quad S_o = 6, \quad S_1 = 18, \quad S_2 = 32$$

Logo

$$H_{22} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 32 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H'_{22} = V\,H_{22} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 76 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de H'_{nn} são $\dfrac{82 + \sqrt{6196}}{2}$ e $\dfrac{82 - \sqrt{6196}}{2}$

Portanto

i) $f(x)$ não tem autovalores puramente imaginários.

ii) o número de zeros de $f(x)$ com partes reais positivas é igual a dois, que é o de autovalores positivos de H'_{22} .

2.3 - PROCESSOS DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE SCHUR - COHN.

2.3.1 - PROCESSO DE SCHUR - COHN

Seja $f(x) = x^n - a_n x^{n-1} - \ldots - a_1$ um polinômio de grau n. Então usando a forma hermitiana:

$$H = \sum_{j=1}^{n} |u_j - \bar{a}_n u_{j+1} - \ldots - a_{j+1} u_n|^2 -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} |-a_1 u_j - a_2 u_{j+1} - \ldots - a_{n-j+1} u_n|^2$$

$$(a_{n+1} = 1).$$

Schur e Cohn obtiveram o seguinte resultado

TEOREMA 2.5 -(SCHUR - COHN)

Se para um polinômio $f(x)$ os determinantes:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 \; . \; . \; . \; 0 & 1 & -a_n \; . \; . \; . & -a_{n-k+2} \\ -a_2 & -a_1 \; . \; . \; . \; 0 & 0 & 1 \; . \; . \; . & -a_{n-k+3} \\ \vdots & & & & \\ -a_k & -a_{k-1} \; . \; . \; . \; -a_1 & 0 & 0 \; . \; . \; . & 1 \\ 1 & 0 \; . \; . \; . \; 0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 \; . \; . \; . & -\bar{a}_k \\ -a_n & 1 \; . \; . \; . \; 0 & 0 & -\bar{a}_1 \; . \; . \; . & -\bar{a}_{k-1} \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-k+2} & . \; . \; . \; 1 & 0 & 1 \; . \; . \; . & -\bar{a}_1 \end{vmatrix}$$

$$(k = 1,\dots,n) \qquad (a_{n+1} = 1)$$

são todos diferentes de zero, então $f(x)$ não tem zero no círculo $|z| = 1$, e p zeros dentro do círculo, sendo p o número de variação do sinal da sequência

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\dots,\ \Delta_n$$

Os determinantes Δ_i são chamados de determinantes de Schur--Cohn.

2.3.2 - PROCESSO DE FUJIWARA -

TEOREMA 2.6 - (SCHUR - COHN - FUJIWARA [4])

Seja $g(x) = x^n f(\frac{1}{x})$ e seja a matriz de Fujiwara $F_{sc} = (f_{i,k})$ definida por

$$f_{i,k} = b_{i,n-1-k} \quad \ldots \quad (13)$$

onde $B = (b_{i,k})$ é a matriz de Bezout associada a $f(x)$ e $g(x)$.

Assuma que F_{sc} é não-singular $(\pi(F_{sc}) + \nu(F_{sc}) = n)$.

Então:

i) $f(x)$ tem $\pi(F_{sc})$ zeros dentro do círculo unitário e $\nu(F_{sc})$ fora dele.

ii) F_{sc} é positiva definida se, e somente se, todos os zeros pertencem ao círculo unitário.

2.3.3 - PROCESSO DA EQUAÇÃO MATRICIAL.

De acordo com o Teorema 1.18, a equação matricial associada com o problema de Schur-Cohn é

$$A^{*}XA - X = I \quad \ldots \qquad (14)$$

onde A é matriz companheira de $f(x)$.

Se a equação matricial (14) admite uma solução hermitiana X com $\delta(x) = 0$, então $f(x)$ tem $\pi(X)$ zeros fora do círculo unitário e $\nu(X)$ zeros dentro dele.

2.3.3.a. MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO MATRICIAL (14) (DATTA [7])

Seja A uma matriz de Hessenberg inferior com diagonal superior unitária. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as n sucessivas linhas de X. A equação matricial (14) se reduz a

$$g(\bar{A})\ x_n^T = C' \quad \ldots \qquad (15)$$

onde

$$C' = e_n^T - g_{n-1}(\bar{A})\ e_{n-1}^T + \ldots + (-1)^{n-1}\ g_1(\bar{A})\ e_1^T$$

e_n são as linhas da matriz I e $g_i(x) = x^n f_i(\frac{1}{x})$ $i = 1, \ldots, n-1$, sendo $f_i(x)$ o polinômio característico da submatriz obtida de A eliminando as primeiras i linhas e colunas $g(x) = x^n f(\frac{1}{x})$ onde $f(x)$ é o polinômio característico de A.

A primeira linha x_1 da matriz X é encontrada resolvendo o sistema (15) e $x_2, \ldots, x_n$ são obtidas recursivamente da seguinte relação:

$$x_{i+1} A^{*} = -e_i + x_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j \quad . . . \qquad (16)$$

As matrizes polinômias necessárias podem ser computadas usando o algorítmo dado anteriormente.

Exemplo:

Seja $f(x) = x^3 - 3x^2$

Então

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = x^3 f(\frac{1}{x}) = 1 - 3x$$

$$g(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Calculando $C' = e_n^T - g_2(A)\, e_2^T + g_1(A)\, e_1^T$ temos

$$C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema $g(A)\ x_3^T = C'$

temos $X_3 = (-\frac{9}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{8})$

Logo $X_2 = X_3A^* + e_2 = (-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}, -\frac{3}{8})$

e $X_1 = X_2A^* + e_1 = (\frac{15}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{9}{8})$

Portanto

$$X = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{9}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

2.3.4 - PROCESSO DA MATRIZ POLINÔMIO (DATTA [4])

Mostramos no método da seção anterior que a matriz do sistema que a equação matricial (14) é $g(\overline{A})$. Nós mostraremos agora que os menores principais de $\overline{g}(A) = \overline{g(\overline{A})}$ resolvem o problema de Schur - Cohn.

De (13) temos

$$F_{sc} = B\,P \quad . \; . \; . \qquad (17)$$

onde P é a matriz definida em (7).

Se $h_1, h_2, \ldots, h_n$ e $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ são respectivamente as sucessivas linhas de B e $\bar{g}(A)$, podemos verificar como no caso de Routh Hurwitz que

$$h_n = (1 - a_1\bar{a}_1 - \bar{a}_1 a_2 - \bar{a}_n, -\bar{a}_1 a_3 - \bar{a}_{n-1}, \ldots, -\bar{a}_1 a_n - \bar{a}_2) = \rho_1$$

$$h_k = - a_{k+1}\, h_n + h_{k+1}\, A, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

e então a fundamental relação entre a matriz de Bezout B e $\bar{g}(A)$ pode ser escrita como

$$P^{-1}\, B\,P = L\,R \quad . \; . \; . \quad (18)$$

onde P é definida em (7) e LR em (12).

De (17), (18) e (12) temos

$$P^{-1} F_{sc} P = L\, \bar{g}(A) \quad . \; . \; . \quad (19)$$

Aplicando o Teorema 1.1 (Cauchy - Binet) em (19) podemos concluir que as matrizes $P^{-1}\, F\,P$ e $\bar{g}(A)$ tem os mesmos menores principais líderes. Então os menores principais líderes de $\bar{g}(A)$ são todos reais.

Desde que $P^{-1}\, F_{sc}\, P$ tem o mesmo número de quadrados positivos e negativos que F_{sc}, o Teorema 2.6 (Schur - Cohn - Fujiwara) junto com o Teorema 1.2 (Jacobi) resulta

TEOREMA 2.7 (DATTA [4])

Sejam $f(x) = x^n - a_n x^{n-1} - \ldots - a_2 x - a_1$ e A a matriz companheira de $f(x)$. Definimos $g(x) = x^n f(\frac{1}{x})$. Então os menores principais líderes D_i, $i = 1,\ldots,n$ de $\overline{g}(A)$ são todos reais e se nenhum deles é zero $f(x)$ tem p zeros dentro do círculo unitário e q zeros fora dele, onde p e q são respectivamente o número de permanência e variação do sinal da sequência

$$1,\ D_1,\ D_2, \ldots,\ D_n.$$

Exemplo:

Seja $f(x) = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + x - \frac{1}{4}$

$$(x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\ ,\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i)$$

$$g(x) = x^3 f(\frac{1}{x}) = 1 - \frac{3}{2} x + x^2 - \frac{1}{4} x^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

então

$$\bar{g}(A) = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{32} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{5}{64} & \frac{15}{32} & -\frac{5}{32} \end{pmatrix}$$

e

$$D_1 = \frac{15}{16} \qquad D_2 = \frac{125}{256} \qquad D_3 = \frac{750}{8192}$$

Então o número de zeros de $f(x)$ dentro do círculo unitário é igual a

$$P(1,\ D_1,\ D_2,\ D_3) = P\left(1,\ \frac{15}{16},\ \frac{125}{256},\ \frac{750}{8192}\right) = 3$$

2.3.5. PROCESSO USANDO A MATRIZ DE HANKEL DOS PARÂMETROS DE MARKOV.

Para o problema de Schur - Cohn escolhemos $g(x) = x^n\, f(\frac{1}{x})$. Seja H_{nn} a matriz de Hankel dos parâmetros de Markov associada a $f(x)$ e $g(x)$.

Definimos a matriz

$$H'_{nn} = H_{nn}\ U\ P\ U^{-1} = H_{nn}\ P' \quad . \ . \ . \quad (20)$$

onde U está definida no lema 1.2 e P em (7).

Assuma que H_{nn} é não-singular. Então:

TEOREMA 2.8 (DATTA [11])

a) i) $f(x)$ não tem nenhum zero de módulo 1.

ii) o número de zeros de $f(x)$ com módulo menor (maior) que um é igual ao número de autovalores positivos (negativos) de H'_{nn}.

b) H'_{nn} é positiva (negativa) definida se, e somente se todos os zeros de $f(x)$ tem módulo menor que um.

Exemplo:

Seja

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2} \quad (x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\ ,\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2})$$

$$g(x) = x^2\ f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\ x^2 - x + 1$$

Calculando os coeficientes de Markov pela relação (2) temos:

$$S_{-1} = \frac{1}{2},\quad S_o = -\frac{1}{2}\ ,\quad S_1 = \frac{1}{4}\ ;\quad S_2 = \frac{1}{2}$$

Logo

$$H_{22} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } H'_{22} = H_{nn} UPU^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Os autovalores de H'_{nn} são: $\lambda_1 = \frac{20 + \sqrt{80}}{32}$ e $\lambda_2 \frac{20 - \sqrt{80}}{32}$

Portanto

i) $f(x)$ não têm nenhum zero de módulo um.

ii) o número de zeros de $f(x)$ com módulo menor que um é igual a dois que é o número de autovalores positivos de H'_{22} .

CAPÍTULO III

RELACIONAMENTOS ENTRE OS PROCESSOS DE SOLUÇÃO PARA OS PROBLEMAS DE ROUTH-HURWITZ E SCHUR-COHN

Neste capítulo daremos algumas relações entre os processos de solução para os problemas de Routh-Hurwitz e Schur-Cohn apresentados no capítulo anterior

3.1 RELACIONAMENTO ENTRE OS PROCESSOS DE ROUTH E HURWITZ

Com os coeficientes do Esquema de Routh nós podemos formar uma matriz triangular inferior de ordem n, usualmente conhecida como matriz de Routh

$$R = \begin{pmatrix} b_o & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_o & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & d_o & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Esta matriz é equivalente a matriz de Hurwitz

$$H = \begin{pmatrix} b_o & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-1} \\ a_o & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ 0 & b & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-2} \\ 0 & a_o & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$a_k = 0 \quad \text{para} \quad K > [\tfrac{n}{2}]$$

$$b_k = 0 \quad \text{para} \quad K > [\tfrac{n-1}{2}]$$

no sentido de que para todo $p < n$ os correspondentes menores de ordem p das primeiras p- linhas são iguais.

Esta equivalência possibilita escrever os elementos do Esquema de Routh em termos dos menores da matriz H de Hurwitz.

Temos $H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = b_o \quad H\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = b_1 \quad H\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = b_2 \; . \; . \; .$

$$H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = b_o c_o \quad H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} = b_o c_1 \quad H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix} = b_o c_2 \ldots$$

$$H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = b_o c_o d_o \quad H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} = b_o c_o d_1 \quad H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix} = b_o c_o d_2 \ldots$$

. . . .

Então os elementos do Esquema de Routh são:

$$b_o = H\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \quad b_1 = H\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \quad b_2 = H\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\ldots,$$

$$c_o = \frac{H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}} \quad c_1 = \frac{H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}} \quad c_2 = \frac{H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}, \ldots,$$

$$d_o = \frac{H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}, \quad d_1 = \frac{H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}} \quad d_2 = \frac{H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}, \ldots,$$

. . . .

Esta relação nos permite uma reformulação do Teorema de Routh na forma do seguinte teorema conhecido como o Teorema de Routh-Hurwitz:

TEOREMA 3.1 (Routh-Hurwitz [14 vol. II])

O número k de raízes da equação polinomial $f(z) = 0$ no semi-plano direito($Re\{z\} > 0$) é igual ao número de variação do sinal da sequência

$$a_0\ ,\ \Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ .\ .\ .\ .\ ,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

onde Δ_i $i = 1, \ldots, n$ são os determinantes de Hurwitz

3.2 RELACIONAMENTO ENTRE OS PROCESSOS DAS EQUAÇÕES MATRICIAIS E FUJIWARA (DATTA [5])

3.2.1. PROBLEMA DE ROUTH-HURWITZ.

Demonstraremos o Teorema 2.1 (Routh-Hurwitz-Fujiwara) por meio da equação de Lyapunov. Mostraremos que a matriz de Fujiwara F_{RH} satisfaz uma equação matricial do tipo de Lyapunov e o resultado de Fujiwara segue do Teorema 1.15 (Carlson-Schneider)

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1

De (3) temos

$$F_{RH} = D\,B \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

onde $D = dg\ (1, -1, 1, \quad . \quad . \quad ., (-1)^{n-1})$

Daremos esta demonstração considerando caso n ímpar e n par

1) Caso n ímpar.

Pelo lema 1.1 e de $D^{-1} = D$ nós obtemos de (21)

$$D\, F_{RH}\, A - A^T\, D\, F_{RH} = 0 \qquad \text{isto é}$$

$$F_{RH}\, A - D\, A^T\, D\, F_{RH} = 0 \quad . \; . \; . \quad (22)$$

Verifica-se facilmente que

$$- D\, A^T\, D = A^T - L_1$$

onde

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2\,a_1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2\,a_3 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2\,a_n \end{pmatrix} \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Então em (22) nós temos

$$F_{RH}\ A - (A^T - L_1)\ F_{RH} = 0$$

ou

$$F_{RH}\ A - A^T F_{RH} = L_1\ F_{RH} = N_1 \quad \ldots (24)$$

Os coeficientes f_{ij} da matriz de Fujiwara F_{RH} são dados por: (Datta [13])

$$f_{ij} = 0 \text{ se } i + j = \text{impar}$$

$$f_{ij} = -2 \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+i}\ a_k\ a_{i+j+1-k} \qquad \text{se } i+j = \text{par}$$

$$(\text{o conjunto } a_{n+1} = -1)$$

Logo a última linha f_n de F_{RH} é a negativa da transporta da última coluna de L_1

$$f_n = -(2\,a_1,\ 0,\ 2\,a_3,\ 0,\ .\ .\ .,\ 0,\ 2\,a_n)$$

Então

$$N_1 = L_1\ F_{RH} = -f_n{}^T f_n = -\begin{pmatrix} 4a_1^2 & 0 & 4a_1a_3 & 0 & . & . & . & 4a_1a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 4a_1a_3 & 0 & 4a_3^2 & 0 & . & . & . & 4a_3a_n \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ 4a_1a_n & 0 & 4a_3a_n & 0 & . & . & . & 4an^2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

2) caso n par

Neste caso nós temos

$$- D A^T D = A^T - L_2$$

onde

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 2a_2 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 2a_n \end{pmatrix} \quad \ldots (26)$$

Em (22) resulta

$$F_{RH} A + A^T F_{RH} = L_2 F_{RH} = N_2 \quad \ldots \qquad (27)$$

A última linha f_n de F_{RH} neste caso também é a negativa da transposta da última coluna de L_2 isto é

$$f_n = -(0, 2a_2, 0, \ldots 2a_n)$$

Então

$$N_2 = L_2\, F_{RH} = -f_n^T f_n = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 4a_2^2 & 0 & . & . & . & 0 & 4a_2a_n \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 4a_2a_4 & 0 & . & . & . & 0 & 4a_4a_n \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 4a_2a_n & 0 & . & . & . & 0 & 4a_n^2 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

N_1 e N_2 são óbviamente matrizes negativas definidas.

Segue do lema 1.2 e da relação (21) que

$$F_{RH} = D\ U\ g(A)$$

Como F_{RH} é simétrica nós temos

$$F_{RH} = F_{RH}^T = g(A^T)\ U^T D$$

Como F_{RH} é não singular temos que $g(A^T)$ também o é

Sejam λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A, então os autovalores de $g(A^T) = g(A^*)$ são $g(\bar{\lambda}_1), g(\bar{\lambda}_2), \ldots, g(\bar{\lambda}_n)$

Desde que

$$g(\bar{\lambda}_i) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (\bar{\lambda}_i + \lambda_j) \qquad (\neq 0)$$

e A é real, concluímos que $\delta(A) = 0$.

A parte i) do Teorema 2.1 segue agora do Teorema 1.15.

Suponhamos que as partes reais de todos os zeros de $f(x)$ são negativas. Então $\delta(A) = 0$. Como a matriz de Fujiwara F_{RH} satisfaz as equações matriciais (24) e (27) (de acordo com n impar e par) e é não singular segue do Teorema 1.15.(Carlson e Schneider) que $In(A) = In(-F_{RH})$. Então neste caso F_{RH} é positiva definida. Por outro lado, se F_{RH} é positiva definida, da relação

$$F_{RH} = g(A^T)\; U^T D$$

temos que $g(A)$ é não-singular. Isto nos dá que $\delta(A)=0$. Então $In(A)= In(-F_{RH})$ e daqui concluímos que as partes reais de todos os zeros de $f(x)$ são negativas.

3.2.2. PROBLEMA DE SCHUR-COHN

Analogamente ao problema de Routh-Hurwitz provaremos o Teorema 2.7 (Schur - Cohn - Fujiwara) via uma equação matricial.

De (13) temos:

$$F_{SC} = BP \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

onde P é a matriz de permutação definida em (7).

Do lema 1.1 e da relação (29) podemos escrever

$$A^T F_{sc} - F_{sc}\, PAP = 0$$

Multiplicando por A a direita fica

$$A^T F_{sc}\, A - F_{sc}\, P A P A = 0 \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

Verifica-se facilmente que $P\,APA = I + L_3$ onde

$$L_3 = \begin{pmatrix} a_1^2 - 1 & a_n + a_1 a_2 & . & . & . & a_2 + a_1 a_n \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

e I é a matriz identidade de ordem n.

Então de (30) nós temos

$$A^T F_{sc}\, A - F_{sc}\, (I + L_3) = 0 \quad \text{isto é}$$

$$A^T F_{sc}\, A - F_{sc} = F_{sc}\, L_3 = N_3 \quad . \quad . \quad . \qquad (32)$$

Construida a matriz F_{sc}, pela relação (29) onde a matriz B é encontrada pelo lema 1.2, verifica-se que a última coluna de F_{sc} neste caso também é a negativa da transposta da primeira linha ℓ_1 de L_3, portanto:

$$N_3 = -\ell_1^T \cdot \ell_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -(1-a_1^2)^2 & (1-a_1^2)\ (a_1a_2+a_n) & \ldots & (1-a_1^2)\ (a_1a_n+a_2) \\ (1-a_1^2)(a_1a_2+a_n) & -\ (a_1a_2+a_n)^2 & \ldots & -(a_1a_2+a_n)(a_2+a_1a_n) \\ \vdots & & & \\ (1-a_1^2)(a_1a_n+a_2) & -\ (a_1a_2+a_n)(a_2+a_1a_n) & \ldots & -(a_1a_n+a_2)^2 \end{pmatrix}$$

A matriz N_3 é claramente negativa semi-definida.

Do lema 1.2 e da relação (29) temos

$$F_{sc} = Ug(A)P$$

Desde que F_{sc} é simétrica

$$F_{sc} = (F_{sc})^T = Pg(A^T)\ U^T$$

e a não singularidade de F_{sc} implica na não-singularidade de $g(A^T)$.

Os autovalores de $g(A^T) = g(A^*)$ são $g(\bar{\lambda}_1)$, $g(\bar{\lambda}_2)$, ..., $g(\bar{\lambda}_n)$. Para todo i=1, ..., n. Então $g(\bar{\lambda}_i) = \prod_{j=1}^{n} (1-\bar{\lambda}_i \cdot \lambda_j)$ são diferentes de zero. Portanto $\bar{\lambda}_i \cdot \lambda_j \neq 1$ para todo i, j, isto é, f(x) não têm autovalores de módulo 1.

Do Teorema 1.19 podemos concluir a parte i) do Teorema 2.7.

A demonstração da parte ii) do Teorema 2.7 é análoga à parte ii) do Teorema 2.1 (Routh-Hurwitz-Fujiwara).

3.3 RELACIONAMENTO ENTRE OS PROCESSOS DE MATRIZ POLINÔMIO E DA EQUAÇÃO MATRICIAL.

3.3.1 PROBLEMA DE ROUTH-HURWITZ.

Daremos a prova do Teorema 2.2 usando a equação matricial de Lyapunov estabelecendo assim o relacionamento entre os processos da Matriz Polinômio e Equação Matricial

Consideraremos a caso n impar. O caso n par é análogo com algumas modificações óbvias.

Da relação (21) e do lema 1.2 podemos escrever a seguinte relação:

$$F_{RH} = DU\tilde{f}(-A) \quad . . . \qquad (34)$$

Em (24) temos a relação

$$F_{RH}A + A^T F_{RH} = N_1 \quad . . . \qquad (35)$$

Usando (34) em (35) obtem-se

$$DUf(-A)A + A^T DUf(-A) = N_1$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz P definida em (7) fica :

$$PDUf(-A)P\, P^{-1}AP + PA^T DUf(-A)P = PN_1P = N'$$

Como $f(-A)\ P = R$ e $P^{-1} = P$ podemos escrever a seguinte relação:

$$PDURPAP + PA^TPPDUR = N'$$

Tomando $PAP = C$ temos $PA^TP = C^T$ e fazendo $X = PDUR$, a relação acima se torna

$$XC + C^TX = N'$$

$N' = PN_1P$ é negativa semi-definida e X é simétrica pois $X = PF_{RH}P$, onde F_{RH} está definida em (34), $X^T = PF_{RH}P = X$.

Verifica-se facilmente que

$$C^T = \begin{pmatrix} a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_2 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Precisaremos agora do seguinte lema:

Lema 3.1 (Datta [6])

Seja $H = (h_{ij})$ uma nxn matriz de Hessenberg inferior com diagonal superior unitária.

Se $P(H)$ é um polinômio em H de grau menor ou igual a n, então as sucessivas colunas $a_1, a_2, \ldots a_n$ de $P(H)$ satisfazem a relação recursiva

$$a_{n-1} = B_n a_n$$

$$a_{n-i} = B_{n-i+1} a_{n-i+1} \; a \sum_{k=n-i+2}^{n} h_{k,n-i+1} a_k$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-1$$

onde

$$B_i = H - h_{ii} I$$

Se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são as colunas de $f(-C^T)$ então pelo lema 3.1

$$c_{n-i} = C^T c_{n-i+1} \qquad i=1,2,3 \ldots n-1$$

Agora a não-singularidade da matriz de Fujiwara F_{RH} implica na não-singularidade de $f(-A)$ e portanto, $f(-C^T) = f(-PA^TP) = Pf(-A^T)P$ é também não singular. Então $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são linearmente independentes mas

$$c_{n-1} = C^T c_n, \; c_{n-2} = C^T c_{n-1} = C^T C^T c_n = C^{T^2} c_n$$

$$c_{n-3} = C^T c_{n-2} = C^T C^{T^2} c_n = C^{T^3} c_n \; \ldots \; c_1 = C^{T^{n-1}} c_n$$

logo $c_n, C^T c_n, C^{T^2} c_n, \ldots C^{T^{n-1}} c_n$ são

linearmente independentes

Verifica-se facilmente que a última coluna N_n de N' é

$$N_n = 2a_1 c_n$$

Podemos concluir portanto que $N_n, C^T N_n, \ldots, (C^T)^{n-1} N_n$ são lineramente independentes, pois $a_1 \neq 0$.

(Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A então os autovalores de f(-A) são

$$(-1)^n \prod_{j=1}^{n} (\lambda_i+\lambda_j) \quad i = 1, \ldots n$$

Como f(-A) é não singular $\lambda_i + \lambda_j \neq 0 \ \forall ij$ o que implica que A não tem autovalor com parte real nula, logo A é não-singular, portanto $a_1 \neq 0$).

O posto de $N', C^T N', \ldots, (C^T)^{n-1} N'$ é igual a n. Pelo Teorema 1.16

$$In(c) = In(-X)$$

Logo In(A) = In(-X) pois os autovalores de C e A são os mesmos

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os menores principais líderes de X. Então pelo Teorema 1.2(Jacobi) os números de autovalores positivos e negati - vos de X são respectivamente os números de permanência e variação dos sinais de sequência

$$1, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Como

$$X = PDUR = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ -a_3 & -a_4 & \dots & -1 & 0 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{pmatrix} \cdot R$$

Pelo teorema 1.1 (Cauchy-Binet) podemos concluir o Teorema 2.2

3.3.2 PROBLEMA DE SCHUR-COHN (DATTA [6])

Provaremos o TEOREMA 2.7. usando a equação matricial de Lyapunov, estabelecendo assim a relação entre os dois processos de soluções para o problema de Schur-Cohn.

Da relação (13) e do lema 1.2 podemos ascrever a seguinte relação:

$$F_{sc} = PEg(A)P \quad \dots \qquad (36)$$

onde $E = U^T$, U definida no lema 1.2.

Em (32) temos $\quad A^T F_{sc} A - F_{sc} = N^3$

Usando (36) temos $\quad A^T PEg(A)PA - PEg(A)P = N_3$

Multiplicando ambos os lados por P e usando o fato de que $P^2 = I$ temos

$$PA^T P(Eg(A))PAP - Eg(A) = PN_3P = N''$$

Chamando PAP = M e Eg(A) = T a relação acima fica

$$M^T TM - T = N''$$

$N'' = PN_3P$ é negativa semi-definida e T é simétrica pois $T = PF_{sc}P = T^T$.

Verifica-se facilmente que

$$M^T = \begin{pmatrix} a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Se $m_1, m_2, \ldots, m_n$ são as n sucessivas colunas de $g(M^T)$, então pelo lema 3.1 podemos deduzir a seguinte lei de formação:

$$m_{n-i} = M^T m_{n-i+1} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

A não singularidade de g(A) implica na não singularidade de $g(M^T)$ pois

$$g(M^T) = g(PA^T P) = Pg(A^T)P.$$

Como $m_{n-1} = M^T m_n$, $m_{n-2} = M^T m_{n-1} = (M^T)^2 m_n$, ..., $m_1 = M^{T^{n-1}} m_n$ podemos concluir que

$$m_n,\ M^T m_n,\ .\ .\ .\ .\ ,\ (M^T)^{n-1} m_n \text{ são}$$

linearmente independentes.

Efetuando alguns cálculos chegamos que a última coluna N_n de N" é

$$N_n = (1 - a_1^2)\, m_n$$

o que nos permite concluir que

$$N_n,\ M^T N_n,\ (M^T)^2 N_n,\ ...,\ (M^T)^{n-1} N_n \quad \text{são}$$

linearmente independentes $(1-a_1^2 \neq 0$, pois este é primeiro menor principal líder de g(A)))

Logo o posto de $(N", M^T N", ..., (M^T)^{n-1} N")$ é igual a n.

Como M e A tem os mesmos autovalores, pelo TEOREMA 1.20 o número de autovalores de A com módulo menor (maior) que um é igual ao número de autovalores positivos e negativos de T.

Se $T_1, T_2, ..., T_n$ são os menores principais líderes de T, então pelo Teorema 1.2 (Jacobi) os números de autovalores positivos e negativos de T são respectivamente os números de permanência e variação dos sinais da sequência

$$1,\ T_1,\ T_2,\ ...,\ T_n$$

Mas pelo Teorema 1.1 os menores principais líderes de T são os mesmos Di $i=1, \ldots, n$ de $g(A)$, provando assim o TEOREMA 2.7.

3.4. RELACIONAMENTO ENTRE OS PROCESSOS DE EQUAÇÃO MATRICIAL E USANDO A MATRIZ DE SCHWARZ.

3.4.1 PROBLEMA DE ROUTH-HURWITZ

Daremos uma prova do Teorema 2.3 por meio da equação de Lyapunov; mostraremos que a matriz de Schwarz satisfaz esta equação e o Teorema 2.3. segue do Teorema 1.17 de Datta.

Seja

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -s_n & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s_2 & -s_1 \end{pmatrix}$$

uma matriz de Schwarz onde $s_i \neq 0 \ \forall i \quad i = 1, \ldots, n$.

É fácil ver que existe uma matriz diagonal

$$D = dg\left(\frac{s_1}{s_2 . s_3 \ldots . s_n}, \frac{s_1}{s_2 . s_3 \ldots . s_{n-1}}, \ldots, \frac{s_1}{s_2}, s_1\right)$$

tal que

$$SD + DS^T = -dg(0,0,\ldots,0,2s_1^2) = -W$$

S é uma matriz de Hessenberg inferior com diagonal superior unitária. W é positiva semi-definida ($s_1 \neq 0$). Então pelo Teorema 1.13 de Datta temos:

a) S não tem autovalores puramente imaginários

b) $In(S) = In(-D)$

Portanto o número de autovalores com partes reais negativas e positivas são respectivamente os números de termos positivos e negativos da sequência

$$s_1, s_1 s_2, \ldots, s_1.s_2 \ldots s_n.$$

3.5 RELACIONAMENTO ENTRE OS PROCESSOS DA EQUAÇÃO MATRICIAL E MATRIZ DE HANKEL DOS PARÂMETROS DE MARKOV.

3.5.1 PROBLEMA DE ROUTH-HURWITZ

Daremos a demonstração do Teorema 2.4 por meio da Equação Matricial de Lyapunov e do Teorema 1.15 estabelecendo assim o relacionamento entre os dois métodos.

Seja $H'_{nn} = V\ H_{nn}$ onde V é a mesma definida do lema 1.5.

O lema 1.3 nos dá que

$$H_{nn}\, A^T = AH_{nn} \text{ como } V^2 = I \text{ obtemos}$$

$$V\, VH_{nn}A^T = AVVH_{nn}$$

$$VH'_{nn}\, A^T = AVH'_{nn}$$

$$H'_{nn}\, A^T = VAVH'_{nn} \qquad \text{isto é}$$

$$H'_{nn}A^T - VAVH'_{nn} = 0 \ . \ . \ . \quad (37)$$

Definimos

$$Q_1 = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ s_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ s_{n-1} & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

De (2) e do lema 1.4 podemos dizer que

$$-VAV = \begin{cases} A + Q_1 & \text{para n impar} \\ A - Q_1 & \text{para n par} \end{cases}$$

então em (37) temos

$$AH'_{nn} - H'_{nn}A^T = \begin{cases} -Q_1H'_{nn} = Q' & \text{n impar} \\ Q_1H'_{nn} = Q'' & \text{n par} \end{cases}$$

Verifica-se que se h_1' é a $1^{\underline{a}}$ linha de H_{nn}' e q_1 é a $1^{\underline{a}}$ coluna de Q_1 então:

$$h_1' = \begin{cases} -(s_o, s_1, \ldots, s_{n-1}) = -q_1^T & n \text{ impar} \\ (s_o, s_1, \ldots, s_{n-1}) = q_1^T & n \text{ par} \end{cases}$$

Q' e Q" são representadas por $(h_1')^T h_1'$ sendo portanto matrizes positivas semi-definidas.

Então a matriz H_{nn}' é tal que em cada caso.

$$AH_{nn}' + H_{nn}'A^T = Q \quad . \quad . \quad . \qquad (38)$$

onde Q é uma matriz simétrica e positiva semi-definida.

Desde que H_{nn} é não-singular, $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f(-x)}{f(x)}$ implica que f(x) e f(-x) não têm zeros em comuns [14 vol.II] portanto f(x) não tem autovalores puramente imaginários, e f(-A) é não singular. Logo H_{nn}' é a única solução da equação matricial (38) (vide seção 1.5 - Capítulo I).

Como $H_{nn}'^T$ também é solução de (38) temos que H_{nn}' é simétrica. A não-singularidade de H_{nn} implica na não-singularidade de H_{nn}'.

Aplicando o Teorema 1.15 na relação (38) temos completa a demonstração da parte a) do Teorema 2.4.

Seja H_{nn}' positiva (negativa) definida. Então pela parte ii) do Teorema 2.4 todos os zeros de f(x) tem parte real positiva (negativa).

Reciprocamente, se todos os zeros de f(x) tem parte real positiva (negativa) f(x) e f(-x) não tem zeros comuns, isto implica que H_{nn} e H_{nn}' são não-singulares.

Desde que o número de zeros de f(x) com parte real positiva (negativa) é igual ao número de autovalores positivos (negativos) de H_{nn}', temos que H_{nn}' é positiva (negativa) definida.

3.5.2. PROBLEMA DE SCHUR-COHN.

Anãlogamente ao problema de Routh-Hurwitz provaremos o TEOREMA 2.8 via equação matricial e pela aplicação do Teorema 1.20.

Em (20) temos

$$H'_{nn} = H_{nn}UPU^{-1} = H_{nn}\ P'$$

Sabemos que U^{-1} existe e $UA = A^TU$ . . . (39)

Desde que

$$AH_{nn} = H_{nn}A^T$$

$$AH'_{nn}\ P' = H'_{nn}P'A^T$$

$$AH'_{nn} = H'_{nn}\ P'A^TP' \quad \text{pois } (P')^2 = I$$

Multiplicando por A^T em ambos os membros temos

$$AH'_{nn}A^T - H'_{nn}P'A^TP'A^T = 0 \quad . . . \quad (40)$$

mas

$$P'A^TP'A^T = UPU^{-1}A^TUPU^{-1}A^T \quad . . . \quad (41)$$

$$= UPU^{-1}UAU^{-1}UPU^{-1}UAU^{-1} \quad \text{usando (39)}$$

$$= U(PAPA)U^{-1}$$

Verifica-se facilmente que

$$PAPA = I + L_3$$

onde L_3 é definida por (31)

Então $P'A^TP'A^T = U(I + L_3)U^{-1}$

$$= I + UL_3U^{-1} = I + K_1 \quad . . . \qquad (42)$$

Observando a relação entre os parâmetros de Markov e os coeficientes de g(x), (2) podemos ver que a primeira linha de

$$L_3 = (a_1^2-1,\ a_n+a_1a_2,\ . . .,\ a_2+a_1a_n) =$$

$$(-s_{n-1} + a_ns_{n-2} + \ldots + a_2s_o,\ - s_{n-2}+a_ns_{n-3}+\ldots+a_3s_o, \ldots, -s_o)$$

Se $U^{-1} = (u_{ij}^{-1})$ então a última linha de U^{-1} pode se gerada usando a seguinte relação recursiva:

$$u_{n1}^{-1} = 1$$

$$u_{nR}^{-1} = a_{n-R+2}u_{n1}^{-1} + a_{n-R+3}\,u_{n2}^{-1} + . . . a_n\,u_{n,R-1}^{-1} \qquad R = 2, \ldots, n$$

$$K_1 = UL_3U^{-1} = \begin{pmatrix} a_2\,s_o & a_2s_1 & . & . & . & a_2\,s_{n-1} \\ a_3\,s_o & a_3s_1 & . & . & . & a_3\,s_{n-1} \\ . \quad . & . & . & . & . & . \quad . \\ a_n\,s_o & a_ns_1 & . & . & . & a_n\,s_{n-1} \\ -s_o & -s_1 & . & . & . & -s_{n-1} \end{pmatrix}$$

De (40) e (42) temos

$$AH'_{nn}A^T - H'_{nn} = H'_{nn}K_1 = K$$

onde $$K = H'_{nn}\ K_1 = H_{nn}\ P'K_1$$

Verifica-se facilmente que

$$P'K_1 = \begin{pmatrix} -s_o & -s_1 & -s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -s_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

Como a primeira coluna h_1 de H_{nn} é a negativa da transposta da primeira linha de $P'K_1$ temos que

$K = H_{nn}P'K_1 = -h_1h_1^T$ é uma matriz

negativa semi-definida

Então

$$AH'_{nn}A^T - H'_{nn} = K \quad . \ . \ . \qquad (43)$$

onde K é negativa semi-definida

Como H_{nn} é não-singular os elementos da primeira linha de H_{nn}

não são todos nulos. Seja o (i+1)-ésimo elemento s_i diferente de zero, e seja k_i a (i+1)-ésima coluna de K, então

$$k_i = -s_i \begin{pmatrix} s_o \\ s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{n-1} \end{pmatrix} \qquad Ak_i = -s_i \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{pmatrix}$$

$$A^2 k_i = -s_i \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{n+1} \end{pmatrix} \; . \; . \; . \; A^{n-1} k_i = -s_i \begin{pmatrix} s_{n-1} \\ s_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{2n-2} \end{pmatrix}$$

Os resultados destes produtos são devidos à relação (2). Então a matriz $(k_i, Ak_i, \ldots, A^{n-1}k_i)$ é

$$= (-1)^n s_i^n \begin{pmatrix} s_o & s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & s_n \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ s_{n-1} & s_n & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \; s_i^n \; H_{nn}$$

Como H_{nn} é não-singular e $s_i \neq 0$

$$\text{posto}(k_i, Ak_i, \ldots A^{n-1}k_i) = n$$

Então posto $(K, AK, \ldots, A^{n-1}K) = n$

Novamente a não-singularidade de H_{nn} implica que $f(x)$ e $g(x) = x^n f(\frac{1}{x})$ não tem zeros em comum, o que implica que $g(A)$ é não-singular. Logo H'_{nn} é a única solução de (43) e é também simétrica.

Aplicando o Teorema 1.20 em (43) concluímos a parte a) do Teorema 2.8.

A demonstração da parte b) é direta do ítem ii) da parte a).

3.6 RELACIONAMENTO ENTRE A MATRIZ DE HANKEL DOS PARÂMETROS DE MARKOV E A MATRIZ POLINOMIAL

Abaixo damos um resultado recente de Datta [12] que estabelece um relacionamento entre a Matriz de Hankel dos Parâmetros de Marcov e a matriz polinômio associada. Claramente, esse resultado pode ser usado para estabelecer o relacionamento entre o processo da matriz de Hankel dos parâmetros de Markov e o processo da Matriz Polinômio, tanto para o problema de Routh-Hurwitz como para o problema de Schur-Cohn.

TEOREMA 3.2 (Datta [12])

Seja $\quad f(x) = x^n - a_n x^{n-1} \ . \ . \ . \ -a_2 x - a_1$

e $g(x)$ um polinômio qualquer de grau n.

Então:

$$g(A) = H_{nn} \begin{pmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n & 1 \\ -a_3 & -a_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde A é a matriz compaheira de $f(x)$ e H_{nn} é a matriz de Hankel dos parâmetros de Markov associada a $f(x)$ e $g(x)$.

CAPÍTULO IV

DISCUSSÕES

Esta Dissertação consiste em estudar os diversos métodos e seus relacionamentos para a solução de dois problemas: o de Routh-Hurwitz e o de Schur-Cohn. Pára este objetivo dividimos o trabalho em tres capítulos. No primeiro capítulo apresentamos um resumo de alguns tópicos da Teoria de Matrizes necessários para um bom entendimento dos posteriores. Citamos neste capítulo os principais teoremas de inércia como, por exemplo Lyapunov, Carlson e Schneider, Teorema da inércia para uma matriz de Hessenberg de Datta, Wimmer e Zeibur, Chen e Wimmer e outros. Fizemos um resumo sobre as matrizes de Hankel dos Parâmetros de Marcov e algumas de suas propriedades.

Na última seção apresentamos uma maneira de achar a inércia de uma matriz hermitiana visto que esta é uma situação que enfrentamos nos próximos capítulos.

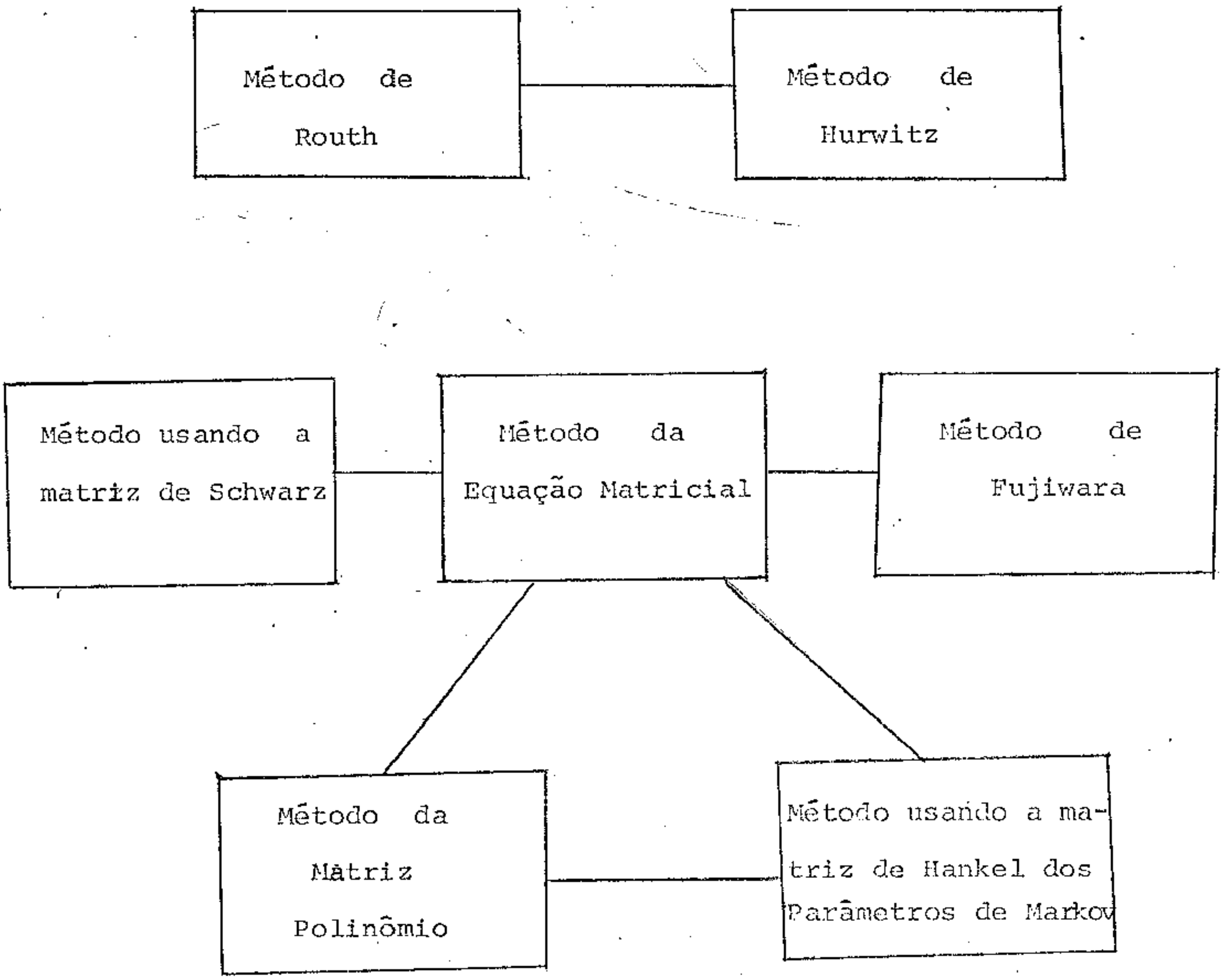
No capítulo dois apresentamos os processos para a solução dos problemas. Para o de Routh-Hurwitz: método de Routh, Hurwitz, Equações Matriciais, Matriz Polinômio, Fujiwara, método usando a matriz de Schwarz, método usando a matriz de Hankel dos Parâmetros de Markov. Para o problema de Schur-Cohn: método de Schur, Cohn, Fujiwara, Equação Matricial, Matriz Polinômio e método usando a matriz de Hankel dos Parâmetros de Markov.

Uma questão interessante que surge neste capítulo é ver se método de Schwarz que funciona para o problema de Routh-Hurwitz também pode ser aplicado a resolução do problema de Schur-Cohn.

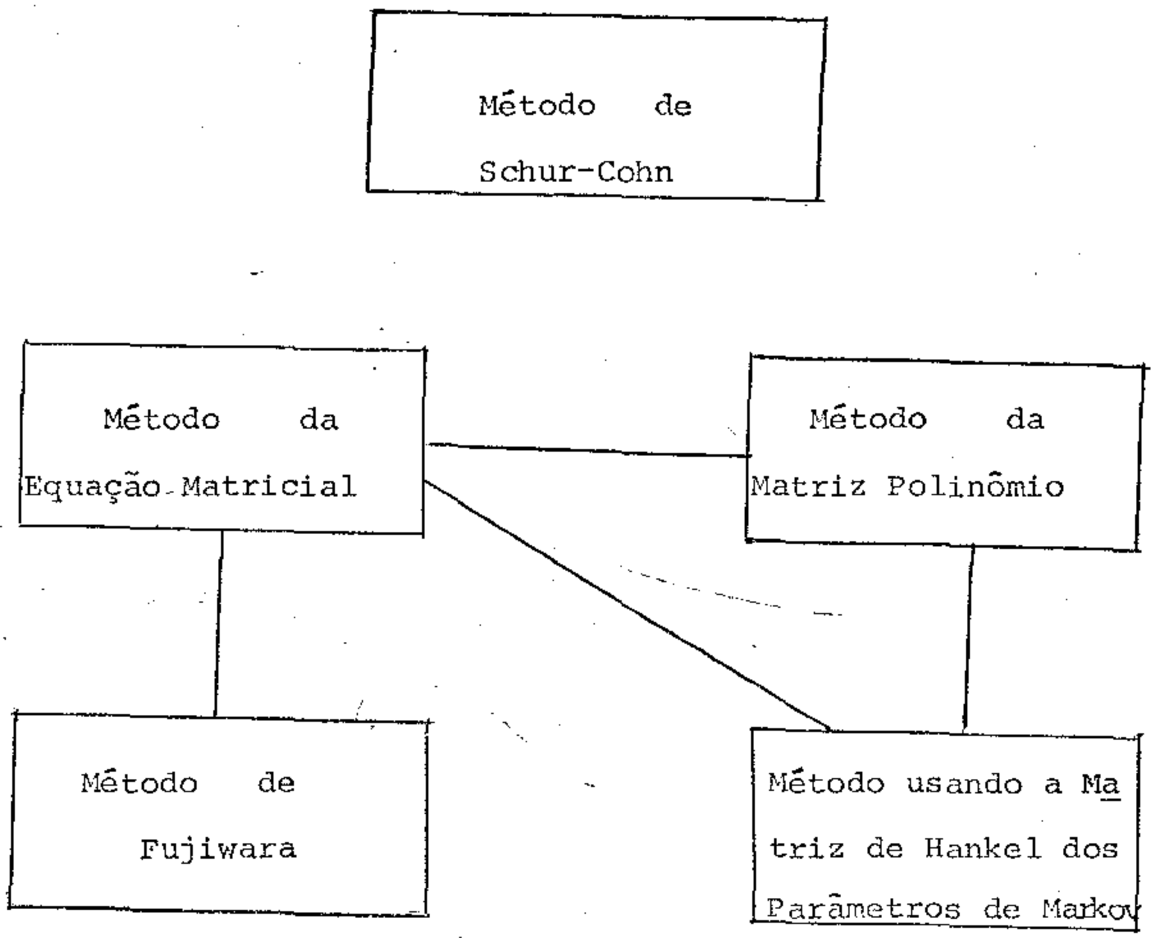
No capítulo tres fazemos alguns relacionamentos entre os métodos estudados no capítulo dois.

Nos quadros abaixo mostramos esquematicamente os processos que foram relacionados neste capítulo.

PROBLEMA DE ROUTH-HURWITZ



PROBLEMA DE SCHUR - COHN



Para darmos as demonstrações dos Teoremas Routh-Hurwitz-Fujiwara,e Schur-Cohn-Fujiwara via equações matriciais, usamos os teoremas de inércia de Carlson-Schneider e Taussky-Will-Wimmer. É interessante ver se os teoremas de inércia de uma matriz de Hessenberg (Datta) podem ser usados para esta finalidade. Podemos formular a mesma questão no relacionamento entre equação matricial e o método usando a matriz de Hankel dos Parâmetros de Markov.

BIBLIOGRAFIA

1 - BARNETT, S. A note on the Bezotian matrix, S.I.A.M. J. Appl. Math. 25 (1972), 84 - 86.

2 - CARLSON, D.H. e SCHNEIDER H. Inertia Theorems for Matrices: The Semi-definite Case, Journal of Math. Analysis and Applications Vol. 6, Nº 3 June 1963 430 - 446.

3 - CHEN CHI-TSONG - A Generalization of the Inertia Theorem, S.I.A.M. Appl. Math. Vol. 25 Nº 2 September 1973, 158 - 161.

4 - DATTA, B.N. - Quadratic Forms, matrix equations and the matrix eigenvalue problem, TESE, Universidade de Ottawa, Ottawa, Canada 1972.

5 - DATTA, B.N. - On the Routh-Hurwitz - Fujiwara and the Schun - Cohn - Fujiwara Theorems for the Root-Separation Problem, Linear Algebra and its Applications (será publicado)

6 - DATTA, B.N. Matrix Equation, Polynomial Matrix and the Stability Problem of the Discrete-Time-System, Linear and Multilinear Algebra (será publicado).

7 - DATTA, B.N. and DATTA KARABI. An Algorithm for Computing Powers of a Hessenberg Matrix and its Applications, Linear Algebra and its Appl. 14, 273 - 284 (1976).

8 - DATTA, B.N. Two Inertia theorems for Hessenberg Matrices and their Applications to Stability Analysis of Linear Control Systems, publicado no proceedings of "First World Conference on Mathematics at Service of Man", Barcelona, Espanha, Julho, 1976.

9 - DATTA, B.N. A Constructive Method for finding the Schwarz form of a Hessenberg matrix, IEEE trans. Automatic Control, Vol. AC - 18, (1974), 616 - 617.

10 - DATTA, B.N. An Inertia theorem for the Schwarz Matrix, IEEE trans. Automatic Control, Vol. AC - 20 (1975), 273 - 274.

11 - DATTA, B.N. Application of Hankel Matrices of Markov Parameters to the Solutions of the Routh - Hurwitz and the Schur - Cohn Problems, Journal of Math. Analysis and its Appl. (será publicado)

12 - DATTA, B.N. A Relationship between a Hankel Matrix of Markov Parameters and the Associated Polynomial Matrix with some Applications (será publicado)

13 - DATTA, B.N. Matrices satysfing Siljak's Conjecture, IEEE trans. Automatic Control Vol. AC - 22 (1977) 132 - 133.

14 - GAUTMACHER, F.R. "The theory of Matrices" Vol. I e Vol. II, Chelsea, New York 1959.

15 - HILL, R.D. Inertia Theory for simultaneously triangua-ble complex matrices, Lin. Alg. and Appl. 2 (1969) pp. 131 - 142.

16 - OSTROWSKI A. and SCHNEIDER Some Theorems on the inertia of general matrices, J. Math. Anal. Appl. 4 (1962) 72-84.

17 - SCHWARZ, H. R. Ein Verfahren Zur Stabilitas frag bei matrizes-eigenwarte problem" J. Angen. Math. Phys. vol. 7 pp. 1 - 10, 1970.

18 - TAUSSKY O. Matrizes C com $C^n \longrightarrow 0$, J. Algebra I (1964) 5 - 10.

19 - TAUSSKY O. A remark on a theorem of Lyapunov, J. Math. Anal. Appl. 2 (1961) 105 - 107.

20 - WILKINSON, J. H. The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford, 1965. (347 - 349).

21 - WIMMER, H.K. On the Ostowski - Schneider Inertia Theorem., J.Math.Appl. 14 (1973), 164 - 169.

22 - WIMMER, H.K. Inertia Theorem for Matrices,Controllability and Linear Vibrations , Linear Alg. Appl. 8 (1974), 337 - 344.

23 - WIMMER, H.K. An Inertia theorem for tridiagonal matrices and a criterion of Wall on Continued fractions, Linear Alg. Appl. (1974) 41 - 44.

24 - WIMMER H.K. e ZEIBUR, A.D.

Remarks on inertia theorems for matrices ,
Czech. Math. J. 25 (1975) 556 - 561.