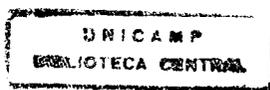


Aspectos da Teoria de Semigrupos em Grupos de Lie Semi-simples e Aplicações

Richard Manuel Mamani Troncoso

Luiz A. B. San Martin
Orientador

Imecc-Unicamp
Agosto de 1999



Aspectos da teoria de Semigrupos em Grupos de Lie Semi-simples e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por RICHARD MANUEL MAMANI TRONCOSO e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 de Outubro de 1999.



Prof. Dr : Luiz A. B. San Martin
Orientador

BANCA EXAMINADORA:

1. Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.
2. Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros.
3. Prof. Dr. Francesco Mercuri.
4. Prof. Dr. Washington Luiz Marar.
5. Prof. Dr. Victor Alberto José Ayala Bravo.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

N.º CHAMADA:

V.	Ex.		
TOMBO BC/	39592		
PROC.	229/99		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00		
DATA	02-12-99		
N.º CPD			

CM-00137156-6

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Mamani Troncoso, Richard Manuel

M31a Aspectos da teoria de semigrupos em grupos de Lie semi-simples e aplicações / Richard Manuel Mamani Troncoso -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Luiz A. B. San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

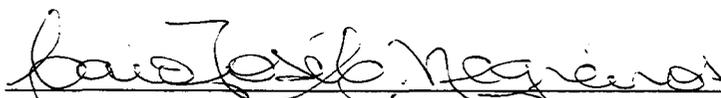
1. Lie, Grupos semi-simples de. 2. Semigrupos. 3. Teoria do controle. I. San Martin, Luiz Antonio B. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 07 de outubro de 1999 e aprovada

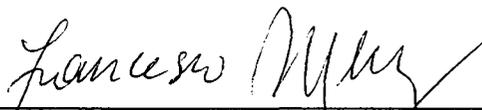
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



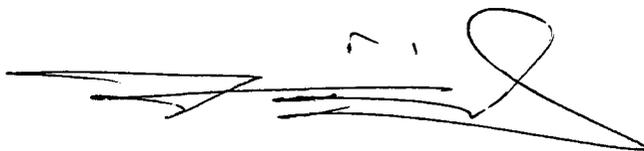
Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS



Prof (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI



Prof (a). Dr (a). WASHINGTON LUIZ MARAR



Prof (a). Dr (a). VICTOR ALBERTO JOSÉ AYALA BRAVO

Aos

meus pais

e a meu irmão

Edwing

Agradecimentos

Agradeço

- Ao Prof. Luiz A.B. San Martin pela orientação neste trabalho.
- À Unicamp pela oportunidade e fundamentalmente à Capes pelo suporte financeiro.
- À minha família por saber compreender a demora.
- Aos meus poucos amigos.

Resumo

Nesta tese introduzimos o conceito de elemento regular decomposto e estudamos a dinâmica da ação de tais elementos sobre variedades flag correspondentes ao grupo de Lie $SL(d, \mathbb{R})$. Baseados nesses conceitos, obtemos conjuntos estáveis e instáveis, conjuntos limites, assim como uma decomposição de Morse sobre ditas variedades. O estudo dessa dinâmica é feito com o objetivo de estender um resultado de controlabilidade global a tempo discreto para sistemas bilineares definidos por elementos de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. Por outro lado, são estudados semigrupos no grupo $SO_0(d, 1)$, considerando em particular as propriedades de conexidade de semigrupos maximais de interior não vazio. Tendo em vista de que este tipo de semigrupo deixa invariante um subconjunto fechado com interior denso, dita conexidade está baseada na convexidade do subconjunto invariante em relação a métrica de Takeuchi-Kobayashi e no conceito de reversibilidade relativa. Portanto, obtemos uma classe de semigrupos conexos e maximais. As demonstrações desses fatos exigem o desenvolvimento de resultados preliminares em grupos semi-simples de posto um.

Abstract

In this thesis, we introduce a generalized concept of split-regular element and study the dynamics of such elements on the flag manifolds corresponding to the Lie group $SL(d, \mathbb{R})$. Based in these concepts, we obtain the stable and unstable manifolds, as well Morse decomposition on flag manifolds. These dynamical aspects are studied with the purpose of applying them in order to extend a result of global controllability of discrete time bilinear systems defined by elements of $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. On the other hand, we study semigroups with nonempty interior in $SO_0(p, 1)$, considering in particular the connectivity properties of the maximal semigroups. Taking into account that this type of semigroup leave invariant a closed subset with dense interior, such connectivity is based in the convexity of the corresponding invariant subset with respect to the canonical metric of Takeuchi-Kobayashi and the concept of relative reversibility, which we introduce for this purpose. With this result we obtain a class of maximal connected semigroups.

Introdução

Nesta tese estudamos semigrupos em grupos de Lie semi-simples, complementando e detalhando resultados gerais da teoria. Um conceito básico é o de conjunto de controle, os quais são estudados nas variedades flags do grupo.

Os conjuntos controláveis surgiram na década de 1980 nos trabalhos de L. Arnold e W. Kliemann sobre sistemas dinâmicos estocásticos. Esses conjuntos foram amplamente estudados por F. Colonius e W. Kliemann no contexto de sistemas de controle, daí o termo conjuntos controláveis (veja [4]). Nesse contexto, esses conjuntos formam um conceito central no estudo das propriedades dinâmicas dos sistemas de controle (veja [4]). Posteriormente os conceitos de conjuntos de controle, conjuntos de controle invariante são estudados no contexto de semigrupos em grupos semi-simples em [17], [18], [25]. Nesses trabalhos os conjuntos de controle aparecem como subconjuntos em variedades flag e suas propriedades algébricas, geométricas ou dinâmicas se refletem na estrutura dos semigrupos. Em particular, são obtidos resultados sobre a maximalidade de semigrupos de interior não vazio em [20], os quais são descritos como semigrupos de compressão de conjuntos de controle invariante.

Essa tese segue a linha de estudo levantada por esses trabalhos sobre semigrupos em grupos semi-simples. Um dos problemas em aberto deixados pela teoria é o de detectar os conjuntos de controle invariantes tais que os correspondentes semigrupos de compressão são conexos maximais. Abordamos esse problema para os grupos de posto um e damos uma condição suficiente em termos da geometria da variedade de flags. Outro problema abordado aqui, que segue a linha de [19] diz respeito à determinação de subconjuntos do grupo de Lie que gerem (como semigrupos) o grupo todo. Esse problema é abordado aqui utilizando a linguagem de controlabilidade de sistemas de controle em tempo discreto. Assim, provamos um resultado de controlabilidade para tais sistemas de controle, com hipóteses distintas da de [19], permitindo que os coeficientes do sistema admitam autovalores complexos.

Este trabalho é organizado como segue:

O capítulo 0 contém alguns resultados essenciais da teoria das álgebras de Lie semi-simples e dos semigrupos de interior não vazio em grupos de Lie semi-simples não compactos. Um objeto básico da teoria de semigrupos são os conjuntos de controle para a ação dos semigrupos nas variedades flags correspondentes ao grupo de Lie em questão. Se faz um resumo das decomposições clássicas, infinitesimais e globais, assim

como a classificação dos subgrupos parabólicos, sendo que estes permitem definir as fronteiras (variedades flags) nas quais se trabalha. Mais ainda, para referência posterior se mostra como estas fronteiras são realizadas como órbitas, pelo grupo compacto maximal, de certos elementos localizados no bordo das câmaras de Weyl. Através dessa realização define-se uma estrutura Riemanniana em ditas órbitas.

No capítulo 1 são considerados certos tipos de elementos no grupo de Lie $SL(d, \mathbb{R})$, que chamamos de regulares decompostos. O intuito aí é analisar a dinâmica desses elementos nas variedades flags, generalizando a análise conhecida para elementos regulares (diagonalizáveis). Obtemos conjuntos estáveis e instáveis, conjuntos limites assim como uma decomposição de Morse sobre a fronteira maximal. Posteriormente projetamos esses conjuntos sobre uma variedade flag arbitrária através da fibração canônica equivariante. Por outro lado, também estabelecemos resultados complementares aos já existentes na teoria dos conjuntos de controle como, por exemplo, cada componente da decomposição de Morse mencionada está contida no conjunto de controle correspondente ao elemento do grupo de Weyl que determina dita componente, caso o elemento regular decomposto pertença ao interior do semigrupo. Mais ainda, a cada elemento no interior de um semigrupo dado associamos uma variedade flag que fibra equivariantemente ao flag determinado pelo semigrupo em questão. Finalmente dito elemento fornece um subgrupo do grupo de Weyl contido no subgrupo determinado pelo semigrupo em menção.

No capítulo 2, aplica-se os resultados do capítulo 1 sobre a dinâmica da ação dos elementos regulares decompostos na variedades flag minimais (Grassmannianas) para assim poder estender um resultado sobre controlabilidade global a tempo discreto dado em [19]. Essencialmente, esse resultado consiste em dar condições suficientes sobre os elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ que definem dito sistema para que o semigrupo gerado pelo sistema seja todo o grupo $SL(d, \mathbb{R})$. A idéia desse resultado é basicamente a mesma de [19], sendo que argumentos adicionais são necessários para que se possa considerar elementos com autovalores não reais. Para isso são considerados elementos com autovalores complexos, de tal forma que se possa obter toros como conjuntos minimais que assim estariam contidos no conjunto controle invariante correspondente ao semigrupo definido pelo sistema. A partir desse tipo de inclusão se obtém a técnica principal para demonstrar o resultado sobre controlabilidade global.

No capítulo 3, estuda-se a conexidade de semigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie com posto real um. Apesar do resultado central ser provado apenas para o grupo hiperbólico real $SO_0(d, 1)$, resultados preliminares são obtidos para grupos de posto um em geral. A conexidade de ditos semigrupos é obtida a partir de uma propriedade geométrica do conjunto de controle invariante que o define. Dita propriedade é a convexidade geodésica em relação à métrica de Takeuchi-Kobayashi definida em [5] e [24]. O conjunto de controle invariante emerge do fato provado em [22] que diz que semigrupos maximais de interior não vazio são semigrupos de compressões

de certos subconjuntos fechados com interior denso, localizados nas fronteiras minimais. A utilidade fundamental da métrica em questão, está no fato que os campos gradientes de certas funções altura definidas por elementos na parte simétrica da decomposição de Cartan coincidem com os campos induzidos em relação à ação adjunta sobre a órbita no elemento que define o flag. Outro fato notável no caso do grupo $SO_0(d, 1)$ é que os fluxos de campos induzidos por elementos da parte simétrica são segmentos de geodésicas o que permite mostrar que o conjunto de controle invariante está contido no cone de Lie do semigrupo em menção. Portanto, aplicando os resultados preliminares envolvendo reversibilidade de semigrupos prova-se a conexidade do semigrupo de compressão. Esses resultados mostram a existência de uma classe de semigrupos maximais conexos no grupo $SO_0(p, 1)$. Deixamos em aberto o problema de decidir se essa classe cobre a classe dos semigrupos conexos maximais. Nessa direção trabalhamos apenas numa situação particular (o grupo $SO_0(3, 1)$). Deixamos em aberto também um estudo semelhante para os demais grupos de posto um, para os quais supomos que a geometria dada pela métrica de Takeuchi-Kobayashi deva desempenhar um papel semelhante ao que ocorre em $SO_0(p, 1)$.

Capítulo 0

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos da teoria de grupos de Lie semi-simples e semigrupos que serão necessários para o entendimento dos capítulos subsequentes. Isso será feito de maneira resumida.

0.1 Decomposições canônicas

Definição 0.1.1 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa. Uma forma real de \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie \mathfrak{g}_0 do realificado $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ tal que se complexifica em \mathfrak{g} . Isto é, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$.*

Uma forma real \mathfrak{g}_0 determina uma aplicação $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, definida por $\sigma(X + iY) = X - iY$ para $X, Y \in \mathfrak{g}_0$. Esta aplicação satisfaz as seguintes propriedades:

1. σ é semi-linear.
2. σ é uma involução.
3. $\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Portanto,

Definição 0.1.2 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa. Uma conjugação em \mathfrak{g} é uma aplicação de \mathfrak{g} que satisfaz (1), (2) e (3).*

Reciprocamente, cada conjugação σ de \mathfrak{g} determina uma única subálgebra

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$$

Portanto, existe uma correspondência bijetora entre conjugações e formas reais de \mathfrak{g} .

Definição 0.1.3 *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita compacta, se sua forma de Cartan-Killing é negativa definida.*

Como uma consequência temos que qualquer álgebra compacta é semi-simples, já que suas formas C-K são não degeneradas. O termo compacto tem significado topológico através do grupo de Lie correspondente.

Existe o seguinte resultado sobre existência e relação de formas reais compactas.

Teorema 0.1.4 *Toda álgebra de Lie semi-simples complexa admite formas reais compactas. Se u_1 e u_2 são formas reais compactas de \mathfrak{g} , então existe um automorfismo ϕ de \mathfrak{g} tal que $\phi(u_1) = u_2$ e as formas reais são isomorfas.*

Demonstração: Para maiores detalhes veja, por exemplo, [21]. Seja \mathfrak{g} a álgebra semi-simples complexa e Σ o sistema simples de raízes fornecido por uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . O ponto crucial na construção de uma forma real compacta é a existência de uma base de Weyl. Essa é uma base de \mathfrak{g} formada por H_α , $\alpha \in \Sigma$ e $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$ que satisfaz:

- $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$
- $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$, onde $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ satisfaz:

$$m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$$

e $m_{\alpha,\beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não é raiz.

Sendo assim, a forma real compacta procurada é o subespaço real \mathfrak{u} gerado por

$$iH_\alpha; \quad X_\alpha - X_{-\alpha}; \quad i(X_\alpha + X_{-\alpha})$$

com α percorrendo o conjunto das raízes positivas Π^+ . Isto é devido a que $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$, e \mathfrak{u} é uma subálgebra real compacta. ■

Em dualidade às formas reais compactas, existem outro tipo de formas reais opostas a estas, as que posteriormente serão chamadas de normais e cuja existência é uma consequência imediata do teorema apresentado acima.

Corolário 0.1.5 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Então \mathfrak{g} admite uma forma real não compacta.*

Demonstração: É só tomar a base de Weyl dada acima e considerar o subespaço \mathfrak{g}_0 gerado por $H_\alpha, X_\alpha, \alpha \in \Pi$. ■

Exemplo: Temos os seguintes:

1. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$ a álgebra de Lie formada pelas matrizes $d \times d$ com entradas complexas e com traço zero. As conjugações σ_1 e σ_2 definidas por $\sigma_1(X) = -\bar{X}^t$ e $\sigma_2(X) = \bar{X}$ determinam as formas reais $\mathfrak{su}(d, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ compacta e normal, respectivamente. Uma outra forma real de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$ para $d = 2p$ é dado por

$$\mathfrak{sl}(d, \mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{gl}(d, \mathbb{H}) : \operatorname{Re}(\operatorname{tr} X) = 0\}.$$

2. As outras formas reais das álgebras de Lie simples complexas A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ e D_ℓ são descritas através de uma análise detalhada da forma δ -Hermitiana não degenerada $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, onde $\delta = \pm 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} e V é um \mathbb{K} -espaço vetorial (isto é, B é \mathbb{K} -linear na primeira variável e $B(X, Y) = \overline{\delta B(Y, X)}$). Seja

$$\mathfrak{g}_{V,B} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : B(Xu, v) + B(u, Xv) = 0, \forall u, v \in V \text{ e } \text{tr}(X) = 0\}$$

a álgebra de Lie correspondente ao grupo $G_{V,B} \subset GL(V)$ que deixa invariante a forma δ -Hermitiana. Se q denota o índice de Witt de B e $p = d - q$ é tal que $p \geq q \geq 0$, então p, q determinam B a menos de isomorfismo. Portanto, as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{V,B}$ para todas as escolhas de \mathbb{K}, δ, p e q determinam as demais formas reais das álgebras de Lie complexas e clássicas.

Existem decomposições distinguidas das formas reais compactas e não compactas. Neste último caso, a forma real é quebrada nas partes compacta e simétrica. Dita existência é assegurada pelo seguinte

Teorema 0.1.6 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa e u uma forma real compacta de \mathfrak{g} . Seja também \mathfrak{g}_0 uma forma real qualquer de \mathfrak{g} e denote por σ a conjugação correspondente. Então existe um automorfismo ϕ de \mathfrak{g} tal que σ comuta com a conjugação em relação à forma real compacta.*

Demonstração: Veja [21]. ■

Sejam τ, σ as conjugações de u, \mathfrak{g}_0 respectivamente. Pelo Teorema 0.1.6 temos que $\sigma \circ (\phi\tau\phi^{-1}) = (\phi\tau\phi^{-1}) \circ \sigma$, isto significa que as involuções $\tau' = \phi\tau\phi^{-1}$ e τ são isomorfas. Portanto, para encontrar todas as formas reais de \mathfrak{g} a menos de isomorfismo, é suficiente encontrar todas as conjugações de \mathfrak{g} que comutam com τ .

Sendo assim suponhamos que $\tau\sigma = \sigma\tau$. Isso significa que \mathfrak{g}_0 é invariante por τ e u é invariante por σ . Seja \mathfrak{k} e $i\mathfrak{s}^*$ os auto-espacos de σ em u correspondente aos autovalores $+1$ e -1 respectivamente, isto é, $u = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{s}^*$. Seja também $i\mathfrak{k}$ e \mathfrak{s}^* os auto-espacos de σ sobre iu correspondentes aos autovalores 1 e -1 , isto é, $iu = i\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}^*$. Portanto, se \mathfrak{g}_0 é a forma real determinada por σ , obtemos que

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},$$

onde

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0 \cap u \quad \text{e} \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{g}_0 \cap iu.$$

Essa decomposição é conhecida como a decomposição de Cartan de \mathfrak{g}_0 em relação à forma real compacta u e satisfaz as seguintes inclusões

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}; \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}; \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k},$$

de onde, \mathfrak{k} é uma subálgebra (parte compacta) cuja representação adjunta deixa invariante o subespaço \mathfrak{s} (parte vetorial). Além do mais:

- A forma de Cartan-Killing restrita a \mathfrak{g}_0 é negativa definida sobre \mathfrak{k} e positiva definida sobre \mathfrak{s} .
- A aplicação $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$ satisfaz $\theta(X + Y) = X - Y$ e é um automorfismo.
- Para o automorfismo θ a forma bilinear $\langle X, Y \rangle_\theta = -B(X, \theta(Y))$ é um produto interno.

Portanto, se θ é um automorfismo involutivo de \mathfrak{g}_0 , a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ é um produto interno se, somente se, θ é uma involução de Cartan.

Teorema 0.1.7 *Seja \mathfrak{g}_0 uma álgebra de Lie real semi-simples e*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{s}_1 \quad e \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{s}_2$$

duas decomposições de Cartan de \mathfrak{g}_0 . Então existe um automorfismo interno ϕ de \mathfrak{g}_0 tal que

$$\mathfrak{k}_2 = \phi(\mathfrak{k}_1) \quad e \quad \mathfrak{s}_2 = \phi(\mathfrak{s}_1)$$

Demonstração: Veja [21]. ■

Agora veremos outro tipo de decomposição de uma álgebra semi-simples a qual consiste em quebrar esta nas partes, compacta, abeliana e nilpotente. Para isso, fixemos uma álgebra de Lie real semi-simples \mathfrak{g}_0 ; logo sua complexificação \mathfrak{g} também é semi-simples. Seja

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

uma decomposição de Cartan, e seja θ a involução de Cartan correspondente. A forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$, torna \mathfrak{g}_0 num espaço de Hilbert e portanto, com respeito a uma base o.n. a derivação $ad(X)$ é representado por uma matriz simétrica se $X \in \mathfrak{s}$ e por uma matriz anti-simétrica se $X \in \mathfrak{k}$. Consequentemente tais elementos são semi-simples.

Seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal e seja \mathfrak{a}^* o espaço vetorial dual de \mathfrak{a} . Para cada $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ denotamos

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_0 : ad(H)X = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Em vista que $\Omega = \{ad(H) : H \in \mathfrak{a}\}$ é uma família de operadores auto-adjuntos comutando dois a dois, eles podem ser diagonalizados simultaneamente em relação a uma certa base. Daí segue-se que \mathfrak{g} é uma soma direta ortogonal dos subespaços \mathfrak{g}_α . O funcional $\alpha \neq 0$ é chamado de raiz de \mathfrak{g}_0 em relação ao \mathfrak{a} , no caso que $\mathfrak{g}_\alpha \neq (0)$. Isto é, se Π denota o conjunto das raizes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, essa decomposição é dada por:

$$\mathfrak{g}_0 = \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{g}_0 . Mas, se \mathfrak{m} denota o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} , segue-se que $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Tomando um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$, podemos escolher uma ordem lexicográfica em \mathfrak{a}^* . Nessa ordem define-se Π^+ como sendo o conjunto de raízes em Π que são positivas e $\Pi^- = -\Pi^+$ às raízes negativas. Portanto, escolhendo um sistema positivo de raízes Π^+ em Π e definindo:

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

obtem-se subálgebras nilpotentes, e daí a decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+. \quad (0.1)$$

Quanto à decomposição global, esta é dada através das exponenciais (veja [7],[13] ou [15]).

Dito isso, podemos ver que a decomposição (0.1) depende fundamentalmente da escolha de subálgebras abelianas maximais na parte simétrica. Mas, quaisquer duas de tais subálgebras \mathfrak{a} e \mathfrak{a}' contidas em \mathfrak{s} , estão relacionadas através do automorfismo interior ϕ de K , tal que $\mathfrak{a}' = \phi(\mathfrak{a})$ (veja [7] ou [21]). Isto permite fazer a

Definição 0.1.8 *O posto real de uma álgebra de Lie semi-simples real é a dimensão comum das álgebras abelianas contidas em \mathfrak{s} .*

Em geral o posto real de uma álgebra de Lie é menor que seu posto. Isso permite distinguir certa classe de formas reais.

Definição 0.1.9 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semi-simples complexa. Uma forma real é normal se o posto dela coincide com seu posto real.*

A existência de formas reais normais segue imediatamente da existência das formas reais compactas devido ao Corolário 0.1.5.

Exemplo: Sejam σ_1, σ_2 as involuções de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$ definidas anteriormente. Elas determinam as formas reais $\mathfrak{su}(d, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ que são compacta e normal respectivamente. Portanto, a involução $\theta = \sigma_1 \sigma_2$, definida em $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ determina uma decomposição de Cartan canônica, a qual é dada pelos auto-espacos correspondentes aos autovalores ± 1 . Isto é,

$$\mathfrak{so}(d, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) : X^t = -X\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) : X^t = X\}.$$

Para determinar a decomposição de Iwasawa, fixemos uma subálgebra abeliana maximal em \mathfrak{s} como sendo o conjunto \mathfrak{a} das matrizes diagonais de traço nulo. Se E_{ij} denota a matriz $d \times d$ cuja única entrada não nula no lugar i, j é 1, então o conjunto das

matrizes E_{ij} e $E_{ii} - E_{jj}$, $i \neq j$ formam uma base de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. Cada $H \in \mathfrak{a}$ se escreve como

$$H = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$$

com $a_1 + \dots + a_d = 0$, e além do mais, satisfaz a relação

$$\text{ad}(H)E_{ij} = (a_i - a_j)E_{ij}.$$

Isto mostra, que as raízes de \mathfrak{a} são os funcionais $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$, $i \neq j$, onde os α_i são dados por

$$\alpha_i : \text{diag}(a_1, \dots, a_d) \longrightarrow a_i.$$

Por sua vez, os espaços de raízes, são de dimensão um e gerados por E_{ij} , $i \neq j$. Uma vez feito isso, precisamos de um sistema simples de raízes, a qual é dada por

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \dots, \alpha_{d-1,d}\},$$

pois, qualquer raiz α_{ij} com $i < j$ se escreve como combinação linear inteira dos elementos de Σ ; isto é,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{i,i+1} + \dots + \alpha_{j-1,j}.$$

Agora, em relação à ordem lexicográfica definida por Σ , a relação $\alpha_{ij} > 0$ significa que $i < j$. Daí que

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} : i < j\}.$$

Portanto, \mathfrak{n}^+ é a subálgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal e a decomposição de Iwasawa é dada por

$$\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(d) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

0.2 Subálgebras e Subgrupos Parabólicos

Os conceitos de subálgebras e subgrupos parabólicos reais serão definidas a partir das mesmas, em álgebras de Lie complexas. Uma subálgebra de Borel de uma álgebra de Lie reductiva complexa é uma subálgebra solúvel maximal. Agora suponhamos que \mathfrak{g}_0 seja uma álgebra de Lie real e \mathfrak{g} seu complexificado. Dizemos que uma subálgebra $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_0$ é parabólica, se o seu complexificado $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ contém uma subálgebra de Borel de \mathfrak{g} . Ao nível do grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g}_0 , um subgrupo parabólico de G é um subgrupo P tal que é o normalizador em G de uma subálgebra parabólica de \mathfrak{g}_0 .

Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan, $\Pi = (\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ o conjunto de raízes correspondente. Para um sistema simples de raízes em Π , obtemos

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha > 0\} \quad \text{e} \quad \Pi^- = \{\alpha \in \Pi : \alpha < 0\}.$$

Logo, definindo as subálgebras nilpotentes como sendo

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha$$

consegue-se que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Portanto, o subespaço $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra de Borel. Mais ainda, cada subálgebra de Borel de \mathfrak{g} é conjugado a \mathfrak{b} via elementos de $G_{\mathbb{C}}$. Seja $\Sigma \subset \Pi$ um sistema simples de raízes e $\Theta \subset \Sigma$ qualquer subconjunto. Denotemos por $\langle \Theta \rangle$ ao conjunto de raízes em Π que são combinações lineares integrais de elementos em Θ . Então

$$\mathfrak{q}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{-\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha$$

é uma subálgebra de \mathfrak{g} contendo \mathfrak{h} ; e a correspondência

$$\Theta \longrightarrow \mathfrak{q}_\Theta$$

é uma bijeção que preserva a inclusão.

Proposição 0.2.1 *Seja $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ uma decomposição de Iwasawa de uma álgebra de Lie semi-simples.. Então a subálgebra $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é parabólica e se auto-normaliza.*

Demonstração: Veja [13] ou [15]. ■

Este tipo de subálgebras parabólicas são minimais em relação à ordem parcial definida pela inclusão. De forma similar ao caso complexo, as subálgebras parabólicas reais são classificadas, e isso será comentado a seguir (veja [26], [28]). Dada uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ e uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, fixemos um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$ do par $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$. Para qualquer subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, denotemos por $\langle \Theta \rangle^+$ ao subconjunto das raízes em Π^+ que são combinações lineares de elementos em Θ . Se $\mathfrak{n}^\pm(\Theta)$ denota a subálgebra de \mathfrak{n}^\pm gerada por $\sum \mathfrak{g}_\alpha$ com $\alpha \in \langle \Theta \rangle^\pm$, então o subespaço

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \tag{0.2}$$

é uma subálgebra parabólica cujo subgrupo parabólico P_Θ é o normalizador de \mathfrak{p}_Θ em G . A álgebra de Lie de P_Θ é \mathfrak{p}_Θ porque este se auto-normaliza. Também a aplicação

$$\Theta \longrightarrow \mathfrak{p}_\Theta$$

é uma bijeção do conjunto das partes de Σ sobre o conjunto das subálgebras parabólicas de \mathfrak{g}_0 que contém \mathfrak{p} e aliás preserva inclusão.

No que segue descreveremos uma decomposição das subálgebras parabólicas \mathfrak{p}_Θ . Seja $\mathfrak{a}(\Theta)$ o subespaço de \mathfrak{a} gerado pelos duais $H_\alpha \in \mathfrak{a}$, com $\alpha \in \Theta$. Denotemos por \mathfrak{a}_Θ ao complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} e por $\mathfrak{n}_\Theta^+ \subset \mathfrak{n}^+$ à subálgebra definida por $\mathfrak{n}_\Theta^+ = \sum_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \Pi^+ - \langle \Theta \rangle^+$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\Theta &= \underbrace{\left(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}(\Theta) + \mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta) \right)}_{\mathfrak{m}_\Theta} + (\mathfrak{a}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta^+) \\ &= \mathfrak{m}_\Theta + (\mathfrak{a}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta^+) \end{aligned}$$

é a decomposição de Langlands em soma direta de subálgebras. Mais ainda, $\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$ é um ideal em \mathfrak{p}_Θ e \mathfrak{m}_Θ centraliza \mathfrak{a}_Θ .

Por outro lado, a subálgebra $\mathfrak{g}(\Theta)$ gerada por $\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$ (ou seja, gerada pelos espaços de raízes \mathfrak{g}_α com $\alpha \in \langle \Theta \rangle^\pm$) é semi-simples. Se colocamos $\mathfrak{l}(\Theta) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$ e $\mathfrak{s}(\Theta) = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$, obtemos que $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{l}(\Theta) \oplus \mathfrak{s}(\Theta)$ é uma decomposição de Cartan e $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$ é uma subálgebra decomposta. Na mesma forma que na seção anterior o subespaço \mathfrak{a}_Θ fornece uma família comutativa de endomorfismos auto-adjuntos $ad(\mathfrak{a}_\Theta)$. Portanto, temos uma decomposição de \mathfrak{g} em espaços de raízes

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{l}_\Theta \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \\ &= \mathfrak{l}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+, \end{aligned}$$

onde \mathfrak{l}_Θ é o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em \mathfrak{g} e \mathfrak{n}_Θ^\pm é como antes. Outro fato notável é a relação

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \cap \mathfrak{k} \oplus [\mathfrak{k}_\Theta, \mathfrak{k}_\Theta] \cap \mathfrak{s},$$

(veja [28]). Portanto, \mathfrak{m}_Θ é uma subálgebra reductiva de \mathfrak{g} . Daí que

$$\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta + \mathfrak{a}_\Theta$$

é uma subálgebra de Levi de uma subálgebra parabólica.

Passando ao nível do grupo de Lie G , temos que $A(\Theta)$, A_Θ , $(L_\Theta)_0$, $(M_\Theta)_0$ e N_Θ são os subgrupos de Lie conexos, fechados e imersos, correspondentes às álgebras de Lie $\mathfrak{a}(\Theta)$, \mathfrak{a}_Θ , \mathfrak{l}_Θ , \mathfrak{m}_Θ e \mathfrak{n}_Θ^+ respectivamente. Para esses subgrupos temos que $A = A(\Theta)A_\Theta$ (produto direto). Se denotamos por L_Θ ao centralizador de \mathfrak{a}_Θ (ou A_Θ) em G temos que $(L_\Theta)_0$ é a componente da identidade de L_Θ . Se denotamos por $M^\Theta = L_\Theta \cap K$, ao centralizador de A_Θ em K , e $M_\Theta = M^\Theta(M_\Theta)_0$, segue-se que $(M_\Theta)_0$ é a componente da identidade de M_Θ . Portanto, obtemos as decomposições globais de Langlands e Levi

$$P_\Theta = M_\Theta A_\Theta N_\Theta \quad \text{e} \quad P_\Theta = L_\Theta N_\Theta,$$

respectivamente, onde N_Θ é o radical unipotente de P_Θ , e L_Θ um subgrupo de Levi. Todas as afirmações feitas na passagem podem ser encontradas em [15], [28].

Agora se relaciona os conceitos anteriores com certos elementos localizados na subálgebra abeliana maximal. Para tal, seja $\Sigma \subset \Pi^+$ o sistema simples de raizes, $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto arbitrário e consideremos a subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ definida em (0.2). Seja

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0, \forall \alpha \in \Sigma\}$$

a câmara de Weyl positiva associada a Σ . Então para o elemento

$$H \in \bigcap_{\alpha \in \Theta} \text{Ker } \alpha \subseteq \text{fe}(\mathfrak{a}^+)$$

temos que o conjunto de raizes definidos acima satisfazem:

$$\langle \Theta \rangle = \{\alpha \in \Pi : \alpha(H) = 0\} \quad \text{e} \quad \langle \Theta \rangle^+ = \{\alpha \in \Pi^+ : \alpha(H) > 0\}.$$

Portanto, dependendo de $\Theta = \Sigma$ ou $\Theta \subset \Sigma$ temos que, $H = 0$ ou $H \neq 0$, respectivamente. Neste caso a subálgebra definida como sendo

$$\mathfrak{g}(H) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha(H) \geq 0} \mathfrak{g}_\alpha,$$

coincide com a subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ (para maiores detalhes veja a próxima seção e [5]). Portanto, o normalizador de $\mathfrak{g}(H)$ em G denotado por $G(H)$, também coincide com o subgrupo parabólico P_Θ .

0.3 Métricas Riemannianas em variedades Flag

Seja G um grupo de Lie semi-simples com álgebra de Lie \mathfrak{g} , consideremos a decomposição de Cartan infinitesimal $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Logo, fixado uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ obtém-se um sistema de raizes Π e daí uma decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Para um sistema simples de raizes $\Sigma \subset \Pi^+$ e um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, obtém-se a subálgebra parabólica correspondente $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$, onde \mathfrak{p} é a subálgebra parabólica standard e $\mathfrak{n}^\pm(\Theta)$ a subálgebra gerada pelos espaços de raizes \mathfrak{g}_α , onde $\alpha \in \langle \Theta \rangle^\pm$ é o conjunto das raizes que são combinações inteiras do mesmo sinal em Θ . Mas, é possível escolher $H \in \text{fe}(\mathfrak{a}^+)$ (\mathfrak{a}^+ câmara de Weyl positiva) tal que $\alpha(H) = 0$, para cada $\alpha \in \langle \Theta \rangle$. Devido à relação $\Pi^+ - \langle \Theta \rangle = \Pi^+ - \langle \Theta \rangle^+$ temos que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha(H)=0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $\alpha \in \langle \Theta \rangle$. Como nas seções anteriores, isto significa que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\Theta &= \left(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}(\Theta) + \mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta) \right) + (\mathfrak{a}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta^+) \\ &= \mathfrak{m}_\Theta \oplus (\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+). \end{aligned}$$

Veja que $\mathfrak{m}_\Theta \subset \mathfrak{m}_H$ o centralizador de H em \mathfrak{g} . Logo essa decomposição ainda pode ser colocado assim

$$\mathfrak{p}_\Theta = \left(\underbrace{\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)}_{\mathfrak{m}_\Theta} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+ \right) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta).$$

Se denotarmos por \mathfrak{k}_H ao centralizador de H em K e substituimos no lugar de $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$, ainda temos que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \left(\mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+ \right) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta).$$

Portanto, ao nível de grupos de Lie as decomposições globais são dadas por:

$$P_\Theta = M_H N^{(H)}, \quad M_H = K_H A N_H, \quad N = N^{(H)} N_H,$$

onde M_H (K_H) é o centralizador de H em G (de H em K), $N^{(H)} = \exp(\mathfrak{n}^+(\Theta))$, $N_H = \exp(\mathfrak{n}_\Theta^+)$.

Dito isso, para a variedade flag correspondente a Θ temos o seguinte:

Lema 0.3.1 *Com as notações anteriores, seja \mathbb{F}_Θ uma variedade flag, $\mathcal{O}(H) = \text{Ad}(K)H$ a órbita em H sob a representação adjunta. Então tem-se as seguintes realizações :*

$$G/P_\Theta \cong K/K_H \cong \mathcal{O}(H).$$

Demonstração: De fato, consideremos a aplicação $k : G \longrightarrow K$ definida por $k(g) = u$, se $g = uan$, com $u \in K$, $a \in A$ e $n \in N^+$. Então esta induz outra aplicação $\phi : G \longrightarrow K/K_H$ definida por $\phi(g) = k(g)K_H$, e que fornece a seguinte relação:

$$g \sim g' \text{ se, e somente se, } \phi(g) = \phi(g')$$

que é de equivalência e cujas classes são dadas por $[g] = gP_\Theta$. Portanto, a aplicação induzida $i : G/P_\Theta \longrightarrow K/K_H$ tal que $i \circ \pi = \phi$, onde π é a aplicação quociente; estabelece o difeomorfismo procurado. Por outro lado, se tomamos a órbita $\mathcal{O}(H)$ no ponto $H \in \mathfrak{s}$ da ação induzida pela representação adjunta na parte simétrica, é possível identificar com o flag K/K_H através da aplicação $\phi_1 : K/K_H \longrightarrow \mathcal{O}(H)$ definida por $\phi_1(uK_H) = \text{Ad}(u)H$. Portanto, a aplicação composta $i_1 = \phi_1 \circ i$, fornece o difeomorfismo que identifica G/P_Θ com $\mathcal{O}(H)$. ■

No que segue definiremos uma métrica riemanniana (métrica de Takeuchi-Kobayashi, veja [5] e [24]) e para isso se introduz um produto interno no espaço tangente $T_H \mathcal{O}(H)$, de forma que o produto interno em qualquer outro ponto é obtido por translação através da ação de K sobre dita órbita. Para tal, seja a aplicação $\tilde{\phi} : K \longrightarrow \mathcal{O}(H)$ definida por $\tilde{\phi}(u) = \text{Ad}(u)H$ e o espaço tangente em H é dado como sendo

$$T_H \mathcal{O}(H) = \{[X, H] : X \in \mathfrak{k}\}.$$

Daí, usando $(d\tilde{\phi})_e : \mathfrak{k} \longrightarrow T_H \mathcal{O}(H)$, com $(d\tilde{\phi})_e(X) = [X, H]$ obtém-se que $T_H \mathcal{O}(H) \cong \mathfrak{k}/\mathfrak{k}_H \cong \mathfrak{k}_H^\perp$, onde a ortogonalidade é tomado em relação à forma de Cartan-Killing.

Agora, seja θ a involução de Cartan correspondente à decomposição de acima e define-se os subespaços

$$\mathfrak{k}_\theta = \{X + \theta(X) : X \in \mathfrak{n}^+\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{s}_\theta = \{X - \theta(X) : X \in \mathfrak{n}^+\},$$

os quais complementam \mathfrak{m} , \mathfrak{a} em \mathfrak{k} , \mathfrak{s} respectivamente. Isto é, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_\theta \oplus \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_\theta \oplus \mathfrak{a}$. Uma pergunta natural seria ver a relação dos subespaços \mathfrak{k}_θ e \mathfrak{k}_H^\perp a qual é dada pelo seguinte:

Lema 0.3.2 *Sejam \mathfrak{k}_θ , \mathfrak{k}_H^\perp os subespaços definidos acima. Então $\mathfrak{k}_H^\perp \subset \mathfrak{k}_\theta$.*

Demonstração: Dados $X + \theta(X) \in \mathfrak{k}_\theta$, com $X \in \mathfrak{n}^+$ e $Z \in \mathfrak{m}$, temos que

$$\langle X + \theta(X), Z \rangle = 2 \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Z)).$$

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ a decomposição de Iwasawa de \mathfrak{g} e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ o espaço correspondente à raiz nula. Então

$$\operatorname{ad}(Z)\mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{n}^-, \quad \operatorname{ad}(Z)\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0, \quad \operatorname{ad}(Z)\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{n}^+.$$

Tomando novamente $\operatorname{ad}(X)$ na relação acima, temos que

$$\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Z)\mathfrak{n}^- = (0), \quad \operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Z)\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{n}^+, \quad \operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Z)\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{n}^+,$$

e devido ao fato de $\operatorname{ad}(X)|_{\mathfrak{n}^+}$ ser nilpotente, é claro que $\langle X + \theta(X), Z \rangle = 0$, ou seja $\mathfrak{k}_\theta \perp \mathfrak{m}$ e daí que $\mathfrak{k}_\theta = \mathfrak{m}^\perp$, porque $\dim \mathfrak{m}^\perp = \dim \mathfrak{k}_\theta$. Portanto, $\mathfrak{k}_H^\perp \subset \mathfrak{k}_\theta$, pois $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}_H$ (centralizador de H em \mathfrak{k}). ■

Em vista do lema anterior, basta definir um produto interno sobre o subespaço \mathfrak{k}_θ , já que por restrição obtém-se o desejado. Para conseguir isso, define-se os isomorfismos lineares

$$\phi_\theta : \mathfrak{n}^+ \longrightarrow \mathfrak{k}_\theta, \quad \text{com} \quad \phi_\theta(X) = X + \theta(X)$$

e

$$\tilde{\phi}_\theta : \mathfrak{n}^+ \longrightarrow \mathfrak{s}_\theta, \quad \text{com} \quad \tilde{\phi}_\theta(X) = X - \theta(X).$$

Logo, a partir do isomorfismo

$$\zeta = \tilde{\phi}_\theta \circ \phi_\theta^{-1} : \mathfrak{k}_\theta \longrightarrow \mathfrak{s}_\theta, \quad \text{com} \quad \zeta(X + \theta(X)) = X - \theta(X),$$

é definido uma forma bilinear

$$(Z, Z')_H = \langle H, [Z, \zeta(Z')] \rangle$$

a qual é um produto interno em \mathfrak{k}_θ (veja [5], [24]). Mais ainda, $\operatorname{Ad}(u) \circ \theta = \theta \circ \operatorname{Ad}(u)$ fornece

$$(\operatorname{Ad}(u)Z, \operatorname{Ad}(u)Z')_H = (Z, Z')_H, \quad \forall u \in K_H,$$

onde K_H é o centralizador de H em K . Isto significa que $u : \mathcal{O}(H) \rightarrow \mathcal{O}(H)$ é uma isometria, pois, tomando $[X, H] \in T_H \mathcal{O}(H)$ e a curva $\alpha(t) = \text{Ad}(\exp(tX))H$ a diferencial nesse ponto é dada por $(du)_H([X, H]) = \text{Ad}(u)([X, H])$. Daí que

$$\left((du)_H(Z), (du)_H(Z') \right)_H = (Z, Z')_H, \quad \forall u \in K_H$$

e K age por isometrias sobre $\mathcal{O}(H)$.

Com relação à ação adjunta, cada $X \in \mathfrak{k}$ induz um campo vetorial \tilde{X} definido em $\mathcal{O}(H)$ como sendo

$$\tilde{X}(\text{Ad}(u)H) = -[\text{Ad}(u)H, X]$$

e cujo fluxo é dado por

$$\tilde{X}_t(\text{Ad}(u)H) = \text{Ad}(\exp(tX)u)H.$$

Mas, estes fatos são gerais e para obter coisas mais finas deve-se tomar elementos em \mathfrak{s} (Veja [5]), isto sugere estender a ação ao grupo tudo de tal forma que possamos pegar ditos elementos. Em vista disso, considera-se o difeomorfismo $i_1 = \phi_1 \circ i$ e a ação adjunta na órbita para poder definir uma nova ação:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times \mathcal{O}(H) &\longrightarrow \mathcal{O}(H) \\ (g, \text{Ad}(u)H) &\longrightarrow i_1(g \cdot i_1^{-1}(\text{Ad}(u)H)) = \text{Ad}(k(gu))H \end{aligned}$$

que permite usar elementos $Y \in \mathfrak{s}$ e assim relacionar o campo induzido \tilde{Y} com a métrica de T-K.

Seja $Y \in \mathfrak{s}$, e Y^\perp seu complemento ortogonal em relação à forma de Cartan-Killing. Logo, com a finalidade de relacionar com a métrica dada, considera-se as funções altura $f_{Y,H}$ com relação a Y^\perp e definidos por:

$$f_{Y,H}(\text{Ad}(u)H) = (\text{Ad}(u)H, Y),$$

isto é, a menos de um múltiplo constante

$$\|\text{Proj}_{Y^\perp}(\text{Ad}(u)H) - \text{Ad}(u)H\|,$$

pois, depende do comprimento $\|Y\|$. Dito isso, são os gradientes dessas funções que permitem o relacionamento, a qual é dada pela seguinte

Proposição 0.3.3 *Dado $Y \in \mathfrak{s}$, considera-se a função $f_{Y,H} : \mathcal{O}(H) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_{Y,H}(\text{Ad}(u)H) = \langle \text{Ad}(u)H, Y \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma de Cartan-Killing. Então $\text{grad} f_{Y,H} = \tilde{Y}$, onde o gradiente é tomado em relação à métrica de T-K.*

Demonstração: Veja [5] e [24] para os detalhes. ■

Como consequência deste resultado aparece uma pergunta natural a saber, se os fluxos induzidos por \tilde{Y} são geodésicas ou segmentos de geodésicas em relação à métrica de T-K. No caso de grupos com posto um, mais especificamente $\text{SO}_0(p, 1)$, isto é verdadeiro, mas nos outros grupos será verdade?

0.4 Conjuntos de controle

Nesta seção, apresenta-se alguns resultados sobre conjuntos de controle, os quais forem tratados detalhadamente em [22], [18], [25] e que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Para tal, seja G um grupo de Lie conexo, semi-simples, \mathbb{B} uma variedade flag associada a G e S um semigrupo de interior não vazio.

Definição 0.4.1 *Um conjunto de controle em \mathbb{B} , é um subconjunto $D \subset \mathbb{B}$ que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $\text{int}D \neq \emptyset$.
- (ii) $D \subset \text{fe}(Sx)$, para cada $x \in D$.
- (iii) D é maximal com as propriedades (i) e (ii).

No caso em que o semigrupo S deixe invariante ao conjunto de controle D , este será o único conjunto de controle invariante na variedade flag, correspondente ao semigrupo dado.

Dado um semigrupo S , consideremos os conjuntos de controle correspondentes. Então, existe uma ordenação parcial definida sobre estes conjuntos, e que é dada como segue: D_1 é menor que D_2 se, e somente se, existe $x \in D_1$ tal que $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. Esta ordenação é devido à propriedade (ii) de maximalidade na definição de conjuntos de controle. Com respeito a essa ordem, se diz que um tal conjunto é maximal se este é invariante sob S . Em forma análoga, um tal conjunto é minimal se é invariante sob S^{-1} . Dito isso, o conjunto de controle minimal é o conjunto de transitividade (definido abaixo) do conjunto de controle invariante de S^{-1} .

Dado um conjunto de controle D , é possível associar um conjunto D_0 chamado de transitividade e definida como sendo

$$\begin{aligned} D_0 &= \{x \in D : \text{existe } g \in \text{int}S \text{ com } gx = x\} \\ &= \{x \in D : x \in (\text{int}S)x\}. \end{aligned}$$

Estes dois conjuntos D, D_0 estão relacionados fortemente através de uma série de propriedades, que forem tratadas em [22]. Para o estudo dos conjuntos de controle sobre variedades flag, considera-se interseções de subgrupos decompostos com $\text{int}S$, já que elementos regulares decompostos (reais) permitem caracterizar os conjuntos de controle sobre \mathbb{B} . Para tal, seja g regular decomposto, então existe um subgrupo decomposto que o contém, e assim uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$ adaptada a A . Com relação a isso, seja M^* (M) o normalizador (centralizador) de \mathfrak{a} em K , respectivamente. Logo o grupo de Weyl é dado como sendo $W \cong M^*/M$. Em vista disso, se $b_0 = MAN^+$ denota a origem da variedade flag; a órbita em b_0 da ação natural do grupo de Weyl através de M^* fornece o conjunto dos g -pontos fixos. Daí que, um

ponto fixo wb_0 , é dito de tipo $w, w \in W$, se b_0 é o atrator correspondente a g . Nesse caso, será denotado por $b(g, w)$. Ao respeito, se Ω denota o conjunto dos elementos regulares decompostos reais no $\text{int}S$, tem-se a seguinte relação entre o grupo de Weyl e conjuntos de controle.

Teorema 0.4.2 *Para cada $w \in W$, existe um conjunto de controle efetivo D_w sobre \mathbb{B} , cujo conjunto de transitividade é*

$$(D_w)_0 = \{b(g, w) : g \in \Omega\}.$$

Existe um único conjunto de controle invariante. Isto é, $C = D_1$, e este conjunto de transitividade é o conjunto de atratores de elementos em Ω . De forma similar, existe um único conjunto de controle minimal, isto é, o conjunto de repulsores de Ω . Mais ainda, qualquer conjunto de controle efetivo é D_w , para algum $w \in W$.

Demonstração: Veja [22] e [18]. ■

Em vista deste resultado, considera-se a aplicação $w \rightarrow D_w$ que mapeia o grupo de Weyl sobre o conjunto dos conjuntos de controle na variedade flag maximal. Essa aplicação, associa de maneira natural ao semigrupo S uma variedade flag $\mathbb{B}(S)$ como segue. Seja $g \in \text{int}S$ um elemento regular decomposto real, e $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ a câmara que o contém. Logo, associado a esta, existe um grupo de Weyl W . Como dita câmara estabelece uma bijeção com o subconjunto $\{wb_0 : w \in W\}$ dos pontos fixos de g , é conveniente denota-lo por $W(A^+)$. Seja $1 \in W(A^+)$, então D_1 é o único conjunto de controle invariante em \mathbb{B} . De forma similar D_{w_0} é o único conjunto de controle minimal em \mathbb{B} , onde w_0 é a involução principal (isto é, $w_0 \in W$ e $w_0\Sigma = -\Sigma$, onde Σ é um sistema simples de raízes).

A aplicação definida acima, tem uma propriedade especial; mais especificamente a fibra em D_1 . Isto sugere considerar o subconjunto

$$W(S, A^+) = \{w \in W : D_w = D_1\}$$

que é um subgrupo do grupo de Weyl (veja a Proposição 4.2 de [22]) gerado pelas reflexões com respeito a um sistema simples de raízes associado com \mathfrak{a}^+ num subconjunto $\Theta = \Theta(S) \subset \Sigma$. Portanto, colocando $\mathbb{B}(S) = \mathbb{B}_{\Theta(S)}$ é possível mostrar que este tipo de variedade flag, tem uma propriedade essencial, a qual é dada através da

Proposição 0.4.3 *Com as notações dadas acima, seja $C \subset \mathbb{B}(S)$ o conjunto de controle invariante. Então C está contido na variedade estável correspondente a qualquer elemento regular decomposto $g \in \text{int}S$. Mais ainda, se $\tilde{\Theta} \subset \Theta(S)$ e $\pi : \mathbb{B}_{\tilde{\Theta}} \rightarrow \mathbb{B}(S)$ é a fibração canônica, então $\pi^{-1}(C)$ é o conjunto de controle invariante para S em $\mathbb{B}_{\tilde{\Theta}}$.*

Demonstração: Veja [22] e [18]. ■

O grupo $W(S)$ considera aqueles elementos $w \in W$ tal que D_w é o conjunto de controle invariante. Uma outra descrição similar existe para os outros conjuntos de controle através de quocientes à direita de $W(S)$. Isto é, a contagem dos conjuntos de controle efetivo é dado pelo seguinte:

Teorema 0.4.4 $D_{w_1} = D_{w_2}$ se, e somente se, $W(S)w_1 = W(S)w_2$. Assim, os conjuntos de controle efetivo para S sobre \mathbb{B} está em correspondência bijetiva com $W(S)/W$.

Demonstração: Veja [22] e [18]. ■

Em vista do teorema anterior é natural perguntar-se sobre a quantidade de conjuntos de controle efetivo nas outras variedades flags e correspondentes ao semigrupo dado. Isto é consequência de que conjuntos de controle efetivo em qualquer variedade flag são projeções de conjuntos de controle sobre o flag maximal. Mais precisamente, isto decorre da

Proposição 0.4.5 Seja \mathbb{B} a fronteira maximal e $\pi_\Theta : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}_\Theta$ a fibração canônica. seja E_Θ um conjunto de controle efetivo para S sobre \mathbb{B}_Θ . Então existe $w_1 \in W$ tal que $\pi_\Theta((D_w)_0) = (E_\Theta)_0$ para cada $w \in w_1W_\Theta$. Mais ainda, $\pi_\Theta(D_0) = (E_\Theta)_0$ se D é um conjunto de controle efetivo satisfazendo $D_0 \cap \pi_\Theta^{-1}((E_\Theta)_0) \neq \emptyset$.

Demonstração: Veja [22] e [18]. ■

Como consequência disto, temos que o número de conjuntos de controle efetivo sobre \mathbb{B}_Θ é dado através do seguinte:

Corolário 0.4.6 O número de conjuntos controle efetivo sobre \mathbb{B}_Θ é igual ao número de elementos em $W(S) \setminus W/W_\Theta$, isto é, o número de $W(S)$ -órbitas em $W \setminus W_\Theta$.

Demonstração: Veja [22] e [18]. ■

Seja S um semigrupo de interior não vazio. A relação de ordem parcial nos conjuntos de controle introduzida anteriormente, permitiu distinguir os conjunto de controle maximal e minimal como sendo invariantes para os semigrupos S e S^{-1} respectivamente. Devido a isto, é que explorou-se a influencia do semigrupo inverso na obtenção do flag $\mathbb{B}(S^{-1})$, assim como o cálculo desta.

Proposição 0.4.7 Considere um elemento regular decomposto real $g \in \text{int}S$ e seja $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ a câmara de Weyl contendo g . Então

$$W(S^{-1}, A^-) = W(S, A^+),$$

onde $A^- = (A^+)^{-1}$.

Demonstração: Veja [22] e [20]. ■

Em vista disto, é possível determinar a variedade flag dual $\mathbb{B}(S^{-1})$ a partir de $\mathbb{B}(S)$ (veja [20]). Para tal, tomamos um elemento regular decomposto real $g \in \text{int}S$ tal que $g \in A^+$ (câmara adaptada a \mathbb{B}). Seja Σ o sistema simples de raízes associado a A^+ ; então o subgrupo $W(S, A^+)$ é gerado pelas reflexões com respeito ao subconjunto $\Theta = \Theta(S) \subset \Sigma$. Logo, pela Proposição 0.4.7 o subgrupo $W(S^{-1}, A^{-1})$ também é gerado pelo mesmo conjunto de reflexões (ou também por $-\Theta$). Portanto, a subálgebra parabólica é construída a partir de $-\Theta$. Isto é,

$$\mathfrak{p}_{\Theta}^{-} = (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^{-}) \oplus \mathfrak{n}^{+}(\Theta),$$

onde $\mathfrak{n}^{+}(\Theta)$ é a subálgebra gerada por \mathfrak{g}_{α} com $\alpha \in -\langle -\Theta \rangle = \langle \Theta \rangle$ e as demais notações são as usuais. Então, se P_{Θ}^{-} é o normalizador de $\mathfrak{p}_{\Theta}^{-}$ em G , temos que $B(S^{-1}) = G/P_{\Theta}^{-}$. Para poder descrever a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_{\Theta}^{-}$ em termos de uma câmara positiva, consideremos a involução principal w_0 e o automorfismo do diagrama de Dynkin ι . Logo $w_0(-\Theta) = \iota\Theta$ e $w_0\mathfrak{p}_{\Theta}^{-} = \mathfrak{p}_{\iota\Theta}$, onde

$$\mathfrak{p}_{\iota\Theta} = (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^{+}) \oplus \mathfrak{n}^{-}(\iota\Theta)$$

é o subgrupo parabólico dual a \mathfrak{p}_{Θ} e $\mathfrak{n}^{-}(\iota\Theta)$ é gerado por $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ com $\alpha \in \langle \iota\Theta \rangle$. Portanto, $\mathbb{B}(S^{-1}) = \mathbb{B}_{\iota\Theta}$ é o dual de $\mathbb{B}(S) = \mathbb{B}_{\Theta}$.

Capítulo 1

Dinâmica e Regularidade sobre Variedades Flag

Neste capítulo, introduzimos um conceito de regularidade para elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ e estudamos as propriedades dinâmicas da ação desses elementos na variedade flag maximal. Tais elementos serão ditos regulares decompostos. A cada um deles relacionaremos um certo subgrupo de $SL(d, \mathbb{R})$ que é o produto direto de um grupo toral por um subgrupo da componente nilpotente da decomposição de Iwasawa. As órbitas desse subgrupo nos elementos da órbita do grupo de Weyl do flag canônico, dado pela base ordenada que diagonaliza o elemento regular decomposto, nos fornece os conjuntos estáveis, os conjuntos limite, assim como uma decomposição de Morse na variedade flag maximal.

1.1 Regularidade em $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$

Dizemos que o elemento $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ é regular decomposto, se seus autovalores são de multiplicidade um e tem parte real distinta. De forma similar, a regularidade de $g = \exp(X) \in SL(d, \mathbb{R})$ é dado por meio de X , isto é, $g \in SL(d, \mathbb{R})$ é dito regular decomposto se $g = \exp(X)$ para $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ regular decomposto.

Seja X regular decomposto e denotemos por $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ a base ordenada na qual X é escrito em forma canônica. A escolha da ordenação é feita de maneira que as partes reais dos autovalores B_1, \dots, B_e sejam colocados em forma decrescente: $\text{Re}B_1 > \dots > \text{Re}B_e$. Ao nível do grupo $SL(d, \mathbb{R})$, para $g = \exp(X)$, em relação à base β temos:

$$g = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_e \end{pmatrix},$$

onde $A_i = \exp(B_i)$ é uma matriz de dimensão um ou dois. Seja \mathbb{F} a variedade flag

maximal e b_0 o flag determinado por β , isto é:

$$b_0 = (\text{ger}\{e_1\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2\} \subset \cdots \subset \text{ger}\{e_1, \dots, e_d\}).$$

O subgrupo P , formado por $g \in \text{SL}(d, \mathbb{R})$ tal que $gb_0 = b_0$, é o subgrupo parabólico minimal em b_0 tendo como decomposição de Langlands $P = M_\beta A_\beta N_\beta^+$ e no que segue o subíndice β será frequentemente subentendido. A câmara de Weyl positiva associada a esta decomposição é o conjunto dos $h = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ com $\alpha_1 > \cdots > \alpha_d > 0$. Em vista que o grupo de Weyl W é o grupo das permutações nas entradas dos elementos de A e age transitivamente no conjunto das câmaras de Weyl, as outras câmaras são obtidas a partir da positiva por elementos do grupo de Weyl. Por outro lado, a ação $\tilde{b} = wb_0$ de um elemento $w \in W$ sobre b_0 , é o flag \tilde{b} que contém a base $\tilde{\beta} = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\}$. Os flags $wb_0, w \in W$, são fixados pelas matrizes em $\text{SL}(d, \mathbb{R})$ que são diagonais em relação a β . Nas outras variedades flags a situação é similar e os pontos fixos das matrizes diagonais a β , são as projeções de $wb_0, w \in W$.

Suponhamos que o elemento regular decomposto X tenha s autovalores reais μ_j e $2l$ autovalores complexos $a_j \pm ib_j$, então dito elemento define uma classe de conjugação de subálgebras de Cartan $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. Fixando uma ordenação conveniente da base como acima, cada $Y \in \mathfrak{b}_l$ se escreve nessa base como:

$$Y = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{B}_e \end{pmatrix}, \quad \text{com } \tilde{B}_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \quad \text{ou } \tilde{B}_j = (\mu_j)$$

Seja $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(d) \oplus \mathfrak{s}$ a decomposição de Cartan canônica de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ em partes compacta e simétrica e θ a involução de Cartan associada, isto é, $\theta(X) = -X^t$. Um cálculo fácil mostra que \mathfrak{b}_l é θ -estável, isto é, $\theta(\mathfrak{b}_l) = \mathfrak{b}_l$. Daí que obtemos a decomposição $\mathfrak{b}_l = \mathfrak{b}_k \oplus \mathfrak{b}_s = (\mathfrak{so}(d) \cap \mathfrak{b}_l) \oplus (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{b}_l)$ em partes toroidal e vetorial, cujos elementos são as matrizes

$$\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_e \end{pmatrix}, \quad \text{com } C_j = \begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou } C_j = (0),$$

e

$$\begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_e \end{pmatrix}, \quad \text{com } D_j = \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ 0 & a_j \end{pmatrix} \quad \text{ou } D_j = (\mu_j),$$

respectivamente. Ao nível do grupo $\text{SL}(d, \mathbb{R})$, temos o subgrupo de Cartan B_l associado a \mathfrak{b}_l ; definido como sendo o centralizador de \mathfrak{b}_l em $\text{SL}(d, \mathbb{R})$ e portanto, consiste de

matrizes com a mesma descrição de X (em blocos) e com determinante um. Isto é

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_e \end{pmatrix}, \text{ com } A_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \text{ ou } A_j = (\mu_j).$$

Em vista de que o grupo de matrizes não nulas

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

é isomorfo ao grupo multiplicativo \mathbb{C}^* , segue-se que $B_l \cong (\mathbb{C}^*)^l \times (\mathbb{R}^*)^{d-2l-1}$ e, portanto, tem 2^{d-2l-1} componentes conexas. A componente conexa da identidade será denotada por $(B_l)_0 = (\mathbb{C}^*)^l \times (\mathbb{R}^+)^{d-2l-1}$, mais ainda $(\mathbb{C}^*)^l \cong (\mathbb{R}^+)^l \times T^l$ e conseqüentemente, $(B_l)_0 \cong T^l \times (\mathbb{R}^+)^{d-l-1}$. Por outro lado, se colocamos $B_t = B \cap K$, $B_s = \exp(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{s}) = \exp(\mathfrak{b}_s)$; pela Proposição 1.4.1.2 [28] temos que $B_l = B_t B_s$. Logo em termos matriciais os elementos de cada componente são dados por:

$$\begin{pmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_e \end{pmatrix}, \text{ com } E_j = \begin{pmatrix} \cos b_j & -\sin b_j \\ \sin b_j & \cos b_j \end{pmatrix} \text{ ou } E_j = (\pm 1)$$

e

$$\begin{pmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_e \end{pmatrix}, \text{ com } F_j = \begin{pmatrix} e^{a_j} & 0 \\ 0 & e^{a_j} \end{pmatrix} \text{ ou } F_j = (e^{\mu_j}),$$

respectivamente. Seja $B^K \subset \text{SL}(d, \mathbb{R})$ o subgrupo de Lie conexo correspondente a \mathfrak{b}_t , então $B_0 = B^K B_s$ (componente conexa de B), onde os elementos de cada componente são:

$$\begin{pmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_e \end{pmatrix}, \text{ com } E_j = \begin{pmatrix} \cos b_j & -\sin b_j \\ \sin b_j & \cos b_j \end{pmatrix} \text{ ou } E_j = (1)$$

e

$$\begin{pmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_e \end{pmatrix}, \text{ com } F_j = \begin{pmatrix} e^{a_j} & 0 \\ 0 & e^{a_j} \end{pmatrix} \text{ ou } F_j = (e^{\mu_j})$$

respectivamente. Portanto, $(B_l)_0 = \exp(B_l)$. Quanto à definição dos elementos regulares decompostos ao nível de grupo de Lie, notemos que estes podem ser definidos de maneira alternativa como segue. Dizemos que o elemento $g \in \text{SL}(d, \mathbb{R})$ é (\pm) regular decomposto, se seus autovalores são de multiplicidade um, dos quais ao menos um

deles é negativo e $|\lambda| \neq |\mu|$ para dois autovalores tal que $\lambda \neq \mu$ e $\lambda \neq \bar{\mu}$. A diferença destas duas formas de definir é que na primeira definição o elemento em questão se encontra na componente conexa da identidade B_0 da subálgebra de Cartan e na segunda pode não estar ali, mas se em outra componente conexa desde que possua autovalores reais negativos. Portanto, podemos escrever $g = \varepsilon uh$ onde ε é uma matriz diagonal com entradas ± 1 , encontrando-se num produto de componentes conexas: $u \in B^K$ e $h \in B_s$ ou $uh \in B_0$. Isto é, a menos de ε , g é um elemento da componente conexa da identidade do subgrupo de Cartan.

Observação: Se g é um elemento (\pm) -regular decomposto, então g^2 é regular decomposto.

Dito isso, seja $K(g)$ a componente conexa da identidade do grupo compacto formado pelas matrizes u que tem a mesma estrutura de blocos de g , tal que $\|\mu\| = 1$ para qualquer autovalor de u . A componente $K(g)$, é o grupo toroidal T^l , onde $2l$ é o número de autovalores complexos de g e a menos de uma conjugação coincide com $(B_l)_0$. Também, seja $\Lambda(g) \subset A$ o subgrupo de matrizes diagonais com autovalores reais positivos e que têm a mesma estrutura de blocos como g (autovalores repetidos aparecem onde g tem um autovalor complexo). A a menos de uma conjugação, este subgrupo é B_s . Agora, o fato de comutarem os elementos de $K(g)$ e $\Lambda(g)$, acarreta que o produto $K(g)\Lambda(g)$ seja um grupo abeliano.

Lema 1.1.1 *Para cada $w \in W$, a órbita $K(g)wb_0$ é um toro invariante sob g na variedade flag \mathbb{F} .*

Demonstração: $K(g)$ age transitivamente sobre $K(g)wb_0$. Se H_{wb_0} denota o subgrupo de isotropia em wb_0 , segue-se que $K(g)wb_0 \cong K(g)/H_{wb_0}$ e sendo este último um grupo abeliano, conexo e compacto segue que $K(g)wb_0$ é um toro. A invariança decorre de observar que g não está em $K(g)$ e pode ser escrito como $g = \varepsilon uh$ com ε sendo uma matriz diagonal com entradas ± 1 , $u \in K(g)$, $h \in \Lambda(g)$. Mas, essas matrizes comutam entre si e com $K(g)$, ainda mais, pelo fato de serem ε e h diagonais temos que $hwb_0 = \varepsilon wb_0 = wb_0$. Portanto, $gK(g)wb_0 = K(g)wb_0$. ■

No que diz respeito às $K(g)$ -órbitas dos elementos da órbita do flag canônico pelo grupo de Weyl, temos o seguinte:

Lema 1.1.2 *O subgrupo de isotropia H_{wb_0} de $K(g)$ em wb_0 é formado pelos elementos:*

$$u = \begin{pmatrix} A_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{r_e} \end{pmatrix},$$

onde A_{r_i} é o escalar u_{r_i} , ou a matriz $\pm 1_{r_i}$ em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Mais ainda, $o(H_{wb_0}) = 2^{l-1}$ onde $2l$ denota o número de autovalores complexos de g .

Demonstração: Seja o flag canônico

$$b_0 = (\text{ger}\{e_1\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2\} \subset \cdots \subset \text{ger}\{e_1, \dots, e_d\})$$

logo, a ação de um elemento w do grupo de Weyl W sobre b_0 é dado por:

$$wb_0 = (\text{ger}\{e_{i_1}\} \subset \text{ger}\{e_{i_1}, e_{i_2}\} \subset \cdots \subset \text{ger}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\}),$$

onde i_1, \dots, i_d é uma permutação de $\{1, \dots, d\}$ definida por w . Para $u \in H_{wb_0}$, temos que:

$$\begin{aligned} uwb_0 &= (\text{ger}\{ue_{i_1}\} \subset \text{ger}\{ue_{i_1}, ue_{i_2}\} \subset \cdots \text{ger}\{ue_{i_1}, \dots, ue_{i_d}\}) \\ &= (\text{ger}\{e_{i_1}\} \subset \text{ger}\{e_{i_1}, e_{i_2}\} \subset \cdots \subset \text{ger}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$ue_j = \begin{cases} \cos \alpha_{i_j} e_j + \sin \alpha_{i_j} e_{j+1} \\ \text{ou} \\ -\sin \alpha_{i_j} e_{j-1} + \cos \alpha_{i_j} e_j \\ \text{ou} \\ e_j \end{cases}$$

e a relação anterior fornece as seguintes possibilidades:

(a) Se $ue_{i_1} = \cos \alpha_{h_{i_1}} e_{i_1} + \sin \alpha_{h_{i_1}} e_{i_1+1} = \lambda e_{i_1}$, então $\alpha_{h_{i_1}} = k\pi$. Portanto, $ue_{i_1} = \pm e_{i_1}$. Quanto a $ue_{i_2} = xe_{i_1} + ye_{i_2}$ com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

- Para $ue_{i_2} = \cos \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2} + \sin \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2+1}$, as soluções são $\alpha_{h_{i_2}} = k\pi$, $x = 0$, $y = \pm 1$. De onde $ue_{i_2} = \pm e_{i_2}$.
- Para $ue_{i_2} = -\sin \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2-1} + \cos \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2}$, as soluções são $\alpha_{h_{i_2}} = k\pi$, $x = 0$, $y = \pm 1$. De onde $ue_{i_2} = \pm e_{i_2}$.
- Para $ue_{i_2} = e_{i_2}$, as soluções são $x = 0$, $y = 1$.
- ⋮

Assim, o processo continua, e u fixa elementos da base que definem autovalores reais. No caso dos complexos fixa ou inverte.

(b) Se $ue_{i_1} = -\sin \alpha_{h_{i_1}} e_{i_1-1} + \cos \alpha_{h_{i_1}} e_{i_1} = \lambda e_{i_1}$, então $\alpha_{h_{i_1}} = k\pi$. Portanto, $ue_{i_1} = \pm e_{i_1}$. Quanto a $ue_{i_2} = xe_{i_1} + ye_{i_2}$ com $x, y \in \mathbb{R}$ temos:

- Para $ue_{i_2} = \cos \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2} + \sin \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2+1}$, temos $ue_{i_2} = \pm e_{i_2}$.
- Para $ue_{i_2} = -\sin \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2} + \cos \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2}$, temos $ue_{i_2} = \pm e_{i_2}$.

- Neste caso $ue_{i_2} = e_{i_2}$.
- ⋮

Assim o processo continua como na parte (a)

(c) Se $ue_{i_1} = e_{i_1}$ e $ue_{i_2} = xe_{i_1} + ye_{i_2}$ com $x, y \in \mathbb{R}$, temos que:

- Para $ue_{i_2} = \cos \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2} + \sin \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2+1}$, as soluções são $\alpha_{h_{i_2}} = k\pi$, $x = 0$, $y = 1$. De onde, $ue_{i_2} = \pm e_{i_2}$.
- Para $ue_{i_2} = -\sin \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2-1} + \cos \alpha_{h_{i_2}} e_{i_2}$, as soluções são $\alpha_{h_{i_2}} = k\pi$, $x = 1$, $y = 0$. De onde, $ue_{i_2} = \pm e_{i_2}$.
- Para $ue_{i_2} = e_{i_2}$, as soluções são $x = 0$, $y = 1$.
- ⋮

De forma similar como em (a),(b) e continuando o processo obtém-se o resultado.

Aliás, se $2l$ denota o número de autovalores complexos presentes no elemento regular g , segue-se que $o(H_{wb_0}) = 2^{l-1}$. ■

Observação: As órbitas $K(g)wb_0$ com $w \in W$ não são necessariamente distintas. Por exemplo, suponha $d = 3$ e tome a ordem dos autovalores como sendo dada pela subálgebra de Cartan canônica para $l = 1$ e $s = 1$; a matriz

$$k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde A é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

está em $K(g)$. No entanto, $kb_0 = wb_0$ onde w é a permutação $w = (12)$. De fato,

$$k(\text{ger}\{e_1\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2, e_3\}) = (\text{ger}\{e_2\} \subset \text{ger}\{e_2, -e_1\} \subset \text{ger}\{e_2, -e_1, e_3\})$$

que é o mesmo flag obtido permutando os dois primeiros elementos da base. Portanto, $K(g)b_0 = K(g)wb_0$ com $w \neq 1$.

Seja $N_{\beta}^{-}(g)$ o subgrupo nilpotente das matrizes que podem ser escritas em forma triangular inferior em relação à base β e com a mesma estrutura de blocos de g de modo que as partes reais dos autovalores B_1, \dots, B_d do elemento regular decomposto $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ sejam colocados em forma decrescente: $ReB_1 > \dots > ReB_d$. Estas matrizes são da forma:

$$\begin{pmatrix} 1_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 1_{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{e1} & A_{e2} & \dots & 1_{r_e} \end{pmatrix},$$

com blocos diagonais do mesmo tamanho que os da estrutura de blocos de g , e A_{ij} percorrendo algum dos subespaços de matrizes: $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ ou \mathbb{R} . Seja B_j um autovalor real ou complexo de $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. Então $B_j = \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, s$ ou $B_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, l$ respectivamente. Usando a ordenação dada acima e colocando $A_i = \exp(X_i)$ temos uma ordenação dos autovalores de $g = \exp(X)$, em relação à mesma base β . Isto é:

$$|A_1| > \dots > |A_e|.$$

Portanto, em relação a esta ordenação temos o

Lema 1.1.3 *Seja g regular decomposto e ordene os autovalores em forma decrescente. Então $g^k n g^{-k} \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow +\infty$ e $n \in N^-(g)$. Em forma similar, $g^{-k} n g^k \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow +\infty$ se $n \in N^+(g)$, onde $N^+(g) = (N^-(g))^t$ é o grupo das matrizes triangulares superiores.*

Demonstração: Usando a notação $A_i = \exp(B_i)$ dado no início, temos que o termo genérico não nulo de $g^m n g^{-m}$ na posição (i, j) (em forma matricial) com $j < i$ é da forma

$$e^{mB_i} A_{ij} e^{-mB_j}. \quad (1.1)$$

Dependendo dos autovalores B_i e B_j , temos as seguintes possibilidades para A_{ij} :

- (a) Se $B_i \in \mathbb{C}$ e $B_j \in \mathbb{R}$, então $A_{ij} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$.
- (b) Se $B_i \in \mathbb{C}$ e $B_j \in \mathbb{C}$, então $A_{ij} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (c) Se $B_i \in \mathbb{R}$ e $B_j \in \mathbb{C}$, então $A_{ij} \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (d) Se $B_i \in \mathbb{R}$ e $B_j \in \mathbb{R}$, então $A_{ij} \in \mathbb{R}$.

Portanto, em cada um dos casos, temos que o termo genérico (1.1) pode ser expressado como:

(a)

$$e^{m(a_i - \mu_j)} \begin{pmatrix} \cos mb_i & -\sin mb_i \\ \sin mb_i & \cos mb_i \end{pmatrix} A_{ij}$$

e como $j < i$, temos que $a_i - \mu_j < 0$. Daí que

$$e^{mB_i} A_{ij} e^{-mB_j} \rightarrow 0, \text{ se } m \rightarrow +\infty$$

(b)

$$e^{m(a_i - a_j)} \begin{pmatrix} \cos mb_i & -\sin mb_i \\ \sin mb_i & \cos mb_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos mb_j & -\sin mb_j \\ \sin mb_j & \cos mb_j \end{pmatrix}$$

e como $j < i$, temos que $a_i - a_j < 0$. Daí que

$$e^{mB_i} A_{ij} e^{-mB_j} \longrightarrow 0 \text{ se } m \longrightarrow +\infty$$

(c)

$$e^{m(\mu_i - a_j)} A_{ij} \begin{pmatrix} \cos mb_i & -\sin mb_i \\ \sin mb_i & \cos mb_i \end{pmatrix}$$

e como $j < i$, temos que $\mu_i - a_j < 0$. Daí que

$$e^{mB_i} A_{ij} e^{-mB_j} \longrightarrow 0, \text{ se } m \longrightarrow +\infty$$

(d)

$$e^{m(\mu_i - \mu_j)} A_{ij}$$

e como $j < i$, temos que $\mu_i - \mu_j < 0$. Daí que

$$e^{mB_i} A_{ij} e^{-mB_j} \longrightarrow 0, \text{ se } m \longrightarrow +\infty$$

Portanto, em vista que $A_{ii} = 1_{r_i}$, $A_{ij} = 0$, $i < j$, temos que $h^m n h^{-m} \longrightarrow 1$ se $m \longrightarrow +\infty$. A demonstração para o caso $n \in N^+(g)$ é similar. ■

A ligação dos subgrupos $N^\pm(g)$ e $K(g)$ é dada através do produto direto.

Lema 1.1.4 *Os produtos $N^\pm(g)K(g)$ são subgrupos.*

Demonstração: É suficiente mostrar que $K(g)$ normaliza $N^\pm(g)$, ou seja $kN^\pm(g)k^{-1} = N^\pm(g)$ para qualquer $k \in K(g)$. De fato, tomemos $k \in K(g)$, $n \in N^\pm(g)$ com $k = \text{diag}(C_1, \dots, C_e)$, $n = (A_{ij})$ e a mesma estrutura de blocos que g . Então o termo genérico na entrada (i, j) de knk^{-1} é $C_i A_{ij} C_j^{-1}$. Portanto, $1_{r_i} = C_i A_{ij} C_i^{-1}$ e dependendo de n teremos que $C_i A_{ij} C_j^{-1} = 0$ se $i \leq j$ e $n \in N^-(g)$ ou se $i \geq j$ e $n \in N^+(g)$. ■

Observação: O grupo nilpotente N^- oposto a N^+ que intervém na decomposição de Iwasawa contém $N^-(g)$ o que implica a inclusão das órbitas $N^-(g)wb_0 \subset N^-wb_0$. Segundo a decomposição de Bruhat, temos que as órbitas N^-wb_0 , $w \in W$, são as variedades estáveis nos pontos fixos hiperbólicos wb_0 correspondentes a elementos $h \in A^+$ (câmara de Weyl positiva) e cobrem a variedade flag maximal F . Em dualidade,

as instáveis são dadas pelas órbitas $N^+wb_0, w \in W$. Ao contrário disto, as órbitas $N^-(g)wb_0$, com $w \in W$, não necessariamente cobrem \mathbb{F} nem wb_0 são os pontos fixos de g . Em geral, o número de $N^\pm(g)$ -órbitas pode ser infinito como é mostrado abaixo.

Exemplo: Seja \mathbb{F} a variedade flag maximal definida em \mathbb{R}^5 e a estrutura de blocos dado por

$$g = \text{diag}\left(e^{a_1}(\cos b_1 + i \sin b_1), e^{\mu_1}, e^{a_2}(\cos b_2 + i \sin b_2)\right)$$

em relação à base $\beta = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ com $a_1 > \mu_1 > a_2$. Tomemos x fora do subespaço gerado por $\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$, $x = ae_4 + be_5$, $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$ e definamos o flag

$$b_x = (\text{ger}\{e_1\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2, e_3\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2, e_3, x\}).$$

Seja $n \in N^-(g)$, $\tilde{n} \in N^-$ e $u \in K(g)$. Essas matrizes se escrevem em relação a β como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \cos b_1 & -\sin b_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin b_1 & \cos b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos b_2 & -\sin b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \sin b_2 & \cos b_2 \end{pmatrix},$$

respectivamente. A quarta componente do flag

$$nb_x = (\text{ger}\{ne_1\} \subset \text{ger}\{ne_1, ne_2\} \subset \text{ger}\{ne_1, ne_2, ne_3\} \subset \text{ger}\{ne_1, ne_2, ne_3, x\} \subset \dots)$$

não é afetada por n , pelo que $N^-(g)b_x$, com $x \in \text{ger}\{e_4, e_5\}$ fornecem as órbitas distintas que procuramos. Por outro lado o subgrupo N^- não necessariamente está contido em $N^-(g)K(g)$. De fato, o produto a seguir nu

$$\begin{pmatrix} \cos b_1 & -\sin b_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin b_1 & \cos b_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \cos b_2 & -\sin b_2 \\ \tilde{a}_{51} & \tilde{a}_{52} & \tilde{a}_{53} & \sin b_2 & \cos b_2 \end{pmatrix}$$

não envolve as entradas de \tilde{n} para $c_{21} \neq 1, c_{54} \neq 1$, em vista que $c_{21}, c_{54} \in \mathbb{R}$. Apesar de não existir a inclusão $N^- \subset N^-(g)K(g)$, existe a inclusão das órbitas no flag maximal, como é fornecido pelo seguinte:

Consideremos o subgrupo de Cartan $B_l(g)$ correspondente à subálgebra de Cartan \mathfrak{b}_l . É evidente que $N^- \subset N^-(g)B_l(g)$. Portanto, $N^-wb_0 \subset N^-(g)B_l(g)wb_0$. Assim falta verificar apenas que $B_l(g)wb_0 = K(g)wb_0$. Para tal, iniciamos com o seguinte:

Lema 1.1.5 *Seja $V = \text{ger}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ um subespaço de \mathbb{R}^d gerado pelos vetores básicos que diagonalizam g . Tomemos $h \in B_l(g)$. Então existe $u \in K(g)$ tal que $uV = hV$.*

Demonstração: Seja $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus \dots \oplus V_e$ a decomposição de \mathbb{R}^d em subespaços de dimensão 1 ou 2 dada pela estrutura de blocos de g (auto-espaços de g). Como a base $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ é a que coloca g nessa forma, segue-se que

$$V = (V \cap V_1) \oplus \dots \oplus (V \cap V_e). \quad (1.2)$$

porque V é gerado por vetores básicos. Por outro lado, o fato de que $h \in B_l(g)$ implica que $hV_i = V_i$ para todo $i = 1, \dots, e$. Daí que

$$hV = \left(h(V \cap V_1) \right) \oplus \dots \oplus \left(h(V \cap V_e) \right).$$

Na soma direta (1.2) as componentes $V \cap V_i$ são de dimensão 1 ou 2. Agora, pela definição de $K(g)$ existem $u_1, \dots, u_e \in K(g)$ tais que a restrição u_i a V_j é a identidade em V_j se $i \neq j$ e tal que $u_i(V \cap V_i) = h(V \cap V_i)$ para todo $i = 1, \dots, e$; e é suficiente tomar restrições a V_i e estende-los ao espaço tudo como sendo a identidade. Portanto, tomando $u = u_1 \dots u_e$, segue-se que $uV = hV$. ■

Observação: A escolha do elemento $u \in K(g)$ foi de tal forma que $u = 1$ nos subespaços (básicos) que não interceptam V .

Lema 1.1.6 *Para cada $w \in W$, tem-se $N^-wb_0 \subset N^-(g)K(g)wb_0$. Em particular, $N^-(g)K(g)b_0$ é uma vizinhança de $K(g)b_0$ densa em \mathbb{F} .*

Demonstração: Seja $w \in W$ a permutação $(i_1 \dots i_d)$ e b_0 o flag canônico

$$b_0 = (\text{ger}\{e_1\} \subset \text{ger}\{e_1, e_2\} \subset \dots \subset \text{ger}\{e_1, \dots, e_d\}),$$

logo a ação de w sobre b_0 é dado por:

$$wb_0 = \text{ger}\{e_{i_1}\} \subset \text{ger}\{e_{i_1}, e_{i_2}\} \subset \dots \subset \text{ger}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\}.$$

Se denotamos por $W_j = \text{ger}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ temos que o flag definido acima pode ser escrito como

$$wb_0 = (W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_d).$$

Em vista de que temos a provar que $B_l(g)wb_0 = K(g)wb_0$, tomamos $hwb_0 \in B_l(g)wb_0$, com $h \in B_l(g)$; já que a inclusão contrária é óbvia porque $K(g) \subset B_l(g)$. Portanto, resta mostrar que existe um $u \in K(g)$ tal que $uwb_0 = hwb_0$. Para tal, considera-se os flags parciais

$$b_j = (W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_j)$$

e no que segue, a prova será feita por indução sobre j .

- Para $j = 1$, temos que $b_1 = W_1$. Se tomamos a decomposição de $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus \cdots \oplus V_e$, o Lema 1.1.5 fornece um $u \in K(g)$ tal que $uW_1 = hW_1$ e $u = 1$ nos subespaços V_i que interceptam W_1 trivialmente. Isto é, se $W_1 \cap V_i = (0)$.
- Agora, suponhamos que a conclusão também seja válida no nível j . Isto é, existe $u \in K(g)$ tal que $ub_j = hb_j$ e $u = 1$ em V_i se $W_j \cap V_i = (0)$. Mostraremos então que esta conclusão também é válida para o nível $j + 1$; ou seja, existe $\tilde{u} \in K(g)$ tal que $\tilde{u}b_{j+1} = hb_{j+1}$ e $\tilde{u} = 1$ em V_i se $W_{j+1} \cap V_i = (0)$. De fato, em vista da decomposição $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus \cdots \oplus V_e$ temos que

$$W_{j+1} = (W_{j+1} \cap V_1) \oplus \cdots \oplus (W_{j+1} \cap V_e).$$

Logo, se tomamos os índices i tais que $W_{j+1} \cap V_i \neq (0)$ temos duas possibilidades a tratar:

- (a) Se $W_j \cap V_i \neq (0)$ para cada índice i tal que $W_{j+1} \cap V_i \neq (0)$. Então existe i_0 tal que $V_{i_0} \cap W_j \neq (0)$ e no entanto, V_{i_0} não está contido em W_j . Caso contrario, $V_i \subset W_j$ para aqueles i 's. Mas, isso força a que $W_{j+1} = V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_s}$, e como os subespaços $V_i \subset W_j$ temos que $W_j = W_{j+1}$, o qual é um absurdo. Para o índice i_0 a $\dim V_{i_0} = 2$ e $W_{j+1} = W_j + V_{i_0}$ porque $\dim V_{i_0} = 1$ fornece que $V_{i_0} \subset W_j$. Também é claro que $uV_{i_0} = V_{i_0}$ e $hV_{i_0} = V_{i_0}$ pela estrutura de blocos que eles tem. Daí que

$$\begin{aligned} uW_{j+1} &= uW_j + uV_{i_0} \\ &= hW_j + hV_{i_0} \\ &= hW_{j+1}. \end{aligned}$$

Portanto, $ub_j = hb_{j+1}$. Além do mais, u se restringe à identidade nos subespaços básicos que não interceptam W_{j+1} . Portanto, deve-se tomar $\tilde{u} = u$.

- (b) Existe um índice i_0 tal que $W_j \cap V_{i_0} = (0)$ e no entanto, $W_{j+1} \cap V_{i_0} \neq (0)$. Então

$$W_{j+1} = W_j \oplus (W_{j+1} \cap V_{i_0}),$$

já que $(0) = W_j \cap V_{i_0} = W_j \cap (W_{j+1} \cap V_{i_0})$. Logo, define-se \tilde{u} como sendo u em W_j de tal forma que

$$\tilde{u}(W_{j+1} \cap V_{i_0}) = h(W_{j+1} \cap V_{i_0}).$$

(e é claro que $\tilde{u} = 1$ nas demais componentes básicas). Esse \tilde{u} é o desejado.

Para uma outra prova, é suficiente considerar o caso $w = 1$; porque para $w \neq 1$ só temos uma mudança da base e o mesmo argumento funciona. Para isso tomamos os

níveis $j-1, j, j+1$ onde nu e \tilde{n} são representados:

$$\begin{aligned} nue_{j-1} &= 0e_1 + \cdots + \cos b_{j-1,1}e_{j-1} + \sin b_{j-1,1}e_j + a_{j+1,j-1}e_{j+1} + \cdots + a_{n,j-1}e_n \\ nue_j &= 0e_1 + \cdots - \sin b_{j-1,1}e_{j-1} + \cos b_{j-1,1}e_j + a_{j+1,j}e_{j+1} + \cdots + a_{n,j-1}e_n \\ nue_{j+1} &= 0e_1 + \cdots + 0e_{j-1} + 0e_j + e_{j+1} + \cdots + a_{n,j+1}e_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{n}e_{j-1} &= 0e_1 + \cdots + e_{j-1} + c_{j,j-1}e_j + c_{j+1,j-1}e_{j+1} + \cdots + c_{n,j-1}e_n \\ \tilde{n}e_j &= 0e_1 + \cdots + 0e_{j-1} + e_j + c_{j+1,j}e_{j+1} + \cdots + c_{n,j}e_n \\ \tilde{n}e_{j+1} &= 0e_1 + \cdots + 0e_j + e_{j+1} + c_{j+2,j+1}e_{j+2} + \cdots + c_{n,j+1}e_n, \end{aligned}$$

respectivamente. Logo, para o flag canônico b_0 temos os flags

$$(\cdots \text{ger}\{\dots, nue_{j-1}\} \subset \text{ger}\{\dots, nue_{j-1}, nue_j\} \subset \text{ger}\{\dots, nue_{j-1}, nue_j, nue_{j+1}\} \cdots)$$

e

$$(\cdots \text{ger}\{\dots, \tilde{n}e_{j-1}\} \subset \text{ger}\{\dots, \tilde{n}e_{j-1}, \tilde{n}e_j\} \subset \text{ger}\{\dots, \tilde{n}e_{j-1}, \tilde{n}e_j, \tilde{n}e_{j+1}\} \cdots)$$

Segue-se que $\{\dots, nue_{j-1}\}$ e $\{\dots, 1/\cos b_{j-1,1}nue_{j-1}\}$ definem o mesmo subespaço vetorial e para $b_{j-1,1} = 2\pi$ as últimas três equações se adaptam às primeiras. Portanto, o segundo flag pertence a $N^-(g)K(g)b_0$. ■

O exemplo anterior também mostra que as órbitas $N^-(g)wb_0$, com $w \in W$ não cobrem \mathbb{F} , e é por isso que se considera o subgrupo $N^-(g)K(g)$.

Lema 1.1.7 *As órbitas $N^-(g)K(g)wb_0$, $w \in W$, cobrem \mathbb{F} e são mutuamente disjuntas a menos que $K(g)w_1b_0 = K(g)w_2b_0$.*

Demonstração: A primeira parte decorre do Lema 1.1.6 e de observar que as N^- -órbitas dos flags especiais wb_0 , cobrem a variedade flag devido à decomposição de Bruhat. Para a segunda parte, supomos que

$$N^-(g)K(g)w_1b_0 \cap N^-(g)K(g)w_2b_0 \neq \emptyset.$$

Então existem $n_i \in N^-(g)$ e $u_i \in K(g)$, $i = 1, 2$, tal que

$$n_1u_1w_1b_0 = n_2u_2w_2b_0.$$

Multiplicando essa igualdade por $u_1n_2^{-1}$ e colocando $n = u_1^{-1}n_2^{-1}n_1u_1$, $u = u_1^{-1}u_2$, temos que

$$nw_1b_0 = uw_2b_0$$

com $n \in N^-(g), u \in K(g)$. Aplicando g^k nesta igualdade e fazendo $k_l \rightarrow +\infty$; para alguma subsequência k_l , temos que $g^{k_l} n w_1 b_0$ converge em $K(g) w_1 b_0$ porque este conjunto é compacto, g -invariante e $g^{k_l} n g^{-k_l} \rightarrow 1$. Por outro lado, g^k aplicado ao lado direito pertence a $K(g) w_2 b_0$, ou seja $K(g) w_2 b_0$ intercepta $K(g) w_1 b_0$. Portanto, essas órbitas devem coincidir. Em forma similar, o resultado vale com $N^+(g)$ no lugar de $N^-(g)$. Basta usar os mesmos argumentos com a variante $g^k n g^{-k} \rightarrow 1$, com $n \in N^+(g)$ quando $k \rightarrow -\infty$. ■

Serão apresentadas agora variantes de alguns conceitos de sistemas dinâmicos definidos para fluxos em espaços métricos dados em [4].

Definição 1.1.8 *O conjunto ω -limite de um subconjunto $Y \subset \mathbb{F}$ em relação ao difeomorfismo ϕ é*

$$\omega(Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{fe} \left(\bigcup_{m \geq n} \phi^m(Y) \right),$$

onde fe denota o fecho topológico. De forma similar, o conjunto α -limite é dado por:

$$\alpha(Y) = \bigcap_{n=-1}^{-\infty} \text{fe} \left(\bigcup_{m \leq n} \phi^m(Y) \right).$$

Notemos em geral que $\omega(Y)$ pode ser maior que a união de todos $\omega(y)$ com $y \in Y$. Como \mathbb{F} é compacto a propriedade da interseção finita garante que $\omega(Y) \neq \emptyset$, compacto e ϕ -invariante. Os conjuntos α -limite são os conjuntos ω -limite para o difeomorfismo ϕ^{-1} . Um ponto $x \in \mathbb{F}$ é chamado recorrente, se $x \in \omega(x)$.

Por outro lado, $y \in \omega(Y)$ se, e somente se, $y \in \text{fe} \left(\bigcup_{m \geq n} \phi^m(Y) \right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fixado $k \in \mathbb{N}$ e a bola $B(y, 1/k)$ em relação a qualquer métrica definida em \mathbb{F} compatível com a topologia da variedade, temos que:

$$B(y, 1/k) \cap \left(\bigcup_{m \geq n} \phi^m(Y) \right) \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, existem

$$y_{n_k} \in B(y, 1/k) \cap \phi^{n_k}(Y)$$

com $n_k > n$. Mas $y_{n_k} = \phi^{n_k}(x_{n_k}), x_{n_k} \in Y$. Dai que $\phi^{n_k}(x_{n_k}) \rightarrow y$ se $n_k \rightarrow +\infty$ e

$$\omega(Y) \subseteq \{y \in \mathbb{F} : \exists n_k \rightarrow +\infty, \text{ e } x_{n_k} \in Y, \text{ tal que, } \phi^{n_k}(x_{n_k}) \rightarrow y\}.$$

Reciprocamente, para y no conjunto do lado direito existe $n_k \rightarrow +\infty$, e $x_{n_k} \in Y$ tal que $\phi^{n_k}(x_{n_k}) \rightarrow y$. Sendo assim, para um aberto $U \ni y$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\phi^{n_k}(x_{n_k}) \in U$ para $n_k > n_0$. Dai para $n_k > \max\{n, n_0\}$ obtém-se que

$$\phi^{n_k}(x_{n_k}) \in \bigcup_{m \geq n} \phi^m(Y).$$

Portanto, temos provado a inclusão contrária e os conjuntos ω , α -limites definidos acima, podem ainda ser colocados como:

$$\begin{aligned} \omega(Y) &= \{y \in \mathbb{F} : \exists n_k \longrightarrow +\infty, \text{ e } x_{n_k} \in Y, \text{ tal que, } \phi^{n_k}(x_{n_k}) \longrightarrow y\} \\ &\text{e} \\ \alpha(Y) &= \{y \in \mathbb{F} : \exists n_k \longrightarrow -\infty, \text{ e } x_{n_k} \in Y, \text{ tal que, } \phi^{n_k}(x_{n_k}) \longrightarrow y\} \end{aligned}$$

Lema 1.1.9 *As órbitas $K(g)wb_0$ são os conjuntos ω -limite das órbitas $N^-(g)K(g)wb_0$, para cada $w \in W$. De forma similar eles são α -limites das órbitas $N^+(g)K(g)wb_0$.*

Demonstração: É só usar o fato, $g^m x g^{-m} \longrightarrow 1$ se $m \longrightarrow +\infty$, com $x \in N^-(g)$. Antes de mais nada, provaremos a relação:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m \geq n} g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0) \right) \subset K(g)wb_0, \quad \tilde{n} \in N^-(g).$$

De fato,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m \geq n} g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0) \right)$$

se, e somente se,

$$x \in \bigcup_{m \geq k} g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

se, e somente se, existe $m_k > k$ tal que

$$x \in g^{m_k} \tilde{n} g^{-m_k} (K(g)wb_0), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

se, e somente se, existe $m_k > k$, $z_{m_k} \in K(g)wb_0$ tal que

$$x = g^{m_k} \tilde{n} g^{-m_k} (z_{m_k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daí, pela compacidade da órbita $K(g)wb_0$, existe uma subsequência (m_{k_l}) tal que $z_{m_{k_l}} \longrightarrow z \in K(g)wb_0$. Mas,

$$x = \lim_{m_{k_l} \rightarrow +\infty} g^{m_{k_l}} \tilde{n} g^{-m_{k_l}} (z_{m_{k_l}}) = z.$$

Portanto, $x \in K(g)wb_0$. Usando este fato temos que

$$\begin{aligned}
\omega(N^-(g)K(g)wb_0) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{fe} \left(\bigcup_{m \geq n} g^m (N^-(g)K(g)wb_0) \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{fe} \left(\bigcup_{m \geq n} \bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} g^m \tilde{n} (K(g)wb_0) \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{fe} \left(\bigcup_{m \geq n} \bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} g^m \tilde{n} g^{-m} (g^m K(g)wb_0) \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{fe} \left(\bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} \bigcup_{m \geq n} g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0) \right) \\
&\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} \text{fe} \left(\bigcup_{m \geq n} g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0) \right) \right) \\
&\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} \bigcup_{m \geq n} \text{fe} (g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0)) \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} \left(\bigcup_{m \geq n} g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0) \right) \right) \\
&= \bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m \geq n} g^m \tilde{n} g^{-m} (K(g)wb_0) \right) \right) \\
&= \bigcup_{\tilde{n} \in N^-(g)} K(g)wb_0 \quad (\text{pelo primeiro fato}) \\
&= K(g)wb_0.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, dado $x \in K(g)wb_0$ temos que $x \in g^n (K(g)wb_0)$. Logo

$$x = g(x_1) = \dots = g^n(x_n) = \dots$$

com $x_i \in K(g)wb_0 \subset N^-(g)K(g)wb_0$. Portanto, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x_n)$, assim $x \in \omega(N^-(g)K(g)wb_0)$. A segunda parte é similar, já que basta usar o fato, $g^{-m}ng^m \rightarrow 1$ se $m \rightarrow +\infty$ para cada $n \in N^+(g)$. ■

Observação: O seguinte fato é da teoria geral, mas convém colocar em evidência. Se $x \in N^-(g)K(g)wb_0$, então a sequência $g^k x$ se acumula em $K(g)wb_0$ porque $g^k n g^{-k} \rightarrow$

1 se $k \rightarrow +\infty$ e $n \in N^-(g)$. Portanto, os conjuntos ω -limite de x arbitrário em \mathbb{F} para a g -ação, estão contidos em $K(g)wb_0$, $w \in W$. Pela mesma razão, os conjuntos α -limite em x , estão contidos em $K(g)wb_0$, se $x \in N^+(g)K(g)wb_0$. Por conseguinte, as órbitas $K(g)wb_0$, $w \in W$, contêm todos os conjuntos ω e α -limites para a g -ação.

Agora estamos no ponto de introduzir o conceito dos atratores e repulsores.

Definição 1.1.10 *Um conjunto invariante compacto $A \subset \mathbb{F}$ é um atrator para um difeomorfismo ϕ , se este admite uma vizinhança N tal que $\omega(N) = A$. De forma similar, um repulsor é um conjunto $R \subset \mathbb{F}$ invariante sob ϕ , compacto e que tem uma vizinhança N^* , com $\alpha(N^*) = R$.*

Como uma consequência do Lema 1.1.9, via esta definição, temos que $A = K(g)b_0$ é um atrator de g porque $N^-(g)K(g)b_0$ é uma vizinhança que o contém e mais ainda este contém a componente aberta de Bruhat. Fazendo um paralelo com os fatos apresentados em [22] ou [18], o repulsor seria a órbita $K(g)w_0b_0$, onde w_0 é a involução principal de W , isto é, o único elemento de W que satisfaz $w_0(\Sigma) = -\Sigma$. Ou também, será que para alguma câmara de Weyl induzida por algum sistema simples de raízes se tenha $w_0(K(g)b_0)$ como repulsor. Existe um resultado, de caráter geral, que permite detectar o repulsor a partir do atrator correspondente a um difeomorfismo.

Lema 1.1.11 *Para um atrator A , o conjunto $A^* = \{x \in \mathbb{F} : \omega(x) \cap A = \emptyset\}$ é um repulsor chamado de repulsor complementar. Então (A, A^*) é chamado de um par atrator-repulsor.*

Demonstração: Veja [4]. ■

Usando o lema anterior e o que provaremos abaixo, podemos capturar alguns ou todos elementos de A^* . Aliás, tal resultado permite mostrar que as órbitas $K(g)wb_0$, $w \in W$ formam uma decomposição de Morse.

Proposição 1.1.12 *Seja $x \in N^+(g)K(g)wb_0$ tal que não pertença a $K(g)wb_0$. Então não existe sequência de inteiros $k_l > 0$ tal que $g^{k_l}x$ converge para um ponto em $K(g)wb_0$.*

Demonstração: Suponhamos que exista uma sequência de inteiros $k_l > 0$ tal que,

$$g^{k_l}x \rightarrow uwb_0, \quad u \in K(g).$$

Pelo Lema 1.1.4, podemos escrever $x = n\tilde{u}wb_0 = \tilde{u}\tilde{n}wb_0$ com $\tilde{u} \in K(g)$, $n, \tilde{n} \in N^+(g)$ e tal que $\tilde{n}wb_0 \notin K(g)wb_0$ porque $x \notin K(g)wb_0$. Também $g = kh$ com $k \in K(g)$ e $h \in \Lambda(g)$. Tomando uma subseqüência, podemos assumir que $k^{k_{l_m}} \rightarrow v_0$ em $K(g)$ (pela compacidade). Então, temos que

$$u^{-1}\tilde{u}h^{k_{l_m}}\tilde{n}wb_0 = k^{-k_{l_m}}u^{-1}g^{k_{l_m}}x \rightarrow v_0^{-1}wb_0,$$

e daí

$$h^{k_{im}} \tilde{n} w b_0 \longrightarrow u \tilde{u}^{-1} v_0^{-1} \in K(g) w b_0.$$

Portanto, a conclusão segue do lema a seguir. ■

Lema 1.1.13 *Seja $h \in \Lambda(g)$ a parte diagonal do elemento regular decomposto g . Tomemos $x = n w b_0$, com $n \in N^+(g)$ tal que $x \notin K(g) w b_0$. Se $\omega(x)$ denota o conjunto ω -limite de x sob a ação de h , então $\omega(x) \cap K(g) w b_0 = \emptyset$.*

Demonstração: A idéia é, encontrar uma função $f \in C^\infty(\mathbb{F})$ associado a h tal que seja constante ao longo das órbitas $K(g) w b_0$. Logo, usando o fato de que f é estritamente crescente ao longo de qualquer trajetória, que não seja ponto crítico ou singularidade de $\text{grad } f$ em alguma métrica riemanniana, obteremos a conclusão. Para isso, seja $H = \log(h)$ e \tilde{H} o campo vetorial induzido por H através da ação canônica na variedade flag \mathbb{F} . Existe uma métrica riemanniana (métrica de Takeuchi-Kobayashi) em \mathbb{F} tal que \tilde{H} seja o campo vetorial gradiente de alguma função f . A construção de f é uma consequência de realizar o flag \mathbb{F} como a órbita $\text{Ad}(K)H_0$, com $H_0 \in \mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{s}$ o espaço das matrizes simétricas de traço zero (veja o Lema 0.3.3 do Capítulo 0). Em \mathfrak{s} existe um produto interno (\cdot, \cdot) dado pela forma de Cartan-Killing, isto é, a restrição à parte simétrica \mathfrak{s} do produto interno induzido pela involução θ . Então

$$f(\text{Ad}(u)H_0) = (\text{Ad}(u)H_0, H).$$

As transformações adjuntas $\text{Ad}(u)$, $u \in K$, são ortogonais em relação a (\cdot, \cdot) e $\text{Ad}(\tilde{u})H = H$ se $\tilde{u} \in K(g)$ pois H tem a mesma estrutura de blocos que \tilde{u} (autovalores repetidos aparecem onde \tilde{u} tem autovalores complexos). Logo,

$$f(\text{Ad}(\tilde{u})H_0) = (\text{Ad}(\tilde{u})H_0, \text{Ad}(\tilde{u})H) = (H_0, H).$$

Daí, segue-se que f é constante ao longo das $K(g)$ -órbitas. As trajetórias de \tilde{H} , são da forma $\tilde{H}_t(y) = \exp(tH)y$, em particular a trajetória que passa por $x = n w b_0$ é $\tilde{H}_t(x) = e^{tH} n e^{-tH} w b_0$. Pelo Lema 1.1.3 temos $e^{tH} n e^{-tH} \longrightarrow 1$ quando $t \longrightarrow -\infty$. Isto é, $\tilde{H}_t(x) \longrightarrow w b_0$ se $t \longrightarrow -\infty$. Estes argumentos mostram que $\tilde{H}_t(x)$ não é uma trajetória constante, ou seja, x não é um ponto crítico de f . De fato, caso contrário temos que $\tilde{H}_t(x) = w b_0$, se $t \in \mathbb{R}$, contradizendo a que $x \in K(g) w b_0$. Por conseguinte, f é estritamente crescente ao longo de $\tilde{H}_t(x)$. Portanto, usando novamente o fato que $\tilde{H}_t(x) \longrightarrow w b_0$ quando $t \longrightarrow -\infty$ temos que $f(n w b_0) > f(w b_0)$ e como f é constante em $K(g) w b_0$ segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\tilde{H}_t(x)) > f(n w b_0) > f(w b_0) = f(u w b_0), \text{ para } u \in K(g)$$

e daí temos que nenhuma subsequência de $\tilde{H}_t(x)$ pode-se acumular em $K(g) w b_0$ quando $t \longrightarrow +\infty$. ■

Observação: Para cada $x \in N^+(g)K(g)wb_0$ fora de $K(g)wb_0$, o Lema 1.1.12 essencialmente diz que $\omega(x) \cap K(g)wb_0 = \emptyset$. Portanto, colocando $w = 1$, pelo Lema 1.1.11 temos que $x \in A^*$.

Agora estamos no ponto de definir os conjuntos estáveis e instáveis de subconjuntos compactos e invariantes.

Definição 1.1.14 *Seja ϕ um difeomorfismo de \mathbb{F} e $\Omega \subset \mathbb{F}$ um subconjunto compacto e invariante. O conjunto estável de ϕ em Ω é aquele formado pelos elementos $x \in \mathbb{F}$, tal que $\phi^{k_l}(x)$ converge em Ω se $k_l \rightarrow +\infty$, para alguma subsequência $(k_l)_l$. Isto é*

$$W_s(\Omega) = \{x \in \mathbb{F} : \exists k_l \rightarrow +\infty, \text{ tal que } \phi^{k_l}(x) \text{ converge em } \Omega\}$$

e o dual instável é definido por:

$$W_u(\Omega) = \{x \in \mathbb{F} : \exists k_l \rightarrow -\infty, \text{ tal que } \phi^{k_l}(x) \text{ converge em } \Omega\}.$$

Uma vez que tenhamos definido $W_s(\Omega)$; o conjunto instável $W_u(\Omega)$ é simplesmente o conjunto estável do difeomorfismo ϕ^{-1} .

Em termos desta linguagem, podemos interpretar as órbitas $N^\pm(g)K(g)wb_0$, como sendo os conjuntos estáveis e instáveis do elemento regular decomposto g associados à órbita $K(g)wb_0$. De fato, ambos conjuntos estão contidos em $W_s(K(g)wb_0)$ e $W_u(K(g)wb_0)$ respectivamente; e as inclusões contrárias decorrem de:

- Se $x \in W_s(K(g)wb_0)$, então $g^{k_l}x \rightarrow y \in K(g)wb_0$, para alguma subsequência $k_l \rightarrow +\infty$. Por outro lado, como as $N^-(g)K(g)$ -órbitas cobrem a variedade flag, tem-se que $x \in N^-(g)K(g)w_0b_0$ para algum $w_0 \in W$, ou seja, $x = nuw_0b_0$, $n \in N^-(g), u \in K(g)$. Também, $g^{k_l}ng^{-k_l} \rightarrow 1$ se $k_l \rightarrow +\infty$ (Lema 1.1.3). Logo, para alguma subsequência $(k_{l_m})_m$, temos $g^{k_{l_m}}(x) \rightarrow \tilde{y}$ em $K(g)w_0b_0$, mas $g^{k_{l_m}}(x) \rightarrow y$ em $K(g)wb_0$. Portanto, $\tilde{y} = y$ e $x \in N^-(g)K(g)wb_0$. Mais ainda, esses conjuntos estáveis são subvariedades imersas quasi-regulares em virtude do Teorema de Stefan-Sussman.
- Se $x \in W_u(K(g)wb_0)$, então $g^{k_l}(x) \rightarrow y \in K(g)wb_0$, para alguma subsequência $k_l \rightarrow -\infty$. Logo, pelos mesmos argumentos anteriores obtém-se a conclusão.

Tudo isto é resumido no

Lema 1.1.15 *As órbitas $N^-(g)K(g)wb_0, N^+(g)K(g)wb_0$ são as variedades estáveis, instáveis de g respectivamente em relação à órbita $K(g)wb_0$.*

Demonstração: Feita acima. ■

Observação: Por agora, não precisamos estudar a hiperbolicidade das $K(g)wb_0$ -órbitas em relação ao elemento regular decomposto g ; já que as $N^\pm(g)K(g)wb_0$ -órbitas

são subvariedades. No que diz respeito às bifurcações, eles podem ser obtidos perturbando o elemento regular decomposto em menção, até quebrar sua estrutura; aliás é de esperar uma mudança nas variedades estáveis (perturbações das variedades estáveis).

No que diz respeito à definição de conjunto estável, existe uma versão mais usual a qual é definida como:

$$\tilde{W}_s(\Omega) = \{x \in \mathbb{F}: d(\phi^n(x), \Omega) \longrightarrow 0, \text{ se } n \longrightarrow +\infty\}.$$

A relação entre estas duas versões é dada pela inclusão:

$$\tilde{W}_s(\Omega) \subseteq W_s(\Omega).$$

De fato, se $x \in \tilde{W}_s(\Omega)$ temos que $d(\phi^n(x), \Omega) \longrightarrow 0$. Daí, para $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $d(\phi^{n_k}(x), \Omega) < 1/k$. Mas

$$d(\phi^{n_k}(x), \Omega) = \inf\{d(\phi^{n_k}(x), z) : z \in \Omega\},$$

logo fazendo $c_{n_k} = d(\phi^{n_k}(x), \Omega)$ e tomando $\varepsilon = 1/k - c_{n_k}$, existe $a_{n_k} = d(\phi^{n_k}(x), z_{n_k})$ com $z_{n_k} \in \Omega$ tal que $c_{n_k} < a_{n_k} < 1/k$. Sendo Ω um conjunto compacto, existe uma subsequência $z_{n_k} \longrightarrow z \in \Omega$. Daí, fixando $\varepsilon > 0$ e usando a relação

$$d(\phi^{n_k}(x_{n_k}), z) \leq d(\phi^{n_k}(x_{n_k}), z_{n_k}) + d(z_{n_k}, z),$$

existem $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(z_{n_{k_l}}, z) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n_{k_l} > n_0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m > m_0.$$

Portanto, tomando $\tilde{n}_0 = \max\{n_0, m_0\}$, $n_{k_l} > \tilde{n}_0$ temos que:

$$d(\phi^{n_{k_l}}(x), z) < \varepsilon.$$

Quanto à recíproca, para $x \in W_s(\Omega)$ existe $n_k \longrightarrow +\infty$ tal que $\phi^{n_k}(x) \longrightarrow z \in \Omega$. Dito isso, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\phi^{n_k}(x), z) < \varepsilon$. Mas

$$d(\phi^{n_k}(x), \Omega) \leq d(\phi^{n_k}(x), z) < \varepsilon.$$

Portanto, $d(\phi^{n_k}(x), \Omega) \longrightarrow 0$, mas não necessariamente $x \in \tilde{W}_s(\Omega)$.

Apesar disso, na situação das variedades flag e elementos regulares decompostos os dois conjuntos coincidem. Caso contrário, para $x \notin \tilde{W}_s(K(g)wb_0)$ existe $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(n_k)_k$ tal que $d(g^{n_k}x, K(g)wb_0) \geq \varepsilon$. Por outro lado $x \in W_s(K(g)wb_0) = N^-(g)K(g)wb_0$, implica $x = nuwb_0$, $n \in N^-(g)$, $u \in K(g)$. Logo para a subsequência anterior existe $n_{k_l} \longrightarrow +\infty$ tal que $g^{n_{k_l}}uwb_0 \longrightarrow z \in K(g)wb_0$, o que junto a

$$d(g^{n_{k_l}}x, K(g)wb_0) \leq d(g^{n_{k_l}}ng^{-n_{k_l}}g^{n_{k_l}}uwb_0, \tilde{z}), \quad \forall \tilde{z} \in K(g)wb_0$$

nos fornece que:

$$\liminf_{n_{k_l} \rightarrow +\infty} d(g^{n_{k_l}}x, K(g)wb_0) = \limsup_{n_{k_l} \rightarrow +\infty} d(g^{n_{k_l}}x, K(g)wb_0) = 0,$$

e daí,

$$d(g^{n_{k_l}}x, K(g)wb_0) \longrightarrow 0$$

é um absurdo. Portanto, $x \in \tilde{W}_s(K(g)wb_0)$.

Definição 1.1.16 (a) *Uma decomposição de Morse de um difeomorfismo ϕ definido na variedade flag \mathbb{F} é uma coleção finita $\{M_i : i = 1, \dots, n\}$ de conjuntos não vazios, disjuntos dois a dois, compactos e invariantes tal que:*

(i) *Para cada $x \in \mathbb{F}$ tem-se $\omega(x), \alpha(x) \subset \bigcup M_i$.*

(ii) *Suponhamos que existam $M_{j_0}, M_{j_1}, \dots, M_{j_l}$ e $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{F} - \bigcup_{i=1}^n M_i$ com $\alpha(x_i) \subset M_{j_{i-1}}$ e $\omega(x_i) \subset M_{j_i}$ para $i = 1, \dots, l$, então $M_{j_0} \neq M_{j_l}$.*

Os elementos de uma decomposição de Morse, são chamados de conjuntos de Morse.

(b) *Dadas duas decomposições de Morse $\{M_1, \dots, M_n\}$ e $\{M'_1, \dots, M'_{n'}\}$, diz-se que $\{M_1, \dots, M_n\}$ é mais fina que $\{M'_1, \dots, M'_{n'}\}$, se para cada $j \in \{1, \dots, n'\}$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ com $M_i \subset M'_j$.*

Usando esta definição temos a

Proposição 1.1.17 *As órbitas $K(g)wb_0$, $w \in W$, formam uma decomposição de Morse para a ação de g sobre a variedade flag \mathbb{F} .*

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{F}$, então $x \in N^-(g)K(g)w_1b_0$ e $x \in N^+(g)K(g)w_2b_0$, para algum $w_1, w_2 \in W$, porque elas cobrem \mathbb{F} . Daí, pela observação ao Lema 1.1.9 temos que $\omega(x) \subset K(g)w_1b_0$ e $\alpha(x) \subset K(g)w_2b_0$. Quanto à condição (ii) suponhamos que existam órbitas

$$K(g)w_0b_0, K(g)w_1b_0, \dots, K(g)w_l b_0$$

e elementos

$$x_1, \dots, x_l \in \mathbb{F} - \bigcup_{w \in W} K(g)wb_0$$

com $\alpha(x_i) \subset K(g)w_{i-1}b_0$ e $\omega(x_i) \subset K(g)w_i b_0$ para $i = 1, \dots, l$ tal que $K(g)w_0b_0 = K(g)w_l b_0$. Por outro lado, $g = hu$ com $h = \exp(H) \in \Lambda(g)$ e $u = \exp(X) \in K(g)$. Seguindo a demonstração do Lema 1.1.12, é possível encontrar uma função $f \in C^\infty(\mathbb{F})$ associado a h tal que:

- f é constante ao longo das órbitas $K(g)wb_0$.
- f é estritamente crescente ao longo de qualquer trajetória, que não seja ponto crítico ou singularidade de $\text{grad } f$.
- f é estritamente decrescente ao longo de qualquer trajetória, que não seja ponto crítico ou singularidade de $-\text{grad } f$.

Dito isso, tomando um representante $u_i w_i b_0 \in K(g)w_i b_0$, $i = 1, 2, \dots, l$, e usando o fato,

$$x_i \notin \bigcup_{i=0}^l K(g)w_i b_0$$

temos o seguinte:

$\alpha(x_1) \subset K(g)w_0 b_0$, $\omega(x_1) \subset K(g)w_1 b_0$ implicam:

$$f(u_1 w_1 b_0) < f(x_1) < f(u_0 w_0 b_0)$$

$\alpha(x_2) \subset K(g)w_1 b_0$, $\omega(x_2) \subset K(g)w_2 b_0$ implicam:

$$f(u_2 w_2 b_0) < f(x_2) < f(u_1 w_1 b_0)$$

⋮

$\alpha(x_i) \subset K(g)w_{i-1} b_0$, $\omega(x_i) \subset K(g)w_i b_0$ implicam:

$$f(u_i w_i b_0) < f(x_i) < f(u_{i-1} w_{i-1} b_0)$$

⋮

$\alpha(x_{l-1}) \subset K(g)w_{l-2} b_0$, $\omega(x_{l-1}) \subset K(g)w_{l-1} b_0$ implicam:

$$f(u_{l-1} w_{l-1} b_0) < f(x_{l-1}) < f(u_{l-2} w_{l-2} b_0)$$

$\alpha(x_l) \subset K(g)w_{l-1} b_0$, $\omega(x_l) \subset K(g)w_l b_0$ implicam:

$$f(u_l w_l b_0) < f(x_l) < f(u_{l-1} w_{l-1} b_0).$$

Logo, se $K(g)w_0 b_0 = K(g)w_l b_0$ temos que a relação

$$f(u_l w_l b_0) < f(x_l) < f(u_{l-1} w_{l-1} b_0) < \dots < f(u_1 w_1 b_0) < f(x_1) < f(u_0 w_0 b_0)$$

fornece um absurdo:

$$f(u_0 w_0 b_0) < f(u_0 w_0 b_0)$$

desde que $f(u_i w_i b_0) = f(u_0 w_0 b_0)$. Portanto,

$$K(g)w_0 b_0 \neq K(g)w_i b_0.$$

Mais ainda, essa cadeia de desigualdades nos permite concluir que quaisquer duas órbitas $K(g)w_k b_0$, $k = i, j$, satisfazendo a condição (ii) são distintas. ■

Observação: A decomposição de Morse $K(g)w b_0$, $w \in W$, não é necessariamente a mais fina em vista da dependência dos autovalores de g . Isto é, por exemplo se tomamos $w = 1$, então $x = u_1 b_0$ é um elemento de $K(g)b_0$; logo para um elemento genérico $y = \tilde{u} b_0$ tem-se $g^k y = g^k \tilde{u} b_0 = h^k u^k \tilde{u} b_0$. Portanto, a escolha de uma subsequência $n_k \rightarrow +\infty$ tal que $g^{n_k} y \rightarrow x$, depende do argumento dos autovalores complexos de u e u_1 . Embora, se cada $x \in K(g)w b_0$ está em algum $\omega(z_x)$ com $z_x \in K(g)w b_0$, obtém-se que dita decomposição de Morse é a mais fina. De fato, tomemos uma outra decomposição de Morse $\{M_1, \dots, M_l\}$. Pela condição (i) da definição 1.1.16, $K(g)w b_0 \subset \bigcup_{i=1}^l M_i$. Seja $M_i = \bigcup M_{i_j}$ a decomposição em suas componentes conexas, logo

$$K(g)w b_0 \subset \bigcup_{i=1}^l \left(\bigcup_{i_j} M_{i_j} \right).$$

Sendo dita órbita conexa, necessariamente temos que $K(g)w b_0 \subset M_{i_{j_0}}$. Portanto, $K(g)w b_0 \subset M_i$.

A questão que se levanta, produto desta análise, é saber onde estão localizados os elementos regulares. Por enquanto, podemos ver rapidamente que o conjunto de elementos regulares decompostos formam uma união de cones na subálgebra de Cartan $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. É um cone de Lie. Em vista que subálgebras de Cartan fornecem decomposições de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$ em espaços de raízes a pergunta é: se cada cone desses pode ser descrito como a câmara de Weyl de um sistema de raízes apropriado? Que significa uma câmara positiva? Desta forma seria possível obter decomposições infinitesimais e globais paralelas às decomposições de Iwasawa, Langlands, etc.

1.2 Variedades Flag e Elementos Regulares

Nesta seção, relacionaremos elementos regulares decompostos no interior de semigrupos com os conjuntos de controle associados a tais semigrupos através dos conjuntos limite apresentados anteriormente. Para tal, seja S um subsemigrupo de interior não vazio em $SL(d, \mathbb{R})$, agindo sobre a variedade flag maximal \mathbb{F} como um semigrupo de difeomorfismos. Daqui em diante, salvo menção contrária, assumiremos que $g \in \text{int}S$ é um elemento (\pm) -regular decomposto e b_0 o flag canônico. Se formula o seguinte

Lema 1.2.1 *Se $w \in W$ é uma permutação, denotemos por D_w o conjunto controle que contém $w b_0$. Então $K(g)w b_0 \subset (D_w)_0$.*

Demonstração: Sendo g regular, existe uma base β em relação à qual ele pode ser escrito na forma:

$$g = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_e \end{pmatrix},$$

onde A_i é uma matriz bloco, 1×1 ou 2×2 tal que $|A_1| > \dots > |A_e|$. Logo, temos que $g^2 \in \text{int}S$ tem os blocos A_i^2 ou seja $\det A_i^2 > 0$. Portanto, podemos escrever $g^2 = k\lambda = \lambda k$ com $\lambda \in \Lambda(g)$ e $k \in K(g)$. Isto implica que o subconjunto

$$T = \{k \in K(g) : \exists \lambda \in \Lambda(g), \text{ com } k\lambda \in \text{int}S\}$$

é aberto e não vazio. De fato, para $k \in T$, existe $\lambda \in \Lambda(g)$ tal que $k\lambda \in \text{int}S$, portanto, $T \neq \emptyset$. Consideremos a translação $L_\lambda : K(g) \rightarrow \text{SL}(d, \mathbb{R})$. Então existe um aberto $U \subset K(g)$ contendo k e portanto, $k \in U \subset T$. Em vista que $K(g)$ comuta com $\Lambda(g)$, temos que T é um semigrupo. Pela compacidade de $K(g)$, segue-se $T = K(g)$ (veja [9]). Por outro lado, se $k \in T$, então existe $\lambda \in \Lambda(g)$ tal que $k\lambda \in \text{int}S$ e como λ fixa wb_0 por ser diagonal, segue que

$$Twb_0 \subset (\text{int}S)wb_0 \subset Swb_0.$$

Sendo T um subgrupo, pelo mesmo argumento anterior consegue-se

$$Twb_0 \subset (\text{int}S^{-1})wb_0 \subset S^{-1}wb_0.$$

Portanto, pela Proposição 2.7(c) [22], segue-se

$$K(g)wb_0 \subset (\text{int}S)wb_0 \cap (\text{int}S^{-1})wb_0 = (D_w)_0$$

pois $wb_0 \in (D_w)_0$. ■

O lema anterior permite localizar as órbitas $K(g)wb_0$ nos conjuntos controle correspondentes ao semigrupo S que contém o elemento regular decomposto g . Um próximo passo é caracterizar tais órbitas em termos dos elementos contidos nesses conjuntos de controle.

Proposição 1.2.2 *Seja $g \in \text{int}S$ um elemento regular decomposto. Se $w \in W$ é uma permutação, denote por D_w o conjunto controle contendo wb_0 . Então*

$$\bigcup_{\tilde{w} \in W(S)} K(g)\tilde{w}wb_0 \subset \Omega_w = \bigcup_{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in W(S)} \left(N^-(g)K(g)\tilde{w}_1wb_0 \cap N^+(g)K(g)\tilde{w}_2wb_0 \right), \quad (1.3)$$

onde

$$\Omega_w = \{x \in D_w : g^k x \in D_w, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Demonstração: Para $\tilde{w} \in W(S)$, pelo Lema 1.2.1 temos que $K(g)\tilde{w}wb_0 \subset D_{\tilde{w}w}$. Mas $(\tilde{w}w^{-1})w = \tilde{w} \in W(S)$, segue-se que $D_{\tilde{w}w} = D_w$. Portanto, tem-se a primeira inclusão de (1.3). Para a outra inclusão, tomemos $x \in D_w$ tal que $g^k x \in D_w$ para $k \in \mathbb{Z}$. Então pelo Lema 1.1.7, existem $w_1, w_2 \in W$ tal que $x \in N^-(g)K(g)w_1b_0 \cap N^+(g)K(g)w_2b_0$. Em cada caso temos que:

- Se $x \in N^-(g)K(g)w_1b_0$, segue-se dos Lemas 1.1.9 e 1.2.1 que $\omega(x) \subset K(g)w_1b_0 \subset \text{int}D_{w_1}$. Também $\omega(x) \subset \text{fe}(D_w)$, e daí que $\omega(x) \subset \text{int}(D_{w_1}) \cap \text{fe}(D_w)$. Logo, $D_{w_1} = D_w$, mas segundo o Teorema 0.3.4 tem-se $w_1 = \tilde{w}_1w$, com $\tilde{w}_1 \in W(S)$. Portanto, $x \in N^-(g)K(g)\tilde{w}_1wb_0$, com $\tilde{w}_1 \in W(S)$.
- Se $x \in N^+(g)K(g)w_2b_0$, pelo mesmo argumento (Lemas 1.1.9 e 1.2.1) temos que $\alpha(x) \subset K(g)w_2b_0 \subset \text{int}(D_{w_2})$. Em forma análoga à parte anterior tem-se $\alpha(x) \subset \text{int}(D_{w_2}) \cap \text{fe}(D_w)$. Portanto, $x \in N^+(g)K(g)\tilde{w}_2wb_0$, com $\tilde{w}_2 \in W(S)$

Destes dois itens segue a inclusão

$$\Omega_w \subset \bigcup_{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in W(S)} \left(N^-(g)K(g)\tilde{w}_1wb_0 \cap N^+(g)K(g)\tilde{w}_2wb_0 \right).$$

Para mostrar a inclusão contrária, tomemos

$$x \in N^-(g)K(g)\tilde{w}_1wb_0 \cap N^+(g)K(g)\tilde{w}_2wb_0,$$

para alguns $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in W(S)$. Segue-se que

$$\omega(x) \subset K(g)\tilde{w}_1wb_0 \subset \text{int}(D_w) \quad \text{e} \quad \alpha(x) \subset K(g)\tilde{w}_2wb_0 \subset \text{int}(D_w).$$

Tomando $z_1 \in \omega(x)$, $z_2 \in \alpha(x)$ temos que $g^{n_k}x \rightarrow z_1$ e $g^{-m_l}x \rightarrow z_2$ para subsequências $m_l, n_k \rightarrow +\infty$. A ideia é provar que $D_w \cup \{x\} \subset \text{fe}(Sz)$, para $z \in D_w \cup \{x\}$. Pois, pela maximalidade teremos que $x \in D_w$. Para tal, tomando $z \in D_w \cup \{x\}$ temos duas possibilidades:

- Se $z \in D_w$, pela definição de conjunto de controle $D_w \subset \text{fe}(Sz)$, logo devemos verificar que $x \in \text{fe}(Sz)$. Para isso, usando o fato $z_2 \in (D_w)_0$ temos que

$$(D_w)_0 = (\text{int}S)z_2 \cap (\text{int}S)^{-1}z_2$$

e como $z_2 = \lim_{m_l \rightarrow +\infty} g^{-m_l}x$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{-m_0}x \in (\text{int}S)z_2$. Isto é, $x = g^{m_0}hz_2$ com $h \in S$. Por outro lado $z_2 \in D_w \subset \text{fe}(Sz)$ (definição de conjunto de controle) implica que $z_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k z$ com $h_k \in S$ e, portanto, obtemos a conclusão

$$x = g^{m_0}h \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k z \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (g^{m_0}hh_k z),$$

pois, $g^{m_0}hh_k \in S$.

- Se $z = x$, provamos que $D_w \cup \{x\} \subset \text{fe}(Sx)$. Tomando $y \in D_w \cup \{x\}$, apresentam-se duas possibilidades. Primeiro, para $y \in D_w \subset \text{fe}(Sz_1)$ temos que $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k z_1$ com $h_k \in S$. Por outro lado, $z_1 \in (D_w)_0$ fornece:

$$(D_w)_0 = (\text{int}S)z_1 \cap (\text{int}S)^{-1}z_1.$$

Mas $z_1 = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} g^{n_k} x$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{n_k} x \in (\text{int}S)^{-1}z_1$, para $n_k > n_0$. Daí que, fixando n_{k_0} temos que $z_1 = \tilde{h}_{k_0} g^{n_{k_0}} x$ para algum $\tilde{h}_{k_0} \in \text{int}S$. Portanto, a conclusão é satisfeita:

$$y = \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k \tilde{h}_{k_0} g^{n_{k_0}} x,$$

pois, $h_k \tilde{h}_{k_0} g^{n_{k_0}} \in S$. Para o segundo caso, $y = x$, aplicando o argumento anterior a $z_2 \in (D_w)_0$ obtemos que

$$(D_w)_0 = (\text{int}S)z_2 \cap (\text{int}S)^{-1}z_2.$$

Mas $z_2 = \lim_{m_l \rightarrow +\infty} g^{-m_l} x$, logo existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{-m_l} x \in (\text{int}S)z_2$ para $m_l > m_0$. Daí, fixando um m_{l_0} temos que $x = g^{m_{l_0}} h z_2$. Também, pela transitividade de $\text{int}S$ em $(D_w)_0$ existe $\tilde{h} \in \text{int}S$ tal que $z_2 = \tilde{h} z_1$. Portanto, devido a que $z_1 = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} g^{n_k} x$ temos que

$$x = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} g^{m_{l_0}} \tilde{h} h g^{n_k} x,$$

pois, $g^{m_{l_0}} \tilde{h} h g^{n_k} \in S$.

Com isso fica mostrado que $D_w \cup \{x\} \subset \text{fe}(Sz)$, para $z \in D_w \cup \{x\}$. Portanto, $x \in D_w$ e só falta mostrar que $g^n x \in D_w$, para $n \in \mathbb{Z}$. O elemento regular decomposto g contrai ou expande as variedades estáveis ou instáveis correspondentes. Mais ainda, devido a que este elemento regular decomposto deixa invariante as variedades estáveis e instáveis, a hipótese de que $g^{n_0} x \notin D_w$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ fornece um absurdo, já que $g^{n_0} x$ estando nas variedades estáveis ou instáveis, o argumento anterior mostra que $g^{n_0} x \in D_w$. ■

Agora, associaremos a elementos do grupo de Lie $\text{SL}(d, \mathbb{R})$, a certas variedades flags. Em particular, para elementos no interior de um semigrupo é possível fibrar a variedade flag associada ao semigrupo por aquela variedade flag correspondente a dito elemento. Dito isso, cada matriz $g \in \text{SL}(d, \mathbb{R})$ pode ser decomposta como a soma $g = s + n$ de uma parte semi-simples s e outra nilpotente n através dos blocos reais de Jordan e em relação a uma base β :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & -b & & * \\ b & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a & -b \\ & & & b & a \end{pmatrix}.$$

Isso fornece ao nível do grupo $SL(d, \mathbb{R})$, uma decomposição de Jordan multiplicativa do elemento mencionado:

$$g = g_s g_u = g_u g_s \quad (g_s = s, g_u = 1 + s^{-1}n),$$

onde g_s é a parte semi-simples e g_u a parte unipotente. Em vista que os autovalores de g podem ter multiplicidade maior que um, chama-se à soma dos espaços correspondentes ao mesmo autovalor de auto-espaço generalizado. Ordenemos os autovalores de tal forma que seus valores absolutos sejam decrescentes. Com esta ordenação dos autovalores, seja V_1, \dots, V_s os auto-espaços generalizados e coloquemos $r_i = \dim V_i$. Isto nos fornece um flag canônico:

$$b_0 = (V_1 \subset V_1 + V_2 \subset \dots \subset V_1 + \dots + V_s)$$

que determina uma variedade flag $\mathbb{F}(g) = \mathbb{F}(r_1, r_1+r_2, \dots, r_1+\dots+r_s)$ do qual b_0 é um elemento. Por construção, b_0 é um ponto fixo de g (os espaços V_i são g -invariantes). Mais ainda, devido à ordenação dos autovalores, segue-se que b_0 é o atrator de g em $\mathbb{F}(g)$, porque a estrutura de blocos de g permite encontrar um subgrupo nilpotente $N^-(g)$ de matrizes triangulares inferiores e nesta órbita aberta e densa $N^-(g)b_0$ tem-se $g^m x \rightarrow b_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Seja \mathbb{F} , a variedade flag maximal e denotemos por π_g a fibração

$$\pi_g : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}(g)$$

que a cada flag

$$(W_1 \subset \dots \subset W_{r_1-1} \subset W_{r_1} \subset W_{r_1+1} \subset \dots \subset W_{r_s-1} \subset W_{r_s} \subset W_{r_s+1} \subset \dots \subset W_d)$$

faz corresponder o flag

$$(W_{r_1} \subset \dots \subset W_{r_s}),$$

onde $\dim W_i = i$. Com estas notações temos o

Lema 1.2.3 *A fibra $\pi_g^{-1}(b_0)$ é o produto cartesiano de variedades flag:*

$$\mathbb{F}(V_1) \times \mathbb{F}(V_2) \times \dots \times \mathbb{F}(V_s),$$

onde $\mathbb{F}(V)$ denota a variedade dos flags completos de subespaços de V . Mais ainda, $\pi_g^{-1}(b_0)$ é a fronteira maximal do grupo semi-simples $SL(r_1, \mathbb{R}) \times \dots \times SL(r_s, \mathbb{R})$.

Demonstração: Seja o flag

$$b = (W_1 \subset \cdots \subset W_{r_1-1} \subset W_{r_1} \subset W_{r_1+1} \subset \cdots \subset W_{r_s-1} \subset W_{r_s} \subset W_{r_s+1} \subset \cdots \subset W_d)$$

um elemento de $\pi_g^{-1}(b_0)$, então $\pi_g(b) = b_0$, significa:

$$(W_{r_1} \subset W_{r_2} \subset \cdots \subset W_{r_s}) = (V_1 \subset V_1 + V_2 \subset \cdots \subset V_1 + \cdots + V_s),$$

ou seja $W_{r_i} = V_1 + \cdots + V_i$, $i = 1, \dots, s$ e $\dim W_i = i$. Logo,

$$\pi_g^{-1}(b_0) = \left\{ W_1 \cdots \subset W_{r_1-1} \subset V_1 \subset W_{r_1+1} \cdots \subset W_{r_s-1} \subset V_s \subset W_{r_s+1} \subset W_d \right\}.$$

onde $\dim W_i = i$. Agora, se tomamos um produto interno em \mathbb{R}^d , tal que os subespaços V_i sejam ortogonais entre si, obtemos

$$\begin{aligned} W_{r_1+1} &= V_1 \oplus V_1^\perp \\ W_{r_1+2} &= V_1 \oplus V_1^\perp \oplus W_{r_1+1}^\perp \\ W_{r_1+3} &= V_1 \oplus V_1^\perp \oplus W_{r_1+1}^\perp \oplus W_{r_1+2}^\perp \\ &\vdots \\ V_1 + V_2 &= V_1 \oplus V_1^\perp \oplus W_{r_1+1}^\perp \oplus \cdots \oplus W_{r_2-1}^\perp \\ W_{r_2+1} &= W_{r_2} \oplus W_{r_2}^\perp \\ W_{r_2+2} &= W_{r_2} \oplus W_{r_2}^\perp \oplus W_{r_2+1}^\perp \\ &\vdots \\ V_1 + V_2 + V_3 &= W_{r_2} \oplus W_{r_2}^\perp \oplus W_{r_2+1}^\perp \oplus \cdots \oplus W_{r_3-1}^\perp. \end{aligned}$$

Assim, em geral, temos:

$$\begin{aligned} W_{r_i+1} &= W_{r_i} \oplus W_{r_i}^\perp \\ W_{r_i+2} &= W_{r_i} \oplus W_{r_i}^\perp \oplus W_{r_i+1}^\perp \\ &\vdots \\ V_1 + \cdots + V_{i+1} &= W_{r_i} \oplus W_{r_i}^\perp \oplus \cdots \oplus W_{r_{i+1}-1}^\perp. \end{aligned}$$

Logo definimos uma bijeção :

$$\varphi : \pi_g^{-1}(b_0) \longrightarrow \mathbb{F}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{F}(V_s)$$

que a cada flag

$$(W_1 \cdots \subset W_{r_1-1} \subset V_1 \subset W_{r_1+1} \cdots \subset W_{r_i-1} \subset W_{r_i} \subset W_{r_i+1} \cdots \subset W_{r_s-1} \subset W_{r_s})$$

faz corresponder o flag

$$\left((W_1 \cdots W_{r_1-1}), (V_1^\perp \subset V_1^\perp \oplus W_{r_1+1}^\perp \cdots V_1^\perp \oplus W_{r_1+1}^\perp \cdots W_{r_2-1}^\perp), \dots, \right. \\ \left. (W_{r_s-1}^\perp \subset W_{r_s-1}^\perp \oplus W_{r_s-1+1}^\perp \cdots W_{r_s-1}^\perp) \right).$$

Portanto, pela unicidade e diferenciabilidade da operação complemento ortogonal, essa correspondência é um difeomorfismo. Para a parte que falta, consideremos a ação:

$$\psi : \mathrm{SL}(r_1, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{SL}(r_s, \mathbb{R}) \times \left(\mathbb{F}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{F}(V_s) \right) \longrightarrow \mathbb{F}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{F}(V_s)$$

definida componente a componente como sendo as ações canônicas em cada parcela; a qual é obviamente transitiva. Portanto,

$$\frac{\mathrm{SL}(r_1, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{SL}(r_s, \mathbb{R})}{P} \cong \mathbb{F}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{F}(V_s),$$

onde $P = P_{r_1} \times \cdots \times P_{r_s}$ e cada P_{r_i} é um subgrupo parabólico minimal. ■

A ação de um elemento genérico g na fibra $\pi_g^{-1}(b_0)$, pode ser visto por separado através das partes semi-simples e unipotente de sua decomposição de Jordan, pelo fato de comutarem. Em particular, para o elemento que define o flag, tal ação é a identidade multiplicada por rotações, onde se tenha autovalores reais ou complexos, respectivamente; já que o módulo de um autovalor complexo não tem efeito sobre os flags.

Lema 1.2.4 *Suponha que os autovalores de g são reais. Então $g_s x = x$ para cada $x \in \pi_g^{-1}(b_0)$.*

Demonstração: A restrição de g_s a V_i é uma matriz escalar, isto é, $g_s = \lambda_i$. Portanto, os flags V_i são fixados por g_s . ■

Seja agora, $g \in \mathrm{int}S$ onde S é um subsemigrupo. Seja também, C o único conjunto controle invariante em $\mathbb{F}(g)$ e notemos que $b_0 \in C$. De fato, b_0 é o atrator de $g \in \mathrm{int}S$. Sua variedade estável correspondente é aberta e densa, o que permite encontrar (por densidade) para cada $b \in \mathbb{F}(g)$ um $\tilde{g} \in \mathrm{int}S$ tal que $\tilde{g}b$ pertence à variedade estável de b . Posto que $g^m \tilde{g}b \rightarrow b_0$ quando $m \rightarrow +\infty$, segue que $b_0 \in \mathrm{fe}(Sb)$ e mais ainda, $b_0 \in C_0$ o conjunto de controlabilidade ($gb_0 = b_0$). Associado ao flag b_0 , existe um subgrupo parabólico P que é a isotropia nesse ponto, isto é,

$$P = \{g \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{R}) : gb_0 = b_0\}, \quad (1.4)$$

e sua descrição é dada como sendo o conjunto de matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

onde A_i , são matrizes inversíveis $r_i \times r_i$.

Lema 1.2.5 *O subgrupo P age transitivamente na fibra $\pi_g^{-1}(b_0)$. Ou seja, $\pi_g^{-1}(b_0) \cong P/H$, onde H é o subgrupo de P tais que A_i com $i = 1, \dots, s$ é triangular superior.*

Demonstração: Para $h \in P$, $b \in \pi_g^{-1}(b_0)$; pela equivariança de π_g temos que:

$$\pi_g(hb) = h\pi_g(b) = hb_0 = b_0,$$

logo, a restrição da ação de P à fibra é bem definida. Quanto à transitividade, sejam $b_1, b_2 \in \pi_g^{-1}(b_0)$, onde b_1 é definido a partir da base $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ em relação à decomposição de Jordan, isto é,

$$\begin{aligned} b_1 &= (W_1 \subset \dots \subset W_{r_1-1} \subset V_1 \subset W_{r_1+1} \subset \dots \subset W_{r_2-1} \subset V_1 \oplus V_2 \\ &\subset W_{r_2+1} \subset \dots \subset W_{r_s-1} \subset V_1 \oplus \dots \oplus V_s), \end{aligned}$$

com $W_i = \text{ger}\{e_1, \dots, e_i\}$; e

$$\begin{aligned} b_2 &= (\tilde{W}_1 \subset \dots \subset \tilde{W}_{r_1-1} \subset V_1 \subset \tilde{W}_{r_1+1} \subset \dots \subset \tilde{W}_{r_2-1} \subset V_1 \oplus V_2 \\ &\subset \tilde{W}_{r_2+1} \subset \dots \subset \tilde{W}_{r_s-1} \subset V_1 \oplus \dots \oplus V_s). \end{aligned}$$

Escolhamos uma base $\tilde{\beta} = \{f_1, \dots, f_d\}$ adaptada a b_2 ; isto é, $\tilde{W}_i = \text{ger}\{f_1, \dots, f_i\}$. Logo definimos a transformação linear $\tilde{g}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ por

$$\tilde{g}e_i = f_i.$$

Segue-se que $b_2 = \tilde{g}b_1$. Por enquanto $\det \tilde{g} \neq 1$ podendo ser positivo ou negativo. No último caso nós podemos redefinir $\tilde{g}e_1 = -f_1$ e as duas bases tem a mesma orientação e portanto, a transformação linear \tilde{g} tem determinante positivo. Sendo assim,

$$\tilde{g}_1 = \tilde{g}/(\det \tilde{g})^{1/d}$$

satisfaz os requerimentos. Para a segunda parte, usamos o flag b_1 definido anteriormente, então a isotropia H em b_1 é o subgrupo das matrizes em P tal que os A_i , $i = 1, \dots, s$ são triangulares superiores, o que mostra

$$\pi_g^{-1}(b_0) \cong P/H$$

■

Se denotamos por $L = \pm\text{SL}(r_1, \mathbb{R}) \times \dots \times \pm\text{SL}(r_s, \mathbb{R})$, temos que este é um subgrupo semi-simples de $\text{SL}(d, \mathbb{R})$ desde que algum $r_i \neq 1$, porque $\mathfrak{sl}(1, \mathbb{R}) = (0)$. Este subgrupo, nos permite definir um homomorfismo contínuo e sobrejetor $\varphi: P \rightarrow L$ da seguinte maneira:

$$\left(\begin{array}{ccc} A_1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & A_s \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} A_1/|\det A_1|^{1/r_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & A_s/|\det A_s|^{1/r_s} \end{array} \right).$$

Um cálculo direto, mostra que o $\Lambda = \ker \varphi$ é formado pelas matrizes em H tais que, as matrizes nos blocos diagonais sejam matrizes escalares, isto é,

$$\begin{pmatrix} c_1 1_{r_1} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_s 1_{r_s} \end{pmatrix};$$

portanto, $L \cong P/\Lambda$. Por outro lado, seja a fibração

$$\begin{aligned} \psi : P/\Lambda &\longrightarrow P/H \\ g\Lambda &\longrightarrow gH \end{aligned}$$

e definamos em P/Λ a relação de equivalência: $g\Lambda \sim g'\Lambda$ se, e somente se, $gH = g'H$. Isto nos permite identificar $(P/\Lambda)/\sim$ difeomorficamente com P/H . Mais ainda, a órbita que passa por $g\Lambda$ é dada por:

$$\overline{g\Lambda} = \{gh\Lambda : h \in H\}. \quad (1.6)$$

Também o espaço $(P/\Lambda)/H/\Lambda$ é uma variedade homogênea, porque $\Lambda \subset H$ é normal e $H/\Lambda \subset P/\Lambda$ é subgrupo fechado, daí que a classe correspondente ao elemento $g\Lambda$ é

$$\widetilde{g\Lambda} = g\Lambda H/\Lambda = \{g\Lambda h\Lambda : h \in H\} = \{gh\Lambda : h \in H\} = \overline{g\Lambda} \quad (1.7)$$

Usando (1.6) e (1.7) conseguimos que $P/H \cong (P/\Lambda)/H/\Lambda$ e portanto temos o

Lema 1.2.6 *Existe um subgrupo $\Lambda \subset H$ tal que $L \cong P/\Lambda$, além do mais $P/H \cong (P/\Lambda)/H/\Lambda$.*

Demonstração: Feita nos comentários. ■

Observação: O subgrupo L que aparece nos comentários é a componente de Levi do subgrupo P . Com respeito a isso temos os seguintes fatos: O subgrupo parabólico dado em (1.4) tem como subálgebra de Lie \mathfrak{p} as matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix}$$

com α_i uma matriz arbitrária $r_i \times r_i$, e $\text{tr}(\alpha_1) + \cdots + \text{tr}(\alpha_s) = 0$. Cada elemento $A \in \mathfrak{p}$, pode ser decomposto como $A = B + H + X$ com :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_s \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix};$$

onde $\beta_i = \alpha_i - \frac{\text{tr}(\alpha_i)}{r_i} 1$; $\lambda_i = \frac{\text{tr}(\alpha_i)}{r_i}$; X é a parte triangular superior de A . Portanto, \mathfrak{p} tem como decomposição de Langlands:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

onde \mathfrak{l} , \mathfrak{a} e \mathfrak{n} são as álgebras de Lie correspondentes aos elementos B , H e X respectivamente. Estas decomposições satisfazem as seguintes propriedades:

- $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(r_1, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathfrak{sl}(r_s, \mathbb{R})$. Esta é uma subálgebra semi-simples, se algum $r_i \neq 1$, daí que a semi-simplicidade do \mathfrak{l} sempre acontece, a menos que a variedade flag seja maximal.
- \mathfrak{l} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{p} .
- $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a}$ é uma subálgebra e é o normalizador de \mathfrak{n} em \mathfrak{p} .
- $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a}$ é reductivo com \mathfrak{a} o centro e \mathfrak{l} a componente de Levi.
- \mathfrak{n} é o nilradical de \mathfrak{p} .
- $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é o radical de \mathfrak{p} .
- $\mathfrak{l} \oplus (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ é uma decomposição de Levi.

Ao nível do grupo de Lie, tem-se que $g \in P$ dado por (1.4) se decompõe como $g = lhn$ com

$$l = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} \lambda_1 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s 1 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

onde $B_i = |\det A_i|^{-1/d} A_i$, $\lambda_i = |\det A_i|^{1/d}$ e $n = (lh)^{-1}g$. Portanto, a decomposição de Langlands para P é

$$P = LAN,$$

onde L , A e N são os grupos de matrizes correspondentes a l , h e n respectivamente. Portanto, tem-se as seguintes propriedades:

Observação:

- $L = \pm \text{SL}(r_1, \mathbb{R}) \times \cdots \times \pm \text{SL}(r_s, \mathbb{R})$.
- A e N são conexos e simplesmente conexos.
- L é o centralizador de A em P e LA é um grupo de Lie reductivo com álgebra de Lie $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a}$.

- L em geral não é conexo. Colocando L_0 para a componente conexa de L temos que $P_0 = L_0AN$ e P tem tantas componentes conexas como L .
- P é o normalizador de \mathfrak{p} em $SL(d, \mathbb{R})$.

No que segue é apresentado o resultado que envolve duas variedades flag e que estão relacionadas através da fibração canônica; além do mais, envolvem os conjuntos controle e a quantidade de tais conjuntos.

Teorema 1.2.7 *Seja $g \in \text{int}S$ e ordene os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ por $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_s|$. Sejam V_1, \dots, V_s os auto-espacos generalizados de g e $r_i = \dim V_i$. Seja $\mathbb{F}(g)$ a variedade flag contendo*

$$(V_1 \subset V_1 + V_2 \subset \dots \subset V_1 + \dots + V_s).$$

Então $\tilde{\pi} : \mathbb{F}(g) \longrightarrow \mathbb{F}(S)$ define uma fibração equivariante e $W(S)$ contém o subgrupo

$$\Pi(1, r_1) \times \Pi(r_1 + 1, r_1 + r_2) \times \dots \times \Pi(r_s + 1, d),$$

onde $\Pi(a, b)$ denota o grupo de permutações do intervalo $\{a, a + 1, \dots, b\}$ com $a < b$ inteiros.

Demonstração: Seja P_0 a componente conexa de P e $\phi : P \longrightarrow P/\Lambda$ a projeção canônica. Então para a parte semi-simples g_s de g^2 temos que $\phi(g_s)$ é um elemento compacto em $(P/\Lambda)_0$ porque $g_s = g_k h$ (veja Lema 7.1 [7]) e a componente h correspondente aos autovalores reais, se projetam na identidade. Veja que a ordem de $\phi(g_s)$ é finita ou infinita, e neste último caso, podemos perturbar g_s para h_s e comutando com g_u ; de tal maneira que os argumentos dos autovalores complexos de h_s sejam múltiplos racionais de π e portanto, $\phi(h_s)^k = 1$ para algum inteiro $k \geq 1$. Se h_s está bastante próximo de g_s , então $h = h_s g_u \in \text{int}S$ e $\phi(h^k) = \phi(g_u^k)$ é um elemento unipotente em $(P/\Lambda)_0$. Ou seja, $\phi(h^k) = \exp(X)$ com X elemento nilpotente na álgebra de Lie

$$L((P/\Lambda)_0) \cong \mathfrak{sl}(r_1, \mathbb{R}) \times \dots \times \mathfrak{sl}(r_s, \mathbb{R}).$$

Agora o conjunto $P_0 \cap \text{int}S$ é um semigrupo aberto em P_0 e não vazio porque contém g^2 . Portanto, $T = \phi(P_0 \cap \text{int}S)$ é aberto em $(P/\Lambda)_0$. Em vista que o elemento unipotente $\phi(g_u^k) \in T$ e $(P/\Lambda)_0$ é semi-simples, segue-se do Teorema de Jacobson-Morosov que $T = (P/\Lambda)_0$ (veja Lema 4.1 [17]), ou seja este é transitivo em $\pi_g^{-1}(b_0)$. Por conseguinte, $P_0 \cap \text{int}S$ é transitivo na fibra sobre b_0 . Mais ainda, devido a $b_0 \in C_0$ (conjunto de controlabilidade) podemos encontrar um $z \in \pi_g^{-1}(b_0) \cap C(S)$, onde $C(S)$ é o S -c.c.i. na variedade flag maximal. Daí

$$\pi_g^{-1}(b_0) = (P_0 \cap \text{int}S)z \subset \text{fe}(Sz) = C(S).$$

Segue-se da Proposição 2.7(c) em [22] que $C(S) = \pi_g^{-1}(C)$. Isto implica que a variedade flag $\mathbb{F}(g)$, fibra ao flag $\mathbb{F}(S) = \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})/P_{\Theta(S)}$ associado com S através da fibração equivariante $\tilde{\pi} : \mathbb{F}(g) \longrightarrow \mathbb{F}(S)$. Isto também implica que o subgrupo de W , formado pelas permutações que deixam invariantes os blocos determinados pelos autovalores de g , estão contidos em $W(S)$. ■

Capítulo 2

Controlabilidade a Tempo Discreto

Neste capítulo, estendemos um resultado sobre controlabilidade a tempo discreto dado em [19] para sistemas do tipo

$$x_{n+1} = e^{A+uB}x_n \quad (2.1)$$

onde A e B são matrizes $d \times d$ e $x_n \in \mathbb{R}^d$ com controle u percorrendo todos os reais. A técnica utilizada, está baseada nos conceitos de semigrupos e Grassmannianas que desenvolveremos rapidamente.

2.1 Semigrupos e Grassmannianas

Para $1 \leq k \leq d$, denotemos por $Gr_k(d)$ a grassmanniana de subespaços de dimensão k que são as fronteiras minimais do grupo de Lie semi-simples $SL(d, \mathbb{R})$. No que segue representaremos os elementos de $Gr_k(d)$ por matrizes de uma das seguintes formas: seja $B_k(d)$ o conjunto das matrizes $d \times k$ de posto k . Esse conjunto é uma variedade diferenciável, pois é um subconjunto aberto do espaço das matrizes $d \times k$. Existe uma projeção canônica $\psi : B_k(d) \rightarrow Gr_k(d)$ que a cada matriz $d \times k$ faz corresponder o subespaço vetorial gerado pelas colunas de dita matriz. Portanto, o quociente definido por ψ diz que, $p, q \in B_k(d)$ definem o mesmo subespaço se, e somente se, existe uma matriz inversível a tal que $p = qa$. Por outro lado, seja $St_k(d)$ o subconjunto de $B_k(d)$ das matrizes p tal que $p^t p = 1$. Esse conjunto compacto é a variedade Stiefel dos k -referenciais ortonormais; a ligação de $B_k(d)$ e $St_k(d)$ é dado através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Portanto, o quociente definido por dita aplicação se traduz em: $p, q \in B_k(d)$ se ortonormalizam em r , se, e somente se, existe uma matriz triangular superior a tal que $p = qa$.

Seja $B \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ um elemento regular decomposto, então existe uma base β de \mathbb{R}^d na qual é representado em forma diagonal:

$$B = \text{diag}(B_1, \dots, B_{s+t}), \quad (2.2)$$

onde s, t denotam o número de autovalores reais e complexos, respectivamente. Assumiremos que os autovalores estão ordenados de tal forma que suas partes reais aparecem em ordem decrescente. Seja $g = \exp(B)$ o elemento regular correspondente no grupo $SL(d, \mathbb{R})$. Então, pelo Lema 1.1.3 e os comentários do capítulo anterior, temos que $g^m n g^{-m} \rightarrow 1$ se $m \rightarrow +\infty$, onde $n \in N^-(g)$ o grupo nilpotente associado. Esse elemento g age como uma transformação nas Grassmannianas $Gr_k(n)$ e tem como pontos fixos:

- (a) Subespaços gerados por k vetores básicos $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ onde cada e_{i_j} define um autovalor real. Em particular, se os primeiros k vetores da base definem autovalores reais.
- (b) Subespaços gerados por k -vetores básicos $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ tal que: se e_{i_j} define um autovalor complexo, então o vetor associado e_{i_l} se encontra nesse conjunto. Em particular isso ocorre com os primeiros elementos da base, se o último e o penúltimo vetor definem um autovalor complexo.

Dos itens a) e b) vemos que é possível encontrar elementos no grupo de Weyl W tal que gerem todos os pontos fixos a partir de um ponto fixo dado; porque esse grupo permuta os elementos da base com a qual se trabalha. Quanto às órbitas $N^-(g)\xi_0$, onde $\xi_0 = \text{ger}\{e_1, \dots, e_k\}$ é o subespaço vetorial gerado pelos primeiros k elementos da base. Se apresenta o seguinte:

- (a₁) Se o elemento e_k em ξ_0 corresponde a um autovalor real ou se e_k, e_{k-1} definem um autovalor complexo, então essa órbita é a componente aberta de Bruhat. Nesses casos, o subespaço ξ_0 é um atrator de g , porque de a) ou b) se tem que ξ_0 é um ponto fixo e $g^m n \xi_0 \rightarrow \xi_0$ se $m \rightarrow +\infty$ e $n \in N^-(g)$.
- (b₁) Se os elementos e_k, e_{k+1} definem um autovalor complexo de B , então dita órbita está contida estritamente na componente de Bruhat e , além do mais, é uma subvariedade de codimensão um.

Esta última afirmação pode ser colocado na seguinte

Proposição 2.1.1 *Para elementos ξ_0 mencionados em (b₁) a órbita $N^-(g)\xi_0$ é uma subvariedade de codimensão um.*

Demonstração: Em termos da representação de subespaços como matrizes, podemos escrever ξ_0 e $n \in N^-(g)$ como:

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde 1 é a matriz identidade $k \times k$, a, b, c e d são matrizes $k \times k$, $k \times (d-k)$, $(d-k) \times k$ e $(d-k) \times (d-k)$, respectivamente. Portanto, um elemento genérico da órbita é representado por:

$$n\xi_0 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ ca^{-1} \end{pmatrix}.$$

A conclusão decorre de observar que ca^{-1} é da forma:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k-1} & 0 \\ a_{k+2,1} & \cdots & a_{k+2,k-1} & a_{k+2,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,k-1} & a_{d,k} \end{pmatrix}.$$

Observação: De forma similar ao exemplo precedente ao Lema 1.1.5, temos que o número de $N^-(g)$ -órbitas em geral não é finito. Tomemos $SL(3, \mathbb{R})$, e uma base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$g = \text{diag}(\mu, e^{a_1}(\cos b_1 + i \sin b_1)), \quad \mu > e^{a_1}.$$

Logo, $N^-(g)$ tem como elementos as matrizes

$$n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $n \in N^-(g)$ e $z = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$nz = x_1e_1 + (x_1a_{21} + x_2)e_2 + (x_1a_{31} + x_3)e_3.$$

Em particular, se $x_1 = 0$, a órbita correspondente no ponto z é

$$N^-(g)z = \{x_2e_2 + x_3e_3\}.$$

Portanto, quando este age no espaço projetivo $\mathbb{R}P^2$, tem infinitas órbitas.

Ainda continuando com o caso (b_1) , para g e e_k, e_{k+1} temos que

$$\begin{aligned} ge_k &= e^\alpha(\cos \beta e_k + \sin \beta e_{k+1}) \\ ge_{k+1} &= e^\alpha(-\sin \beta e_k + \cos \beta e_{k+1}) \end{aligned}$$

relaciona ξ_0 com o subespaço $\tilde{\xi}_0 = \text{ger}\{e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}\}$. A região na qual $\tilde{\xi}_0$ se encontra, é o subconjunto

$$\Omega(g) = \{\xi_x \in Gr_k(d) : x \in W_k\}, \quad (2.3)$$

onde $W_k = \text{ger}\{e_k, e_{k+1}\}$, $\xi_x = \text{ger}\{e_1, \dots, e_{k-1}, x\}$. A relação deste conjunto com o toro $K(g)b_0$ localizado na variedade flag maximal \mathbb{F} , é dada através da fibração equivariante $\pi_k : \mathbb{F} \longrightarrow Gr_k(d)$, que a cada flag

$$(V_1 \subset \dots \subset V_{k-1} \subset V_k \subset V_{k+1} \subset \dots \subset V_d)$$

faz corresponder o subespaço V_k . Com estas notações temos a

Proposição 2.1.2 *O conjunto $\Omega(g)$ é um atrator de g que é a projeção sob π_k de $K(g)b_0$. Isto é:*

$$\Omega(g) = \pi_k(K(g)b_0).$$

Mais ainda $N^-(g)\Omega(g)$ é uma vizinhança densa de Ω .

Demonstração: Seja $u \in K(g)$, então $\pi_k(ub_0) = u\pi_k(b_0) = \text{ger}\{ue_1, \dots, ue_k\}$. Mas $ue_j = e_j$ ou $ue_j = \cos b_{j_1}e_j - \sin b_{j_1}e_{j+1}$ ou $ue_j = \sin b_{j_1}e_j + \cos b_{j_1}e_{j+1}$ se e_j define um autovalor real ou complexo respectivamente. Para $1 \leq j \leq k-1$, tem-se que $ue_j \in \text{ger}\{e_1, \dots, e_k\}$ pela estrutura de blocos que g possui e portanto, o único vetor que age não trivialmente em ξ_0 é $ue_k = \cos b_{k_1}e_k - \sin b_{k_1}e_{k+1}$, $ue_{k+1} = \sin b_{k_1}e_k + \cos b_{k_1}e_{k+1}$, e como $b_{k_1} \in \mathbb{R}$, a conclusão segue de (2.3). Como consequência disto, temos que:

$$N^-(g)\Omega(g) = N^-(g)\pi_k(K(g)b_0) = N^-(g)K(g)\pi_k(b_0). \quad (2.4)$$

Por outro lado, independente de que $K(g)b_0$ seja atrator, é possível mostrar que $\Omega(g)$ é um atrator. De fato, se $n \in N^-(g)$, $\xi_x \in \Omega(g)$ temos $g^m n \xi_x = g^m n g^{-m} g^m \xi_x$ e como $\Omega(g)$ é conexo, compacto e g -invariante segue que $g^{k_l} \xi_x \longrightarrow \xi$ para alguma subsequência $k_l \longrightarrow +\infty$ e $\xi \in \Omega(g)$. Portanto, $g^{k_l} n \xi_x \longrightarrow \xi$ se $k_l \longrightarrow +\infty$. ■

Por outro lado, quanto às órbitas $N^+(g)\eta_0$, onde $\eta_0 = \text{ger}\{e_{d-k+1}, \dots, e_d\}$ é o subespaço vetorial gerado pelos últimos k elementos da base, apresentam-se situações similares aos de (a_1) e (b_1) . Isto é

- (a₂) Se o elemento e_{d-k+1} corresponde a um autovalor real ou se e_{d-k+1}, e_{d-k+2} definem um autovalor complexo, então essa órbita é aberta e densa ou seja, é a variedade estável de g^{-1} em η_0 . Nesses casos, cálculos diretos mostram que η_0 é um atrator de g^{-1} (veja (a_1)) e portanto, um repulsor de g .
- (b₂) Se os elementos e_{d-k+1}, e_{d-k} definem um autovalor complexo de B , então dita órbita está contida estritamente na variedade instável aberta e densa e, como na parte (b_1) , é possível mostrar que tem codimensão um.

Esta última parte pode ser resumida na

Proposição 2.1.3 *Para o elemento mencionado em (b_2) , a órbita $N^+(g)\eta_0$ é uma subvariedade de codimensão um.*

Demonstração: É a mesma que a dada em (b_1) . ■

Da mesma forma que no exemplo precedente ao Lema 2.1.2, o número de $N^+(g)$ -órbitas em geral não é finito. Continuando em (b_2) , para o elemento regular decomposto g e e_{d-k+1}, e_{d-k} temos que:

$$g^{-1}e_{d-k+1} = e^\alpha(\cos \beta e_{d-k+1} - \sin \beta e_{d-k})$$

e

$$g^{-1}e_{d-k} = e^\alpha(\sin \beta e_{d-k+1} + \cos \beta e_{d-k})$$

relaciona ξ_0 com o subespaço $\tilde{\eta}_0 = \text{ger}\{e_{d-k+1}, e_{d-k+2}, \dots, e_d\}$. Ao igual que em (2.3) a região onde $\tilde{\eta}_0$ se encontra, é o subconjunto:

$$W(g) = \{\eta_x \in Gr_k(d) : x \in V^k\},$$

com $\eta_x = \text{ger}\{x, e_{d-k+2}, \dots, e_d\}$, $V^k = \text{ger}\{e_{d-k}, e_{d-k+1}\}$. Da mesma forma que a Proposição 2.1.2 temos a

Proposição 2.1.4 *O subconjunto $W(g)$ é um atrator de g^{-1} que é a projeção sob π_k da $K(g)w_0b_0$ -órbita para algum $w_0 \in W$. Mais ainda $N^+(g)W(g)$ é uma vizinhança densa de $W(g)$.*

Demonstração: Para relacionar $W(g)$ com algum toro $K(g)w_0b_0$, podemos tomar a permutação w_0 como sendo:

$$e_i \longleftrightarrow e_{d-i+1} \text{ se } i \in \{1, \dots, d\}.$$

Segue-se que

$$w_0b_0 = (\text{ger}\{e_d\} \subset \text{ger}\{e_d, e_{d-1}\} \subset \dots \subset \text{ger}\{e_d, e_{d-1}, \dots, e_{d-k+1}\} \subset \dots)$$

e a ligação é dada como em (b_1) através da fibração π_k , e pelos mesmos argumentos dados acima, se mostra que :

$$W(g) = \pi_k(K(g)w_0b_0)$$

e

$$\begin{aligned} N^+(g)W(g) &= N^+(g)\pi_k(K(g)w_0b_0) \\ &= N^+(g)K(g)\pi_k(w_0b_0). \end{aligned}$$

Portanto, temos a conclusão. ■

Observação: O conjunto $W(g)$ é um repulsor de g e pode ser obtido rapidamente através da fibração π_k , assim como em qualquer variedade flag. Basta encontrar a permutação apropriada, ou seja a involução principal no grupo de Weyl.

Agora, seja S um subsemigrupo de $SL(d, \mathbb{R})$. Assumiremos no que segue que $\text{int}S \neq \emptyset$. Sendo S um subsemigrupo, este age sobre as Grassmannianas como um semigrupo de difeomorfismos. Para esta ação, considere o conjunto controle invariante C^k (S -c.c.i.) que é fechado e tem interior não vazio (veja [17] e [22]), cuja existência e unicidade é assegurada pela compacidade de $Gr_k(d)$ e o Teorema 3.1 de [17] respectivamente. Portanto, pelo Lema 3.1 [1]

$$C^k = \bigcap_{\xi \in Gr_k(d)} \text{fe}(S\xi)$$

e o conjunto de transitividade associado C_0^j é caracterizado por

$$C_0^k = \{\xi \in C^k : \xi \in (\text{int}S)\xi\}$$

(veja Proposição 2.1 [17]). Mais ainda, este conjunto é dado como o conjunto dos pontos fixos de elementos regulares decompostos reais no $\text{int}S$.

Teorema 2.1.5 *Seja C_0^k o conjunto de transitividade de S -c.c.i. sobre $Gr_k(d)$ e tome $\xi \in C_0^k$. Então existe uma base $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ de \mathbb{R}^d e $h = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ nesta base, com $\lambda_1 > \dots > \lambda_d > 0$ e tal que $h \in \text{int}S$ e $\xi = \text{ger}\{e_1, \dots, e_k\}$, isto é, ξ é um atrator de h .*

Demonstração: Veja o Teorema 3.4 [17]. ■

Baseado no Teorema 2.1.5 e $N^-\xi = N^-(g)\xi$, temos que ξ é um atrator de um elemento regular decomposto real no $\text{int}S$ se, e somente se, $\xi \in C^k$. Em geral, esta condição ainda é suficiente como o mostra a

Proposição 2.1.6 *Seja $g \in \text{int}S$, um elemento regular decomposto e $\Omega(g)$ o atrator. Então $\Omega(g) \subset C^k$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.2.1, o S -c.c.i. contém o atrator $K(g)b_0$ na variedade flag \mathbb{F} . Portanto, pela Proposição 2.1.2 temos que

$$\Omega(g) = \pi_k(K(g)b_0) \subset \pi_k(C) = C^k$$

A conclusão desta proposição ainda segue sendo válida, mesmo que o elemento em questão não esteja no $\text{int}S$, mas, com a seguinte condição adicional: Seja $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_e)$ regular decomposto tal que em relação à base $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ que o diagonaliza se tenha: $\text{Re}B_1 > \dots > \text{Re}B_e$. Dizemos que B satisfaz a propriedade $D(k)$ no nível k , se

$$\text{Im}B_{i_k} \in \mathbb{Q}^c \setminus \pi\mathbb{Q},$$

onde B_{i_k} é o autovalor complexo que define o auto-espaço $V_k = \text{ger}\{e_k, e_{k+1}\}$. De forma similar, um elemento $g \in SL(d, \mathbb{R})$ satisfaz a propriedade $D(k)$ no nível k , se $g = \exp(X)$ para $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$.

Proposição 2.1.7 *Sejam $g \in S$ regular decomposto satisfazendo a propriedade $D(k)$. $\Omega(g)$ o atrator de g no nível k . Então $\Omega(g) \subset C^k$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.1.5, $N^-(g)K(g)b_0 \cap C \neq \emptyset$, onde C é o S -c.c.i. em $\mathbb{F}(g)$. Logo usando a fibração π_k obtemos

$$N^-(g)\Omega(g) \cap C^k \neq \emptyset. \quad (2.5)$$

Tomando $n\xi_x$ em (2.5), temos que $g^m n\xi_x \in C^k$ para cada m . De forma semelhante $g^m \xi_x \in \Omega(g)$ pela invariância. Pela compacidade obtém-se $g^{m_i} \xi_x \rightarrow \xi_y \in \Omega(g)$ se $m_i \rightarrow +\infty$ para alguma subsequência $(m_i)_i$. Portanto,

$$g^{m_i} n\xi_x = g^{m_i} n g^{-m_i} g^{m_i} \xi_x \rightarrow \xi_y \in \Omega(g) \cap C^k.$$

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, obtemos:

$$g^m \xi_y = \text{ger}\{e_1, \dots, e_{k-1}, g^m y / e^{m\alpha}\} \in C^k,$$

onde α é a parte real do autovalor complexo que define ξ_y , $y = ae_k + be_{k+1} \in V_k = \text{ger}\{e_k, e_{k+1}\}$ e

$$\frac{g^m y}{e^{m\alpha}} = (a \cos m\beta - b \sin m\beta)e_k + (b \sin m\beta + a \cos m\beta)e_{k+1}.$$

Por conseguinte, a densidade do conjunto

$$F = \{g^m y / e^{m\alpha} : m \in \mathbb{N}\}.$$

no círculo de raio $a^2 + b^2$ em V^k fornece que $\Omega(g) \subset C^k$. ■

A relação entre conjuntos de controle invariantes C^k e elementos regulares decompostos reais em S é dada através do seguinte resultado, que é uma especialização do provado no Teorema 4.3 [22].

Teorema 2.1.8 *Suponha que $S \neq \text{SL}(d, \mathbb{R})$. Então existe $k \in \{1, \dots, d-1\}$ tal que C^k está contido na componente aberta de Bruhat correspondente, para qualquer base β para a qual existe $g \in \text{int}S$ tal que em relação a β*

$$g = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$$

com $\lambda_1 > \dots > \lambda_d > 0$.

Demonstração: Veja [22] e [19]. ■

Em vista disso, em [19] foi dito que um semigrupo S é de tipo k , se S e k são como no teorema acima. O tipo do semigrupo para S , não está bem definido porque não se

tem a unicidade de k . Portanto, podendo satisfazer para diferentes valores de k . Mas, se S fosse maximal, o tipo de S é bem definido (veja o Teorema 4.3 [22]).

Agora consideramos a Grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ como sendo o conjunto dos subespaços orientados de dimensão k em \mathbb{R}^d . Para $g \in SL(d, \mathbb{R})$ e $\xi \in Gr_k(d)$ se declara uma base de $g\xi$ positivamente orientada, se é a imagem sob g de uma base positivamente orientada de ξ . Isto define uma ação transitiva sobre $Gr_k^+(d)$. Também este último é um recobrimento duplo de $Gr_k(d)$ através da aplicação π que ignora a orientação de subespaços. Além do mais π é equivariante em relação a $SL(d, \mathbb{R})$ -ações. Em termos de representações matriciais duas delas definem o mesmo subespaço orientado se a matriz a que os torna equivalentes $p = qa$ satisfaz $\det a > 0$.

O mergulho de $Gr_k^+(d)$ na esfera unitária do produto exterior $\bigwedge^k \mathbb{R}^d$ com produto interno induzido por algum produto interno de \mathbb{R}^d é dado através da bijeção que associa a cada referencial ortonormal positivamente orientado $\{e_1, \dots, e_k\}$ o elemento decomponível correspondente $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$.

Seja ρ_k a representação canônica de $SL(d, \mathbb{R})$ sobre $\bigwedge^k \mathbb{R}^d$ definida por

$$\rho_k(g)(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = gu_1 \wedge \dots \wedge gu_k.$$

Então esta ação induzida coincide com a $SL(d, \mathbb{R})$ -ação em $Gr_k^+(d)$ sobre os raios definidos por elementos decomponíveis e portanto permite localizar as componentes de Bruhat através da

Proposição 2.1.9 *Seja β uma base de \mathbb{R}^d e N^- o grupo nilpotente. Então existe $\eta \in Gr_k^+(d)$ tal que a N^- -órbita sobre $Gr_k^+(d)$ é o conjunto de raios em $\bigwedge^k \mathbb{R}^d$ gerado por elementos decomponíveis que estejam em*

$$\{\xi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^d : \langle \eta, \xi \rangle \neq 0\}.$$

No levantamento a $Gr_k^+(d)$ existem duas N^- -órbitas e são dadas por $\langle \eta, \xi \rangle > 0$ e $\langle \eta, \xi \rangle < 0$.

Demonstração: Veja [19]. ■

Em vista do resultado anterior, apresentaremos uma versão extrínseca da Proposição 2.1.2, embora mais geométrica e que permite olhar os atratores, repulsores como subconjuntos de certas esferas através do mergulho dado anteriormente.. Para tal, tomemos $g = \exp(B) \in S$ regular decomposto. Seja $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_e)$ tal que em relação à base $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ que o diagonaliza, se tenha: $\text{Re}B_1 > \dots > \text{Re}B_e$. Seja $B_{j_k} = a_{j_k} + ib_{j_k}$ um autovalor complexo cujo auto-espaço V_k^+ é gerado por e_k, e_{k+1} . Consideremos os elementos decomponíveis

$$\xi_k^+ = e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_k \quad , \quad \eta_k^+ = e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_{k+1}$$

e também denotemos por V_k^+ ao subespaço gerado por ξ_k^+, η_k^+ . De forma similar, se $B_{l_k} = a_{l_k} + ib_{l_k}$ é um autovalor complexo cujo auto-espaço V_k^- é gerado por e_{d-k}, e_{d-k+1} ; considera-se aos elementos decomponíveis

$$\xi_k^- = e_{d-k+1} \wedge e_{d-k+2} \wedge \dots \wedge e_d, \quad \eta_k^- = e_{d-k} \wedge e_{d-k+2} \wedge \dots \wedge e_d$$

e denotemos por V_k^- ao subespaço gerado por ξ_k^-, η_k^- . Com estas convenções formulamos a

Proposição 2.1.10 *Seja $g = \exp(B) \in S$ regular decomposto satisfazendo a propriedade $D(k)$. Seja também $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ uma base associada a $D(k)$ e denotemos por $V_k^+ = \text{ger}\{\xi_k^+, \eta_k^+\}$ e $V_k^- = \text{ger}\{\xi_k^-, \eta_k^-\}$. Então o conjunto de raios definido pelos elementos de V_k^+ é um atrator de g , e está contido no S -c.c.i. De forma similar, o conjunto de raios definidos pelos elementos de V_k^- é um repulsor.*

Demonstração: Seja $g = \exp B$ um tal elemento e β a base que o diagonaliza e $a + ib$ o autovalor complexo definido por e_k, e_{k+1} . Logo, ξ_k^+, η_k^+ definem um autovalor complexo de $\rho_k(g)$ dado por:

$$\begin{aligned} \rho_k(g)\xi_k^+ &= e^{(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)} (\cos b \xi_k^+ + \sin b \eta_k^+) \\ \rho_k(g)\eta_k^+ &= e^{(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)} (-\sin b \xi_k^+ + \cos b \eta_k^+), \end{aligned}$$

onde $\lambda_{i_k}, \theta_{i_k}$ denotam somas dos autovalores reais e sumas das partes reais dos autovalores complexos de B , respectivamente e que correspondem a vetores que formam parte de $e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1}$. Avaliando isto na m -ésima potência da representação obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_k(g)^m \xi_k^+ &= e^{m(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)} (\cos mb \xi_k^+ + \sin mb \eta_k^+) \\ \rho_k(g)^m \eta_k^+ &= e^{m(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)} (-\sin mb \xi_k^+ + \cos mb \eta_k^+). \end{aligned}$$

Cada elemento genérico $w \in \bigwedge^k \mathbb{R}^d$, se escreve como;

$$w = x\xi_k^+ + y\eta_k^+ + \sum a_I u_I,$$

onde $u_I = u_{l_1} \wedge \dots \wedge u_{l_k}$, $l_1 < \dots < l_k$ e u_{l_r} define um autovalor real ou complexo. Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\rho(g)^m w}{e^{m(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)}} &= (x \cos mb - y \sin mb) \xi_k^+ + (x \sin mb + y \cos mb) \eta_k^+ \\ &+ \sum \frac{b_I}{e^{m(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)}} u_I, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde o termo b_I é constituído por uma soma finita de $k = i_{l_s} + i_{l_r}$ produtos de exponenciais, senos, cosenos dos quais i_{l_s} são de tipo $e^{ma_{i_k}} \cos mb_{i_k}$, $e^{ma_{i_l}} \sin mb_{i_l}$ e i_{l_r} são de tipo $e^{m\lambda_{i_r}}$. Assim, pela majoração das partes reais, o termo

$$\frac{b_I}{e^{m(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)}} \longrightarrow 0 \quad \text{se } m \longrightarrow +\infty,$$

pois a sequência (2.6) é limitada. Existe assim uma subsequência convergindo para um w_0 no subespaço V_k^+ . Portanto, os raios gerados pelos elementos de dito subespaço formam um atrator de $\rho_k(g)$. Se tomamos $g = \exp(B)$ no semigrupo S e w de tal forma que o raio gerado por ele esteja contido no S -c.c.i C , então o raio gerado por w_0 também se encontra nesse conjunto. Novamente

$$w_0 = x_1 \xi_k^+ + y_1 \eta_k^+$$

é um elemento do círculo de raio $x_1^2 + y_1^2$ em V_k^+ . Avaliando isto na m -ésima potência da representação obtém-se

$$\frac{\rho(g)^m w_0}{e^{m(\lambda_{i_k} + 2\theta_{i_k} + a)}} = (x_1 \cos mb - y_1 \sin mb) \xi_k^+ + (x_1 \sin mb + y_1 \cos mb) \eta_k^+. \quad (2.7)$$

Segue-se que os raios definidos pela sequência (2.7) estão contidos no conjunto C^k e como o elemento B satisfaz a propriedade $D(k)$, então a união de tais raios é denso em V_k^+ , daí que os raios definidos por ele estão contidos em C^k . ■

Observação: Se o elemento regular decomposto g satisfaz a propriedade $D(k)$ no nível k , então o elemento $\rho_k(g)$ também satisfaz dita propriedade, mas o nível k é olhado no produto exterior $\bigwedge^k \mathbb{R}^d$.

Para cada $\xi \in Gr_k(d)$, a fibra $\pi^{-1}(\xi) = \{\pm \xi\}$. Portanto, o atrator de um elemento regular decomposto g satisfazendo a propriedade $D(k)$ é uma reta projetiva em $Gr_k(d)$ e seu levantamento a $Gr_k^+(d)$ é um círculo. A existência de um número finito de S -c.c.i. para semigrupos S de interior não vazio é assegurada pela compacidade do $Gr_k^+(d)$. Portanto, o levantamento de $C^k \subset Gr_k(d)$ contém no máximo dois de tais conjuntos, e são projetados sobre C^k (veja Proposição 2.2 [17]).

Como em [19], suponhamos que S é de tipo k e C^k conexo. Portanto, em vista da Proposição 2.1.9, $C = \pi^{-1}(C^k)$, se decompõe em duas componentes conexas:

$$\begin{aligned} C^+ &= \{\xi \in C : \langle \eta, \xi \rangle > 0\} \\ C^- &= \{\xi \in C : \langle \eta, \xi \rangle < 0\} \end{aligned}$$

com C^\pm ou $C^+ \cup C^-$ sendo S -c.c.i.

Proposição 2.1.11 *Seja $g \in S$ um elemento regular decomposto satisfazendo a propriedade $D(k)$. Então S não é de tipo k .*

Demonstração: Seja $\Omega^+(g) = \pi^{-1}(\Omega(g))$ o levantamento do atrator de g , segue-se da Proposição 2.1.10 que

$$\Omega^+(g) = \pi^{-1}(\Omega(g)) \subset C^\pm.$$

Denotemos por $\phi : Gr_k^+(g) \rightarrow S^{\binom{d}{k}-1}$ o mergulho acima definido e tomemos $(\xi_x, \mathcal{O}^\pm) \in \Omega^+(g)$, com $\xi_x = \text{ger}\{u_1, \dots, u_{k-1}, x\}$ e base o.n. positivamente orientada. Então

$\phi(\xi_x, \mathcal{O}^\pm) = \pm u_1 \wedge \dots \wedge u_{k-1} \wedge x$, com $x \in V_k$. Portanto, se supomos que para algum k como na hipótese, S é de tal tipo, contradizemos a Proposição 2.1.9 porque de

$$\langle \phi(\xi_x, \mathcal{O}^+), \eta \rangle > 0 \quad \text{e} \quad \langle \phi(\xi_x, \mathcal{O}^-), \eta \rangle = -\langle \phi(\xi_x, \mathcal{O}^+), \eta \rangle < 0$$

por continuidade, existe algum $x_0 \in V_k$ tal que $\langle \phi(\xi_{x_0}, \mathcal{O}^\pm), \eta \rangle = 0$. ■

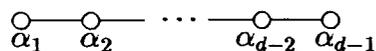
No que segue faremos alguns comentários sobre dualidade nas Grassmannianas ou fronteiras minimais de $SL(d, \mathbb{R})$. Seja $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ a forma real normal não compacta de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$. Da mesma forma que no capítulo 1, considere a decomposição de Cartan canônica $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(d) \oplus \mathfrak{s}$, e tomemos $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ a subálgebra de Cartan das matrizes diagonais reais de traço zero, que é maximal e abeliana. Associado a \mathfrak{a} temos o sistema simples de raízes

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{d-1,d}\},$$

onde $\alpha_{i,i+1} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ são funcionais definidos por:

$$\alpha_{i,i+1}(\text{diag}(a_1, \dots, a_d)) = a_i - a_{i+1}.$$

Logo, o diagrama de Dynkin correspondente A_{d-1} , é dado por



onde $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, d-1$.

O único automorfismo involutivo ι do diagrama de Dynkin, associado com Σ , é dado por aquele que permuta as raízes equidistantes do centro. Isto é,

$$\iota(\alpha_{i,i+1}) = \alpha_{d-i,d-i+1}.$$

Em vista que a involução principal $w_0 \in W$ é dada por

$$w_0 = (1, d)(2, d-1) \dots (i, d-i+1) \dots$$

temos que

$$\begin{aligned} w_0(\alpha_{i,i+1}) &= -\alpha_{d-i,d-i+1} \\ &= -\iota(\alpha_{i,i+1}). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\Theta = \{\alpha_{k,k+1}\}^c$ segue-se que $\iota\Theta = \{\alpha_{d-k,d-k+1}\}^c$ e $w_0(-\Theta) = \{\alpha_{d-k,d-k+1}\}^c$. Daí que

- $\langle \Theta \rangle$ é o conjunto formado pelas raízes $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{k-1,k}, \alpha_{k+1,k+2}, \dots, \alpha_{d-1,d}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{k-3,k-1}, \alpha_{k+1,k+3}, \dots, \alpha_{d-2,d}$. Enquanto que

- $\langle \iota\Theta \rangle$ é formado por $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{d-(k+1),d-k}, \alpha_{d-k+1,d-k+2}, \dots, \alpha_{d-1,d}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{d-(k+2),d-k}, \alpha_{d-(k+1),d-k+3}, \dots, \alpha_{d-2,d}$.

Logo, as subálgebras parabólicas correspondentes às câmaras de Weyl \mathfrak{a}^+ e \mathfrak{a}^- são dadas por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} + \mathfrak{n}^+(\Theta) \quad \text{e} \quad \mathfrak{p}_{\iota\Theta} = \tilde{\mathfrak{p}} + \mathfrak{n}^-(\Theta),$$

onde $\mathfrak{n}^+(\Theta)$, $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ são as subálgebras geradas por \mathfrak{g}_α com $\alpha \in -\langle -\Theta \rangle$, $\alpha \in -\langle \Theta \rangle$, respectivamente; e

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+, \quad \tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-,$$

as subálgebras parabólicas standard. Portanto, se identificamos

$$\alpha_{k,k+1} \longleftrightarrow k,$$

cada matriz $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ pode ser escrita em forma de blocos:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

onde a, b, c , e d são matrizes $k \times k$, $k \times (d-k)$, $(d-k) \times k$ e $(d-k) \times (d-k)$ respectivamente. De forma similar, se identificamos

$$\alpha_{d-k,d-k+1} \longleftrightarrow (d-k),$$

cada matriz $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$, se escreve em forma de blocos como acima; com a, b, c , e d matrizes $(d-k) \times (d-k)$, $(d-k) \times k$, $k \times (d-k)$ e $k \times k$ respectivamente. Daí que \mathfrak{p}_Θ e $\mathfrak{p}_{\iota\Theta}$ consiste das matrizes em $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ que são triangulares superiores em forma de blocos, determinadas por $k, d-k$ respectivamente. Portanto, as fronteiras correspondentes são

$$\frac{\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})}{P_\Theta} \cong \mathrm{Gr}_k(d) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})}{P_{\iota\Theta}} \cong \mathrm{Gr}_{d-k}(d),$$

onde $P_\Theta, P_{\iota\Theta}$ são os subgrupos parabólicos correspondentes a $\Theta, \iota\Theta$.

Dito isso, finalmente afirma-se o seguinte fato que simplifica a prova do resultado central deste capítulo que apresentaremos adiante.

Proposição 2.1.12 *Suponha que S é de tipo k e colocamos*

$$S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$$

Então S^{-1} é de tipo $d-k$.

Demonstração: Devido a que S é de tipo k , temos que $W(S, A^+) = W_{\Theta(S)}$, onde $\Theta(S) = \{\alpha_{k,k+1}\}^c$. Logo, a fronteira correspondente é

$$\frac{\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})}{P_{\Theta(S)}} \cong \mathrm{Gr}_k(d).$$

Como $W(S, A^+) = W(S^{-1}, (A^+)^{-1})$, (Corolário 4.6 [22]), é possível mostrar que

$$\frac{\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})}{P_{\Theta(S^{-1})}} \cong \frac{\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})}{P_{\Theta(S)}} \cong \mathrm{Gr}_{d-k}(d)$$

(maiores detalhes na Proposição 6.1 [20]). Portanto, já que as componentes abertas de Bruhat destas fronteiras contêm os conjuntos de controle invariantes correspondentes aos semigrupos S e S^{-1} obtemos a conclusão. ■

2.2 Controlabilidade

Seja S o semigrupo de $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ gerado pelo sistema de controle a tempo discreto (2.1). Isto é

$$S = \{e^{A+u_1B} \dots e^{A+u_mB} : u_i \in \mathbb{R}, m \geq 1\}. \quad (2.8)$$

Controlabilidade em $\mathbb{R}^d - \{0\}$ é equivalente à transitividade de S sobre $\mathbb{R}^d - \{0\}$. Assumindo que $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ em $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$, os resultados da seção previa se aplicam ao semigrupo S . Em particular, S é transitivo sobre $\mathbb{R}^d - \{0\}$ se, e somente se, $S = \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$. Portanto, para mostrar controlabilidade de (2.1) só precisamos mostrar que $S = \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$. Este requerimento é obtido por meio do Teorema 2.1.8, em vista que $S = \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ quando não é de tipo k para $k = 1, \dots, d-1$. Por outro lado, a Proposição 2.5 de [19] assegura que um semigrupo não é de tipo k , se existir $\xi \in \mathrm{Gr}_k^+(d)$ tal que $\pm\xi$ estejam no mesmo S -c.c.i. Alternativamente a Proposição 2.1.11 assegura isto. O seguinte resultado é uma variante daquele dado em [19], adaptado ao contexto apresentado aqui.

Proposição 2.2.1 *Seja G um grupo de Lie, seja G/H um espaço homogêneo, e seja $S \subset G$ um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Assumimos que S é gerado por um subconjunto conexo $\Gamma \subset G$. Seja C o S -c.c.i. sobre G/H e suponha que exista $g \in \Gamma$ e um subconjunto $\Omega \subset C$ conexo invariante sob g . Então C é conexo.*

Demonstração: Seja C' a componente conexa de C contendo Ω . Tomando um elemento $x \in \Omega$, obtemos pela continuidade da G -ação que Γx está contido numa componente conexa de C . Mas, $\Gamma x \cap C' \neq \emptyset$ pois $gx \in \Omega$. Por outro lado, se $\tilde{g} \in \Gamma$, então $\tilde{g}C'$ está contido numa componente conexa de C porque este é \tilde{g} -invariante. Em particular $\emptyset \neq \tilde{g}\Omega \subseteq \tilde{g}C' \cap C'$. Portanto, $\tilde{g}C' \subset C'$ e $C' = C$. ■

Como uma aplicação da Proposição 2.2.1 para S -c.c.i sobre as Grassmannianas e usando a propriedade $D(k)$ para elementos regulares decompostos em certos semigrupos, temos a

Proposição 2.2.2 *Seja $S \subset \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ um semigrupo com interior não vazio gerado por um subconjunto $\Gamma \subset \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$. Suponha que exista um elemento regular decomposto $g \in \Gamma$, que tenha autovalores reais ou satisfaz a propriedade $D(k)$. Então os S -c.c.i. sobre $\mathrm{Gr}_k(d)$ e $\mathrm{Gr}_k^+(d)$ são conexos.*

Demonstração: O caso real foi feito em [19]. Para a outra parte, seja C o S -c.c.i. em $\mathrm{Gr}_k(d)$, então $\pi^{-1}(C)$ contém no máximo dois de tais conjuntos C_i projetando-se sobre C (veja Proposição 2.2 [17]). O atrator $\Omega(g)$ é levantado no conjunto

$$\Omega^+(g) = \pi^{-1}(\Omega(g)) \subset C_1 \cup C_2$$

que é conexo e g -invariante. Segue-se que

$$\Omega^+(g) \subset C_1 = C_2.$$

Portanto, pela Proposição 2.2.1 obtemos que, $C_1 = C_2$ é conexo e finalmente C é conexo. ■

A análise do tipo de um semigrupo, por dizer k , depende fundamentalmente do comportamento do raio gerado por um elemento decomponível $\xi = e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_k$, já que este é um atrator ou se encontra num conjunto atrator da transformação $\rho_k(g)$, onde $g = \exp(B)$. Em geral, g não está no semigrupo definido em (2.8), mas é possível fazer uma variação de B para obter tal requerimento. Para tal, seja $B = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_e)$ regular decomposto tal que em relação à base $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ se tenha: $\mathrm{Re}B_1 > \dots > \mathrm{Re}B_e$. Dizemos que B satisfaz a propriedade D se

$$\mathrm{Im}B_{i_k} \in \mathbb{Q}^c \setminus \pi\mathbb{Q}; \quad k = 1, \dots, t$$

para cada autovalor complexo. De forma similar um elemento $g \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ satisfaz a propriedade D , se $g = \exp(X)$ com $X \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ satisfazendo a propriedade D .

Lema 2.2.3 *Seja $A, B \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ tal que B é um elemento regular decomposto e ordene as partes reais dos autovalores em forma decrescente. Suponha que B satisfaz a condição D . Então as propriedades D e de regularidade são estáveis para a variação $\alpha(u) = A + uB$.*

Demonstração: Suponhamos que B tenha s autovalores reais e t autovalores complexos, isto é $d = s + 2t$. Por dependência contínua de B , para

$$\epsilon < \min\left\{\frac{1}{2}(\mathrm{Re}B_i - \mathrm{Re}B_{i+1}), |B_{i_k}| : i = 1, \dots, e\right\},$$

existe $\delta > 0$, tal que, se $\|T - B\| < \delta$, então $B_\epsilon(B_i)$ (bola de centro B_i e raio ϵ) contém um só autovalor \tilde{B}_i de T real ou complexo e, dependendo da natureza de B_i , este satisfaz: $Re\tilde{B}_1 > \dots > Re\tilde{B}_d$. Isto é devido a que $Re\tilde{B}_i \in B_{r_i}(B_i)$ e $Re\tilde{B}_{i+1} \in B_{r_i}(B_{i+1})$ juntamente com $r_i = \frac{1}{2}(ReB_i - ReB_{i+1})$; fornece a relação

$$Re\tilde{B}_{i+1} < \frac{1}{2}(ReB_i + ReB_{i+1}) < Re\tilde{B}_i.$$

Por enquanto, foi mostrado que a regularidade de B é uma propriedade estável, isto é, qualquer elemento de $B_\delta(B) \cap \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ é regular decomposto e preserva a mesma estrutura de blocos de B . Quanto à propriedade D ; para este $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $1/n_0 < \epsilon$, logo para cada $n > n_0$, é possível escolher uma sequência decrescente $(\delta_n)_n$ com $\delta_n \rightarrow 0$ se $n \rightarrow +\infty$, tal que se $\|T - B\| < \delta_n$, então cada bola $B_{1/n}(B_i)$ contém um autovalor da mesma natureza. Portanto, para $T = \epsilon' A + B$ com $|\epsilon'| < \delta_n/\|A\|$, temos que

$$\epsilon' A + B = \text{diag}(B_1(\epsilon'), \dots, B_e(\epsilon'))$$

preserva a mesma ordem dos autovalores de B em alguma base $\beta(\epsilon)$, a qual depende continuamente de ϵ' . Em particular: $ReB_{i_1}(\epsilon') > \dots > ReB_{i_t}(\epsilon')$. Devido a que:

$$\left(ImB_{i_1}(\epsilon'), \dots, ImB_{i_t}(\epsilon')\right) \longrightarrow (ImB_{i_1}, \dots, ImB_{i_t}) \in (\mathbb{Q}^c)^t - \pi\mathbb{Q}^t \quad (2.9)$$

se $\epsilon' \rightarrow 0$, é possível escolher uma sequência decrescente $(\epsilon'_n)_n$ tal que

$$\epsilon'_n ImB_{i_k}(\epsilon'_n) \in \mathbb{Q}^c - \pi\mathbb{Q} \quad \text{e} \quad |\epsilon'_n| < \delta_n/\|A\|$$

para $k = 1, \dots, t$ e $n > n_0$. Caso contrário a curva definida em 2.9 seria desconexa se ϵ' fosse suficientemente pequeno. ■

Observação: Em vista do lema anterior, temos que o elemento $g_u = \exp(A + uB)$ é regular decomposto e satisfaz a propriedade D , para valores $u \in \mathbb{R}$ suficientemente grandes; tanto positivos, como negativos.

De aqui em diante; suporemos sempre que o B dado em (2.1) seja regular decomposto satisfazendo a propriedade D . Da mesma forma que em [19], as condições que asseguram controlabilidade são tiradas de A . Também, pelo Lema 2.2.3 temos que $(1/u)A + B$ tem o mesmo comportamento de B para uma quantidade razoável de u 's.

Consideremos a subálgebra de Cartan \mathfrak{b} correspondente à classe de conjugação determinada por B , e seja a aplicação $\phi : \text{SL}(d, \mathbb{R}) \times \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ definida por:

$$\phi(g, H) = \text{Ad}(g)H,$$

e cuja diferencial em $(1, B)$, avaliada em $(X, Y) \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) \times \mathfrak{b}$ é dada por:

$$(d\phi)_{(1, B)}(X, Y) = \text{ad}(X)B + Y. \quad (2.10)$$

Seguindo o procedimento dado em [19], mostraremos que $(d\phi)_{(1,B)}$ é sobrejetora. Para tal, seja $X, Y \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ e dividamos em blocos segundo a estrutura de B de modo que: $ReB_1 > \dots > ReB_e$. Com estas convenções, a relação $ad(B)X = \tilde{Y}$ fornece as seguintes equações matriciais

$$B_i X_{ij} - X_{ij} B_j = Y_{ij}. \quad (2.11)$$

Dependendo de B_i e B_j , temos as seguintes possibilidades para X_{ij} :

- (a) Se $B_i \in \mathbb{C}$ e $B_j \in \mathbb{R}$, então $X_{ij} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$.
- (b) Se $B_i \in \mathbb{C}$ e $B_j \in \mathbb{C}$, então $X_{ij} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (c) Se $B_i \in \mathbb{R}$ e $B_j \in \mathbb{C}$, então $X_{ij} \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (d) Se $B_i \in \mathbb{R}$ e $B_j \in \mathbb{R}$, então $X_{ij} \in \mathbb{R}$.

Por conseguinte, em cada um desses casos, temos que o termo genérico X_{ij} dado em (2.11) admite solução e é expressado por:

- (a) Se denotarmos por:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad e \quad Y_{ij} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

temos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha_i - \lambda_j & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i - \lambda_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

porque o determinante $\Delta = (\alpha_i - \lambda_j)^2 + \beta_i^2 \neq 0$.

- (b) Usando a decomposição: $M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$, onde W_1 é o subespaço vetorial das matrizes 2×2 que representam os números complexos e W_2 as matrizes simétricas, temos que:

$$Y_{ij} = Y_{ij}^c + Y_{ij}^s \quad X_{ij} = X_{ij}^c + X_{ij}^s.$$

Substituindo isso em (2.11) obtém-se

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= B_i(X_{ij}^c + X_{ij}^s) - (X_{ij}^c + X_{ij}^s)B_j \\ &= X_{ij}^c(B_i - B_j) + B_i X_{ij}^s - X_{ij}^s B_j \\ &= X_{ij}^c(B_i - B_j) + X_{ij}^s(B_i^t - B_j) \end{aligned}$$

e como a última parcela é simétrica, temos que:

$$\begin{aligned} X_{ij}^c &= (B_i - B_j)^{-1} Y_{ij}^c \\ X_{ij}^s &= Y_{ij}^s (B_i^t - B_j)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_{ij} = ((B_i - B_j)^{-1}Y_{ij}^c + Y_{ij}^s(B_{ij}^t - B_j)^{-1}).$$

(c) Se denotarmos por:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \text{ e } Y_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},$$

temos que:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_i - \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \lambda_i - \alpha_j \end{pmatrix}$$

porque o determinante: $\Delta = (\lambda_i - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \neq 0$

(d) Se denotarmos por:

$$X_{ij} = (x) \text{ e } Y_{ij} = (a),$$

temos que:

$$x = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)} a \text{ se } i \neq j$$

já que, se $j < i$, então $\lambda_j > \lambda_i$.

Estes fatos, implicam que $\text{ad}(B)$ é sobrejetora no subespaço vetorial das matrizes com zeros ao longo dos blocos diagonais iguais os de B . Daí que a aplicação definida em (2.10) seja também sobrejetora. Por conseguinte, o teorema da função implícita permite concluir que qualquer curva iniciando em B , seja a imagem de uma curva em $\text{SL}(d, \mathbb{R}) \times \mathfrak{b}$ e iniciando em $(1, B)$ via a aplicação ϕ . Em particular, se tomamos a curva $\alpha(\epsilon) = \epsilon A + B$, obtemos uma curva (g_ϵ, H_ϵ) com $g_0 = 1, H_0 = B$. Logo, depois de derivar a relação $\phi(g_\epsilon, H_\epsilon) = \epsilon A + B$, obtemos:

$$[\dot{g}_0, B] + \dot{H}_0 = A,$$

onde \dot{H}_0 é a parte diagonal de $A = (a_{ij})$. Mais ainda, \dot{g}_0 tem entradas:

$$\frac{a_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i}; \quad -((B_i - B_j)^{-1}A_{ij}^c + A_{ij}^s(B_{ij}^t - B_j)^{-1}); \quad c_{ij}; \quad d_{ij}, \quad (2.12)$$

onde c_{ij} e d_{ij} correspondem a matrizes em $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ e $M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ dadas por (a) e (c) respectivamente, e segundo as possibilidades de B_i, B_j . No que segue, A^B denotará a matriz de blocos nulos na diagonal e cujas entradas no lugar (i, j) , $i \neq j$, são dadas por (2.12).

Agora tomamos uma matriz $X = (x_{ij})$, $d \times d$ arbitrária com $d = s + 2t$ como antes, e consideremos este menor dado pela esquina superior direita $j \times j$:

$$\det \begin{pmatrix} x_{1,d-j+1} & \cdots & x_{1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j,d-j+1} & \cdots & x_{j,d} \end{pmatrix}.$$

Em termos do produto exterior, este menor é dado como

$$\langle Xe_{d-j+1} \wedge \dots \wedge Xe_d, e_1 \wedge \dots \wedge e_j \rangle.$$

Este menor será denotado por $a_j^+(X)$. De forma simétrica, o menor inferior é dado por $a_j^-(X) = a_j^+(X^t)$, que também no formalismo do produto exterior se expressa como:

$$a_j^-(X) = \langle Xe_1 \wedge \dots \wedge Xe_j, e_{d-j} \wedge \dots \wedge e_d \rangle.$$

Portanto, obtém-se as seguintes condições :

$$JK_j : (-1)^{j+1} a_j^+(A^B) a_j^-(A^B) > 0$$

que já foram estabelecidas em [19] como parte de condições suficientes sobre as entradas das matrizes A e B nesse resultado central, e também agora serão usadas novamente. Mas, antes disso enunciamos o seguinte.

Lema 2.2.4 *Considere o sistema discreto (2.1). Assumimos que o semigrupo S gerado pelo sistema tenha interior não vazio em $SL(d, \mathbb{R})$ e que seus geradores satisfaçam a condição JK_k . Então o semigrupo S^{-1} tem interior não vazio e seus geradores também satisfazem a condição JK_k .*

Demonstração: Em vista de que a inversão de elementos é um homeomorfismo segue que $intS \neq \emptyset$. Quanto á segunda afirmação temos que S^{-1} é gerado por e^{-A+uB} , $u \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$(-1)^{k+1} a_k^+(-A^B) a_k^-(-A^B) = (-1)^{k+1} (-1)^{2k} a_k^+(A^B) a_k^-(A^B) > 0$$

e temos a conclusão. ■

Seja ρ_k a representação de $SL(d, \mathbb{R})$ em $\wedge^k \mathbb{R}^d$ dada anteriormente através do produto exterior. Então, existe uma representação infinitesimal associada $\tilde{\rho}_k$ de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ em $\wedge^k \mathbb{R}^d$ definida por

$$\tilde{\rho}_k(X) = \frac{d}{dt} \rho_k(\exp(tX))|_{t=0}.$$

A ligação entre as duas representações é dada através da relação

$$\rho_k(\exp(X)) = \exp(\tilde{\rho}_k(X)),$$

onde a primeira \exp significa a exponencial em $SL(d, \mathbb{R})$ e a segunda é a exponencial de transformações lineares de $\wedge^k \mathbb{R}^d$. Portanto, devido a que

$$\rho_k(\exp(tX))(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = \exp(tX)u_1 \wedge \dots \wedge \exp(tX)u_k$$

temos que a representação da álgebra de Lie é explicitada por

$$\tilde{\rho}_k(X)(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = Xu_1 \wedge \dots \wedge u_k + \dots + u_1 \wedge \dots \wedge Xu_k.$$

Essa representação será usada em uma das passagens do seguinte resultado central.

Teorema 2.2.5 *Considere o sistema discreto (2.1). Assumimos que o semigrupo S gerado pelo sistema tenha interior não vazio em $SL(d, \mathbb{R})$. Suponha que B é um elemento regular decomposto satisfazendo a propriedade D . Suponha também que a condição JK_k é satisfeita para $1 \leq k \leq \frac{1}{2}d$. Então $S = SL(d, \mathbb{R})$.*

Demonstração: É suficiente provar que S não é de tipo k para $1 \leq k \leq d/2$, pois o mesmo raciocínio e o Lema 2.2.4 mostram que S^{-1} não é deste tipo. Pela Proposição 2.1.12, S não é de tipo k para cada k . Antes disso, lembramos os comentários feitos sobre a parametrização dos elementos $\frac{1}{u}A + B$. Tínhamos, pelo teorema da função implícita, a existência de uma curva (g_ϵ, H_ϵ) em $SL(d, \mathbb{R}) \times \mathfrak{b}$ satisfazendo: $g_0 = 1$, $H_0 = B$, $\dot{g}_0 = A^B$ e \dot{H}_0 sendo a parte diagonal de A , preservando a estrutura de blocos de B . Logo, colocando $\gamma_u = g_{1/u}$, se $|u|$ for suficientemente grande, e tomando a exponencial de

$$A + uB = u\left(\frac{1}{u}A + B\right) = \gamma_u u H_{1/u} \gamma_u^{-1},$$

consegue-se

$$\exp(A + uB) = \gamma_u \exp(uH_{1/u}) \gamma_u^{-1}. \quad (2.13)$$

Portanto, se $\beta = \{e_1, \dots, e_d\}$ é a base que diagonaliza B , a análise do tipo de um semigrupo depende do elemento

$$\xi_k^+ = e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_k \quad (2.14)$$

e de usar (2.13) apropriadamente.

(a) Se e_k, e_{k+1} definem um autovalor complexo de $g = \exp(B)$, segue que g satisfaz a propriedade $D(k)$ e pela Proposição 2.1.10 temos que $\Omega^+(g) = \pi^{-1}(\Omega(g))$ é um atrator de g . Logo, pelo lema 2.2.3, é possível escolher uma sequência $(u_n)_n$, com $u_n \rightarrow +\infty$, de tal forma que $\gamma_n(\Omega^+(g))$ seja um atrator de $\exp(A + u_n B) \in S$, de onde $\gamma_n(\Omega^+(g)) \subset C^k$ o S -c.c.i. Mas, $\gamma_n \rightarrow 1$ se $u_n \rightarrow +\infty$. Portanto, $\Omega^+ \subset C^k$. Daí que pela Proposição 2.1.11, S não é de tipo k .

(b) Se e_k corresponde a um autovalor real de B , então o raio definido por ξ_k^+ é um atrator de g . Logo, tomando $u > 0$ suficientemente grande, (2.13) acarreta que $\gamma_u \xi_k^+$ seja um atrator de $\exp(A + uB) \in S$. Usando a densidade da componente de Bruhat, é possível mostrar no levantamento que $\gamma_u \xi_k^+ \in C_\pm^k$, um dos S -c.c.i. em Gr_k^+ . Mais ainda, este último é conexo (veja Proposição 2.1.13). Portanto, dependendo do vetor e_{d-k+1} que intervém no

$$\xi_k^- = e_{d-k+1} \wedge e_{d-k+2} \wedge \dots \wedge e_{d-1} \wedge e_d \quad (2.15)$$

temos o seguinte:

(b₁) Se o vetor e_{d-k+1} define um autovalor real de B , então o raio definido por (2.15) é um repulsor de g . Assim, usando (2.14) junto à condição JK_k , é mostrado que $\pm\xi_k^+ \in C_+^k$ e sendo conexo (Proposição 2.2.1), obtém-se que S não é de tipo k (maiores detalhes Teorema 3.4 [19] já que reproduziremos a prova em forma breve). De fato, pela condição polinomial JK_k isto se reduz a provar dois fatos: ξ_k^- é aproximadamente atingível desde ξ_k^+ , se $a_k^-(A^B) > 0$ e $-\xi_k^+$ é aproximadamente atingível desde ξ_k^- , se $(-1)^{k+1}A_k^+(A^B) > 0$. Em geral, devido a que a exponencial é um difeomorfismo em alguma vizinhança de zero, tem-se $g_\epsilon = \exp(Y(\epsilon))$. Segue-se da analiticidade do $\log(g_\epsilon)$ que

$$g_\epsilon = \exp\left(\epsilon Y_1 + \frac{\epsilon^2}{2} Y_2 + \dots\right),$$

onde $Y_1 = A^B$. Fazendo uso das representações $\rho_k, \tilde{\rho}_k$ no nível de grupos e álgebras de Lie, respectivamente, temos que

$$\rho_k(g_\epsilon) = \exp(\epsilon \tilde{\rho}_k(Y_1) + \frac{\epsilon^2}{2} \tilde{\rho}_k(Y_2) + \dots).$$

Nesta primeira parte, consideremos ξ_k^+ dada por (2.14). Devido a que

$$\tilde{\rho}_k(Z)(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) = Ze_1 \wedge \dots \wedge e_k + \dots + e_1 \wedge \dots \wedge Ze_k$$

e aos subconjuntos $\{1, \dots, k\}$ e $\{d-k+1, \dots, d\}$ serem disjuntos, temos que $\langle \rho_k(Z)^j \xi_k^+, \xi_k^- \rangle = 0$, se $j < k$; já que $\rho_k(Z)^j \xi_k^+$ envolve algum e_i com $i < k$. Por outro lado, se desenvolvemos a exponencial dada acima e usamos esse último fato, as primeiras $k-1$ derivadas em $\epsilon = 0$ da função $\varphi(\epsilon) = \langle \rho_k(g_\epsilon) \xi_k^+, \xi_k^- \rangle$ são nulas, embora que

$$\varphi^{(k)}(0) = b \langle \tilde{\rho}_k(Y_1) \xi_k^+, \xi_k^- \rangle = b a_k^-(A^B),$$

para algum $b > 0$. Logo sua expansão de Taylor em torno de zero é

$$\varphi(\epsilon) = \frac{b}{k!} a_k^-(A^B) \epsilon^k + o(\epsilon) \quad \forall \epsilon \in (-r, r).$$

Portanto, existe $u_0 > 0$ tal que $\langle \rho_k(\gamma_{u_0}) \xi_k^+, \xi_k^- \rangle > 0$. Para este $u_0 > 0$, o raio definido por $\rho_k(\gamma_{u_0}) \xi_k^+$ é um atrator de $\exp(A + u_0 B)$ encontrando-se no c.c.i C . Logo pelo Lema 2.2.3 é possível escolher $u < 0$ suficientemente grande tal que $\rho_k(\gamma_u) \xi_k^-$ seja atrator de $\exp(A + uB)$, e $\rho_k(\gamma_{u_0}) \xi_k^+$ esteja no mesmo lado de $\rho_k(\gamma_u) \xi_k^-$ com respeito ao hiperplano em $\wedge^k \mathbb{R}^d$ gerado pelos autovetores de $\rho_k(\exp(A + uB))$ associados a autovalores distintos do maior. Portanto, da invariância de C sob $\exp(A + uB)$ segue-se que $\gamma_u \xi_k^- \in C$, e devido a que $\gamma_u \xi_k^- \rightarrow \xi_k^-$ obtém-se a conclusão.

Para a segunda parte, na mesma forma anterior, as primeiras $k-1$ derivadas em $\epsilon = 0$ da função $\psi(\epsilon) = \langle \rho_k(g_\epsilon)\xi_k^-, \xi_k^+ \rangle$ são nulas; embora que

$$\psi^{(k)}(0) = c \cdot \langle \tilde{\rho}_k(Y_1)\xi_k^-, \xi_k^+ \rangle = c \cdot a_k^+(A^B)$$

para algum $c > 0$. Logo sua expansão de Taylor em torno de zero é

$$\psi(\epsilon) = \frac{c}{k!} a_k^+(A^B) \epsilon^k + o(\epsilon), \quad \forall \epsilon \in (-r, r).$$

e dependendo de $(-1)^{k+1} a_k^+(A^B) > 0$ temos que:

- Se k é par, então $a_k^+(A^B) < 0$ e $\psi(\epsilon)$ se comporta como uma função par negativa próximo de zero. Daí que, existe $u_0 < 0$ suficientemente grande tal que $\langle \rho_k(\gamma_{u_0})\xi_k^-, \xi_k^+ \rangle < 0$ com $-\epsilon < 1/u_0 < 0$.
- Se k é ímpar, então $a_k^+(A^B) > 0$ e $\psi(\epsilon)$ se comporta como uma função ímpar próximo de zero. Daí que existe $u_0 < 0$ suficientemente grande tal que $\langle \rho_k(\gamma_{u_0})\xi_k^-, \xi_k^+ \rangle < 0$ com $-\epsilon < 1/u_0 < 0$.

Isto é, existe $u_0 < 0$ suficientemente grande tal que $\langle \rho_k(\gamma_{u_0})\xi_k^-, \xi_k^+ \rangle < 0$. Sendo assim, $\rho_k(\gamma_{u_0})\xi_k^-$ é o atrator de $\exp(A + uB)$ pertencendo a C . Seja também $-\rho_k(\gamma_u)\xi_k^+$ um atrator de $\exp(A + uB)$ para $u > 0$ suficientemente grande de modo que $\rho_k(\gamma_{u_0})\xi_k^-$ esteja no mesmo lado de $-\rho_k(\gamma_u)\xi_k^+$ com respeito ao hiperplano em $\bigwedge^k \mathbb{R}^d$ gerado pelos autovetores de $\rho_k(\exp(A + uB))$ associados aos autovalores distintos do maior. Portanto, devido à invariância de C sob $\exp(A + uB)$ obtém-se que $-\gamma_u \xi_k^+ \in C$. Fazendo $u \rightarrow +\infty$, segue-se que $-\xi^+ \in C$.

- (b₂) Se e_{d-k+1}, e_{d-k} definem um autovalor complexo de B , pelo mesmo raciocínio feito em (b₁), mostra-se que S não é de tipo k .
- (b₃) Se e_{d-k+1}, e_{d-k} definem um autovalor complexo de B , segue-se da Proposição 2.1.10 que o levantamento $W^+(g) = \pi^{-1}(W(g))$ é um conjunto repulsor de g em $Gr_k^+(d)$. Por outro lado, pelo Lema 2.2.3, é possível escolher uma sequência $(u_n)_n$ com $u_n \rightarrow -\infty$ tal que $\gamma_{u_n}(W^+(g))$ seja um conjunto atrator de $\exp(A + u_n B) \in S$, de onde $\gamma_{u_n}(W^+(g)) \subset C_\pm^k$, o S -c.c.i. (veja Proposição 2.1.10). Mas $\gamma_{u_n} \rightarrow 1$ se $u_n \rightarrow -\infty$. Portanto, $W^+(g) \subset C_\pm^k$ e pela Proposição 2.1.11 S não é de tipo k .
- (c) Se e_{k-1}, e_k definem um autovalor complexo de B , então o raio definido por (2.14) é um atrator de g . Os mesmos argumentos dados em (b): (2.15), (b₁), (b₂), (b₃) mostram que S não é de tipo k .

■

Capítulo 3

Semigrupos Conexos e Maximais em $SO_o(p, 1)$

Neste capítulo, estabeleceremos condições suficientes para que um semigrupo maximal de interior não vazio num grupo de Lie com posto um, mais especificamente $SO_o(p, 1)$, seja conexo. Tais condições envolvem essencialmente a geometria da variedade flag associada a dito grupo. Isto é, no que se refere à métrica e geodésicas por ela fornecidas.

3.1 Métrica Canônica

Antes de mais nada enunciaremos o seguinte resultado de caráter geral para semigrupos de interior não vazio em grupos de Lie semi-simples, agindo em fronteiras minimais.

Teorema 3.1.1 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples com centro finito, $S \subset G$ um semigrupo maximal de interior não vazio. Então S é o semigrupo de compressões de um subconjunto C localizado em alguma fronteira minimal (ou variedade flag de G), G/P_Θ , o qual é o S -c.c.i. correspondente.*

Demonstração: Veja [22]. ■

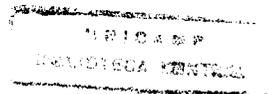
Neste caso, o semigrupo dado é da forma

$$S = S_C = \{g \in G : gC \subset C\}.$$

Associado ao semigrupo temos o objeto algébrico chamado cone de Lie de S que é definido por:

$$L(S_C) = \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in S_C, \forall t > 0\}.$$

No caso em que G é de posto um, existe uma única fronteira \mathbb{F} e os semigrupos maximais são semigrupos de compressão de subconjuntos $C \subset \mathbb{F}$ com $C = \text{fe}(\text{int}C)$ (veja Teorema 6.11 de [22]).



A questão que trataremos, é sobre a descrição dos conjuntos C acima mencionados de tal forma que o semigrupo S_C seja conexo, além de ser maximal. Em vista que o grupo envolvido tem posto um, então ele corresponde a uma das álgebras de Lie:

- (a) $\mathfrak{so}(p, 1)$
- (b) $\mathfrak{su}(p, 1)$
- (c) $\mathfrak{sp}(p, 1)$.

Por enquanto, só abordaremos o caso (a). Seja o grupo

$$\mathrm{SO}(p, 1) = \{g \in \mathrm{SL}(p+1) : g^t I_{p,1} g = I_{p,1}\},$$

onde

$$I_{p,1} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sua álgebra de Lie é dada por:

$$\mathfrak{so}(p, 1) = \{X \in \mathfrak{sl}(p+1) : X^t I_{p,1} + I_{p,1} X = 0\}.$$

Esta álgebra de Lie é uma forma real não compacta do complexificado $\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(p+1)$. Se consideramos o automorfismo involutivo $\theta : \mathfrak{so}(p+1) \rightarrow \mathfrak{so}(p+1)$ definido por: $\theta(X) = I_{p,1} X I_{p,1}$, obtemos uma decomposição da forma real compacta $\mathfrak{so}(p+1)$ nos auto-espacos

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{so}(p+1) : \theta(X) = X\}$$

e

$$\mathfrak{s}^* = \{X \in \mathfrak{so}(p+1) : \theta(X) = -X\}$$

correspondentes aos autovalores 1 e -1 respectivamente. Isto é,

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathfrak{so}(p) \right\}$$

e

$$\mathfrak{s}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^t & 0 \end{pmatrix} : b \in M_{p \times 1}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Colocando $\mathfrak{s} = i\mathfrak{s}^*$, obtemos uma decomposição de Cartan da forma real não compacta $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, a qual é isomorfa à álgebra de Lie $\mathfrak{so}(p, 1)$ através do isomorfismo

$$\begin{pmatrix} a & ib \\ -ib^t & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, consideramos

$$\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{so}(p, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b^t & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathfrak{so}(p), b \in M_{p \times 1}(\mathbb{R}) \right\}$$

e denotaremos por $X = (a; b)$ a um elemento genérico de $\mathfrak{so}(p, 1)$ com $a \in \mathfrak{so}(p)$ e $b \in M_{p \times 1}(\mathbb{R})$. A componente conexa da identidade $SO_0(p, 1)$ do grupo $SO(p, 1)$ tem como álgebra de Lie $\mathfrak{so}(p, 1)$ e portanto é semi-simples. Fixemos $H = (0; c)$ com $c^t = (1, 0, \dots, 0)$ e consideremos a subálgebra abeliana $\mathfrak{a} = \text{ger}\{H\}$. Esta álgebra é maximal abeliana em \mathfrak{s} , daí que a semi-reta

$$\mathfrak{a}^+ = \{tH : t > 0\}$$

é uma câmara de Weyl positiva, e portanto determina um subgrupo parabólico minimal P_H . De fato, se $X = (a; b)$; a equação : $\text{ad}(H)X = \alpha(H)X$ fornece as relações

$$cb^t - bc^t = \alpha(H)a; \quad c^t a = \alpha(H)b^t; \quad c^t b = b^t c.$$

Isto é:

- Na primeira equação: $\alpha(H)$ vezes a primeira fila de $a = \tilde{b}_1^t = (0, b_2, \dots, b_p)$.
- Na segunda equação: $\alpha(H)\tilde{b}_1^t =$ primeira fila de a .

Logo, comparando estes dois itens, obtemos que $\alpha(H)^2 \tilde{b}_1^t = \tilde{b}_1^t$, Mas $\tilde{b}_1^t \neq (0)$, e daí que $\alpha(H) = \pm 1$. Portanto, se $a = (a_{ij})$, $b^t = (b_1, \dots, b_p)$ temos que $a_{ij} = 0$ para $i, j \geq 2$. Isto é,

$$X = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 0 \\ -a_{12} & 0 & \cdots & 0 & a_{12} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_{1p} & 0 & \cdots & 0 & a_{1p} \\ \hline 0 & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 0 \end{array} \right).$$

Se denotarmos este tipo de matrizes por $X = ([w]; w)$ com $w^t = (0, w_2, \dots, w_p)$, o espaço de raízes será:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{([w]; w) : [w] \in \mathfrak{so}(p)\},$$

e $\dim \mathfrak{g}_\alpha = p - 1$. Como 2α não é raiz, isso significa que $\Pi^+ = \{\alpha\}$ e $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{g}_\alpha$. Da mesma forma para a raiz $-\alpha$, o espaço correspondente é:

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{(-[w]; w) : [w] \in \mathfrak{so}(p)\}.$$

O centralizador de H em $\mathfrak{so}(p)$, denotado por \mathfrak{m}_H , é formado pelas matrizes

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2p} & 0 \\ 0 & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3,p-1} & a_{3p} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & -a_{2p} & -a_{3p} & \cdots & -a_{p-1,p} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se denotarmos este tipo de matrizes por $X = ([0; a]; 0)$, onde a matriz $[0; a] \in \mathfrak{so}(p)$ é tal que a primeira fila é nula obtém-se:

$$\mathfrak{m}_H = \{([0; a]; 0) : a \in \mathfrak{so}(p-1)\}.$$

Portanto, ao nível da álgebra de Lie a decomposição de Iwasawa será:

$$\mathfrak{so}(p, 1) = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

e a correspondente decomposição de Langlands da subálgebra parabólica minimal é

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_H \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Também, existe uma ação natural de $K = \mathrm{SO}(p)$ na parte simétrica \mathfrak{s} da decomposição de Cartan através da ação adjunta. Portanto, este age transitivamente sobre as $\mathrm{Ad}(K)$ -órbitas e em particular sobre a órbita

$$\mathcal{O}(H) = \mathrm{Ad}(\mathrm{SO}(p))H.$$

Por outro lado, o centralizador de H em $\mathrm{SO}(p)$ denotado por M_H coincide com $\mathrm{SO}(p-1)$ que é a isotropia em H . Portanto, a órbita

$$\mathcal{O}(H) \cong \mathrm{SO}(p)/\mathrm{SO}(p-1)$$

é uma esfera em \mathfrak{s} de raio $\sqrt{2(p-1)}$, em relação ao produto interno induzido pela forma de Cartan-Killing (C-K). Mais ainda, como no Lema 1.3.1 ou a Proposição 2.1 [5], $\mathcal{O}(H)$ é a única variedade flag maximal \mathbb{F}_H correspondente ao subgrupo parabólico minimal

$$P_H = M_H A_H N_H^+.$$

Em vista que o resultado central envolve segmentos de geodésicas minimais como sendo trajetórias de campos gradientes associados a certas funções altura e em relação a uma certa métrica (T-K), é necessário ter uma descrição para tal, e é o que será feito no que segue.

Lema 3.1.2 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{so}(p, 1)$. Então.*

$$\langle X, Y \rangle = (p - 1)\text{tr}(XY),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a forma de Cartan-Killing. Mais ainda, defina $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ por $\alpha(\cdot) = \langle \cdot, H_\alpha \rangle$. Então,

$$H_\alpha = \frac{1}{2(p-1)}H.$$

Demonstração: Pelo Lema de Schur podemos supor que

$$\langle X, Y \rangle = c \text{tr}(XY),$$

para uma constante $c \neq 0$. Daí, para o H fixado temos que

$$\langle H, H \rangle = c \text{tr}(H^2).$$

Por definição

$$\langle H, H \rangle = \sum_{\beta \in \Pi} d_\beta \beta(H)^2.$$

Como só existem as raízes $\Pi = \{\pm\alpha\}$, e $d_\alpha = p - 1$, e $\alpha(H) = 1$, temos que $\langle H, H \rangle = 2(p - 1)$. Por outro lado, cada $\tilde{H} \in \mathfrak{s}$ é da forma:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^t & 0 \end{pmatrix},$$

onde $b^t = (b_1, \dots, b_p)$. Mas $\text{tr}(b.b^t) = \|b\|^2$, logo

$$\begin{aligned} \text{tr}(\tilde{H}^2) &= \text{tr}(b.b^t) + \|b\|^2 \\ &= 2\|b\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, se $b^t = (1, 0, \dots, 0)$ temos que $\text{tr}(H^2) = 2$, o que munido a $\langle H, H \rangle = 2(p - 1)$ fornece a conclusão. Para a última parte, $H_\alpha = xH$, logo

$$1 = \alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle = x\langle H, H \rangle$$

e pela primeira parte $x = 1/2(p - 1)$. ■

Para a involução de Cartan θ consideremos os subespaços vetoriais $\mathfrak{k}_H, \mathfrak{s}_H$ que complementam \mathfrak{m} , \mathfrak{a} respectivamente; os quais foram definidos no capítulo 1 e [5] por

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_H &= \{X + \theta(X) : X = ([z]; z) \in \mathfrak{n}^+\} \\ &= \{([z]; 0) : [z] \in \mathfrak{so}(p)\} \end{aligned}$$

que satisfaz: $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{m}_H$, onde \mathfrak{m}_H é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} . Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_H &= \{X - \theta(X) : X = ([z]; z) \in \mathfrak{n}^+\} \\ &= \{(0; [z^\circ]) : [z^\circ]^t = (0, z_2, \dots, z_p)\}\end{aligned}$$

satisfaz $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_H \oplus \mathfrak{a}$. Associado a estes subespaços vetoriais temos os isomorfismos:

$$\begin{aligned}\varphi_H : \mathfrak{n}^+ &\longrightarrow \mathfrak{k}_H \quad \text{tal que} \quad \varphi_H([z]; z) = 2([z]; 0), \\ \psi_H : \mathfrak{n}^+ &\longrightarrow \mathfrak{s}_H \quad \text{tal que} \quad \psi_H([z]; z) = 2(0; [z^\circ]).\end{aligned}$$

Daí que o isomorfismo

$$\varphi = \psi_H \circ \varphi_H^{-1} : \mathfrak{k}_H \longrightarrow \mathfrak{s}_H$$

é dado por,

$$\varphi([z]; 0) = (0; [z^\circ]).$$

Isto pode ser estendido para \mathfrak{k} como sendo a transformação nula sobre \mathfrak{m}_H . Por outro lado, para $X = (a; 0)$ com $a = (a_{ij})$, um cálculo direto mostra que

$$\text{ad}(X)H = (0; [z^\circ]) \in \mathfrak{s}_H, \quad \text{onde} \quad [z^\circ]^t = (0, a_{12}, \dots, a_{1p}).$$

Portanto, o espaço tangente à órbita em H é

$$T_H(\mathcal{O}(H)) = \{(0; [z^\circ]) \in \mathfrak{s} : [z^\circ]^t = (0, z_2, \dots, z_p)\} = \mathfrak{s}_H.$$

Com a finalidade de fixar notação, consideremos a decomposição de Cartan canônica de $\text{SO}_0(p, 1)$. Isto é,

$$\text{SO}_0(p, 1) = \text{SO}(p) \exp(\mathfrak{s}).$$

E como foi dito anteriormente, $\text{SO}(p)$ age transitivamente sobre a órbita $\mathcal{O}(H)$ através da adjunta Ad . Logo, para um elemento genérico

$$X = (a; 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $a = (a_{ij})$ temos que o campo induzido \tilde{X} avaliado em $H = (0; c)$, $c^t = (1, 0, \dots, 0)$, é dado por:

$$\tilde{X}(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{1p} \\ 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1p} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Devido a isto, denotaremos dito elemento (3.1) por $\tilde{X}(H) = (0; [z^\circ])$, onde $[z^\circ]^t = (0, a_{12}, \dots, a_{1p})$ a um elemento genérico de $T_H\mathcal{O}(H)$.

Lema 3.1.3 Dados $[z^\circ]^t = (0, z_2, \dots, z_p)$ e $[w^\circ]^t = (0, w_2, \dots, w_p)$ sejam $\tilde{X}(H) = (0; [z^\circ])$ e $\tilde{Y}(H) = (0; [w^\circ])$ em $T_H\mathcal{O}(H)$. Então

$$(\tilde{X}(H), \tilde{Y}(H))_H = 2(p-1)(z_2w_2 + \dots + z_pw_p),$$

onde o primeiro produto interno é a métrica de T-K no espaço tangente a H.

Demonstração: Pela forma como foi definida a métrica em H e o Lema 3.1.2 obtém-se

$$\begin{aligned} (\tilde{X}(H), \tilde{Y}(H))_H &= \langle H, [X, \varphi(Y)] \rangle \\ &= \langle H, [X, \varphi(\text{proj}_{\mathfrak{t}_H}(Y))] \rangle \\ &= (p-1)\text{tr}(H[X, \varphi(\text{proj}_{\mathfrak{t}_H}(Y))]). \end{aligned}$$

Mas, $\varphi(\text{proj}_{\mathfrak{t}_H}(Y)) = (0; [w^\circ])$. Assim,

$$H[X, (0; [w^\circ])] = \begin{pmatrix} z_2w_2 + \dots + z_pw_p & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & z_2w_2 + \dots + z_pw_p \end{pmatrix}$$

e

$$\text{tr}(H[X, (0; [w^\circ])]) = 2(z_2w_2 + \dots + z_pw_p).$$

Portanto,

$$(\tilde{X}(H), \tilde{Y}(H))_H = 2(p-1)(z_2w_2 + \dots + z_pw_p). \quad \blacksquare$$

Observação: Como no capítulo 1 a métrica definida em qualquer outro ponto é obtida por translação daquela dada em H através da ação, de tal forma que o grupo $K = \text{SO}(p)$ age por isometrias sobre dita variedade flag. Em vista disto, tal métrica é a restrição da forma de Cartan-Killing fornecida pelo Lema 3.1.2 e portanto, a menos de um múltiplo constante, é a restrição da métrica canônica definida em \mathfrak{s} .

Dado $H_1 \in \mathfrak{s}$, é possível considerar a distância de $z = \text{Ad}(u)H \in \mathcal{O}(H)$ ao complemento ortogonal H_1^\perp em relação à forma de C-K. Isto nos fornece, a menos de um múltiplo constante, as funções altura definidas por:

$$f_{H_1, H}(\text{Ad}(u)H) = \langle H_1, \text{Ad}(u)H \rangle.$$

Sua diferencial em $z = \text{Ad}(u)H$ é dada por:

$$(df_{H_1, H})_z([X, \text{Ad}(u)H]) = \langle H_1, [X, \text{Ad}(u)H] \rangle,$$

onde

$$T_z\mathcal{O}(H) = \{[X, \text{Ad}(u)H] : X \in \mathfrak{so}(p)\}.$$

Daí que os pontos críticos de $f_{H_1, H}$ são $\pm H_1/\|H_1\|$. Portanto, são singularidades do campo $\text{grad} f_{H_1, H}$, com $H_1/\|H_1\|$ atrator e $-H_1/\|H_1\|$ repulsor. Em vista disso são pontos de estabilidade e instabilidade assintótica, respectivamente. O campo gradiente satisfaz:

$$\text{grad} f_{H_1, H}(X) = \left(\text{proj}_{T_x \mathcal{O}(H)}(H_1) \right) / \|H_1\|.$$

As funções $f_{H_1, H}$ são restrições das funções altura definidas em \mathfrak{s} em relação ao hiperplano $\mathbb{H} = H_1^\perp$. Daí que, se $c = f_{H_1, H}(z)$ é um valor regular, então $f_{H_1, H}^{-1}(c)$ é uma variedade de nível transversal ao campo $\text{grad} f_{H_1, H}$ já que

$$T_z f_{H_1, H}^{-1}(c) = \{w \in T_z \mathcal{O}(H) : \langle w, \text{grad} f_{H_1, H}(z) \rangle = 0\}.$$

Portanto, as trajetórias do campo gradiente que passam por z , são segmentos de geodésicas minimais que passam por $\pm H_1/\|H_1\|$ e contém z no interior. Por sua vez, as variedades estáveis e instáveis são :

$$\mathcal{O}(H) - \{-H_1/\|H_1\|\} \text{ e } \mathcal{O}(H) - \{H_1/\|H_1\|\},$$

respectivamente.

3.2 Relação entre duas métricas

Seja $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, uma decomposição de Cartan. Fixado $H \in \mathfrak{s}$ da mesma forma que na seção anterior, obtém-se uma variedade flag $\mathbb{F}_H = G/P_H$ mergulhado em \mathfrak{s} com $G = \text{SO}_0(p, 1)$. O dito mergulho identifica \mathbb{F}_H com a órbita $\mathcal{O}(H) = \text{Ad}(K)H$ através da aplicação

$$\alpha : \mathbb{F}_H \longrightarrow \text{Ad}(K)H$$

definida por $\alpha(gP_H) = \text{Ad}(k(g))H$, onde P_H é a origem de $\mathbb{F}_H \cong K/M_H$ (veja o capítulo 0). Para cada $H' \in \text{Ad}(K)H$ existe uma identificação diferente de $\mathbb{F}_{H'}$. No entanto, a métrica Riemanniana induzida em $\mathbb{F}_{H'}$ não depende do ponto base tomado para a identificação. Suponha que, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{s}_1$ seja uma nova decomposição de Cartan. Pela teoria das álgebras de Lie existe um automorfismo interno ϕ de \mathfrak{g}_0 tal que $\mathfrak{k}_1 = \phi(\mathfrak{k})$ e $\mathfrak{s}_1 = \phi(\mathfrak{s})$. Como \mathfrak{g}_0 é semi-simples e G é conexo, o grupo dos automorfismos internos é $\text{Ad}(G)$. Isso implica que $\phi = \text{Ad}(g)$ para algum $g \in G$. Seja $G = KS = SK$ a decomposição global correspondente a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Segue-se que $g = hu$ com $h \in S$ e $u \in K$. Mas $\text{Ad}(u)\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$ e $\text{Ad}(u)\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$. Portanto

$$\mathfrak{k}_1 = \text{Ad}(h)\mathfrak{k} \quad \mathfrak{s}_1 = \text{Ad}(h)\mathfrak{s}$$

Se $K_1 = \exp(\mathfrak{k}_1)$ temos que $K_1 = hKh^{-1}$, pois $\mathfrak{k}_1 = \text{Ad}(h)\mathfrak{k}$. As órbitas de $\text{Ad}(K_1)$ em \mathfrak{s}_1 também se identificam com \mathbb{F} , determinando da mesma forma métricas Riemannianas em \mathbb{F} . O objetivo é relacionar as métricas definidas por \mathfrak{s} e \mathfrak{s}_1 . Se $h \in S$ é como acima

então $h = \exp(H)$ para um único $H \in \mathfrak{s}$. Como $h.H = H$, $H \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}_1$ e \mathbb{F}_H se identifica com as órbitas $K.H$ e $K_1.H$ via aplicações

$$\alpha : \mathbb{F}_H \longrightarrow K.H \quad e \quad \beta : \mathbb{F}_H \longrightarrow K_1.H,$$

ambas com ponto base H . Explicitamente, $\alpha(b) = k(g).H$ se $b = gb_0$, $k(g) \in K$ e $\beta(b) = k_1(g).H$ se $b = gb_0$ onde b_0 é a origem de G/P_H que é ponto base comum para as duas órbitas. Como

$$hkH = (hkh^{-1})hH = (hkh^{-1})H,$$

$\text{Ad}(h)$ leva a órbita $K.H$ na órbita $K_1.H$. Compondo essa aplicação entre as órbitas, α e β^{-1} se obtém

$$\beta^{-1} \circ \text{Ad}(h) \circ \alpha : \mathbb{F}_H \longrightarrow \mathbb{F}_H.$$

Proposição 3.2.1 *Com as notações estabelecidas acima, temos que*

$$\beta^{-1} \circ \text{Ad}(h) \circ \alpha = h,$$

onde h no segundo membro significa a aplicação induzida no espaço homogêneo $\mathbb{F}_H = G/P_H$.

Demonstração: Seja $b = gb_0 \in \mathbb{F}_H$ com $g \in G$. Então $\alpha(b) = k(g)H$. Portanto,

$$\text{Ad}(h) \circ \alpha(b) = hk(g)h^{-1}.H$$

e daí que $\beta^{-1} \circ h \circ \alpha(b) = hk(g)h^{-1}b_0$ pela definição de β . Mas b_0 é ponto fixo de h pois b_0 é a origem de G/P_H . Portanto,

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \circ \text{Ad}(h) \circ \alpha(b) &= \beta^{-1}(hk(g)h^{-1}.H) \\ &= hgh^{-1}b_0 \\ &= hb, \end{aligned}$$

já que $gb_0 = b$. ■

Corolário 3.2.2 *Mantendo as mesmas notações, seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ a métrica Riemanniana induzida em \mathbb{F} pela identificação com $K.H \subset \mathfrak{s}$. Seja também $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}_1}$ a métrica induzida por $K_1.H$. Então $\langle u, v \rangle_{\mathfrak{s}_1} = \langle h_*u, h_*v \rangle_{\mathfrak{s}}$ para vetores tangentes u, v , onde h_* denota a diferencial de h .*

Demonstração: É consequência da proposição anterior, do fato que $\text{Ad}(h)(K.H) = K_1.H$ e de que $\text{Ad}(h)$ deixa invariante a forma de Cartan-Killing. ■

Corolário 3.2.3 *Se $\mathfrak{s}_1 = h\mathfrak{s}$ então toda geodésica de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}_1}$ é da forma $h\gamma$ com γ geodésica de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$.*

Demonstração: É consequência imediata do corolário anterior. ■

3.3 Realização Canônica da parte simétrica

Na seção anterior o grupo $SO_0(p, 1)$ foi realizado canonicamente como sendo o grupo das matrizes $(p + 1) \times (p + 1)$ que deixam invariante a forma bilinear B cuja matriz associada é $I_{p,1} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1)$ na base canônica $\beta = \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}\}$. Também a decomposição de Cartan canônica do $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{so}(p, 1)$ foi dada por:

$$\mathfrak{k} = \{(a; 0) : a \in \mathfrak{so}(p)\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{s} = \{(0; b) : b^t \in \mathbb{R}^p\}$$

A forma quadrática Q associada a B divide \mathbb{R}^{p+1} em três regiões:

1. $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{R}^{p+1} : Q(z) = 0\}$,
2. $\Omega_+ = \{z \in \mathbb{R}^{p+1} : Q(z) > 0\}$,
3. $\Omega_- = \{z \in \mathbb{R}^{p+1} : Q(z) < 0\}$.

Essas regiões correspondem a um cone circular de duas folhas, interior do cone e exterior do cone respectivamente. Por definição $SO(p, 1)$ deixa invariante todas as regiões. Além do mais a reta gerada por e_{p+1} é o centro do cone e é invariante sob K já que $Q(e_{p+1}) > 0$. Seja $\mathbb{H} = \mathbb{R}^p$ o hiperplano gerado pelos primeiros p elementos da base. A restrição de $-B$ ao \mathbb{H} é o produto interno canônico em \mathbb{R}^p e temos o

Lema 3.3.1 *O hiperplano \mathbb{H} é K -invariante e se identifica com \mathfrak{s} de tal forma que as representações adjunta e canônica de $K = SO(p)$ são equivalentes.*

Demonstração: Seja $P : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathfrak{s}$ a identificação dada por $P(b^t) = (0; b)$, $b^t = (b_1, \dots, b_p)$ e a K -invariança de \mathfrak{s} fornece a de \mathbb{H} módulo a identificação P . Se denotarmos por $\tilde{\rho} : K \rightarrow GL(p, \mathbb{R})$ tal que $\tilde{\rho}(u)b^t = (ab)^t$ com $u = (a; 1)$ e $\rho = \text{Ad} : K \rightarrow GL(\mathfrak{s})$ temos que

$$\begin{aligned} (\rho(u) \circ P)(b^t) &= \rho(u)(0; b) \\ &= (0; ab) \end{aligned}$$

e por sua vez, o outro membro é dado por:

$$\begin{aligned} (P \circ \tilde{\rho}(u))(b^t) &= P((ab)^t) \\ &= (0; ab), \end{aligned}$$

de onde segue a conclusão. ■

Devido à identificação P , cada $b^t \cong h = (0; b)$ e portanto como a transformação linear tem autovalores 0 e $\pm \|b\|$ com auto-espacos: $(b^t)^\perp \subset \mathbb{R}^p$ o núcleo, $V_+ = \text{ger}\{b^t + \|b^t\|e_{p+1}\}$ associado a $\|b^t\|$ e $V_- = \text{ger}\{-b^t + \|b^t\|e_{p+1}\}$ associado a $-\|b^t\|$. Os dois últimos vetores são atrator, repulsor de h respectivamente; são simétricos em relação a e_{p+1} e pertencem a Ω_0 .

Corolário 3.3.2 *Seja $h \in S$ e $\mathfrak{s}_1 = h\mathfrak{s}$, $\mathfrak{k}_1 = h\mathfrak{k}$ uma outra decomposição de Cartan. Seja também $\mathbb{H}_1 = h\mathbb{H}$ o hiperplano de \mathbb{R}^{p+1} . Então a representação de K_1 em \mathbb{H}_1 é equivalente à representação adjunta de K_1 em \mathfrak{s}_1 .*

Demonstração: A identificação $\tilde{P} : \mathbb{H}_1 \longrightarrow \mathfrak{s}_1$ é dada pela aplicação induzida de P , isto é $\tilde{P}(h(b^t)) = \text{Ad}(h)(P(b^t))$, onde $h(b^t) = (hb)^t$. Por outro lado, para $\tilde{\rho}_1 : K_1 \longrightarrow \text{GL}(p, \mathbb{R})$, $\tilde{\rho}_1(u_1)(h(b^t)) = hu_1(b^t)$ com $u_1 = hah^{-1}$ e $\rho_1 = \text{Ad} : K_1 \longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{s}_1)$ temos que

$$\begin{aligned} (\rho_1(u_1) \circ \tilde{P})(h(b^t)) &= \rho_1(u_1)(\text{Ad}(h)P(b^t)) \\ &= \text{Ad}(hu)((0; b)) \end{aligned}$$

e por sua vez, o outro membro é dado por:

$$\begin{aligned} (\tilde{P} \circ \tilde{\rho}_1(u_1))(h(b^t)) &= \tilde{P}(hu(b^t)) \\ &= \text{Ad}(h)(P(u(b^t))) \\ &= \text{Ad}(hu)(P(b^t)) \\ &= \text{Ad}(hu)((0; b)). \end{aligned}$$

Portanto, a conclusão é válida. ■

Observação: A forma de C-K restrita a \mathfrak{s}_1 é equivalente ao produto interno dado pela restrição de $-B$ a \mathbb{H}_1 .

3.4 Sobre a Conexidade de Semigrupos

Definição 3.4.1 (a) *Um subconjunto $C \subset \mathbb{F}_s$ é chamado geodesicamente convexo no sentido amplo (estrito) se para quaisquer pontos $x, y \in C$, ao menos um dos segmentos de geodésica $\gamma_{x,y}$ ligando-os é tal que $\gamma_{x,y} \cap C$ é conexo, (o segmento de geodésica minimal $\gamma_{x,y}$ que os liga está contido em C).*

(b) *Se $C \subset \mathbb{F}_s$ é um subconjunto convexo no sentido amplo ou estrito, então:*

(b₁) O ponto $x \in C$ é dito extremal, se não existe segmento de geodésica γ contido em C tal que x esteja no interior de γ .

(b₂) Caso contrário o ponto será dito não extremal.

Ao respeito, temos a seguinte

Observação: A conexidade de $\gamma_{x,y} \cap C$ dada na parte (a) da definição, permite concluir que $\gamma_{x,y} \subset C$. Pois, suponhamos que $\gamma_{x,y}(a) = x$, $\gamma_{x,y}(b) = y$ e $\gamma_{x,y} \not\subset C$, então existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $\gamma_{x,y}(t_0) \notin C$. Mais ainda, existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma_{x,y}(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset C^c$. Portanto, pela condição de conexidade temos que

$$\gamma_{x,y} \cap C \subset \gamma_{x,y}([a, t_0 - \epsilon]) \quad \text{ou} \quad \gamma_{x,y} \cap C \subset \gamma_{x,y}([t_0 + \epsilon, b])$$

o qual é um absurdo. Por outro lado, dado $z \in \mathfrak{s}$, denotemos por \mathbb{H}_{z^\perp} o semi-espaço contido em \mathfrak{s} determinado pelo hiperplano z^\perp , onde a ortogonalidade é dada em relação ao produto interno induzido pela forma C-K. Se $C \subset \mathbb{H}_{z^\perp} \cap \mathbb{F}_\mathfrak{s}$, então convexidade no sentido amplo e estrito coincidem.

Lema 3.4.2 *Seja $C \subset \mathbb{F}_\mathfrak{s}$ um subconjunto convexo tal que $C \subset \mathbb{H}_{z^\perp}$ para algum $z \in \mathfrak{s}$. Então o conjunto $W = \mathbb{R}^+ C$ é um cone.*

Demonstração: Dados $\tilde{x} = rx$, $\tilde{y} = sy$, com $x, y \in C$, $r, s > 0$; existe uma geodésica minimal $\gamma_{x,y}$ ligando-os. Se $y = -x$, então $\tilde{x} + \tilde{y} = (r-s)x$ onde $r-s > 0$ ou $r-s < 0$. No primeiro caso $\tilde{x} + \tilde{y} \in W$ e no segundo $\tilde{x} + \tilde{y} = -(r-s)(-x) \in W$. Se $y \neq -x$ o segmento $\gamma_{x,y} \subset \text{ger}\{x, y\}$, portanto $r' \cdot (x+y) = \gamma_{x,y}(t_0)$, $t_0 \in \text{dom } \gamma_{x,y}$ e $x+y \in W$. Claramente $\mathbb{R}^+ W \subseteq W$. ■

Para cada elemento $x \in W$, associamos a função altura $f_x : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = \langle x, y \rangle$, cujos campos gradientes são dados por: $\text{grad } f_x(y) = \text{proj}_{T_x \mathbb{F}_\mathfrak{s}}(y)$. Se denotarmos por:

$$\Sigma = \{\text{grad } f_x : x \in W\}$$

obtemos o grupo gerado pelos fluxos

$$G_\Sigma = \{(\text{grad } f_{x^1})_{t_1} \circ \cdots \circ (\text{grad } f_{x^k})_{t_k} : t_i \in \mathbb{R}, x^i \in W\}. \quad (3.2)$$

Mas, os difeomorfismos fornecidos pelos fluxos de campos gradientes são dados por:

$$(\text{grad } f_x)_t = (\text{grad } f_{tx})_1. \quad (3.3)$$

Portanto, G_Σ coincide com o grupo gerado pelos fluxos dos campos gradientes de funções altura, correspondentes a elementos de $C_\mathfrak{s}$.

Lema 3.4.3 *O grupo G_Σ age transitivamente sobre $\mathbb{F}_\mathfrak{s}$.*

Demonstração: Tudo depende de mostrar que as órbitas $G_\Sigma(x)$ para $x \in \mathbb{F}_\mathfrak{s}$ são subvariedades abertas, daí usando a conexidade do $\mathbb{F}_\mathfrak{s}$ obtém-se a conclusão. Sendo assim, para cada $x \in \text{int} C_\mathfrak{s}$, é possível encontrar uma bola aberta $B(x, r)$ tal que $\overline{B}(x, r) \subseteq C_\mathfrak{s}$. Daí, tomando $(\text{grad } f_z)_t(x)$ com $z \in \text{Fr}(\overline{B}(x, r))$, consegue-se colocar um aberto na órbita. Para $x \in \text{ext} C_\mathfrak{s}$, seja a bola aberta $B(y, r)$ tal que $\overline{B}(y, r) \subset C_\mathfrak{s}$ e considere $(\text{grad } f_z)_t(x)$ com $z \in \text{Fr}(\overline{B}(y, r))$. Estes fatos, junto ao primeiro argumento mostram que $\text{int} G_\Sigma(x) \neq \emptyset$. Para $x \in \text{Fr}(C_\mathfrak{s})$, tome uma bola aberta $B(y, r)$ tal que $z \in B(y, r) \cap \text{int} C_\mathfrak{s}$ e a mesma idéia funciona com $(\text{grad } f_z)_t(x)$. Portanto, as dimensões de $\mathbb{F}_\mathfrak{s}$ e das órbitas que são subvariedades quase-regulares coincidem. ■

A relação (3.3), permite considerar o semigrupo gerado pelos fluxos de campos gradientes associados às funções f_x , com $x \in C = C_\mathfrak{s}$, e que não faz diferença tomar $x \in W$. Isto é

$$S_\Sigma = \left\{ (\text{grad } f_{x^1})_{t_1} \circ \cdots \circ (\text{grad } f_{x^k})_{t_k} : t_i > 0, x^i \in C \right\}.$$

Se formula o

Lema 3.4.4 *O semigrupo S_Σ , tem interior não vazio e $C(S_\Sigma) = C$.*

Demonstração: Em geral, para cada $x \in \mathfrak{s}$ o campo induzido \tilde{x} pela ação φ do grupo $SO_0(p, 1)$ que torna $\mathbb{F}_\mathfrak{s}$ num espaço homogêneo, satisfaz $\tilde{x} = \text{grad } f_x$ (veja Proposição 0.3.3 ou [5]). Em vista de que $\text{int}C \neq \emptyset$ em \mathfrak{s} , temos que:

$$\mathfrak{s} = \text{ger}(C) = \text{ger}\{E_{i,p+1} + E_{p+1,i} : 1 \leq i \leq p\},$$

onde E_{ij} denota a matriz com termo não nulo igual a um na entrada i, j e zero nas demais. Pelas propriedades da decomposição de Cartan, o colchete satisfaz

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{so}(p)$$

e

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(p) &= \text{ger}\{[E_{i,p+1} + E_{p+1,i}, E_{i+j,p+1} + E_{p+1,i+j}] : 1 \leq i \leq p, i \leq i+j \leq p\} \\ &= \text{ger}\{E_{i,i+j} - E_{j+i,i} : 1 \leq i \leq p, i \leq i+j \leq p\}. \end{aligned}$$

Ou seja, $AL(C) = \mathfrak{so}(p, 1)$ e o semigrupo $S(C)$ gerado pelos fluxos em tempo positivo dos campos invariantes contidos em C tem interior não vazio, e pelos comentários no início da prova tem-se

$$\begin{aligned} S(C) &= \{\exp(t_1 x_1) \dots \exp(t_k x_k) : t_i > 0, x_i \in C\} \\ &\cong \{\varphi_{\exp t_1 x_1} \circ \dots \circ \varphi_{\exp t_k x_k} : t_i > 0, x_i \in C\} \\ &= \{(\text{grad } f_{x_1})_{t_1} \circ \dots \circ (\text{grad } f_{x_k})_{t_k} : t_i > 0, x_i \in C\} \\ &= S_\Sigma. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{int}S_\Sigma \neq \emptyset$. Por outro lado, como C é convexo, então é invariante sob S_Σ e pela primeira parte $C(S_\Sigma) \subseteq C$. A inclusão recíproca é consequência de tomar $x, y \in C$ e de considerar dois fatos: $y \neq -x$ ou $y = -x$. No primeiro caso

$$x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{grad } f_x)_t(y) \in \text{fe}S_\Sigma \cdot x;$$

e no outro caso $\pm x \in \text{Fr}C$, daí que é possível tomar algum $z \in \text{int}C$ e para um $t_0 > 0$ fixo, temos:

$$x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tx) \exp(t_0 z)(-x).$$

Mas $\exp tx, \exp t_0 z \in S_\Sigma$. Portanto, $x \in \text{fe}S_\Sigma \cdot (-x)$. ■

Se denotarmos por S_{inf} ao semigrupo gerado pela imagem do cone $L(S_C)$ via aplicação exponencial, obtemos o

Corolário 3.4.5 *O semigrupo S_{inf} tem interior não vazio e $C(S_{\text{inf}}) = C$.*

Demonstração: É só usar a relação $(\text{grad}f_x)_t = \exp tx$, para obter $S_\Sigma \subseteq S_{inf} \subseteq S_C$. Portanto, $C \subseteq \text{fe}S_{inf-x} \subseteq C$ para cada $x \in C$. ■

Fixemos uma decomposição de Cartan, infinitesimal e global, $\mathfrak{so}(p, 1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ e $\text{SO}_0(p, 1) = K \cdot \exp \mathfrak{s}$ respectivamente. Tomemos a variedade flag $\mathbb{F}_s \cong \text{Ad}(K)H_s$ e o cone de Lie $L(S_C)$ associado ao semigrupo maximal S_C . Então o conjunto $W_s = L(S_C) \cap \mathfrak{s}$ é ainda um cone, podendo acontecer as seguintes possibilidades:

- $W_s = (0)$
- W_s pontual.
- W_s não pontual.

Sendo assim, podemos observar que tudo depende da localização da parte simétrica \mathfrak{s} em relação ao cone $L(S_C)$. Suponhamos que $W_s \neq (0)$, então para o $H(W_s) = W_s \cap -W_s$ temos que este é o trivial ou não. Neste último caso dão-se as seguintes situações:

- Se $\dim H(W_s) = 1$, então $H(W_s) \cap \mathbb{F}_s = \{x, -x\}$ é desconexo.
- Se $\dim H(W_s) = k$, então $H(W_s) \cap \mathbb{F}_s = S^{k-1}$ (esfera de dimensão $k - 1$) é conexo.

Mas, $\dim \mathfrak{s} = p$ e $H(W_s) \subset \mathfrak{s}$, daí que $\dim H(W_s) \leq p$. Se $\dim H(W_s) = p$, temos que $H(W_s) = \mathfrak{s}$. Portanto, essa situação não deve ser tomada em conta.

Seja $W_s \neq (0)$, $\dim H(W_s) = k$, $0 \leq k < p$. Então $C_s = W_s \cap \mathbb{F}_s$ no máximo poderia ser uma semi-esfera, cujo bordo $\text{Fr}C_s = S^{k-2} = H(W_s) \cap \mathbb{F}_s$. Nos outros casos; $\text{Fr}C_s \supseteq S^{k-i}$, $3 \leq i$ pode não ser subvariedade e vai depender da natureza do cone $L(S_C)$.

Lema 3.4.6 *O conjunto $C_s = L(S_C) \cap \mathbb{F}_s$ como nos comentários feitos acima é convexo e está contido em C .*

Demonstração: Primeiro observamos que $C_s \subset C$; porque dado $x \in C_s$, é possível escolher $y \in C$, $y \neq -x$ e portanto

$$x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{grad}f_x)_t(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp tx)y \in C$$

Agora tomamos $x, y \in C_s$, então $y \neq -x$ ou $y = -x$. No primeiro caso, o cone $\tilde{W}_s = \text{ger}\{x, y\} \subseteq W_s$, mas $\tilde{W}_s \cap \mathbb{F}_s \subset L(S_C) \cap \mathbb{F}_s$ é o segmento de geodésica ligando x, y e portanto, a conclusão é válida. Para o segundo caso, basta tomar $z \neq \pm x$ em C_s e repetir o argumento de acima com os elementos x, z e z, y e concluir do fato que por x, y, z passa uma única geodésica. Um argumento alternativo seria; tomar $\text{int}C_s$ e

usar o fato que este não contém pontos antipodais, porque eles estão localizados na fronteira $\text{Fr}C_s$ e concluir que este é convexo para depois estender isto ao $\text{fe}(\text{int}C_s) = C_s$.

■

Seja θ a involução de Cartan associada à decomposição dada acima. Logo para $(a; b) \in \mathfrak{so}(p, 1)$ temos que $\theta(a; b) = (a, -b)$. Mas $(a; b)^t = (-a; b)$. Portanto, a involução θ_1 definida por $\theta_1 = -\theta$, satisfaz:

$$\theta_1(a; b) = (a; b)^t$$

e é um anti-automorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(p, 1)$. Em vista disso e o que provaremos a seguir, consideramos a seguinte:

Definição 3.4.7 *Um subconjunto $C \subset \mathbb{F}$ é dito geodesicamente estrelado em $x \in C$ se, para cada $y \in C$, ao menos um dos segmentos de geodésica ligando eles $\gamma_{x,y}$ intercepta C num conjunto conexo. Isto é, $\gamma_{x,y} \cap C$ é conexo.*

Dito isso, podemos formular o seguinte

Lema 3.4.8 *Suponhamos que θ_1 deixa invariante ao cone de Lie $L(S_C)$. Então para cada $g \in S_C$, existe $\tilde{g} \in S_{\text{inf}}$. Mais ainda, o conjunto de controle C é estrelado nas projeções radiais de elementos de $L(S_C) \cap \mathfrak{s}$.*

Demonstração: Seja $\text{proj}_s : \mathfrak{so}(p, 1) \rightarrow \mathfrak{s}$ a projeção de $\mathfrak{so}(p, 1)$ na parte simétrica. Segue-se que

$$\text{proj}_s(L(S_C)) = L(S_C) \cap \mathfrak{s}.$$

Pois, se $z = (a; b) \in L(S_C)$, temos que $\theta_1(z) \in L(S_C)$ e

$$(0; b) = \frac{1}{2}(z + \theta_1(z)).$$

Daí que $(0; b) = \text{proj}_s(z) \in L(S_C)$; a outra inclusão é imediata. Sendo assim, cada elemento $g \in S_C$ pode ser escrito como

$$g = \exp(z_1) \dots \exp(z_k)$$

com $z_i \in \mathfrak{so}(p, 1)$. Mas $L(S_C)$ é um conjunto convexo e fechado. Daí, para cada z_i na decomposição de g , existe um único $\tilde{z}_i \in L(S_C)$ tal que:

$$\|z_i - \tilde{z}_i\| \leq \inf\{\|z_i - z\| : z \in L(S_C)\}.$$

Assim, isto fornece um elemento

$$g_1 = \exp(\tilde{z}_1) \dots \exp(\tilde{z}_k),$$

onde $\tilde{z}_i = (a_i; b_i) \in L(S_C)$. Portanto, o elemento procurado é

$$\tilde{g} = \exp(y_1) \dots \exp(y_k),$$

onde $y_i = (0; b_i) = \text{proj}_s(\tilde{z}_i)$. Mais ainda, $y_i \in L(S_C)$ e

$$(\text{grad } f_{y_i})_t \cdot C = \exp(ty_i) \cdot C \subset C \quad \forall t > 0$$

mostra que C é estrelado no conjunto $L(S_C) \cap \mathcal{O}(H)$. ■

Observação: A hipótese $\theta_1(L(S_C)) = L(S_C)$ é uma condição de simetria do cone de Lie $L(S_C)$ com relação à parte simétrica da decomposição de Cartan. Alias, se $\text{int}L(S_C) \neq \emptyset$, então a dita condição garante que $L(S_C) \cap \mathfrak{s} \neq (0)$ (poderia acontecer que $L(S_C) \subset \mathfrak{k}$).

Agora veremos a condição de simetria global do semigrupo compressão S_C . Para tal, $S_C^{-1} \subset S_{\text{fe}(C^c)}$, logo o conjunto de controle invariante $C(S_C^{-1}) \subset \text{fe}(C^c)$. Mas, se S_C for maximal, S_C^{-1} também é maximal, de onde $C(S_C^{-1}) = \text{fe}(C^c)$. Dito isso, seja $\tilde{\theta}$ a involução de Cartan global correspondente a θ . Logo para cada $g = uh$, $u \in \text{SO}(p)$, $h \in \exp(\mathfrak{s})$ temos que

$$\tilde{\theta}(g) = uh^{-1}.$$

Se denotamos por $\tilde{\theta}_1$ o anti-automorfismo global correspondente a θ_1 , segue-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(g) &= \left(\tilde{\theta}(g) \right)^{-1} \\ &= g^t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\theta}_1(S_C) = \left(\tilde{\theta}(S_C) \right)^{-1} = S_C^t.$$

Para ter uma descrição mais precisa de $\tilde{\theta}_1(S_C)$ como semigrupo compressão de algum outro conjunto de controle em outra variedade flag, consideramos a aplicação quociente

$$\pi : \text{SO}_0(p, 1) \longrightarrow \frac{\text{SO}_0(p, 1)}{P_H}$$

e o difeomorfismo

$$\bar{\theta} : \frac{\text{SO}_0(p, 1)}{P_H} \longrightarrow \frac{\text{SO}_0(p, 1)}{\tilde{\theta}(P_H)}$$

definido por $\bar{\theta}(gP_H) = \theta(g) \cdot \theta(P_H)$. Tais aplicações estão ligadas através das relações :

$$\pi \circ \theta = \bar{\theta} \circ \pi \quad \text{e} \quad \tilde{\theta}(g) \circ \bar{\theta} = \bar{\theta} \circ g$$

para cada $g \in \text{SO}_0(p, 1)$. Em vista disto, e da maximalidade de S_C temos que

$$\tilde{\theta}_1(S_C) = S_{\text{fe}(\bar{\theta}(C)^c)}$$

permite formular o seguinte

Lema 3.4.9 *Seja $g \in S_C$ tal que $g = uh$, $u \in \text{SO}(p)$ e $h \in \exp(\mathfrak{s})$. Suponhamos que $\tilde{\theta}_1(S_C) \subset S_C$. Então $h^2 \in S_C$.*

Demonstração: Para $g \in S_C$, temos que

$$\tilde{\theta}(g)(\bar{\theta}(C)) \subset \bar{\theta}(C) \quad \text{e} \quad \bar{\theta}(C) \subset g\bar{\theta}(C).$$

Segue-se que

$$g^{-1}\tilde{\theta}(g)(\bar{\theta}(C)) \subset \bar{\theta}(C).$$

mas $g^{-1} = \tilde{\theta}(hu^{-1})$. Daí, usando a relação $\tilde{\theta}(g) \circ \bar{\theta} = \bar{\theta} \circ g$ temos que

$$\bar{\theta}(h^2(C)) \subset \bar{\theta}(C).$$

Portanto, $h^2 \in S_C$. ■

Observação: A condição de simetria global se traduz em $\tilde{\theta}_1(g).g \in S_C$, pelo que $S \cap \exp(\mathfrak{s}) \neq \{e\}$. Seja $g = uh$, denotemos por $s(g) = h$ a projeção global de Cartan na parte simétrica, Então não sempre é possível obter que $h = s(g) \in S_C$.

Definição 3.4.10 *Seja G um grupo de Lie, $S \subset G$ um semigrupo e $A \subset G$ um subconjunto. Dizemos que S é reversível à esquerda (respectivamente à direita) em relação a A se $gS \cap S \neq \emptyset$ (resp. $S \cap Sg \neq \emptyset$) para cada $g \in A$. Equivalentemente, se $A \subseteq SS^{-1}$ (resp. $A \subseteq S^{-1}S$)*

Com relação a esta definição, tem-se o seguinte resultado que dá condições suficientes para obter conexidade para um certo semigrupo.

Proposição 3.4.11 *Sejam S_1, S_2 semigrupos de G tal que $S_1 \subset S_2$, S_1 reversível em relação a S_2 , $1 \in S_1$, S_1 conexo. Então S_2 é conexo.*

Demonstração: Pela reversibilidade temos que $gS_1 \cap S_1 \neq \emptyset$, para cada $g \in S_2$. Tomando a decomposição de S_2 em suas componentes conexas ($S_2 = \cup_i S^i$), a conexidade de S_1 diz que $S_1 \subseteq S^{i_0}$. Para $g, g' \in S_2$, temos $gS_1 \subset S^i$ e $g'S_1 \subset S^j$, mas

$$\emptyset \neq gS_1 \cap S_1 \subset gS_1 \cap S^{i_0},$$

segue-se que $gS_1 \subset S^{i_0}$ e $g'S_1 \subset S^{i_0}$; conseqüentemente,

$$\bigcup_{g \in S_2} gS_1 \subset S^{i_0}.$$

Por outro lado,

$$S_2 = \bigcup_{g \in S_2} gS_1 \subset S_1$$

pois $1 \in S_1$. Daí que

$$S_2 \subset S^{i_0} \subset S_2.$$

Portanto, S_2 é conexo. ■

Agora, fixemos um grupo de Lie de posto um com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan fixa, com a correspondente involução θ . Também, seja \mathfrak{a}_s uma subálgebra abeliana maximal, estendamos \mathfrak{a}_s para uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}_s$. Existe o seguinte resultado que será usado logo mais.

Proposição 3.4.12 *Seja $\tilde{\mathfrak{b}}$ uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Então existe um automorfismo $\varphi \in \text{Int}(\mathfrak{g})$ tal que $\mathfrak{b} = \varphi(\tilde{\mathfrak{b}})$ é θ -estável (isto é $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{b}_\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}_s$) com $\mathfrak{b}_s \subseteq \mathfrak{a}_s$.*

Demonstração: Veja Proposição 1.3.1.1 [28]. ■

Em vista disso, podemos localizar elementos do interior de semigrupos, nos subgrupos de isotropia.

Proposição 3.4.13 *Seja $S \subset G$ um semigrupo de interior não vazio. Então para cada $g \in \text{int}S$, existe um subgrupo parabólico $P(g)$ que o contém.*

Demonstração: Para $g \in \text{int}S$, tomemos sua decomposição de Jordan (veja Proposição 1.4.3.3 [28]):

$$g = g_s g_u, \tag{3.4}$$

onde:

- g_s semi-simples, isto é: $\text{Ad}(g_s)$ semi-simples.
- g_u unipotente, isto é: $\text{Ad}(g_u)$ unipotente.

Como a união de todos os subgrupos de Cartan é precisamente o conjunto dos elementos semi-simples, existe um subgrupo de Cartan $B \ni g_s$. Seja \mathfrak{b} a subálgebra de Cartan correspondente. Pela proposição 3.4.12 podemos tomar uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ tal que \mathfrak{b} seja estável sob a involução θ . Sendo assim:

$$B = Z_G(\mathfrak{b}) = \{g \in G : \text{Ad}(g)H = H, \forall H \in \mathfrak{b}\}$$

e

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{b}_\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}_s.$$

Daí, temos uma decomposição ao nível do subgrupo de Cartan; $B = B_K \cdot B_s$, onde $B_K = K \cap B$ e $B_s = \exp(\mathfrak{b}_s)$ (veja Proposição 1.4.1.2 [28]). Consequentemente

$$g = g_k h g_u, \tag{3.5}$$

onde $g_k \in B_K$, $h \in B_s$. Por outro lado é claro que $h \neq 1$. Caso contrário $g = g_k g_u$ e daí que é possível aproximar este elemento no $\text{int}S$ por $\tilde{g} = \tilde{g}_k g_u$ de tal forma que $\tilde{g}_k^n = 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$; sendo assim e devido a que $g_s g_u = g_u g_s$, $h = 1$ obtém-se que $\tilde{g}^n = g_u^n \in \text{int}S$ que é um elemento unipotente. Portanto, fazendo uso de $g_u = \exp(Y)$, $\text{ad}(Y)$ nilpotente e o Lema 4.1 [17] contradizemos ao fato do semigrupo ser próprio.. Com respeito à aproximação, esta decorre do fato que $g_k = \exp(X)$, X elemento compacto, daí que seus autovalores são imaginários puros, e sendo assim, os autovalores de g_k tem módulo um, e portanto podem ser aproximados por elementos \tilde{g}_k de tal forma que os argumentos de seus autovalores, sejam múltiplos racionais de π com módulo um. A idéia é mostrar que (3.5) se adapta em alguma decomposição de Langlands. Por isso, tomamos $h = \exp(H)$, $H \in \mathfrak{b}_s$ e $g_k \in K \cap B$. Se denotarmos $\mathfrak{a} = \text{ger}\{H\} \subset \mathfrak{s}$ (subálgebra abeliana maximal) temos que $g_k \in M$, o centralizador de \mathfrak{a} em K (pois $g_k \in K \cap B$). Para a localização do elemento g_u , usamos o fato dos grupos serem clássicos, o que permite olhar cada um deles num certo grupo linear $\text{GL}(m)$ com álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m)$ (para algum m apropriado) e aliás a aplicação exponencial é um difeomorfismo no domínio:

$$\Omega(\pi) = \{X \in \mathfrak{gl}(m) : |Im\lambda| < \pi, \forall \text{ autovalor } \lambda \text{ de } X\}$$

(ver Proposição 3 da parte II de [26]). Sendo assim, $g \in \text{GL}(m)$ se decompõe de maneira única como o produto de um elemento elíptico, hiperbólico e unipotente, comutando dois a dois, o que seria a decomposição dada em (3.5), pelo que $hg_u = g_u h$. Como g_u é inversível,

$$\text{spec}(H) = \text{spec}(g_u H g_u^{-1});$$

mas H é um elemento real semi-simples pela escolha feita, logo

$$\text{spec}(g_u H g_u^{-1}) = \text{spec}(H) \subset \mathbb{R}$$

fornece $g_u H g_u^{-1}$, $H \in \Omega(\pi)$ e como $\exp(g_u H g_u^{-1}) = \exp(H)$, $\text{Ad}(g_u)H = H$, então $g_u \in MA$, onde este último subgrupo fixa a câmara de Weyl positiva \mathfrak{a}^+ . Portanto,

$$g \in P(g) = M(g)A(g)N(g)^+.$$

o subgrupo parabólico procurado. ■

Agora enunciamos o seguinte resultado sobre reversibilidade, provado por Ruppert (veja [16]).

Lema 3.4.14 *Seja S um semigrupo de um grupo G e suponha que N é um subgrupo normal de G tal que SN/N é reversível à esquerda. Suponha que G_1 é um subgrupo de G contendo N e tal que $S_1 = S \cap G_1$ gera G_1 . Se S_1 é reversível à esquerda, então S é reversível à esquerda.*

Demonstração: Veja Lema 1.3 (ii) de [16]. ■

Uma variação do Lema 4.6 de [16] é o seguinte resultado.

Lema 3.4.15 *Suponhamos que G é um grupo de Lie solúvel e que o interior do semi-grupo $S \subset G$ contém um elemento $s = \exp(X)$ tal que $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ para cada autovalor λ de $\operatorname{ad}(X)$. Então S é reversível à esquerda.*

Demonstração: É só usar o fato de que $s = \exp(X) \in \operatorname{int} S$ como nas provas prévias ao Lema 4.6 de [16], já que nesse caso, o semigrupo é tomado como sendo aberto e somente é usado o fato topológico $s \in \operatorname{int} S$. Outro fato usado e que não depende da topologia do semigrupo ou seja do $\operatorname{int} S$, é o Lema 1.3 (ii) de [16]. ■

Agora faremos alguns comentários sobre conjugações das decomposições vistas antes. Para tal, temos que a partir de uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ e tomando uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{s}$ se obtém os espaços de raízes

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \operatorname{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Se Π denota o conjunto das raízes; é possível obter um sistema simples de raízes. Logo, definindo uma ordem lexicográfica em \mathfrak{a}^* , obtém-se o grupo nilpotente $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ e portanto, uma decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Se \mathfrak{m} denota o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} , então a subálgebra parabólica minimal correspondente é

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

A contraparte global de tudo isso é

$$G = KAN^+ \quad e \quad P = MAN^+,$$

onde $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$, $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$, M o centralizador de \mathfrak{a} em K . Isto é,

$$M = \{u \in K : \operatorname{Ad}(u)H = H, \forall h \in \mathfrak{a}\}.$$

O conjunto AN^+ é um subgrupo normal de P . De fato, a primeira parte decorre de que P é o normalizador de N^+ em G ; em particular A normaliza N^+ . Para ver a normalidade, tomemos $g = man \in P$, e daí

$$gAN^+g^{-1} = AmN^+m^{-1} = AN^+,$$

porque $m \in P$ e este normaliza N^+ . Para qualquer conjugação de P , por dizer: $I_g(P) = gPg^{-1}$ temos:

$$\tilde{A} = I_g(A) = \exp \left(\operatorname{Ad}(g)\mathfrak{a} \right).$$

Ao nível da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$, obtém-se em forma paralela:

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Pi} \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{g}_\alpha.$$

Desta forma, para $X \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$\text{Ad}(g)\left(\text{ad}(H)X\right) = \alpha(H)\text{Ad}(g)X;$$

logo, usando o fato de que $\text{Ad}(g)$ é um automorfismo segue que

$$\text{ad}\left(\text{Ad}(g)H\right)\left(\text{Ad}(g)X\right) = \left(\alpha \circ \text{Ad}(g^{-1})\right)\left(\text{Ad}(g)H\right)\text{Ad}(g)X.$$

Se denotarmos $\tilde{H} = \text{Ad}(g)H$, $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \text{Ad}(g^{-1})$, temos que:

$$\text{ad}(\tilde{H})\left(\text{Ad}(g)X\right) = \tilde{\alpha}(H)\text{Ad}(g)X.$$

Isto significa que

$$\text{Ad}(g)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}.$$

Portanto,

$$\mathfrak{g} = \text{Ad}(g)\mathfrak{k} \oplus \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^+ \quad \text{e} \quad \mathfrak{p} = \text{Ad}(g)\mathfrak{m} \oplus \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^+,$$

onde

$$\tilde{\mathfrak{n}}^+ = \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Pi}^+} \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \text{Ad}(g)\mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \tilde{\Pi}^+ = \{\alpha \circ \text{Ad}(g^{-1}) : \alpha \in \Pi^+\} = \text{Ad}(g)^*\Pi.$$

Na contraparte global temos que

$$G = I_g(K)\tilde{A}\tilde{N}^+ \quad \text{e} \quad \tilde{P} = I_g(M)\tilde{A}\tilde{N}^+,$$

onde as componentes correspondentes são dadas por:

$$\tilde{N}^+ = I_g(N^+) \quad \text{e} \quad \tilde{M} = I_g(M) = \mathcal{Z}_{I_g(K)}\tilde{\mathfrak{a}}.$$

Com tudo isso, formulamos a

Proposição 3.4.16 *Seja G um grupo de Lie com posto um, $S \subset P$ um semigrupo de interior não vazio. Então S é reversível à esquerda.*

Demonstração: Mostraremos que, $S \cap AN^+$ é reversível à esquerda em AN^+ e pelo Lema 3.4.14 concluiremos que S é reversível à esquerda em P . Para isso, tomamos um elemento $g = \tilde{m}\tilde{a}\tilde{n} \in \text{int}S$ de tal forma que possamos definir o subconjunto não vazio:

$$T = \{m \in M : \exists hn \in AN^+ \text{ com } mhn \in \text{int}S\}$$

que é um semigrupo com interior não vazio em M porque M normaliza AN^+ (pois $mAN^+m^{-1} = AmN^+m^{-1}$) e a translação à direita $R_{\tilde{a}\tilde{n}} : M \rightarrow P$ é contínua. Sendo M compacto e conexo tem-se $T = M$ (veja Proposição V.0.18 de [9]); daí que existe

$h \in A, n \in N^+$ com $hn \in \text{int}S$ ($1 \in T$). Por outro lado; $AN^+ = \overline{\bigcup_{n \in N^+} I_n(A)}$, juntando isso ao fato anterior, se conclui que

$$\left(\text{int}S \cap AN^+ \right) \cap I_{n_0}(A) \neq \emptyset, \quad n_0 \in N^+.$$

Por conseguinte, tomamos $\tilde{h} = I_{n_0}(h)$, $h = \exp(H)$, $H \in \mathfrak{a}$ nesse conjunto e fazemos as seguintes observações sobre h :

- Se $\tilde{A} = I_{n_0}(A) = \exp(\tilde{\mathfrak{a}})$, com $\tilde{\mathfrak{a}} = \text{Ad}(n_0)\mathfrak{a}$, $\tilde{H} = \text{Ad}(n_0)H$, então

$$\text{ad}(\tilde{H}) = \text{ad}(\text{Ad}(n_0)H) = \text{Ad}(n_0) \circ \text{ad}(H) \circ \text{Ad}(n_0^{-1})$$

e daí

$$\text{spec}\left(\text{ad}(\tilde{H})\right) = \text{spec}\left(\text{ad}(H)\right) = \begin{cases} \{0, \pm\alpha(H)\} \\ \text{ou} \\ \{0, \pm\alpha(H), \pm 2\alpha(H)\}. \end{cases}$$

- Também $S \cap AN^+$ é um semigrupo de interior não vazio em AN^+ porque $\tilde{h} = \exp(\tilde{H}) \in \text{int}S \cap AN^+$. Em geral, para a decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ segue-se que, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{p}$ é um ideal solúvel porque $AN^+ \subset P$ é um subgrupo normal, conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ (também pode ser provado diretamente) e $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}^+$ são solúveis com $\mathfrak{a} \cong (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+)/\mathfrak{n}^+$. Agora consideramos a aplicação adjunta, restrita a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, isto é

$$\text{ad}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+}(\tilde{H}) : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \longrightarrow \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

a qual é bem definida porque $\mathfrak{a}, \tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ e $\tilde{\mathfrak{n}}^+ = \text{Ad}(n_0)\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+$ (veja os comentários prévios). Ou seja,

$$\text{ad}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+}(\tilde{H})X = [\tilde{H}, X] \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+, \quad X \in \mathfrak{n}^+;$$

veja que

$$\text{spec}(\text{ad}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+}(\tilde{H})) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Com estes dois fatos, temos satisfeito as hipóteses do Lema 3.4.15, consequentemente $S \cap AN^+$ é reversível à esquerda em AN^+ . Para a parte que falta consideremos o grupo quociente $P/AN^+ \cong M$ que é compacto, conexo e a aplicação quociente $\pi : P \longrightarrow P/AN^+$ é aberta. O semigrupo $S \cdot AN^+$ (AN^+ é normal em P) é de interior não vazio em P , então o semigrupo $S \cdot AN^+ / AN^+ \cong M$ (veja Proposição v.0.18 de [9]); também $S \cap AN^+$ gera AN^+ porque $\text{int}(S \cap AN^+) \neq \emptyset$. Portanto, o Lema 3.4.14 nos fornece a reversibilidade à esquerda de S em P . ■

Observação: Notemos que esta proposição pode ser aplicada a semigrupos de interior não vazio em G ; cujo interior interceptam qualquer subgrupo parabólico.

Teorema 3.4.17 *Seja C um subconjunto da variedade flag $\mathbb{F}_s \cong \mathcal{O}(H)$ tal que $C = \text{fe}(\text{int}C)$ e C geodesicamente convexo no sentido estrito em relação à métrica de T-K. Então o semigrupo de compressão*

$$S_C = \{g \in \text{SO}_0(p, 1) : gC \subset C\},$$

é conexo, maximal e de interior não vazio.

Demonstração: As duas últimas afirmações são de caráter geral para grupos de posto um dados pelo Teorema 6.11 de [22] e enquanto a primeira parte é como segue:

Pela Proposição 3.4.13, para cada $g \in \text{int}S_C$ existe um subgrupo parabólico $P(g)$ tal que $g \in P(g)$. Mas a convexidade do conjunto C acarreta que $C \subset L(S_C)$, pois, dado $x, y \in C$ obtém-se

$$\exp(tx).y = (\text{grad}f_x)_t(y) \in C, \quad \forall t > 0$$

e daí segue-se que $\text{int}S_{inf} \cap P(g) \neq \emptyset$. Logo, pela Proposição 3.4.16 o semigrupo $S_{inf} \cap P(g)$ é reversível à esquerda em $P(g)$. Isto é

$$h(S_{inf} \cap P(g)) \cap (S_{inf} \cap P(g)) \neq \emptyset, \quad \forall h \in P(g).$$

Em particular,

$$g.S_{inf} \cap S_{inf} \neq \emptyset, \quad \forall g \in \text{int}S_C.$$

Isso junto aos argumentos dados na Proposição 3.4.11 fornece a relação

$$\text{int}S_C \subseteq (\text{int}S_C)S_{inf} = \bigcup_{g \in \text{int}S_C} g.S_{inf} \subseteq S^{i_0},$$

onde S^{i_0} é a componente conexa da identidade. Portanto, tomando o fecho e usando o fato $S_C = \text{fe}(\text{int}S_C)$, obtemos a conexidade de S_C . Isto é, $S_C = S^{i_0}$. ■

No que segue queremos estabelecer condições suficientes sobre um semigrupo conexo e maximal S_C para poder obter propriedades geométricas de C . Isto é, se tentamos caracterizar a conexidade de semigrupos maximais em termos da convexidade geodésica do conjunto controle invariante C , a mesma coisa deveria acontecer com o conjunto de controle invariante de S_C^{-1} . Isto não necessariamente força a que o bordo $\partial C = C \cap \text{fe}(C^c)$ seja uma variedade de nível transversal ao campo $\text{grad}f$, para alguma função altura f . Mas, em certas situações isto é verdade. Para tal, só consideramos $\text{SO}_0(3, 1)$ e olharemos como certas propriedades algébricas de elementos no cone de Lie influenciam na geometria do conjunto C .

Lema 3.4.18 *Seja $S_C \subset \text{SO}_0(3, 1)$ um semigrupo conexo, maximal e de interior não vazio. Suponhamos que exista um elemento compacto $X \in L(S_C)$. Então $C \cap \text{fe}(C^c)$ é uma subvariedade de nível na órbita $\mathcal{O}(H) = \text{Ad}(\text{SO}(3))H$. Em particular, C é convexo.*

Demonstração: Seja E_{ij} a matriz com termo não nulo igual a um na entrada i, j e zero nas demais. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$X = (a; 0) = E_{12} - E_{21},$$

já que a exponencial de qualquer outro elemento compacto, age como uma rotação na parte simétrica ao redor de um eixo fixo. Sendo assim, para $u_t = \exp(tX)$, $\tilde{H} = (0; b) \in \mathcal{O}(H)$ e $b^t = (b_1, b_2, b_3)$ temos que:

$$\text{Ad}(u_t)\tilde{H} = (b_1 \cos t + b_2 \sin t)E_1 + (-b_1 \sin t + b_2 \cos t)E_2 + b_3E_3,$$

onde $E_1 = E_{14} + E_{41}$, $E_2 = E_{24} + E_{42}$, $E_3 = E_{34} + E_{43}$. As duas primeiras coordenadas descrevem uma hiper-esfera de raio 2. Isto é, se $V = \text{ger}\{E_1, E_2\}$ temos que

$$\text{Ad}\left(\text{SO}(2)\right)\tilde{H} = \mathcal{O}(H) \cap (b_3E_3 + V).$$

Portanto, se $X \in L(S_C)$ segue-se que o semigrupo a um parâmetro $\text{SO}(2)^+ \subset S_C$. E daí

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}).\tilde{H} = \text{SO}(2).\tilde{H} \subset C, \quad \forall \tilde{H} \in C$$

e como C e C^c são conexos, temos que $C \cap \text{fe}(C^c)$ é uma variedade de nível transversal ao campo $\text{grad}f_{E_3}$. ■

Bibliografia

- [1] ARNOLD, L., W. KLIEMANN, AND E. OELJEKLAUS, *Liapunov exponents of linear stochastic systems*, in *Lyapunov Exponents Eds.*, L.N.M. (Springer-Verlag), 1186 (1986).
- [2] CARMO, M. DO, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, (1988).
- [3] COLONIUS, F., AND W. KLIEMANN, *Linear control semigroups acting on projective space*, *J. Dynam. Differential Equations*, 5 (1993), 495-528.
- [4] —, *The Dynamics of Control*, Birkhauser, (1999).
- [5] DUISTERMAAT, J.J., J.A.C. KOLK, AND V.S. VARADARAJAN, *Functions. lows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semi-simples Lie groups*, *Compositio Mathematica*, 49 (1983), 309-398.
- [6] FURSTENBERG, H., *A Poisson formula for semi-simples Lie groups*. *Ann. of Math.*, 77 (1963) 335-385.
- [7] HELGASON, S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New york (1988).
- [8] M.W. HIRSCH, *Differential Topology*, Springer-Verlag (1972)
- [9] HILGERT, J., K.H. HOFMANN, AND J. D. LAWSON, *Lie Groups, Convex Cones and Semigroups*, Oxford University Press, (1989).
- [10] HILGERT, J. AND NEEB, K. H., *Lie Semigroups and their Applications*, *Lecture Notes in Mathematics* (1552), Springer-Verlag, New York, (1993).
- [11] IRWIN, M.C., *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press, New york, (1980).
- [12] JAWORSKI, K., *The density of the image of the exponential function and spacious locally compact groups*, *J. Lie theory*, 5 (1995) 129-134.
- [13] A.L. ONISHCHIK, E.B. VINBERG, *Lie groups and algebraic groups*, Springer-Verlag, Berlin (1990).

- [14] PALIS, J., AND W. DE MELO, *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Projeto Euclides, (1988).
- [15] RAMESH GANGOLLI, V.S. VARADARAJAN, *Harmonic Analysis of spherical Function on Real reductive Groups*, Springer-Verlag, (1982).
- [16] RUPPERT, W.A.F, *On open subsemigroups of connected groups*, Semigroup Forum, **39** (1989) 347-362.
- [17] SAN MARTIN, L.A.B., *Invariant control set on flag manifolds*, Math. Control Signals Systems, **6**(1993) 41-61.
- [18] SAN MARTIN, L. A. B., *Control set and semigroups in Lie semi-simple Lie groups*. In Karl H. Hofmann, Jimmie D. Lawson, and Ernest B. Vinberg, editors, *Semigroups in Algebra, Geometry, and Analysis*, de Gruyter, Berlin, (1995).
- [19] SAN MARTIN, L. A. B., *On global controllability of discrete-time control systems*, Math. Control Signals Systems, **8** (1995) 279-297.
- [20] SAN MARTIN, L. A. B., *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*, Relatório de pesquisa, **84** (1998).
- [21] SAN MARTIN, L. A. B., *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, (1999).
- [22] SAN MARTIN, L.A.B, AND P. TONELLI, *Semigroup action on homogeneous spaces*, Semigroup Forum, **50** (1995) 59-88.
- [23] STEFAN, P., *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc., **29** (1974) 699-713.
- [24] M. TAKEUCHI AND S. KOBAYASHI, *Minimal imbedding of R-spaces.*, J. Differential Geometry, **2** (1968).
- [25] TONELLI, P.A., *Control sets on homogeneous spaces*, Thesis, University of Bremen, (1991).
- [26] VARADARAJAN, V.S., *Harmonic analysis on real reductive groups*, LNM Springer-Verlag **576** (1977).
- [27] VARADARAJAN, V.S., *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall, New Jersey, (1974).
- [28] WARNER, G., *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups*, Springer-Verlag, (1972).