NÃO-MERGULHO EM FIBRADOS DE ESFERAS

ANTONIO CARLOS DO PATROCÍNIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

ORIENTADOR: PROF. DR. ANTONIO CONDE

Setembro de 1977

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Antônio Conde,

pela orientação eficiente

Aos colegas do IMECC

pelo convívio estimulante

Ao IMECC

que me proporcionou as condições necessárias

A Neube Elisabeth D.G. Stabili

pelo excelente trabalho de datilografia

Ao colega Fernando Vanini

pela execução dos cálculos no computador

Meus agradecimentos sinceros

Antônio Carlos do Patrocínio

I N D I C E

INTRODUÇÃO ..... pag 1

CAPÍTULO I: Fibrados, Imersões e Mergulhos ..... pag 4

CAPÍTULO II: Fibrados de Esferas ..... pag 13

CAPÍTULO III: Não-mergulho para Flag-Variedades ..... pag 27

CAPÍTULO IV: Não-mergulho em Fibrados de Esferas ..... pag 36

ANEXO I: ..... pag 53

ANEXO II: ..... pag 55

ANEXO III ..... pag 56

BIBLIOGRAFIA ..... pag 61

INTRODUÇÃO

Em (7) são esclarecidos vários aspectos de um teorema de Atiyah e Hirzebruch (teorema 3.20 de (7)) e são obtidos resultados de não-mergulho para variedades de Grassmann; aqueles autores haviam usado o mesmo teorema, com sucesso, para espaços projetivos complexos.

Hsiang e Szczarba estudaram em (10) variedades que são os espaços totais de fibrados de esferas sobre esferas e obtiveram resultados de imersão e mergulho dessas variedades, fazendo uso do conhecimento do número de campos linearmente independentes sobre as esferas.

Esta tese foi desenvolvida a partir desses dois trabalhos e seus objetivos básicos são, por um lado, generalizar resultados de (7) considerando mergulhos não em esferas mas sim em espaços totais de fibrados sobre esferas e, por outro, considerar as "flag-variedades" complexas que formam uma classe mais ampla que as variedades de Grassmann.

O presente trabalho consta de quatro capítulos e o conteúdo de cada um deles é o seguinte:

Capítulo I - *Fibrados, Imersões e Mergulhos*

Neste capítulo foram colocadas as noções preliminares e notações que serão utilizadas nos capítulos seguintes. Alguns resultados gerais sobre fibrados foram desenvolvidos. Apresentamos ainda uma condição suficiente para que o espaço total de um fibrado de esferas seja uma variedade paralelizável.

Capítulo II - *Fibrados de Esferas*

No capítulo II foram estudados, com detalhes, os espaços totais de fibrados

de esferas sobre esferas. O seguinte resultado é básico:

"Se ξ^p e η^q são fibrados vetoriais sobre S^n tais que $\xi^p \oplus \eta^q = \theta^{p+q}$, então existe um fibrado $(-\eta)^q$ sobre S^n, com a seguinte propriedade:

$\xi^p \oplus \theta^q = \theta^p \oplus (-\eta)^q$", onde θ^n denota o fibrado trivial de posto n.

A partir desse resultado obtém-se um teorema de não-mergulho para as variedades M_ξ, construídas como espaços totais de particulares fibrados de esferas sobre S^n.

A seguir, calculamos a cohomologia e a K-teoria de fibrados de esferas e concluímos o capítulo com o seguinte teorema:

"Se $\xi = (E,\pi,S^n)$ é um $(p+1)$-fibrado vetorial com p e n ímpares e μ é a classe fundamental em homologia de $S(\xi)$ então, para todo $\alpha \in K(S(\xi))$, tem-se

$$<ch(\alpha), \mu> \in Z"$$

Este resultado generaliza um teorema de Bott para as esferas de dimensões pares, demonstrado em (5) e é fundamental na obtenção de resultado de não-mergulho, pelo método utilizado.

Capítulo III - *Não-mergulho em Espaços Euclidianos*

O capítulo é iniciado com a definição de "flag-variedade complexa". Para estas variedades calculamos a cohomologia e as classes de Pontriagin do fibrado normal com a finalidade de usar o teorema de Atiyah (Teorema J_2)

São obtidos resultados de não-mergulho em R^n para as variedades $F(2,2)$, $F(2,2,1)$ e $F(2,2,2)$.

Capítulo IV - *Não-mergulho em Fibrados de Esferas*

No capítulo IV é dada uma descrição do método que permite calcular as classes $B(\nu)$, associadas ao fibrado normal de um mergulho das flag-variedades em $S(\xi)$. Para possibilitar a classificação de tal fibrado normal foi feita a seguinte restrição sobre o fibrado ξ: ele deve ser tal que $\tau S^n \oplus \xi$ seja trivial, o que é equivalente a exigir-se que ξ seja o fibrado normal de uma imersão de S^n em um espaço euclidiano. Tal ocorre, por exemplo, se ξ é trivial ou se $\tau S^n = \xi \oplus \theta$ e ξ possui uma secção que não se anula (caso considerado por Hsiang-Szczarba em [10]).

Utilizando o teorema do capítulo II, mencionado nesta introdução obtem-se o seguinte:

Teorema (K_1): Se M^{2m} mergulha em $S(\xi)$ com fibrado normal orientado ν^{2k}, então para todo $\theta \in K(M)$ tem-se

$$<2^{k-1}ch(\theta)B(\nu),[M]> \in Z.$$

A partir daí segue-se o resultado final:

Teorema (O_1): Se ξ é um $(p+1)$-fibrado vetorial sobre S^n, com p e n ímpares, $\tau S^n \oplus \xi$ trivial e $L = p + n = \dim S(\xi)$ então:

(1) $F(2,2) \not\subset S(\xi)$ se $L = 12$

(2) $F(2,3) \not\subset S(\xi)$ se $L = 20$

(3) $F(2,4) \not\subset S(\xi)$, se $L = 28$

(4) $F(2,2,1) \not\subset S(\xi)$, se $L = 20$

(5) $F(2,1,1) \not\subset S(\xi)$, se $L = 12$

I - FIBRADOS, IMERSÕES E MERGULHOS

A - *Imersão e Mergulho. Fibrado Normal. Teorema de Hirsch*

A palavra vàriedade (ou variedade diferenciável) significará, em todo o texto, variedade diferenciável, compacta, de classe C^∞. Uma função entre duas variedades será suposta diferenciável de classe C^∞. Denotaremos o fibrado vetorial real produto de posto n por θ^n ou simplesmente n. O sinal de igualdade será usado para indicar fibrados isomorfos e os grupos estruturais de fibrados vetoriais serão $O(n)$ ou $SO(n)$.

A_1 - Definição: Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões m e n, respectivamente; uma função diferenciável $f: M \to N$ é uma *imersão* se a derivada de f em cada ponto de M tiver posto m. Se, além disso, f for um homeomorfismo de M sobre $f(M)$ f é chamada um *mergulho* de M em N.

Usaremos as notações $M \subseteq N$ e $M \subset N$ para indicar que M imerge em N e mergulha em N, respectivamente.

Observemos que se existe um mergulho de M em N então M é difeomorfa a uma subvariedade de N; entretanto, a imagem de uma imersão poderá não ser uma subvariedade.

Dada uma imersão $f: M \to N$ é possível construir um fibrado vetorial ν_f sobre M, com a seguinte propriedade:

$$\tau M \oplus \nu_f = f!(\tau N)$$

onde $f!(\tau N)$ denota o fibrado induzido, através de f, pelo fibrado tangente a N.

O fibrado ν_f é chamado *fibrado normal* da imersão f. Reciprocamente, Hirsch

em [11] provou o seguinte:

A_2 - Teorema: Se existe um p-fibrado vetorial ν sobre M tal que $p \geq 1$ e

$$\tau M \oplus \nu = \theta^{m+p}$$

então existe uma imersão de M em R^{m+p}, com fibrado normal ν.

Hirsch provou ainda que se o fibrado ν possuir secções linearmente independentes a imersão pode ser realizada em dimensões inferiores a $m + p$.

A_3 - Corolário: Se M^m é paralelizável então $M^m \subseteq R^{m+1}$.

A_4 - Lema do Cancelamento: Se ξ^n é um n-fibrado vetorial sobre M^m, orientável tal que:

$$\xi^n \oplus \theta^p = \theta^{n+p}$$

com $n > m$, então $\xi^n = \theta^n$.

Demonstração:

Suponhamos $p = 1$ e consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{f}{\nearrow} & BSO(n) \\ & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow[pof]{} & BSO(n+1) \end{array}$$

onde f é a aplicação que classifica ξ e p é a fibração usual com fibra S^n.

A aplicação pof classifica $\xi \oplus \theta^1$ e como este fibrado é trivial, pof é homotópica a aplicação constante igual a $e \in BSO(n+1)$; consequentemente, a aplicação f é homotópica a uma aplicação:

$$g: M^m \to p^{-1}(e) = S^n$$

Como $m < n$, segue-se que g é homotópica a uma aplicação constante, isto é, o fibrado ξ é trivial.

Para provar o caso geral, basta aplicar sucessivamente o caso $p = 1$.

A_5 - Corolário: Se $M^m \subseteq R^{m+k}$ e o fibrado normal ν^k possui p secções ($p<k$) linearmente independentes então $M^m \subseteq R^{m+k-p}$.

Demonstração:

Temos: $\tau M \oplus \nu^k = \theta^{m+k}$ e como ν possui p secções linearmente independentes, $\nu^k = \xi^{k-p} \oplus \theta^p$; logo, $\tau M \oplus \xi^{k-p} \oplus \theta^p = \theta^{m+k-p} \oplus \theta^p$. Pelo lema do cancelamento

$$\tau M \oplus \xi^{k-p} = \theta^{m+k-p}$$

O teorema de Hirsch (A_2) nos diz então que M^m imerge em R^{m+k-p} com fibrado normal ξ^{K-p}.

B - *Fibrado Tangente a uma Variedade*

Seja M uma variedade diferenciável, compacta e sem bordo; indicaremos com $T(M)$ o espaço total do fibrado tangente τM.

$T(M)$ é uma variedade diferenciável, de dimensão $2m$, orientável, e seu fibrado tangente é:

$$\tau T(M) = \pi!(\tau M \oplus \tau M)$$

onde $\pi: T(M) \to M$ é a projeção do fibrado τM

B_1 - Proposição: Seja $f: M \to N$ um mergulho com fibrado normal ν. Então existe um mergulho:

$$f_1 : T(M) \to T(N)$$

com fibrado normal $\pi^!(\nu \oplus \nu)$

Demonstração:

Seja $f_1 = df$ a derivada de f; f_1 é um mergulho de $T(M)$ em $T(N)$ e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \xrightarrow{f_1} & T(N) \\ \downarrow\pi & & S_1 \uparrow \downarrow \pi_1 \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

Seja $S_1 : N \to T(N)$ a secção nula de τN. Temos então:

$$\pi_1 S_1 = id_N \text{ (identidade de N)}$$

e $S_1\pi_1$ é homotópica à identidade de $T(N)$.

Logo:

$$S_1^! \pi_1^! (\tau N) = \tau N \quad \text{e} \quad \pi_1^! S_1^! (\tau T(N)) = \tau T(N)$$

e por isso:

$$f_1^!(\tau T(N)) = \pi^! f^! S_1^! (\tau T(N)) = \pi^! f^! S_1^! \left[\pi_1^! (\tau N \oplus \tau N)\right] =$$

$$= \pi^! f^! (\tau N \oplus \tau N) = \pi^! \left[(\tau M \oplus \nu) \oplus (\tau M \oplus \nu)\right] =$$

$$= \pi^! (\tau M \oplus \tau M) \oplus \pi^! (\nu \oplus \nu) = \tau T(M) \oplus \pi^! (\nu \oplus \nu)$$

e isto mostra que o fibrado normal do mergulho f_1 é $\pi^!(\nu \oplus \nu)$.

B_2 - Exemplo: A partir do mergulho canônico de S^n em R^{n+1}, temos:

$$T(S^n) \subset R^{2n+2}$$

com fibrado normal $\nu = \theta^2$.

Logo, $T(S^n) \subsetneq R^{2n+1}$, com fibrado normal trivial, ou seja $T(S^n)$ é uma π-variedade, de acordo com a seguinte

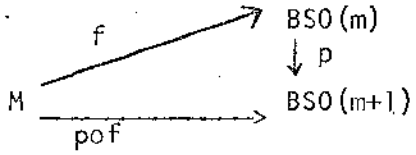
B_3 - Definição: Uma variedade diferenciável M é uma *π-variedade* se $\tau M \oplus 1$ é trivial.

É claro que toda variedade paralelizável é π-variedade; as esferas S^n são π-variedades que não são paralelizáveis se $n \neq 1,3,7$

B_4 - Teorema: Se M^m é uma π-variedade de dimensão m par e se a classe de Euler $X(M) = 0$ então M é paralelizável.

Demonstração:

Observemos, inicialmente, que toda π-variedade é orientável. Temos que $\tau M \oplus 1 = m + 1$ e consideremos o diagrama:



onde f classifica τM, p é a fibração canônica com fibra S^m e a aplicação composta pof classifica $\tau M \oplus 1$ sendo, portanto, homotópica a uma aplicação constante. Pela propriedade de levantamento de homotopia, podemos supor que f toma valores em S^m. Além disso, a restrição do fibrado canônico γ^m sobre BSO(m) a S^m dá τS^m; temos então uma aplicação fibrada:

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & T(S^m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[f]{} & S^m \end{array}$$

Logo, $X(M) = f^*X(S^m) = 0$ pois $X(M) = 0$, por hipótese; mas, como m é par, $X(S^m) = 2\alpha$, onde α é o gerador de $H^m(S^m) \simeq Z$.

M^m sendo orientável, $H^m(M)$ não tem torção e então temos que $f^*(\alpha) = 0$ e portanto $f^* = 0$.

Como f toma valores em S^m, segue-se que f é homotópica a uma aplicação constante ou seja τM é trivial.

Observação: O resultado é falso para m ímpar; basta considerar a esfera S^5.

B_5 - Definição: Dado um $(p+1)$ -fibrado vetorial ξ, o fibrado obtido substituindo-se cada fibra de ξ pela p-esfera S^p dessa fibra será chamado p-fibrado de esferas associado a ξ e o mesmo será denotado por $S(\xi)$.

Observação: Vamos nos referir simplesmente a um "fibrado de esferas" para designar um fibrado de esferas associado a um fibrado vetorial; por simplicidade, vamos também denotar com $S(\xi)$ o espaço total do fibrado de esferas $S(\xi)$. Além disso, tomaremos sempre fibrados cujas bases são variedades diferenciáveis de modo que a existência de uma métrica está assegurada.

B_6 - Corolário: Seja B uma variedade diferenciável orientada com classe de Euler $X(B) = 0$ e seja ξ um fibrado vetorial sobre B tal que $\tau B \oplus \xi$ é trivial. Se a dimensão de $S(\xi)$ for par então $S(\xi)$ é uma variedade paralelizável.

Demonstração:

Seja E o espaço total de ξ e π a projeção. Então $\tau E = \pi!(\tau B \oplus \xi)$; como $S(\xi)$ mergulha em E, com fibrado normal θ^1, temos:
$\tau S(\xi) \oplus \theta^1 = \tau E/S(\xi) = (\pi/S(\xi))!(\tau B \oplus \xi)$, que é trivial. Isto mostra que $S(\xi)$ é uma π-variedade; a proposição 7.6 de [6], nos dá:

$$\tau S(\xi) = (\pi/S(\xi))!(\tau B) \oplus \tau_F$$

onde τ_F é o "fibrado tangente ao longo das fibras de $S(\xi)$". Então:

$$X(S(\xi)) = \left[(\pi/S(\xi))^* X(B)\right].X(\tau_F) = 0$$

pois $X(B) = 0$. O resultado segue do teorema B_4.

B_7 - Exemplo: Tomando $B = S^n$ e $\xi = \theta^{p+1}$ com n e p ímpares, tem-se:

1) $X(B) = 0$

2) $S(\xi) = S^n \times S^p$, dim $S(\xi) = n + p$, par

3) $\tau S^n \oplus \theta^{p+1} = \theta^{n+p+1}$

Então $M = S^n \times S^p$ é paralelizável.

Observação: Para um produto de esferas, podemos provar o seguinte resultado, mais geral:

B_8 - Teorema: Se $M = S^n \times S^p$ e n ou p é ímpar então M é paralelizável.

Demonstração:

Suponhamos n ímpar; então o fibrado τS^n, possui pelo menos uma secção que não se anula; seja $\tau S^n = \eta \oplus 1$.

Sejam $\pi_1: M \to S^n$ e $\pi_2: M \to S^p$ as projeções; tem-se:

$$\tau M = \pi_1^!(\tau S^n) \oplus \pi_2^!(\tau S^p) = \pi_1^!(\eta \oplus 1) \oplus \pi_2^!(\tau S^p)$$

$$= \pi_1^!(\eta) \oplus \pi_2^!(\tau S^p \oplus 1) = \pi_1^!(\tau S^n \oplus \theta^p) = \theta^{n+p}$$

C - Classe de Euler e Sequência de Gysin

C_1 - Definição: Seja $\xi = (E,\pi,B)$ um n-fibrado vetorial orientado e

$u \in H^n(E,E_0;Z)$ a classe de Thom de ξ; as aplicações $i: E \to (E,E_0)$ inclusão e $g: B \to E$ uma secção qualquer induzem:

$$i^*: H^n(E,E_0;Z) \longrightarrow H^n(E;Z)$$

$$g^*: H^n(E,Z) \longrightarrow H^n(B;Z)$$

A classe $X(\xi) = g^*i^*u \in H(B;Z)$ é chamada *classe de Euler de* ξ. Esta definição não depende da escolha da secção g[14].

A seguinte proposição é consequência imediata da definição:

C_2 - Proposição: Se o fibrado vetorial orientado ξ possui uma secção que não se anula então a classe de Euler $X(\xi) = 0$

A classe de Euler satisfaz à propriedade multiplicativa:

$$X(\xi \oplus \eta) = X(\xi).X(\eta) \qquad [14]$$

C_3 - Isomorfismo de Thom [14]

Para todo fibrado vetorial $\xi = (E,\pi,B)$ a aplicação

$$\pi^*: H^i(B) \longrightarrow H^i(E)$$

é um isomorfismo, para todo i.

Se ξ for orientável, é também um isomorfismo a aplicação produto "cup" pela classe de Thom:

$$H^i(E;Z) \xrightarrow{\cup u} H^{i+n}(E,E_0;Z)$$

O isomorfismo composto:

$$\phi: H^i(B) \xrightarrow{\pi^*} H^i(E) \xrightarrow{\cup u} H^{i+n}(E,E_0)$$

é chamado *isomorfismo de Thom*, e vale, tomando $i = n$, o seguinte resultado:

C_4 - Proposição: $X(\xi) = \phi^{-1}(u \cup u)$

C_5 - Sequência de Gysin

Seja $\xi = (E,\pi,B)$ um n-fibrado orientado e consideremos a sequência exata em cohomologia do par (E,E_0):

$$\to H^{i+n}(E,E_0) \to H^{i+n}(E) \to H^{i+n}(E_0) \to H^{i+n+1}(E,E_0) \to$$

O isomorfismo de Thom fornece o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \to & H^{i+n}(E,E_0) & \xrightarrow{L^*} & H^{i+n}(E) & \to & H^{i+n}(E_0) & \to & H^{i+n+1}(E,E_0) & \to \\ & \uparrow \phi & & \uparrow \pi^* & & \| & & \uparrow & \\ \to & H^{i}(B) & \xrightarrow{h} & H^{i+n}(B) & \to & H^{i+n}(E_0) & \to & H^{i+1}(B) & \to \end{array}$$

A sequência inferior é tal que o diagrama é comutativo onde $h = (\pi^*)^{-1}L^*\phi$ é dada por $h(\alpha) = \alpha \cup X(\xi)$ e a mesma é chamada *sequência de Gysin* associada ao fibrado orientado ξ.

Observações:

1. Se ξ possui secção que não se anula então $h = 0$, de modo que a sequência de Gysin se reduz a

$$0 \to H^{i+n}(B) \to H^{i+n}(E_0) \to H^{i+1}(B) \to 0$$

e então permite calcular $H^*(E_0;Z) = H^*(S(\xi);Z)$ a partir da cohomologia de B.

2. De modo análogo ao que foi feito para a cohomologia usual, podemos obter uma sequência do tipo Gysin, para teorias gerais de Cohomologias (9)-em particular para K-teoria, como veremos posteriormente.

II - FIBRADOS DE ESFERAS

D - *Fibrados sobre Esferas*

D_1 - Proposição: Sejam ξ^p e η^q fibrados vetoriais sobre uma variedade diferenciável B tais que $\xi \oplus \eta$ é trivial; se B mergulha em R^m então $S(\xi)$ mergulha em $R^{m+p+q-1}$.

Demonstração:

$$S(\xi) \subset S(\xi \oplus \eta) \cong B \times S^{p+q-1} \subset R^m \times S^{p+q-1}$$

Como $R^m \times S^{p+q-1}$ é difeomorfo a uma vizinhança tubular do mergulho usual de S^{p+q-1} em $R^{m+p+q-1}$, tem-se que $S(\xi) \subset R^{m+p+q-1}$.

D_2 - Corolário: Para todo n, o espaço total do fibrado de esferas associado a τS^n mergulha em R^{2n+1}.

Demonstração:

$\tau S^n \oplus 1$ é trivial e $S^n \subset R^{n+1}$ tomamos então $m = n + 1$, $p = n$ e $q = 1$ na proposição D_1.

D_3 - Dado um p-fibrado vetorial ξ sobre S^n, com $n > 1$ (de modo que ξ é orientável), ξ é classificado por uma aplicação:

$$f: S^n \longrightarrow BSO(p)$$

Logo, ξ determina um elemento de $\pi_n(BSO(p))$.

Reciprocamente, todo elemento de $\pi_n(BSO(p))$ determina, a menos de isomorfismo, um p-fibrado sobre S^n.

O fibrado trivial θ^p sobre S^n é classificado pela aplicação constante

de S^n em $BSO(p)$ e portanto representa o elemento neutro do grupo $\pi_n(BSO(p))$. Se $f: S^n \longrightarrow BSO(p)$ representa um elemento do grupo $\pi_n(BSO(p))$, $-f: S^n \longrightarrow BSO(p)$ denota a aplicação que representa o elemento oposto.

Seja $\mu: BSO(p) \times BSO(q) \to BSO(p+q)$ a aplicação induzida pela inclusão $SO(p) \times SO(q) \subset SO(p+q)$.

Dados ξ^p e η^q fibrados vetoriais sobre S^n sejam:

$$f_\xi: S^n \longrightarrow BSO(p)$$

$$f_\eta: S^n \longrightarrow BSO(q)$$

as aplicações que os classificam.

Sejam, ainda, $c_p: S^n \longrightarrow BSO(p)$ e $c_q: S^n \longrightarrow BSO(q)$ as aplicações constantes nos pontos bases de $BSO(p)$ e $BSO(q)$.

D_4 - Lema: A soma de Whitney $\xi \oplus \eta$ é o fibrado classificado por:

$$[\mu_0(f_\xi, c_q)] + [\mu_0(c_p, f_\eta)] = \alpha$$

onde $+$ representa a soma em $\pi_n(BSO(p+q))$

Demonstração:

Usando a definição da soma em $\pi_\eta(BSO(p+q))$, a classe de homotopia α é representada por

$$S^n \xrightarrow{C} S^n \vee S^n \xrightarrow{f_\xi \vee f_\eta} BSO(p) \times BSO(q) \xrightarrow{\mu} BSO(p+q)$$

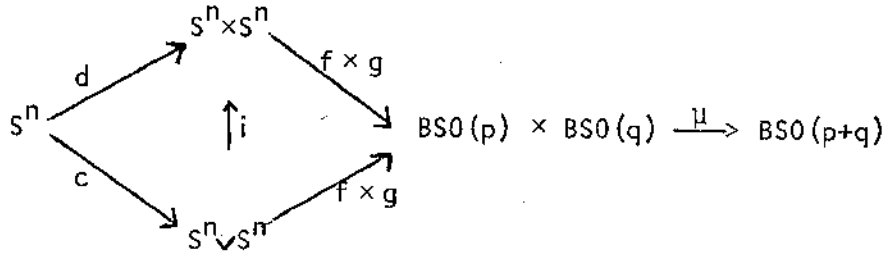
onde $C: S^n \to S^n \vee S^n$ é aplicação que contrai um equador de S^n pelo ponto base de S^n, no mesmo ponto base.

Por outro lado, a aplicação:

$$S^n \xrightarrow{d} S^n \times S^n \xrightarrow{f \times g} BSO(p) \times BSO(q) \xrightarrow{\mu} BSO(p+q)$$

onde d é a aplicação diagonal, classifica a soma de Whitney $\xi \oplus \eta$.

Temos então o seguinte diagrama:



e queremos provar que o mesmo é homotópico-comutativo.

Para isso, observemos que $(f\times g)oi = f \vee g$ onde $i: S^n \vee S^n \to S^n \times S^n$ é a inclusão, e portanto basta provar que as aplicações d e i o c são homotópicas. A aplicação:

$$\theta: \pi_n(S^n\times S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n) + \pi_n(S^n)$$

definida por composição com as projeções $\pi_1, \pi_2: S^n \times S^n \to S^n$, é um isomorfismo.

Em particular:

$$\theta[d] = ([\pi_1 od], [\pi_2 od]) = ([id],[id])$$

Consideremos as aplicações:

$$\alpha = (id,*): S^n \to S^n \times \{*\} \subset S^n \times S^n$$

$$\beta = (*,id): S^n \to \{*\} \times S^n \subset S^n \times S^n$$

que representam elementos de $\pi_n(S^n\times S^n)$

Tem-se: $[\alpha] + [\beta] = [(\alpha \vee \beta)oC] = [ioC]$ e $\theta[ioC] = \theta[\alpha] + \theta[\beta] =$

$= ([\pi_1 o\alpha], [\pi_2 o\alpha]) + ([\pi_1 o\beta],[\pi_2 o\beta]) = ([id],0) + (0,[id]) =$

$= ([id], [id])$

Ou seja $\theta[d] = \theta[ioC]$ e portanto as aplicações d e ioc são homotópicas.

D_5 - Corolário: Sejam ξ^p e η^q fibrados sobre S^n tais que $\xi \oplus \eta = \theta^{p+q}$. Então:

$$\xi \oplus \theta^q = \theta^p \oplus (-\eta)^q$$

Demonstração:

Como $\xi \oplus \eta$ é trivial, $\alpha = 0$.

Logo $[\mu o(f_\xi, c_q)] = -[\mu o(c_p, f_\eta)] = [\mu o(c_p, -f_\eta)]$.

A aplicação $\mu o(f_\xi, c_q)$ classifica $\xi \oplus \theta^q$ e $\mu o(c_p, f_\eta)$ classifica $\theta^p \oplus (-\eta)^q$ e portanto temos o resultado.

E - *Imersão e Mergulho de Fibrados sobre* S^n

Seja $\lambda(n)$ o número de campos de vetores linearmente independentes sobre S^n; este número foi determinado por Adams em [1], que provou o seguinte:

E_1 - Teorema (Adams): Seja $n + 1 = (2a+1)2^b$ onde $b = c + 4d$, com a, b, c e d números inteiros e $0 \leq c \leq 3$. Então:

$$\lambda(n) = 2^c + 8d - 1$$

Deste teorema deduzimos as seguintes propriedades de $\lambda(n)$:

(1) $\lambda(n) \neq 0$ se, e somente se, n é ímpar

(2) Os $\lambda(n)$ formam uma sequência não limitada.

Se, por exemplo, $n+1 = 2^{4d}$ então $\lambda(n) = 8d$ sendo este o caso considerado em [10].

(3) $\lambda(n)$ é par se, e somente se, $C = 0$, isto é, $n + 1 = (2a+1)2^{4d}$

Suponhamos, então, n ímpar, isto é $\lambda(n) \geq 1$.

Temos:

$$\tau S^n = \xi \oplus \theta^{\lambda(n)-1}$$

onde ξ é um fibrado sobre S^n com uma secção que não se anula.

Seja $M_\xi = S(\xi)$ o espaço total do fibrado de esferas associado a ξ; M_ξ é uma variedade de dimensão $2n - \lambda(n)$.

E_2 - Lema: O fibrado $\tau S^n \oplus \xi$ é trivial.

Demonstração:

$\tau S^n \oplus \xi = \tau S^n \oplus \theta^1 \oplus \xi'$, pois $\xi = \theta^1 \oplus \xi'$ e como $\tau S^n \oplus \theta^1 = \theta^{n+1}$, temos:

$$\tau S^n \oplus \xi = \theta^{n+1} \oplus \xi' = \theta^n \oplus \xi = \xi \oplus \theta^{\lambda(n)-1} \oplus \theta^{n-\lambda(n)+1} =$$

$$= \tau S^n \oplus \theta^{n-\lambda(n)+1} = \theta^{2n-\lambda(n)+1}$$

pois $n - \lambda(n) + 1 > 0$.

E_3 - Teorema: Se $\lambda(n)$ é par, a variedade M_ξ imerge em $R^{2n-\lambda(n)+1}$

Demonstração

Temos: 1) $\tau S^n \oplus \xi$ trivial

2) $X(S^n) = 0$

3) Dimensão de M_ξ par

Podemos então aplicar o corolário B_6 e concluir que M_ξ é paralelizável. Sendo paralelizável, M_ξ imerge em codimensão 1 por A_3.

E_4 - Teorema: M_ξ mergulha em R^{2n+1}

Demonstração:

Como ξ é um sub-fibrado do fibrado tangente a S^n, M_ξ mergulha no espaço total do fibrado de esferas associado a τS^n.

O resultado segue pela aplicação de D_2.

Na demonstração do próximo teorema será utilizado o lema seguinte, que pode ser encontrado em [12].

E_5 - Lema: Para todo mergulho de S^n em R^{2n}, o fibrado normal é trivial.

E_6 - Teorema: Para todo n, $n > 15$, a variedade M_ξ não mergulha em R^{2n}.

Demonstração:

Como o fibrado ξ possui uma secção que não se anula, podemos escrever $\xi = \xi' \oplus \theta^1$.

Seja D o espaço total do fibrado de discos associado a ξ' e $\beta: S^n \longrightarrow D$ o mergulho dado pela secção nula de ξ'. Podemos mergulhar D em M_ξ de tal modo que D se identifique com uma vizinhança tubular de S^n em M_ξ e, consequentemente, ξ' resulta sendo o fibrado normal de $S^n \subset M_\xi$.

Suponhamos que M_ξ mergulhe em R^{2n} com fibrado normal ν. O fibrado normal do mergulho de S^n em R^{2n}, obtido por composição, tem fibrado normal $\xi' \oplus \nu$. Pelo lema E_5, o fibrado $\xi' \oplus \nu$ é trivial; aplicando o corolário D_5, temos:

$$\xi' \oplus \theta^{\lambda(n)} = \theta^{n-\lambda(n)} \oplus (-\nu)$$

$$\xi \oplus \theta^{\lambda(n)-1} = \theta^{n-\lambda(n)} \oplus (-\nu)$$

$$\tau S^n = \theta^{n-\lambda(n)} \oplus (-\nu)$$

Esta igualdade nos permite concluir que $\lambda(n) \geq n - \lambda(n)$, ou seja $2\lambda(n) \geq n$.

Por outro lado, o resultado de Adams E_1 garante que, para $n > 15$, $2\lambda(n) < n$.

Temos então a contradição e o teorema está demonstrado.

E_7 - Definição: Se uma variedade M imerge em R^p mas não imerge em R^{p-1} e mergulha em R^q mas não mergulha em R^{q-1}, diz-se que a divergência de M é $q - p$.

Segue-se de E_3, E_4 e E_6 que, se n é ímpar e $\lambda(n)$ é par então a divergência de M_ξ é $\lambda(n)$; ou seja, as variedades M_ξ fornecem um exemplo de uma família de variedades com divergência arbitrariamente grande, uma vez que a sequência $\lambda(n)$ é ilimitada.

F - *Cohomologia de Fibrados de Esferas*

Seja $\xi = (E, \pi, S^n)$ um $(p+1)$-fibrado vetorial sobre S^n; supondo $n > 1$, ξ é orientável de modo que podemos considerar $X(\xi)$ e a sequência de Gysin associada a ξ, construída em C_5:

$$\longrightarrow H^{i-(p+1)}(S^n) \xrightarrow{\cup X} H^i(S^n) \longrightarrow H^i(E_0) \longrightarrow H^{i-p}(S^n) \longrightarrow$$

onde $E_0 \subset E$ é o complementar da imagem de S^n pela secção nula de ξ.

Se $n \neq p+1$ então $X(\xi) = 0$ pois $H^{p+1}(S^n) = 0$ e a sequência acima resulta:

$$0 \longrightarrow H^i(S^n) \longrightarrow H^i(E) \longrightarrow H^{i-p}(S^n) \longrightarrow 0,$$

de modo que $H^i(E_0) = H^{i-p}(S^n) \oplus H^i(S^n)$

Se $p = n$, $H^i(E_0) = H^{i-p}(S^p) \oplus H^i(S^p)$ ou seja:

$$H^i(E_0) = Z, \quad H^p(E_0) = Z \oplus Z, \quad H^{2p}(E_0) = Z$$

Se $p \neq n$, $H^i(E_0) = H^{i-p}(S^n) \oplus H^i(S^n)$ e então:

$H^i(E_0) = Z$, $H^p(E_0) = Z$, $H^n(E_0) = Z$, $H^{n+p}(E_0) = Z$ e todos os demais são nulos. Temos então, para $n \neq p + 1$:

$$H^*(E_0,Z) = Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z$$

Se $S(\xi)$ é o p-fibrado de esferas associado a ξ, então $S(\xi)$ tem a mesma cohomologia que E_0:

$$H^*(S(\xi);Z) = Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z$$

Observação: Se $n = p + 1$, mas ξ possui secção que não se anula então $X(\xi)=0$ e o mesmo resultado continua válido.

G - *K-Teoria Complexa para Fibrados de Esferas*

Para todo par (X,Y) onde X é um complexo Cw finito e Y é um subcomplexo, define-se:

$$K(X,Y) = \tilde{K}(X/Y)$$

onde Y/Y é tomado como ponto base de X/Y.

(Para as definições de $K(X)$ e $\tilde{K}(X)$ ver (3) ou (7))

Dados X e Y espaços topológicos compactos com pontos-base x_0 e y_0 respectivamente, escrevemos:

$$X \wedge Y = X \times Y/X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$$

G_1 - Definição: A n-ésima suspensão reduzida de X é então definida como:

$$S^nX = S^n \wedge X$$

Para obter K como um funtor de cohomologia definimos, para todo $n \geq 0$:

(1) $\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}(S^nX)$, se X tem ponto base.

(2) $K^{-n}(X,Y) = \tilde{K}^{-n}(X/Y)$, X/Y com ponto base Y/Y

(3) $K^{-n}(X) = K^{-n}(X,\phi) = \tilde{K}(S^n X^+)$, onde X^+ é a união disjunta de X com um ponto base.

Esta definição pode ser estendida para todo $n \in Z$, a partir do seguinte:

G_2 - Teorema: (periodicidade de Bott) (5): Para todo espaço X e todo $n \geq 0$, existem isomorfismos:

$$\beta^n: K^0(X,Y) \to K^{-2n}(X,Y)$$

$$\beta^n: K^{-1}(X,Y) \to K^{-(2n+1)}(X,Y)$$

Define-se então:

$$K^n(X,Y) = K^0(X,Y) \quad \text{se } n \text{ é par}$$

$$K^n(X,Y) = K^{-1}(X,Y) \quad \text{se } n \text{ é ímpar}$$

Com estas definições, os grupos $K^n(X,Y)$ satisfazem aos axiomas de uma teoria geral de cohomologia, isto é, são válidos os axiomas de Eilenberg-Steenrad, exceto o axioma da dimensão, pois $K^n(x_0)$ não é zero para $n \neq 0$.

Em particular, para todo par (X,Y) com X um complexo Cw finito e Y subcomplexo, a sequência:

$$\longrightarrow K^n(Y) \longrightarrow K^{n+1}(X,Y) \longrightarrow K^{n+1}(X) \longrightarrow K^{n+1}(Y) \longrightarrow$$

é exata, para todo n.

H - *K^* - orientação de Fibrados Vetoriais*

A referência geral para esta parte é (9).

Dada uma teoria geral de cohomologia h^*, pode-se definir o conceito de h^*-orientação para fibrados vetoriais. Em particular para a teoria K^*, procede-se da seguinte maneira:

Como: $K^n(R^n, R^n - 0) \simeq Z$,

fixamos um gerador $U_n \in K^n(R^n, R^n-0)$ e dado n-fibrado $\xi = (E,\pi,B)$ definimos

"ξ é K*-orientável se existe uma classe $U \in K^n(E,E_0)$ tal que $i^*U = U_n$ onde

$$i:(R^n,R^n-0)\longrightarrow (E,E_0)$$

é admissível.

H_1 - Definição: O par (ξ,U) é chamado um fibrado vetorial K^*-orientado e vale o seguinte:

H_2 - Teorema: A aplicação $\phi: K^i(B)\longrightarrow K^{i+n}(E,E_0)$ definida por:

$$\phi(z) = \pi^*(z)U$$

é um isomorfismo para todo i, se ξ for K*-orientado.

A prova deste teorema está em (9), pag. 33.

Uma condição suficiente para que um fibrado vetorial real seja K*-orientado é que:

$$W_1(\xi) = W_3(\xi) = 0 \quad (9), \quad \text{pag 117.}$$

Dado o n-fibrado vetorial real $\xi = (E,\pi,B)$ sejam $D(\xi)$ e $S(\xi)$ os fibrados de disco e esfera associados a ξ; a inclusão do par:

$$(D(\xi),\ S(\xi))\longrightarrow (E,\ E_0)$$

induz isomorfismos $K^{i+n}(E,E_0) \simeq K^{i+n}(D(\xi),S(\xi))$

Assim, temos um isomorfismo:

$$\phi: K^i(B) \to K^{i+n}(D(\xi),S(\xi),$$

se ξ for K^*-orientado.

Consideremos a sequência exata em K-teoria do par $(D(\xi),S(\xi))$:

$$\longrightarrow K^i(D(\xi),S(\xi)) \xrightarrow{i} K^1(D(\xi))\longrightarrow K^i(S(\xi))\longrightarrow K^{i+1}(D(\xi),S(\xi))\longrightarrow$$

O isomorfismo ϕ fornece o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow K^i(D(\xi),S(\xi)) & \xrightarrow{i^*} & K^i(D(\xi)) & \longrightarrow & K^i(S(\xi)) & \longrightarrow & K^{i+1}(D(\xi),S(\xi)) & \longrightarrow \\
\uparrow\phi & & \uparrow\pi^* & & || & & \uparrow\phi & \\
\longrightarrow K^{i-n}(B) & \xrightarrow{h} & K^i(B) & \longrightarrow & K^i(S(\xi)) & \longrightarrow & K^{i-n+1}(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

Neste diagrama, $h = \pi^{*-1} i^* \phi$ e resulta comutativo, com a sequência inferior exata.

H_3 - Teorema: Se o fibrado vetorial real ξ é K^*-orientado e possui secção que não se anula então a aplicação h é nula.

Demonstração:

Se $g: B \to E$ é uma secção que não se anula, podemos supor que a imagem de g está contida em $S(\xi)$. De modo que a aplicação

$$i \circ g : B \to (D(\xi),S(\xi))$$

induz:

$$0 = g^* i^* : K^i(D(\xi),S(\xi)) \to K^i(B)$$

Como $h = g^* i^* \phi$, segue-se que $h = 0$.

H_4 - Corolário: Se $\xi = (E,\pi,B)$ é um n-fibrado vetorial real, K^*-orientado, que possui uma secção que não se anula então:

$$K^i(S(\xi)) = K^i(B) \oplus K^{i-n+1}(B)$$

Demonstração:

Como $h = 0$, temos a sequência exata curta:

$$0 \to K^i(B) \to K^i(S(\xi)) \to K^{i-n+1}(B) \to 0$$

e o resultado segue.

Tomando $B = S^p$ com $p \neq 1,3$ todo fibrado sobre S^p resulta K^*-orientado pois $W_1 = W_3 = 0$.

Podemos então calcular a K-teoria do fibrado de esferas associado, aplicando-se o corolário H_4 e o resultado sobre a K-teoria das esferas, que se encontra, por exemplo, em [3] e que é o seguinte:

$$K^{par}(S^p) = \begin{cases} Z & \text{se } p \text{ é ímpar} \\ Z \oplus Z & \text{se } p \text{ é par} \end{cases}$$

$$K^{ímpar}(SP) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \text{ é par} \\ Z & \text{se } p \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Pelo corolário, $K^i(S(\xi)) = K^i(S^p) \oplus K^{i-n+1}(S^p)$.

Logo, se p é ímpar $(p \neq 1,3)$ tem-se

$K^i(S(\xi)) = Z \oplus Z$, para cada i e para todo n.

Se p é par então:

$K^i(S(\xi)) = Z \oplus Z$, para cada i e n par

$K^i(S(\xi)) = Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z$, para i par, n ímpar

$K^i(S(\xi)) = 0$, i ímpar, n ímpar

Obtivemos então o seguinte:

H_5 - Teorema: Para todo fibrado vetorial real sobre S^p, $p \neq 1,3$, que possui secção que não se anula, a K-teoria do fibrado de esferas associado é dado por:

$$K^*(S(\xi)) = K^0(S(\xi)) \oplus K^1(S(\xi)) \cong Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z$$

Observação: Os casos $p = 1$ e $p = 3$ podem ser incluídos no resultado, com uma demonstração que utiliza sequência espectral (4).

I - Carácter de Chern

Dado um fibrado vetorial complexo η sobre um complexo CW finito X, o *carácter de Chern* η, $Ch(\eta)$ é definido a partir das classes de Chern de η e induz um homomorfismo de anéis:

$$ch: K(X) \longrightarrow H^{par}(X;Q)$$

onde $H^{par}(X;Q)$ denota a soma direta dos grupos de cohomologia em dimensões pares de X, com coeficientes racionais. Referência (4) e (7).

Se $ch_p(\eta)$ denota o fator p-dimensional de $ch(\eta)$, então vale o seguinte:

I_1 - Teorema: Se $\eta \in K(X)$ é tal que $ch_p(\eta) = 0$ para todo $0 < p < r$ e $H^*(X,Z)$ não tem torção então:

$$ch_r(\eta) \in H^r(X;Z) \subset H^r(X,Q)$$

Este teorema está provado em (4), como corolário de um teorema geral cuja demonstração é baseada na sequência espectral para a K-teoria.

Aplicaremos o teorema acima para o caso em que X é o espaço total de um fibrado de esferas associado a um fibrado vetorial sobre esferas. Para isso, seja $\xi = (E,\pi,S^n)$ um $(p+1)$-fibrado vetorial com n e p ímpares.

Vimos em F que $S(\xi)$ só tem cohomologia nas dimensões $0,n,p$ e $n+p$ e que $H^*(X;Z)$ não tem torção. Como, para todo $\eta \in K(S(\xi))$.

$$ch(\eta) \in H^{par}(S(\xi);Q)$$

segue-se que $ch_i(\eta) = 0$ para todo $i < p + n$ e, pelo teorema anterior, podemos concluir que

$$ch_{p+n}(\eta) \in H^{p+n}(S(\xi);Z)$$

Temos então provado o seguinte:

1_2 - Teorema: Se $\xi = (E,\pi,S^n)$ é um $(p+1)$ - fibrado vetorial com p e n ímpares e μ é a classe fundamental em homologia de $S(\xi)$ então, para todo $\alpha \in K(S(\xi))$, tem-se:

$$<ch(\alpha), \mu > \in Z$$

Observação: Este resultado generaliza um teorema de Bott para as esferas de dimensões pares [5, pag 5], que é crucial para os resultados sobre não-mergulho, obtidos por A. Conde em [7].

1_3 - Exemplos:

1) Se θ^{p+1} é o $(p+1)$-fibrado trivial sobre S^n, com p e n ímpares então $S(\theta) = S^n \times S^p$ de modo que para todo $\alpha \in K(S^n \times S^p)$ tem-se

$$<ch(\alpha), \mu > \in Z$$

2) Para as variedades M_ξ consideradas no capítulo I, temos:

$$\tau S^n = \xi \oplus \theta^{\lambda(n)-1}, \quad \lambda(n) \geq 1$$

Isto implica n ímpar e sendo ξ um $(n-\lambda(n)+1)$-fibrado vetorial, se $\lambda(n)$ for par, $p = n - \lambda(n)$ é ímpar e o resultado do teorema vale para $M_\xi = S(\xi)$

III - NÃO-MERGULHO PARA "FLAG-VARIEDADES"

J - *Não-mergulho em Espaços Euclidianos*

J_1 - Definição: Uma "flag-variedade" é um espaço homogêneo da forma.

$$F(n_1,n_2,\ldots,n_k) = U(n)/U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)$$

com n_1, n_2,..., n_k números inteiros positivos tais que $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k = n$.

Deste modo, um ponto em $F(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ é uma K-upla de subespaços ortonormais de C^n, de dimensões n_1, n_2,..., n_k. Esta família de variedades inclui os espaços projetivos complexos:

$$F(n,1) = CP^n = U(n+1)/U(n)\times U(1)$$

e as grasmanianas complexas.

$$F(m,n) = G(m,n) = U(m+n)/U(m) \times U(n)$$

A dimensão de $F(n_1,n_2,\ldots, n_k)$ é $n^2-[n_1^2+\ldots+n_k^2]$.

Um resultado de não-mergulho em espaços euclidianos para essas variedades será obtido aplicando-se o seguinte teorema, demonstrado por Atiyah em [2].

J_2 - Teorema: Se M^m é uma variedade diferenciável compacta com fibrado normal ν e a k-ésima classe de Pontriagin $P_k(\nu) \neq 0$ então M não mergulha em R^{m+2k}.

Para aplicar este teorema deve-se conhecer o fibrado normal de M e um método para calcular as classes de Pontriagin desse fibrado; daremos, em seguida, uma descrição resumida para o caso em que M é uma "flag-variedade". As referências básicas para esta parte são [7] e [8].

J_3 - Cohomologia das "flag-variedades".

Vamos indicar com G o grupo de Lie $U(n)$ e com H o subgrupo

$U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)$; a fibração:

$$G/H \xrightarrow{i} BH \xrightarrow{j} BG$$

induz em cohomologia a sequência:

$$H^*(BG;Z) \xrightarrow{j^*} H^*(BH;Z) \xrightarrow{i^*} H^*(G/H;Z)$$

Tem-se: $H^*(BG;Z) = Z[c_1,c_2,\ldots,c_n]$, onde $c_i \in H^{2i}(BG;Z)$ são as classes universais de Chern; analogamente:

$$H^*(BH;Z) = Z\left[a_1^1,\ldots,a_{n_1}^1\right]\times\ldots\times Z\left[a_1^k,\ldots,a_{n_k}^k\right]$$

Para obter a cohomologia de G/H basta tomar o quociente de $H^*(BH;Z)$ pelo ideal gerado por:

$$j^*(C_p) = \sum_{r_1+\ldots+r_k=p} a_{r_1}^1 \times \ldots \times a_{r_k}^k, \quad p = 1,2,\ldots, n$$

A demonstração desse fato utiliza a "sequência espectral de Serre" e está em (8).

Observação: O mesmo processo se aplica para a cohomologia com coeficientes racionais.

Exemplos: Vamos aplicar o método descrito para calcular a cohomologia de algumas "flag-variedades".

(1) Espaço projetivo complexo

Para $CP^n = U(n+1) / U(n) \times U(1)$, temos:

$H^*(B(U(n) \times U(1));Z) = Z[a_1, \ldots, a_n] \times Z[b_1]$

$H^*(BU(n+1));Z) = Z[c_1,c_2,\ldots, c_{n+1}]$

As relações são as seguintes:

$$j^*(c_1) = a_1 + b_1 = 0$$

$$j^*(c_2) = a_2 + a_1b_1 = 0$$

$$\text{----------}$$

$$j^*(c_{n+1}) = a_{n+1} + a_nb_1 = 0$$

Temos então $b_1 = -a_1$, $a_2 = a_1^2$, ..., $a_n = a_1^n$ e $a_{n+1} = a_1^{n+1}$.

Isto mostra que a cohomologia de CP^n é dada por um único gerador $x_1 = i^*(a_1) \in H^2(CP^n;Z)$. Uma base aditiva de $H^*(CP^n,Z)$ é dada por $1, x_1, x_1^2, \ldots, x_1^n$. Em particular, CP^n só tem cohomologia nas dimensões pares-propriedade que é válida para todas as "flag-variedades". Em resumo, $H^*(CP^n;Z)$ é o anel de polinômios, com coeficientes em Z, gerado por $x_1 \in H^2(CP^n;Z)$, módulo a relação $x_1^{n+1} = 0$:

$$H^*(CP^n;Z) = Z[x_1]/x_1^{n+1}$$

(2) A variedade de Grassmann $F(2,2)$

Tem-se $F(2,2) = U(4)/U(2) \times U(2)$ e dimensão de $F(2,2)$ igual a 8.

Sejam:

$$H^*(B(U(2) \times U(2));Z) = Z[a_1,a_2] \times Z[b_1,b_2]$$

$$H^*(BU(4);Z) = Z[c_1,c_2,c_3,c_4]$$

Temos então as relações:

$$j^*(c_1) = a_1 + b_1 = 0$$

$$j^*(c_2) = a_2 + a_1b_1 + b_2 = 0$$

$$j^*(c_3) = a_2b_1 + a_1b_2 = 0$$

$$j^*(c_4) = a_2b_2 = 0$$

Destas relações obtêm-se: $b_1 = -a_1$; $b_2 = a_1^2 - a_2$; $a_1^3 = 2a_1a_2$; $a_2^2 = a_1^2a_2$

A cohomologia de $F(2,2)$ tem como geradores

$$x_1 = i^*(a_1) \in H^2(F(2,2);Z)$$

$$x_2 = i^*(a_2) \in H^4(F(2,2);Z)$$

Uma base aditiva de $H^*(F(2,2);Z)$ é formada pelos monômios:

$$1,\ x_1,\ x_1^2,\ x_2,\ x_1x_2 \quad \text{e} \quad x_1^2x_2$$

(3) A "flag-variedade" $F(2,2,1)$

Tem-se: $F(2,2,1) = U(5) / U(2) \times U(2) \times U(1)$

Dimensão de $F(2,2,1) = 16$

Sejam a_1, a_2 os geradores de $H^*(B(U(2) \times U(2) \times U(1))$ correspondentes ao primeiro fator $U(2)$; b_1, b_2 os correspondentes ao segundo fator e d_1 o correspondente ao fator $U(1)$. Seja ainda:

$$H^*(BU(5);Z) = Z[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5]$$

As relações e suas consequências são as seguintes:

a) Na dimensão 2:

$$j^*(c_1) = a_1 + b_1 + c_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -a_1 - d_1$$

b) Na dimensão 4:

$$j^*(c_2) = a_2 + b_2 + a_1b_1 + a_1d_1 + b_1c_1 = 0$$

$$b_2 = a_1^2 + a_1d_1 + d_1^2 - a_2$$

c) Na dimensão 6:

$$j^*(c_3) = a_1b_2 + a_2b_1 + a_2d_1 + b_2d_1 + a_1b_1c_1 = 0$$

$$a_1^3 = 2a_1a_2 + a_2d_1 - a_1^2d_1 - a_1d_1^2 - d_1^3$$

d) Na dimensão 8

$$j^*(c_4) = a_2b_2 + a_1b_2d_1 + a_2b_1d_1 = 0$$

$$a_2^2 = a_1^2a_2 + a_1a_2d_1 + a_2d_1^2 - d_1^4$$

$$a_1^3d_1 = 2a_1a_2d_1 + a_2d_1^2 - a_1^2d_1^2 - a_1d_1^3 - d_1^4$$

$$a_1^4 = 2a_1^2a_2 - a_1a_2d_1 - a_2d_1^2 + d_1^4$$

e) Na dimensão 10

$$j^*(c_5) = a_2b_2d_1 = 0$$

$$d_1^5 = 0$$

$$a_1a_2^2 = a_1d_1^4 - a_1^2a_2d_1 - a_1a_2d_1^2$$

$$a_1^3a_2 = 2a_1d_1^4 - 2a_1^2a_2d_1 - 2a_1a_2d_1^2$$

$$a_2^2d_1 = a_1^2a_2d_1 + a_1a_2d_1^2 + a_2d_1^3$$

$$a_1^3d_1^2 = 2a_1a_2d_1^2 + a_2d_1^3 - a_1^2d_1^3 - a_1d_1^4$$

f) Na dimensão 12

$$a_1^2a_2^2 = a_1^2d_1^4 + a_1^2a_2d_1^2 + 2a_1a_2d_1^3$$

$$a_1a_2^2d_1 = -a_1^2a_2d_1^2 - a_1a_2d_1^3$$

$$a_1^3a_2d_1 = -2a_1^2a_2d_1^2 - 2a_1a_2d_1^3$$

$$a_2^2d_1^2 = a_1^2a_2d_1^2 + a_1a_2d_1^3 + a_2d_1^4$$

$$a_1^3d_1^3 = 2a_1a_2d_1^3 + a_2d_1^4 - a_1^2d_1^4$$

g) Na dimensão 14

$$a_1^2a_2^2d_1 = a_1^2a_2d_1^3 + 2a_1a_2d_1^4$$

$$a_1a_2^2d_1^2 = -a_1^2a_2d_1^3 - a_1a_2d_1^4$$

$$a_1^3a_2d_1^2 = -2a_1^2a_2d_1^3 - 2a_1a_2d_1^4$$

$$a_2^2 d_1^3 = a_1^2 a_2 d_1^3 + a_1 a_2 d_1^4$$

$$a_1^3 d_1^4 = 2 a_1 a_2 d_1^4$$

h) Na dimensão 16

$$a_1^2 a_2^2 d_1^2 = a_1^2 a_2 d_1^4$$

$$a_1 a_2^2 d_1^3 = -a_1^2 a_2 d_1^4$$

$$a_1^3 a_2 d_1^3 = -2 a_1^2 a_2 d_1^4$$

$$a_2^2 d_1^4 = a_1^2 a_2 d_1^4$$

$$a_1^4 a_2^2 = 0$$

Temos então a cohomologia de $F(2,2,1)$ tomando como geradores $x_1 = i^*(a_1)$, $x_2 = i^*(a_2)$ e $z_1 = i^*(d_1)$; uma base aditiva de $H^*(F(2,2,1);Z)$ é constituída pelos monômios:

$1 \in H^0$; $x_1, z_1 \in H^2$; $x_1^2, x_1 z_1, z_1^2, x_2 \in H^4$;

$x_1 x_2, x_2 z_1, x_1^2 z_1, x_1 z_1^2, z_1^3 \in H^6$; $x_1^2 x_2, x_1^2 z_1^2$,

$x_1 z_1^3, x_1 x_2 z_1, x_2 z_1^2, z_1^4 \in H^8$; $x_1 z_1^4, x_1^2 x_2 z_1$,

$x_1 x_2 z_1^2, x_2 z_1^3, x_1^2 z_1^3 \in H^{10}$; $x_1^2 x_2 z_1^2, x_1 x_2 z_1^3, x_2 z_1^4$,

$x_1^2 z_1^4 \in H^{12}$; $x_1^2 x_2 z_1^3, x_1 x_2 z_1^4 \in H^{14}$; $x_1^2 x_2 z_1^4 \in H^{16}$

Em resumo, a base aditiva de $H^*(F(2,2,1);Z)$ consta de 30 monômios ou seja a cohomologia de $F(2,2,1)$ é dada pela soma direta de 30 cópias de Z.

J_4 - Classes de Pontriagin do Fibrado Normal

Seja G um grupo de Lie compacto e H um subgrupo fechado; o fibrado

normal ν de uma imersão de G/H em um espaço euclidiano é classificado pela aplicação:

$$G/H \xrightarrow{i} BH \xrightarrow{f} BSO(\dim H)$$

onde f é a plicação induzida pela representação adjunta $Ad: H \longrightarrow SO(\dim H)$.

Para a demonstração deste resultado ver (7), capítulo IV, onde também podem ser encontradas as demonstrações das afirmações seguintes:

Se $G = U(n)$ e $H = U(n_1) \times \ldots \times U(n_\ell)$, com $n_1 + \ldots + n_\ell = n$, a aplicação f induz em cohomologia o homomorfismo:

$$f^*: H^*(BSO(n_1^2+n_2^2+\ldots+n_\ell^2);Q) \longrightarrow H^*(BH;Q)$$

e $p_k(\nu) = i^*f^*(p_k)$, onde p_k são as classes universais de Pontriagin.

A aplicação f^* fatora-se através das aplicações:

$$f_i^*: H^*(BSO(n_i^2);Q) \longrightarrow H^*(BU(n_i);\ Q)$$

$$\text{e} \quad f^*(p_k) = \sum_{r+s+\ldots+t=k} f_1^*(p_r) \times f_2^*(p_s^2) \times \ldots \times f_\ell^*(p_t^\ell)$$

Cada um dos fatores f_i^*, $1 \leq i \leq \ell$, que passaremos a representar por f^* se reduz a uma aplicação:

$$f^*: H^*(BSO(n^2-n+1) \to H^*(BU(n);Q)$$

e $f^*(p_k)$ é dado pela seguinte regra: (7; cap.4).

"Toma-se a k-ésima função simétrica elementar em $(t_i-t_j)^2$, $1 \leq i < j \leq n$, expressa em termos das classes de Chern que são as funções simétricas elementares nos t_i".

Para o caso $n = 2$, que nos interessa, temos:

$$f^*: H^*(BSO(3);Q) \longrightarrow H^*(BU(2);Q)$$

e, por 2.1.5 de (7).

$$f^*: Q[p_1] \longrightarrow Q[a_1, a_2]$$

Pela regra acima:

$$f^*(p_1) = (t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = a_1^2 - 4a_2$$

Exemplos:

(1) Para a variedade de Grassmann $F(2,2)$ vamos indicar por $q_1 = f_1^*(p_1)$ a classe correspondente ao primeiro fator $U(2)$ e com $q_1' = f_2^*(p_1)$ a classe correspondente ao segundo fator.

Então:

$$p_1(\nu) = i^*(q_1) + i^*(q_1') = -2x_1^2$$

$$p_2(\nu) = i^*(q_1)i^*(q_1') = -6x_1^2x_2$$

Pelo teorema J_2, como $p_2(\nu) \neq 0$ e dimensão de $F(2,2)$ é 8, temos:

$F(2,2)$ não mergulha em R^{12}.

(2) A variedade $F(2,2,1) = U(5) / U(2) \times U(2) \times U(1)$ tem dimensão 16; as classes de Pontriagin do fibrado normal são dadas por:

$$p_1(\nu) = i^*(q_1) + i(q_1') = -2x_1^2 - 3z_1^2 - 2x_1z_1$$

$$p_2(\nu) = i^*(q_1)i^*(q_1') =$$

$$= -6x_1^2x_2 - 9x_1x_2z_1 - 3x_2z_1^2 - x_1^2z_1^2 + 2x_1z_1^3 + 15z_1^4$$

Então $p_2(\nu) \neq 0$ e pelo teorema J_2, $F(2,2,1)$ não mergulha em R^{20}.

(3) A variedade $F(2,2,2) = U(6)/U(2) \times U(2) \times U(2)$ tem dimensão 24.

$$P_3(\nu) = i^*(q_1)i^*(q_1')i(q_1'') =$$

$$= -x_1^4z_1^2 - 18x_2^3 + 17x_1^2x_2^2 - 5x_1^3x_2z_1 + 5x_1^2x_2z_1^2 -$$

$$- 3x_1^4z_2 - 9x_1^3z_1z_2 - 6x_1^2z_1^2z_2 + 14x_1x_2^2z_1 + 2x_1^4z_1^2 +$$

$$+ 12x_1^2x_2z_2 - 4x_2^2z_1^2 + 36x_1x_2z_1z_2 + 24x_2z_1^2z_2$$

Todos esses geradores são livres em $H^{12}(F(2,2,2);Q)$ (para a cohomologia de $F(2,2,2)$ ver (8)), de modo que $p_3(\nu) \neq 0$ e consequentemente $F(2,2,2)$ não mergulha em R^{30}.

Estes resultados sugerem a seguinte generalização:

"$F(2^n) = U(2n) / (U(2) \times \ldots \times U(2)$ é tal que $p_n(\nu) = \prod_{j=1}^{n} i^*(q_1^j) \neq 0$ e então $F(2^n)$ não mergulha em R^{4n^2-2n}."

IV - NÃO-MERGULHO EM FIBRADO DE ESFERAS

Neste capítulo tomaremos como ambiente para mergulhos os espaços totais de certos fibrados de esferas; utilizaremos os resultados obtidos no capítulo II, especialmente o teorema da seção F_4 sobre integralidade do carácter de Chern para fibrados de esferas.

As variedades "teste" serão as flag-variedades complexas, consideradas no capítulo anterior.

Seja $\xi = (E,\pi, S^n)$ um $(p+1)$ - fibrado vetorial com p e n ímpares, de modo que a variedade compacta $S(\xi)$ tem dimensão par $L = p + n$; posteriormente, será feita uma nova restrição sobre o fibrado ξ a qual permitirá a descrição do fibrado normal de $M = G/H$.

O teorema seguinte, enunciado e demonstrado em (7) para esferas é o resultado básico para a obtenção de não-mergulhos; os elementos envolvidos no enunciado serão apresentados posteriormente assim como os diversos lemas que conduzem à prova do teorema.

K - *Teorema Fundamental*

K_1 - Teorema: Seja M^{2m} uma variedade diferenciável, fechada, orientada e conexa de dimensão par $2m$.

Se M mergulha em $S(\xi)$, com fibrado normal orientável ν^{2k}, então para todo $\theta \in K(M)$ tem-se:

$$<2^{K-1}ch(\theta)B(\nu),\ [M]> \in Z$$

Observação: A aplicação deste teorema depende do conhecimento dos seguintes elementos:

1. A cohomologia de M

2. A K-teoria de M

3. O fibrado normal de M

4. A classe B do fibrado normal.

Conhecendo-se estes elementos, os resultados de não-mergulho serão obtidos do seguinte modo:

Procura-se escrever a expressão:

$$\langle ch(\theta)B(\nu),\ [M]\rangle$$

na forma:

$$\frac{1}{2^k}x \quad \text{(número inteiro ímpar)}$$

Assim, $2^{k-1}\langle ch(\theta)B(\nu),\ [M]\rangle$ não é inteiro e podemos concluir que M não mergulha em $S(\xi)$, desde que $\dim S(\xi) = 2m + 2k = L$.

É claro que o resultado será tanto melhor quanto maior for o valor de K.

K_2 - Fibrados e Representações (7)

Dado um G-fibrado principal $E \xrightarrow{p} X$ e uma representação $V \in R(G)$, podemos construir um fibrado vetorial complexo sobre X:

$$Ex_G V \to X$$

Obtém-se então um homomorfismo de anéis:

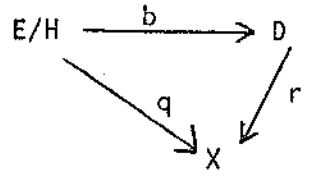
$$\alpha_E : R(G) \to K(X)$$

Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, consideramos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \overset{h}{\swarrow} & \downarrow p \\ E/H & \xrightarrow[q]{} & X \end{array}$$

A aplicação quociente $h: E \to E/H$ é um H-fibrado principal que denotaremos com $\bar{E}$.

Seja $D \xrightarrow{r} X$ o cilindro da aplicação $E/H \xrightarrow{q} X$, de modo que o diagrama



onde $b: E/H \to D$ é a inclusão, é comutativo; seja, ainda, $s: X \to D$ o mergulho canônico.

A aplicação inclusão $i: H \to G$ induz o homomorfismo restrição $i!: R(G) \to R(H)$ e a aplicação

$$t: D \to D/_{(E/H)} \quad \text{induz} \quad t!: K(D, E/H) \to K(D)$$

Vamos definir uma aplicação

$$d: \mathrm{Ker}(i!) \to K(D, E/H)$$

de modo que o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{array}{ccc} R(H) & \xrightarrow{\alpha_{\bar{E}}} & K(E/H) \\ i!\uparrow & & \uparrow b! \\ R(G) & \xrightarrow{r!\alpha_E} & K(D) \\ j\uparrow & & \uparrow t! \\ \mathrm{Ker}(i!) & \xrightarrow{d} & K(D, E/H) \end{array}$$

Para definir d, procede-se do seguinte modo:

Dada uma representação $u \in \mathrm{Ker}(i!)$, u pode ser escrita como V-W, onde V e W são representações de G, de mesma dimensão e que restritas ao subgrupo H são isomorfas. Usamos a parte superior para obter dois fibrados ξ_V e ξ_W sobre D, cujas restrições a E/H são equivalentes.

Nestas condições, obtém-se um elemento $d(\xi_V,\xi_W) \in K(D,E/H)$, pela aplicação da construção diferença dada em (7). Define-se então:

$$d(u) = d(\xi_V,\xi_W)$$

Faremos uso desta construção no caso em que o grupo $G = SO(n)$ e $H=SO(n-1)$.

K_3 - Lema: Dado um n-fibrado vetorial orientado ξ sobre uma variedade X, seja $E \xrightarrow{p} X$ o $SO(n)$-fi-rado principal associado ξ. Então o fibrado

$$E/H \xrightarrow{q} X, \quad H = SO(n-1)$$

é equivalente ao fibrado de esferas associado a ξ.

Demonstração:

O fibrado $E/H \xrightarrow{q} X$ é o $SO(n)$-fibrado com fibra $SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$ associado ao fibrado principal $E \xrightarrow{p} X$ (a prova está, por exemplo, em (13), página 67).

Logo, $S(\xi)$ e $E/H \xrightarrow{q} X$ são fibrados associados ao mesmo $SO(n)$-fibrado principal e portanto são equivalentes.

K_4 - Homomorfismo de Gysin

Sejam X e Y variedades compactas, conexas e orientadas; sejam $[X]$ e $[Y]$ as classes fundamentais de X e Y respectivamente.

Seja $f: X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua e seja $f_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ o homomorfismo induzido.

O *homomorfismo de Gysin* $f_!: H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$ associado a f é definido de modo que o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_*(X) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y) \\ \simeq\uparrow \cap[X] & & \simeq\uparrow \cap[Y] \\ H^*(X) & \xrightarrow{f_!} & H^*(Y) \end{array}$$

seja comutativo, isto é:

$$f_{\otimes}(a) \cap [Y] = f_*(a \cap [X])$$

O homomorfismo $f_{\otimes}$ tem as seguintes propriedades

(1) $f_{\otimes}(f^*(z) \cup w) = z \cup f_{\otimes}(w)$

(2) $f_{\otimes}(z)[Y] = z([X])$

K_5 - Lema: Seja I o núcleo da aplicação restrição:

$$i!: R(SO(2K)) \longrightarrow RSO(2K-1)$$

Seja M^{2m} como no teorema K_1 e seja

$$f: M \longrightarrow S(\xi)$$

um mergulho com fibrado normal ν^{2k}, orientável.

Então, para cada representação $V \in I$, existe uma aplicação:

$$f_V: K(M) \longrightarrow K(S(\xi))$$

satisfazendo:

a) $f! f_V(\theta) = \theta.\alpha(v)$

b) $ch(f_V(\theta)) = f_{\otimes}(ch(\theta).ch(v)/e)$

onde "e" é a classe de Euler do fibrado normal.

Demonstração:

Vamos definir f_V e justificar a propriedade (a); a prova de (b) dada em [7] aplica-se ao nosso caso, sem modificação.

Suponhamos, para simplificar a notação que f seja a inclusão de modo que M é suposta ser uma subvariedade de $S(\xi)$. O fibrado de discos associados ao fibrado ν pode ser realizado como uma vizinhança tubular D de M em $S(\xi)$;

Seja $A \to M$ o fibrado de esferas associado ao fibrado normal ν, pensado como bordo de D.

Pelo lema K_3 este fibrado de esferas é isomorfo ao fibrado

$$E/SO(2K-1) \xrightarrow{q} M$$

onde $E \xrightarrow{p} M$ é o $SO(2K)$ - fibrado principal sobre M, associado ao fibrado normal.

Além disso o fibrado de discos $D \xrightarrow{r} M$ é a aplicação cilindro de q.

Dada uma representação $v \in \tilde{I}$, podemos então aplicar a construção descrita em K_2 para obter $\beta = d(v) \in K(D,A)$.

Geometricamente, a construção de β, neste caso, pode ser vista do seguinte modo:

A partir de $v \in \tilde{I}$, obtem-se um fibrado $\alpha(v)$ sobre M; este fibrado é estendido a D de modo a se anular sobre A.

Definimos então

$$f_v : K(M) \to K(S(\xi))$$

de modo a tornar comutativo o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K(D,A) & \xrightarrow{h} & K(S(\xi),\ S(\xi)-D^0) \\ \uparrow \phi & & \downarrow j! \\ K(M) & \xrightarrow[f_v]{} & K(S(\xi)) \end{array}$$

onde ϕ é definida por $\phi(\theta) = \theta.\beta$, h é o isomorfismo dado por excisão e $j!$ é induzida pela inclusão.

Para provar (a) basta observar que $f_v(\theta)$ é obtido estendendo-se $\theta.\alpha(v)$ de M para D e depois para $S(\xi)$ - isto é possível pois $\theta.\beta$ se anula sobre $\partial D = A$.

Assim, ao restringirmos $f_V(\theta)$ a M através de f recupera-se $\theta.\alpha(v)$ ou seja:

$$f!f_V(\theta) = \theta.\alpha(v)$$

K_6 - Lema: Se M^{2m} mergulha em $S(\xi)$ com fibrado normal orientável ν^{2k} então a classe de Euler de ν é zero.

Demonstração:

Como $S(\xi)$ só tem cohomologia não nula nas dimensões 0, p, n, p + n segue-se que:

$$H^{2k}(S(\xi);Z) = 0$$

O fibrado normal sendo orientado, existe uma classe fundamental:

$$u \in H^{2k}(E,E_0;Z) \simeq H^{2k}(S(\xi),S(\xi)-M;Z)$$

As inclusões $M \subset S(\xi)$ e $S(\xi) \subset (S(\xi),S(\xi)-M)$ induzem homomorfismos:

$$H^{2k}(S(\xi),S(\xi)-M) \longrightarrow H^{2k}(S(\xi)) \longrightarrow H^{2k}(M)$$

e o homomorfismo composto leva a classe u na classe de Euler de ν - este resultado é o teorema 11.3, enunciado e demonstrado em [14].

Como $H^{2k}(S(\xi)) = 0$, o lema está provado.

K_7 - Lema: Sendo M como no teorema K_1, se M mergulha em $S(\xi)$ então para todo $\theta \in K(M)$ e para todo $v \in I$, tem-se:

$$< ch(\theta)ch(v)/e, [M] > \in Z$$

Demonstração:

Pelo teorema I_2, $ch(\theta)[S(\xi)] \in Z$, para todo $\theta \in K(S(\xi))$; pela propriedade (b) no lema K_5, temos

$$ch(f_V(\theta)) = f_{\oplus}(ch(\theta)ch(v)/e)$$

Avaliando na classe fundamental de $S(\xi)$ e aplicando a propriedade (2) do homomorfismo de Gysin, temos:

$$ch(f_V(\theta))[S(\xi)] = (ch(\theta)ch(v)/e)[M]$$

Como $f_V(\theta) \in K(S(\xi))$ o lado esquerdo é um número inteiro e portanto temos o lema demonstrado

K_8 - A classe B de um fibrado

As referências para esta parte são [14] e [7].

Dada uma série de potências:

$$f(t) = 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots$$

existe uma sequência multiplicativa $\{K_n\}$ associada a $f(t)$, definida por:

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma\, \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} S_{i_1 \ldots i_r}(x_1, \ldots, x_n)$$

Nesta expressão a soma é sobre as partições $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ de n e $S_{i_1 \ldots i_r}$ são os polinômios:

$$S_{i_1 \ldots i_r}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \Sigma\, t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r}$$

com σ_i a i-ésima função simétrica elementar nos t_i. Temos então:

$$K_1(\sigma_1) = \lambda_1 S_1(\sigma_1) = \lambda_1 \sigma_1$$

$$K_2(\sigma_1, \sigma_2) = \lambda_1^2 S_{11}(\sigma_1, \sigma_2) + \lambda_2 S_2(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$K_2(\sigma_1, \sigma_2) = \lambda_1^2 \sigma_2 + \lambda_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)$$

$$K_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \lambda_1^3 S_{111}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \lambda_1 \lambda_2 S_{12}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \lambda_3 S_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$K_3(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \lambda_1^3\sigma_3 + \lambda_1\lambda_2(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3) + \lambda_3(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3).$$

Dado o fibrado vetorial real, orientado, η definimos a classe $B(\eta)$ do seguinte modo:

Toma-se a sequência multiplicativa:

$$B = 1 + B_1 + B_2 + \ldots$$

associada a série de potências:

$$f(t) = \frac{\text{sen h } \sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1 + \frac{1}{3!}\,t + \frac{1}{5!}\,t^2 + \frac{1}{7!}\,t^3 + \ldots$$

avaliada nas classes de Pontriagin $p_1, p_2, p_3, \ldots$ do fibrado η. Tem-se então:

$$B_1(p_1) = \frac{1}{6}\,p_1$$

$$B_2(p_1,p_2) = \frac{1}{36}\,p_2 + \frac{1}{120}\,(p_1^2-2p_1p_2)$$

$$B_3(p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{216}\,p_3 + \frac{1}{720}\,(p_1p_2-3p_3) + \frac{1}{7!}\,(p_1^3-3p_1p_2+3p_3)$$

$$B(\eta) = 1 + B_1(p_1) + B_2(p_1,p_2) + B_3(p_1,p_2,p_3) + \ldots$$

Assim, para calcular a classe $B(\eta)$ devemos conhecer as classes de Pontriagin de η.

K_9 - Se M mergulha em $S(\xi)$ com fibrado normal orientável ν, então existe uma representação $\mu \in I$ tal que:

$$ch(\mu)/e = 2^{k-1}B(\nu)$$

A demonstração é a dada em (7), observando-se o lema K_6.

Demonstração do Teorema K_1:

Após esta sequência de lemas a prova do teorema fundamental resulta imediata:

$$\langle 2^{k-1}ch(\theta)B(\nu), [M]\rangle = \langle ch(\theta)ch(\mu)/e, [M]\rangle$$

que é um número inteiro, pelo lema K_7.

Observação: As propriedades de $S(\xi)$ que permitiram a conclusão do teorema K_1 são as dadas no teorema I_2 (integralidade do carácter de Chern) e no lema K_6 (nulidade da classe de Euler para fibrados normais de mergulhos).

K_{10} - Lema: Seja $\xi_1,\ldots,\xi_p$ uma base aditiva de $K(M)$ e suponhamos que:

$$<2^{k-1}ch(\xi_i)B(\nu),[M]>\in Z$$

para todo $i = 1, \ldots, p$. Então:

$$<2^{k-1}ch(\xi)B(\nu),[M]>\in Z$$

para todo $\xi \in K(M)$.

Demonstração:

Seja $\xi = n_1\xi_1 + \ldots + n_p\xi_p$ onde $n_1,\ldots,n_p$ são inteiros. Então:

$ch(\xi) = n_1ch(\xi_1) + \ldots + n_pch(\xi_p)$ e

$< 2^{k-1}ch(\xi)B(\nu), [M] > = \sum_{i=1}^{p} n_i < 2^{k-1}ch(\xi_i)B(\nu), [M] >$

que é um número inteiro.

Observação: Com este lema, podemos obter o melhor resultado de não-mergulho considerando uma base aditiva de $K(M)$ e uma vez encontrado o maior valor de k tal que $< 2^{k-1}ch(\xi_i)B(\nu),[M] >$ é inteiro mas $< 2^{k-2}ch(\xi_i)B(\nu), [M] >$ não é inteiro, podemos concluir que a variedade M não mergulha em $S(\xi)$ se $\dim S(\xi) = L = 2m + 2(K-1)$.

L - *Fibrado Normal de G/H em S(ξ)*

Seja ξ um $(p+1)$-fibrado vetorial sobre S^n com p e n ímpares e tal que $\tau S^n \oplus \xi$ seja trivial, isto é, ξ é o fibrado normal de uma imersão de S^n em R^{n+p+1}. Nestas condições vale o teorema K_1 e pelo corolário B_6, $S(\xi)$

é uma variedade paralelizável. Podemos então, com a mesma prova dada em (7), capítulo IV, concluir o seguinte:

L_1 - Teorema: O fibrado normal de G/H em $S(\xi)$ é classificado pela aplicação:

$$G/H \xrightarrow{i} BH \xrightarrow{f} BSO(\dim H)$$

Com este teorema, podemos utilizar os resultados do parágrafo J_4 relativos às classes de Pontriagin do fibrado normal de G/H.

L_2 - A classe B do fibrado normal a G/H

a) A variedade F(2,2) tem as seguintes classes:

$B_1(p_1) = -\frac{1}{3}x_1^2$ e $B_k = 0$ se $K \geq 2$

De modo que $B(\nu) = 1 - \frac{1}{3}x_1^2$

b) Para a variedade F(2,2,1), temos:

$B_1(p_1) = \frac{1}{6}\left[-2x_1^2-3z_1^2-2x_1z_1\right]$

$B_2(p_1,p_2) = \frac{1}{90}\left[-6x_1^2x_2-9x_1x_2z_1-3x_2z_1^2-x_1^2z_1^2+2x_1z_1^3+15z_1^4\right] + \frac{1}{120}(-2x_1^2-3x_1^2-2x_1z_1)^2$

$B_2(p_1,p_2) = \frac{1}{18}x_1^2z_1^2 + \frac{1}{18}x_1z_1^3 + \frac{5}{24}z_1^4$

$B_3(p_1,p_2,0) = -\frac{1}{72}x_1^2z_1^4$

$B_4(p_1,p_2,0,0) = 0$ e $B_k = 0$ se $k \geq 4$

Observação: Parte desses cálculos puderam ser feitos com o auxílio do computador; especialmente, produtos de polinômios são feitos sem dificuldades. Entretanto, as simplificações provenientes das relações na cohomologia apresentam algumas dificuldades.

Para obter outras flag-variedades, mesmo F(2,2,2), devido ao grande número de geradores e relações na cohomologia os cálculos são muito longos e por isso

ficaremos, apenas, com os exemplos (a) e (b).

M - *K-Teoria e Carácter de Chern para as flag-variedades*

Daremos uma descrição rápida da K-teoria das flag-variedades e um processo para computar o carácter de Chern dos elementos de uma base aditiva; detalhes estão em [7] e [8].

Dado o H-fibrado principal:

$$H \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H$$

tem-se um homomorfismo:

$$\alpha_\pi : RH \to K(G/H)$$

onde RH denota o anel de representações complexas do grupo H; em nosso caso, $G = U(n)$ e $H = U(n_1) \times \ldots \times U(n_k)$. Para simplificar, focalizaremos apenas os casos $H = U(2) \times U(2)$ e $H = U(2) \times U(2) \times U(1)$, sendo que a situação para qualquer outra flag-variedade é análoga.

M_I - A variedade $F(2,2)$

Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 as representações elementares do toro $T(4) \subset U(4)$ e sejam:

$$\gamma^i = \sigma_i(z_1-1, z_2-1, z_3-1, z_4-1), \quad i = 1,2,3,4$$

funções simétricas elementares. Sejam ainda:

$$\alpha_i = \sigma_i(z_1-1, z_2-1) \in R \cup (2), \quad i = 1,2$$

$$\beta_i = \sigma_i(z_3-1, z_4-1) \in R \cup (2), \quad i = 1,2$$

$$\xi_i = \alpha_\pi(\alpha_i) \in K(F(2,2))$$

Por definição, $ch(\xi_i) = ch(\alpha_i) = \sigma_i(e^{t_1}-1, e^{t_2}-1)$ e isto nos dá:

$$ch(\xi_i) = x_i + \text{termos de graus superiores}$$

Este fato, juntamente com o teorema 3.3.7 de (8) permitem provar o seguinte:

M_2 - Teorema: A K-teoria $K(F(2,2))$ tem como base aditiva os seis monômios seguintes:

$$1,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_1^2,\ \xi_1\xi_2,\ \xi_1^2\xi_2$$

A estrutura multiplicativa é análoga à correspondente para a cohomologia e as relações são, formalmente, as mesmas.

Para calcular o carácter de Chern dos elementos da base basta calcular $ch(\xi_1)$ e $ch(\xi_2)$ e usar a propriedade multiplicativa de ch. Assim:

$$ch(\xi_1) = \sigma_1(e^{t_1}-1, e^{t_2}-1) = e^{t_1}-1 + e^{t_2}-1 =$$

$$= t_1 + t_2 + \frac{t_1^2+t_2^2}{2} + \frac{t_1^3+t_2^3}{3!} + \ldots$$

$$= x_1 + \frac{x_1^2-2x}{2} - \frac{x_1x_2}{3!}$$

$$ch(\xi_2) = \sigma_2(e^{t_1}-1, e^{t_2}-1) = (e^{t_1}-1)(e^{t_2}-1)$$

$$= t_1t_2 + \frac{t_1t_2^2+t_2t_1^2}{2} + \frac{t_1t_2^3+t_2t_1^3}{3!} + \frac{t_1^2t_2^2}{4} + \ldots$$

$$= x_2 + \frac{x_1x_2}{} + \frac{x_1^2x_2}{12}$$

M_3 - A variedade $F(2,2,1)$

Sejam $z_1, \ldots, z_5$ as representações elementares de $T(5) \subset U(5)$; sejam, ainda:

$$\alpha_i = \sigma_i(z_1-1, z_2-1), \quad i = 1,2$$

$$\beta_i = \sigma_i(z_3-1, z_4-1), \quad i = 1,2$$

$$\lambda_1 = \sigma_1(z_5-1)$$

$$\xi_i = \alpha_\pi(\alpha_i), \quad i = 1,2$$

$$\lambda = \alpha_\pi(\lambda_1)$$

M_4 - Teorema: Os seguintes monômios:

$1, \xi_1, \lambda, \xi_1^2, \xi_1\lambda, \lambda^2, \xi_2, \xi_1\xi_2, \lambda\xi_2, \xi_1^2\lambda,$

$\xi_1\lambda^2, \lambda^3, \xi_1^2\xi_2, \xi_1^2\lambda^2, \xi_1\lambda^3, \xi_1\xi_2\lambda, \xi_2\lambda^2, \lambda^4,$

$\xi_1\lambda^4, \xi_1^2\xi_2\lambda, \xi_1\xi_2\lambda^2, \xi_2\lambda^3, \xi_1^2\lambda^3, \xi_1^2\xi_2\lambda^2, \xi_1\xi_2\lambda^3,$

$\xi_2\lambda^4, \xi_1^2\lambda^4, \xi_1^2\xi_2\lambda^3, \xi_1\lambda_2\lambda^4, \xi_1^2\xi_2\lambda^4$

formam uma base aditiva de $K(F(2,2,1))$ ou seja a K-teoria de $F(2,2,1)$ é constituída de 30 (trinta) cópias de Z; a estrutura multiplicativa e as relações são análogas às correspondentes cohomologia.

Devemos calcular $ch(\xi_1)$, $ch(\xi_2)$ e $ch(\lambda)$ e usar o fato que ch é um homomorfismo de anéis para calcular o carácter de Chern dos diversos monômios que comparecem na base

N - *Cálculo de ch(ξ) B(ν)*

N_1 - Para a variedade $F(2,2)$

$$B(\nu) = 1 - \frac{1}{3}x_1^2$$

$$ch(1) = 1$$

$$ch(\xi_1) = x_1 + \frac{x_1^2 - 2x_2}{2} - \frac{x_1x_2}{6}$$

$$ch(\xi_2) = x_2 + \frac{x_1x_2}{2} + \frac{x_1^2x_2}{12}$$

$$ch(\xi_1^2) = x_1^2 + \frac{1}{6}x_1^2x_2$$

$$ch(\xi_1\xi_2) = x_1x_2$$

$$ch(\xi_1^2\xi_2) = x_1^2x_2$$

$$ch(1)B(\nu)\left[F(2,2)\right] = 0$$

$$ch(\xi_1)B(\nu)\left[F(2,2)\right] = 0$$

$$ch(\xi_2)B(\nu)\left[F(2,2)\right] = -\frac{1}{2^2}$$

$$ch(\xi_1^2)B(\nu)\left[F(2,2)\right] = -\frac{1}{2}$$

$$ch(\xi_1\xi_2)B(\nu)\left[F(2,2)\right] = 0$$

$$ch(\xi_1^2\xi_2)B(\nu)\left[F(2,2)\right] = 1$$

Assim, o melhor resultado é dado por:

$$<ch(\xi_2)B(\nu),\ \left[F(2,2)\right] > = -\frac{1}{2^2}$$

Como $< 2^1 ch(\xi_2)B(\nu),\ \left[F(2,2)\right] > \notin Z$, tomamos $K-1 = 1$ e concluímos que $F(2,2)$ não mergulha em $S(\xi)$ se $L = \dim S(\xi) = 12$ e ξ é um $(p+1)$-fibrado vetorial sobre S^n com p e n ímpares e $\tau S^n \oplus \xi$ trivial

N_2 - Para a variedade $F(2,2,1)$, usaremos A_i para indicar o valor de $<ch(\xi)B(\nu),\ \left[F(2,2,1)\right] >$ quando ξ percorre a base aditiva de $K(F(2,2,1))$, na ordem apresentada, de modo que $i = 1,2,\ldots,30$.

Para calcular o carácter de Chern nos elementos da base, aplicamos as seguintes fórmulas:

$$ch(\xi_1) = \sum_{n\geq 1} \frac{S_n(x_1,x_2,0,\ldots 0)}{n!}$$

$$ch(\xi_2) = e^{x_1} - 1 - ch(\xi_1)$$

$$ch(\lambda) = e^{z_1} - 1$$

as quais decorrem facilmente da definição.

Um cálculo direto com os polinômios S_n, dados no anexo 2, mostram que:

$$S_i(x_1,x_2,0,\ldots,0) = 0 \quad \text{se} \quad i \geq 5 \quad \text{e}$$

$$ch(\xi_1) = S_1(x_1) + \frac{1}{2} S_2(x_1,x_2) + \frac{1}{3!} S_3(x_1,x_2,0) +$$

$$+ \frac{1}{4!} S\ (x_1,x_2,0,0)$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Então:

$$ch(\xi_1) = x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2-2x_2) + \frac{1}{3!}(-x_1x_2+x_2z_1-x_1^2z_1-x_1z_1^2-z_1^3) +$$

$$+ \frac{1}{4!}(x_1x_2z_1+x_2z_1^2-z_1^4)$$

$$ch(\xi_2) = x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{12}x_1^2x_2 - \frac{1}{12}x_1x_2z_1 - \frac{1}{12}x_2z_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{12}z_1^4 + \frac{1}{5!}x_1^5 + \frac{1}{6}x_1^6$$

$$ch(\lambda) = z_1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3!}z_1^3 + \frac{1}{4!}z_1^4$$

$$B(\nu) = 1 + \frac{1}{6}\left[-2x_1^2-3z_1^2-2x_1z_1\right] + \frac{1}{18}x_1^2z_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{18}x_1z_1^3 + \frac{5}{24}z_1^4 - \frac{1}{72}x_1^2z_1^4$$

Os cálculos seguintes foram efetuados com o auxílio do computador e os resultados obtidos são:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_{20} = A_{29} = 0$$

$$A_{21} = \frac{1}{4} \qquad A_{22} = A_{25} = A_{26} = -\frac{1}{4}$$

$$A_{23} = A_{24} = A_{27} = -\frac{1}{2} \qquad A_{28} = \frac{1}{2} \qquad A_{30} = 1$$

Devemos então tomar $K - 1 = 1$ e concluímos que $F(2,2,1)$ não mergulha em $S(\xi)$ para $L = \dim S(\xi) = 16 + 4$, sendo ξ um $(p+1)$-fibrado sobre S^n com p e n ímpares e $\tau S^n \oplus \xi$ trivial.

N_3 - A variedade $F(2,1,1)$

Para esta variedade os cálculos foram efetuados completamente e o resultado obtido é o seguinte: $F(2,1,1)$ não mergulha em $S(\xi)$ se $\dim S(\xi) = 12$ sendo ξ um fibrado como antes.

N_4 - Os resultados obtidos em (7) para as variedades de Grassmann, nos levam aos seguintes:

(1) $F(2,3)$ não mergulha em $S(\xi)$, se $\dim S(\xi) = 20$

(2) $F(2,4)$ não mergulha em $S(\xi)$, se $\dim S(\xi) = 28$

0 - *Teorema Final*

0_1 - Teorema: Seja ξ um $(p+1)$-fibrado vetorial sobre S^n, com p e n ímpares e tal que $\tau S^n \oplus \xi$ é trivial; seja $L = p + n = \dim S(\xi)$. Então:

(1) $F(2,2) \not\subset S(\xi)$ se $L = 12$

(2) $F(2,3) \not\subset S(\xi)$ se $L = 20$

(3) $F(2,4) \not\subset S(\xi)$ se $L = 28$

(4) $F(2,2,1) \not\subset S(\xi)$ se $L = 20$

(5) $F(2,1,1) \not\subset S(\xi)$ se $L = 12$

0_2 - Se $\xi = \theta^{p+1}$ é o $(p+1)$ - fibrado trivial sobre S^n, com p e n ímpares, $S(\xi) = S^n \times S^p$ e temos então resultados de não-mergulho em produtos de esferas de dimensões ímpares.

ANEXO I

Cohomologia de F(2,2,1)

1. Geradores: x_1, x_2, z_1

2. Z-base: $1, x_1, z_1, x_1^2, x_1z_1, z_1^2, x_2, x_1x_2,$

$x_2z_1, x_1^2z_1, x_1z_1^2, z_1^3, x_1^2x_2, x_1^2z_1^2, x_1z_1^3, x_1x_2z_1,$

$x_2z_1^2, z_1^4, x_1z_1^4, x_1^2x_2z_1, x_1^2x_2z_1, x_2z_1^3, x_1^2z_1^3,$

$x_1^2x_2z_1^2, x_1x_2z_1^3, x_2z_1^4, x_1^2z_1^4, x_1^2x_2z_1^3, x_1x_2z_1^4, x_1^2x_2z_1^4$

3. Relações:

a) Dimensão 6

$$x_1^3 = 2x_1x_2 + x_2z_1 - x_1^2z_1 - x_1z_1^2 - z_1^3$$

b) Dimensão 8

$$x_1^4 = 2x_1^2x_2 - x_1x_2z_1 - x_2z_1^2 + z_1^4$$

$$x_2^2 = x_1^2x_2 + x_1x_2z_1 + x_2z_1^2 - z_1^4$$

$$x_1^3z_1 = 2x_1x_2z_1 + x_2z_1^2 - x_1^2z_1^2 - x_1z_1^3 - z_1^4$$

c) Dimensão 10

$$x_1^5 = 5x_1z_1^4 - 5x_1^2x_2z_1 - 5x_1x_2z_1^2$$

$$x_1x_2^2 = x_1z_1^4 - x_1^2x_2z_1 - x_1x_2z_1^2$$

$$x_1^3x_2 = 2x_1z_1^4 - 2x_1^2x_2z_1 - 2x_1x_2z_1^2$$

$$x_2^2z_1 = x_1^2x_2z_1 + x_1x_2z_1^2 + x_2z_1^3$$

$$x_1^3z_1^2 = 2x_1x_2z_1^2 + x_2z_1^3 - x_1^2z_1^3 - x_1z_1^4$$

$$z_1^5 = 0$$

d) Dimensão 12

$$x_1^6 = 5x_1^2z_1^4 + 5x_1^2x_2z_1^2 + 10x_1x_2z_1^3$$

$$x_2^3 = x_1^2z_1^4 + x_1^2x_2z_1^2 + 2x_1x_2z_1^3$$

$$x_1^2x_2^2 = x_1^2z_1^4 + x_1^2x_2z_1^2 + 2x_1x_2z_1^3$$

$$x_1x_2^2z_1 = -x_1^2x_2z_1^2 - x_1x_2z_1^3$$

$$x_1^3x_2z_1 = -2x_1^2x_2z_1 - 2x_1x_2z_1^3$$

$$x_2^2z_1^2 = x_1^2x_2z_1^2 + x_1x_2z_1^3 + x_2z_1^4$$

$$x_1^3z_1^3 = 2x_1x_2z_1^3 + x_2z_1^4 - x_1^2z_1^4$$

$$x_1^4x_2 = 4x_1x_2z_1^3 + 2x_1^2z_1^4 + 2x_1^2x_2z_1^2$$

e) Dimensão 14

$$x_1^2x_2^2z_1 = x_1^2x_2z_1^3 + 2x_1x_2z_1^4$$

$$x_1x_2^2z_1^2 = -x_1^2x_2z_1^3 - x_1x_2z_1^4$$

$$x_1^3x_2z_1^2 = -2x_1^2x_2z_1^3 - 2x_1x_2z_1^4$$

$$x_2^2z_1^3 = x_1^2x_2z_1^3 + x_1x_2z_1^4$$

$$x_1^3z_1^4 = 2x_1x_2z_1^4$$

$$x_1^7 = x_2x_1^5 = x_1^3x_2^2 = x_1x_2^3 = 0$$

f) Dimensão 16

$$x_1^2x_2^2z_1^2 = x_1^2x_2z_1^4$$

$$x_1x_2^2z_1^3 = -x_1^2x_2z_1^4$$

$$x_1^3x_2z_1^3 = -2x_1^2x_2z_1^4$$

$$x_1^4z_1^4 = 2x_1^2x_2z_1^4$$

$$x_1^4x_2z_1^2 = 2x_1^2x_2z_1^4$$

$$x_1^5z_1^3 = -5x_1^2x_2z_1^4$$

$$x_2^2 z_1^4 = x_1^2 x_2 z_1^4 \qquad x_1^6 z_1^2 = 5x_1^2 x_2 z_1^4$$

$$x_2^3 z_1^2 = x_1^2 x_2 z_1^4$$

$$x_2 x_1^6 = x_2^4 = x_1^4 x_2^2 = x_1^3 x_2^2 z_1 = x_1 x_2^3 z_1 = 0$$

ANEXO 2

Polinômios S_n, $n = 1, 2, \ldots 8$.

$$S_1(\sigma_1) = \sigma_1$$

$$S_2(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$S_3(\sigma_1,\sigma_2,0) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

$$S_4(\sigma_1,\sigma_2,\ 0,0) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

$$S_5(\sigma_1,\sigma_2,\ 0\ldots) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

$$S_6(\sigma_1,\sigma_2,\ 0\ldots) = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$$

$$S_7(\sigma_1,\sigma_2,\ 0\ldots) = \sigma_1^7 - 7\sigma_2\sigma_1^5 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$$

$$S_8(\sigma_1,\sigma_2,\ 0\ldots) = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_2^2\sigma_1^4 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$$

ANEXO 3

Cálculos no Computador

Este anexo consiste de uma listagem do computador, onde foram efetuados os cálculos dos produtos de polinômios envolvidos na expressão:

$$A_i = \langle ch\ (\xi_i)\ B(\nu),\ [F(2,2,1)] \rangle,\ i = 1,\ldots.30.$$

Notação:

$P_1 = ch(\xi_1)$

$P_2 = ch\ \xi_2$

$P_3 = ch(\lambda)$

$B = B(\nu)$

Observações:

1) Os símbolos * e ⌒ significam produto e potência; por exemplo:

$$(1/_2 * Z_1 \frown 2) = \frac{1}{2}\ Z_1^2$$

2) As variáveis y_1 e y_2 correspondem às variáveis x_1, x_2 do texto.

3) Os monômios assinalados são os que se situam na dimensão de F(2,2,1), que é 16; a partir deles, observadas as relações em $H^{16}(F(2,2,1).)$ que estão na página 54, calcula-se facilmente os valores de A_i, i = 1,2,... 30.

VARIAVEIS :
Y1 Y2 Z1
MONOMIOS A ZERAR
+(Z1^5)
+(Y1^7)
+(Y1^5*Y2)
+(Y1^3*Y2^2)
+(Y1*Y2^3*Z1)
+(Y1^4*Y2^2)
+(Y1^3*Y2^2*Z1)
+(Y2^4)
+(Y1^2*Y2^3)
+(Y1^6*Y2)
+(Y1^5*Y2*Z1)

P1=

-(1/6*Z1^3)-(1/24*Z1^4)-(Y2)+(1/6*Y2*Z1)+(1/24*Y2*Z1^2)+(Y1) -(1/6*Y1*Z1^2)-(1/6*Y1*Y2)+(1/24*Y1*Y2*Z1)+(1/2*Y1^2)-(1/6*Y1^2*Z1)

P2=

+(1/12*Z1^4)+(Y2)-(1/12*Y2*Z1^2)+(1/2*Y1*Y2)-(1/12*Y1*Y2*Z1)+(1/12*Y1^2*Y2) +(1/120*Y1^5)+(1/720*Y1^6)

P3=

+(Z1)+(1/2*Z1^2)+(1/6*Z1^3)+(1/24*Z1^4)

B=

+(1)-(1/2*Z1^2)+(5/24*Z1^4)-(1/3*Y1*Z1)+(1/18*Y1*Z1^3)-(1/3*Y1^2) +(1/18*Y1^2*Z1^2)-(1/72*Y1^2*Z1^4)

P1.B=

-(1/6*Z1^3)-(1/24*Z1^4)-(Y2)+(1/6*Y2*Z1)+(13/24*Y2*Z1^2)-(1/12*Y2*Z1^3) -(11/48*Y2*Z1^4)+(Y1)-(2/3*Y1*Z1^2)+(25/72*Y1*Z1^4)-(1/6*Y1*Y2)+(3/8*Y1*Y2*Z1)+(1/36*Y1*Y2*Z1^2) -(13/144*Y1*Y2*Z1^3)-(11/432*Y1*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1^2)-(1/2*Y1^2*Z1)-(1/4*Y1^2*Z1^2)+(1/4*Y1^2*Z1^3)+(17/144*Y1^2*Z1^4) +(1/3*Y1^2*Y2)-(1/12*Y1^2*Y2*Z1^2)+(1/54*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^3)-(1/6*Y1^3*Z1)+(1/6*Y1^3*Z1^2)+(1/36*Y1^3*Z1^3) -(7/216*Y1^3*Z1^4)+(1/18*Y1^3*Y2)-(1/72*Y1^3*Y2*Z1)-(1/108*Y1^3*Y2*Z1^2)+(1/432*Y1^3*Y2*Z1^3)+(1/432*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/6*Y1^4) +(1/18*Y1^4*Z1)+(1/36*Y1^4*Z1^2)-(1/108*Y1^4*Z1^3)-(1/144*Y1^4*Z1^4)

P3.B=

+(Z1)+(1/2*Z1^2)-(1/3*Z1^3)-(5/24*Z1^4)-(1/3*Y1*Z1^2)-(1/6*Y1*Z1^3) -(1/3*Y1^2*Z1)-(1/6*Y1^2*Z1^2)+(1/72*Y1^2*Z1^4)

P2.B=

+(1/12*Z1^4)+(Y2)-(7/12*Y2*Z1^2)+(1/4*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1*Y2)-(5/12*Y1*Y2*Z1) -(1/4*Y1*Y2*Z1^2)+(1/8*Y1*Y2*Z1^3)+(5/48*Y1*Y2*Z1^4)-(1/36*Y1^2*Z1^4)-(1/4*Y1^2*Y2)-(1/6*Y1^2*Y2*Z1)+(5/72*Y1^2*Y2*Z1^2) +(1/36*Y1^2*Y2*Z1^3)-(5/864*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/8*Y1^3*Y2)+(1/36*Y1^3*Y2*Z1^2)-(1/144*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/36*Y1^4*Y2)+(1/216*Y1^4*Y2*Z1^2) -(1/864*Y1^4*Y2*Z1^4)+(1/120*Y1^5)-(1/240*Y1^5*Z1^2)+(1/576*Y1^5*Z1^4)+(1/720*Y1^6)-(1/360*Y1^6*Z1)-(1/1440*Y1^6*Z1^2) +(1/2160*Y1^6*Z1^3)+(1/3456*Y1^6*Z1^4)

P1^2 . B=

+(1/3*Y2*Z1^3)+(1/36*Y2*Z1^4)+(Y2^2)-(1/3*Y2^2*Z1)-(5/9*Y2^2*Z1^2)+(13/72*Y2^2*Z1^3) +(137/576*Y2^2*Z1^4)-(1/3*Y1*Z1^3)-(1/12*Y1*Z1^4)-(2*Y1*(2)+(1/3*Y1*Y2*Z1)+(17/12*Y1*Y2*Z1^2)-(1/6*Y1*Y2*Z1^3) -(3/8*Y1*Y2*Z1^4)+(1/3*Y1*Y2^2)-(17/36*Y1*Y2^2*Z1)-(1/18*Y1*Y2^2*Z1^2)+(127/576*Y1*Y2^2*Z1^3)+(5/108*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2) -(5/6*Y1^2*Z1^2)-(1/6*Y1^2*Z1^3)+(19/36*Y1^2*Z1^4)-(4/3*Y1^2*Y2)+(5/4*Y1^2*Y2*Z1)+(83/72*Y1^2*Y2*Z1^2)-(49/72*Y1^2*Y2*Z1^3) -(125/432*Y1^2*Y2*Z1^4)-(11/36*Y1^2*Y2^2)-(1/72*Y1^2*Y2^2*Z1)+(1/1152*Y1^2*Y2^2*Z1^2)+(1/432*Y1^2*Y2^2*Z1^3)-(223/10368*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(Y1^3) +(2/3*Y1^3*Z1)-(2/3*Y1^3*Z1^2)+(1/2*Y1^3*Z1^3)+(3/8*Y1^3*Z1^4)+(1/2*Y1^3*Y2)+(31/72*Y1^3*Y2*Z1)-(3/8*Y1^3*Y2*Z1^2) -(17/144*Y1^3*Y2*Z1^3)+(5/72*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/12*Y1^4)-(1/2*Y1^4*Z1)+(13/72*Y1^4*Z1^2)+(1/4*Y1^4*Z1^3)-(13/288*Y1^4*Z1^4) +(4/9*Y1^4*Y2)-(5/36*Y1^4*Y2*Z1)-(13/108*Y1^4*Y2*Z1^2)+(1/27*Y1^4*Y2*Z1^3)+(17/864*

Y1^4*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^5)+(1/36*Y1^5*Z1) +(1/6*Y1^5*Z1^2)-(7/216*Y1^5*Z1^3)-(7/216*Y1^5*Z1^4)-(1/12*Y1^6)+(1/18*Y1^6*Z1^2)-(1/216*Y1^6*Z1^3)-(1/108*Y1^6*Z1^4)

P1 . P3 . B=

-(1/6*Z1^4)-(Y2*Z1)-(1/3*Y2*Z1^2)+(11/24*Y2*Z1^3)+(25/144*Y2*Z1^4)+(Y1*Z1) +(1/2*Y1*Z1^2)-(1/2*Y1*Z1^3)-(7/24*Y1*Z1^4)-(1/6*Y1*Y2*Z1)+(7/24*Y1*Y2*Z1^2)+(3/16*Y1*Y2*Z1^3)-(1/48*Y1*Y2*Z1^4) +(1/2*Y1^2*Z1)-(1/4*Y1^2*Z1^2)-(5/12*Y1^2*Z1^3)+(1/16*Y1^2*Z1^4)+(1/3*Y1^2*Y2*Z1)+(1/6*Y1^2*Y2*Z1^2)-(1/36*Y1^2*Y2*Z1^3) -(1/36*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^3*Z1)-(1/3*Y1^3*Z1^2)+(1/36*Y1^3*Z1^3)+(5/72*Y1^3*Z1^4)+(1/18*Y1^3*Y2*Z1)+(1/72*Y1^3*Y2*Z1^2) -(1/144*Y1^3*Y2*Z1^3)-(1/432*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/6*Y1^4*Z1)-(1/36*Y1^4*Z1^2)+(1/36*Y1^4*Z1^3)+(1/144*Y1^4*Z1^4)

P3^2 . B=

+(Z1^2)+(Z1^3)+(1/12*Z1^4)-(1/3*Y1*Z1^3)-(1/3*Y1*Z1^4)-(1/3*Y1^2*Z1^2) -(1/3*Y1^2*Z1^3)-(5/36*Y1^2*Z1^4)

P1.P2.B=

-(1/6*Y2*Z1^3)-(1/8*Y2*Z1^4)-(Y2^2)+(1/6*Y2^2*Z1)+(5/9*Y2^2*Z1^2)-(7/72*Y2^2*Z1^3) -(79/288*Y2^2*Z1^4)+(1/12*Y1*Z1^4)+(Y1*Y2)-(3/4*Y1*Y2*Z1^2)-(1/12*Y1*Y2*Z1^3)+(55/144*Y1*Y2*Z1^4)-(2/3*Y1*Y2^2) +(13/24*Y1*Y2^2*Z1)+(43/144*Y1*Y2^2*Z1^2)-(5/24*Y1*Y2^2*Z1^3)-(13/96*Y1*Y2^2*Z1^4)+(1/24*Y1^2*Z1^4)+(Y1^2*Y2)-(7/12*Y1^2*Y2*Z1) -(5/8*Y1^2*Y2*Z1^2)+(1/3*Y1^2*Y2*Z1^3)+(97/288*Y1^2*Y2*Z1^4)+(1/6*Y1^2*Y2^2)+(31/144*Y1^2*Y2^2*Z1)-(1/12*Y1^2*Y2^2*Z1^2)-(47/864*Y1^2*Y2^2*Z1^3) +(1/864*Y1^2*Y2^2*Z1^4)-(1/36*Y1^3*Z1^4)-(11/24*Y1^3*Y2*Z1)+(1/16*Y1^3*Y2*Z1^2)+(3/16*Y1^3*Y2*Z1^3)+(11/432*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/72*Y1^4*Z1^4) -(7/24*Y1^4*Y2)-(1/24*Y1^4*Y2*Z1)+(17/144*Y1^4*Y2*Z1^2)+(1/144*Y1^4*Y2*Z1^3)-(31/1728*Y1^4*Y2*Z1^4)-(1/720*Y1^5*Z1^3)-(1/2880*Y1^5*Z1^4) +(1/120*Y1^6)-(1/180*Y1^6*Z1^2)-(1/4320*Y1^6*Z1^3)+(49/17280*Y1^6*Z1^4)

P2.P3.B=

+(Y2*Z1)+(1/2*Y2*Z1^2)-(5/12*Y2*Z1^3)-(1/4*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1*Y2*Z1)-(1/6*Y1*Y2*Z1^2) -(3/8*Y1*Y2*Z1^3)-(7/144*Y1*Y2*Z1^4)-(1/4*Y1^2*Y2*Z1)-(7/24*Y1^2*Y2*Z1^2)-(1/18*Y1^2*Y2*Z1^3)+(7/288*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/6*Y1^3*Y2*Z1) -(1/12*Y1^3*Y2*Z1^2)+(1/144*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/36*Y1^4*Y2*Z1)-(1/72*Y1^4*Y2*Z1^2)+(1/864*Y1^4*Y2*Z1^3)+(1/120*Y1^5*Z1)+(1/240*Y1^5*Z1^2) -(1/360*Y1^5*Z1^3)-(1/576*Y1^5*Z1^4)+(1/720*Y1^6*Z1)-(1/480*Y1^6*Z1^2)-(1/540*Y1^6*Z1^3)-(1/3456*Y1^6*Z1^4)

P1^2.P3.B=

+(1/3*Y2*Z1^4)+(Y2^2*Z1)+(1/6*Y2^2*Z1^2)-(5/9*Y2^2*Z1^3)-(1/9*Y2^2*Z1^4)-(1/3*Y1*Z1^4) -(2*Y1*Y2*Z1)-(2/3*Y1*Y2*Z1^2)+(5/4*Y1*Y2*Z1^3)+(37/72*Y1*Y2*Z1^4)+(1/3*Y1*Y2^2*Z1)-(11/36*Y1*Y2^2*Z1^2)-(17/72*Y1*Y2^2*Z1^3) +(47/864*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Z1)+(1/2*Y1^2*Z1^2)-(2/3*Y1^2*Z1^3)-(13/24*Y1^2*Z1^4)-(4/3*Y1^2*Y2*Z1)+(7/12*Y1^2*Y2*Z1^2) +(Y1^2*Y2*Z1^3)-(11/48*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/36*Y1^2*Y2^2*Z1)-(1/6*Y1^2*Y2^2*Z1^2)+(29/576*Y1^2*Y2^2*Z1^3)+(143/3456*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(Y1^3*Z1) -(1/6*Y1^3*Z1^2)-(5/9*Y1^3*Z1^3)+(7/24*Y1^3*Z1^4)+(1/24*Y1^3*Y2*Z1)+(13/72*Y1^3*Y2*Z1^2)-(11/144*Y1^3*Y2*Z1^3)-(23/108*Y1^3*Y2*Z1^4) -(1/12*Y1^4*Z1)-(13/24*Y1^4*Z1^2)-(1/12*Y1^4*Z1^3)+(73/288*Y1^4*Z1^4)+(4/9*Y1^4*Y2*Z1)+(1/12*Y1^4*Y2*Z1^2)-(25/216*Y1^4*Y2*Z1^3) -(1/36*Y1^4*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^5*Z1)-(5/36*Y1^5*Z1^2)+(1/6*Y1^5*Z1^3)+(1/24*Y1^5*Z1^4)-(1/12*Y1^6*Z1)+(1/72*Y1^6*Z1^2) +(1/54*Y1^6*Z1^3)-(1/864*Y1^6*Z1^4)

P1.P3^2.B=

-(Y2*Z1^2)-(5/6*Y2*Z1^3)+(1/8*Y2*Z1^4)+(Y1*Z1^2)+(Y1*Z1^3)-(1/12*Y1*Z1^4) -(1/6*Y1*Y2*Z1^2)+(5/24*Y1*Y2*Z1^3)+(11/36*Y1*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1^2*Z1^2)-(11/24*Y1^2*Z1^4)+(1/3*Y1^2*Y2*Z1^2)+(1/3*Y1^2*Y2*Z1^3) +(1/9*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^3*Z1^2)-(1/2*Y1^3*Z1^3)-(7/36*Y1^3*Z1^4)+(1/18*Y1^3*Y2*Z1^2)+(1/24*Y1^3*Y2*Z1^3)+(1/108*Y1^3*Y2*Z1^4) -(1/6*Y1^4*Z1^2)-(1/9*Y1^4*Z1^3)-(1/72*Y1^4*Z1^4)

P3^3.B=

+(Z1^3)+(3/2*Z1^4)-(1/3*Y1*Z1^4)-(1/3*Y1^2*Z1^3)-(1/2*Y1^2*Z1^4)

P1^2.P2.B=

+(1/3*Y2^2*Z1^3)+(1/9*Y2^2*Z1^4)+(Y2^3)-(1/3*Y2^3*Z1)-(23/36*Y2^3*Z1^2)+(5/24*Y2^3*Z1^3) +(491/1728*Y2^3*Z1^4)-(1/3*Y1*Y2*Z1^3)-(1/4*Y1*Y2*Z1^4)-(2*Y1*Y2^2)+(1/3*Y1*Y2^2*Z1)+(19/12*Y1*Y2^2*Z1^2)-(1/36*Y1*Y2^2*Z1^3) -(41/48*Y1*Y2^2*Z1^4)+(5/6*Y1*Y2^3)+(1/12*Y1^2*Z1^4)+(Y1^2*Y2)-(11/12*Y1^2*Y2*Z1^2)-(1/3*Y1^2*Y2*Z1^3)+(17/36*Y1^2*Y2*Z1^4) -(7/3*Y1^2*Y2^2)+(19/12*Y1^2*Y2^2*Z1)+(25/16*Y1^2*Y2^2*Z1^2)-(23/24*Y1^2*Y2^2*Z1^3)-(625/864*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(1/12*Y1^3*Z1^4)+(3/2*Y1^3*Y2) -(3/4*Y1^3*Y2*Z1)-(7/6*Y1^3*Y2*Z1^2)+(37/72*Y1^3*Y2*Z1^3)+(107/144*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/144*Y1^4*Z1^4)+(1/2*Y1^4*Y2)-(11/12*Y1^4*Y2*Z1) -(23/144*Y1^4*Y2*Z1^2)+(7/12*Y1^4*Y2*Z1^3)+(1/6*Y1^5*Z1^4)-(1/36*Y1^5*Z1^4)-(1/360*Y1^6*Z1^3)-(11/1440*Y1^6*Z1^4)

P1.P2.P3.B=

-(1/6*Y2*Z1^4)-(Y2^2*Z1)-(1/3*Y2^2*Z1^2)+(13/24*Y2^2*Z1^3)+(29/144*Y2^2*Z1^4)+(Y1*Y2*Z1) +(1/2*Y1*Y2*Z1^2)-(7/12*Y1*Y2*Z1^3)-(5/12*Y1*Y2*Z1^4)-(2/3*Y1*Y2^2*Z1)+(5/24*Y1*Y2^2*Z1^2)+(11/24*Y1*Y2^2*Z1^3)+(1/288*Y1*Y2^2*Z1^4) +(Y1^2*Y2*Z1)-(1/12*Y1^2*Y2*Z1^2)-(3/4*Y1^2*Y2*Z1^3)-(5/144*Y1^2*Y2*Z1^4)+(1/6*Y1^2*Y2^2*Z1)+(43/144*Y1^2*Y2^2*Z1^2)+(5/96*Y1^2*Y2^2*Z1^3) -(23/432*Y1^2*Y2^2*Z1^4)-(11/24*Y1^3*Y2*Z1^2)-(25/144*Y1^3*Y2*Z1^3)+(5/36*Y1^3*Y2*Z1^4)-(7/24*Y1^4*Y2*Z1)-(3/16*Y1^4*Y2*Z1^2)+(7/144*Y1^4*Y2*Z1^3) +(3/64*Y1^4*Y2*Z1^4)-(1/720*Y1^5*Z1^4)+(1/120*Y1^6*Z1)+(1/240*Y1^6*Z1^2)-(1/240*Y1^6*Z1^3)-(23/8640*Y1^6*Z1^4)

P2.P3^2.B=

+(Y2*Z1^2)+(Y2*Z1^3)+(1/2*Y1*Y2*Z1^2)+(1/12*Y1*Y2*Z1^3)-(3/8*Y1*Y2*Z1^4)-(1/4*Y1^2*Y2*Z1^2) -(5/12*Y1^2*Y2*Z1^3)-(35/144*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/6*Y1^3*Y2*Z1^2)-(1/6*Y1^3*Y2*Z1^3)+(5/72*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/36*Y1^4*Y2*Z1^2)-(1/36*Y1^4*Y2*Z1^3) -(5/432*Y1^4*Y2*Z1^4)+(1/120*Y1^5*Z1^2)+(1/120*Y1^5*Z1^3)+(1/1440*Y1^5*Z1^4)+(1/720*Y1^6*Z1^2)-(1/720*Y1^6*Z1^3)-(23/8640*Y1^6*Z1^4)

P1^2.P3^2.B=

+(Y2^2*Z1^2)+(2/3*Y2^2*Z1^3)-(11/36*Y2^2*Z1^4)-(2*Y1*Y2*Z1^2)-(5/3*Y1*Y2*Z1^3)+(7/12*Y1*Y2*Z1^4) +(1/3*Y1*Y2^2*Z1^2)-(5/36*Y1*Y2^2*Z1^3)-(1/3*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Z1^2)+(Y1^2*Z1^3)-(1/4*Y1^2*Z1^4)-(4/3*Y1^2*Y2*Z1^2) -(1/12*Y1^2*Y2*Z1^3)+(77/72*Y1^2*Y2*Z1^4)-(11/36*Y1^2*Y2^2*Z1^2)-(23/72*Y1^2*Y2^2*Z1^3)-(145/1728*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(Y1^3*Z1^2)+(1/3*Y1^3*Z1^3) -(3/8*Y1^3*Z1^4)+(1/2*Y1^3*Y2*Z1^2)+(107/72*Y1^3*Y2*Z1^3)+(25/72*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/12*Y1^4*Z1^2)-(7/12*Y1^4*Z1^3)-(53/144*Y1^4*Z1^4) +(4/9*Y1^4*Y2*Z1^2)+(11/36*Y1^4*Y2*Z1^3)-(1/3*Y1^5*Z1^2)-(11/36*Y1^5*Z1^3)-(1/12*Y1^6*Z1^2)-(1/36*Y1^6*Z1^3)+(5/432*Y1^6*Z1^4)

P1.P3^3.B=

-(Y2*Z1^3)-(4/3*Y2*Z1^4)+(Y1*Z1^3)+(3/2*Y1*Z1^4)-(1/6*Y1*Y2*Z1^3)+(1/8*Y1*Y2*Z1^4) +(1/2*Y1^2*Z1^3)+(1/4*Y1^2*Z1^4)+(1/3*Y1^2*Y2*Z1^3)+(1/2*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^3*Z1^3)-(2/3*Y1^3*Z1^4)+(1/18*Y1^3*Y2*Z1^3) +(5/72*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/6*Y1^4*Z1^3)-(7/36*Y1^4*Z1^4)

P3^4^B=

+(Z1^4)-(1/3*Y1^2*Z1^4)

P1^2.P2.P3^3.B=

+(Y2^3*Z1^3)+(7/6*Y2^3*Z1^4)-(2*Y1*Y2^2*Z1^3)-(8/3*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Y2*Z1^3)+(3/2*Y1^2*Y2*Z1^4) -(7/3*Y1^2*Y2^2*Z1^3)-(23/12*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(3/2*Y1^3*Y2*Z1^3)+(3/2*Y1^3*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1^4*Y2*Z1^3)-(1/6*Y1^4*Y2*Z1^4)

P1.P2.P3_4.B=

-(Y2^2*Z1^4)+(Y1*Y2*Z1^4)-(2/3*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Y2*Z1^4)+(1/6*Y1^2*Y2^2*Z1^4)-(7/24*Y1^4*Y2*Z1^4) +(1/120*Y1^6*Z1^4)

P1^2.P2.P3^4.B=

+(Y2^3*Z1^4)-(2*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Y2*Z1^4)-(7/3*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(3/2*Y1^3*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1^4*Y2*Z1^4)

P1^2.P2.P3.B=

+(1/3*Y2^2*Z1^4)+(Y2^3*Z1)+(1/6*Y2^3*Z1^2)-(23/36*Y2^3*Z1^3)-(1/8*Y2^3*Z1^4)-(1/3*Y1*Y2*Z1^4) -(2*Y1*Y2^2*Z1)-(2/3*Y1*Y2^2*Z1^2)+(17/12*Y1*Y2^2*Z1^3)+(53/72*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Y2*Z1)+(1/2*Y1^2*Y2*Z1^2)-(3/4*Y1^2*Y2*Z1^3) -(3/4*Y1^2*Y2*Z1^4)-(7/3*Y1^2*Y2^2*Z1)+(5/12*Y1^2*Y2^2*Z1^2)+(43/24*Y1^2*Y2^2*Z1^3)-(7/72*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(3/2*Y1^3*Y2*Z1)-(31/24*Y1^3*Y2*Z1^3) -(19/144*Y1^3*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1^4*Y2*Z1)-(2/3*Y1^4*Y2*Z1^2)-(77/144*Y1^4*Y2*Z1^3)+(107/288*Y1^4*Y2*Z1^4)-(1/360*Y1^6*Z1^4)

P1.P2.P3^2.B=

-(Y2^2*Z1^2)-(5/6*Y2^2*Z1^3)+(5/24*Y2^2*Z1^4)+(Y1*Y2*Z1^2)+(Y1*Y2*Z1^3)-(1/6*Y1*Y2*Z1^4) -(2/3*Y1*Y2^2*Z1^2)-(1/8*Y1*Y2^2*Z1^3)+(65/144*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Y2*Z1^2)+(5/12*Y1^2*Y2*Z1^3)-(5/8*Y1^2*Y2*Z1^4)+(1/6*Y1^2*Y2^2*Z1^2) +(55/144*Y1^2*Y2^2*Z1^3)+(11/48*Y1^2*Y2^2*Z1^4)-(11/24*Y1^3*Y2*Z1^3)-(29/72*Y1^3*Y2*Z1^4)-(7/24*Y1^4*Y2*Z1^2)-(1/3*Y1^4*Y2*Z1^3)-(3/32*Y1^4*Y2*Z1^4) +(1/120*Y1^6*Z1^2)+(1/120*Y1^6*Z1^3)-(1/1440*Y1^6*Z1^4)

UNICAMP
Centro de Computação

P1^2.P3^3.B=

+(Y2^2*Z1^3)+(7/6*Y2^2*Z1^1)-(2*Y1*Y2*Z1^3)-(8/3*Y1*Y2*Z1^4)+(1/3*Y1*Y2^2*Z1^3)+(1/36*Y1*Y2^2*Z1^4) +(Y1^2*Z1^3)+(3/2*Y1^2*Z1^4)
-(4/3*Y1^2*Y2*Z1^3)-(3/1*Y1^2*Y2*Z1^4)-(11/36*Y1^2*Y2^2*Z1^3)-(17/36*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(Y1^3*Z1^3) +(5/6*Y1^3*Z1^4)+(1/2*Y1^3*Y2*Z1
^3)+(65/72*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/12*Y1^1*Z1^3)-(5/8*Y1^4*Z1^4)+(4/9*Y1^4*Y2*Z1^3)+(19/36*Y1^4*Y2*Z1^4) -(1/3*Y1^5*Z1^3)-(17/36*Y1^5*Z1^
4)-(1/12*Y1^6*Z1^3)-(5/72*Y1^6*Z1^4)

P1.P3^4.B=

-(Y2*Z1^4)+(Y1*Z1^4)-(1/6*Y1*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1^2*Z1^4)+(1/3*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^3*Z1^4) +(1/18*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/6*Y1^4*Z1^4)

P2.P3^4.B=

+(Y2*Z1^4)+(1/2*Y1*Y2*Z1^4)-(1/4*Y1^2*Y2*Z1^4)-(1/6*Y1^3*Y2*Z1^4)-(1/36*Y1^4*Y2*Z1^4)+(1/120*Y1^5*Z1^4) +(1/720*Y1^6*Z1^4)

P1^2.P3^4.B=

+(Y2^2*Z1^4)-(2*Y1*Y2*Z1^4)+(1/3*Y1*Y2^2*Z1^4)+(Y1^2*Z1^4)-(4/3*Y1^2*Y2*Z1^4)-(11/36*Y1^2*Y2^2*Z1^4) +(Y1^3*Z1^4)+(1/2*Y1^3*Y2*
Z1^4)-(1/12*Y1^4*Z1^4)+(4/9*Y1^4*Y2*Z1^4)-(1/3*Y1^5*Z1^4)-(1/12*Y1^6*Z1^4)

P1.P2.P3^3.B=

-(Y2^2*Z1^3)-(4/3*Y2^2*Z1^1)+(Y1*Y2*Z1^3)+(3/2*Y1*Y2*Z1^4)-(2/3*Y1*Y2^2*Z1^3)-(11/24*Y1*Y2^2*Z1^4) +(Y1^2*Y2*Z1^3)+(11/12*Y1^2*
Y2*Z1^4)+(1/6*Y1^2*Y2^2*Z1^3)+(67/144*Y1^2*Y2^2*Z1^4)-(11/24*Y1^3*Y2*Z1^4)-(7/24*Y1^4*Y2*Z1^3)-(23/48*Y1^4*Y2*Z1^4) +(1/120*Y1^6*Z
1^3)+(1/80*Y1^6*Z1^4)

P2.P3^3.B=

+(Y2*Z1^3)+(3/2*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1*Y2*Z1^3)+(1/3*Y1*Y2*Z1^4)-(1/4*Y1^2*Y2*Z1^3)-(13/24*Y1^2*Y2*Z1^4) -(1/6*Y1^3*Y2*Z1^3)-(1/4*Y1^3*
Y2*Z1^4)-(1/36*Y1^4*Y2*Z1^3)-(1/21*Y1^4*Y2*Z1^4)+(1/120*Y1^5*Z1^3)+(1/80*Y1^5*Z1^4)+(1/720*Y1^6*Z1^3) -(1/1440*Y1^6*Z1^4)

P1^2.P2.P3^2.B=

+(Y2^3*Z1^2)+(2/3*Y2^3*Z1^3)-(7/18*Y2^3*Z1^4)-(2*Y1*Y2^2*Z1^2)-(5/3*Y1*Y2^2*Z1^3)+(3/4*Y1*Y2^2*Z1^4) +(Y1^2*Y2*Z1^2)+(Y1^2*Y2*Z
1^3)-(1/3*Y1^2*Y2*Z1^4)-(7/3*Y1^2*Y2^2*Z1^2)-(3/4*Y1^2*Y2^2*Z1^3)+(29/16*Y1^2*Y2^2*Z1^4)+(3/2*Y1^3*Y2*Z1^2) +(3/4*Y1^3*Y2*Z1^3)-(2
5/24*Y1^3*Y2*Z1^4)+(1/2*Y1^1*Y2*Z1^2)-(5/12*Y1^4*Y2*Z1^3)-(113/144*Y1^4*Y2*Z1^4)

BIBLIOGRAFIA

1. ADAMS, J.F. - Vectors Fields on Spheres; Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962)

2. ATIYAH, M.F. - Immersions and Embeddings of Manifolds; Topology I (1962)

3. ATIYAH, M.F. - K-theory; Benjamin, N.Y. (1967)

4. ATIYAH, M.F. and F. Hirzebruch - Vector bundles and homogeneous spaces; Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics, vol. 3, AMS (1961)

5. BOTT, R. - A report on the unitary group; idem

6. BOREL, A. and F. Hirzebruch - Characteristic Classes and Homogeneous spaces I; American Journal of Mathematics, 80 (1958)

7. CONDE, A. - B-genus and non-embeddings PhD Thesis, Chicago (1971)

8. CONNELL, F.J. - Non-immersions of Spin and almost spin manifolds; PhD Thesis, Chicago (1971)

9. DYER, E. - Cohomology Theories; Notas Mimeografadas, 1973

10. HSIANG, W.C. and R.H. Szczarba - On the embeddability and non-embeddability of sphere bundles over spheres; Annals of Mathematics, 80 (1964)

11. HIRSCH, M.W. - Immersions of Manifolds; Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959)

12. KERVAIRE, M.A. - An interpretation of G.W. Whitchead's generalization of H. Hopf's invariant; Annals of Math. 69 (1959)

13. LIULEVICIUS, A. - Characteristic Classes and Cobordism; Aarhus Universitet, Lectures (1967)

14. MILNOR, J. and J.D. Stasheff - Characteristic Classes; Princeton University Press and University of Tokyo Press (1974).