

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Tese de Mestrado

Introdução à Cohomologia de Floer

Autor: Ricardo Antonio Mosna

Orientador: Márcio Antonio de Faria Rosa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Junho de 1999

Este projeto foi financiado pela FAPESP, processo nº 97/01568-6.

Introdução à Cohomologia de Floer

Este exemplar correspondente à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Ricardo Antonio Mosna e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de junho de 1999.



Prof. Dr. Márcio Antonio de Faria Rosa
Orientador

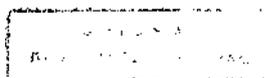
Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Antonio de Faria Rosa (orientador).

Prof. Dr. Hugo Horácio Torriani.

Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.



UNIDADE	BC
N.º CIP-UNDA:	
V.	
TOMBO	87/39278
PROC	229/99
C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	28/10/99
N.º CPD	

CM-00136606-6

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Mosna, Ricardo Antonio

M854i Introdução à cohomologia de Floer / Ricardo Antonio Mosna --
Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Márcio Antonio de Faria Rosa

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Morse, Teoria de. 2. Supersimetria. 3. Teoria de homologia. I.
Rosa, Márcio Antonio de Faria. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de junho de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MÁRCIO ANTONIO DE FARIA ROSA



Prof (a). Dr (a). HUGO HORÁCIO TORRIANI



Prof (a). Dr (a). JAYME VAZ JÚNIOR

A meus pais

AS COBRAS / Luis Fernando Verissimo



Luis Fernando Verissimo - O Estado de S. Paulo

Agradecimentos

Primeiramente, aos meus pais, a quem devo absolutamente tudo. Sei que essas frases acabam ficando gastas e perdendo o sentido. Então quero dizer de novo: MUTÍSSIMO OBRIGADO pai e mãe.

Ao Márcio, grande pessoa, e aos meus professores, os verdadeiros, com honestidade intelectual e sem espírito opressor.

Aos amigos, irmãos incluídos, pelo estímulo e conforto nas horas difíceis...don't get sentimental. it always ends up dRRiveLLLL.

Ao meu cachorro, o Pink, companheiro de estudos noites adentro.

À UNICAMP, que tem sido minha segunda casa desde os tempos do COTUCA.

À Cidinha, secretária da pós, pela paciência.

A todos os habitantes de São Paulo que, através da FAPESP, financiaram este trabalho.

À FAPESP, não só pela bolsa, mas também pelo respeito a todos nós bolsistas.

Resumo

Estudamos a teoria de Morse sob diferentes pontos de vista, culminando com uma introdução à cohomologia de Floer. Para isso, obtivemos as desigualdades de Morse através de várias estratégias distintas: (i) através do enfoque tradicional, em que a topologia da variedade é investigada em termos de pontos críticos e linhas de gradiente de funções; (ii) utilizando a teoria do índice de Conley; (iii) através do enfoque de Witten, segundo o qual o laplaciano da variedade é deformado por uma função e identificado com o hamiltoniano de um sistema mecânico-quântico supersimétrico e (iv) utilizando o enfoque de Floer, que formaliza o procedimento de Witten e o estende para variedades de dimensão infinita. Aqui ainda abordamos o caso em que a variedade é um espaço de conexões sobre uma 3-esfera homológica e a função é dada pelo funcional de Chern-Simons.

Abstract

We have studied Morse theory from different viewpoints, culminating in an introduction to Floer cohomology. To do that, we have obtained Morse inequalities through distinct strategies: (i) by employing the standard approach, according to which the topology of the manifold is investigated in terms of critical points and gradient lines of functions, (ii) through the Conley index theory, (iii) through Witten's approach, where the Laplacian of the manifold is deformed by a function and identified with the Hamiltonian operator of a supersymmetrical quantum mechanical system, and (iv) through Floer's approach, which formalizes Witten's procedure and generalizes it to infinite dimensional manifolds. Here we also consider the case in which the manifold is a space of connections over a homology 3-sphere and the function is the Chern-Simons functional.

Índice

1	Introdução	1
2	Teoria de Hodge	3
2.1	O operador $*$ de Hodge	3
2.2	O operador de Laplace-Beltrami	6
2.3	Classes de cohomologia	8
2.4	A equação $\Delta\omega = \alpha$	10
2.5	O teorema de Hodge	11
2.6	Aplicações à cohomologia de de Rham	13
3	Teoria de Morse	17
3.1	Funções de Morse	18
3.2	Pontos críticos e geometria	21
3.3	Desigualdades de Morse	24
3.4	Teoria de Morse via índice de Conley	27
3.5	Aplicações da teoria de Morse	34
3.5.1	Geometria	34
3.5.2	Mecânica de muitos corpos	35
4	Teoria de Morse e mecânica quântica supersimétrica	37
4.1	Supersimetria	37
4.2	O laplaciano deformado	40
4.2.1	Cálculo da expressão local de H_t	41

4.3	Desigualdades de Morse	44
4.4	Instantons e o complexo de Witten	50
5	Cohomologia de Floer em dimensão finita	55
5.1	Definição do complexo de Witten	56
5.2	Demonstração do teorema 5.5	62
6	Cohomologia de Floer, 3-esferas e teoria topológica de campos	69
6.1	3-esferas homológicas	70
6.2	Teoria topológica de campos	75
7	Conclusão	79

Capítulo 1

Introdução

Consideremos uma variedade M sobre a qual está definida uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. A teoria de Morse traduz em termos precisos a noção intuitiva de que a topologia de M deve impor certas restrições ao comportamento global de f . Seja b_p o p -ésimo número de Betti de M em relação a um domínio principal e seja m_p o número de pontos críticos de f com índice p . As desigualdades de Morse nos dizem que se M é uma variedade de dimensão n , compacta e orientável e se os pontos críticos de f são não-degenerados, então

$$m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \dots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \dots \pm b_0$$

para $p = 0, 1, \dots, n$, valendo a igualdade se $p = n$. Em particular, $m_p \geq b_p$ e a soma dos números de Betti de M impõe um limite inferior ao número de pontos críticos de f .

Nesta dissertação, abordaremos tal problema através de várias estratégias distintas. No capítulo 2 iniciaremos tal estudo pela teoria de Hodge, preparando o terreno para uma abordagem analítica da teoria de Morse que será desenvolvida no capítulo 4. Para isso, obteremos o teorema de Hodge e estudaremos a relação entre formas harmônicas e classes de cohomologia. Por fim daremos algumas aplicações, como a dualidade de Poincaré.

No capítulo 3 iniciaremos o estudo da teoria de Morse utilizando o enfoque tradicional, segundo o qual dota-se M de uma métrica riemanniana e analisa-se as linhas de fluxo do gradiente de f . Veremos então que a topologia de $M^a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$ sofre alteração apenas quando a é valor crítico de f , o que nos levará às desigualdades de Morse. A seguir, analisaremos o mesmo problema utilizando a teoria do índice de Conley, que associa certos

invariantes topológicos a fluxos de campos vetoriais. Por fim, daremos duas aplicações da teoria desenvolvida: uma em geometria e outra em mecânica de muitos corpos.

No capítulo 4 abordaremos a teoria de Morse sob um ponto de vista totalmente diferente dos anteriores. Utilizando o enfoque de Witten, empregaremos a função f para deformar o laplaciano de M através de $H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$, onde $d_t = e^{-tf} d e^{tf}$ e $d_t^* = e^{tf} d^* e^{-tf}$. Mostraremos então que H_t pode ser identificado com o operador hamiltoniano de um sistema mecânico-quântico supersimétrico que, para $t \rightarrow \infty$, comporta-se como um conjunto de osciladores harmônicos centrados nos pontos críticos de f . Isso permitirá calcular o espectro de H_t nesse limite e então obter novamente as desigualdades de Morse.

No capítulo 5 iniciaremos o estudo da cohomologia de Floer em variedades de dimensão finita através da formalização matematicamente precisa das idéias de Witten. Tal estudo servirá de motivação para o capítulo 6, onde consideraremos a extensão de tal procedimento para variedades de dimensão infinita. Aqui abordaremos o caso em que M é um espaço de conexões sobre uma 3-esfera homológica (variedade de dimensão 3, compacta e orientável que tem a mesma homologia racional que S^3) e f é o funcional de Chern-Simons.

Assumiremos como pré-requisitos as noções de variedades e formas diferenciais, bem como um conhecimento elementar de topologia algébrica (basicamente as propriedades fundamentais dos grupos de homologia e cohomologia de variedades).

Todas as variedades consideradas serão de Hausdorff, com base enumerável e sem bordo. Utilizaremos o termo diferenciável como sinônimo de C^∞ .

Capítulo 2

Teoria de Hodge

Neste capítulo exporemos os fatos mais relevantes (para nossos objetivos) sobre a teoria de Hodge. O principal resultado que obteremos é o teorema da decomposição de Hodge que nos dá um critério claro acerca da existência de soluções da equação $\Delta\omega = \alpha$, onde ω e α são formas diferenciais sobre uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável e Δ é o operador laplaciano. A seguir, aplicaremos tal teorema ao estudo dos grupos de cohomologia de de Rham de M . Veremos então que existe um isomorfismo natural entre as classes de cohomologia e o conjunto das formas harmônicas ($\Delta\omega = 0$) de M .

2.1 O operador $*$ de Hodge

Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Denotaremos o conjunto das aplicações p -lineares alternadas de V em \mathbb{R} por $\Lambda^p(V^*)$, com $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ e $\Lambda(V^*) = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p(V^*)$. Seja M uma variedade de dimensão n , compacta, orientável e sem bordo. Denotaremos o conjunto das formas diferenciais em M por $\Omega(M)$, com $\Omega^p(M)$ correspondendo às p -formas.

Suponhamos que V é dotado de um produto interno (\cdot, \cdot) e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V . Recordemos a estrutura de produto interno usual que é definida em V^* e $\Lambda^p(V^*)$. O produto interno de V induz um isomorfismo natural entre V e V^* dado por $i : V \rightarrow V^*$, $i(v) = (\cdot, v)$. Com isso, podemos definir um produto interno em V^* por $(\alpha, \beta) = (i^{-1}(\alpha), i^{-1}(\beta))$, de forma que $\{e^1, \dots, e^n\}$ (base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$) é base ortonormal de V^* .

Estendemos então o produto interno (\cdot, \cdot) a $\Lambda^p(T_p^*M)$ declarando ortonormal a base

$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n\}$ de $\Lambda^p(V^*)$. É um exercício de álgebra multilinear verificar que tal definição independe da base escolhida de V e que dados $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p \in V^*$, temos $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p) = \det((\alpha_i, \beta_j))$.

Dotemos o espaço vetorial normado V de uma orientação e fixemos $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal positiva de V .

Fixado $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, como a aplicação $\Lambda^{n-p}(V^*) \rightarrow \Lambda^n(V^*)$, $\nu \mapsto \omega \wedge \nu$ é linear e $\Lambda^n(V^*)$ é unidimensional, existe um único $*\omega \in \Lambda^p(V^*)$ tal que $\omega \wedge \nu = (*\omega, \nu) e^1 \wedge \dots \wedge e^n \forall \nu \in \Lambda^{n-p}(V^*)$.

Definição 2.1 Definimos o operador estrela de Hodge por $*$: $\Lambda^p(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-p}(V^*)$.

$$\omega \quad \mapsto \quad *\omega$$

Tal aplicação é evidentemente linear.

Proposição 2.2 Dado $I = \{i_1, \dots, i_k : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ um conjunto de índices sem repetições, tomemos (j_1, \dots, j_{n-k}) tal que

- (i) $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} - I$
- (ii) $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}} = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.

Então:

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}.$$

dem.: Sejam $\varepsilon = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ e $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$. Então,

$$*\omega \in \Lambda^{n-k}(V^*) \Rightarrow *\omega = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_{n-k} \leq n} a_{l_1 \dots l_{n-k}} e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_{n-k}}, \text{ onde}$$

$$a_{l_1 \dots l_{n-k}} = (*\omega, e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_{n-k}}). \text{ Com isso, pela definição de } * :$$

$$a_{l_1 \dots l_{n-k}} \varepsilon = (*\omega, e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_{n-k}}) \varepsilon = \omega \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_{n-k}} = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_{n-k}}$$

$$\Rightarrow a_{l_1 \dots l_{n-k}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \{l_1, \dots, l_{n-k}\} \neq \{j_1, \dots, j_{n-k}\} \\ \pm 1, & \text{se } \{l_1, \dots, l_{n-k}\} = \{j_1, \dots, j_{n-k}\} \end{cases}$$

Logo,

$$*\omega = c e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}, \quad c = \pm 1$$

e assim

$$c e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}} = \omega \wedge *\omega = (*\omega, *\omega) \varepsilon = c^2 \|e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}\|^2 \varepsilon = \varepsilon$$

Segue que $c = +1$ e portanto

$$*\omega = e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}$$

demonstrando a proposição. \square

Corolário 2.3 $**\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega \quad \forall \omega \in \Lambda^p(V^*)$.

dem.: Por linearidade, basta considerar o caso em que $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$.

Seguindo a notação anterior, façamos $e^I = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$, $e^J = e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-p}}$, com $*e^I = e^J$. Analogamente à demonstração da proposição anterior, temos $*e^J = c'e^I$, com $c' = \pm 1$. Assim:

$$\begin{aligned} \varepsilon = e^I \wedge e^J &= (-1)^{p(n-p)} e^J \wedge e^I = (-1)^{p(n-p)} (*e^J, e^I) \varepsilon = (-1)^{p(n-p)} c' (e^I, e^I) \varepsilon \\ \Rightarrow c' &= (-1)^{p(n-p)}. \end{aligned}$$

Logo, $**e^I = *e^J = c'e^I = (-1)^{p(n-p)} e^I$. \square

Proposição 2.4 *Sejam $\alpha, \beta \in \Lambda^p(V^*)$. Então:*

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)\varepsilon \quad (\text{onde } \varepsilon = e^1 \wedge \dots \wedge e^n)$$

dem.: $\alpha \wedge *\beta = (-1)^{p(n-p)} *\beta \wedge \alpha = (-1)^{p(n-p)} (**\beta, \alpha)\varepsilon =$
 $= (-1)^{p(n-p)}(-1)^{p(n-p)}(\beta, \alpha)\varepsilon = (\beta, \alpha)\varepsilon = (\alpha, \beta)\varepsilon. \quad \square$

Observação 2.5 $*1 = e^1 \wedge \dots \wedge e^n \quad e * e^1 \wedge \dots \wedge e^n = 1$.

dem.: imediata da definição de $*$. \square

A seguir, generalizamos de forma natural o operador $*$ para variedades.

Definição 2.6 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Definimos*

$$*: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M) \text{ por } (*\omega)_m = *(\omega_m), \quad \forall m \in M.$$

$$\omega \quad \mapsto \quad *\omega$$

2.2 O operador de Laplace-Beltrami

Definição 2.7 Definimos o codiferencial δ em $\Omega(M)$ por

$$\delta|_{\Omega^p(M)} = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$$

Notemos que $\delta^2 \equiv 0$ e que $\delta\omega \equiv 0$ se ω é 0-forma.

O fator $(-1)^{n(p+1)+1}$ tem a função de tornar δ o operador adjunto de d com relação ao produto interno em $\Omega(M)$ que será introduzido a seguir (cf proposição 2.12).

Definição 2.8 Definimos o operador de Laplace-Beltrami em $\Omega(M)$ por

$$\Delta = \delta d + d\delta$$

A proposição a seguir nos mostra que, agindo sobre 0-formas, Δ está intimamente ligado ao laplaciano usual.

Proposição 2.9 Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (isto é, f é 0-forma em \mathbb{R}^n). então:

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{dem.: } \Delta f &= \delta df + d\delta f = \delta df = - * d* \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \\ &= - * \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge * dx^i = - * \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}} dx^i \wedge * dx^i = - * \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}} \varepsilon = \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}. \quad \square \end{aligned}$$

A aplicação $*$ nos permite definir um produto interno em $\Omega(M)$, como vemos a seguir.

Proposição 2.10 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega^p(M) \times \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\langle \omega, \nu \rangle = \int_M \omega \wedge * \nu$$

é um produto interno.

dem.: Como vimos na proposição 2.4, se ε é um elemento de volume de M , então $\omega_m \wedge * \nu_m = (\omega_m, \nu_m) \varepsilon_m$, onde (\cdot, \cdot) é o produto interno de $\Lambda^p(T_m^* M)$. \square

Definição 2.11 Definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\Omega(M)$ estendendo a definição acima por linearidade e tomando $\langle \omega, \nu \rangle = 0$ se $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^q(M)$ com $p \neq q$.

Uma caracterização bastante útil do codiferencial é dada a seguir.

Proposição 2.12 δ é o operador adjunto de d , isto é, $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$. Segue que Δ é auto-adjunto.

dem.: Dados $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^q(M)$, tal igualdade é imediata se $q \neq p+1$. Se $q = p+1$, então $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^p \alpha \wedge d*\beta$. Mas $(-1)^p \alpha \wedge d*\beta = (-1)^p (-1)^{(n-q+1)(q-1)} \alpha \wedge **d*\beta = (-1)^p (-1)^{(n-q+1)(q-1)} (-1)^{n(q+1)+1} \alpha \wedge *\delta\beta = -\alpha \wedge *\delta\beta$.

Portanto, $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta$.

Como estamos considerando M sem bordo, pelo teorema de Stokes:

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M d\alpha \wedge *\beta - \int_M \alpha \wedge *\delta\beta = \langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, \delta\beta \rangle$$

O caso geral segue da linearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. \square

Como aplicação, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.13 (Lema de Hopf) Se $f \in C^\infty(M)$ então $\int_M \Delta f = 0$.

Em particular, $\Delta f \geq 0 \Rightarrow \Delta f = 0$.

dem.: se ε é elemento de volume de M , então

$$\int_M \Delta f \varepsilon = \int_M \Delta f * 1 = \langle \Delta f, 1 \rangle = \langle f, \Delta 1 \rangle = 0. \square$$

Proposição 2.14 Seja $\alpha \in \Omega^p(M)$. Então $\Delta\alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0$ e $\delta\alpha = 0$.

dem.: (\Rightarrow) Se $\Delta\alpha = 0$, então

$$0 = \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = \langle d\delta\alpha, \alpha \rangle + \langle \delta d\alpha, \alpha \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle = \|\delta\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2$$

$$\Rightarrow \delta\alpha = d\alpha = 0.$$

(\Leftarrow) imediato. \square

Dizendo de outra forma, as formas harmônicas ($\Delta\alpha = 0$) de M são precisamente as formas fechadas ($d\alpha = 0$) e cofechadas ($\delta\alpha = 0$).

Corolário 2.15 *Seja M uma variedade orientada, compacta e conexa. Então as funções harmônicas são precisamente as funções constantes.*

Definição 2.16 *Denotaremos por $\Omega_h^p(M)$ o conjunto das p -formas harmônicas em M .*

2.3 Classes de cohomologia

Definamos os seguintes subconjuntos de $\Omega^p(M)$:

$$Z^p(M) = \ker \{d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)\}.$$

$$B^p(M) = \text{im} \{d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)\}, \text{ com } B^0(M) = \{0\}.$$

Denominamos os elementos de $Z^p(M)$ de p -formas fechadas e os elementos de $B^p(M)$ de p -formas exatas.

Notemos que $B^p(M)$ e $Z^p(M)$ são subespaços de $\Omega^p(M)$ e que $d^2 = 0 \Rightarrow B^p(M) \subseteq Z^p(M)$, o que nos permite definir

$$H_{dR}^p(M) = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

que é denominado p -ésimo grupo de cohomologia de de Rham de M .

Proposição 2.17 *Seja $H_{dR}^*(M) = \bigoplus_{p=0}^n H_{dR}^p(M)$. O produto $[\alpha][\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ faz de $H_{dR}^*(M)$ uma álgebra graduada, onde $[\omega] = \omega + B^p(M)$, $\omega \in Z^p(M)$.*

dem.: Notemos que tal produto está bem definido:

$$\alpha \in Z^p(M), \beta \in Z^q(M) \Rightarrow d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta = 0 \Rightarrow \alpha \wedge \beta \in Z^{p+q}(M)$$

$$\alpha \in Z^p(M), \beta \in B^q(M) \Rightarrow \beta = d\omega, \text{ com } \omega \in \Omega^{q-1}(M) \Rightarrow$$

$$d(\alpha \wedge \omega) = d\alpha \wedge \omega + (-1)^p \alpha \wedge d\omega = (-1)^p \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta \in B^{p+q}(M).$$

$$\text{Logo, } [\alpha] = [\alpha'], [\beta] = [\beta'] \Rightarrow \alpha' = \alpha + d\omega, \beta' = \beta + d\nu \Rightarrow$$

$$\alpha' \wedge \beta' = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\nu + d\omega \wedge \beta + d\omega \wedge d\nu \Rightarrow \alpha' \wedge \beta' - \alpha \wedge \beta \in B^p(M) \Rightarrow [\alpha' \wedge \beta'] = [\alpha \wedge \beta].$$

As demais verificações são (também) evidentes. \square

Proposição 2.18 *Se M é variedade conexa, então $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}$ (onde \cong denota isomorfismo).*

dem.: $Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M) : df = 0\} = \{f \in C^\infty(M) : f \text{ é constante}\}.$

Logo, $H_{dR}^0(M) \cong \frac{\mathbb{R}}{\{0\}} \cong \mathbb{R}.$ \square

A proposição a seguir caracteriza geometricamente as formas harmônicas em $\Omega^p(M).$

Proposição 2.19 *Seja $\omega \in \Omega^p(M).$ São equivalentes:*

(i) ω é harmônica;

(ii) ω é fechada e tem norma mínima em sua classe de cohomologia.

dem.: Tenhamos em mente que, da proposição 2.14, $\Delta\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega = \delta\omega = 0.$

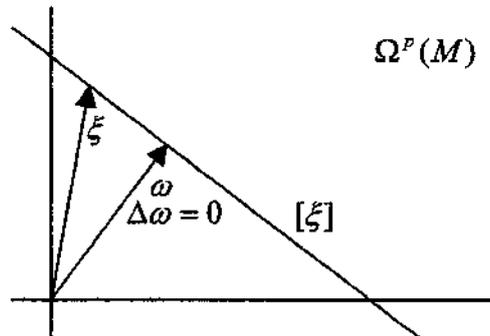
(i) \Rightarrow (ii) Dada $\nu \in [\omega],$ temos $\nu = \omega + d\alpha,$ para algum $\alpha \in \Omega^{p-1}(M).$ Assim:

$$\begin{aligned} \|\nu\|^2 &= \|\omega + d\alpha\|^2 = \|\omega\|^2 + \|d\alpha\|^2 + 2\langle\omega, d\alpha\rangle = \|\omega\|^2 + \|d\alpha\|^2 + 2\langle\delta\omega, \alpha\rangle = \|\omega\|^2 + \|d\alpha\|^2 \\ &\Rightarrow \|\omega\|^2 \leq \|\nu\|^2 \quad \forall \nu \in [\omega]. \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) Suponhamos que ω tenha norma mínima em $[\omega].$ Então, definindo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = \|\omega + td\alpha\|^2,$ com $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ fixado, temos $f(t) = \|\omega\|^2 + 2t\langle\omega, d\alpha\rangle + t^2\|d\alpha\|^2 \Rightarrow 0 = f'(0) = 2\langle\omega, d\alpha\rangle = 2\langle\delta\omega, \alpha\rangle.$

Assim, $\langle\delta\omega, \alpha\rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \Omega^{p-1}(M) \Rightarrow \delta\omega = 0 \Rightarrow \Delta\omega = 0. \quad \square$

Observação 2.20 *Notemos que existe no máximo um representante harmônico em cada classe de cohomologia de $M,$ pois se $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_n^p$ com $\omega_1 = \omega_2 + d\beta$ então $\|\omega_1 - \omega_2\|^2 = \langle\omega_1 - \omega_2, d\beta\rangle = \langle\delta\omega_1 - \delta\omega_2, \beta\rangle = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2.$ Assim, se tal representante harmônico existe, podemos encontrá-lo determinando o elemento do espaço afim $[\xi] = \{\xi + d\alpha : \alpha \in \Omega^{p-1}(M)\}$ mais próximo da origem de $\Omega^p(M)$ (como mostramos na figura abaixo). Uma das principais conseqüências do Teorema de Hodge será a de que um representante harmônico de $[\xi]$ sempre existe.*



2.4 A equação $\Delta\omega = \alpha$

Nesta seção discutiremos a existência de soluções para a equação $\Delta\omega = \alpha$.

Seja $\alpha \in \Omega^p(M)$ e suponhamos que ω é solução de $\Delta\omega = \alpha$. Então,

$$\langle \Delta\omega, \varphi \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle \forall \varphi \in \Omega^p(M) \Rightarrow \langle \omega, \Delta\varphi \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle \forall \varphi \in \Omega^p(M)$$

Logo, ω define um funcional $l: \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi \mapsto \langle \omega, \psi \rangle$$

tal que

$$l(\Delta\varphi) = \langle \alpha, \varphi \rangle \forall \varphi \in \Omega^p(M)$$

Tal funcional é claramente contínuo:

$$|l(\Delta\varphi)| = |\langle \alpha, \varphi \rangle| \leq \|\alpha\| \|\varphi\| \forall \varphi \in \Omega^p(M)$$

Esta associação de ω com l nos coloca no terreno da análise funcional, tornando a determinação de l mais fácil que a de ω . No entanto, para tal associação ser útil, precisamos de um teorema que nos garanta a existência de ω a partir da existência de l . Passemos às definições formais.

Definição 2.21 *Seja $\alpha \in \Omega^p(M)$. Uma solução fraca de $\Delta\omega = \alpha$ é um funcional linear contínuo $l: \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $l(\Delta\varphi) = \langle \alpha, \varphi \rangle \forall \varphi \in \Omega^p(M)$.*

Teorema 2.22 (Teorema da Regularidade) *Seja $\alpha \in \Omega^p(M)$. Se l é uma solução fraca de $\Delta\omega = \alpha$, então existe $\omega \in \Omega^p(M)$ tal que $l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle \forall \beta \in \Omega^p(M)$.*

É fácil ver que tal ω é solução de $\Delta\omega = \alpha$. De fato,

$$\langle \alpha, \varphi \rangle = l(\Delta\varphi) = \langle \omega, \Delta\varphi \rangle = \langle \Delta\omega, \varphi \rangle \forall \varphi \in \Omega^p(M) \Rightarrow \Delta\omega = \alpha$$

A demonstração de tal teorema envolve o desenvolvimento de uma técnica de resolução de equações diferenciais parciais, o que é feito em [Wa]. Também citamos [Wa] como referência para a demonstração do teorema seguinte.

Teorema 2.23 *Seja (α_n) uma seqüência em $\Omega^p(M)$. Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|\alpha_n\| \leq c$ e $\|\Delta\alpha_n\| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$, então existe uma subseqüência de Cauchy de (α_n) .*

2.5 O teorema de Hodge

A seguir, enunciaremos e demonstraremos o teorema da decomposição de Hodge, objetivo central deste capítulo. Antes disso, mostremos um lema.

Lema 2.24 *Seja V espaço vetorial sobre \mathbb{R} com produto interno (\cdot, \cdot) . Se U é subespaço de V com $\dim U < \infty$ então $V = U \oplus U^\perp$.*

dem.: É imediato que $U^\perp = \{v \in V : (v, u) = 0 \forall u \in U\}$ é subespaço vetorial de V . Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de U . Dado $v \in V$, $v - \sum_{i=1}^n (v, e_i)e_i \in U^\perp$. Logo, $v = \left[\sum_{i=1}^n (v, e_i)e_i \right] + \left[v - \sum_{i=1}^n (v, e_i)e_i \right] \in U + U^\perp$ e assim $V = U + U^\perp$. Ainda, $x \in U \cap U^\perp \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$. \square

Teorema 2.25 (Teorema de Hodge) *Seja M uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável. Então:*

- (i) *o espaço das formas harmônicas $\Omega_h^p(M)$ tem dimensão finita.*
- (ii) $\Omega_h^{p\perp} = \Delta(\Omega^p)$.
- (iii) $\Omega^p(M) = \ker(\Delta) \oplus \text{im}(\Delta)$ isto é, $\Omega^p = \Omega_h^p \oplus \Delta(\Omega^p)$.

dem.: (i) Suponhamos que Ω_h^p tenha dimensão infinita. Então, podemos escolher uma seqüência ortonormal (ν_n) em Ω_h^p . Pelo teorema (2.23), tal seqüência possui uma subseqüência de Cauchy que denotaremos ainda por (ν_n) .

No entanto, dado $n \in \mathbb{N}$, $\|\nu_{n+p} - \nu_n\|^2 = \|\nu_{n+p}\|^2 + \|\nu_n\|^2 - 2\langle \nu_{n+p}, \nu_n \rangle = 2 \forall p \in \mathbb{N}$ (contradição). Portanto, Ω_h^p tem dimensão finita.

(ii) É imediato que $\Delta(\Omega^p) \subseteq \Omega_h^{p\perp}$. De fato, se $\omega \in \Omega^p$ e $\alpha \in \Omega_h^p$ então $\langle \Delta\omega, \alpha \rangle = \langle \omega, \Delta\alpha \rangle = 0$ e, portanto, $\Delta\omega \in \Omega_h^{p\perp}$.

Para mostrar que $\Omega_h^{p\perp} \subseteq \Delta(\Omega^p)$ precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.26 *Existe $c > 0$ tal que $\|\beta\| \leq c\|\Delta\beta\| \forall \beta \in \Omega_h^{p\perp}$.*

dem.: Suponhamos que não exista tal constante c . Então, podemos definir (γ_n) em $\Omega_h^{p\perp}$ tal que $\|\gamma_n\| > n\|\Delta\gamma_n\| \forall n \in \mathbb{N}$.

Fazendo $\tilde{\gamma}_n = \frac{\gamma_n}{\|\gamma_n\|}$ ¹, temos $(\tilde{\gamma}_n)$ em $\Omega_h^{p\perp}$ tal que $\|\tilde{\gamma}_n\| = 1$ e $\|\Delta\tilde{\gamma}_n\| \rightarrow 0$. Assim, de acordo com o teorema (2.23), existe uma subsequência (β_i) de $(\tilde{\gamma}_n)$ tal que (β_i) é de Cauchy em Ω^p .

Logo, dado $\psi \in \Omega^p$, $|\langle\beta_i, \psi\rangle - \langle\beta_{i+k}, \psi\rangle| = |\langle\beta_i - \beta_{i+k}, \psi\rangle| \leq \|\beta_i - \beta_{i+k}\| \|\psi\| \Rightarrow (\langle\beta_i, \psi\rangle)_{i \in \mathbb{N}}$ é seqüência de Cauchy em $\mathbb{R} \Rightarrow \exists l(\psi) \stackrel{def}{=} \lim \langle\beta_i, \psi\rangle$.

Notemos que $l : \psi \mapsto l(\psi)$ é linear e contínuo, pois

$$|l(\psi)| = |\lim \langle\beta_i, \psi\rangle| = \lim |\langle\beta_i, \psi\rangle| \leq \lim \|\beta_i\| \|\psi\| = \|\psi\|$$

Como $l(\Delta\psi) = \lim \langle\beta_i, \Delta\psi\rangle = \lim \langle\Delta\beta_i, \psi\rangle \leq \lim \|\Delta\beta_i\| \|\psi\| = 0$, temos $l(\Delta\psi) = \langle 0, \psi \rangle \forall \psi \in \Omega^p$, isto é, l é solução fraca de $\Delta\beta = 0$.

Podemos então aplicar o teorema da regularidade para obter $\beta \in \Omega^p(M)$ tal que $l(\psi) = \langle\beta, \psi\rangle$ e $\Delta\beta = 0$. Assim:

$$\langle\beta_i, \psi\rangle \rightarrow \langle\beta, \psi\rangle \quad \forall \psi \in \Omega^p \quad (2.1)$$

Conseqüentemente, $\beta_i \rightarrow \beta$. De fato, se $\bar{\Omega}^p$ é o completamento de Ω^p , então (β_i) converge em $\bar{\Omega}^p$, pois (β_i) é de Cauchy. Seja $\bar{\beta} = \lim \beta_i \in \bar{\Omega}^p$. Tomando $\psi = \bar{\beta} - \beta$ em (2.1), temos $\langle\beta_i, \bar{\beta} - \beta\rangle \rightarrow \langle\beta, \bar{\beta} - \beta\rangle$, isto é, $0 = \lim \langle\beta_i - \beta, \bar{\beta} - \beta\rangle = \langle\lim \beta_i - \beta, \bar{\beta} - \beta\rangle = \|\bar{\beta} - \beta\|^2$. Logo, $\beta = \bar{\beta} = \lim \beta_i$. Como o complemento ortogonal é sempre um subespaço fechado, temos $\beta \in \Omega_h^{p\perp}$. Como ainda $\Delta\beta = 0$, temos $\beta \in \Omega_h^p \cap \Omega_h^{p\perp} = \{0\}$, isto é, $\beta = 0$. No entanto, $\|\beta\| = \|\lim \beta_i\| = \lim \|\beta_i\| = 1$ (contradição). \square

Voltemos à demonstração de que $\Omega_h^{p\perp} \subseteq \Delta(\Omega^p)$. Dado $\alpha \in \Omega_h^{p\perp}$, inicialmente encontraremos uma solução fraca de $\Delta\omega = \alpha$. Aplicaremos então o teorema da regularidade para obter ω tal que $\alpha = \Delta\omega$, concluindo que $\alpha \in \Delta(\Omega^p)$.

Dado $\alpha \in \Omega_h^{p\perp}$, definamos $l : \Delta(\Omega^p) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\Delta\varphi \mapsto \langle\alpha, \varphi\rangle$$

Notamos que se $\Delta\varphi = \Delta\psi$ então $\varphi - \psi \in \Omega_h^p \Rightarrow \langle\alpha, \varphi - \psi\rangle = 0 \Rightarrow \langle\alpha, \varphi\rangle = \langle\alpha, \psi\rangle$. Assim l está bem definida e é evidentemente linear. Mostremos que l é um funcional contínuo.

Dado $\varphi \in \Omega^p$, escrevamos $\varphi = \varphi_h + \varphi_\perp$, com $\varphi_h \in \Omega_h^p$ e $\varphi_\perp \in \Omega_h^{p\perp}$. Com isso, dado $\alpha \in \Omega_h^{p\perp}$:

¹Notemos que $\|\gamma_n\| = \int_M \gamma_n \wedge *\gamma_n$ é um número real e não uma função definida em M .

$|l(\Delta\varphi)| = |\langle \alpha, \varphi \rangle| = |\langle \alpha, \varphi_h \rangle + \langle \alpha, \varphi_\perp \rangle| = |\langle \alpha, \varphi_\perp \rangle| \leq \|\alpha\| \|\varphi_\perp\|$, e pelo lema anterior, $|l(\Delta\varphi)| \leq c\|\alpha\| \|\Delta\varphi_\perp\| = c\|\alpha\| \|\Delta\varphi\|$, pois $\Delta\varphi = \Delta\varphi_h + \Delta\varphi_\perp = \Delta\varphi_\perp$.

Como $\Delta(\Omega^p)$ é subespaço do espaço vetorial normado Ω^p , o teorema de Hahn-Banach [Si] nos garante a extensão de l a um funcional linear contínuo l_0 em Ω^p . Portanto, l_0 é solução fraca de $\Delta\omega = \alpha$ e, pelo teorema da regularidade, existe $\omega \in \Omega^p$ tal que $\alpha = \Delta\omega$. Dessa forma, $\alpha \in \Delta(\Omega^p)$ e portanto, $\Omega_h^{p\perp} \subseteq \Delta(\Omega^p)$.

(iii) Pelo lema 2.24 e por (i), temos $\Omega^p = \Omega_h^p \oplus \Omega_h^{p\perp}$. Como de (ii) temos $\Omega_h^{p\perp} = \Delta(\Omega^p)$, segue que $\Omega^p = \Omega_h^p \oplus \Delta(\Omega^p)$. \square

Corolário 2.27 *Seja $\alpha \in \Delta(\Omega^p)$. Então a equação $\Delta\omega = \alpha$ tem solução se, e somente se, α é ortogonal às p -formas harmônicas.*

dem.: Como vimos, $\Delta(\Omega^p) = \Omega_h^{p\perp}$. \square

2.6 Aplicações à cohomologia de de Rham

Começamos esta seção com a apresentação do operador de Green. O leitor não interessado neste tópico pode seguir diretamente para o teorema 2.33.

Definição 2.28 *Do teorema de Hodge, $\Omega^p = \Omega_h^p \oplus \Omega_h^{p\perp}$. Assim, dado $\alpha \in \Omega^p$, existem únicos $\alpha_h \in \Omega_h^p$ e $\alpha_\perp \in \Omega_h^{p\perp}$ tais que $\alpha = \alpha_h + \alpha_\perp$. Definimos as projeções $H : \Omega^p \rightarrow \Omega_h^p$ e $\pi : \Omega^p \rightarrow \Omega_h^{p\perp}$ por $H(\alpha) = \alpha_h$ e $\pi(\alpha) = \alpha_\perp$.*

Proposição 2.29 $\tilde{\Delta} = \Delta|_{\Omega_h^{p\perp}} : \Omega_h^{p\perp} \rightarrow \Omega_h^{p\perp}$ é bijeção.

dem.: Dado $\alpha \in \Omega_h^{p\perp}$, pelo corolário 2.27 existe $\omega \in \Omega^p$ tal que $\alpha = \Delta\omega = \Delta(H\omega + \pi\omega) = \Delta(\pi\omega)$. Portanto, $\tilde{\Delta}$ é sobrejetora.

Ainda, $\tilde{\Delta}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \Omega_h^p \cap \Omega_h^{p\perp} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}$ injetora. \square

Definição 2.30 *Definimos o operador de Green $G : \Omega^p \rightarrow \Omega_h^{p\perp}$ por $G = \tilde{\Delta}^{-1} \circ \pi$.*

A proposição a seguir nos dá outra caracterização do operador de Green.

Proposição 2.31 (i) $G(\alpha)$ é a única solução de $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ em $\Omega_h^{p\perp}$.

(ii) G é linear, contínuo e auto-adjunto.

(iii) G leva seqüências limitadas em seqüências com subseqüências de Cauchy.

dem.: (i) É imediato que $G(\alpha)$ é solução de tal equação. Demonstremos a unicidade.

Se $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$ com $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_h^{p\perp}$ então $\omega_1 - \omega_2 \in \Omega_h^p \cap \Omega_h^{p\perp} = \{0\}$. Portanto $\omega_1 = \omega_2$.

(ii) Pelo lema 2.26, temos $\|G(\alpha)\| \leq c\|\Delta G(\alpha)\| = c\|\pi(\alpha)\| \leq c\|\alpha\|^2$. Assim, G é contínuo.

Ainda, Δ auto-adjunta $\Rightarrow \tilde{\Delta}$ auto-adjunta $\Rightarrow \tilde{\Delta}^{-1}$ auto-adjunta. Como $G(\alpha) \in \Omega_h^{p\perp}$, temos $\langle G\alpha, \beta \rangle = \langle G\alpha, \pi\beta \rangle = \langle \tilde{\Delta}^{-1}\pi\alpha, \pi\beta \rangle = \langle \pi\alpha, \tilde{\Delta}^{-1}\pi\beta \rangle = \langle \pi\alpha, G\beta \rangle = \langle \alpha, G\beta \rangle$

(iii) $\|G(\alpha_i)\| \leq \|G\| \|\alpha_i\|$ e (α_i) limitada $\Rightarrow (G(\alpha_i))$ limitada.

Também $\|\Delta G(\alpha_i)\| = \|\pi(\alpha_i)\| \leq \|\alpha_i\|$ e (α_i) limitada $\Rightarrow (\Delta G(\alpha_i))$ limitada.

Segue do teorema 2.23 que existe subseqüência de Cauchy de $(G(\alpha_i))$ em Ω^p . \square

Proposição 2.32 Seja $T : \Omega^p \rightarrow \Omega^p$ linear. Se $T\Delta = \Delta T$ então $GT = TG$.

dem.: $T(\Omega_h^p) \subseteq \Omega_h^p$, pois $\omega \in \Omega_h^p \Rightarrow \Delta\omega = 0 \Rightarrow \Delta T\omega = T\Delta\omega = 0$.

Também $T(\Omega_h^{p\perp}) \subseteq \Omega_h^{p\perp}$, pois $\omega \in \Omega_h^{p\perp} \Rightarrow$ existe $\alpha \in \Omega^p$ tal que $\omega = \Delta\alpha$ (pelo item (ii) do teorema de Hodge). Assim, $T\omega = T\Delta\alpha = \Delta T\alpha \Rightarrow T\omega \in \Omega_h^{p\perp}$, novamente pelo item (ii) do teorema de Hodge.

Dessas propriedades segue que

$T\omega = T(H\omega + \pi\omega) = TH\omega + T\pi\omega \Rightarrow \pi T\omega = T\pi\omega$, pois $TH\omega \in \Omega_h^p$ e $T\pi\omega \in \Omega_h^{p\perp}$, como vimos acima.

Logo, $\pi T = T\pi$.

Ainda, $T\Delta = \Delta T \Rightarrow T\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}T|_{\Omega_h^{p\perp}} \Rightarrow \tilde{\Delta}^{-1}T = T|_{\Omega_h^{p\perp}} \tilde{\Delta}^{-1} = T\tilde{\Delta}^{-1}$.

Portanto, $GT = \tilde{\Delta}^{-1}\pi T = \tilde{\Delta}^{-1}T\pi = T\tilde{\Delta}^{-1}\pi = TG$. \square

Voltemos agora ao problema da existência de representantes harmônicos nas classes de cohomologia.

Teorema 2.33 Seja M uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável. Então cada classe de cohomologia de de Rham possui um único representante harmônico.

²Pois como $\Omega^p = \Omega_h^p \oplus \Omega_h^{p\perp}$, temos $\|\alpha\|^2 = \|H\alpha + \pi\alpha\|^2 = \|H\alpha\|^2 + \|\pi\alpha\|^2 \geq \|\pi\alpha\|^2$.

dem.: Já mostramos a unicidade de tal representação na observação 2.20. Demonstraremos a existência primeiramente aplicando a função de Green e depois diretamente pelo teorema de Hodge.

(i) Dado $\alpha \in \Omega^p$, $G = \tilde{\Delta}^{-1}\pi \Rightarrow \alpha = H\alpha + \pi\alpha = H\alpha + \tilde{\Delta}G\alpha = H\alpha + d\delta G\alpha + \delta dG\alpha$.

Pela proposição anterior, d comuta com G e logo, $\alpha = H\alpha + d\delta G\alpha + \delta Gd\alpha$.

Assim, α fechada $\Rightarrow \alpha = H\alpha + d\delta G\alpha \Rightarrow [\alpha] = [H\alpha]$.

(ii) Do teorema de Hodge, dado $\alpha \in \Omega^p$ temos $\alpha = \alpha_h + \Delta\beta$, com $\alpha_h \in \Omega_h^p$ e $\beta \in \Omega^p$.

Logo, $\alpha = \alpha_h + d\delta\beta + \delta d\beta$. Em particular, dado $[\alpha] \in H_{dR}^p$,

$\|\alpha - \alpha_h - d\delta\beta\|^2 = \langle \alpha - \alpha_h - d\delta\beta, \delta d\beta \rangle = \langle d\alpha - d\alpha_h - dd\delta\beta, d\beta \rangle = 0$ (pois α é fechada e $d\alpha_h = 0$ pela proposição 2.14).

Portanto, $\alpha = \alpha_h + d\delta\beta$, isto é, $[\alpha] = [\alpha_h]$. \square

Corolário 2.34 *Se M é uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável, então $\Omega_h^p \cong H_{dR}^p$. Em particular, os grupos de cohomologia de de Rham de M são todos de dimensão finita.*

dem.: Tomemos uma métrica riemanniana para M e definamos $F : \Omega_h^p \rightarrow H_{dR}^p$ por $F(\omega) = [\omega]$. Pelo teorema anterior, F é isomorfismo. Assim $H_{dR}^p \cong \Omega_h^p$ e portanto tem dimensão finita pelo teorema de Hodge. \square

Como última aplicação do teorema de Hodge em cohomologia, mostraremos a dualidade de Poincaré: $H_{dR}^p(M) \cong H_{dR}^{n-p}(M)$. Antes, necessitamos de um lema.

Definição 2.35 *Sejam U, V espaços vetoriais sobre \mathbb{R} de dimensão finita. Um emparelhamento entre U e V é uma função bilinear $(,) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que tal emparelhamento é não singular se $(u, v) = 0 \forall v \in V \Rightarrow u = 0$ e $(u, v) = 0 \forall u \in U \Rightarrow v = 0$.*

Lema 2.36 *Se existe um emparelhamento não singular entre U e V então existem isomorfismos $\varphi : U \rightarrow V^*$ e $\psi : V \rightarrow U^*$.*

dem.: Basta definir $\varphi(u)(v) = (u, v)$. Com isso, $\varphi(u) = 0 \Rightarrow (u, v) = 0 \forall v \in V \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \varphi$ injetora $\Rightarrow \dim U \leq \dim V$. Procedendo analogamente, temos ψ definido por $\psi(v)(u) = (u, v)$ injetora, nos dando $\dim V \leq \dim U$. Portanto $\dim U = \dim V$ e assim φ e ψ são isomorfismos. \square

Teorema 2.37 *Seja M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável. Então*

$$P : H_{dR}^p \times H_{dR}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por } P([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta$$

é um emparelhamento não singular.

dem.: P está bem definido pois se $\alpha' = \alpha + d\omega$ e $\beta' = \beta + d\nu$, então

$\alpha' \wedge \beta' = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\nu + d\omega \wedge \beta + d\omega \wedge d\nu = \alpha \wedge \beta + d\xi$, pela proposição 2.17. Logo, pelo teorema de Stokes, $P([\alpha'], [\beta']) = P([\alpha], [\beta])$.

Dada $[\alpha] \in H_{dR}^p$, tomemos $\omega \in \Omega_h^p$ tal que $[\alpha] = [\omega]$ (teorema 2.33).

Com isso, se $P([\alpha], [\beta]) = 0 \forall [\beta] \in H_{dR}^{n-p}$, então em particular $0 = P([\alpha], [*\omega]) = P([\omega], [*\omega]) = \int_M \omega \wedge *\omega = \|\omega\|^2 \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow [\alpha] = 0$.

Procedendo de modo análogo na segunda variável de P , concluimos que tal emparelhamento é não singular. \square

Segue a dualidade de Poincaré:

Corolário 2.38 (Dualidade de Poincaré) *Seja M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável. Então*

$$H_{dR}^{n-p}(M) \cong H_{dR}^p(M)$$

Isso nos permite caracterizar completamente o grupo H_{dR}^n de uma variedade conexa, compacta e orientável.

Corolário 2.39 *Seja M uma variedade conexa, compacta e orientável de dimensão n . Então*

$$H_{dR}^n \cong \mathbb{R}$$

dem.: Segue da proposição 2.18: $H_{dR}^0 \cong \mathbb{R}$ e da dualidade de Poincaré. \square

Capítulo 3

Teoria de Morse

Como já dissemos na introdução, a teoria de Morse estuda a interdependência entre a topologia de uma variedade M e o comportamento global de funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Mais precisamente, seja b_p o p -ésimo número de Betti de M em relação a um domínio principal R e seja m_p o número de pontos críticos de f com índice p (número de autovalores negativos da hessiana de f calculada em p). As desigualdades de Morse traduzem de maneira concisa e elegante tal interdependência estabelecendo que, se M for uma variedade de dimensão n , orientável e compacta e se os pontos críticos de f forem não-degenerados, então

$$m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \cdots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \cdots \pm b_0, \text{ para } p = 0, 1, \dots, n,$$
$$m_n - m_{n-1} + m_{n-2} - \cdots \pm m_0 = b_n - b_{n-1} + b_{n-2} - \cdots \pm b_0$$

Em particular,

(i) $m_p \geq b_p$ e a soma dos números de Betti de M impõe um limite inferior ao número de pontos críticos de f .

(ii) $\chi(M) = \sum_{p=0}^n (-1)^p m_p$, o que nos dá a característica de Euler de M em termos dos pontos críticos de f e mostra a independência de $\chi(M)$ em relação a R .

Neste capítulo obteremos as desigualdades de Morse de duas maneiras distintas. Primeiramente utilizaremos o enfoque tradicional [Mil] onde as linhas de fluxo do gradiente de f são empregadas para estudar a topologia de M . A seguir, utilizaremos a teoria do índice de Conley [Co] para uma demonstração alternativa.

3.1 Funções de Morse

Seja M uma variedade n -dimensional e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos que $p \in M$ é um ponto crítico de f se $df(p) = 0$. Assim, se (x^1, \dots, x^n) é um sistema de coordenadas local no aberto $U \subseteq M$, então p é ponto crítico de f se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$. Diremos que o ponto crítico p é não degenerado se a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$ for não singular. É imediato que tal definição independe do sistema de coordenadas.

Podemos também definir a não-degenerescência de um ponto crítico de f sem referência a sistemas de coordenadas. Para isso, definamos a hessiana de f em p como a aplicação bilinear $f_{**} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$, onde \tilde{v} e \tilde{w} são extensões de v e w numa vizinhança de p ¹. Notemos que f_{**} é simétrica. De fato, $f_{**}(v, w) - f_{**}(w, v) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0$ ². Segue que f_{**} independe das extensões escolhidas para v e w pois $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v(\tilde{w}(f))$ independe da extensão de v e $\tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = w(\tilde{v}(f))$ independe da extensão de w .

Observemos que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$ é a matriz de f_{**} na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ de $T_p M$, pois se localmente $\tilde{v} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\tilde{w} = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, então:

$$\begin{aligned} f_{**}(v, w) &= \sum_{i,j} a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p b^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{i,j} a^i(p) \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p + \sum_{i,j} a^i(p) b^j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p = \\ &= \sum_{i,j} a^i(p) b^j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p \end{aligned}$$

Definimos o índice do ponto crítico p como o índice da aplicação bilinear f_{**} (dimensão maximal de um subespaço onde f_{**} é negativa definida). Lembremos que dada uma aplicação bilinear simétrica, sua matriz em relação a qualquer base é simétrica e portanto diagonalizável. Assim, o número de autovalores negativos de $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$ nos dá diretamente o índice de f_{**} .

O lema de Morse nos permite encontrar um sistema de coordenadas que explicita o comportamento de f em torno de um ponto crítico p . Antes de enunciá-lo, demonstremos

¹Isto é, \tilde{v} e \tilde{w} são campos vetoriais numa vizinhança de p tais que $\tilde{v}_p = v$ e $\tilde{w}_p = w$.

²Pois num sistema de coordenadas, $\tilde{v} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\tilde{w} = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e assim $[\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = \sum_{i,j} (a^i(p) \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \Big|_p - b^j(p) \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \Big|_p) \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p = 0$ já que p é ponto crítico de f .

um lema técnico.

Lema 3.1 *Sejam $V \subseteq \mathbb{R}^n$ uma vizinhança convexa da origem de \mathbb{R}^n e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com $f(0) = 0$. Então existem funções diferenciáveis $g_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$ e $f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \dots, x^n)$.*

dem.: Como V é convexo, podemos tomar

$$f(x^1, \dots, x^n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx^1, \dots, tx^n) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \dots, tx^n) dt = \sum_{i=1}^n x^i \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \dots, tx^n) dt \right),$$

demonstrando o lema. \square

Lema 3.2 (Lema de Morse) *Seja p um ponto crítico não degenerado de f , com índice λ . Então existe um sistema de coordenadas (V, ψ) em p tal que $\psi(p) = 0$ e*

$$f \circ \psi^{-1}(y^1, \dots, y^n) = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

Denominamos y^1, \dots, y^n de coordenadas de Morse.

dem.: Seja (U, φ) um sistema de coordenadas em p . Para simplificar a notação, escrevemos $f(x^1, \dots, x^n)$ para $f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$, onde $(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Pelo lema anterior, $f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j=1}^n x^j g_j(x^1, \dots, x^n)$, com $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0$. Aplicando-o novamente, temos $g_j(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i h_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, com $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)$.

Assim, $f(x^1, \dots, x^n) = f(p) + \sum_{i,j} x^i x^j h_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, onde podemos considerar $h_{ij} = h_{ji}$ substituindo $h_{ij}(x)$ por $\frac{1}{2}[h_{ij}(x) + h_{ji}(x)]$.

Queremos diagonalizar a forma quadrática $Q(x) = \sum_{i,j} x^i x^j h_{ij}(x)$ numa vizinhança da origem. Suponhamos, por indução, que existam coordenadas em p definidas em $U' \subseteq U$ tais que $Q(u^1, \dots, u^n) = \pm(u^1)^2 \pm \dots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u^i u^j H_{ij}(u^1, \dots, u^n)$, com $H_{ij} = H_{ji}$. Nessas coordenadas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(p) = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & (H_{ij}(0)) \end{pmatrix}$$

o que mostra que $H_{ij}(0)$ é não singular. Assim, podemos considerar $H_{rr}(0) \neq 0$ (a menos de uma transformação linear que possivelmente troque a ordem de u^1, \dots, u^n).

Por continuidade, existe uma vizinhança $U'' \subseteq U'$ da origem tal que $|H_{rr}(0)| > 0$. Explicitando u^r na expressão de $Q(u^1, \dots, u^n)$, temos

$$\begin{aligned} Q(u^1, \dots, u^n) &= \pm(u^1)^2 \pm \dots \pm (u^{r-1})^2 + (u^r)^2 H_{rr}(u) + 2u^r \sum_{i>r} u^i H_{ir}(u) + \sum_{i,j>r} u^i u^j H_{ij}(u) \\ &= \pm(u^1)^2 \pm \dots \pm (u^{r-1})^2 + H_{rr}(u) \left[(u^r)^2 + 2u^r \sum_{i>r} u^i \frac{H_{ir}(u)}{H_{rr}(u)} \right] + \sum_{i,j>r} u^i u^j H_{ij}(u) \\ &= \pm(u^1)^2 \pm \dots \pm (u^{r-1})^2 + H_{rr}(u) \left[\left(u^r + \sum_{i>r} u^i \frac{H_{ir}(u)}{H_{rr}(u)} \right)^2 - \sum_{i,j>r} u^i u^j \frac{H_{ir}(u)H_{jr}(u)}{H_{rr}^2(u)} \right] + \\ &+ \sum_{i,j>r} u^i u^j H_{ij}(u) \end{aligned}$$

Dessa forma, definindo

$$v^i = \begin{cases} u^i, & \text{se } i \neq r \\ \sqrt{|H_{rr}(u)|} \left(u^r + \sum_{i>r} u^i \frac{H_{ir}(u)}{H_{rr}(u)} \right), & \text{se } i = r \end{cases},$$

temos $\det \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right)_0 = \sqrt{|H_{rr}(0)|} > 0$ e, pelo teorema da função inversa, tal transformação é inversível numa vizinhança $U''' \subseteq U''$ da origem. Isso nos permite expressar u^r em termos de v^1, \dots, v^n , obtendo

$$Q(v^1, \dots, v^n) = \pm(v^1)^2 \pm \dots \pm (v^r)^2 + \sum_{i,j>r} v^i v^j H'_{ij}(v^1, \dots, v^n).$$

Portanto, podemos sempre colocar f na forma desejada.

Mostremos agora que o λ do enunciado corresponde ao índice de p . Nas coordenadas y^1, \dots, y^n em que $f(y^1, \dots, y^n) = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}(p) = \text{diag}(\underbrace{-2, \dots, -2}_{\lambda \text{ vezes}}, +2, \dots, +2)$$

Logo, f_{**} é negativa definida em $V^- = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \right\}$ e positiva definida em $V^+ = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^{\lambda+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$, com $T_p M = V^- \oplus V^+$. Portanto, λ é o índice de f_{**} . Também podemos chegar a essa conclusão imediatamente notando que a matriz de f_{**} na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$ tem exatamente λ autovalores negativos. \square

Corolário 3.3 *Pontos críticos não degenerados são isolados.*

dem.: imediata da forma local de f em coordenadas de Morse. \square

Definição 3.4 *Diremos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável é uma função de Morse quando f possuir um número finito de pontos críticos, todos não degenerados.*

Proposição 3.5 *Seja M uma variedade compacta e orientável de dimensão finita e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se os pontos críticos de f forem todos não degenerados, então f é uma função de Morse.*

dem.: Tudo o que precisamos mostrar é que o número de pontos críticos de f é finito. Dado $x \in M$, se x não é ponto crítico de f temos $df(x) \neq 0$ e assim, por continuidade, existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que U_x não contém nenhum ponto crítico de f . Se por outro lado x é ponto crítico de f , utilizando coordenadas de Morse em x , vemos que existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que U_x não contém nenhum ponto crítico de f diferente de x . Com isso, obtemos uma cobertura aberta $\{U_x : x \in M\}$ de M e, como M é compacto, existem $x_1, \dots, x_k \in M$ tais que $\{U_{x_i} : i = 1, \dots, k\}$ cobre M . Assim, o conjunto de pontos críticos de f está contido em $\{x_1, \dots, x_k\}$ e, portanto, é finito. \square

3.2 Pontos críticos e geometria

Nessa seção veremos dois teoremas que formalizam a idéia de que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, então a topologia de M sofre alterações apenas na vizinhança dos pontos críticos de f .

Consideremos uma variedade orientável M de dimensão finita onde está definida uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Seja g uma métrica riemanniana em M . Tal métrica define em cada ponto $m \in M$ o isomorfismo usual entre $T_m M$ e $T_m^* M$ dado por $i_m : v \mapsto g_m(\cdot, v)$. Definimos o *gradiente de f* em relação à métrica g como o campo vetorial dado por

$$\nabla_g f(m) = i_m^{-1}(df|_m)$$

Notemos que, em componentes, $\nabla_g f$ é obtido de df por levantamento de índices.

Observemos que se X é um campo vetorial em M , então

$$g(X, \nabla_g f) = i(\nabla_g f)(X) = df(X) = X(f) \tag{3.1}$$

isto é, $g(X, \nabla_g f)$ é a derivada direcional de f ao longo de X .

Dados $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, seja $M^a \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in M : f(x) \leq a\}$.

Teorema 3.6 *Sejam M uma variedade de dimensão n e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, se $f^{-1}[a, b]$ é compacto e não contém nenhum ponto crítico de f , então M^a é difeomorfo a M^b .*

dem.: Sejam g uma métrica riemanniana em M e ∇f o gradiente de f em relação a g . Vemos que ∇f é ortogonal às superfícies de nível de f , pois dada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $f(\alpha(t)) = cte$, temos de (3.1):

$$g(\dot{\alpha}(t), \nabla f) = \dot{\alpha}(t)(f) = \frac{df(\alpha(t))}{dt} = 0$$

Portanto, as curvas integrais de ∇f são ortogonais ao bordo de M^a .

Para obter o fluxo de ∇f vamos transformá-lo num campo vetorial de suporte compacto³. Para isso, seja K uma vizinhança compacta de $f^{-1}[a, b]$ (que é compacto por hipótese) e definamos $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(\nabla f, \nabla f)}, & \text{se } x \in f^{-1}[a, b] \\ 0, & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

Assim, $X_m \stackrel{def}{=} \rho(m)\nabla f(m)$ define um campo vetorial de suporte compacto. Faz então sentido considerar o fluxo (grupo de difeomorfismos a um parâmetro) $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ gerado por X [Wa]. Recordemos as propriedades fundamentais de φ :

(i) para cada $x \in M$, $\varphi(\cdot, x) : t \mapsto \varphi(t, x)$ é curva integral de X passando por x , isto é, $\frac{d\varphi(t, x)}{dt} = X_{\varphi(t, x)}$ e $\varphi(0, x) = x$,

(ii) para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t : x \mapsto \varphi(t, x)$ é difeomorfismo,

(iii) $\varphi_0 = id_M$ (identidade em M), $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ e $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$.

Notemos que em $f^{-1}[a, b]$, f cresce linearmente ao longo das curvas integrais de X . De fato, dado $m \in f^{-1}[a, b]$, temos de (3.1):

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t, m)) = \frac{d\varphi(t, m)}{dt}(f) = X_{\varphi(t, m)}(f) = g(X_{\varphi(t, m)}, \nabla f(\varphi(t, m))) = 1 \quad (3.2)$$

pela definição de X .

Afirmamos que $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$. De fato, por (3.2), $m \in M^a \Rightarrow f(\varphi_{b-a}(m)) = f(\varphi_0(m)) + (b-a) = f(m) + (b-a) \leq b \Rightarrow \varphi_{b-a}(M^a) \subseteq M^b$. Por outro lado, $m \in M^b \Rightarrow f(\varphi_{b-a}^{-1}(m)) = f(\varphi_{a-b}(m)) = f(\varphi_0(m)) + (a-b) = f(m) + (a-b) \leq a \Rightarrow M^b \subseteq \varphi_{b-a}(M^a)$.

³Se M for uma variedade compacta, então isso já é evidentemente satisfeito.

Com isso, $\varphi_{b-a} : M^a \rightarrow M^b$ nos dá o difeomorfismo procurado entre M^a e M^b . \square

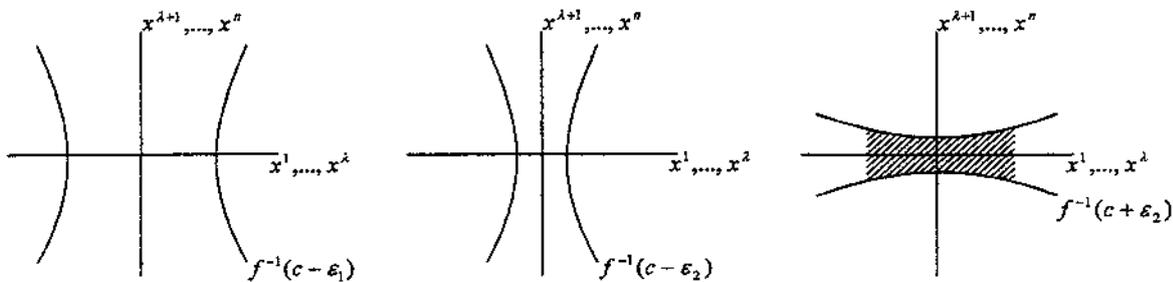
Denominamos o conjunto $e^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\}$ de k -célula, ou célula k -dimensional. Notemos que $\partial e^k = S^{k-1}$. Dados os espaços topológicos X, Y e $\varphi : A \subseteq X \rightarrow Y$ contínua, consideremos a união disjunta $X + Y$ de X e Y e identifiquemos cada ponto $x \in A$ com sua imagem $\varphi(x)$ [Ar]. Intuitivamente, estamos colando X a Y através de A e φ . No que segue, estaremos interessados no caso em que $X = e^k$ e $A = \partial e^k$. Denotaremos o espaço de identificação correspondente por $Y \cup_{\varphi} e^k$ ou simplesmente por $Y \cup e^k$.

Teorema 3.7 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e p ponto crítico não degenerado de f . Denotemos $c = f(p)$. Suponhamos que exista $\alpha > 0$ tal que $f^{-1}[c - \alpha, c + \alpha]$ é compacto e não contém nenhum ponto crítico de f além de p . Então, para todo ε suficientemente pequeno, $M^{c+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$.*

A demonstração de tal teorema é longa e bastante geométrica, podendo ser encontrada em [Mil]. Daremos aqui uma idéia geral do que está acontecendo. Seja λ o índice de p . Em coordenadas de Morse,

$$f(x^1, \dots, x^n) = c - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2$$

Assim, próximo ao ponto p , as superfícies de nível de $f^{-1}(c - \varepsilon)$ de f são da seguinte forma



onde tomamos $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$. Como a região hachurada é homotopicamente equivalente a uma λ -célula (deformando-a ao longo das coordenadas $x^{\lambda+1}, \dots, x^n$), vemos que $M^{c+\varepsilon} \cong M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$.

⁴Observemos que $f^{-1}(c - \varepsilon)$ faz parte da fronteira de $M^{c-\varepsilon}$.

3.3 Desigualdades de Morse

As desigualdades de Morse são mais facilmente obtidas se inicialmente introduzirmos alguns conceitos auxiliares e lemas. Para esse fim, temos a seguinte definição.

Definição 3.8 *Seja S uma função definida sobre pares de conjuntos e com valores em \mathbb{Z} . Dizemos que S é sub-aditiva se $X \supseteq Y \supseteq Z \Rightarrow S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$. Se vale a igualdade, dizemos que S é aditiva.*

Lema 3.9 *Seja S sub-aditiva e $X_0 \subseteq \dots \subseteq X_n$. Então $S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$, valendo a igualdade se S for aditiva.*

dem.: Simples indução em n . \square

Lema 3.10 *Considere a seqüência de homomorfismos entre espaços vetoriais*

$$G_{p+1} \xrightarrow{\varphi_{p+1}} G_p \xrightarrow{\varphi_p} G_{p-1} \xrightarrow{\varphi_{p-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_1} G_0 \xrightarrow{\varphi_0} 0$$

Se tal seqüência é exata⁵, então

$$\dim G_p - \dim G_{p-1} + \dim G_{p-2} - \dots \pm \dim G_0 \geq 0$$

dem.: Pelo teorema do núcleo e da imagem de álgebra linear,

$\dim G_k = \dim \ker(\varphi_k) + \dim \operatorname{im}(\varphi_k) = \dim \operatorname{im}(\varphi_{k+1}) + \dim \operatorname{im}(\varphi_k)$. Assim:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im}(\varphi_{p+1}) &= \dim G_p - \dim \operatorname{im}(\varphi_p) = \\ &= \dim G_p - \dim G_{p-1} + \dim \operatorname{im}(\varphi_{p-1}) = \\ &= \dim G_p - \dim G_{p-1} + \dim G_{p-2} - \dim \operatorname{im}(\varphi_{p-2}) = \dots = \\ &= \dim G_p - \dim G_{p-1} + \dim G_{p-2} - \dots \pm \dim G_0, \end{aligned}$$

já que $\operatorname{im}(\varphi_0) = 0$. \square

Lembremos que dados um espaço topológico X e um domínio principal R , o p -ésimo número de Betti de X com relação a R , $b_p(X; R)$, é definido como o posto do p -ésimo grupo de homologia $H_p(X; R)$ de X . Mais geralmente, se Y é subespaço de X , então $b_p(X, Y; R) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rank} H_p(X, Y; R)$, onde $H_p(X, Y; R)$ é o p -ésimo grupo de homologia relativo. Por simplicidade de notação, fixemos R e denotemos $b_p(X, Y; R)$ e $H_p(X, Y; R)$ simplesmente por $b_p(X, Y)$ e $H_p(X, Y)$.

⁵Isto é, se $\ker(\varphi_k) = \operatorname{im}(\varphi_{k+1})$, $k = 0, \dots, p$.

Lema 3.11 *Seja X espaço topológico e $Y \subseteq X$. Dado $p \in \mathbb{N}$ ⁶, definamos*

$$S_p(X, Y) = b_p(X, Y) - b_{p-1}(X, Y) + b_{p-2}(X, Y) - \cdots \pm b_0(X, Y)$$

Então, S_p é sub-aditiva.

dem.: Suponhamos $X \supseteq Y \supseteq Z$. O lema 3.10 pode ser demonstrado em geral para o caso em que G_k é um domínio principal substituindo $\dim G_k$ por $\text{rank} G_k$. Aplicando-o à seqüência exata de homologia da tripla (Z, Y, X) :

$$\cdots \rightarrow H_{p+1}(X, Y) \rightarrow H_p(Y, Z) \rightarrow H_p(X, Z) \rightarrow H_p(X, Y) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X, Y) \rightarrow 0$$

temos $b_p(Y, Z) - b_p(X, Z) + b_p(X, Y) - b_{p-1}(Y, Z) + \cdots \geq 0$. Assim,

$$S_p(Y, Z) - S_p(X, Z) + S_p(X, Y) \geq 0$$

demonstrando o lema. \square

Definição 3.12 *Seja M uma variedade de dimensão n e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos $m_\lambda(f)$ como o número pontos críticos de f com índice λ .*

Teorema 3.13 (Desigualdades de Morse fortes) *Sejam M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então, dado $p = 0, 1, \dots, n$:*

$$m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \cdots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \cdots \pm b_0$$

onde, por facilidade de notação, $m_k = m_k(f)$ e $b_k = b_k(M; \mathbb{R})$.

dem.: Sejam $c_1 < \cdots < c_r$ os valores críticos de f . Suponhamos que para cada i , $f^{-1}(c_i)$ contenha um único ponto crítico p_i . Observemos que o conjunto das funções de Morse com essa propriedade é denso no conjunto das funções de Morse em M ([DFN1], página 87). Tomando $a_i \in (c_i, c_{i+1})$, $1 \leq i \leq r-1$, $a_0 \in (-\infty, c_1)$ e $a_r \in (c_r, \infty)$, vemos que M^{a_i} contém exatamente i pontos críticos e $\emptyset = M^{a_0} \subseteq M^{a_1} \subseteq \cdots \subseteq M^{a_r} = M$. Segue dos lemas 3.9 e 3.11 que, para cada p ,

$$S_p(M, \emptyset) \leq \sum_{i=1}^r S_p(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \quad (3.3)$$

⁶Estamos considerando \mathbb{N} contendo o 0.

O lado esquerdo dessa equação pode ser escrito da seguinte maneira: como $H_p(M, \emptyset) = H_p(M)$, temos da definição de S_p que $S_p(M, \emptyset) = b_p(M) - b_{p-1}(M) + b_{p-2}(M) - \dots \pm b_0(M)$.

Quanto ao lado direito da equação (3.3), pelo teorema 3.7 temos $H_p(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = H_p(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}})$, onde λ_i é o índice do ponto crítico p_i . Pelo teorema da excisão, $H_p(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) = H_p(e^{\lambda_i}, \partial e^{\lambda_i})$. Logo:

$$b_p(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda_i = p \\ 0, & \text{se } \lambda_i \neq p \end{cases}.$$

Assim, para um dado p fixo, $\sum_{i=1}^r b_p(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})$ conta o número de pontos críticos de f com índice p , isto é, $\sum_{i=1}^r b_p(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = m_p(f)$. Com isso:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r S_p(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \sum_{i=1}^r b_p(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) - \sum_{i=1}^r b_{p-1}(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) + \sum_{i=1}^r b_{p-2}(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) - \dots \pm \sum_{i=1}^r b_0(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \\ &= m_p(f) - m_{p-1}(f) + m_{p-2}(f) - \dots \pm m_0(f). \end{aligned}$$

Portanto, de (3.3):

$$b_p(M) - b_{p-1}(M) + b_{p-2}(M) - \dots \pm b_0(M) \leq m_p(f) - m_{p-1}(f) + m_{p-2}(f) - \dots \pm m_0(f)$$

que são as desigualdades de Morse. \square

Corolário 3.14 (Desigualdades fracas e teorema do índice de Morse) *Sejam M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então,*

- (i) $m_p(f) \geq b_p(M; \mathbb{R})$,
- (ii) $\sum_{p=0}^n (-1)^p m_p(f) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p(M; \mathbb{R})$.

dem.: Do teorema anterior, $m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \dots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \dots \pm b_0$, para $p = 0, 1, \dots, n$. Com isso,

- (i) Para $p = 0$, temos $m_0 \geq b_0$.

Para $p > 0$, somando as expressões para p e $p - 1$, temos $m_p \geq b_p$.

(ii) Se $p > n$, temos naturalmente $m_p = 0$ e $b_p = 0$. Assim, tomando $p > n$ e considerando a expressão acima para p e $p + 1$, temos

$$\begin{aligned} m_n - m_{n-1} + m_{n-2} - \dots \pm m_0 &\geq b_n - b_{n-1} + b_{n-2} - \dots \pm b_0. \\ -m_n + m_{n-1} - m_{n-2} + \dots \mp m_0 &\geq -b_n + b_{n-1} - b_{n-2} + \dots \mp b_0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$m_0 - m_1 + m_2 - \dots \pm m_n = b_0 - b_1 + b_2 - \dots \pm b_n$$

demonstrando o corolário. \square

Corolário 3.15 *Sejam M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então f tem pelo menos $\sum_{p=0}^n b_p$ pontos críticos, onde b_p é o p -ésimo número de Betti de M em relação a qualquer domínio principal.*

Corolário 3.16 (Característica de Euler) *Seja M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável. Então, a característica de Euler de M*

$$\chi(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p(M; R)$$

independe de R .

3.4 Teoria de Morse via índice de Conley

Nesta seção introduziremos o índice de Conley e o utilizaremos para uma demonstração alternativa [Sa] das desigualdades de Morse.

Sejam M uma variedade orientável de dimensão n e f uma função de Morse em M . Dotemos M de uma métrica riemanniana g . Podemos então construir o campo vetorial $\nabla_g f$ a partir de df e considerar as linhas integrais de $\nabla_g f$,

$$\dot{\gamma}(t) = -\nabla_g f(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x \tag{3.4}$$

que serão chamadas de *linhas de gradiente*. Notemos que de (3.1),

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \dot{\gamma}(t)(f) = g(\dot{\gamma}(t), \nabla_g f) = -g(\nabla_g f, \nabla_g f) = -\|\nabla_g f\|^2 \tag{3.5}$$

Como i_m é isomorfismo, $\nabla_g f(m) = 0$ se, e somente se m é ponto crítico de f . Logo, se x é ponto crítico de f em (3.4), então $\gamma(t)$ é constante. Por outro lado, uma solução não constante de (3.4) sempre liga pontos críticos *diferentes* de f . De fato, por (3.5), f é estritamente decrescente ao longo de tal γ .

Se M for compacta, faz sentido considerarmos o grupo de difeomorfismos a um parâmetro gerado por $\nabla_g f$ (cf discussão na demonstração do teorema 3.6):

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \varphi(x, t) = \gamma(t)$$

que chamaremos de *fluxo do gradiente*. Denotaremos também $x \cdot t \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, t)$.

Diremos que um subconjunto S de M é invariante sob o fluxo φ (ou simplesmente invariante) se, dado $x \in S$, tivermos $x \cdot \mathbb{R} \subseteq S$. Diremos que um conjunto invariante S é isolado se S possuir uma vizinhança compacta U cujo conjunto invariante maximal

$$S(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U : x \cdot \mathbb{R} \subseteq U\}$$

coincide com S .

Pode-se mostrar que para cada U como acima, existe um subconjunto compacto $A \subseteq U - S$, chamado de conjunto de saída⁷ para U , satisfazendo as seguintes propriedades [Co]:

- (i) Se $x \in U$ e $x \cdot t \notin U$ para algum $t > 0$, então existe $t' \in [0, t]$ tal que $x \cdot t' \in A$.
- (ii) Se $x \in A$ e $x \cdot t \notin A$ para $t > 0$, então $x \cdot t \notin U$.

Um par (U, A) satisfazendo as condições acima é chamado um par indicial⁸ para S . O índice de Conley $I(S)$ de S é definido como o tipo de homotopia do espaço quociente U/A com relação ao ponto base $\{A\}$ ou, mais precisamente, pela classe de equivalência de tal espaço sob a relação de equivalência de homotopia com ponto base fixo. Mostra-se que tal definição independe do par indicial (U, A) escolhido para S e que $I(S)$ é invariante sob deformações contínuas do fluxo φ contanto que S permaneça isolado [Co].

Denotaremos o p -ésimo grupo de homologia (cohomologia) relativo do par (U, A) por $H^p(U, A)$ (resp. $H_p(U, A)$). Segue da independência do índice de Conley em relação ao par indicial escolhido para S que:

Lema 3.17 *Seja S um conjunto invariante isolado sob o fluxo φ . Se (U, A) e (U', A') são pares indiciais para S , então $H_k(U, A) \cong H_k(U', A')$ e $H^k(U, A) \cong H^k(U', A')$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3.18 *Para ilustrar tal conceito, analisemos o seguinte exemplo:*

⁷Na nomenclatura original de Conley [Co], “exit set”.

⁸Na nomenclatura original de Conley [Co], “index pair”.

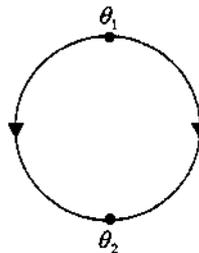
Consideremos a equação diferencial

$$\frac{d\theta}{dt} = -\cos \theta$$

em $M = S^1$. Definindo $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(\theta) = \text{sen}\theta$, temos

$$\frac{d\theta}{dt} = -\nabla f$$

onde ∇f é tomado com relação à métrica $g = d\theta^2$ em S^1 .



Tal f possui dois pontos críticos: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$. É fácil ver que os índices de Morse de tais pontos são dados por $\text{ind}(\theta_1) = 1$ e $\text{ind}(\theta_2) = 0$. Analisemos os respectivos índices de Conley.

Temos dois subconjuntos invariantes: $S_1 = \{\theta_1\}$ e $S_2 = \{\theta_2\}$. Para S_1 , podemos escolher $U_1 = \{\theta : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ e $A_1 = \{0, \pi\}$. Assim, $U_1/A_1 \cong S^1$ e $I(S_1)$ é dado por um círculo com um ponto distinguido x_0 (ou mais precisamente pelo seu tipo de homotopia), isto é, $I(S_1) \cong (S^1, x_0)$. Para S_2 , podemos escolher $U_2 = \{\theta : \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$ e $A_2 = \emptyset$. Quando o subconjunto vazio de um espaço X é “colapsado a um ponto”, o espaço resultante é homeomorfo à união disjunta de tal espaço com um ponto distinguido [Co]. Como U_2 tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, vemos então que $I(S_2)$ é dado pela união disjunta de dois pontos (ou mais precisamente pelo seu tipo de homotopia), isto é, $I(S_2) \cong (S^0, x_0)$.

Em geral, dada uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se x é um ponto crítico de índice λ de f , então $\{x\}$ é um conjunto invariante isolado e seu índice de Conley é uma λ -esfera com um ponto distinguido $I(\{x\}) \cong (S^\lambda, x_0)$.

Definição 3.19 Dado um conjunto invariante isolado S , definimos

$$\begin{aligned} I_k(S; R) &= H_k(U, A; R) \\ I^k(S; R) &= H^k(U, A; R) \\ P_S(t) &= \sum_k b_k(U, A; R)t^k \end{aligned}$$

onde (U, A) é um par indicial para S , R é um domínio principal e $b_k(U, A; R) = \text{rank} H_k(U, A; R)$. Observemos que, em virtude do lema 3.17, $I_k(S; R)$ (e $I^k(S; R)$) estão bem definidos a menos de isomorfismos entre grupos de (co)homologia.

Segue das propriedades de aditividade dos grupos de homologia e cohomologia que, se S_1 e S_2 são conjuntos invariantes isolados disjuntos, então:

$$\begin{aligned} P_{S_1 \cup S_2}(t) &= P_{S_1}(t) + P_{S_2}(t) \\ I_k(S_1 \cup S_2; R) &\cong I_k(S_1; R) \oplus I_k(S_2; R) \\ I^k(S_1 \cup S_2; R) &\cong I^k(S_1; R) \oplus I^k(S_2; R) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Seja M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável munida de uma métrica riemanniana g e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então qualquer ponto crítico de f é um conjunto invariante sob $\nabla_g f$ (pois todo ponto crítico é isolado e não degenerado).

Dado x ponto crítico de f , denotemos as variedades estável e instável de $\nabla_g f$ em x por $W^s(x)$ e $W^u(x)$ respectivamente⁹. Seja E_x^- (E_x^+) o auto-espaço associado aos autovalores negativos (positivos) da hessiana de f no ponto crítico x . Denotando novamente o índice do ponto crítico x (no sentido da seção 3.1) por $\text{ind}(x)$, temos por definição:

$$\text{ind}(x) = \dim E_x^-$$

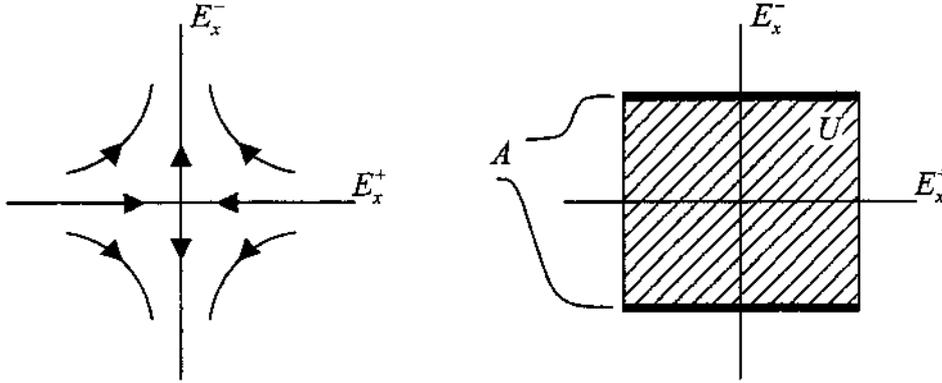
Devido ao sinal menos na definição da equação (3.4), vemos que E_x^+ (resp. E_x^-) é o espaço tangente a $W^s(x)$ (resp. $W^u(x)$) no ponto x .

Seja $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ a aplicação exponencial [dC] numa vizinhança do ponto crítico x e seja B_ε^\pm a bola fechada em E_x^\pm centrada em O e de raio ε . Definamos

$$(U, A) = (\exp_x(B_\varepsilon^+ \times B_\varepsilon^-), \exp_x(B_\varepsilon^+ \times \partial B_\varepsilon^-))$$

⁹A variedade estável $W^s(x)$ do ponto crítico x é o conjunto de todos os pontos $m \in M$ tais que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(m) = x$, onde $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. A variedade instável $W^u(x)$ do ponto crítico x é o conjunto de todos os pontos $m \in M$ tais que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(m) = x$ [Sm2].

Não é difícil ver que, tomando ε suficientemente pequeno, (U, A) é um par indicial para x ¹⁰. Para $n = 2$ e $ind(x) = 1$, temos a situação mostrada na figura abaixo:



Com isso, $U/A \cong (B_\varepsilon^+ \times B_\varepsilon^-) / (B_\varepsilon^+ \times \partial B_\varepsilon^-) \cong B_\varepsilon^- / \partial B_\varepsilon^- \cong S^{ind(x)}$, pois como $\dim E_x^- = ind(x)$, vemos que B_ε^- é essencialmente uma bola fechada em $\mathbb{R}^{ind(x)}$ e $\partial B_\varepsilon^- \cong S^{ind(x)-1}$.

Assim:

$$\begin{aligned} I^k(x; R) &= H^k(B_\varepsilon^+ \times B_\varepsilon^-, B_\varepsilon^+ \times \partial B_\varepsilon^-; R) \\ &\cong H^k(B_\varepsilon^-, \partial B_\varepsilon^-; R) \end{aligned}$$

Portanto:

$$I^k(x; R) \cong \begin{cases} R, & \text{se } k = ind(x) \\ 0, & \text{se } k \neq ind(x) \end{cases} \quad (3.7)$$

e

$$P_x(t) = t^{ind(x)} \quad (3.8)$$

Definamos os seguintes polinômios relacionados a M e a f :

$$P_M(t) = \sum_k b_k(M; R)t^k \quad \text{e} \quad P_f(t) = \sum_k m_k(f)t^k$$

Notemos que, como M é compacta, M é um conjunto invariante e (M, \emptyset) é um par indicial para M . Assim, nossa definição de $P_M(t)$ é apenas um caso particular da definição 3.19. A seguir damos uma outra caracterização das desigualdades de Morse.

¹⁰Isto é, para o conjunto $\{x\}$.

Proposição 3.20 *Valem as desigualdades de Morse se, e somente se,*

$$P_f(t) - P_M(t) = (1+t)Q(t)$$

onde $Q(t)$ é um polinômio com coeficientes não negativos.

dem.: Pela definição de $P_f(t)$ e $P_M(t)$,

$$\begin{aligned} (P_f(t) - P_M(t))(1+t)^{-1} &= \left(\sum_{k=0}^n (m_k - b_k) t^k \right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^j (m_k - b_k) t^{k+j} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} [(-1)^p (m_0 - b_0) + (-1)^{p-1} (m_1 - b_1) + \cdots + (-1)^0 (m_p - b_p)] t^p = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \{ [m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \cdots + (-1)^p m_0] - [b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \cdots + (-1)^p b_0] \} t^p \end{aligned}$$

e a equivalência procurada é imediata. \square

Teorema 3.21 (Desigualdades de Morse) *Sejam M uma variedade de dimensão n , compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então, dado $p = 0, 1, \dots, n$:*

$$m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \cdots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \cdots \pm b_0$$

onde m_k é o número de pontos críticos de f de índice k e $b_k = \text{rank} H_k(M; R)$, R domínio principal.

dem.: Se $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de f , então $S = \{x \in M : \nabla_g f = 0, f(x) = c\}$ é um conjunto invariante isolado¹¹. Sejam α, β valores regulares de f tais que c é o único valor crítico de f no intervalo (α, β) . Tomemos (M^β, M^α) como par indicial para S , onde $M^\alpha = \{x \in M : f(x) \leq \alpha\}$. Como o índice de Conley é independente do par indicial escolhido, segue de (3.6) e de (3.8) que

$$\sum_k b_k(M^\beta, M^\alpha) t^k \stackrel{\text{def}}{=} P_S(t) = \sum_{x \in S} t^{\text{ind}(x)} \quad (3.9)$$

Seja m_k^α o número de pontos críticos x de f tais que $f(x) \leq \alpha$ e $\text{ind}(x) = k$. Segue imediatamente de (3.9) que $b_k(M^\beta, M^\alpha) = m_k^\beta - m_k^\alpha$.

Considerando a seqüência exata de homologia do par (M^β, M^α) :

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(M^\beta, M^\alpha) \xrightarrow{\partial_k} H_k(M^\alpha) \xrightarrow{i_*} H_k(M^\beta) \xrightarrow{j_*} H_k(M^\beta, M^\alpha) \xrightarrow{\partial_{k-1}} H_{k-1}(M^\alpha) \rightarrow \cdots$$

¹¹Pois pela seção 3.1, os pontos críticos de f são isolados.

temos

$$\text{rank} \partial_{k-1} - \text{rank} \partial_k = b_k(M^\beta, M^\alpha) - b_k(M^\beta) + b_k(M^\alpha) \quad ^{12}$$

e portanto

$$\text{rank} \partial_{k-1} - \text{rank} \partial_k = m_k^\beta - m_k^\alpha - b_k(M^\beta) + b_k(M^\alpha)$$

Multiplicando por t^k e somando sobre k , temos

$$P_f^\beta(t) - P_f^\alpha(t) - P_M^\beta(t) + P_M^\alpha(t) = \sum_{k=0}^n \text{rank} \partial_{k-1} t^k - \sum_{k=0}^n \text{rank} \partial_k t^k$$

onde $P_f^\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n m_k^\alpha t^k$ e $P_M^\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n b_k(M^\alpha) t^k$.

Mas $\sum_{k=0}^n \text{rank} \partial_{k-1} t^k = \sum_{k=-1}^{n-1} \text{rank} \partial_k t^{k+1} = \sum_{k=0}^n \text{rank} \partial_k t^{k+1}$, pois $\text{rank} \partial_{-1} = \text{rank} \partial_n = 0$ (a variedade é n -dimensional). Logo:

$$P_f^\beta(t) - P_M^\beta(t) = P_f^\alpha(t) - P_M^\alpha(t) + (1+t) \sum_{k=0}^n \text{rank} \partial_k t^k$$

Assim, definindo $Q^{\alpha\beta}(t) = \sum_{k=0}^n \text{rank} \partial_k t^k$, temos

$$P_f^\beta(t) - P_M^\beta(t) = P_f^\alpha(t) - P_M^\alpha(t) + (1+t)Q^{\alpha\beta}(t) \quad (3.10)$$

onde $Q^{\alpha\beta}(t)$ tem coeficientes não negativos.

Como o número de pontos críticos de f é finito, existe um número finito de valores críticos $c_1 < \dots < c_r$ de f . Escolhamos α_i, β_i valores regulares de f tais que c_i é o único valor crítico de f no intervalo (α_i, β_i) (como fizemos anteriormente com c). Temos então $M^{\alpha_1} = \emptyset$ (pois c_1 é necessariamente valor de mínimo global de f) e assim $P_f^{\alpha_1}(t) = 0$ e $P_M^{\alpha_1}(t) = 0$. Com uma simples recursão em (3.10), obtemos então

$$P_f^{\beta_r}(t) - P_M^{\beta_r}(t) = (1+t)Q^{\alpha_1\beta_r}(t)$$

¹²Vamos ilustrar a demonstração desse fato no caso em que R é um espaço vetorial. Então, da seqüência exata do par (M^β, M^α) , temos pelo teorema do núcleo e da imagem:

$$b_k(M^\alpha) = \dim \ker(i_*) + \dim \text{im}(i_*)$$

$$b_k(M^\beta) = \dim \ker(j_*) + \dim \text{im}(j_*)$$

$$b_k(M^\beta, M^\alpha) = \dim \ker(\partial_{k-1}) + \dim \text{im}(\partial_{k-1})$$

E como a seqüência é exata,

$$b_k(M^\alpha) - b_k(M^\beta) + b_k(M^\beta, M^\alpha) = \dim \ker(i_*) + \dim \text{im}(\partial_{k-1}) = \text{rank} \partial_k + \text{rank} \partial_{k-1}.$$

onde $Q^{\beta_r}(t)$ tem coeficientes não negativos. Como c_r é valor de máximo global de f , temos $M^{\beta_r} = M$ e portanto

$$P_f(t) - P_M(t) = (1+t)Q^{\beta_r}(t)$$

que juntamente com a proposição anterior, nos dá as desigualdades de Morse. \square

3.5 Aplicações da teoria de Morse

Pretendemos nesta seção dar duas aplicações da teoria de Morse: uma em geometria ([Mil]) e outra em mecânica de muitos corpos ([NS]).

3.5.1 Geometria

A primeira das aplicações é o teorema de Reeb, que nos dá um critério para decidir se uma variedade compacta é homeomorfa a uma esfera.

Teorema 3.22 (Reeb) *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Se f tem apenas dois pontos críticos e ambos são não-degenerados então M é homeomorfa a uma esfera.*

dem.: Como f tem exatamente dois pontos críticos, um deles (p) deve ser ponto de mínimo global e o outro (q) de máximo global. Sem perda de generalidade, assumamos que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$ (basta compor f com uma função apropriada). Pelo lema de Morse, existe uma carta (U, φ) em p tal que $f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$. Podemos supor $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$.

Existe $a > 0$ tal que $f^{-1}[0, a] \subseteq U$, pois caso contrário, existiria uma seqüência (m_i) em $M - U$ tal que $0 \leq f(m_i) \leq \frac{1}{i} \forall i$ e, com isso, $0 = \lim f(m_i) = f(\lim m_i) \Rightarrow \lim m_i = p \in U \Rightarrow m_i \in U$ para todo i suficientemente grande (contradição).

Assim, para ε suficientemente pequeno, $f^{-1}[0, \varepsilon]$ é homeomorfo à bola fechada B de raio 1 centrada na origem de \mathbb{R}^n . Como $M^{1-\varepsilon}$ é homeomorfo a M^ε (teorema 3.6) e $M^\varepsilon = f^{-1}(-\infty, \varepsilon] = f^{-1}[0, \varepsilon]$, temos $M^{1-\varepsilon}$ homeomorfo a B . Seja $\alpha : B \rightarrow M^{1-\varepsilon}$ um tal homeomorfismo.

Por um argumento inteiramente análogo ao que usamos para mostrar que $f^{-1}[0, \varepsilon]$ é homeomorfo a B , temos $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ homeomorfo a B . Seja $\beta : B \rightarrow f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ um tal homeomorfismo. Compondo β com um homeomorfismo $h : B \rightarrow B$ apropriado, podemos supor $\beta(z) = \alpha(z), \forall z \in \partial B = S^{n-1}$.

Definamos agora um homeomorfismo entre $M = M^{1-\varepsilon} \cup f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ e S^n . Sejam ρ_- e ρ_+ as projeções canônicas de B nos hemisférios sul e norte de S^n . Definindo $F : M \rightarrow S^n$ por

$$F(m) = \begin{cases} \rho_- \circ \alpha^{-1}, & \text{se } m \in M^{1-\varepsilon} \\ \rho_+ \circ \beta^{-1}, & \text{se } m \in f^{-1}[1 - \varepsilon, 1] \end{cases}$$

temos M homeomorfo a S^n via F . \square

3.5.2 Mecânica de muitos corpos

Consideremos um sistema de N partículas cuja interação provém de um potencial V que é função apenas das posições das partículas. Suponhamos que o movimento da partícula i é restrito a uma variedade compacta e orientável M_i . Definindo $M = M_1 \times \cdots \times M_N$, podemos então considerar $V : M \rightarrow \mathbb{R}$.

As posições de equilíbrio (que podem ser estáveis ou instáveis) do sistema são definidas pelos pontos críticos do potencial. Vamos assumir que o potencial atende às exigências de uma função de Morse, isto é, V é diferenciável e todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

Seja C o número de pontos de equilíbrio do sistema. Utilizando a notação da seção anterior, temos das desigualdades de Morse (fracas):

$$C = \sum_{p=0}^{\dim M} m_p(V) \geq \sum_{p=0}^{\dim M} b_p(M) \quad (3.11)$$

Vamos nos concentrar no caso particular em que cada M_i é homeomorfo a S^1 . Então, uma aplicação da fórmula de Kunneth nos dá

$$H_p(M, \mathbb{Z}) = H_p(\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{N \text{ vezes}}) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\binom{N}{p} \text{ vezes}}$$

Assim, $b_p(M) = \binom{N}{p}$. Como $\dim M = N$, temos de (3.11):

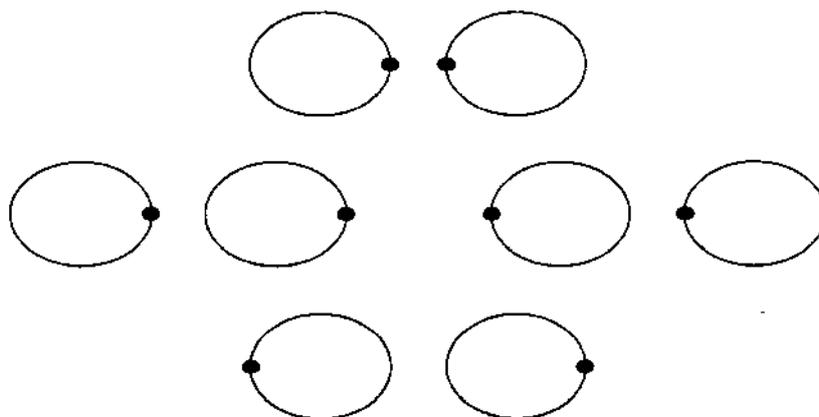
$$C \geq \sum_{p=0}^N b_p(M) = \sum_{p=0}^N \binom{N}{p} = (1+1)^N$$

Portanto,

$$C \geq 2^N$$

e a topologia do espaço de configurações impõe um limite inferior ao número de pontos de equilíbrio do sistema!

Tomemos por exemplo o caso em que $N = 2$, M_1 e M_2 são elipses e o potencial V é atrativo. Neste caso, mostramos abaixo uma configuração em que o número mínimo de pontos de equilíbrio é atingido.



Capítulo 4

Teoria de Morse e mecânica quântica supersimétrica

No capítulo anterior, demonstramos as desigualdades de Morse utilizando a caracterização *topológica* dos números de Betti, $b_p = \text{rank} H_p(M, R)$. Neste capítulo, utilizaremos a caracterização *analítica* dos números de Betti, $b_p = \dim \Omega_h^p(M)$ ¹, para dar uma demonstração *analítica* das desigualdades de Morse, obtida originalmente por Witten em [Wi1].

Inicialmente, atingiremos tal objetivo seguindo o enfoque de [CFKS] que é bastante elegante e matematicamente mais preciso que o de Witten. Finalmente, na seção 4.4, apresentaremos o procedimento original de Witten, em que as linhas de gradiente de f são interpretadas como tunelamentos entre os estados de menor energia de um sistema mecânico-quântico supersimétrico. Tal trabalho deu origem a várias contribuições à geometria diferencial, como o desenvolvimento da cohomologia de Floer, da qual trataremos nos dois capítulos seguintes.

4.1 Supersimetria

Em [Gi], F. Gieres dá uma boa caracterização de supersimetria: “a grosso modo, *super* significa \mathbb{Z}_2 – *graduado*”. No caso da mecânica quântica supersimétrica, tal graduação provém da decomposição do espaço de estados em $\mathbf{H} = \mathbf{H}_b \oplus \mathbf{H}_f$, onde \mathbf{H}_b (\mathbf{H}_f) corresponde ao conjunto dos estados bosônicos (fermiônicos) do sistema. Mas isso não é tudo: acompa-

¹Vide corolário 2.34 ou equação (4.3).

nhando essa decomposição, temos um operador de supersimetria Q satisfazendo $H = Q^2$ e levando estados bosônicos em fermiônicos e vice-versa.

Definição 4.1 *Seja \mathbf{H} um espaço com produto interno onde estão definidos os operadores H e Q auto-adjuntos e Π auto-adjunto e contínuo². Diremos que (H, Q, Π) tem supersimetria em \mathbf{H} se*

$$H = Q^2,$$

$$\Pi^2 = 1,$$

$$\{Q, \Pi\} = 0.$$

Chamaremos H de hamiltoniano, Q de operador de supersimetria e Π de operador de paridade.

Como Π é auto-adjunto e $\Pi^2 = 1$, seus autovalores só podem ser $+1$ e -1 . Definindo $\mathbf{H}_b = \{\varphi \in \mathbf{H} : \Pi\varphi = \varphi\}$ e $\mathbf{H}_f = \{\varphi \in \mathbf{H} : \Pi\varphi = -\varphi\}$, temos $\mathbf{H} = \mathbf{H}_b \oplus \mathbf{H}_f$.

Definição 4.2 *Dizemos que um operador linear $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é par se $[A, \Pi] = 0$ e ímpar se $\{A, \Pi\} = 0$.*

Proposição 4.3 *Nas condições acima,*

(i) *A é par $\Leftrightarrow A(\mathbf{H}_b) \subseteq \mathbf{H}_b$ e $A(\mathbf{H}_f) \subseteq \mathbf{H}_f$.*

(ii) *A é ímpar $\Leftrightarrow A(\mathbf{H}_b) \subseteq \mathbf{H}_f$ e $A(\mathbf{H}_f) \subseteq \mathbf{H}_b$.*

dem.: (ii) (\Rightarrow) Se A é ímpar, então

$$\varphi \in \mathbf{H}_b \Rightarrow A\varphi = A\Pi\varphi = -\Pi A\varphi \Rightarrow \Pi A\varphi = A\varphi \Rightarrow A\varphi \in \mathbf{H}_f.$$

$$\varphi \in \mathbf{H}_f \Rightarrow A\varphi = A(-\Pi\varphi) = \Pi A\varphi \Rightarrow \Pi A\varphi = -A\varphi \Rightarrow A\varphi \in \mathbf{H}_b.$$

(\Leftarrow) Se $A(\mathbf{H}_b) \subseteq \mathbf{H}_f$ e $A(\mathbf{H}_f) \subseteq \mathbf{H}_b$, então dado $\varphi = \varphi_b + \varphi_f$, com $\varphi_b \in \mathbf{H}_b$ e $\varphi_f \in \mathbf{H}_f$,

$$A\Pi\varphi = A\Pi(\varphi_b + \varphi_f) = A(\varphi_b - \varphi_f) = A\varphi_b - A\varphi_f = -\Pi A\varphi_b - \Pi A\varphi_f = -\Pi A\varphi.$$

A demonstração de (i) é inteiramente análoga. \square

Proposição 4.4 *Suponhamos que (H, Q, Π) tem supersimetria em \mathbf{H} . Então Q é ímpar e H é par. Segue que \mathbf{H}_b e \mathbf{H}_f são invariantes por H .*

²Usualmente exige-se que \mathbf{H} seja espaço de Hilbert separável. No entanto, mesmo nesse caso, não é sempre possível definir H e Q sobre todo o espaço \mathbf{H} , já que em geral tais operadores não são contínuos. No que segue, não nos preocuparemos com tais questões.

dem.: Q é ímpar por definição. Ainda, $H\Pi = Q^2\Pi = -Q\Pi Q = \Pi Q^2 = \Pi H$ e assim, H é par. A parte final da demonstração segue imediatamente da proposição anterior. \square

Segue diretamente da definição 4.1 que $H \geq 0$. De fato, dado $\varphi \in \mathbf{H}$,

$$(\varphi, H\varphi) = (\varphi, Q^2\varphi) = (Q\varphi, Q\varphi) = \|Q\varphi\|^2 \geq 0$$

pois Q é auto-adjunto. Assim, a condição $H = Q^2$ impõe que nenhum estado pode ter energia negativa. O teorema a seguir (vide também a equação (4.2)) nos diz essencialmente que o número de férmions e de bósons com energia não nula é o mesmo³.

Proposição 4.5 *Suponhamos que o sistema (H, Q, Π) tem supersimetria em \mathbf{H} . Dado um autovalor λ de H , seja $E_\lambda : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ a projeção⁴ de \mathbf{H} sobre o auto-espço associado a λ . Se $\lambda > 0$, então*

$$\dim(E_\lambda|_{\mathbf{H}_b}) = \dim(E_\lambda|_{\mathbf{H}_f})$$

dem.: Sejam P_+ e P_- os projetores em \mathbf{H}_b e \mathbf{H}_f respectivamente. Então $QP_+ = P_-Q$. De fato, dado $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, com $\varphi_+ \in \mathbf{H}_b$ e $\varphi_- \in \mathbf{H}_f$, temos $P_-Q\varphi = P_-(Q\varphi_+ + Q\varphi_-) = Q\varphi_+ = QP_+\varphi$, pois Q leva estados bosônicos em fermiônicos e vice-versa.

Definamos $E_\lambda^\pm \stackrel{def}{=} E_\lambda P_\pm$. Segue de $[H, Q] = 0$ que $[E_\lambda, Q] = 0$. Com isso, $QE_\lambda^+ = QE_\lambda P_+ = E_\lambda QP_+ = E_\lambda P_-Q = E_\lambda^-Q$. Portanto:

$$QE_\lambda^+ = E_\lambda^-Q \quad (4.1)$$

Seja $\bar{Q} = Q|_{E_\lambda(\mathbf{H})}$. Então \bar{Q} é inversível, pois $E_\lambda(\mathbf{H})$ é o auto-espço de H associado a λ e, por hipótese, $\lambda \neq 0$. Segue de (4.1) que $\bar{Q} E_\lambda^+|_{E_\lambda(\mathbf{H})} = E_\lambda^- \bar{Q}$. Assim,

$$E_\lambda^+|_{E_\lambda(\mathbf{H})} = \bar{Q}^{-1} E_\lambda^-|_{E_\lambda(\mathbf{H})} \bar{Q}$$

³É de se esperar que isso ocorra por um raciocínio bastante simples: se φ é auto-estado de H com energia E (isto é, $H\varphi = E\varphi$) e $E > 0$, então $HQ\varphi = QH\varphi = EQ\varphi$, pois $[H, Q] = [Q^2, Q] = 0$. Logo, se φ é um auto-estado bosônico (fermiônico) com energia E , então $Q\varphi$ é um auto-estado fermiônico (bosônico) de mesma energia.

⁴Isto é, E_λ é o projetor espectral de H sobre λ .

Com isso, $\dim \text{im}(E_\lambda^+) = \dim \text{im}(E_\lambda^-)$. Mas $\text{im}(E_\lambda^+) = \text{im}(E_\lambda P_+) = \text{im}(E_\lambda|_{\mathbf{H}_b})$ e $\text{im}(E_\lambda^-) = \text{im}(E_\lambda P_-) = \text{im}(E_\lambda|_{\mathbf{H}_f})$. Portanto,

$$\dim(E_\lambda|_{\mathbf{H}_b}) = \dim(E_\lambda|_{\mathbf{H}_f})$$

demonstrando a proposição. \square

Consideremos uma variedade M de dimensão finita, compacta e orientável. Então, como vimos no capítulo 2, temos o laplaciano $d\delta + \delta d$ (que é auto-adjunto) agindo sobre o conjunto $\Omega(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M)$ das formas diferenciais de M . Como δ é o operador adjunto de d , o denotaremos por d^* . Definamos uma estrutura supersimétrica sobre $\mathbf{H} = \Omega(M)$ ⁵. Como hamiltoniano, tomemos $H = dd^* + d^*d$ ⁶, como operador de paridade definamos $\Pi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ por $\Pi|_{\Omega^p(M)} = (-1)^p$ e como operador de supersimetria, escolhamos $Q = d + d^*$. É imediato que $H = Q^2$, $\Pi^2 = 1$ e $\{Q, \Pi\} = 0$, pois se φ é uma k -forma, então $d\varphi$ é uma $(k+1)$ -forma e $d^*\varphi$ é uma $(k-1)$ -forma. Portanto, (H, Q, Π) tem supersimetria em \mathbf{H} e

$$\mathbf{H}_b = \bigoplus_{p \text{ par}} \Omega^p(M), \quad \mathbf{H}_f = \bigoplus_{p \text{ impar}} \Omega^p(M)$$

Aplicando o teorema 4.5 a esse sistema supersimétrico, vemos que se $E > 0$ então

$$\sum_{p \text{ par}} \dim \ker[(H - E)|_{\Omega^p(M)}] = \sum_{p \text{ impar}} \dim \ker[(H - E)|_{\Omega^p(M)}] \quad (4.2)$$

4.2 O laplaciano deformado

Pelo teorema de de Rham [Wa], se M é uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável, então o p -ésimo grupo de cohomologia de de Rham de M , $H_{dR}^p(M)$, é isomorfo ao p -ésimo grupo de homologia de M , $H_p(M)$. Logo, temos $b_p(M) = \dim H_{dR}^p(M)$. No capítulo 2 mostramos, via teorema de Hodge, que $H_{dR}^p(M)$ é isomorfo ao conjunto $\Omega_h^p(M) = \ker(H|_{\Omega^p(M)})$ das p -formas harmônicas em M . Portanto,

$$b_p(M) = \dim \ker(H|_{\Omega^p(M)}) \quad (4.3)$$

⁵Para atender à exigência de que \mathbf{H} seja espaço de Hilbert (cf nota de rodapé 2), podemos tomar \mathbf{H} como o completamento de $\Omega(M)$, como em [CFKS].

⁶Na notação do capítulo 2, $H = \Delta$.

isto é, $b_p(M)$ é dado pela dimensão do auto-espaço associado ao autovalor nulo do laplaciano H .

No entanto, a obtenção de $b_p(M)$ através de (4.3) é complicada do ponto de vista operacional. Em [Wil], E. Witten tornou o procedimento acima exequível através da introdução de um novo tipo de laplaciano, obtido do usual deformando-o através de uma função de Morse. Mais precisamente, dados $t \in \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, definamos os operadores

$$\begin{aligned} d_t &= e^{-tf} d e^{tf}, \\ d_t^* &= e^{tf} d^* e^{-tf}, \\ H_t &= d_t d_t^* + d_t^* d_t. \end{aligned}$$

Observemos que $d_t^2 = d_t^{*2} = 0$ e assim $H_t = (d_t + d_t^*)^2$. Definindo $Q_t = d_t + d_t^*$, vemos portanto que (H_t, Q_t, Π) tem supersimetria em \mathbb{H} .

A grande força dessas definições é que a expressão (4.3) continua válida se substituirmos H por H_t , ficando então $b_p(M)$ independente de t . A vantagem dessa nova situação é que o espectro de $H_t|_{\Omega^p(M)}$ simplifica-se drasticamente para $t \gg 1$, tornando possível a estimativa de $\dim \ker(H_t|_{\Omega^p(M)})$, ou seja, de $b_p(M)$. Através desse procedimento, obteremos as desigualdades de Morse na próxima seção.

Teorema 4.6 *Dado $t \in \mathbb{R}$, $b_p(M) = \dim \ker(H_t|_{\Omega^p(M)})$.*

dem.: Por uma generalização do procedimento que nos levou ao corolário 2.34⁷ mostra-se que $\ker(H_t|_{\Omega^p(M)}) \cong \frac{\ker(d_t|_{\Omega^p(M)})}{\text{im}(d_t|_{\Omega^{p-1}(M)})}$

Mas, é imediato que $\ker(d_t) = e^{-tf} \ker(d)$ e $\text{im}(d_t) = e^{-tf} \text{im}(d)$. Portanto:

$$\ker(H_t|_{\Omega^p(M)}) \cong \frac{\ker(d|_{\Omega^p(M)})}{\text{im}(d|_{\Omega^{p-1}(M)})} = H_{dR}^p(M)$$

e o resultado segue de (4.3). \square

4.2.1 Cálculo da expressão local de H_t

O objetivo desta seção é obter a forma local do operador H_t .

⁷Ou pela teoria de operadores elípticos.

Definição 4.7 Seja (x^1, \dots, x^n) um sistema de coordenadas local no aberto $U \subseteq M$. Definimos o operador $(a^i)^*$ agindo em $\Omega(U)$ por $(a^i)^*\alpha = dx^i \wedge \alpha$.

Dadas coordenadas locais x^1, \dots, x^n no aberto $U \subseteq M$ e dado $x \in U$, definamos $g_{ij}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x$. Denotando a matriz inversa de (g_{ij}) por (g^{ij}) , temos $(dx^i, dx^j)_x = g^{ij}(x)$.

Lema 4.8 Seja a^i o operador adjunto de $(a^i)^*$. Então

$$a^i dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = - \sum_{k=1}^p (-1)^k g^{ij_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \wedge dx^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$$

e, se $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, temos $a^i (h dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) = h a^i dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$.

dem.: Dado $x \in U$, temos

$$\begin{aligned} & (a^i dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}})_x = \\ &= (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, (a^i)^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}})_x \\ &= (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}})_x \\ &= (-1)^{p-1} (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge dx^i)_x, \text{ (com } i_p \stackrel{\text{def}}{=} i) \\ &= (-1)^{p-1} \det((dx^{j_r}, dx^{i_s})_x)_{r,s} = (-1)^{p-1} \det(g^{j_r i_s}(x))_{r,s} \\ &= (-1)^{p-1} \sum_{r=1}^p (-1)^{r+p} g^{j_r i_p}(x) \det(g^{j_r i_s}(x) | \text{ sem a linha } j_r \text{ e sem a coluna } i_p) \\ &= - \sum_{r=1}^p (-1)^r g^{j_r i}(x) (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} \wedge dx^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}})_x \\ &= \left(- \sum_{r=1}^p (-1)^r g^{j_r i}(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} \wedge dx^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}} \right)_x \end{aligned}$$

A segunda afirmação é imediata. \square

Lema 4.9 (i) $\{(a^i)^*, a^j\} = g^{ij}$.

$$(ii) [(a^i)^*, a^j] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \begin{cases} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, & \text{se } i \in \{i_1, \dots, i_p\}, \\ -dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, & \text{se } i \notin \{i_1, \dots, i_p\}. \end{cases}$$

dem.: Aplicação direta do lema anterior.

Lema 4.10 $d_t = d + tdf \wedge$, isto é, $d_t = d + t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^*$, onde $f_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

dem.: Dado $\alpha \in \Omega(M)$, $d_t \alpha = e^{-tf} d(e^{tf} \alpha) = e^{-tf} [e^{tf} d\alpha + te^{tf} df \wedge \alpha] = d\alpha + tdf \wedge \alpha = d\alpha + t \sum_{i=1}^n f_i dx^i \wedge \alpha$. \square

Vamos agora exibir a expressão local de H_t , explicitando sua relação com os pontos críticos de f . Assumiremos que os operadores aqui definidos agem sempre em formas com suporte contido na vizinhança coordenada em questão. Uma prova mais geral, com o emprego de derivadas covariantes, é feita em [CFKS], capítulo 12.

Proposição 4.11 (Forma local de H_t) *Sejam M uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e p um ponto crítico de f . Então, numa vizinhança de p :*

(i) $H_t = H + t^2 \|df\|^2 + tA$, onde $A = A_1 + A_1^*$, com $A_1 = \sum_{i,j} (g^{ij} f_j \partial_i + (a^i)^* [\partial_i, f_j a^j])$,⁸

(ii) *Suponhamos que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ numa vizinhança $U \subseteq M$ ⁹. Se (x^1, \dots, x^n) é um sistema de coordenadas ortonormal em $U \subseteq M$, então $A = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} [(a^i)^*, a^j]$.*

dem.: Por definição, $H_t = \{d_t, d_t^*\}$. Logo, pelo lema anterior:

$$\begin{aligned} H_t &= \left\{ d + t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^*, d^* + t \sum_{j=1}^n f_j a^j \right\} \\ &= \{d, d^*\} + \left\{ d, t \sum_{i=1}^n f_i a^i \right\} + \left\{ d^*, t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \right\} + \left\{ t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^*, t \sum_{j=1}^n f_j a^j \right\} \\ &= H + tA + t^2 \sum_{i,j} f_i f_j \{(a^i)^*, a^j\}, \end{aligned}$$

onde $A = A_1 + A_1^*$, $A_1 = \left\{ d, \sum_{j=1}^n f_j a^j \right\}$.

Segue do lema 4.9 que $H_t = H + t^2 \|df\|^2 + tA$.

Definamos localmente o operador ∂_i por

$$\partial_i \left(\sum \omega_{j_1, \dots, j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) = \sum \frac{\partial \omega_{j_1, \dots, j_p}}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$$

Então claramente $d = \sum_{i=1}^n (a^i)^* \partial_i$. Com isso,

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n (a^i)^* \partial_i, \sum_{j=1}^n f_j a^j \right\} = \sum_{i,j} (f_j a^j (a^i)^* \partial_i + (a^i)^* \partial_i f_j a^j) \\ &= \sum_{i,j} (f_j \{a^j, (a^i)^*\} \partial_i - f_j (a^i)^* a^j \partial_i + (a^i)^* \partial_i f_j a^j) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A_1 = \sum_{i,j} (g^{ij} f_j \partial_i + (a^i)^* [\partial_i, f_j a^j]) \tag{4.4}$$

Calculemos A_1 no caso de a métrica ser euclidiana na vizinhança considerada:

⁸Nessa expressão, $\|df\|$ é a norma de df em $\Lambda(T_p^*P)$ e não em $\Omega(M)$.

⁹Isto é, a métrica g é plana (ou “flat”) em U .

Segue do lema 4.8 que se $g_{ij} = \delta_{ij}$ então $[\partial_i, a^j] = 0$. Com isso, $[\partial_i, f_j a^j] = \partial_i f_j a^j - f_j a^j \partial_i = a^j \partial_i f_j - f_j a^j \partial_i$. Assim, dada $\omega = h dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$,
 $[\partial_i, f_j a^j] \omega = a^j \frac{\partial f_j h}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} - f_j a^j \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = a^j f_{ji} h dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$,
isto é, $[\partial_i, f_j a^j] = f_{ij} a^j$, onde $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. Segue de (4.4) que:

$$A_1 = \sum_i f_i \partial_i + \sum_{i,j} f_{ij} (a^i)^* a^j$$

$$A_1^* = \sum_i \partial_i^* f_i + \sum_{i,j} (a^j)^* a^i f_{ij} = \sum_i \partial_i^* f_i + \sum_{i,j} f_{ij} (a^i)^* a^j, \text{ pois } f_{ij} = f_{ji}.$$

Calculemos ∂_i^* . Dados $\alpha = a dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = a dx^I$ e $\beta = b dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = b dx^J$, com $\text{supp}(a)$ e $\text{supp}(b)$ contidos em U^{10} , temos pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} (\partial_i^* \alpha, \beta) &= (\alpha, \partial_i \beta) = \int_M a \frac{\partial b}{\partial x^i} dx^I \wedge *dx^J = \\ &= \int_U \frac{\partial ab}{\partial x^i} dx^I \wedge *dx^J - \int_U \frac{\partial a}{\partial x^i} b dx^I \wedge *dx^J = - \int_U \frac{\partial a}{\partial x^i} b dx^I \wedge *dx^J = \\ &= - \int_U \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^I \wedge *b dx^J = -(\partial_i \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Portanto, $\partial_i^* = -\partial_i$.

$$\text{Segue que } A = A_1 + A_1^* = \sum_i f_i \partial_i - \sum_i \partial_i f_i + 2 \sum_{i,j} f_{ij} (a^i)^* a^j.$$

Mas dado $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $(f_i \partial_i - \partial_i f_i)h = f_i \partial_i h - \partial_i (f_i h) = -(\partial_i f_i)h = -f_{ii}h$.

Logo $f_i \partial_i - \partial_i f_i = -f_{ii}$ e assim:

$$A = - \sum_i f_{ii} + 2 \sum_{i,j} f_{ij} (a^i)^* a^j = \sum_{i,j} f_{ij} [2(a^i)^* a^j - \delta_{ij}].$$

Pelo lema 4.9, temos $\{(a^i)^*, a^j\} = \delta^{ij}$. Portanto:

$$A = \sum_{i,j} f_{ij} [(a^i)^*, a^j]$$

demonstrando a proposição no caso considerado. \square

4.3 Desigualdades de Morse

Vimos que (H_t, Q_t, Π) tem supersimetria em $\mathbf{H} = \Omega(M)$. Prossigamos com nossa analogia entre \mathbf{H} e o espaço de estados em mecânica quântica, onde H_t é interpretado como o hamiltoniano do sistema. A proposição 4.11 nos diz então que H_t é dado pelo termo de energia cinética H acrescido do potencial $V_t = t^2 \|df\|^2 + tA$. Sabemos que se p é um ponto crítico de f , então existem coordenadas de Morse x^1, \dots, x^n numa vizinhança U de p tais que

¹⁰Aqui $\text{supp}(a)$ é o suporte de a , isto é, $\text{supp}(a) = \overline{\{x \in M : a(x) \neq 0\}}$.

$f(x) = \sum_{i=1}^n \pm(x^i)^2$. Assim, $V_t = t^2 4x^2 + tA$ em U (onde $x^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n (x^i)^2$), desde que a métrica seja euclidiana nessa vizinhança. Para $t \gg 1$, V_t é aproximadamente o potencial de um oscilador harmônico centrado no ponto p . Portanto, tudo se passa como se tivéssemos osciladores harmônicos centrados nos pontos críticos de f e separados por barreiras infinitas de potencial. Isso nos permitirá calcular o espectro de H_t nesse limite e então estimar $b_p(M)$ utilizando o teorema 4.6.

Teorema 4.12 (Desigualdades de Morse fracas) *Sejam M uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então:*

$$m_p(f) \geq b_p(M)$$

dem.: Seguindo o raciocínio delineado acima, primeiramente definamos uma métrica riemanniana apropriada em M . Sejam p_1, \dots, p_m os pontos críticos de f e λ_a o índice de p_a . Fixemos um certo a . Pelo lema de Morse, existem coordenadas x^1, \dots, x^n numa vizinhança U_a de p_a tais que $f(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^{n-\lambda_a})^2 - (x^{n-\lambda_a+1})^2 - \dots - (x^n)^2$. Definamos uma métrica g_a em U_a declarando a base $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ ortonormal. Com isso, podemos definir uma métrica g em M de maneira que $g|_{U_a} = g_a$ (via partição da unidade).

Segue da proposição 4.11 que em U_a :

$$H_t = H_t^{(a)} \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla^2 + 4t^2 x^2 + tA^{(a)}$$

onde $\nabla^2 \stackrel{\text{def}}{=} -H$ e $A^{(a)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} [(a^i)^*, a^j] = 2 \sum_{i=1}^{n-\lambda_a} [(a^i)^*, a^i] - 2 \sum_{i=n-\lambda_a+1}^n [(a^i)^*, a^i]$.

No limite $t \rightarrow \infty$, temos um conjunto de osciladores harmônicos separados por barreiras infinitas de potencial. Isso nos leva a decompor o espaço de estados \mathbf{H} numa soma direta $\mathbf{H} = \bigoplus_{a=1}^m \mathbf{H}^{(a)}$, onde cada $\mathbf{H}^{(a)}$ está associado ao espaço de estados do sistema mecânico-quântico numa vizinhança do ponto crítico p_a . Nessa decomposição, cada $H_t^{(a)}$ é um operador agindo em $\mathbf{H}^{(a)}$. Utilizaremos então um resultado de limite semi-clássico para relacionar H_t (o hamiltoniano verdadeiro) a $\bigoplus_a H^{(a)}$ (hamiltoniano aproximado). A idéia geral é a seguinte: por um lado sabemos que $\dim \ker \left(H_t|_{\Omega^p(M)} \right) = b_p(M)$ (teorema 4.6) e, como veremos a seguir, $\dim \ker \left(\bigoplus_a H^{(a)}|_{\Omega^p(M)} \right)$ está intimamente relacionado a $m_p(f)$. Dessa forma,



comparando as degenerescências do estado fundamental de $H_t|_{\Omega^p(M)}$ e de $\bigoplus_a H^{(a)}|_{\Omega^p(M)}$ ¹¹ obteremos as desigualdades de Morse.

O cálculo de $\dim \ker \left(\bigoplus_a H^{(a)}|_{\Omega^p(M)} \right)$ é simplificado introduzindo-se os operadores (independentes de t) $K^{(a)} \stackrel{def}{=} -\nabla^2 + 4x^2 + A^{(a)}$. Dado um operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, denotaremos o espectro de T por $\sigma(T)$. Pelo lema 4.14 (que demonstraremos logo a seguir), $H_t^{(a)}$ é unitariamente equivalente a $tK^{(a)}$ e portanto $\sigma(H_t^{(a)}) = \sigma(tK^{(a)})$. Dessa forma, temos globalmente:

$$\sigma \left(\bigoplus_a H^{(a)} \right) = \sigma \left(\bigoplus_a tK^{(a)} \right) = \bigcup_a \sigma(tK^{(a)})$$

Calculemos o espectro de $K^{(a)}$.

Dado $\omega = h dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$,

$$(-\nabla^2 + 4x^2)\omega = \left(-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x^{i2}} + 4x^2 \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Assim, $-\nabla^2 + 4x^2$ é um “operador escalar” cujo espectro é o de um oscilador harmônico, isto é, $\sigma(-\nabla^2 + 4x^2) = \left\{ \sum_{i=1}^n 2(1 + 2k_i) : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \right\}$ ¹². Para cada conjunto de índices $\{k_1, \dots, k_n\}$, existe uma autofunção ψ tal que

$$\left(-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} + 4x^2 \right) \psi = \sum_{i=1}^n 2(1 + 2k_i) \psi$$

e, associada a tal ψ , temos $\binom{n}{p}$ p -autoformas linearmente independentes dadas por

$$\psi dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad \text{com } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$$

Analisemos a ação de $A^{(a)}$ sobre $\psi dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Do lema 4.9:

$$A^{(a)} \psi dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = 2\theta_a(i_1, \dots, i_p) \psi dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

onde, se $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $J = \{1, \dots, n\} - I$, $K = \{1, \dots, n - \lambda_a\}$ e $L = \{n - \lambda_a + 1, \dots, n\}$, então

¹¹ Observemos que $\dim \ker (H_t|_{\Omega^p(M)})$ e $\dim \ker \left(\bigoplus_a H^{(a)}|_{\Omega^p(M)} \right)$ são dados pela multiplicidade do autovvalor nulo de $H_t|_{\Omega^p(M)}$ e $\bigoplus_a H^{(a)}|_{\Omega^p(M)}$ respectivamente.

¹² Estamos considerando \mathbb{N} contendo o 0.

$$\theta_a(i_1, \dots, i_p) \stackrel{def}{=} \#(I \cap K) - \#(J \cap K) - \#(I \cap L) + \#(J \cap L).$$

Assim, $A^{(a)}$ age diagonalmente nas autoformas $\psi dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ de $-\nabla^2 + 4x^2$ e o espectro de $K^{(a)}$ é dado por

$$\sigma(K^{(a)}) = \left\{ \sum_{i=1}^n 2(1 + 2k_i) + 2\theta_a(i_1, \dots, i_p) : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n \right\} \quad (4.5)$$

Vemos então que um autovalor nulo de $K^{(a)}$ ocorre se, e somente se, $k_i = 0 \forall i$ e $\theta_a(i_1, \dots, i_p) = -n$. Como $\theta_a(i_1, \dots, i_p) = -n$ se, e somente se, $\lambda_a = p$ e $(i_1, \dots, i_p) = (n - p + 1, \dots, n)$, temos

$$\dim \ker K^{(a)}|_{\Omega^p(M)} = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda_a \neq p, \\ 1, & \text{se } \lambda_a = p. \end{cases}$$

Portanto,

$$\sum_a \dim \ker \left(K^{(a)}|_{\Omega^p(M)} \right)$$

conta o número m_p de pontos críticos de f com índice p e assim:

$$\dim \ker \left(\bigoplus_a K^{(a)}|_{\Omega^p(M)} \right) = \sum_a \dim \ker \left(K^{(a)}|_{\Omega^p(M)} \right) = m_p$$

Sejam $E_k^p(t)$ e e_k^p os k -ésimos autovalores de $H_t|_{\Omega^p(M)}$ e $\bigoplus_a K^{(a)}|_{\Omega^p(M)}$ respectivamente e contando multiplicidade. Como $\bigoplus_a H_t^{(a)}$ é unitariamente equivalente a $\bigoplus_a tK^{(a)}$, uma versão do teorema do limite semi-clássico de autovalores para variedades [CFKS] nos dá:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_k^p(t)}{t} = e_k^p$$

É então imediato que, para t suficientemente grande:

$$e_k^p \neq 0 \Rightarrow E_k^p(t) \neq 0$$

Assim, o número de autovalores $E_k^p(t)$ nulos é menor ou igual ao número de autovalores e_k^p nulos e portanto

$$b_p = \dim \ker \left(H_t|_{\Omega^p(M)} \right) \leq \dim \ker \left(\bigoplus_a K^{(a)}|_{\Omega^p(M)} \right) = m_p$$

demonstrando as desigualdades de Morse fracas. \square

Da demonstração acima, temos imediatamente a seguinte observação:

Observação 4.13 *Seja a um ponto crítico de f com índice p . Então:*

(i) *o menor autovalor de $K^{(a)}|_{\Omega^p(M)}$ é nulo,*

(ii) *$\dim \ker K^{(a)}|_{\Omega^p(M)} = 1$.*

Em linguagem de mecânica quântica, o estado fundamental de $K^{(a)}|_{\Omega^p(M)}$ é não-degenerado e corresponde à energia nula.

Lema 4.14 *Nas condições do teorema acima, $H_t^{(a)}$ é unitariamente equivalente a $tK^{(a)}$.*

dem.: Na notação do teorema anterior, temos

$$H_t^{(a)} = -\nabla^2 + 4t^2x^2 + tA^{(a)},$$

$$K^{(a)} = -\nabla^2 + 4x^2 + A^{(a)}.$$

Dado $\omega = h dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, pela demonstração acima:

$$H_t^{(a)}\omega = \left(-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}} + 4t^2x^2 + 2t\theta_a(i_1, \dots, i_p) \right) h dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

$$K^{(a)}\omega = \left(-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}} + 4x^2 + 2\theta_a(i_1, \dots, i_p) \right) h dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Assim, os operadores em questão agem como operadores escalares e basta mostrar que F_t e tF_1 , definidos por $F_t \stackrel{def}{=} -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}} + 4t^2x^2 + 2t\theta_a(i_1, \dots, i_p)$ e $F_1 \stackrel{def}{=} -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}} + 4x^2 + 2\theta_a(i_1, \dots, i_p)$, são unitariamente equivalentes em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dados $b \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, sejam $T(b)$, $D(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ os operadores unitários de translação e dilatação dados por

$$(T(b)f)(x) = f(x - b)$$

$$(D(\lambda)f)(x) = \lambda^{n/2} f(\lambda x)$$

Por simplicidade, vamos denotar o ponto $p_a \in M$ e suas coordenadas $(x^1(p_a), \dots, x^n(p_a))$ em \mathbb{R}^n pela mesma letra. Então, como é fácil verificar através de um cálculo direto:

$$D(t^{1/2})T(t^{1/2}p_a)tF_1T(-t^{1/2}p_a)D(t^{-1/2}) = F_t$$

e assim F_t é semelhante a tF_1 pela transformação unitária $D(t^{1/2})T(t^{1/2}p_a)$. \square

Teorema 4.15 (Índice de Morse) *Sejam M uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então,*

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p m_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p$$

dem.: Lembremos que, na notação da demonstração do teorema anterior, $e_1^p, \dots, e_{m_p}^p$ são os autovalores nulos¹³ de $\bigoplus_a K^{(a)} \Big|_{\Omega^p}$ e, para t suficientemente grande, $E_1^p(t), \dots, E_{b_p}^p(t)$ são os autovalores nulos de $H_t|_{\Omega^p}$, sendo $E_{b_p+1}^p(t), \dots, E_{m_p}^p(t)$ não nulos e $o(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Consideremos agora a propriedade de supersimetria de (H_t, Q_t, Π) . Vimos em (4.2) que se $E \neq 0$ então $\sum_{p \text{ par}} \dim \ker[(H_t - E)|_{\Omega^p}] = \sum_{p \text{ ímpar}} \dim \ker[(H_t - E)|_{\Omega^p}]$. Notemos que $\dim \ker[H_t - E]$ é a dimensão do auto-espaço associado ao autovalor E e, assim, é dado pela multiplicidade de tal autovalor. Utilizando a expressão acima para $E = E_i^p(t)$, com $i = b_p + 1, \dots, m_p$, e somando em i , temos então

$$\sum_{p \text{ par}} (m_p - b_p) = \sum_{p \text{ ímpar}} (m_p - b_p)$$

e portanto

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p m_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p$$

demonstrando o teorema. \square

Teorema 4.16 (Desigualdades de Morse fortes) *Sejam M uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então, para $p = 0, 1, \dots, n$:*

$$m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \dots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \dots \pm b_0$$

dem.: Seja Ξ_t^p o espaço vetorial correspondente aos autovalores $E_{b_p+1}^p(t), \dots, E_{m_p}^p(t)$ de H_t , isto é, Ξ_t^p é soma de auto-espaços de H_t , todos com autovalores correspondentes não nulos.

Estudemos a ação de $Q_t = d_t + d_t^*$ sobre Ξ_t^p .

Como $[Q_t, H_t] = 0$, Q_t preserva os auto-espaços de H_t . Logo, $Q_t(\Xi_t^p) \subseteq \bigoplus_{p \geq 0} \Xi_t^p$ ou, mais precisamente, $Q_t : \Xi_t^p \rightarrow \Xi_t^{p-1} \oplus \Xi_t^{p+1}$. Logo:

$$Q_t : \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \text{ ímpar}}}^{2j-1} \Xi_t^l \rightarrow \bigoplus_{\substack{l=0 \\ l \text{ par}}}^{2j} \Xi_t^l \quad \text{e} \quad Q_t : \bigoplus_{\substack{l=0 \\ l \text{ par}}}^{2j} \Xi_t^l \rightarrow \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \text{ ímpar}}}^{2j+1} \Xi_t^l$$

¹³Nessa notação, cada e_i^p , $i = 1, \dots, m_p$ é considerado como tendo multiplicidade 1. Isso é apenas outra maneira de dizer que o autovalor nulo de H_t tem uma multiplicidade total m_p .

Observemos que Q_t é injetivo no domínio considerado. De fato, como $H_t = Q_t^2$, temos $\ker Q_t \subseteq \ker H_t$ e assim Q_t é injetivo se H_t é injetivo. Mas Ξ_t^l corresponde a auto-espacos de H_t com autovalores não nulos e portanto H_t é injetivo em Ξ_t^l . Segue que

$$\dim \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \text{ ímpar}}}^{2j-1} \Xi_t^l \leq \dim \bigoplus_{\substack{l=0 \\ l \text{ par}}}^{2j} \Xi_t^l \quad \text{e} \quad \dim \bigoplus_{\substack{l=0 \\ l \text{ par}}}^{2j} \Xi_t^l \leq \dim \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \text{ ímpar}}}^{2j+1} \Xi_t^l$$

Como, por definição, $\dim \Xi_t^l = m_l - b_l$, temos

$$(m_1 - b_1) + \dots + (m_{2j-1} - b_{2j-1}) \leq (m_0 - b_0) + \dots + (m_{2j} - b_{2j}) \quad \text{e}$$

$$(m_0 - b_0) + \dots + (m_{2j} - b_{2j}) \leq (m_1 - b_1) + \dots + (m_{2j+1} - b_{2j+1})$$

Assim, seja p par ou ímpar,

$$b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \dots \pm b_0 \leq m_p - m_{p-1} + m_{p-2} - \dots \pm m_0$$

demonstrando mais uma vez as desigualdades de Morse. \square

4.4 Instantons e o complexo de Witten

Nesta seção apresentaremos o procedimento original de Witten para a demonstração das desigualdades de Morse, utilizando idéias inspiradas em mecânica quântica supersimétrica.

Consideremos novamente uma variedade M de dimensão finita, compacta e orientável sobre a qual está definida uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Definamos C^p como o espaço vetorial livremente gerado sobre \mathbb{R} pelos pontos críticos de f de índice p . Observemos que $\dim C^p = m_p$.

A seguir, daremos uma caracterização bastante útil das desigualdades de Morse em termos dos espaços vetoriais C^p .

Proposição 4.17 *Se existe um complexo de cohomologia*

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{p-2}} C^{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}} C^p \xrightarrow{\delta_p} \dots$$

tal que $\dim \left(\frac{\ker \delta_p}{\text{im } \delta_{p-1}} \right) = \dim H^p(M, \mathbb{R})$, então valem as desigualdades de Morse. Neste caso, seguindo Floer [Fl2], diremos que (C^*, δ) é um complexo de Witten.

dem.: Sejam $n_k = \dim \ker(\delta_k)$, $r_k = \dim \operatorname{im}(\delta_k)$ e $b_k = \dim H^k(M, \mathbb{R})$.

Para cada k , temos do teorema do núcleo e da imagem que $m_k = n_k + r_k$.

Ainda, $\dim \left(\frac{\ker \delta_p}{\operatorname{im} \delta_{p-1}} \right) = \dim H^p(M, \mathbb{R})$ nos dá $b_k = n_k - r_{k-1}$.

Assim, $m_k - b_k = r_k + r_{k-1}$, $\forall k$. Com isso,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m_k - b_k) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} r_{k-1} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k + \sum_{k=-1}^{\infty} r_k t^{k+1}$$

e como $r_{-1} = 0$, temos ¹⁴

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m_k - b_k) t^k = (1+t) \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k$$

que é a caracterização das desigualdades de Morse dada pela proposição 3.20. \square

A genialidade da estratégia de Witten para a demonstração das desigualdades de Morse reside na construção de um complexo (C^*, δ) onde δ é obtido através de considerações sobre o tunelamento mecânico-quântico entre os mínimos do potencial $V_t = t^2 \|df\|^2$ (observemos que tais mínimos nada mais são que os pontos críticos de f). Vejamos como isso é feito.

Novamente, dotemos M de uma métrica riemanniana g e definamos o campo vetorial ∇f a partir de df . Como vimos, uma solução *não constante* de

$$\dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)) \tag{4.6}$$

sempre liga pontos críticos *diferentes*, já que f é estritamente decrescente ao longo de tal γ .

Sejam a e b pontos críticos de f com índices p e $p+1$ respectivamente e suponhamos que γ_{ab} é linha de gradiente ligando b a a . Então, como mostraremos no capítulo seguinte, $f(b) > f(a)$ e assim γ_{ab} vai de b para a (isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{ab}(t) = a$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{ab}(t) = b$). Para definir a ação do operador δ sobre $a \in C^p$, utilizaremos tais caminhos γ_{ab} que, como veremos, estão intimamente relacionadas aos instantons que tunelam entre a e b .

Para isso, vamos associar a cada γ_{ab} um sinal $\epsilon_{\gamma_{ab}}$ da seguinte maneira. Sejam:

- (i) $E_b^- \subseteq T_b M$ o auto-espaço associado aos autovalores negativos da hessiana de f em b ,
- (ii) $T_b \gamma_{ab} \subseteq E_b^-$ o subespaço tangente à curva γ_{ab} ,
- (iii) O_b o complemento ortogonal de $T_b \gamma_{ab}$ em E_b^- .

Vemos que $\dim E_b^- = \operatorname{ind}(b) = p+1$ e $\dim O_b = p$

Fixemos uma orientação em E_x^- para cada ponto crítico x de f .

¹⁴ Observemos que essas somas são todas finitas, já que $m_k = b_k = r_k = 0$ se $k > n$.

Notemos que $T_b\gamma_{ab}$ é naturalmente orientado por $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{\gamma}_{ab}(t)}{\|\dot{\gamma}_{ab}(t)\|}$. Então, como $E_b^- = T_b\gamma_{ab} \oplus O_b$, temos uma orientação induzida em O_b . Witten então toma soluções de (4.6) com γ próxima de γ_{ab} para transportar vetores de O_b para E_a^- , induzindo dessa forma uma orientação em E_a^- . Se essa orientação induzida for a mesma que a orientação pré-fixada para E_a^- , define-se $\epsilon_{\gamma_{ab}} = +1$, caso contrário define-se $\epsilon_{\gamma_{ab}} = -1$.

Em geral, existirá mais de um caminho γ_{ab} ligando a a b . Definimos então

$$\epsilon(a, b) = \sum_{\gamma_{ab}} \epsilon_{\gamma_{ab}}$$

e aqui surge a questão: tal soma é necessariamente finita? No capítulo seguinte mostraremos que, sob certas condições, a resposta é sim.

Podemos agora definir o operador de cohomologia $\delta : C^p \rightarrow C^{p+1}$. Dado a ponto crítico de índice p , definimos

$$\delta(a) = \sum_{b \in C^{p+1}} \epsilon(a, b)b$$

Para aplicar a proposição 4.17, temos então que mostrar que $\delta^2 = 0$ e $\frac{\ker \delta_p}{\text{im } \delta_{p-1}} \cong H^p(M, \mathbb{R})$. A demonstração desses fatos utilizando a definição combinatorial de δ será dada no capítulo seguinte. Witten no entanto contorna tal dificuldade mostrando que δ está, num certo sentido, associado a d_t . O resultado então segue de $d_t^2 = 0$ e $\frac{\ker d_t|_{\Omega^p}}{\text{im } d_t|_{\Omega^{p-1}}} \cong H^p(M, \mathbb{R})$ (teorema 4.6). Analisemos um pouco mais detalhadamente tal raciocínio.

Seja a um ponto crítico de f de índice p . Ao demonstrarmos as desigualdades de Morse (fracas) na seção anterior, definimos o operador $K^{(a)} = -\nabla^2 + 4x^2 + A^{(a)}$ ¹⁵ que está associado à expressão assintótica de H_t . Pela observação 4.13, o auto-espaço de menor energia de $K^{(a)}|_{\Omega^p(M)}$ (isto é, o auto-espaço cujo autovalor é o menor possível) tem dimensão 1. Tomando um gerador $|a\rangle$ de tal subespaço, temos uma maneira natural de associar uma p -forma $|a\rangle$ a cada ponto crítico a de índice p .

Observação 4.18 *A ambigüidade da escolha da p -forma $|a\rangle$ como gerador do auto-espaço de menor energia de $K^{(a)}$ é exatamente a mesma ambigüidade presente quando fixamos arbitrariamente uma orientação em E_a^- . Isso relaciona-se ao fato de que a orientação de*

¹⁵Para evitar confusão, observemos que aqui a denota o próprio ponto crítico, enquanto na seção anterior a letra a é usada para indexar os pontos críticos.

um espaço vetorial V é dada equivalentemente por uma base de V ou por um elemento de volume em V .

Outro ponto a ser enfatizado a respeito da dualidade entre δ e d_t é que, enquanto δ age em $a \in C^p$, d_t age em $|a\rangle \in \Omega^p(M)$.

Consideremos a e b pontos críticos de f com índices p e $p + 1$ respectivamente. Para estimar $\langle b | d_t | a \rangle$ no limite $t \rightarrow +\infty$, Witten utiliza o método WKB, que consiste de uma aproximação semi-clássica para a resolução da equação de Schrödinger.

Para $t \gg 1$ os estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$ estão associados a funções de onda fortemente localizadas em torno de a e b . Isso porque, *nesse limite*, o potencial do sistema refere-se a um conjunto de osciladores harmônicos centrados nos pontos críticos de f e separados por *barreiras infinitas* de potencial. Notemos ainda que tais estados correspondem a configurações de energia mínima já que, por definição, $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são estados fundamentais do sistema (auto-estados de energia mínima de $K^{(a)}$).

Assim, é natural que se procure descrever as amplitudes de transição envolvidas por meio de instantons, que correspondem precisamente às funções de onda (num espaço euclidiano) responsáveis pelo tunelamento entre estados de energia mínima [Fe]. Dessa maneira, Witten [Wil] toma uma ação euclidiana supersimétrica genérica e mostra que os instantons de tal ação são obtidos quando o campo bosônico de tal sistema obedece à equação

$$\frac{d\phi^i}{dt} = -g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \phi^j}$$

(cf equação (4.6)).

A amplitude de $|a\rangle$ é pequena quando a de $|b\rangle$ é grande¹⁶ e vice-versa, sendo o *overlap* entre tais estados significativo apenas ao longo das linhas de gradiente γ_{ab} [Wil]. Isso permite determinar o comportamento de $|a\rangle$ e $|b\rangle$ ao longo de γ_{ab} resolvendo-se um problema unidimensional e exatamente solúvel. Procedendo desta maneira, mostra-se que a amplitude de $|a\rangle$ cai com $\exp[-tf(\phi)]$ ao longo da trajetória γ_{ab} .

Calculando a ação correspondente a tal configuração de campo, vê-se que a contribuição de γ_{ab} para a amplitude $\langle b | d_t | a \rangle$ é dada por

$$\det F_{ab} e^{-t[f(b)-f(a)]}$$

¹⁶Pois para $t \gg 1$, $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são fortemente localizados em torno de a e b .

onde $\det F_{ab}$ é proveniente da integração Gaussiana sobre as flutuações em torno dos instantons. Como estamos considerando uma teoria supersimétrica, as contribuições bosônica e fermiônica se cancelam, resultando em $\det F_{ab} = \pm 1$. Esse sinal tem importância vital quando se faz a soma das contribuições dos diferentes instantons. O procedimento para a sua determinação é o seguinte: o estado $|b\rangle$ sai de b com uma orientação relacionada com a orientação de E_b^- (cf observação(4.18)). Propagamos então $|b\rangle$ ao longo de γ_{ab} até o ponto a (pelo método WKB) e comparamos sua orientação com a de $|a\rangle$, obtendo dessa maneira o sinal de $\langle b|d_t|a\rangle$. Notemos a similaridade entre esse procedimento e a definição de $\epsilon_{\gamma_{ab}}$ dada anteriormente.

Essa discussão sugere que, para $t \gg 1$, tenhamos

$$\langle b|d_t|a\rangle \approx \sum_{\gamma_{ab}} \epsilon_{\gamma_{ab}} e^{-t[f(b)-f(a)]}$$

e assim

$$d_t|a\rangle \approx \sum_{b \in C^{p+1}} \sum_{\gamma_{ab}} e^{-t[f(b)-f(a)]} \epsilon_{\gamma_{ab}} |b\rangle, \quad \text{para } t \gg 1.$$

Finalmente, Witten argumenta que o fator de fase $e^{-t[f(b)-f(a)]}$ pode ser eliminado através de uma simples redefinição de $|a\rangle$. Obtemos assim um paralelo formal entre $d_t|a\rangle$ e $\delta(a)$ que, como vimos, é definido por $\delta(a) = \sum_{b \in C^{p+1}} \sum_{\gamma_{ab}} \epsilon_{\gamma_{ab}} b$.

Resumindo:

- (i) H_t está ligado à equação de Schrödinger com um potencial que, para $t \gg 1$, corresponde a osciladores harmônicos centrados nos pontos críticos de f ,
- (ii) δ está ligado à física dos instantons que tunelam entre os mínimos desse potencial.

Capítulo 5

Cohomologia de Floer em dimensão finita

Nos capítulos anteriores demonstramos as celebradas desigualdades de Morse de várias maneiras distintas. Recordemos brevemente o que foi feito até aqui.

Primeiramente utilizamos o enfoque tradicional [Mi1] segundo o qual dota-se M de uma métrica riemanniana g e analisa-se as linhas de fluxo de $\nabla_g f$, isto é, as soluções da equação diferencial

$$\dot{\gamma}(t) = -\nabla_g f(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x \quad (5.1)$$

que denominamos *linhas de gradiente*.

Dessa forma, se M é compacta, $\nabla_g f$ gera um grupo de difeomorfismos a um parâmetro (cf discussão na demonstração do teorema 3.6):

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \varphi(x, t) = x \cdot t \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(t)$$

com a propriedade óbvia de que f sempre decresce ao longo das linhas de fluxo, a menos que $df(x) = 0$, onde então $x \cdot t = x, \forall t \in \mathbb{R}$. Com isso, vimos que a topologia dos conjuntos

$$M^a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$$

sofre alteração apenas quando a é valor crítico de f e que essa alteração é dada (módulo homotopia) colando-se uma λ -célula, onde $\lambda = \text{ind}(x)$, ao conjunto $\{x \in M : f(x) < a\}$.

Fazendo uma análise detalhada dessa situação, terminamos por obter as desigualdades de Morse.

Posteriormente, utilizamos o enfoque de Witten [Wi1] no qual a função f é usada para deformar o laplaciano de M através de $H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$, onde $d_t = e^{-tf} d e^{tf}$ e $d_t^* = e^{tf} d^* e^{-tf}$. Então, denotando o negativo do operador laplaciano por $\nabla^2 = -H = -(dd^* + d^*d)$, vimos que H_t pode ser escrito como $H_t = -\nabla^2 + t^2 \|df\|^2 + tA$, sendo identificado com o operador hamiltoniano de um espaço de estados em mecânica quântica que, no limite $t \rightarrow \infty$, representa um número finito de osciladores harmônicos centrados nos pontos críticos de f . Isso nos permitiu calcular o espectro de H_t nesse limite e então obter as desigualdades de Morse observando que, por teoria de Hodge aplicada ao operador H_t , temos $b_p(M) = \dim \ker(H_t|_{\Omega^p(M)})$. O procedimento original de Witten [Wi1] em que as linhas de fluxo do gradiente de f são interpretadas como tunelamento entre os estados de menor energia do sistema (mínimos do potencial $t^2 \|df\|^2$) levou Andreas Floer a dois trabalhos (entre outros) de grande contribuição para a geometria diferencial:

(i) estabelecimento de novos invariantes para 3-variedades [F11].

(ii) formalização precisa e extensão do procedimento de Witten para variedades de dimensão infinita [F12].

Na próxima seção (seguindo Floer [F12]) formalizaremos a estratégia de Witten, tornando-a matematicamente precisa e totalmente independente de argumentos físicos. No próximo capítulo, consideraremos a extensão de tal procedimento para variedades de dimensão infinita, abordando o caso em que a variedade é dada por um espaço de conexões sobre uma 3-esfera homológica, isto é, sobre uma variedade de dimensão 3, compacta e orientável que tem a mesma homologia racional que S^3 . É interessante notar que essa extensão generaliza a analogia anterior entre teoria de Morse e mecânica quântica, passando agora a relacionar teoria de Morse em dimensão infinita e teoria quântica de campos [Wi2].

5.1 Definição do complexo de Witten

Consideremos uma variedade M de dimensão finita, compacta e orientável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Se x é um ponto crítico de f , denotemos novamente as variedades

estável e instável de $\nabla_g f$ em x por $W^s(x)$ e $W^u(x)$ respectivamente. Dados x e y pontos críticos de f , definamos

$$M_g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} W^u(x) \cap W^s(y) \quad (5.2)$$

Observemos que $M_g(x, y)$ contém (a imagem de) todas as linhas de gradiente que vão de x para y .

Lembremos que a intersecção entre duas subvariedades X e Y de uma variedade Z é dita transversal se, para todo $p \in X \cap Y$, tivermos $T_p X + T_p Y = T_p Z$. Neste caso, $X \cap Y$ é subvariedade [GP] e

$$\text{codim}(X \cap Y) = \text{codim}(X) + \text{codim}(Y) \quad (5.3)$$

Diremos que o fluxo do gradiente é do *tipo Morse-Smale* se a intersecção em (5.2) for transversal para quaisquer dois pontos críticos x e y . A hipótese de que o fluxo do gradiente de f é do tipo Morse-Smale será essencial no que segue. No entanto temos um resultado, devido a Smale, que mostra que isso ocorre para um conjunto denso de métricas em M [Sm2].

Denotemos novamente por E_x^+ (E_x^-) os auto-espacos associados aos autovalores positivos (negativos) da hessiana de f no ponto crítico x . Denotemos ainda o índice de x por $\text{ind}(x)$, isto é, $\text{ind}(x) = \dim E_x^-$. Devido ao sinal menos na definição da equação (5.1), vemos que E_x^+ (resp. E_x^-) é o espaco tangente a $W^s(x)$ (resp. $W^u(x)$) no ponto x . Segue de (5.3) que:

$$\text{codim}(W^u(x) \cap W^s(y)) = \text{codim}W^u(x) + \text{codim}W^s(y) \quad (5.4)$$

e assim

$$\dim M_g(x, y) = \text{ind}(x) - \text{ind}(y)$$

É então imediata a proposição seguinte.

Proposição 5.1 *Para um fluxo do gradiente do tipo Morse-Smale, se $\text{ind}(x) \leq \text{ind}(y)$ então não existe linha de gradiente indo de x para y .*

Vamos agora definir um complexo de Witten (C^*, δ) análogo ao do capítulo anterior, onde o elemento de matriz $\langle x, \delta y \rangle$ de $\delta : C^p \rightarrow C^{p+1}$ é definido entre $x \in C^{p+1}$ e $y \in C^p$ contando-se as trajetórias “independentes” que ligam x a y . Por independentes queremos dizer que devemos considerar as trajetórias módulo a ação dada por $\varphi(x, t) = x \cdot t$, o que nos leva ao

conjunto $\hat{M}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} M(x, y)/\mathbb{R}$. Observemos que $\dim M(x, y) = 1 \Rightarrow \dim \hat{M}(x, y) = 0$, isto é, $\hat{M}(x, y)$ consiste de um conjunto de pontos isolados. Temos então duas questões naturais:

(i) $\hat{M}(x, y)$ é finito?

(ii) como associar um sinal a cada elemento de $\hat{M}(x, y)$ de modo a obter uma contagem invariante? (Notemos que, em princípio, a contagem pura e simples dos elementos de $\hat{M}(x, y)$ depende da métrica g).

Observemos que se $a \in (f(y), f(x))$ é um valor regular de f e $M_a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M : f(x) = a\}$, então podemos identificar $\hat{M}(x, y)$ com $M(x, y) \cap M_a$. O lema a seguir (mais precisamente, o corolário 5.3) responde à questão (i) acima.

Lema 5.2 *Se $\text{ind}(x) = \text{ind}(y) + 1$, então $M(x, y) \cap M_a$ é compacto para todo valor regular a de f .*

dem.: Seja (q_i) uma seqüência em $M(x, y) \cap M_a$. Então, para cada i , existe uma trajetória u_i com $u_i(0) = q_i$ tal que $f(q_i) = a$. Como M é compacto, existe uma subseqüência convergente de (q_i) que, por abuso de notação, denotaremos ainda por (q_i) . Seja $q = \lim q_i$. Afirmamos que $q \in M(x, y)$. Como é imediato que $q \in M_a$, concluiremos então que toda seqüência em $M(x, y) \cap M_a$ possui subseqüência convergindo em $M(x, y) \cap M_a$ e que, portanto, $M(x, y) \cap M_a$ é compacto.

Se, por contradição, $q \notin M(x, y)$, então $q = v(0)$ para alguma trajetória v que não liga x a y , isto é, $q \in M(z_i, z_{i+1})$ com $z_i \neq x$ ou $z_{i+1} \neq y$. Repetindo o mesmo procedimento com a variando no intervalo $(f(y), f(x))$, obtemos então pontos críticos $x = z_1, z_2, \dots, z_{n+1} = y$, com $n > 1$, tais que as trajetórias v_i de $M(z_i, z_{i+1})$ estão no fecho de $M(x, y)$ ¹. Pictoricamente,

¹Mais precisamente e mais geralmente, pode-se provar o seguinte resultado [Au]:

Se x, y são pontos críticos de f e (γ_i) é uma seqüência de linhas de gradiente em $\hat{M}(x, y)$, então existem:

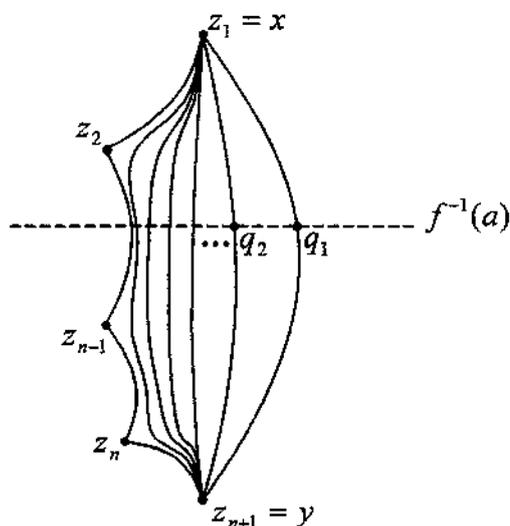
- (i) uma subseqüência (γ_i) ,
- (ii) um conjunto finito de pontos $x = x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} = y$,
- (iii) um conjunto finito de números reais estritamente decrescentes r_1, \dots, r_k com a propriedade que $r_i \in (f(x_{i+1}), f(x_i))$,

tais que

(i) os pontos $x_{i,j} = \gamma_j(s)$ tais que $f(x_{i,j}) = r_i$ convergem para um ponto regular que pertence a uma linha de gradiente de $\hat{M}(x_i, x_{i+1})$,

(ii) os índices de x_j são estritamente decrescentes com j , isto é, $i(x_1) > i(x_2) > \dots > i(x_{k+1})$.

temos a situação da figura abaixo:



Como o fluxo é do tipo Morse-Smale, temos sempre $ind(z_i) > ind(z_{i+1})$. Assim: $ind(x) - ind(y) = ind(z_1) - ind(z_{n+1}) = \sum_{i=1}^n ind(z_i) - ind(z_{i+1}) \geq n > 1$, contrariando a hipótese de que $ind(x) = ind(y) + 1$. \square

Corolário 5.3 Se $ind(x) = ind(y) + 1$, então $M(x, y) \cap M_a$ é finito.

dem.: Como as linhas de gradiente são sempre ortogonais às superfícies de nível de f , segue que a intersecção $M(x, y) \cap M_a$ é transversal. Assim:

$$codim(M(x, y) \cap M_a) = codim M(x, y) + codim M_a = 1 + (\dim M - 1) = \dim M$$

isto é, $M(x, y) \cap M_a$ é variedade 0-dimensional e portanto todos os seus pontos são isolados. Mas é imediato que todo conjunto compacto de pontos isolados é finito. \square

Tratemos agora da questão de como associar um sinal a cada elemento de $\hat{M}(x, y)$ de modo a obter uma contagem invariante das trajetórias que ligam x a y .

Para cada ponto crítico x , fixemos uma orientação em E_x^- . Vamos então induzir uma orientação natural em $\hat{M}(x, y)$, para cada par de pontos críticos x e y . Como M é orientável, a orientação de E_x^- induz uma orientação em E_x^+ , dada por $T_x M = E_x^+ \oplus E_x^-$. Como $T_x W^u(x) = E_x^-$ e como TM é trivial sobre $W^u(x)^2$, vemos que a orientação de E_x^+ define uma orientação ϕ_+ do fibrado normal de $W^u(x)$. Analogamente, a orientação de E_y^- define uma orientação

² $W^u(x)$ pode ser sempre dado por uma imersão de \mathbb{R}^k em M , com $k = \dim W^u(x) = ind(x)$ [Sm1].

ϕ_- do fibrado normal de $W^s(y)$. Segue então de (5.4) que $\phi_+ \oplus \phi_-$ nos dá uma orientação do fibrado normal de $M(x, y) = W^u(x) \cap W^s(y)$. Para obter uma orientação do fibrado normal de $\hat{M}(x, y) = M(x, y)/\mathbb{R}$, adicionamos a $\phi_+ \oplus \phi_-$ o vetor tangente ao fluxo do gradiente. Temos assim uma orientação induzida em $\hat{M}(x, y)$ (note que tal orientação corresponde simplesmente a um sinal ± 1 já que $\hat{M}(x, y)$ é variedade 0-dimensional).

Passemos à definição do operador de cohomologia para nosso complexo de Witten.

Definição 5.4 *Seja $C_{\mathbb{F}}^*$ o complexo dos pontos críticos de f sobre um corpo \mathbb{F} (cf proposição 4.17). Seja $o = \{o_x\}$ uma escolha de orientação em E_x^- para cada ponto crítico x de f . Definimos $\langle x, \delta^\circ y \rangle \in \mathbb{Z}$ como o número de intersecção das variedades orientadas $W^u(x) \cap M_a$ e $W^s(y) \cap M_a$ em M_a , onde a é um valor regular de f entre $f(y)$ e $f(x)$. Definimos ainda $\delta^\circ : C_{\mathbb{F}}^p \rightarrow C_{\mathbb{F}}^{p+1}$ por $\delta^\circ y = \sum_{x \in C^{p+1}} \langle x, \delta^\circ y \rangle x$.*

O próximo teorema mostra que $(C_{\mathbb{F}}^*, \delta^\circ)$ é de fato de um complexo de Witten, nos dando assim outra demonstração das desigualdades de Morse (via proposição 4.17).

Teorema 5.5 *Para um gradiente do tipo Morse-Smale definido sobre uma variedade M de dimensão finita, compacta e orientável, temos:*

- (i) $\delta^\circ \delta^\circ = 0$,
- (ii) $\frac{\ker \delta^\circ}{\text{im } \delta^\circ} \cong H^*(M, \mathbb{F})$.

Observação 5.6 (Dualidade de Poincaré) *Podemos também definir um complexo dual ao apresentado aqui*

$$C_n \xrightarrow{\partial_n^\circ} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^\circ} \dots \xrightarrow{\partial_2^\circ} C_1 \xrightarrow{\partial_1^\circ} C_0 \xrightarrow{\partial_0^\circ} 0$$

onde C_p é o espaço vetorial livremente gerado pelos pontos críticos de f de índice p (como C^p). Se $x \in C_{p+1}$, definimos

$$\partial^\circ x = \sum_{y \in C_p} \langle \partial^\circ x, y \rangle y$$

onde $\langle \partial^\circ x, y \rangle$ é o número de intersecção das variedades orientadas $W^u(x) \cap M_a$ e $W^s(y) \cap M_a$ em M_a e a é valor regular de f entre $f(y)$ e $f(x)$. Com as hipóteses de que M é de dimensão finita, compacta e orientável, uma versão análoga do teorema acima nos dá $H_*(M) \cong \frac{\ker \partial^\circ}{\text{im } \partial^\circ}$.

Como $-f$ também é função de Morse, temos um complexo $(\bar{C}_*, \bar{\partial})$ associado a $-f$. Os pontos críticos de f e $-f$ são os mesmos, mas um ponto crítico de índice p segundo f terá índice $n - p$ segundo $-f$. Logo:

$$\bar{C}_p = [\text{espaço vetorial livremente gerado pelos pontos críticos de } f \text{ de índice } n - p]$$

Segue que os complexos (C^*, δ°) e $(C_{n-*}, \partial^\circ)$ são isomorfos e, portanto

$$H^*(M) \cong H_{n-*}(M)$$

que é a dualidade de Poincaré.

Recordemos alguns fatos da teoria do índice de Conley (seção 3.4). Suponhamos novamente que M é uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável e que f é uma função de Morse em M . Então, cada ponto crítico x de f nos dá um conjunto invariante isolado para o qual podemos definir o par indicial

$$(U_x, A_x) = (\exp_x(B_\varepsilon^+ \times B_\varepsilon^-), \exp_x(B_\varepsilon^+ \times \partial B_\varepsilon^-)) \quad (5.5)$$

onde ε é tomado suficientemente pequeno.

Assim (vide seção 3.4),

$$H^k(U_x, A_x) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{se } k = \text{ind}(x), \\ 0, & \text{se } k \neq \text{ind}(x). \end{cases} \quad (5.6)$$

e uma escolha de orientação em E_x^- (que é dada por $o = \{o_x\}$ na definição 5.4) é claramente equivalente à escolha de um gerador em $H^k(U_x, A_x)$. Isso nos permite fazer a identificação

$$C_{\mathbb{F}}^p \cong \bigoplus_{\{x: df(x)=0, \text{ind}(x)=p\}} H^p(U_x, A_x) \quad (5.7)$$

Vemos que o conjunto $\text{Crit}(f)$ dos pontos críticos de f é dado por uma união disjunta de conjuntos invariantes isolados: $\text{Crit}(f) = \bigcup_{x \in \text{Crit}(f)} \{x\}$. Pela aditividade do índice de Conley (equações (3.6) da seção 3.4), temos então

$$\begin{aligned} IP(\text{Crit}(f); \mathbb{F}) &= \bigoplus_{x \in \text{Crit}(f)} IP(x; \mathbb{F}) \\ &= \bigoplus_{i \geq 0} \bigoplus_{\{x \in \text{Crit}(f): \text{ind}(x)=i\}} IP(x; \mathbb{F}) \\ &= \bigoplus_{i \geq 0} \bigoplus_{\{x \in \text{Crit}(f): \text{ind}(x)=i\}} H^p(U_x, A_x) \\ &= \bigoplus_{\{x \in \text{Crit}(f): \text{ind}(x)=p\}} H^p(U_x, A_x) \end{aligned}$$

onde usamos a definição de $I^p(x; \mathbb{F})$ (definição 3.19) na penúltima igualdade e (5.6) na última linha.

Portanto, de (5.7):

$$I^*(\text{Crit}(f); \mathbb{F}) \cong C_{\mathbb{F}}^*$$

5.2 Demonstração do teorema 5.5

Dados dois subconjuntos S_1 e S_2 de M , denotemos por $S_1 \& S_2$ a união de S_1 , S_2 e de todas as trajetórias “conectando” S_1 e S_2 . Diremos que uma coleção de conjuntos disjuntos, compactos e invariantes (M_1, M_2, \dots, M_k) é uma decomposição de Morse de S se para todo $x \in S$, existirem $1 \leq i \leq j \leq k$ tais que $x \in M_i \& M_j$.

Dada uma decomposição de Morse (M_1, M_2, \dots, M_k) de S , definimos uma *filtragem de índices* como uma família crescente $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_k$ de conjuntos compactos tais que (N_i, N_{i-1}) é par indicial de M_i , para cada $i = 0, 1, \dots, k$.

Claramente

$$M_i = \{x \in M : x \text{ é ponto crítico de } f \text{ de índice } i\}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.8)$$

nos dá uma decomposição de Morse para a variedade M . Para cada $x \in M_i$, tomemos o par indicial (U_x, A_x) dado por (5.5). Então $\left(\bigcup_{x \in M_i} U_x, \bigcup_{x \in M_i} A_x\right)$ é um par indicial para M_i e pela definição 3.19 temos

$$I^p(M_i) = H^p\left(\bigcup_{x \in M_i} U_x, \bigcup_{x \in M_i} A_x\right) \cong \bigoplus_{x \in M_i} H^p(U_x, A_x)$$

onde utilizamos a propriedade de aditividade dos grupos de cohomologia. Portanto, de (5.6) e (5.7):

$$I^p(M_i) \cong \begin{cases} C^i, & \text{se } p = i, \\ 0, & \text{se } p \neq i. \end{cases} \quad (5.9)$$

Se $N_{-1} \subseteq N_0 \subseteq \dots \subseteq N_n$ é uma filtragem de índices para (M_1, M_2, \dots, M_n) , então (N_i, N_{i-1}) é por definição um par indicial para M_i . Logo, de (5.9):

$$H^p(N_i, N_{i-1}) \cong \begin{cases} C^i, & \text{se } p = i, \\ 0, & \text{se } p \neq i. \end{cases} \quad (5.10)$$

Observemos que dada uma decomposição de Morse (M_1, M_2, \dots, M_k) com uma filtragem de índices $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_k$, então (N_{i+1}, N_{i-1}) é um par indicial de $M_i \& M_{i+1}$. Consideremos a seqüência exata de cohomologia da tripla (N_{i+1}, N_i, N_{i-1}) :

$$\dots \rightarrow H^i(N_{i+1}, N_{i-1}) \rightarrow H^i(N_i, N_{i-1}) \xrightarrow{\delta^T} H^{i+1}(N_{i+1}, N_i) \rightarrow H^{i+1}(N_{i+1}, N_{i-1}) \rightarrow \dots$$

ou seja

$$\dots \rightarrow I^i(M_i \& M_{i+1}) \rightarrow I^i(M_i) \xrightarrow{\delta^T} I^{i+1}(M_{i+1}) \rightarrow I^{i+1}(M_i \& M_{i+1}) \rightarrow \dots \quad (5.11)$$

que, a menos do isomorfismo em (5.9), é o mesmo que

$$\dots \rightarrow I^i(M_i \& M_{i+1}) \rightarrow C^i \xrightarrow{\delta^T} C^{i+1} \rightarrow I^{i+1}(M_i \& M_{i+1}) \rightarrow \dots$$

Pretendemos mostrar justamente que, a menos do isomorfismo em (5.9), $\delta^T = \delta^0$.

Suponhamos inicialmente que $M_{i+1} = \{x\}$ e $M_i = \{y\}$. Então $M_i \& M_{i+1} = x \& y$ ³ é o conjunto formado pelos pontos x e y e por todas as linhas de gradiente que ligam x a y . Tomemos \mathbb{Z} como anel de coeficientes para os grupos de cohomologia. Neste caso, de (3.7):

$$I^i(y) \cong \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad I^{i+1}(x) \cong \mathbb{Z}$$

Temos então o seguinte lema:

Lema 5.7 *Seja α um gerador de $I^i(y)$ e β um gerador de $I^{i+1}(x)$. O operador de cobordo da seqüência exata (cf (5.11))*

$$\dots \rightarrow I^i(x \& y) \rightarrow I^i(y) \xrightarrow{\delta^T} I^{i+1}(x) \rightarrow I^{i+1}(x \& y) \rightarrow \dots \quad (5.12)$$

é dado por $\delta^T \alpha = k\beta$, onde $k = \langle x, \delta^0 y \rangle$.

dem.: Fixemos $a \in (f(y), f(x))$ valor regular de f e definamos $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(a)$, $M_+ \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}([a, +\infty))$ e $M_- \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}((-\infty, a])$ ⁴. Sejam (U_x, A_x) e (U_y, A_y) pares indiciais para x e y como em (5.5). Dado $r > 0$, definamos os conjuntos compactos

$$U \stackrel{\text{def}}{=} U_x \cdot [0, r] \cap M_+$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} U_y \cdot [-r, 0] \cap M_-$$

³Ou, mais precisamente, $\{x\} \& \{y\}$.

⁴Segundo nossa notação anterior, $M_+ = M^a$.

Suponhamos que todo $c \in (f(y), f(x))$ é valor regular de f ⁵. Tomando r suficientemente grande e definindo $A = U \cap M_0$ e $B = \overline{\partial V - M_0}$, vemos então que (U, A) e (V, B) são pares indiciais para x e y respectivamente. Assim,

$$I^{i+1}(x) = H^{i+1}(U, A) \quad e \quad I^i(y) = H^i(V, B) \quad (5.13)$$

É claro que $(\{x\}, \{y\})$ é uma decomposição de Morse para $x \& y$. Definamos uma filtragem de índices $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2$ para tal decomposição por

$$N_0 = B \cup \overline{A - V}, \quad N_1 = V \cup A, \quad N_2 = U \cup V$$

Por excisão, temos $H^i(N_1, N_0) \cong H^i(V, B) = I^i(y)$ e $H^{i+1}(N_2, N_1) \cong H^{i+1}(U, A) = I^{i+1}(x)$. Por facilidade de notação, denotaremos também por α e β as imagens de α e β em $H^i(N_1, N_0)$ e $H^{i+1}(N_2, N_1)$ por tais isomorfismos de excisão. De (5.12):

$$H^i(V, B) \cong H^i(N_1, N_0) \xrightarrow{\delta^T} H^{i+1}(N_2, N_1) \cong H^{i+1}(U, A)$$

ou seja,

$$H^i(V, B) \cong H^i(V \cup A, B \cup \overline{A - V}) \xrightarrow{\delta^T} H^{i+1}(U \cup V, V \cup A) \cong H^{i+1}(U, A)$$

Como δ^T é o operador de cobordo da seqüência exata da tripla (N_2, N_1, N_0) , podemos escrevê-lo como

$$\delta^T : H^i(N_1, N_0) \xrightarrow{j^*} H^i(N_1) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(N_2, N_1)$$

isto é,

$$\delta^T : H^i(V \cup A, B \cup \overline{A - V}) \xrightarrow{j^*} H^i(V \cup A) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U \cup V, V \cup A)$$

ou seja, $\delta^T = \delta \circ j^*$, onde j^* é o homomorfismo induzido pela inclusão e δ é o operador de cobordo da seqüência exata do par $(U \cup V, V \cup A)$. Como (U, A) é homeomorfo a $(U_\varepsilon, A_\varepsilon) = (\exp_x(B_\varepsilon^+ \times B_\varepsilon^-), \exp_x(B_\varepsilon^+ \times \partial B_\varepsilon^-))$, vemos ainda que $(\exp_x(B_\varepsilon^-), \exp_x(\partial B_\varepsilon^-))$ é retrato de deformação de (U, A) .

Denotemos por $[A] \in H_i(V \cup A)$ a classe de homologia correspondente a A . Então, segue da definição do número de intersecção que $j^* \alpha [A] = \alpha (j_* [A]) = k$. Como o operador de cobordo δ do par $(U \cup V, V \cup A)$ satisfaz $\delta \omega = \omega [A] \beta$, temos finalmente

$$\delta^T \alpha = \delta j^* \alpha = j^* \alpha [A] \beta = k \beta$$

⁵ Isso sempre pode ser conseguido através de uma alteração de f fora de uma vizinhança de $x \& y$ [Sa].

onde $k = \langle x, \delta^\circ y \rangle$. \square

Corolário 5.8 *Suponhamos que $M_{i+1} = \{x\}$ e $M_i = \{y\}$ (que são as condições do lema acima). Considere o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C^i & \xrightarrow{\delta^\circ} & C^{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I^i(y) & \xrightarrow{\delta^T} & I^{i+1}(x) \end{array}$$

onde os isomorfismos verticais são dados por (5.9). Então tal diagrama é comutativo.

No caso geral em que M_{i+1} e M_i não são conjuntos unitários, pode-se utilizar a filtragem de índices da decomposição de Morse $(M_i - \{y\}, \{y\}, \{x\}, M_{i+1} - \{x\})$ de $M_i \& M_{i+1}$ para obter em geral [F12]:

Lema 5.9 *Sejam M uma variedade de dimensão finita, compacta e orientável e f uma função de Morse em M . Então*

$$\begin{array}{ccccccc} C^{i-1} & & \xrightarrow{\delta_{i-1}^\circ} & C^i & & \xrightarrow{\delta_i^\circ} & C^{i+1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I^{i-1}(M_{i-1}) & & \xrightarrow{\delta_{i-1}^T} & I^i(M_i) & & \xrightarrow{\delta_i^T} & I^i(M_{i+1}) \end{array}$$

onde os isomorfismos verticais são dados por (5.9), é um diagrama comutativo.

dem. do teorema 5.5: (i) Segue imediatamente do lema acima.

(ii) Tomemos a decomposição de Morse dada em (5.8). Em [Co], Conley mostra que existe uma filtragem de índices $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_n$ para (M_1, M_2, \dots, M_n) tal que $N_n = M$ e $N_{-1} = \emptyset$. Segue da seqüência exata do par (N_{i+1}, N_i) :

$$\dots \rightarrow H^j(N_{i+1}, N_i; \mathbb{F}) \rightarrow H^j(N_{i+1}; \mathbb{F}) \rightarrow H^j(N_i; \mathbb{F}) \rightarrow H^{j+1}(N_{i+1}, N_i; \mathbb{F}) \rightarrow \dots$$

e de (5.10) que o homomorfismo induzido pela inclusão

$$H^j(N_{i+1}; \mathbb{F}) \rightarrow H^j(N_i; \mathbb{F})$$

é um isomorfismo para $j \neq i, i + 1$. Por indução, temos então

$$H^j(N_i) = \begin{cases} H^j(M), & \text{se } j < i, \\ 0, & \text{se } j > i. \end{cases} \quad (5.14)$$

Considerando as seqüências exatas das triplas (N_{i+1}, N_i, N_{i-2}) e (N_i, N_{i-1}, N_{i-2}) :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^i(N_{i+1}, N_i) \rightarrow H^i(N_{i+1}, N_{i-2}) \rightarrow H^i(N_i, N_{i-2}) \rightarrow H^{i+1}(N_{i+1}, N_i) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow H^{i-1}(N_{i-1}, N_{i-2}) \rightarrow H^i(N_i, N_{i-1}) \rightarrow H^i(N_i, N_{i-2}) \rightarrow H^i(N_{i-1}, N_{i-2}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

temos de (5.10):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H^{i-1}(N_{i-1}, N_{i-2}) & & \\ & & & & \downarrow \delta_{i-1}^T & & \\ & & & & H^i(N_i, N_{i-1}) & & \\ & & & & \downarrow g & \searrow \delta_i^T & \\ 0 & \longrightarrow & H^i(N_{i+1}, N_{i-2}) & \xrightarrow{j} & H^i(N_i, N_{i-2}) & \xrightarrow{h} & H^{i+1}(N_{i+1}, N_i) \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Assim, j é injetivo e $H^i(N_{i+1}, N_{i-2}) \cong \text{im } j = \text{ker } h$, pois a seqüência horizontal acima é exata.

Sejam $Z^i = \text{ker } \delta_i^T$ e $B^i = \text{im } \delta_{i-1}^T$. É imediato do diagrama acima que $\text{ker } h = g(Z^i)$.

Com isso,

$$H^i(N_{i+1}, N_{i-2}) \cong g(Z^i) \cong \frac{Z^i}{\text{ker } g|_{Z^i}}$$

onde utilizamos o teorema do isomorfismo.

Como $\text{ker } g|_{Z^i} = \text{ker } g = B^i$, temos então

$$H^i(N_{i+1}, N_{i-2}) \cong \frac{Z^i}{B^i} \tag{5.15}$$

Tomando a seqüência exata do par (N_{i+1}, N_{i-2}) :

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(N_{i-2}; \mathbb{F}) \rightarrow H^i(N_{i+1}, N_{i-2}; \mathbb{F}) \rightarrow H^i(N_{i+1}; \mathbb{F}) \rightarrow H^i(N_{i-2}; \mathbb{F}) \rightarrow \dots$$

segue de (5.14) e (5.15) que

$$H^i(N_{i+1}) \cong H^i(N_{i+1}, N_{i-2}) \cong \frac{Z^i}{B^i}$$

e novamente por (5.14):

$$H^i(M) = H^i(N_{i+1}) \cong \frac{Z^i}{B^i}$$

isto é,

$$H^*(M) \cong \frac{\ker \delta^T}{\operatorname{im} \delta^T}$$

Portanto, pelo lema 5.9:

$$H^*(M) \cong \frac{\ker \delta^o}{\operatorname{im} \delta^o}$$

demonstrando o teorema. \square

Capítulo 6

Cohomologia de Floer, 3-esferas e teoria topológica de campos

Em uma variedade M de dimensão finita, vimos que podemos associar o espaço de estados de um sistema mecânico-quântico a $\mathbf{H} = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M)$, onde as formas de grau par correspondem a bósons e as de grau ímpar correspondem a férmions. O hamiltoniano de tal sistema é dado pelo laplaciano deformado de Witten que, no limite de $t \rightarrow \infty$, representa um conjunto de osciladores harmônicos centrados nos pontos críticos da função de Morse f . Construimos então um complexo de Witten com tais pontos críticos onde o operador de cobordo é construído considerando os instantons que tunelam entre os mínimos de potencial, ou seja, entre os pontos críticos de f . Neste capítulo pretendemos estender tal analogia à teoria quântica de campos. Como nesse caso o sistema quântico tem infinitos graus de liberdade, será necessário considerar funções de Morse definidas em variedades de dimensão infinita. No que segue, abordaremos a generalização da teoria desenvolvida até aqui para o caso em que M é um espaço de conexões sobre uma 3-esfera homológica (variedade compacta e orientável de dimensão 3 que tem a mesma homologia racional que S^3) e f é o funcional de Chern-Simons.

6.1 3-esferas homológicas

Seja N uma variedade de dimensão 3, compacta e orientável. É um fato bem conhecido que se $H^1(N, \mathbb{Z}) = 0$, todo fibrado principal $\pi : P \rightarrow N$ com grupo estrutural $SU(2)$ é necessariamente trivial, isto é, $P \cong N \times SU(2)$. Aproveitando-nos desse fato, assumiremos sempre que N satisfaz essa condição. Tais variedades recebem o nome de 3-esferas homológicas já que, em virtude da dualidade de Poincaré, temos $H_*(N, \mathbb{Z}) = H_*(S^3, \mathbb{Z})$.

Como P é trivial, cada 1-forma de conexão ω em P pode ser definida globalmente no espaço base. Basta tomarmos uma seção global $\sigma : N \rightarrow P$ e definir a 1-forma de conexão em N por $A = \sigma^*\omega$ [Bl].

Seja \mathcal{A} o conjunto das 1-formas de conexão em N e seja \mathcal{G} o conjunto das transformações de gauge em P . Notemos que \mathcal{G} age em \mathcal{A} segundo

$$g(A) = gAg^{-1} + (dg)g^{-1}$$

Vimos no capítulo 2 que $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_N \alpha \wedge * \beta$ nos dá uma métrica em $\Omega(N)$. Em $\mathfrak{su}(2)$ (álgebra de Lie de $SU(2)$) temos a métrica usual $\langle X, Y \rangle = -\text{tr}(XY^t)$. Como um elemento de $T_A\mathcal{A}$ é uma 1-forma $\mathfrak{su}(2)$ -valorizada [Bl], isto é, $T_A\mathcal{A} \cong \Omega^1(N) \otimes \mathfrak{su}(2)$, temos naturalmente em \mathcal{A} a métrica dada por

$$\langle a, b \rangle = - \int_N \text{tr}(a \wedge * b)$$

Mais geralmente, a expressão acima nos dá uma métrica em $\Omega^p(N) \otimes \mathfrak{su}(2)$, para qualquer p .

Tomaremos \mathcal{A}/\mathcal{G} como modelo do espaço de estados para a teoria quântica de campos que vamos considerar (em oposição à variedade M usada em mecânica quântica)¹.

¹O quociente $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ é *localmente* uma variedade diferenciável de dimensão infinita, exceto nos pontos $[A] \in \mathcal{B}$ tais que grupo de isotropia de A , $G_A = \{g \in \mathcal{G} : g(A) = A\}$ é maior que o centro $Z(\mathcal{G}) = \{\pm id\}$ de \mathcal{G} .

Dizemos que uma conexão $A \in \mathcal{A}$ é irredutível se $G_A = Z(\mathcal{G}) = \{\pm id\}$ e redutível se não for irredutível. Mostra-se que o conjunto das conexões irredutíveis forma um subconjunto \mathcal{B}^* aberto e denso de \mathcal{B} e que assim, \mathcal{B}^* é uma variedade diferenciável de dimensão infinita. No que segue, sempre que nos referirmos a \mathcal{A}/\mathcal{G} estaremos na verdade considerando \mathcal{B}^* .

A “função de Morse” a ser utilizada em \mathcal{A}/\mathcal{G} será induzida ao quociente pela função de Chern-Simons $f_{cs} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{cs}(A) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_N \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

No entanto, f_{cs} não é gauge invariante. De fato, temos [NS]

$$f_{cs}(g(A)) = f_{cs}(A) + n, \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

Para passar f_{cs} ao quociente, basta então compor f_{cs} com a projeção canônica $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, obtendo dessa forma uma função bem definida $f : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por $p \circ f_{cs}$. Tal f fará o papel de uma função de Morse em \mathcal{A}/\mathcal{G} . Por abuso de notação, não distinguiremos f de f_{cs} no que segue.

Nosso próximo passo é estudar os “pontos críticos” de f . Para isso, dada $A \in \mathcal{A}$ e $a \in T_A\mathcal{A}$, vamos calcular f ao longo da curva $t \mapsto A_t = A + ta$. Expandindo o resultado em t , temos

$$f(A_t) = f(A) + t \, df(A)(a) + \frac{t^2}{2} \langle a, h(A)a \rangle + o(t^3)^2 \quad (6.1)$$

(i) Cálculo de $df(A)$:

Calculando $f(A_t)$ até primeira ordem em t :

$$\begin{aligned} f(A_t) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_N \text{tr} \left(A_t \wedge dA_t + \frac{2}{3} A_t \wedge A_t \wedge A_t \right) \\ &= f(A) - \frac{t}{8\pi^2} \int_N \text{tr} \left(A \wedge da + a \wedge dA + \frac{2}{3} a \wedge A \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge a \wedge A + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge a \right) + o(t^2). \end{aligned}$$

Utilizando o teorema de Stokes e a propriedade cíclica do traço, segue que

$$f(A_t) = f(A) - \frac{t}{4\pi^2} \int_N \text{tr}(F(A) \wedge a) + o(t^2) \quad (6.2)$$

onde

$$F(A) = dA + A \wedge A$$

²Observemos que sendo $h(A)$ bilinear e simétrica, a fórmula usual de polarização nos dá para quaisquer $v, w \in T_A\mathcal{A}$: $h(A)(v, w) = \frac{1}{2} [h(A)(v + w, v + w) - h(A)(v, v) - h(A)(w, w)]$

é a 2-forma de curvatura associada à conexão A ³.

Isso nos leva a escrever formalmente (cf equação (6.1))

$$df(A) = -\frac{1}{4\pi^2} F(A) \quad (6.3)$$

onde estamos interpretando $F(A)$ como uma 1-forma em \mathcal{A} , agindo em um vetor $a \in T_A \mathcal{A}$ por meio de

$$F(A)(a) = \int_N \text{tr}(F(A) \wedge a)$$

Aqui surge um resultado importante: os pontos críticos de f são dados pelas conexões de curvatura nula ($F(A) = 0$), isto é, pelas conexões planas (ou “flat”) em \mathcal{A} ⁴.

(ii) Cálculo de $h(A)$:

Seja A um ponto crítico de f . Expandindo $f(A_t)$ até segunda ordem em t vemos que, como $df(A) = 0$:

$$\begin{aligned} f(A_t) &= f(A) - \frac{t^2}{8\pi^2} \int_N \text{tr}(a \wedge da + \frac{2}{3} A \wedge a \wedge a + \frac{2}{3} a \wedge A \wedge a + \frac{2}{3} a \wedge a \wedge A) + o(t^3) \\ &= f(A) - \frac{t^2}{8\pi^2} \int_N \text{tr}(a \wedge da + 2a \wedge a \wedge A) + o(t^3) \\ &= f(A) - \frac{t^2}{8\pi^2} \int_N \text{tr}(a \wedge (da + a \wedge A + A \wedge a)) + o(t^3) \\ &= f(A) + \frac{t^2}{2} \left[-\frac{1}{4\pi^2} \int_N \text{tr}(a \wedge d_A a) \right] + o(t^3) \\ &= f(A) + \frac{t^2}{2} \frac{1}{4\pi^2} \langle a, *d_A a \rangle + o(t^3) \end{aligned}$$

onde d_A (derivada covariante em relação a A) é definida por $d_A a = da + a \wedge A + A \wedge a$.

Comparando tal resultado com a equação (6.1), temos

$$\langle a, h(A)a \rangle = \left\langle a, \frac{*d_A}{4\pi^2} a \right\rangle \quad (6.4)$$

³Na notação de Bleecker [Bl], $F(A) = \sigma^* \Omega$, onde $\Omega = D^\omega \omega$ é 2-forma de curvatura em P , dada pela derivada covariante exterior da 1-forma de conexão ω .

⁴Pode-se mostrar que as conexões planas são irredutíveis (cf nota de rodapé 1) e que assim os pontos críticos de f pertencem de fato à variedade $B^* \subset B$.

e interpretando $h(A)$ como uma forma bilinear simétrica em \mathcal{A} , agindo em $v, w \in T_A\mathcal{A}$ por $h(A)(v, w) = \langle v, h(A)w \rangle$, vemos que

$$h(A) = \frac{*d_A}{4\pi^2}$$

Aqui temos uma diferença fundamental em relação aos capítulos anteriores, onde a função de Morse estava definida em uma variedade de dimensão finita. Como $h(A) = \frac{*d_A}{4\pi^2}$ e $*d_A$ é um operador diferencial de primeira ordem, o espectro da hessiana não é limitado. Assim, não faz sentido definir o índice de Morse do ponto crítico A como o número de autovalores negativos de $h(A)$, já que esse número é em geral infinito.

No entanto, lembremos que no complexo de Witten

$$\dots \rightarrow C^{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}} C^p \xrightarrow{\delta_p} C^{p+1} \rightarrow \dots$$

o operador de cobordo δ age apenas entre os pontos críticos cujos índices diferem de *uma unidade* e, portanto, é a *diferença* entre os índices de Morse que é a quantidade fundamental a ser considerada. Assim, Floer generaliza o procedimento de Witten para variedades de dimensão infinita obtendo certos índices de Morse *relativos* $\mu(A_P, A_Q)$ entre pontos críticos A_P e A_Q . Tal índice será definido a seguir utilizando fluxo espectral e se reduzirá à diferença entre o índices de Morse dos pontos críticos em questão quando estivermos trabalhando em dimensão finita.

Consideremos um par de pontos críticos (A_P, A_Q) de f . Definimos novamente uma *linha de gradiente* entre A_P e A_Q como uma curva $\Gamma : t \mapsto A_t$ satisfazendo

$$\frac{dA_t}{dt} = -\nabla f(A_t)$$

onde ∇f é obtido de df através da métrica em \mathcal{A} .

Tal Γ define para cada t um operador $h(A_t) \stackrel{def}{=} *d_{A_t}$. Isso nos dá uma família de operadores auto-adjuntos em \mathcal{A} “ligando” $h(A_P)$ a $h(A_Q)$. O *fluxo espectral* de $*d_{A_t}$ associado à curva $\Gamma : t \mapsto A_t$ é definido como o número de autovalores negativos de $h(A_P)$ que são levados em autovalores positivos de $h(A_Q)$ ao longo de Γ . Denotaremos tal quantidade por $\sigma_\Gamma(A_P, A_Q)$ (observemos a forte dependência do fluxo espectral em relação a Γ).

Em geral, existem várias linhas de gradiente entre A_P e A_Q e assim vários fluxos espectrais associados a esses pontos críticos. Se $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ são dois desses caminhos, então $\Gamma - \tilde{\Gamma}$ é um laço

em A_P . É um resultado conhecido que o fluxo espectral ao longo de um laço é dado pelo índice de Atiyah-Singer de um operador elíptico e depende apenas da classe de homotopia de tal laço. Como f é invariante sob a ação de \mathcal{G} , vemos que o índice de Morse relativo entre A_P e A_Q somente estará bem definido como $\sigma_\Gamma(A_P, A_Q)$ se $\pi_1(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ for trivial. No entanto, pode-se mostrar que $\pi_1(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}$. Vejamos como se resolve essa questão.

Dado um laço Φ em A_P , pode-se calcular $\sigma_\Phi(A_P, A_P)$ (utilizando a teoria de índices de operadores elípticos [N]) obtendo

$$\sigma_\Phi(A_P, A_P) = 8k, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}$$

(se $k = 1$, Φ corresponde a um gerador de $\pi_1(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}$). Como resultado, temos

$$\sigma_\Gamma(A_P, A_Q) = \sigma_\Gamma(A_P, A_Q) + 8k$$

e para definirmos $\mu(A_P, A_Q)$ independentemente de Γ , basta compor $\sigma_\Gamma(A_P, A_Q)$ com a projeção canônica $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_8$. Assim,

$$\mu(A_P, A_Q) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \sigma_\Gamma(A_P, A_Q)$$

define univocamente o índice de Morse relativo entre A_P e A_Q para qualquer linha de gradiente Γ .

Seguindo a analogia com o procedimento dos capítulos anteriores, pode-se definir um complexo de cohomologia a partir dos pontos críticos de f . Como o índice relativo entre pontos críticos arbitrários é \mathbb{Z}_8 - valorizado, o conjunto $\text{Crit}(f)$ dos pontos críticos de f possui uma graduação natural

$$\text{Crit}(f) = \bigcup_{p=0}^7 C^p$$

onde dados $A_P \in C^p$ e $A_Q \in C^q$, temos $\mu(A_P, A_Q) = p - q$.

A definição do operador de cobordo δ é feita de maneira análoga ao caso de dimensão finita, considerando os instantons que tunelam entre A_P e A_Q para todos os pontos críticos $A_P \in C^p$ e $A_Q \in C^q$, como é feito em [Na].

Dessa maneira,

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_5} C^6 \xrightarrow{\delta_6} C^7 \xrightarrow{\delta_7} 0$$

nos dará oito grupos de cohomologia

$$HF^p(N) = \frac{\ker \delta_p}{\text{im } \delta_{p-1}}$$

conhecidos como grupos de cohomologia de Floer.

É importante ressaltar que os grupos de cohomologia de Floer constituem *novos invariantes* para as 3-esferas homológicas, não dependendo das métricas utilizadas na sua construção. Outro ponto relevante é que, apesar de todas as construções serem realizadas sobre a variedade de dimensão infinita \mathcal{A}/\mathcal{G} , temos um complexo de cohomologia finito e \mathbb{Z}_8 -graduado!

6.2 Teoria topológica de campos

Terminamos este capítulo discutindo brevemente esta mesma teoria apresentada agora como uma teoria topológica de campos [Na]. Utilizaremos assim uma notação e uma abordagem mais próximas das utilizadas em física.

Como já mencionamos, a função de Chern-Simons

$$f_{cs}(A) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_N \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

não é gauge-invariante e sob a ação de uma mudança de gauge $A \mapsto A_g$ transforma-se como

$$f_{cs}(A_g) = f_{cs}(A) + n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Considerando um espaço-tempo lorentziano de dimensão $2 + 1$ e definindo uma ação S por

$$S = 2\pi k f_{cs}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

a exponencial da ação

$$e^{iS(A)} = e^{i2\pi k f_{cs}(A)}$$

que é a quantidade relevante numa teoria de campos, é de fato gauge invariante.

Além disso, segue imediatamente de (6.3) que

$$dS(A) = -\frac{k}{2\pi} F(A)$$

ou seja, derivando a ação obtemos a curvatura.

Construímos o hamiltoniano pelo mesmo procedimento utilizado no capítulo 4:

$$H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$$

onde agora d age em \mathcal{A} e $d_t = e^{-tf} de^{tf}$, $d_t^* = e^{tf} d^* e^{-tf}$.

Escrevendo d “em componentes” e utilizando notação de derivada funcional, H_t pode ser escrito [Na] como

$$H_t = \int_N \left[-tr \left(\frac{\delta}{\delta A} \right)^2 - t \, 2tr(a \wedge d_A a^*) - t^2 \, tr(F \wedge *F) \right] \quad (6.5)$$

Notemos que H_t tem a mesma estrutura do caso onde a dimensão é finita:

(i) O primeiro termo em (6.5) pode ser visto como um laplaciano no espaço de conexões (note também que para $t = 0$, temos $H = - \int_N tr \left(\frac{\delta}{\delta A} \right)^2$).

(ii) O terceiro termo, que é o mais importante numa expressão assintótica de H_t , tem a mesma estrutura que seu análogo do capítulo 4 pois, pela nossa definição de produto interno em $T_A \mathcal{A} \cong \Omega^1(N) \otimes \mathfrak{su}(2)$:

$$- \int_N tr(F \wedge *F) = \langle F, F \rangle = \|F\|^2$$

e como vimos em (6.3), $F = -4\pi^2 df$. Assim, $- \int_N tr(F \wedge *F) = 16\pi^4 \|df\|^2$ e portanto

$$H_t = \int_N -tr \left(\frac{\delta}{\delta A} \right)^2 - 2t \int_N tr(a \wedge d_A a^*) + t^2 \, 16\pi^4 \|df\|^2$$

(cf proposição 4.11).

Continuemos com a analogia entre a situação atual e a teoria em dimensão finita. No capítulo 4, o hamiltoniano H_t é dado por

$$H_t = \bigoplus_{p \geq 0} H_t|_{\Omega^p(M)}$$

onde $\Omega^p(M)$ é o conjunto das p -formas em M . Ainda, pelo teorema 4.6:

$$H_{dR}^p(M) \cong \ker(H_t|_{\Omega^p(M)})$$

isto é, a cohomologia de M é dada pelos estados fundamentais (auto-estados com energia mínima) do hamiltoniano $H_t|_{\Omega^p(M)}$.

Voltando ao caso deste capítulo, onde o análogo de M é dado por \mathcal{A}/\mathcal{G} , podemos decompor H_t como

$$H_t = \bigoplus_{p=0}^7 \Delta_p$$

onde cada laplaciano Δ_p age em \mathcal{A} . Como Nash comenta em [Na], a teoria de Hodge então nos sugere que a cohomologia da variedade é dada pelos estados fundamentais do hamiltoniano! Dessa forma, os grupos de cohomologia de Floer podem ser interpretados como os estados fundamentais do sistema quântico não relativístico cujo hamiltoniano é H_t . Uma generalização relativística de tal sistema para quatro dimensões é considerada em [Wi2].

Capítulo 7

Conclusão

Estudamos a teoria de Morse sob diferentes pontos de vista, culminando com uma introdução à cohomologia de Floer.

Inicialmente utilizamos o enfoque tradicional em que, dada uma variedade M e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dota-se M de uma métrica riemanniana e analisa-se a relação entre as linhas de gradiente de f e a topologia de M . Em seguida, demos uma demonstração alternativa das desigualdades de Morse via teoria do índice de Conley. Estabelecemos então um paralelo entre teoria de Morse e mecânica quântica supersimétrica, associando o espaço de estados de um sistema mecânico-quântico ao espaço das formas diferenciais em M , onde as formas de grau par correspondem a bósons e as de grau ímpar a férmions. O hamiltoniano de tal sistema é dado pelo laplaciano deformado de Witten que, num certo limite, representa um conjunto de osciladores harmônicos centrados nos pontos críticos de f . Construimos então um complexo de cohomologia onde o operador de cobordo é construído (à la Witten) considerando os instantons que tunelam entre os mínimos do potencial, ou seja, entre os pontos críticos de f . Estudando o espectro de tal hamiltoniano, obtivemos uma demonstração analítica das desigualdades de Morse.

Tal construção motivou o estudo da cohomologia de Floer em variedades de dimensão finita onde, seguindo [F12], formalizamos a construção de Witten tornando-a completamente independente de argumentos físicos. A seguir, consideramos a extensão de tal procedimento para variedades de dimensão infinita, abordando o caso em que a variedade é dada por um espaço de conexões sobre uma 3-esfera homológica e a função de Morse é dada pelo funcional

de Chern-Simons. Finalmente, apontamos para uma versão mais complexa da analogia com mecânica quântica, agora entre teoria de Morse sobre variedades de dimensão infinita e teoria quântica de campos [Wi2].

Bibliografia

- [Ar] Armstrong M. A., *Basic Topology*, Springer-Verlag, (1983).
- [Au] Austin D. M., Braam P. J., *Morse-Bott theory and Equivariant Cohomology*, The Floer Memorial Volume, Birkhäuser Verlag, (1995).
- [Bl] Bleecker D., *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley, (1981).
- [dC] Carmo M. do, *Geometria Riemanniana*, IMPA, (1988).
- [Co] Conley C., *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Vol. 38, Amer. Math. Soc., (1978).
- [CFKS] Cycon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B., *Schrödinger Operators*, Springer-Verlag, (1987).
- [DFN1] Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Novikov S. P., *Modern Geometry - Methods and Applications, Part II*, Springer-Verlag, (1985).
- [DFN2] Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Novikov S. P., *Modern Geometry - Methods and Applications, Part III*, Springer-Verlag, (1990).
- [Fe] Felsager B., *Geometry, Particles and Fields*, Odense University Press, (1985).
- [F11] Floer A., *An Instanton-Invariant for 3-Manifolds*, Commun. Math. Phys. **118**, 215-240 (1988).
- [F12] Floer A., *Witten's Complex and Infinite Dimensional Morse Theory*, J. Diff. Geo. **30**, 207-221 (1989).

- [Gi] Gieres F., *Supersymétrie et Mathématiques*, preprint LYCEN 9419, hep-th 9405101 (1994).
- [GP] Guillemin V., Pollack A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, (1974).
- [N] Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, (1996).
- [NS] Nash C., Sen S., *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, (1983).
- [Na] Nash C., *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press, (1992).
- [Mi1] Milnor J., *Morse Theory*, Princeton University Press, (1973).
- [Mi2] Milnor J., Stasheff J., *Characteristic Classes*, Princeton University Press, (1974).
- [Sa] Salamon D., *Morse Theory, The Conley Index and Floer Homology*, Bull. London Math. Soc. **22**, 113-140 (1990).
- [Si] Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, (1963).
- [Sm1] Smale S., *Morse Inequalities for a Dynamical System*, Bull. Amer. Math. Soc. **66**, 43-49 (1960).
- [Sm2] Smale S., *On Gradient Dynamical Systems*, Ann. of Math. (2) **74**, 199-206 (1961).
- [Wa] Warner F., *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, (1983).
- [Wi1] Witten E., *Supersymmetry and Morse Theory*, J. Diff. Geo. **17**, 661-692 (1982).
- [Wi2] Witten E., *Topological Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **117**, 353-386 (1988).