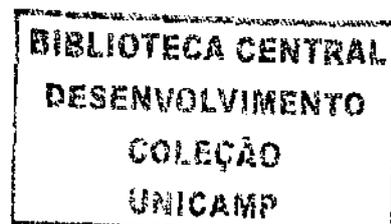


**O Problema da Recuperação da Fase da
Transformada de Fourier a partir de duas
Magnitudes**

Ana Gabriela Martínez



Ana Gabriela Martínez

**O Problema da Recuperação da Fase da
Transformada de Fourier a partir de duas
Magnitudes**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
do Instituto de Matemática, Estatística e Com-
putação Científica da Universidade Estadual
de Campinas, como requisito parcial à obtenção
do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro R. De Pierro

Campinas
IMECC - UNICAMP
1999

O Problema da Recuperação da Fase da Transformada de Fourier a partir de duas Magnitudes

Este exemplar corresponde a redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Ana Gabriela Martínez e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 4 de agosto de 1999



Orientador: Prof. Dr. Alvaro R. De Pierro

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alvaro R. De Pierro.
Profa. Dra Ana Friedlander.
Prof. Dr. Nir Cohen.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.



UNIDADE:	BC
N.º DE FOLHAS:	1
V.	M366p
TOMADA DE:	39279
PREÇO:	229/99
U.	01x
PREÇO:	R\$ 11,00
DATA:	28/10/99
N.º CPD	

CM-00136607-4

~~bit~~ id.188474

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Martínez, Ana Gabriela

M363p O problema da recuperação da fase da transformada de Fourier a partir de duas magnitudes / Ana Gabriela Martínez -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Alvaro R. De Pierro

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

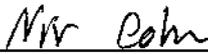
1. Metodos iterativos (Matematica). 2. Fourier, Transformações de. 3. Imagens óticas. I. De Pierro, Alvaro R. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 04 de agosto de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a) ALVARO RODOLFO DE PIERRO



Prof (a). Dr (a). NIR COHEN



Prof (a). Dr (a). ANA FRIEDLANDER DE MARTÍNEZ PEREZ



Agradecimentos

Ao Professor **Alvaro R. De Pierro** , pela orientação e dedicação.

Aos professores e colegas do IMECC, pelo apoio e incentivo.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus pais

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um estudo aprofundado do problema da recuperação da fase a partir de duas magnitudes. Após a introdução, no capítulo 2, discutimos o problema da unicidade, centrando nosso estudo no caso discreto. No capítulo 3 apresentamos os principais métodos existentes, dedicando especial atenção aos métodos iterativos baseados nas projeções. Estudamos os algoritmos mais eficientes e propomos um novo método alternativo que apresenta um melhor comportamento na prática que os anteriores. Os resultados dos testes numéricos são expostos no capítulo 4, enquanto que no capítulo 5 apresentamos as conclusões do nosso trabalho.

Abstract

We present in this dissertation a general overview of the phase retrieval problem from two magnitudes. After a brief introduction, in Chapter 2, we discuss the uniqueness issue, concentrating in the discrete case. Chapter 3 describes the main existing methods, with special emphasis in the iterative ones, based on projections. We analyze the most efficient algorithms, proposed by Fienup, and suggest a new alternative, that seems to behave better than the previous ones. Results of several experiments comparing the algorithms are presented in Chapter 4. Finally, in Chapter 5, we present some conclusions of our work.

Índice

1	Introdução	1
2	O Problema da Unicidade	3
2.1	Formulação do Problema	3
2.2	A Questão da Unicidade	4
3	Métodos de Resolução Numérica	19
3.1	O Método Direto	19
3.2	O Método das Projeções	23
3.2.1	O Problema da Estagnação do Gerchberg-Saxton: Outros Algoritmos	27
3.2.2	Variante Input-Output para o Problema das Duas Magnitudes	36
3.3	O Método de Máxima Descida	39
3.3.1	O Problema dos Mínimos Locais	42
4	Resultados Numéricos	44
4.1	Considerações Gerais	44
4.2	Análise dos Resultados	47
5	Conclusões	62

Capítulo 1

Introdução

O problema geral da recuperação da fase consiste em determinar uma função objeto a partir da magnitude de sua transformada de Fourier. Isto equivale a reconstruir a função a partir da sua autocorrelação. Quando não se dispõe de nenhuma outra informação sobre o objeto a reconstruir, exceto para casos especiais, a reconstrução será ambígua .

Afortunadamente, em muitas aplicações se conhecem algumas restrições que deve satisfazer o proprio objeto. O problema da recuperação da fase a partir de duas magnitudes aparece quando a função que se procura é uma função a valores complexos e além da distribuição de intensidades da transformada de Fourier, se dispõe da distribuição de intensidades no domínio do objeto. Este será o problema matemático que trataremos. Analisaremos quando as magnitudes da função e de sua transformada determinam a fase daquela. Como o nosso interesse está centrado na versão discreta do problema, estudaremos também os algoritmos que permitem calcular a fase da função.

Estas questões matemáticas são de grande importância devido a que em numerosos problemas da Física nos quais aparecem envolvidos eletrons e também outro tipo de partículas, a medição direta da fase apresenta serias dificuldades, não assim a medição das intensidades da função f e da sua transformada de Fourier. Uma área clássica na qual pode se encontrar este tipo de problema é a Microscopia Eletrônica [7]. O microscópio eletrônico só consegue medir a distribuição de intensidades no plano do objeto ou em algum outro plano no microscópio. Toda informação referente à fase do objeto é perdida no processo de medição. Mas para a determinação da estrutura do

objeto, resulta necessário ter um conhecimento absoluto dele, e assim acaba sendo necessário achar a fase do objeto.

Embora as restrições que impõem os dados sejam a priori muito fortes, a natureza não linear do problema faz com que a sua resolução não seja em absoluto trivial e que até agora não contemos com uma solução fechada para ele nem com algoritmos que garantam a convergência para a solução procurada.

Nesta dissertação apresentamos um estudo aprofundado do problema da recuperação da fase de uma função, a partir das magnitudes da função e da sua Transformada de Fourier.

No Capítulo 2 discutimos a unicidade do problema centrado no caso discreto, completando cálculos de resultados já conhecidos como os de Hayes e Sáenz, e desenvolvendo um exemplo que ilustra a evolução do grau de ambigüidade da solução com a dimensão do problema. Na primeira seção do Capítulo 3 descrevemos com detalhe o método direto e seus inconvenientes. Na segunda descrevemos os métodos derivados das seqüências de projeções ortogonais, basicamente o algoritmo de Gerschberg-Saxton, e as modificações introduzidas no mesmo para resolver o problema da estagnação. Esta é a parte central do nosso trabalho. Para resolver o problema da estagnação de Gerschberg-Saxton, J. Fienup sugeriu uma série de algoritmos conhecidos como "Input-Output", "Output-Output" e "Input-Output Híbrido", este último, o mais eficiente de todos. Originalmente esses algoritmos foram sugeridos para o problema da recuperação da fase a partir da magnitude da transformada de Fourier de uma função a valores reais. Posteriormente, o próprio Fienup apresentou duas versões "Input-Output" e "Output-Output" para o caso de duas magnitudes. Neste trabalho propomos mais uma nova variante dentro deste tipo de enfoque que, nas nossas experiências numéricas, supera o problema da estagnação em casos em que o método original de Fienup não consegue.

Também no Capítulo 3, descrevemos o método de máxima descida e o comparamos teoricamente com Gerschberg-Saxton, analisando a relação entre mínimos locais de um e os pontos fixos que não são solução do outro. No Capítulo 4, apresentamos as experiências numéricas ilustrando o comportamento dos métodos iterativos descritos anteriormente. Finalmente apresentamos algumas conclusões.

Capítulo 2

O Problema da Unicidade

2.1 Formulação do Problema

Matematicamente o problema contínuo da recuperação da fase a partir de duas magnitudes apresenta a seguinte forma,

$$\text{Dados } |f(x)| \text{ e } |F(w)| = \mathcal{F}[f(x)] = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i w \cdot x) dx \right| ,$$

Determinar a função $f : \Omega \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{C}$. Ou equivalentemente, se $f(x) = |f(x)| \exp i\theta(x)$ achar a fase $\theta(x)$.

\mathcal{F} denotará a transformada de Fourier.

Será que dada uma distribuição qualquer de dados tanto no plano da imagem quanto no plano de Fourier, encontraremos sempre uma função complexa que os satisfaçam? A resposta para esta pergunta é claramente *não*. Sabemos que no caso contínuo são várias as restrições que devem satisfazer os dados para poder corresponder a um par de Fourier (i.e., uma função e a sua transformada). Por exemplo, ser quadrado integrável, ou ainda $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |g(x)|}{(1+x^2)} < \infty$, etc.

Mas nosso interesse estará centrado no problema discreto. Começemos então por formular matematicamente este problema:

Seja $g_m = g_{m_1, \dots, m_n} \in \mathbb{C}^k$ para $m_i = 0, 1, \dots, N_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, n$;

denotaremos,

$N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ com $w_i^j = j/(2N_i + 1)$ onde $j = 0, 1, \dots, 2N_i$ e $i = 1, 2, \dots, n$.

O problema consiste em achar ' g_m ' a partir de,

$$|g_m| \quad \text{e de} \quad |DFT(g)(w)| = \left| \sum_{m=0}^N g_m e^{-2\pi i(m \cdot w)} \right|.$$

Para o caso unidimensional, $n=1$, o problema se reduz a achar $g = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ a partir de,

$$\left| \sum_{j=0}^{N-1} g_j e^{-2\pi i j k / 2N} \right| \quad \text{e de} \quad |g_j|.$$

No caso discreto, a única restrição conhecida que devem satisfazer os dados é aquela que impõe o Teorema de Parseval: 'igual energia nos dois domínios'. Matematicamente isto significa que se $g = (g_0, \dots, g_{N-1})$ e $G = (G_0, \dots, G_{N-1})$ denotam a uma função e a sua transformada de Fourier, então

$$\sum_{i=0}^{N-1} |g_i|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |G_i|^2.$$

Uma das primeiras perguntas que surgem após de formulado o problema, é aquela que concerne a existência ou não de uma solução para o mesmo.

Daqui para frente, assumiremos que os dados são factíveis e nos centramos numa outra questão que interessa responder: a questão da unicidade.

2.2 A Questão da Unicidade

Será que a partir de $|f(x)|$ e $|F(u)|$, pode se obter a fase $\theta(x)$?

Imediatamente se observam algumas ambigüidades que aparecem no caso contínuo. Vejamos algumas dessas situações.

O primeiro que se observa é que se f é a solução do nosso problema, também poderá ser solução qualquer g da forma $g(x) = f(x) \exp(ic)$, sendo c uma constante qualquer, pois ambas têm igual magnitude e também se cumpre que $G(u) = F(u) \exp(ic)$, onde G e F denotam as transformadas de Fourier de g e f respectivamente. Portanto, qualquer função com um deslocamento de fase respeito da f também será solução.

Outro caso de ambigüidade na solução se observa quando a distribuição de intensidades é simétrica em algum dos dois planos. Neste caso a complexa conjugada de qualquer solução no outro plano também será solução. Ou seja, se f é solução e $|F(w)| = |F(-w)| \Rightarrow g = f^*$ também será solução pois,

$$|g| = |f| \quad e \quad |\mathcal{F}[g](w)| = |\mathcal{F}[f^*](w)| = |F^*(-w)| = |F(w)|.$$

Vamos chamar a todas estas soluções, associadas triviais da f . De um ponto de vista físico, as soluções obtidas desta maneira são ambigüidades aceitáveis, já que elas só mudam a orientação do objeto sem mudar sua aparência. Portanto, quando falarmos do problema da unicidade na determinação da fase, estaremos obviando este tipo de ambigüidades.

Para o problema contínuo e no caso de funções que são inteiras, pode provar-se que a solução é única salvo essas associadas triviais que acabamos de mencionar [1].

Mas em geral podem se construir exemplos explícitos que mostram claramente a não unicidade da solução. Schiske [13] constrói exemplos de funções para as quais, os dados em ambos planos permitem um alto grau de ambigüidade na determinação da fase da solução. Estas funções são construídas recursivamente a partir de uma função de base $\tilde{g}_0(t)$ com suporte contido no intervalo $(-3/2, 3/2)$ da seguinte maneira,

$$\tilde{g}_{n+1}(t) = \tilde{g}_n(t) + q_n [\tilde{g}_n(t - 3^{n+1}) + \tilde{g}_n(t + 3^{n+1})]$$

onde $q_n \in \mathcal{C}$ é uma constante qualquer. Notemos que esta função descreve a adição repetida de múltiplos dela mesma.

Calculemos a intensidade de $\tilde{g}_{n+1}(t)$,

$$|\tilde{g}_{n+1}(t)| = |\tilde{g}_n(t) + q_n^* q_n [|\tilde{g}_n(t - 3^{n+1})| + |\tilde{g}_n(t + 3^{n+1})|]|$$

temos então que a intensidade de $\tilde{g}_{n+1}(t)$ é independente da fase de q_n .

A transformada de Fourier de $\tilde{g}_{n+1}(t)$ é dada por

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + q_n [g_n(x)e^{-2\pi i 3^{n+1}x} + g_n(x)e^{2\pi i 3^{n+1}x}],$$

logo

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + 2q_n g_n(x) \cos(2\pi 3^{n+1}x)$$

e então,

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(x)|^2 &= |g_n(x)|^2 |1 + 2q_n \cos(2\pi 3^{n+1}x)|^2 \\ &= |g_n(x)|^2 [1 + 4q_n^* q_n \cos^2(2\pi 3^{n+1}x) + 2(q_n^* + q_n) \cos(2\pi 3^{n+1}x)]^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|g_{n+1}(x)|^2$ depende somente de $|q_n|^2$, e de $Re(q_n)$. Desta forma, e procedendo recursivamente, podemos construir um par de funções **diferentes** (combinando uma para q_n e uma outra para q_n^* em cada etapa), mas com magnitudes iguais tanto no plano da imagem quanto no plano de Fourier.

Outro caso que apresenta uma ambigüidade na solução, resulta de considerar a parte simétrica g_s e antisimétrica g_a de uma função real $g(x)$, onde g é tal que os suportes de g_s e g_a são disjuntos:

Se $f(x) = g_s(x) - g_a(x)$, temos que $|f| = |g|$ e $F(t) = G_s(t) - G_a(t)$ é tal que,

$$|F(t)|^2 = |G_s(t)|^2 + |G_a(t)|^2 - 2 Re(G_s(t) G_a(t)^*),$$

$$|G(t)|^2 = |G_s(t)|^2 + |G_a(t)|^2 + 2 Re(G_s(t) G_a(t)^*).$$

Mas como a g_s é simétrica e a g_a é antisimétrica, suas transformadas de Fourier são real e imaginária respectivamente. Portanto, $Re(G_s(t) G_a(t)^*) = 0$, e assim as magnitudes de $|F|$ e de $|G|$ são iguais.

Para o caso do problema geral da recuperação da fase a partir de uma magnitude, é simples construir exemplos ambigüos convolvendo qualquer função que satisfaz os dados com uma outra função com magnitude da transformada de Fourier igual a um.

No que segue veremos que as ambigüidades que aparecem no caso unidimensional, têm a sua origem no seguinte fato: para $n = 1$ é válido o teorema fundamental da álgebra, que afirma ‘Todo polinômio em uma variável sempre pode ser fatorado como produto de polinômios de grau um (os irredutíveis)’.

Vejamos onde é que aparece a relação entre o dito anteriormente e nosso problema.

Consideremos $g = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1}) \in \mathcal{C}^N$. A sua transformada discreta de Fourier, que denotaremos por ‘DFT’, é dada por,

$$\text{DFT}(g)(k) = \sum_{j=0}^{N-1} g_j e^{-2\pi i j k / 2N}.$$

A z -transformada da seqüência discreta g , é uma função de variável complexa definida por,

$$p(z) = \sum_{j=0}^{N-1} g_j z^j.$$

Observamos então que a $\text{DFT}(g)$ corresponde a z -transformada computada sobre o círculo unitário, i.e., $\text{DFT}(g)(k) = p(z)|_{z=w_k}$, onde $w_k = e^{-2\pi i k / 2N}$. Decompondo $p(z)$ como o produto do seus fatores irredutíveis, ele pode ser escrito como $p(z) = c \prod_{i=1}^{N-1} (z - z_i)$, onde os z_i correspondem às $N-1$ raízes não necessariamente distintas do polinômio. Assim temos que,

$$\begin{aligned} |\text{DFT}(g)(k)|^2 &= [p^*(1/z^*) p(z)]|_{z=w_k}, \\ |\text{DFT}(g)(k)|^2 &= |c|^2 \prod_{i=1}^{N-1} (z - z_i) (1 - z z_i^*). \end{aligned}$$

Desta última igualdade pode-se observar que não podemos distinguir entre os zeros de $p(z)$ e os de $p^*(1/z^*)$ baseados somente nos dados do domínio das freqüências. Portanto, através de uma troca de zeros entre esses dois polinômios, sempre conseguiremos construir funções diferentes mas com transformadas de Fourier de igual magnitude.

Para o problema de uma magnitude, isto nos permite gerar uma enorme quantidade (mas finita) de soluções não triviais. Porém, notemos que essa troca de zeros em geral vai mudar o módulo da função objeto. Portanto, para o caso do problema das duas magnitudes, precisamos analisar qual será

o efeito que uma troca de zeros produz no módulo da imagem da função. Vamos mostrar que as condições sob às quais será possível fazer estas mudanças sem modificar a distribuição do módulo da função g serão muito restritas.

Seja $g = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1}) \in \mathcal{C}^N$ e seja \tilde{g} a sua transformada de Fourier discreta. Então, $g_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{g}_j e^{2\pi i j k / N}$. Chamemos $w_k = e^{2\pi i k / N}$ e reescrevamos g em termos de w . Assim, cada um dos g_k resulta um polinômio em w de grau não maior que $(N - 1)$.

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{g}_j w_k^j. \quad (2.1)$$

O valor de g_k estará determinado pela posição dos zeros w_i do polinômio (2.1)

Se I_k representa a intensidade no plano do objeto, i.e.: $I_k = |g_k|^2$, e denotando com \tilde{I}_k a sua DFT, então sabemos que elas estão relacionadas da seguinte maneira,

$$\tilde{I}_j = \mathcal{F}(I_j) = \mathcal{F}[g^* g](j) = (\tilde{g}^* * \tilde{g})(j) \text{ portanto,}$$

$$\tilde{I}_j = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l \tilde{g}_{l-j}^*. \quad (2.2)$$

Além do mais, pela definição da transformada de Fourier, temos que,

$$I_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{I}_j e^{-2\pi i j k / N}.$$

Reescrevendo esta última igualdade em função de w_k , obtêm-se

$$I_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{I}_j w_k^j.$$

Substituindo (2.2) na equação anterior resulta que,

$$I_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l \tilde{g}_{l-j}^* \right] w_k^j,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l \tilde{g}_s^* w_k^{l-s}, \\
&= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{s=0}^{N-1} \tilde{g}_s^* w_k^{-s} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l w_k^l \right], \\
&= \left[\frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \tilde{g}_s^* w_k^{-s} \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l w_k^l \right].
\end{aligned}$$

Desta última expressão podemos ver que os zeros de cada um destes polinômios determinam o I_k . Notemos também que os zeros que aparecem no segundo fator são os próprios zeros (w_i) de g_k . Enquanto que aqueles que aparecem no primeiro fator estão dados por $1/w_i^*$. Portanto, os zeros w_i de (2.1) e seus correspondentes $1/w_i^*$, deverão estar presentes na intensidade de qualquer função que satisfaz os dados no espaço da imagem. Assim, trocando o zero w_i por $1/w_i^*$, obtemos diferentes funções 'g' com o mesmo valor do módulo. Mas, como é que essas mudanças se refletem no espaço das frequências?. Será que essas trocas de zeros deixam a magnitude da DFT(g) inalterável?

Vamos supor que $\tilde{g}_j \neq 0$ para $0 \leq j \leq (N-1)/2$, e $\tilde{g}_j = 0$ para os outros valores de j . Então o polinômio (2.1) resulta ser de grau não maior que $(N-1)/2$, e toma a forma,

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{(N-1)/2} \tilde{g}_j w^j. \quad (2.3)$$

A troca de zeros é conseguida multiplicando a função pelo fator

$$\prod_i \left(\frac{w - 1/w_i^*}{w - w_i} \right) \left(\frac{1 - w_i}{1 - 1/w_i^*} \right),$$

onde o produto é feito sobre todos aqueles índices i correspondentes a zeros que estamos querendo trocar. Cada um destes fatores pode ser reescrito da seguinte forma,

$$\left(\frac{1 - w_i}{1 - 1/w_i^*} \right) \left(\frac{w - 1/w_i^*}{w - w_i} \right) = \left(\frac{1 - w_i}{1 - 1/w_i^*} \right) \left(\frac{w - w_i + w_i - 1/w_i^*}{w - w_i} \right)$$

$$= \left(\frac{1 - w_i}{1 - 1/w_i^*} \right) \left(1 + \frac{w_i - 1/w_i^*}{w - w_i} \right).$$

Assim eles tomam a forma

$$a_i(1 + b_i/(w - w_i)),$$

onde $a_i = (1 - w_i)/(1 - 1/w_i^*)$ e $b_i = w_i - 1/w_i^*$. Observar que $|a_i| = |w_i|$ deverá ser distinto da unidade para que efetivamente uma troca de zeros aconteça.

Desenvolvendo o termo $1/(w - w_i)$, obtem-se o seguinte

$$\frac{g_k}{w - w_i} = g_k \left(\frac{1}{w - w_i} \right) = g_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_l w^l$$

Substituindo esta última expressão em (2.2) resulta, onde

$$\tilde{f}_j = \begin{cases} w_i^{-j-1} & \text{se } j < 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{g_k}{w - w_i} &= \left(\sum_{j=0}^{(n-1)/2} \tilde{g}_j w^j \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_l w^l \right) \\ &= \sum_{j=0}^{(N-1)/2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_j \tilde{f}_l w^{l+j} \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_j \tilde{f}_{s-j} w^s, \end{aligned}$$

$$\text{se } s < 0, \quad s - j < 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_{s-j} = w_i^{j-s-1} \quad ;$$

Portanto temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \sum_{s=-\infty}^0 \tilde{g}_j \tilde{f}_{s-j} w^s &= \sum_{s=-\infty}^0 \sum_{j=0}^N \tilde{g}_j w_i^{j-s-1} w^s \\ &= \sum_{s=-\infty}^0 w^s w_i^{-s-1} \left(\sum_{j=0}^N \tilde{g}_j w_i^j \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\sum_{j=0}^N \tilde{g}_j w_i^j = 0$ pelo fato de ser w_i zero de g . Se aliás observamos que $\tilde{f}_{s-j} = 0$ para $s > j$, então (2.4) pode-se escrever na seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \frac{g_k}{w - w_i} &= \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{j=0}^N (\tilde{g}_j w_i^{j-s-1}) w^s, \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} (w_i^{-s-1} \sum_{j=s+1}^N \tilde{g}_j w_i^j) w^s, \end{aligned}$$

e se denotamos com $\tilde{c}_s = w_i^{-s-1} \sum_{j=s+1}^N \tilde{g}_j w_i^j$ temos que,

$$\frac{g_k}{w - w_i} = \sum_{s=0}^{N-1} \tilde{c}_s w^s.$$

Chamaremos g_k' a nova função que resulta de trocar os zeros em g_k . Sabemos que o módulo do fator pelo qual estamos multiplicando é um, portanto a magnitude de g_k' não é modificada, mas veremos agora o que acontece com a magnitude de sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} g_k' &= g_k a_i (1 + b_i / (w - w_i)) \\ &= a_i (g_k + b_i g_k / (w - w_i)) \\ &= a_i \left[\sum_{j=0}^N \tilde{g}_j w^j + b_i \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{c}_j w^j \right] \\ &= a_i \sum_{j=0}^N (\tilde{g}_j + b_i \tilde{c}_j) w^j, \quad (\text{com } \tilde{c}_N = 0) \end{aligned}$$

então,

$$g_k' = \sum_{j=0}^N \tilde{g}'_j w^j$$

onde os \tilde{g}'_j representam os coeficientes de Fourier da nova função g_k' e são dados por

$$\tilde{g}'_j = a_i (\tilde{g}_j + b_i \tilde{c}_j), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N.$$

Portanto, para conhecer qual é o efeito que a troca de zeros produz sobre o módulo no plano de difração, devemos comparar $|\tilde{g}_j|$ com $|\tilde{g}'_j|$ a partir da

última equação e para os diferentes valores de j .

Consideremos primeiramente $j = N$. Neste caso temos que, $\tilde{c}_N = 0$ e portanto, da igualdade anterior se segue que $\tilde{g}'_N = a_i \tilde{g}_N \Rightarrow |\tilde{g}'_N| = |a_i| |\tilde{g}_N| = |w_i| |\tilde{g}_N|$ (lembrar que $|w_i| \neq 1$)

Assim, se trocamos um número p de zeros, obtemos que:

$$\tilde{g}'_N = \left(\prod_{i=1}^p |w_i| \right) \tilde{g}'_N.$$

Desta última igualdade observamos que para deixar o módulo de \tilde{g}'_j igual ao de g'_j , será necessária uma troca de zeros de dentro e fora do círculo unitário (nunca sobre ele), de tal maneira que o produto dos módulos de todos esses zeros resulte igual à unidade. Evidentemente essa restrição parece ser bastante forte.

A mesma condição é obtida quando consideramos $j = 0$. Neste caso,

$$\tilde{c}_0 = w_i^{-1} \sum_{j=1}^N \tilde{g}_j w_i^j = w_i^{-1} (\sum_{j=0}^N \tilde{g}_j w_i^j - \tilde{g}_0) = -\tilde{g}_0 w_i^{-1}. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_0 &= a_i (\tilde{g}_0 + b_i \tilde{c}_0) \\ &= a_i (\tilde{g}_0 - (b_i/w_i) \tilde{g}_0) \\ &= a_i \tilde{g}_0 (1 - (b_i/w_i)). \end{aligned}$$

$$\text{Como } b_i = w_i - 1/w_i^* \Rightarrow b_i/w_i = 1 - 1/|w_i|^2 \Rightarrow \tilde{g}'_0 = a_i (\tilde{g}_0/|w_i|^2) \Rightarrow |\tilde{g}'_0| = (1/|w_i|) |\tilde{g}_0|.$$

No caso de estar trocando p -zeros, a condição será:

$\prod_{i=1}^p |w_i| = 1$, pois $|\tilde{g}'_0| = |\tilde{g}_0| / \prod_{i=1}^p |w_i|$ que é a mesma condição que havíamos obtido antes.

Evidentemente esta e as outras condições que resultam de considerar os restantes valores de j , limitam em grande maneira a troca de zeros que não modificam as magnitudes em ambos planos. Isto faz com que a solução para o problema da fase a partir de duas magnitudes seja essencialmente única mesmo no caso unidimensional.

Veremos com um exemplo como ainda para o caso unidimensional é muito pouco provável achar não unicidade na solução do problema da recuperacção da fase a partir de duas magnitudes.

Vimos anteriormente que para conseguir uma g' diferente que conserve a magnitude da transformada de Fourier G , só precisamos fazer uma troca de zeros na z -transformada $P(z)$; mas se além disso queremos conservar o módulo do sinal original g , uma das condições que devem satisfazer aqueles zeros que foram trocados é que o seu produto deve ter módulo igual a um. Veremos como esta condição é apenas necessária.

Consideremos o sinal de g dado por,

$$g = (i, 1/3 - 4i, -4/3 + 3i, 1) \quad \text{com intensidade } I = 1/9 (9, 145, 97, 9)$$

Sua z -transformada é dada por,

$$\begin{aligned} P(z) &= i + (1/3 - 4i)z + (-4/3 + 3i)z^2 + z^3 \\ &= (z + 3i)(z - 1/3)(z - 1) \end{aligned}$$

Das quatro trocas possíveis de zeros, só faz sentido aquela que corresponde a trocar os dois zeros que estão fora do círculo unitário.

Sejam $z_1 = -3i$ e $z_2 = 1/3$

Os fatores pelos quais temos que multiplicar $P(z)$ são

$$\begin{aligned} \left(\frac{z - 1/z_1^*}{z - z_1} \right) \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_1^*} \right) &= \left(\frac{1 + 3i}{3i - 1} \right) \left(\frac{3iz - 1}{z + 3i} \right), \\ \left(\frac{z - 1/z_2^*}{z - z_2} \right) \left(\frac{1 - z_2}{1 - z_2^*} \right) &= -\frac{z - 3}{3z - 1}. \end{aligned}$$

A z -transformada do novo sinal é,

$$\tilde{P}(z) = P(z) \left(\frac{z - 1/z_1^*}{z - z_1} \right) \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_1^*} \right) \left(\frac{z - 1/z_2^*}{z - z_2} \right) \left(\frac{1 - z_2}{1 - z_2^*} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{1+3i}{3(3i-1)}\right)(z-1)(3iz-1)(z-3) \\
&= -1/3(4/5-3/5i)(3iz^3+(-12i-1)z^2+(4+9i)z-3).
\end{aligned}$$

Esta z -transformada corresponde a um novo sinal dado por,

$$h = 1/3(-4/5 + 3/5i)(-3, 4 + 9i, -12i - 1, 3i).$$

É claro que h é um outro sinal com igual intensidade da transformada de Fourier que a intensidade da G , mas com magnitudes diferentes no plano do objeto.

Vimos então que se no polinômio (2.1) se faz uma troca de um conjunto de zeros que satisfazem certas condições, conseguimos construir uma nova função, diferente da original, que também é solução do nosso problema. Mais ainda esta é a única maneira de obter soluções diferentes.

Neste ponto é onde reside a diferença principal entre o caso unidimensional e o caso multidimensional. Todo polinômio em uma variável que seja de grau maior que um, é sempre *reduzível*, enquanto que para polinômios em m variáveis, isto já deixa de ser verdade. Por exemplo, o polinômio $p(z, w) = 1 + zw$ é de grau dois, mas é irredutível no campo dos números complexos.

Teorema 2.1: *Seja 'g' uma seqüência complexa m-dimensional de suporte finito, i.e.: $g(n_1, n_2, \dots, n_m) = 0$ para $n_k < 0$ ou $n_k \geq N_k$ $k = 1, 2, \dots, m$ e suponhamos que sua z -transformada esteja dada por*

$$G(z) = \alpha z^{-n_0} \prod_{k=1}^p G_k(z),$$

onde os $G_k(z)$ são polinômios irredutíveis. Se h é uma outra seqüência m -dimensional de suporte finito e $|H(w)| = |G(w)|$ para todo w , então $H(z)$ deve ser da forma

$$H(z) = \pm \alpha z^{-n} \prod_{k \in I} G_k(z) \prod_{k \notin I} \tilde{G}_k(z),$$

onde I é um subconjunto de inteiros no intervalo $[1, p]$ e $\tilde{G}_k(z) = z^{-N} G_k(z^{-1})$, sendo N o grau da z -transformada $G_k(z)$ em z^{-1} .

Demonstração: ver Hayes [8].

Do teorema segue que se (g_k) é tal que $|H(w)| = |G(w)| \forall w$ então $H(z)$ deverá ter o mesmo número de fatores irredutíveis. Por tanto, a única forma de gerar outra seqüência de igual magnitude no espaço das freqüências, consiste em substituir um ou mais destes fatores irredutíveis $G_k(z)$ por $\tilde{G}_k(z)$. É claro que se a $G_k(z)$ é simétrica, substituí-la só fará mudar o sinal da $G(z)$.

Notemos também que o número de trocas possíveis será $2^{p'-1}$, onde p' é o número de fatores irredutíveis não simétricos.

O dito anteriormente nos permite analisar o problema da unicidade da solução através do estudo dos polinômios irredutíveis em m -variáveis, pois a presença de ambigüidade equivale à fatorabilidade do polinômio dado pela z -transformada. No que segue, tentaremos caracterizar o conjunto de sinais complexos de módulo dado, tais que sua z -transformada $p(z)$ é irredutível, pois isto garante a unicidade da solução.

Consideremos o seguinte conjunto:

$$R = \{g_m \in \mathcal{C}^M \mid p(z) \text{ é redutível e } |g_m| \text{ dado}\}$$

onde $M = \prod_{i=1}^n (N_i + 1)$. No caso $N_i = N_j \quad \forall i, j$ $M = (N + 1)^n$.

Lembremos que um conjunto $\mathcal{D} \in \mathcal{C}^M$ se diz algébrico, se ele consiste em zeros de uma família finita de polinômios; i.e.: $\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C}^M / Q_1(z) = \dots = Q_r(z) = 0\}$.

Provaremos que o conjunto de polinômios redutíveis em m -variáveis, está contido num conjunto algébrico não trivial de \mathcal{C}^m .

Para mostrar isto, será útil definir primeiro a noção de função polinomial: $f : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^m$ se diz polinomial, se $f(z) = [p_1(z), \dots, p_m(z)] \quad \forall z \in \mathcal{C}^n$, onde os $p_j(z)$ são polinômios em \mathcal{C}^n .

Teorema 2.2: *Seja $f : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^m$ uma função polinomial e suponhamos que $n < m$. Então existe um conjunto algébrico $T \subset \mathcal{C}^m$ tal que $f(\mathcal{C}^n) \subset T$.*

Demonstração: ver Sanz [10].

Aplicaremos este teorema para provar o dito anteriormente.

Se $S = \{g_m \in \mathcal{C}^M \mid p(z) \text{ é redutível}\}$, através de uma caracterização geométrica o conjunto pode ser escrito como:

$$S = \{g_j \in \mathcal{C}^M \mid g_0 = 0\} \cup \{\cup_{i=1}^k f_i(\mathcal{C}^\alpha)\},$$

onde $f_i : \mathcal{C}^\alpha \rightarrow \mathcal{C}^M$ são funções polinômiais e $\alpha < M$. Pelo teorema anterior, sabemos que para cada i , existem polinômios Q_{k_1}, \dots, Q_{k_i} tais que

$$f_i(\mathcal{C}^\alpha) \subset \{z \in \mathcal{C}^M \mid Q_{k_1}(z) = \dots = Q_{k_i}(z) = 0\},$$

de onde resulta que,

$$S \subset \{z \in \mathcal{C}^M \mid z_0 \prod_{j=1}^r Q_j(z) = 0\}.$$

Assim, o conjunto de polinômios reduzíveis está contido num conjunto algébrico não trivial. Pode se provar por indução sobre o número de variáveis [10] que este conjunto tem medida zero. Além do mais, ele possui uma rica estrutura geométrica.

Este resultado é bastante alentador porque vai nos permitir incluir o conjunto de sinais que podem dar origem a soluções ambíguas, num conjunto de medida zero.

Assim, depois de todo o dito vemos que a probabilidade de achar um polinômio redutível em \mathcal{C}^n , com $n > 1$ é zero. Isto significa que a probabilidade de que o problema das duas magnitudes no caso multidimensional, $n \geq 2$, tenha solução única, é *um*.

Em correspondência com o exposto anteriormente, estaremos interessados em conhecer ou estudar a variedade algébrica que contém aqueles pares de magnitudes no domínio da imagem e das frequências para as quais a solução não é única. Para isto vejamos um exemplo,

Consideremos o caso $n = 2$ para $N_1 = N_2 = 1$.

Analisaremos o grau de ambigüidade na determinação de um sinal $\bar{a} = (a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}) \in \mathcal{C}^4$, a partir das magnitudes de 'a' e de sua transformada de Fourier discreta $\bar{s} = (s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11})$. As z -transformadas de \bar{a} e de \bar{s} estão dadas por:

$$p(z_1, z_2) = a_{00} + a_{01} z_1 + a_{10} z_2 + a_{11} z_1 z_2,$$

$$q(z_1, z_2) = s_{00} + s_{01} z_1 + s_{10} z_2 + s_{11} z_1 z_2.$$

Segundo o exposto anteriormente, o conjunto de dados para os quais o problema não terá solução única, está dado por;

$$T = \{ \bar{a} / p(z_1, z_2) \text{ e } q(z_1, z_2) \text{ são redutíveis} \}.$$

Sabemos que um polinômio em duas variáveis do tipo $r(\bar{z}) = a + b z_1 + c z_2 + d z_1 z_2$ é reduzível se e somente se $ad - bc = 0$. Portanto resulta que

$$T = \{ \bar{a} / a_{00} a_{11} - a_{01} a_{10} = 0 \text{ e } q(z_1, z_2) \text{ redutível} \}.$$

Consideremos agora os dados no plano de Fourier,

$$|\bar{s}|^2 = |DFT(\bar{a})|^2 \text{ e } \bar{s} = (s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}) \in \mathcal{C}^4$$

$$\text{Assim, } \bar{s} = A \bar{a}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vejamos qual será a condição no plano de Fourier para que o polinômio $q(z_1, z_2)$ seja redutível, em termos de \bar{a} :

$$0 = s_{00} s_{11} - s_{01} s_{10}$$

$$\begin{aligned}
&= (A_1\bar{a})(A_4\bar{a}) - (A_2\bar{a})(A_3\bar{a}), \quad \text{onde } A_k = k\text{-ésima linha da } A \\
&= (a_{00} + a_{01} + a_{10} + a_{11})(a_{00} - a_{01} - a_{10} + a_{11}) - \\
&\quad - (a_{00} - a_{01} + a_{10} - a_{11})(a_{00} + a_{01} - a_{10} - a_{11}) \\
&= [(a_{00} + a_{01}) + (a_{10} + a_{11})][(a_{00} - a_{01}) + (a_{11} - a_{10})] - \\
&\quad - [(a_{00} - a_{01}) + (a_{10} - a_{11})][(a_{00} + a_{01}) - (a_{10} + a_{11})] \\
&= (a_{00}^2 - a_{01}^2) + (a_{00} + a_{01})(a_{11} - a_{10}) + (a_{11} + a_{10})(a_{00} - a_{01}) + \\
&\quad + (a_{11}^2 - a_{10}^2) - [(a_{00}^2 - a_{01}^2) - (a_{00} - a_{01})(a_{11} + a_{10}) + \\
&\quad + (a_{11} - a_{10})(a_{00} + a_{01}) + (a_{11}^2 - a_{10}^2)] \\
&= 2(a_{00} + a_{01})(a_{11} - a_{10}) \\
&= 2[a_{00}a_{11} - a_{10}a_{00} + a_{01}a_{11} - a_{01}a_{10}] \\
&= 2[a_{01}a_{11} - a_{10}a_{00}]
\end{aligned}$$

Temos então que a condição para a redutividade de q , assumindo a redutividade de p , é dada por,

$$a_{01}a_{11} - a_{10}a_{00} = 0$$

Assim, a variedade algébrica resulta determinada pelas seguintes equações,

$$R = \{(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}) \mid \begin{aligned} a_{11}a_{00} - a_{01}a_{10} &= 0 \\ a_{01}a_{11} - a_{10}a_{00} &= 0 \end{aligned}\}$$

Em geral a dificuldade que aparece na hora de determinar a dimensão de uma variedade algébrica é aquela que tem a ver com a potencial dependência das equações que a definem.

No caso deste exemplo particular, é clara a independência das equações que determinam a variedade R . Logo, a dimensão de R é 2. Ou seja, que a dimensão da variedade algébrica que consiste daqueles sinais em \mathcal{C}^4 que satisfazem os dados em ambos domínios e que podem gerar soluções ambíguas é 2.

Notar que para o problema de uma magnitude para um sinal real em \mathcal{R}^4 , a dimensão da variedade é 3.

Capítulo 3

Métodos de Resolução Numérica

Neste capítulo apresentaremos os principais métodos desenvolvidos para resolver numericamente o problema da recuperação da fase a partir das magnitudes da função e da transformada de Fourier. Os métodos são os seguintes:

- O método direto
- O método das projeções (Gerchberg / Saxton)
- O método de máxima descida

3.1 O Método Direto

Este método calcula de maneira direta o valor de $g_m \in \mathcal{C}^*$ a partir dos dados $|g_m|$ e $|DFT(g_m)|$ baseado na relação existente entre a autocorrelação de g_m e o quadrado da amplitude da sua transformada de Fourier. Vamos considerar o caso bidimensional. Denotaremos com R a região do espaço imagem dentro da qual estarem dados os nossos dados. Más precisamente eles estarem dados sobre um reticulado definido em R , embora consideraremos que eles são constantes dentro de cada cela determinada pelo reticulado. Por simplicidade vamos supor que R consiste num retângulo com lados paralelos aos eixos x e y . Suporemos também que a origem do espaço coincide com o

vértice inferior izquierdo do retângulo.

Chamemos $a = A/M$ e $b = B/M$ onde A e B são os comprimentos dos subintervalos nos eixos x e y . Os nossos dados estarão disponíveis sobre os pontos $x = ka$ e $y = jb$, com $0 \leq k \leq M$ e $0 \leq j \leq N$. N e M são as quantidades de intervalos sobre cada eixo.

Temos então o nosso domínio subdividido em MN celas. A região do espaço da imagem ocupada pela mn -ésima subcela corresponde a $(m-1)a < x < ma$ e $(n-1)b < y < nb$.

Se chamamos $rect2$ à função dada por,

$$rect2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1/2 \text{ e } |y| \leq 1/2, \\ 0 & \text{se } |x| > 1/2 \text{ ou } |y| > 1/2, \end{cases}$$

a função g pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \sum_{m=2}^{M-1} \sum_{n=1}^N g_{m,n} rect2\left(\frac{x - (m-1/2)a}{a}, \frac{y - (n-1/2)b}{b}\right) + \\ & + \sum_{n=1}^N [g_{1,n} rect2\left(\frac{x - 3a/8}{3a/4}, \frac{y - (n-1/2)b}{b}\right) + \\ & + g_{M,n} rect2\left(\frac{x - (M-3/8)a}{3a/4}, \frac{y - (n-1/2)b}{b}\right)], \end{aligned}$$

onde $g_{i,j}$ corresponde ao valor complexo dos dados sobre o reticulado.

Pelo teorema da correlação sabemos que a autocorrelação da g e o quadrado da amplitude da sua transformada formam um par de Fourier. Como a amplitude é conhecida, aplicando a transformada inversa obtemos a autocorrelação da g . Ela será denotada por gg .

Escrevamos a autocorrelação da g fazendo uso da expressão anterior,

$$gg(ka, sb) = (3ab/4)w_{M-k} \sum_{n=1}^{N-s} g_{1,n} g_{1+k,n+s}^*$$

$$\begin{aligned}
& +abw_{M-k-1} \sum_{m=2}^{M-k-1} \sum_{n=1}^{N-s} g_{m,n} g_{m+k,n+s}^* \\
& + (3ab/4)w_{1-k} \sum_{n=1}^{N-s} g_{M,n} g_{M+k,n+s}^*, \tag{3.1}
\end{aligned}$$

onde k e s são inteiros não negativos e w está dada por,

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i > 0, \\ 0 & \text{se } i \leq 0. \end{cases}$$

Agora começa a se desenvolver estas equações. Se olharmos para $k = M - 1$ e $s = N - 1$ obtemos,

$$(4/3ab) gg((M-1)a, (N-1)b) = g_{1,1} g_{M,N}^*. \tag{3.2}$$

Lembremos que tanto o lado izquierdo desta equação quanto os módulos das quantidades que aparecem no lado direito são conhecidos.

Aplicando o módulo a ambos lados obtemos a seguinte igualdade:

$$|g_{1,1}| |g_{M,N}^*| = 4/3ab |gg((M-1)a, (N-1)b)|.$$

Poderia acontecer, devido aos erros inerentes nas medições dos dados, que a equação anterior somente se verifique aproximadamente. Então, a fim de não ter problemas em nosso objetivo de recuperar a fase, será preciso ajustar o tamanho de 'a' e 'b' de forma tal que a equação seja satisfeita ou pelo menos quase-satisfeita.

Analisemos agora a equação (3.2) para as fases:

$$\theta_{1,1} - \theta_{M,N} = \theta\theta_{M-1,N-1}.$$

Como para nosso problema não faz sentido falar de fases absolutas, por conveniência vamos fixar $\theta_{1,1}$ no nível zero. Logo obtem-se que,

$$\theta_{M,N} = -\theta\theta_{M-1,N-1}.$$

Voltemos agora a (3.2) para $k = M - 2$, $s = N - 1$. Resulta que,

$$(4/3ab) gg((M-2)a, (N-1)b) = g_{1,1} g_{M-1,N}^* + g_{2,1} g_{M,N}^*$$

Os valores de $g_{1,1}$ e de $g_{M,N}$ já foram determinados no passo anterior. Vemos que nesta última igualdade contamos com dois valores possíveis para as fases de cada uma das novas incógnitas que aparecem nela. Isto se vê mais claro geometricamente escrevendo a última equação na forma $c = c_1 + c_2$ e olhando para a seguinte figura,

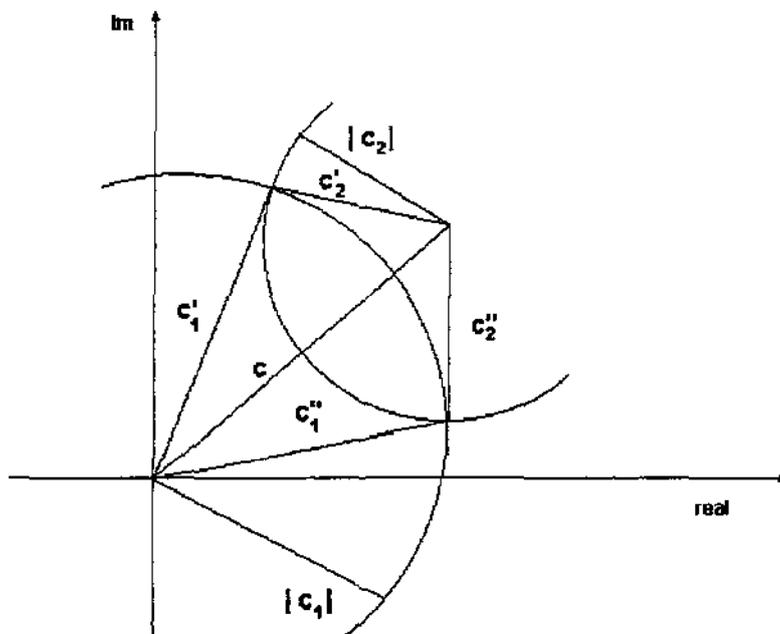


Figura 3.1: Ambigüidade na determinação de c .

Vemos que não é possível determinar c de maneira única a partir da relação ' $c = c_1 + c_2$ ' e dos módulos de c_1 e c_2 .

Se continuarmos escrevendo cada uma das equações que resultam de (3.1) para os distintos valores de k e s , veremos que em cada passo aparece a mesma dupla ambigüidade na fase que apareceu para $k = M - 2$, $s = N - 1$. Assim, a partir de uma rama inicial, se constroie uma árvore de soluções.

Desta maneira, quando acabemos de percorrer o conjunto de índices em (3.2), contaremos com uma ambigüidade da ordem de $2^{MN/2}$.

Notemos também que é possível que em algum ponto do nosso recorrido, alguma das ramas não possa ser continuada. Neste caso, somente resta abandonar dita rama e continuar por uma outra. Em [3] se apresentam algumas ideias tendentes a ajudar na hora de decidir que caminho seguir. Mas em geral devemos então contar com alguma informação a priori para remover estas ambigüidades.

Uma vez obtidos os $g_{i,j}$, calculamos a sua autocorrelação através da FFT e comparamos o resultado com aquele que é fornecido pelos dados.

Este método, se bem possui a vantagem de que a forma de obter cada um dos $g_{i,j}$ é bastante simples, acaba tendo um custo muito alto pois o custo de examinar todas as ramas é um número que cresce exponencialmente. Também é importante notar que devido a forma seqüencial em que a solução é construída, os erros são propagados rapidamente. Isto faz com que o método seja muito sensível à presença de ruído nos dados.

3.2 O Método das Projeções

O algoritmo de Gerchberg-Saxton consiste basicamente em projetar sucessivamente uma aproximação inicial entre os espaços definidos pelos dados em ambos os domínios [7]. Desta maneira obriga-se a satisfazer as restrições num domínio antes de passar para o outro. Um esquema do método se mostra na figura (3.2).

A iteração é terminada quando o erro quadrado, em qualquer dos dois domínios, é menor que uma tolerância dada. No domínio da frequência, o quadrado do erro é a soma dos quadrados da diferença entre G e G' . Isto mede 'quanto' a restrição nesse domínio não está sendo satisfeita.

Notemos que a ' g ' inicial é obtida a partir de uma fase aleatória.

Se bem os nossos dados estão representados de maneira discreta, e nós pro-

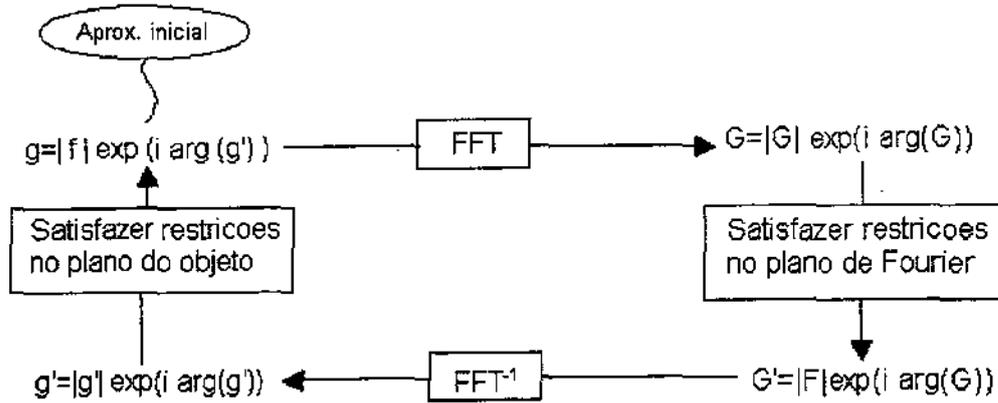


Figura 3.2: Esquema do método das projeções

prios estamos interessados em resolver numericamente o problema, no que segue usaremos a notação de funções contínuas só por uma questão de conveniência.

Então, dada a k -ésima iteração $g_k(x)$, o algoritmo procede da seguinte maneira:

- Calcula $G_k(u) = \mathcal{F}[g_k(x)] = |G_k(u)| \exp(i \phi_k(u))$;
- Faz cumprir a restrição no plano de Fourier, conservando a fase obtida na etapa anterior: $G'_k(u) = |F(u)| \exp(i \phi_k(u))$,
- $g'_k(x) = \mathcal{F}^{-1}[G'_k(u)] = |g'_k(x)| \exp(i \theta'_k(x))$;
- $g_{k+1}(x) = |f(x)| \exp(i \theta'_k(x))$.

O quadrado do erro no plano de difração é dado por

$$B_k = E_{Fk}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_u |G_k(u) - G'_k(u)|^2,$$

ou equivalentemente,

$$B_k = \frac{1}{N^2} \sum_u \left| |G_k(u)| e^{i\phi_k(u)} - |F(u)| e^{i\phi_k(u)} \right|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_u [|G_k(u)| - |F(u)|]^2,$$

então temos que, $B_k = \frac{1}{N^2} \sum_u [|G_k(u)| - |F(u)|]^2$.

De maneira análoga no plano da imagem, obtemos que

$$b_k = \sum_x [|g_k'(x)| - |f(x)|]^2 = E_{ok}^2.$$

Neste ponto, a pergunta que surge naturalmente é se o algoritmo gera uma seqüência convergente ou não. Pode-se provar que a seqüência do quadrado do erro sempre é monótona convergente, mas não é possível garantir a convergência para zero. Portanto, não será possível afirmar que a seqüência gerada pelo algoritmo seja convergente.

A fim de mostrar que a seqüência do quadrado do erro é convergente, voltamos à definição do erro num dos planos,

$$\begin{aligned} E_{Fk}^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_u |G_k(u) - G_k'(u)|^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_u [\mathcal{F}[g_k(x)] - \mathcal{F}[g_k'(x)]]^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_u [\mathcal{F}[g_k(x) - g_k'(x)]]^2 \\ &= \sum_x [|g_k'(x)| - |g_k(x)|]^2, \quad \text{pelo T. de Parseval} \\ &\geq \sum_x |g_{k+1}(x) - g_k'(x)|^2 \\ &= \sum_x |f(x) - g_k'(x)|^2 \\ &= E_{ok}^2. \end{aligned}$$

Assim resulta que,

$$E_{ok}^2 \leq E_{Fk}^2. \quad (3.3)$$

Notar que a desigualdade $|g_{k+1}(x) - g_k'(x)| \leq |g_k(x) - g_k'(x)|$ é válida pois por construção, $g_{k+1}(x)$ é a função mas próxima a $g_k'(x)$ que satisfaz

a restrição no plano da imagem.

Partindo agora de E_{ok}^2 obtemos,

$$\begin{aligned}
 E_{ok}^2 &= \sum_x |g_{k+1}(x) - g_k'(x)|^2 \\
 &= \sum_x [\mathcal{F}^{-1}(G_{k+1}(u) - G_k'(u))]^2 \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_u [G_{k+1}(u) - G_k'(u)]^2 \\
 &\geq \frac{1}{N^2} \sum_u [G_{k+1}(u) - G_{k+1}'(u)]^2 \\
 &= E_{Fk+1}^2.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$E_{Fk+1}^2 \leq E_{ok}^2. \quad (3.4)$$

Logo, de (3.3) e de (3.4) obtêm se que $E_{Fk+1}^2 \leq E_{ok}^2 \leq E_{Fk}^2$.

Isto mostra que o erro ou bem decresce ou permanece constante. Por tanto, a seqüência dos quadrados dos erros acaba sempre convergendo a algum ponto. O problema que se poderiapresentar é que o erro se estabilize em um nível alto e não em zero. Nesse caso, a seqüência gerada pelo algoritmo não converge a uma solução do nosso problema pois evidentemente ela está longe de satisfazer as restrições impostas pelos dados no domínio do objeto. Nestes casos o algoritmo chega a um ponto fixo que não é solução do problema. Quando o algoritmo acaba caindo num ponto deste tipo, ele próprio não é capaz de sair pois não consegue de maneira nenhuma mudar a fase atingida.

Na prática pode se observar que o algoritmo reduz significativamente o tamanho do erro nas primeiras iterações, enquanto que depois os progressos que ele faz são muito lentos.

Uma outra coisa observação é que a aproximação inicial da função incide na velocidade de convergência do algoritmo.

3.2.1 O Problema da Estagnação do Gerchberg-Saxton: Outros Algoritmos

Através da análise do erro do algoritmo de Gerchberg-Saxton concluímos que ele só garante a convergência a algum ponto mas não garante que esse ponto fixo seja a solução do nosso problema. Devido a isto, foram desenvolvidos outros algoritmos baseados nele para tentar resolver o problema de estagnação que apresenta o Gerchberg-Saxton num ponto fixo que não é solução, e ao mesmo tempo conseguir aumentar a velocidade de convergência, que no caso do Gerchberg-Saxton é bem lenta. Com essas ideias em mente foi desenvolvido um outro algoritmo, conhecido como '*Input-Output*'.

Fienup [6] apresenta este algoritmo para o problema da recuperação da fase *a partir de uma magnitude* com as seguintes restrições no plano da imagem: *a função é a valores reais e não negativa*.

O '*Input-Output*' só difere do Gerchberg-Saxton na operação realizada no domínio do objeto.

Os primeiros tres passos são os mesmos para ambos algoritmos: partindo de uma aproximação inicial aleatoria g , aplicar a transformada rápida de Fourier (FFT), corrigir o módulo no domínio das frequências, aplicar novamente a FFT esta vez invertindo, para obter uma nova função g' .

Estas três operações juntas podem-se considerar como um sistema não linear que toma a g como entrada, produzindo g' na saída (ver fig. (3.3)).

Assim, uma característica deste sistema é que para uma entrada g , ele produz uma saída g' que satisfaz as restrições no espaço das frequências. Obviamente, se ela também satisfizesse a restrição no plano do objeto, seria a solução do nosso problema.

O interessante será descobrir em que maneira podemos manipular a entrada para obrigar a saída a satisfazer as restrições no plano do objeto.

Em princípio, a forma em que deverá ser modificada a entrada para conseguir isto, dependerá do tipo de restrições que a função é obrigada a satisfazer.

Será preciso então analisar qual é o efeito que produz uma pequena variação na entrada sobre a saída ao passar pelo sistema não linear. Isto será muito importante na hora de selecionar a próxima entrada.

Para isto, vamos supor que $g_k(x, y)$ é a entrada da k -ésima iteração

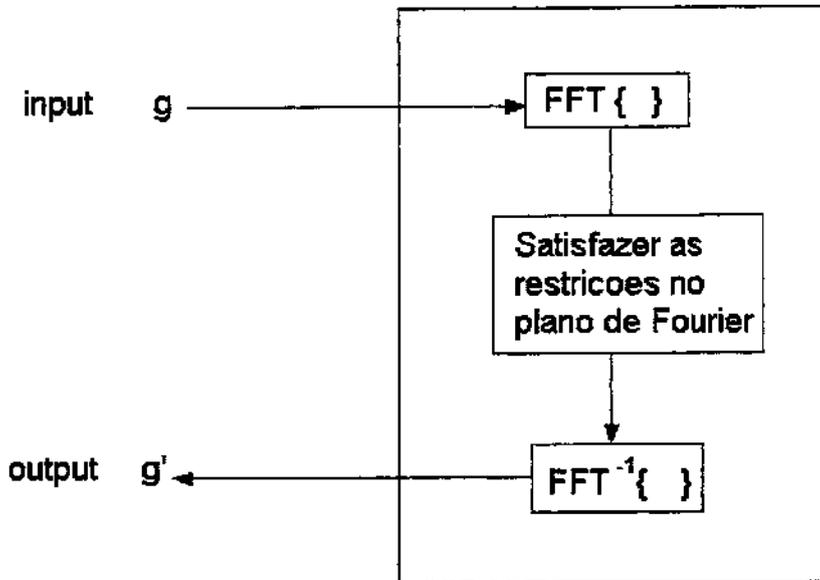


Figura 3.3: Representação do sistema não linear

que produz uma saída $g'(x, y)$. Estamos interessados em saber como uma modificação $\Delta g(x, y)$ na entrada, resultará na saída.

Consideremos então,

$$g_{k+1}(x, y) = g_k(x, y) + \Delta g(x, y).$$

Esta entrada produzirá uma saída $g'_{k+1}(x, y)$ que terá sido modificada em um $\Delta g'(x, y)$, ou seja,

$$g'_{k+1}(x, y) = g'_k(x, y) + \Delta g'(x, y).$$

Veremos que a modificação esperada na saída é quase proporcional àquela feita na entrada:

$$E[\Delta g'(x, y)] = \alpha \Delta g(x, y), \quad (3.5)$$

onde $E[.]$ denota a esperança e α é um fator que depende da estatística de $|G(u, v)|$ e de $|F(u, v)|$. Veremos também que $\Delta g'(x, y)$ têm variância não

nula, assim que na verdade seu valor não pode ser estritamente previsto.

Mostraremos isto para o caso especial em que a magnitude no espaço de Fourier é constante, i.e., $|F(u, v)| = K$.

No que segue, e a fim de simplificar os cálculos, vamos supor que g é uma função que depende só de x . Aliás, com o objetivo de obter o valor esperado de $\Delta g'(x)$, vamos supor que Δg é dada, enquanto que o ângulo $\beta(u)$ (ver figura) e a magnitude $|G(u)|$ serão consideradas como variáveis aleatórias.

Assumiremos que $\beta(u)$ é uniformemente distribuída em $(0, 2\pi)$. ΔQ e ΔG^t também serão tratadas como variáveis aleatórias pois elas dependem de β . É claro que todas estas suposições não se verificam em geral senão que são válidas só para casos especiais. Embora as experiências computacionais baseadas nestes resultados revelam que as equações obtidas são bastante precisas [4].

Para começar observemos os passos que segue g ao passar pelo sistema não linear:

$$g \rightarrow G(u) \rightarrow G'(u) \rightarrow g'.$$

Chamaremos $Q(u)$ à correção do módulo no plano de Fourier. Assim,

$$Q(u) = K \frac{G(u)}{|G(u)|}.$$

As modificações que sofrerá Δg ao passar pelo sistema não linear serão,

$$\Delta g \xrightarrow{FFT} \Delta G \rightarrow \Delta Q \xrightarrow{FFT^{-1}} \Delta g',$$

portanto

$$\Delta g' = \mathcal{F}^{-1}(\Delta Q).$$

Resulta então que para calcular $E[\Delta g']$ deveremos primeiro conhecer ΔQ .

Para isto, começaremos escrevendo as seguintes expressões que resultam de observar a figura (3.4):

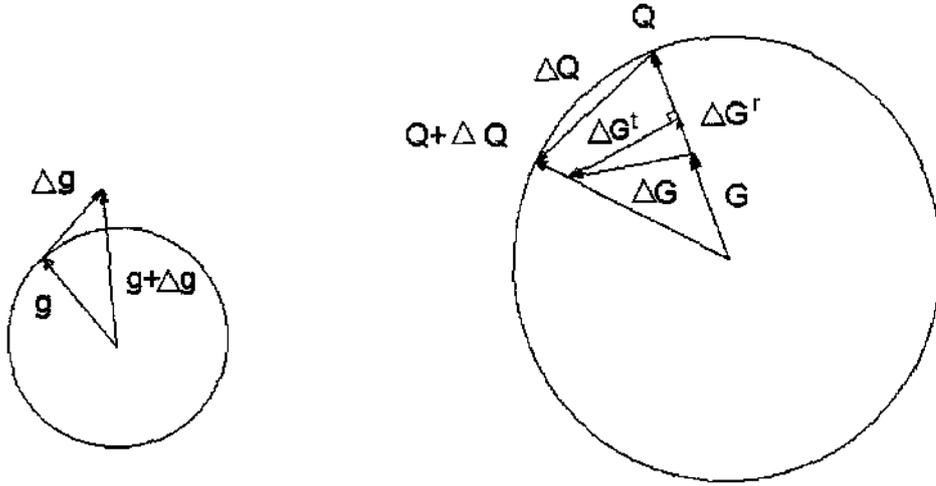


Figura 3.4: Representação da função e de seu incremento em ambos planos.

$$\Delta G(u) = \Delta G^r(u) + \Delta G^t(u),$$

onde $\Delta G^r(u) = |\Delta G^r(u)| e^{i\phi(u)}$ e $|\Delta G^r(u)| = \cos \beta |\Delta G(u)|$,

$$\Delta G^t(u) = |\Delta G^t(u)| e^{i(\phi(u) + \pi/2)} \text{ e } |\Delta G^t(u)| = \sin \beta |\Delta G(u)|,$$

Sendo β o ângulo entre G e ΔG .

Resulta então que as componentes ortogonais de $\Delta G(u)$ estão dadas por

$$\Delta G^r(u) = |\Delta G(u)| e^{i\phi(u)} \cos \beta,$$

$$\Delta G^t(u) = |\Delta G(u)| e^{i(\phi(u) + \pi/2)} \sin \beta.$$

Assim obtemos que

$$\Delta G(u) = |\Delta G(u)| e^{i(\phi + \beta)}.$$

Observamos que só a componente tangencial de $\Delta G(u)$ contribui em ΔQ :

$$\Delta Q = \Delta G^t(u) \frac{|\Delta Q|}{|\Delta G^t(u)|}.$$

Por semelhança de triângulos temos que,

$$\frac{|\Delta Q|}{|\Delta G^t(u)|} = \frac{K}{|G + \Delta G^r(u)|} \Rightarrow |\Delta Q| = K \frac{|\Delta G^t(u)|}{|G + \Delta G^r(u)|}.$$

Então para o caso em que $|\Delta G| \ll G$ resulta,

$$\Delta Q = \Delta G^t(u) \left[\frac{K}{|G(u)|} \right].$$

Como $|\Delta G(u)| = \Delta G(u) e^{-\imath(\phi+\beta)}$, temos que $\Delta G^t(u)$ será dada por ,

$$\begin{aligned} \Delta G^t(u) &= |\Delta G(u)| \sin \beta(u) e^{\imath \phi} \imath \\ &= \Delta G(u) \sin \beta(u) e^{\imath \phi} e^{-\imath(\phi+\beta)} \imath \\ &= \Delta G(u) \sin \beta(u) e^{-\imath \beta} \imath \\ &= \Delta G(u) \imath \sin \beta (\cos \beta - \imath \sin \beta) \\ &= \Delta G(u) (\sin^2 \beta + \imath \sin \beta \cos \beta). \end{aligned}$$

Lembremos que a modificação na saída é a antitransformada de Fourier de ΔQ , que como já vimos depende de $\Delta G^t(u)$. , Logo, a fim de calcular a esperança $E[\Delta g']$, será necessário então obter o valor esperado para $\Delta G^t(u)$.

Da última das igualdades anteriores resulta que,

$$E[\Delta G^t(u)] = \Delta G(u) [E(\sin^2 \beta) + \imath E(\sin \beta \cos \beta)].$$

$$\text{Como } E[\sin^2 \beta] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \beta d\beta = 1/2,$$

$$E[\sin \beta \cos \beta] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \beta \cos \beta d\beta = 0,$$

resulta que

$$E[\Delta G^t(u)] = \frac{1}{2} \Delta G(u).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
E[\Delta g'(x)] &= E[\mathcal{F}^{-1}(\Delta Q)] \\
&= \mathcal{F}^{-1}(E[\Delta Q]) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(E\left[\Delta G^t(u) \frac{K}{|G(u)|}\right]\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(E\left[\frac{K}{|G(u)|}\right] E[\Delta G^t(u)]\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(E\left[\frac{K}{|G(u)|}\right] \frac{1}{2} \Delta G(u)\right) \\
&= \frac{1}{2} E\left[\frac{K}{|G(u)|}\right] \mathcal{F}^{-1}(\Delta G(u)) \\
&= \frac{1}{2} E\left[\frac{K}{|G(u)|}\right] \Delta g(x).
\end{aligned}$$

Logo,

$$E[\Delta g'(x)] = \alpha \Delta g(x)$$

onde $\alpha = \frac{1}{2} E\left[\frac{K}{|G(u)|}\right]$.

Assim, vemos que a esperança da modificação na saída é proporcional à modificação feita na entrada, e que o fator de proporcionalidade depende da estatística do espectro $|G(u)|$. Observemos também que no caso em que o espectro já estiver bem próximo do valor dado (neste caso K), então $\alpha \approx 1/2$.

Notemos que a variância está dada por [4],

$$\begin{aligned}
E[|\Delta g'(x)|^2] - [E(\Delta g'(x))]^2 &\approx \frac{1}{4} \left\{ 2 E\left(\frac{K^2}{|G|^2}\right) - \left[E\left(\frac{K}{|G|}\right)\right]^2 \right\} \frac{1}{A} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta g(x)|^2 dx, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

onde A denota o área da imagem.

Portanto, por ser a variância de $\Delta g'(x)$ proporcional ao quadrado da integral da modificação produzida na função de entrada, o 'nível de predição'

de $\Delta g'(x)$ decrescerá notoriamente se as modificações feitas na entrada são significativas. Essa diferença entre $\Delta g'(x)$ e $E[\Delta g'(x)]$, têm a ver com a presença do ruído adicional produzido na saída por aquelas mudanças feitas na entrada.

Para o caso de um objeto discreto dois dimensional que se encontra já próximo do nível de espectro K , as equações (3.5) e (3.6) se reduzem a:

$$E[\Delta g'_{mn}] \approx 1/2 \Delta g_{mn},$$

$$E[|\Delta g'_{mn}|^2] - [E(\Delta g'_{mn})]^2 \approx \frac{1}{4N^2} \sum_{j,k=0}^{N-1} |\Delta g_{jk}|^2,$$

onde $g = (g_{jk})$ com $j, k = 0, 1, \dots, N-1$.

Estas equações mostraram ser bastante precisas em testes computacionais realizados para pequenas variações feitas na entrada [4].

Voltamos agora ao problema da escolha da próxima entrada.

Acabamos de ver que, para o caso especial que estamos considerando, uma pequena modificação na entrada, ao passar pelo sistema não linear, produz uma modificação proporcional na saída. A pesar que para o caso geral a natureza exata da variação na saída em função daquela feita na entrada não tem sido suficientemente clarificada, os métodos iterativos que apresentaremos a continuação estão baseados no suposto de que o que foi feito vale para o caso geral.

Vamos supor então que a saída g' não satisfaz as restrições no plano do objeto, mas que uma modificação dela se as satisfaz. As equações (3.5) e (3.6) dão uma ideia sobre como determinar a modificação Δg a ser feita na entrada para que resulte a mudança desejada na saída. A escolha apropriada será,

$$\Delta g = \beta \Delta g_d$$

com $\beta = 1/\alpha$, pois a modificação resultante na saída estará dada por $\Delta g' = \alpha \beta \Delta g_d$, que é o que estávamos desejando obter.

Assim, se nos encontramos na k -ésima iteração, a nossa próxima entrada resulta,

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) + \beta \Delta g_k(x).$$

Esta equação representa a estrutura geral dos denominados métodos do tipo *input-output*.

Apresentaremos agora algumas variantes para a escolha da próxima entrada para o problema de uma magnitude para o caso em que as restrições no plano da imagem sejam a não negatividade da função a valores reais f .

Como já vimos antes, a saída g_k' satisfaz as condições impostas no espaço de Fourier; agora para este problema, a modificação desejada a ser produzida na saída é aquela que faz com que a função na saída seja positiva. Ou seja, se denotamos com γ ao conjunto onde as restrições sobre a imagem não são satisfeitas, i.e., $\gamma = \{ x / g_k' < 0 \}$, a modificação que se faz na próxima iteração estará dada por

$$\Delta g_k(x) = \begin{cases} -g_k'(x) & \text{se } x \in \gamma, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, na etapa seguinte teremos

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g_k(x) - \beta g_k'(x) & \text{se } x \in \gamma, \\ g_k(x) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este método se conhece com o nome de '*Input-output*'.

Continuando dentro deste esquema, uma outra opção interessante resulta de observar uma das características do sistema não linear envolvido no processo iterativo. Notemos que quando a saída g_k' , é usada como entrada, ela passa por este sistema sem sofrer modificação alguma. Um novo método possível resultará então se consideramos o anterior mas com a saída g_k' usada agora como entrada. Neste caso a próxima iteração estará dada por,

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g_k'(x) - \beta g_k'(x) & \text{se } x \in \gamma, \\ g_k'(x) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este método se conhece com o nome de 'output-output'.

Observemos que se na fórmula anterior tomamos $\beta = 1$, o método se reduz a versão de Gerchberg-Saxton para o problema de uma magnitude. Neste caso o método é conhecido com o nome de 'error reduction'.

De uma combinação entre os dois algoritmos expostos anteriormente, resulta o chamado 'híbrido input-output'. Neste caso a iteração é a seguinte,

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g_k(x) - \beta g'_k(x) & \text{se } x \in \gamma, \\ g'_k(x) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este novo método é um dos mais eficientes para o problema de uma magnitude. Ele tem uma característica interessante. Pode-se provar que teoricamente, naqueles casos em que o *híbrido* chega a um ponto fixo g_k , o g_{k+1} é a solução do problema.

Para ver isto vamos supor então que $g_{k+1} = g_k$. Veremos que g'_k é solução do problema da recuperação da fase para o caso de uma magnitude. Observando a definição da próxima iterada temos que

$$\text{se } x \notin \gamma \Rightarrow g_k(x) = g'_k(x),$$

$$\text{se } x \in \gamma \Rightarrow g_k(x) = g_k(x) - \beta g'_k(x).$$

Desta última igualdade vemos que a saída $g'_k(x)$ não pode ser negativa. Então, $g'_k(x)$ satisfaz as restrições no plano da imagem. Além do mais, por ser $g'_k(x)$ uma saída do sistema não linear, as condições impostas no plano de Fourier já são satisfeitas e portanto ela é solução do problema.

Evidentemente tanto no enfoque 'input-output' quanto no 'output-output', o erro no plano de Fourier deixa de ser significativo. Agora só faz sentido considerar o erro no plano do objeto. Além disso, também vale a pena mencionar que para estes métodos o erro quadrático já não é mais necessariamente decrescente em cada iteração. Porém, o desempenho deles na prática em geral

é bem melhor do que o 'error-reduction'.

Agora nos perguntamos se será possível fazer uma adaptação das versões *input-output* e *output-output* anteriormente expostas, para o problema da recuperação da fase a partir das duas magnitudes. Qual será a escolha apropriada para $\Delta g_k(x)$ neste caso?.

3.2.2 Variantes Input-Output para o Problema das Duas Magnitudes

No que segue apresentaremos algumas variantes para a escolha de $\Delta g_k(x)$ para o problema das duas magnitudes. Assim como no caso de uma magnitude, o que se pretende é que essa modificação feita na entrada seja tal que a nova iterada g'_{k+1} satisfaça a restrição no plano do objeto. Para nosso problema, essa restrição é que a amplitude deve ser igual à dada. Assim, se

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) + \beta \Delta g_k(x),$$

depois de passar pelo sistema não linear e considerando $\beta = \alpha^{-1}$ temos que,

$$g'_{k+1}(x) = g'_k(x) + \Delta g_k(x).$$

Satisfazer as restrições no espaço do objeto significa que

$$|f(x)| = |g'_k(x) + \Delta g_k(x)|,$$

A menor mudança que faz com que isto último seja satisfeito é aquela que resulta de considerar $\Delta g_k(x)$ na mesma direção que a função da saída. Neste caso obtemos

$$|g'_k(x)| + |\Delta g_k(x)| = |f(x)|,$$

e portanto

$$\Delta g_k(x) = \left(|f(x)| - |g'_k(x)| \right) \frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|}.$$

Assim, um dos possíveis métodos iterativos dentro do esquema 'input-output' para o problema de duas magnitudes toma a seguinte forma,

Variante GSIO3:

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) + \beta \left| |f(x)| - |g'_k(x)| \right| \frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|}. \quad (3.7)$$

Chamaremos método IO1 à iteração dada pela equação (3.7).

A versão 'output-output' para este Δg_k está dada por,

$$g_{k+1}(x) = g'_k(x) + \beta \left| |f(x)| - |g'_k(x)| \right| \frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|}. \quad (3.8)$$

Fienup propõe, baseado no método iterativo de código de fase [5], usar um Δg_k que rote o ângulo de fase da entrada em direção ao ângulo de fase da saída. Isto é,

$$\Delta g_k(x) = \left[\frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|} - \frac{g_k(x)}{|g_k(x)|} \right] |f(x)| + \left| |f(x)| - |g'_k(x)| \right| \frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|} |f(x)|,$$

ou equivalentemente,

$$\Delta g_k(x) = 2 \frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|} |f(x)| - g'_k(x) - \frac{g_k(x)}{|g_k(x)|} |f(x)|.$$

Esta escolha para $\Delta g_k(x)$ da origem à **variante GSIO2:**

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) + \beta \left[2 \frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|} |f(x)| - g'_k(x) - \frac{g_k(x)}{|g_k(x)|} |f(x)| \right]. \quad (3.9)$$

A respectiva versão 'output-output' para esta escolha é dada por:

$$g_{k+1}(x) = g'_k(x) + \beta \left[2 \frac{g'_k(x)}{|g'_k(x)|} |f(x)| - g'_k(x) - \frac{g_k(x)}{|g_k(x)|} |f(x)| \right]. \quad (3.10)$$

Observamos que em pontos de estagnação de *Gerchberg-Saxton*, o erro se estabiliza em níveis altos, as fases das sucessivas iteradas quase não diferem entre elas e acabam convergendo a uma fase que não é a solução. Baseados neste fato, nós propusemos usar um Δg_k composto de dois termos: um deles

corrige o módulo da saída entanto que o outro rota o ângulo da entrada na direção da reflexão da saída através da entrada. Δg_k toma então a seguinte forma:

$$\Delta g_k(x) = [e^{i2\theta_k'(x)} - e^{i\theta_k(x)}] |f(x)| + ||f(x)| - |g'_k(x)|| e^{i\theta_k'(x)},$$

onde $\theta'_k(x)$ e $\theta_k(x)$ correspondem as fases de g_k e g'_k respectivamente. Esta escolha para Δg_k tem mostrado um bom desempenho na prática.

As versões *inputp-output* e *output-output* para esta escolha proposta por nós, são

Variante GSIO1:

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) + \beta \{ [e^{i2\theta_k'(x)} - e^{i\theta_k(x)}] |f(x)| + ||f(x)| - |g'_k(x)|| e^{i\theta_k'(x)} \} \quad (3.11)$$

$$g_{k+1}(x) = g'_k(x) + \beta \{ [e^{i2\theta_k'(x)} - e^{i\theta_k(x)}] |f(x)| + ||f(x)| - |g'_k(x)|| e^{i\theta_k'(x)} \} \quad (3.12)$$

Só para o método IO1 pode-se provar que quando a seqüência gerada pelo algoritmo chega a um ponto fixo, a saída que o sistema não linear produz para este ponto fixo, é solução do problema. Pois,

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) \Rightarrow ||f(x)| - |g'_k(x)|| g'_k(x) / |g'_k(x)| = 0.$$

Portanto, pelo fato de estar considerando funções a valores complexos, te-

mos que $|g'_k| = |f|$. Como g'_k já satisfaz as restrições no espaço de Fourier, resulta que satisfaz as restrições nos dois domínios. Logo, ela é solução do problema.

Como vimos, todos estes métodos estão baseados na equação (3.5) . É claro que uma compreensão mais profunda sobre a relação existente entre a modificação feita na entrada e aquela que resulta na saída redundará no

desenvolvimento de métodos iterativos de melhor desempenho.

Assim como para o caso do problema de uma magnitude, para estes novos métodos não é possível garantir o decréscimo do erro em cada iteração, mas na prática eles mostram resultados superiores a os provistos por *Gerchberg-Saxton*. As primeiras dos escolhas de Δg_k em geral conseguem acelerar a convergência para a solução, entanto que a última escolha em geral consegue chegar a uma solução naqueles casos em que o algoritmo *Gerchberg-Saxton* se estagna.

3.3 O Método de Máxima Descida

Consideremos a função que mede o quadrado da distância entre a magnitude da transformada de Fourier de uma função $g(x)$ e os dados do problema no plano de difração. Isto é,

$$B_\theta = \frac{1}{N^2} \sum_u [|G(u)| - |F(u)|]^2,$$

onde $G(u)$ é a transformada de Fourier de $g(x) = |f(x)| e^{i\theta}$ e B é uma função que depende da fase $\theta(x)$.

O problema da recuperação da fase se reduz então a localizar o zero da função não linear B_θ .

Partindo de uma aproximação inicial do zero, realizaremos sucessivos passos na direção do gradiente.

Para isto calculemos a derivada parcial de B com respeito a $\theta(x)$:

$$\partial_\theta B = \frac{\partial B}{\partial \theta(x)} = \frac{2}{N^2} \sum_u [|G(u)| - |F(u)|] \frac{\partial |G(u)|}{\partial \theta(x)}.$$

Como $|G(u)|^2 = G^*(u) G(u)$ temos que,

$$\frac{\partial |G(u)|}{\partial \theta(x)} = \frac{G(u) \partial_\theta G(u)^* + G^*(u) \partial_\theta G(u)}{2|G(u)|}.$$

Precisamos então obter $\partial_\theta G(u)$.

Lembremos que $G(u) = \sum_y |f(y)| e^{-2\pi i u y/N}$, então

$$\frac{\partial G}{\partial \theta(x)} = i |f(x)| e^{-2\pi i u x/N} e^{i\theta(x)} = i g(x) e^{-2\pi i u x/N},$$

$$\frac{\partial |G(u)|}{\partial \theta(x)} = \{G(u) (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N} + [G(u) (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N}]^*\} \frac{1}{2|G(u)|}.$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta B &= \frac{2}{N^2} \sum_u \{ |G(u)| - |F(u)| \} [G(u) (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N} + \\ &\quad + [G(u) (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N}]^*] \frac{1}{2|G(u)|} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_u \{ G(u) (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N} - \frac{|F(u)| |G(u)|}{|G(u)|} (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N} + \\ &\quad + [G(u) (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N} - \frac{|F(u)| |G(u)|}{|G(u)|} (-i) g^*(x) e^{2\pi i u x/N}]^* \} \\ &= \frac{1}{N^2} \{ [(-i) g^*(x) (\sum_u G(u) e^{2\pi i u x/N} - G'(u) e^{2\pi i u x/N})] + \\ &\quad + [(-i) g^*(x) (\sum_u G(u) e^{2\pi i u x/N} - G'(u) e^{2\pi i u x/N})]^* \} \\ &= [(-i) g^*(x) (g(x) - g'(x))] + [(-i) g^*(x) (g(x) - g'(x))]^* \\ &= [i g^*(x) (g'(x) - g(x))] + [i g^*(x) (g'(x) - g(x))]^* \\ &= i g^*(x) g'(x) - i g(x) g'^*(x) \\ &= -2 \operatorname{Im}(g^*(x) g'(x)) \\ &= -2 |f(x)| |g(x)| \sin[\theta'(x) - \theta(x)] \end{aligned}$$

Logo,

$$\partial_\theta B = -2 |f(x)| |g(x)| \sin[\theta'(x) - \theta(x)]. \quad (3.13)$$

Notemos que dados $|f(x)|$ e $|F(u)|$, supondo que estamos na k -ésima iteração e que portanto conhecemos a fase $\theta_k(x)$ nessa etapa, para calcular o gradiente precisamos construir $g_k(x) = |f(x)| e^{i\theta_k(x)}$ e $g_k'(x) = \mathcal{F}^{-1}(G_k'(u))$.

Fazendo uma aproximação linear de B em θ_k :

$$B \approx B_k + \sum_x \partial_\theta B(\theta_k(x)) [\theta(x) - \theta_k(x)].$$

Daqui vemos que B se anula para

$$\theta(x) - \theta_k(x) = -\frac{B_k \partial_\theta B_k}{\sum_y (\partial_\theta B_k)^2},$$

portanto a nova fase na iteração seguinte estará dada por:

$$\theta_{k+1}(x) = \theta_k(x) + h_k d_k,$$

onde $d_k = -\frac{B_k \partial_\theta B_k}{\sum_y (\partial_\theta B_k)^2}$ e o passo nessa direcção é dado por h_k .

O processo iterativo é repetido até ser a diferença entre dois iteradas consecutivas menor a uma tolerância estabelecida.

Reescrevamos a expressão do denominador de d_k ,

$$\sum_y (\partial_\theta B_k)^2 = 4 \sum_y |f(y)|^2 |g_k'(y)|^2 \sin^2[\theta_k'(y) - \theta_k(y)].$$

Portanto,

$$\theta(x) - \theta_k(x) = \frac{B_k |f(x)| |g_k'(y)| \sin |\theta_k'(x) - \theta_k(x)|}{2 \sum_y |f(y)|^2 |g_k'(y)|^2 \sin^2[\theta_k'(y) - \theta_k(y)]}.$$

Assim, em cada iteração do método do gradiente devemos realizar os mesmos primeiros 3 pasos de *Gerchberg-Saxton* a fim de calcular a nova direcção.

No caso que o erro esteja decrescendo muito devagar vale que,

$$\sin [\theta_k'(x) - \theta_k(x)] \approx \theta_k'(x) - \theta_k(x)$$

Neste caso, a mudança produzida na fase é proporcional a $[\theta(x) - \theta_k(x)]$ que não é outra que aquela sugerida por *Gerchberg e Saxton*.

Da análise anterior resulta então que para o problema das duas magnitudes, o método do gradiente da uma nova fase que vai na direção de *Gerchberg-Saxton*, só que usa outro passo. Vamos tentar ver qual é esse passo supondo que a f é uma constante independente de x , que $\theta_k'(x) - \theta_k(x) \approx 0$ e que o B é pequeno.

Sob estas condições resulta que:

$$\theta(x) - \theta_k(x) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{B_k^r}{B_k^t} \right) (\theta_k'(x) - \theta_k(x)),$$

onde $B_k^r = \sum_x [|f(x)| - |g_k'(x)|]^2$ e $B_k^t = \sum_x |g_k'(x)|^2 [\theta_k'(x) - \theta_k(x)]^2$ representam os erros radial e tangencial respectivamente.

Notar que a componente radial não é outra coisa que o erro quadrado no plano do objeto para ' $g_k'(x)$ ' e é igual a E_{ok}^2 .

$$B_k^t \approx B_k - B_k^r = E_{Fk}^2 - E_{ok}^2 \ll E_{ok}^2 = B_k^r$$

$$\Rightarrow B_k^t \ll B_k^r \text{ portanto } \frac{1}{2} \left(1 + \frac{B_k^r}{B_k^t} \right) \gg 1.$$

Isto indica que o passo deveria ser muito maior do que 1. Então, quando *Gerchberg-Saxton* está estagnado ou convergindo lentamente, o método do gradiente sugere que devemos dar um passo maior.

3.3.1 O Problema dos Mínimos Locais

Para o problema de uma magnitude, pode-se provar [6] que o algoritmo de *Gerchberg-Saxton*, equivale a aplicar o método de máxima descida com passo duplo. Entanto, segundo o anteriormente exposto, vimos que para o problema das duas magnitudes, a relação existente entre *Gerchberg-Saxton* e o método do gradiente não é exactamente a mesma. Neste caso, a primeira diferença que observamos é que o erro é minimizado com respeito à fase e não respeito à função estimada já que agora ela é complexa. Depois concluímos que a derivada do erro vai numa direção que é aproximadamente a da nova

fase provida por *Gerchberg-Saxton*. Porém, é possível provar que o método das projeções para o caso das duas magnitudes ainda corresponde a minimizar o erro quadrático, só que através do método do *gradiente condicionado*. Segundo este método a nova iterada para a fase é obtida minimizando a parte linear da variação do erro na etapa anterior. Se,

$$B_k = \frac{1}{N^2} \sum_u [|G_k(u)| - |F(u)|]^2,$$

então a variação do erro está dada por [9]:

$$\Delta B = -2 \operatorname{Re} \left[\sum_x g'_k(x)^* \Delta g_k(x) \right].$$

Logo, a fase na iteração $k + 1$ é aquela que minimiza a ΔB ,

$$\begin{aligned} \theta_{k+1}^* &= \operatorname{argmin} \Delta B \\ &= \operatorname{argmin} \left[-2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_x g'_k(x)^* |g_k(x)| e^{i(\theta_{k+1} - \theta_k)} \right\} \right] \\ &= \operatorname{argmin} \left[2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_x |g'_k(x)| |g_k(x)| e^{i(\theta_k - \theta'_{k+1})} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_x |g'_k(x)| |g_k(x)| e^{i(\theta_{k+1} - \theta'_k)} \right\} \right] \\ &= \operatorname{argmax} \left[2 \sum_x |g'_k(x)| |g_k(x)| \cos(\theta_{k+1} - \theta'_k) \right]. \end{aligned}$$

O valor máximo é obtido quando $\cos(\theta_{k+1} - \theta_k) = 1$ e portanto $\theta_{k+1}^* = \theta_k$. Esta nova fase é a mesma que a escolhida pelo algoritmo de *Gerchberg-Saxton* para a próxima iteração.

Notemos que o método da máxima descida e o método do gradiente condicionado dão resultados muito similares quando nos encontramos perto de um mínimo.

No processo de minimização de funcionais que são altamente não lineais, corremos um alto risco de cair em pontos que correspondem a mínimos locais. A presença destes mínimos locais faz com que em algumas ocasiões o algoritmo de Gerchberg-Saxton acabe estagnado em pontos fixos que não são solução do problema.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

4.1 Considerações Gerais

As distintas variantes dos métodos do tipo *Input-Output* e *Output-Output* para o problema da recuperação da fase a partir de duas magnitudes apresentados no capítulo anterior foram implementadas computacionalmente e comparados seus desempenhos.

Os dados do problema sobre os quais se aplicaram os métodos iterativos foram gerados computacionalmente. Estes correspondem a problemas um e dois dimensionais. Para comparar os métodos usamos principalmente os exemplos unidimensionais, pois eles brindam maior claridade na hora de analisar os resultados. As figuras (4.1) e (4.2) mostram algumas das funções que foram usadas para testar os algoritmos. Elas correspondem a:

$$f(x) = r(x) e^{i 30 \pi x^2}, \quad (4.1)$$

$$f(x) = r(x/2) e^{i(2x-0.5)}, \quad (4.2)$$

$$f(x) = r(x) e^{-x^2} e^{i\pi/4(2x^4-6x^3+1)}, \quad (4.3)$$

$$f(x) = r(x) e^{i\pi/4 \sin(\pi 30 x)}. \quad (4.4)$$

Onde a função

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -0.25 < x < 0.25, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notemos que já na entrada dos dados, mesmo que eles estejam gerados computacionalmente e não provenham de medições de algum modelo real, a

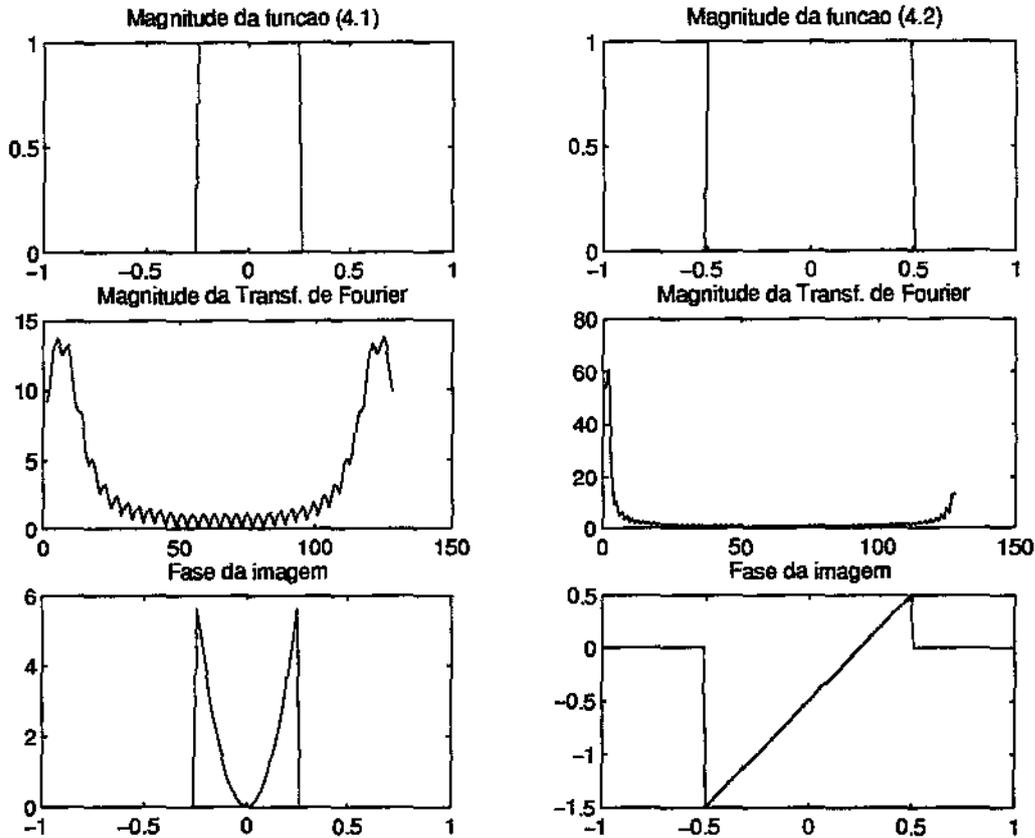


Figura 4.1: Cada coluna mostra a Amplitude da função objeto, da transformada de Fourier e a fase do objeto.

função estará representada de maneira distorcida em ao menos algum dos dois domínios devido a que teoricamente ela deve ser de duração infinita em pelo menos algum de eles. Porém, naquele domínio onde a função é de duração infinita, somente num conjunto finito ela é significativamente diferente de zero.

Os dados correspondentes às magnitudes em ambos planos foram amostrados sobre um conjunto de 128 pontos equidistantes, mas o desempenho relativo dos algoritmos não difere dos resultados aqui apresentados para amostras de 64 ou 256 pontos.

Vamos nos referir ao algoritmo de Gerchberg-Saxton como GSAXB e às variantes do tipo *Output-Output* como GSIO1, GSIO2 e GSIO3. Estas variantes correspondem aos métodos iterativos dados pelas fórmulas (3.12), (3.10) e (3.8) do capítulo anterior. Em todos os casos, as variantes *Output-Output* apresentam um melhor desempenho na prática que as correspondentes

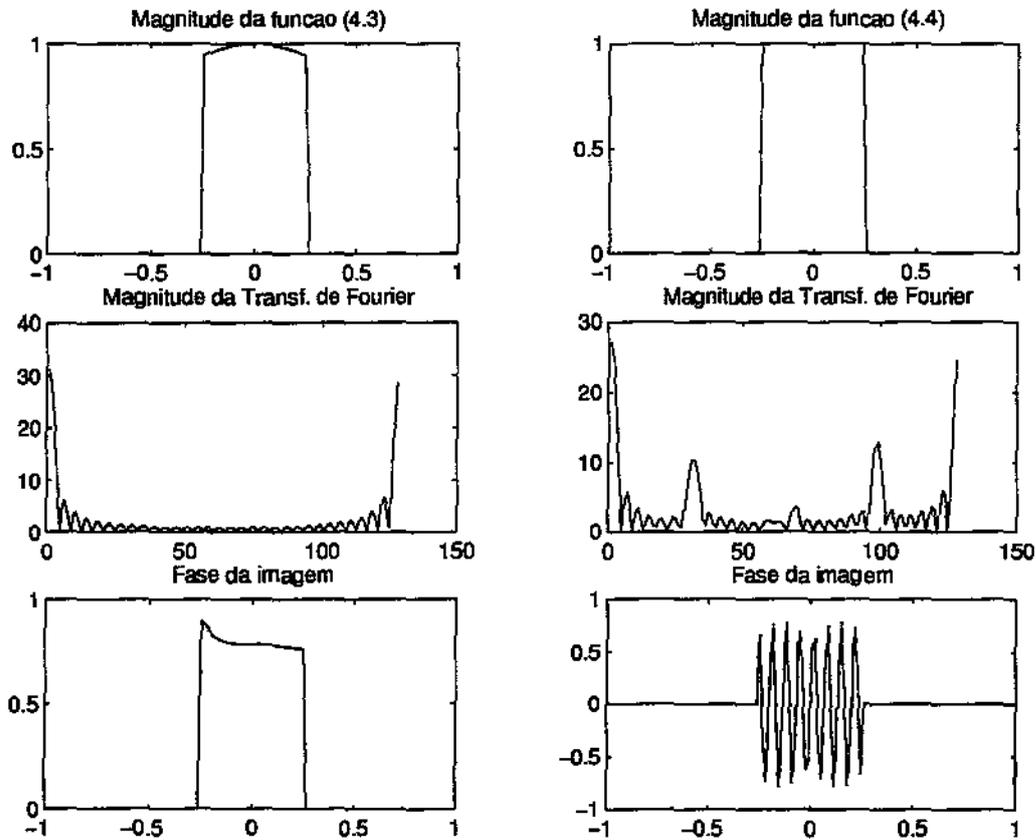


Figura 4.2: Cada coluna mostra a Amplitude da função objeto, da transformada de Fourier e a fase do objeto.

versões *Input-Output*.

A métrica usada para medir o erro da reconstrução destas modificações de *Gerchberg-Saxton* na k -ésima iteração está dada pelo erro medio quadrático no domínio do objeto:

$$E_k = \frac{\sum_x [|f(x)| - |g_k'(x)|]^2}{\sum_x |f(x)|^2}.$$

Assim, E_k mede a proximidade do módulo da saída aos dados no espaço do objeto.

Em todos os algoritmos, a iteração detem-se quando o erro relativo é suficientemente pequeno ou o número de iterações supera um limite estabelecido. No caso em que o erro seja menor a uma tolerância dada, consideramos que uma boa aproximação á solução foi encontrada pois ela satisfaz as restrições em ambos domínios (para os Output-Output) no nível dessa tolerância.

A convergência da iteração para a solução, para todos estes algoritmos, depende tanto da escolha do parâmetro β quanto da escolha da fase inicial. Esta última incide notoriamente na velocidade da convergência dos algoritmos. Uma fase que faz com que o método das projeções falhe quando as distribuições de intensidades são centrosimétricas, é a fase constante. Neste caso a distribuição de fases não muda ao passar de um plano ao outro e assim, o método não progride. Em geral se trabalha com uma seqüência aleatória de números entre 0 e π para gerar a fase inicial destes métodos iterativos.

Para os três algoritmos, as iterações dadas pelos métodos do tipo *Output-Output* que já mencionamos, foram seguidas de um grupo de iterações do algoritmo GSAXB devido a que este último apresenta um comportamento muito estável e converge a um erro menor.

Notemos que o fato dos algoritmos ser rápidos computacionalmente se deve ao uso da Transformada rápida de Fourier (FFT) para realizar as transformações. Isto reduz o tempo requerido para calcular as transformadas de Fourier discretas a $(\log_2 N)/N$, onde N é o número de pontos usados pela transformação.

4.2 Análise dos Resultados

Os experimentos numéricos mostram que naqueles casos em que GSAXB converge para a solução, o erro é reduzido rapidamente nas primeiras iterações para logo decrescer com uma taxa muito menor. A figura (4.3) exemplifica esta situação para a função da fase quadrática. Observamos que nas primeiras 5 iterações o erro diminui em mais que um 30% , entanto que para ser reduzido mais um 20% ele precisa de quase 35 iterações.

Sabemos que para Gerchberg-Saxton o erro quadrático é monótono decrescente e portanto ele converge, mas não sempre converge para zero. Essa convergência do erro para valores diferentes de zero se reflete na estagnação do algoritmo em pontos que se projetam sobre eles mesmos mas que não satisfazem as restrições do problema. Esta situação se manifesta com maior força para os dados da função objeto (4.1). Nas simulações realizadas observamos que para esta função há um grande número de fases iniciais que produzem a estagnação da iteração do algoritmo Gerchberg-Saxton. A tabela

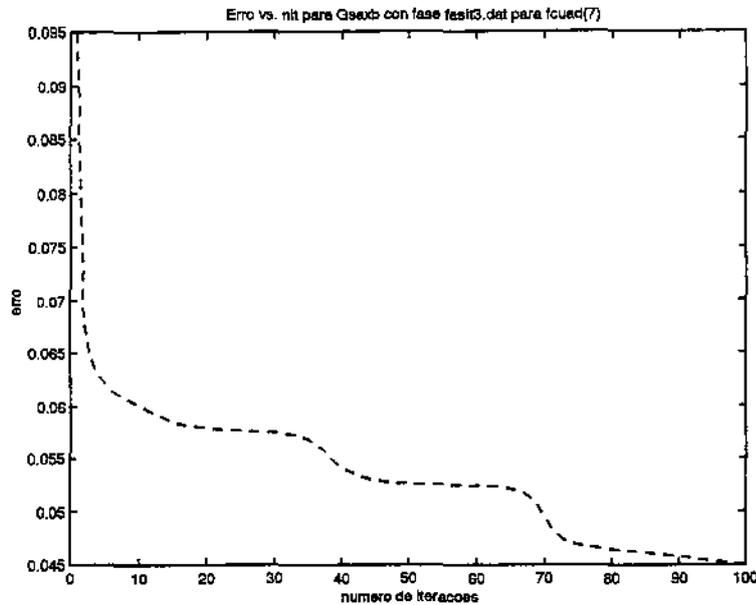


Figura 4.3: Decréscimo do erro do algoritmo Gerchberg-Saxton

(4.1) mostra os resultados obtidos com GSAXB para um grupo de 10 fases iniciais aleatórias usando os dados correspondentes à função (4.1) e para um número máximo de 500 iterações.

No entanto, para as outras funções, o comportamento de GSAXB mostra resultados muito melhores. Ele converge em poucas iterações para quase todas as fases iniciais. A tabela (4.2) mostra como para a função (4.3) o número de iterações requerido por GSAXB para obter a fase aproximada com um erro relativo menor que 10^{-3} em nenhum caso supera as 13 iterações. Na figura (4.4) se mostra a solução obtida por este método para a função (4.3) com um erro relativo menor que 10^{-4} . Na figura (4.5) pode-se apreciar que a função obtida pelo método corresponde à solução multiplicada por um factor de fase constante.

GSAXB foi rodado um grande número de vezes para a função de fase quadrática, que é a que apresenta maiores problemas de estagnação, para grupos de 40 fases iniciais. Os testes mostram que em geral este algoritmo acaba-se estagnando num 80% dos casos. Baseados nestes resultados e a fim de avaliar o desempenho dos novos algoritmos frente aos problemas de estagnação, as modificações de GSAXB foram testadas principalmente para

<i>nit</i>	<i>erro GSAXB</i>
500	0.02691
500	0.03325
500	0.04135
500	0.02948
500	0.02474
500	0.02474
500	0.03259
500	0.03325
500	0.02474
500	0.02474

Tabela 4.1: Erro quadrático obtido por GSAXB para a função (4.1) em 500 iterações para um conjunto de 10 fases iniciais.

<i>nit</i>	<i>erro GSAXB</i>
13	0.00093
11	0.00097
12	0.00090
12	0.00096
12	0.00092
10	0.00096
13	0.00088
13	0.00088
13	0.00089
12	0.00099

Tabela 4.2: Erro quadrático obtido por GSAXB para a função (4.3) para um conjunto de 10 fases iniciais.

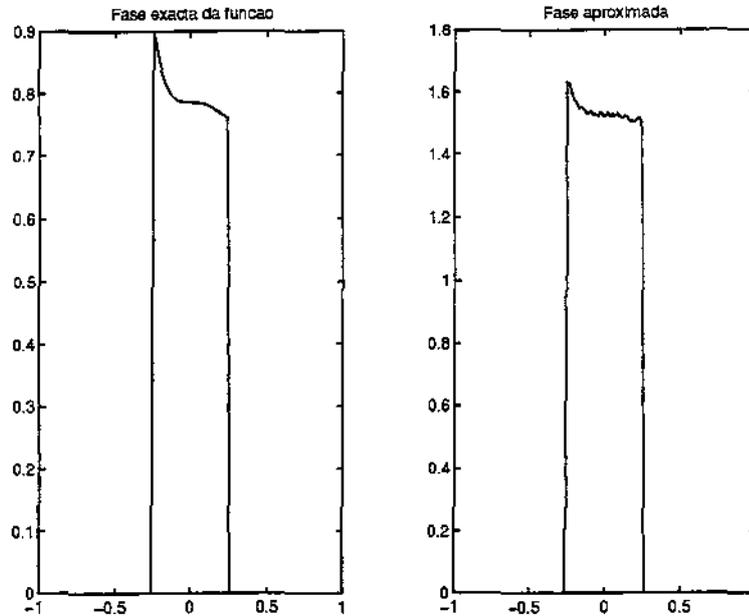


Figura 4.4: Fase aproximada obtida com 43 iterações de GSAXB para a função (4.3)

aquelas funções que produziram estagnação em GSAXB. A fim de poder comparar os métodos, eles foram rodados para estas funções e sobre os mesmos conjuntos de fases iniciais com que foi rodado GSAXB. Os parâmetros β usados em cada um destes algoritmos foram escolhidos dentro de um rango de valores determinado numericamente para cada um deles com o objetivo de otimizar seus desempenhos. Ese rango de valores resultó ser $[1.5, 2]$ para GSIO2 e GSIO3, e $[0.9, 1.4]$ para GSIO1. Estes intervalos podem ser maiores para funções de comportamento mais estável. As figuras (4.6) e (4.7) mostram um exemplo do comportamento do erro quadrático para os distintos algoritmos em função do parâmetro β . Foram feitas um conjunto de 75 iterações de cada um deles, seguidas por outro conjunto de 45 iterações de Gerchberg-Saxton. Todos os resultados que seguem a continuação foram obtidos com $\beta = 1.1$ para GSIO1, $\beta = 1.6$ para GSIO2 e $\beta = 1.5$ para GSIO3.

As tabelas (4.3), (4.5) e (4.6) mostram os níveis de erro obtidos por cada um destes métodos para a função (4.1) e com o mesmo grupo de fases iniciais

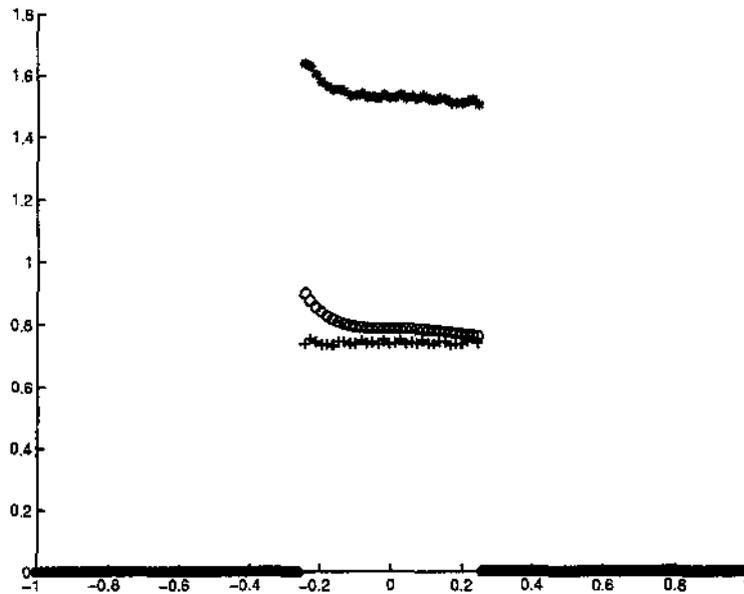


Figura 4.5: ‘*’ corresponde a fase aproximada, ‘o’ a exacta e ‘+’ a seu diferença. Vemos que na solução aproximada temos um deslocamento de 0.74 radianes na media.

em cada caso. A iteração é detida quando o número de iterações (‘nit’) é superior a um limite prefixado ou quando o erro relativo é menor que 10^{-3} .

Observamos então que em geral acontece que para aquelas fases iniciais onde GSAXB converge para a solução, o algoritmo GSIO3 acelera notoriamente a convergência, mas nas fases para as quais GSAXB chega a pontos fixos que não são solução, ele quase não apresenta progressos significativos. Praticamente não consegue convergir nos pontos em que GSAXB se estagna.

Um comportamento similar apresenta GSIO2. Só que neste caso a convergência não resulta tão acelerada quanto a de GSIO3. Porém a vantagem deste algoritmo sobre GSIO3 é que agora GSIO2 exhibe um melhor desempenho em algumas fases iniciais que produziram estagnação em GSAXB.

Esta característica também é observada naqueles dados para os quais GSAXB não apresenta estagnação. A tabela (4.4) mostra os resultados atingidos por estes métodos iterativos para a função (4.3) sobre um conjunto de 10 fases iniciais.

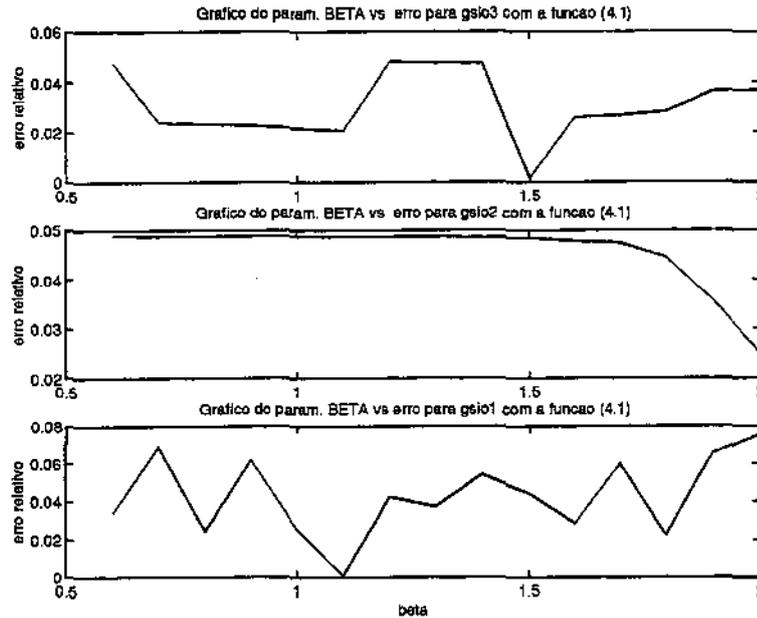


Figura 4.6: Comportamento dos algoritmos GSIO1, GSIO2 e GSIO3 para diferentes valores do parâmetro β . A figura mostra o erro atingido para a função (4.1) depois de 120 iterações.

O comportamento exibido pelo algoritmo GSIO1 é um pouco diferente ao dos dois anteriores. Ele em geral não consegue um bom desempenho naquelas fases iniciais para as quais GSAXB converge com maior rapidez para a solução. Porém a vantagem que ele apresenta sobre os outros algoritmos consiste em sua maior eficácia na hora de obter convergência para aqueles casos em que o método das projeções se estagna.

Os múltiplos testes numéricos revelam que GSIO1 consegue convergir no 35% das vezes em que GSAXB se estagna, entanto que para os outros algoritmos esta porcentagem é menor: um 12% para GSIO2 e um 10% para GSIO3. Um outro aspecto interessante é que quando GSIO1 converge para a solução, num 80% dos casos esta convergência se da sobre fases que produziram estagnação em GSAXB. Para GSIO2 isto acontece num 40% e num 30% para GSIO3.

Além destas variantes, e a fim de obter um algoritmo de melhor desempenho, se combinaram ciclos de iterações feitas com GSIO3 seguidas de um grupo de iterações com GSIO1 para o caso em que o erro relativo não tenha

<i>nit</i>	<i>erro GSAXB</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO1</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO2</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO3</i>
500	0.02691	500	0.01959	500	0.02691	500	0.02661
500	0.03325	500	0.02781	500	0.02691	500	0.03538
500	0.04135	500	0.02781	500	0.02691	500	0.03538
500	0.02948	500	0.02781	500	0.02691	500	0.03538
500	0.02474	119	0.00089	500	0.01959	500	0.01959
500	0.02474	500	0.02660	500	0.03661	500	0.01959
500	0.03259	184	0.00091	500	0.02691	500	0.03399
500	0.03325	500	0.01959	500	0.02316	500	0.03538
500	0.02474	108	0.00081	500	0.02316	500	0.01959
500	0.02474	122	0.00080	500	0.01959	500	0.02252

Tabela 4.3: Resultados obtidos com GSAXB para a função (4.1) sobre um conjunto de 10 fases iniciais distribuídas aleatoriamente em $[0, \pi]$.

<i>nit</i>	<i>erro GSAXB</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO1</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO2</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO3</i>
13	0.00093	80	0.00098	77	0.00085	5	0.00062
11	0.00097	4	0.00065	4	0.00065	4	0.00065
12	0.00090	4	0.00081	4	0.00081	4	0.00081
12	0.00096	4	0.00097	4	0.00097	4	0.00097
12	0.00092	4	0.00097	4	0.00097	4	0.00097
10	0.00096	4	0.00066	4	0.00066	4	0.00066
13	0.00088	80	0.00085	13	0.00070	5	0.00043
13	0.00088	80	0.00081	11	0.00080	5	0.00047
13	0.00089	80	0.00073	11	0.00086	5	0.00050
12	0.00099	80	0.00058	11	0.00065	5	0.00043

Tabela 4.4: Erro quadrático vs. número de iterações para os distintos métodos para a função (4.3) e sobre um conjunto de 10 fases iniciais.

<i>nit</i>	<i>erro GSAXB</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO1</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO2</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO3</i>
500	0.02474	500	0.02252	500	0.04440	500	0.01959
500	0.02467	133	0.00098	500	0.01947	500	0.01947
500	0.04120	131	0.00090	500	0.01959	500	0.01959
45	0.00089	500	0.05470	138	0.00089	27	0.00073
500	0.02948	155	0.00088	500	0.02782	500	0.02782
500	0.02457	101	0.00077	500	0.01931	94	0.00075
500	0.02948	500	0.03304	215	0.00092	115	0.00081
500	0.02883	500	0.02683	500	0.02692	500	0.02317
500	0.02948	500	0.02660	500	0.02782	500	0.02782
500	0.02474	101	0.00096	500	0.02667	102	0.00079
500	0.03725	500	0.02683	500	0.04440	500	0.04440
86	0.00094	500	0.02782	189	0.00078	54	0.00085
500	0.02474	500	0.01959	500	0.01959	500	0.01959
500	0.03486	500	0.02782	500	0.02252	500	0.01948
500	0.04135	500	0.02421	500	0.05470	500	0.05470
500	0.02474	91	0.00084	500	0.04440	500	0.01959
500	0.02883	500	0.05145	500	0.02664	500	0.02660
500	0.03259	143	0.00089	500	0.03400	500	0.03400
303	0.00097	500	0.02252	500	0.05470	249	0.00094
500	0.03377	126	0.00089	500	0.01947	500	0.03889
500	0.04120	240	0.00098	500	0.01959	500	0.01959
98	0.00099	500	0.02782	113	0.00089	48	0.00066
500	0.03164	500	0.01932	500	0.03206	500	0.03203
500	0.02883	134	0.00090	500	0.05470	500	0.02660
500	0.03259	500	0.02787	500	0.03400	500	0.03400
500	0.02474	500	0.07751	500	0.01959	500	0.01959
500	0.04135	500	0.02252	500	0.05470	500	0.05470
500	0.02948	163	0.00072	500	0.01959	500	0.03648
306	0.00100	500	0.05439	500	0.04440	500	0.01947
500	0.02948	500	0.02438	206	0.00090	500	0.02683
500	0.04135	500	0.02438	207	0.00098	500	0.05470
83	0.00097	200	0.00091	87	0.00099	28	0.00092
500	0.04135	500	0.05470	500	0.05470	500	0.05470
500	0.02948	158	0.00097	500	0.02782	500	0.02782
500	0.02474	119	0.00090	500	0.01959	500	0.01959
500	0.02474	500	0.02660	500	0.03649	500	0.01959
500	0.03259	184	0.00092	500	0.02692	500	0.03400
500	0.03325	500	0.01959	289	0.00088	500	0.03538
500	0.02474	108	0.00082	500	0.01959	500	0.01959
500	0.02474	122	0.00081	500	0.01959	500	0.02252

Tabela 4.5: Resultados comparativos entre os diferentes métodos para a função (4.1) para um conjunto de 40 fases iniciais.

<i>nit</i>	<i>erro GSAXB</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO1</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO2</i>	<i>nit</i>	<i>erro GSIO3</i>
348	0.00095	500	0.03648	500	0.04440	268	0.00097
500	0.03213	111	0.00095	500	0.03100	500	0.05134
500	0.02474	500	0.02683	500	0.01959	500	0.01959
466	0.00098	104	0.00096	500	0.04440	500	0.02683
500	0.03325	500	0.01953	500	0.02782	500	0.02252
500	0.03376	500	0.03304	500	0.03648	500	0.03648
500	0.02474	500	0.02438	500	0.03304	500	0.01959
500	0.03518	500	0.02700	107	0.00091	500	0.03648
500	0.04135	500	0.03762	500	0.02782	500	0.05470
500	0.02948	500	0.01959	500	0.02782	500	0.02782
500	0.02760	147	0.00088	500	0.04440	347	0.00079
500	0.02474	204	0.00092	500	0.01959	500	0.01959
500	0.03429	135	0.00099	500	0.03538	500	0.03674
500	0.02474	140	0.00064	125	0.00094	500	0.01959
500	0.02948	500	0.02660	500	0.02782	500	0.02782
500	0.02948	500	0.02683	500	0.03648	500	0.02782
500	0.02894	122	0.00094	500	0.02692	500	0.02660
500	0.04135	500	0.02660	500	0.05470	500	0.05470
500	0.02474	500	0.02683	500	0.05431	500	0.01959
500	0.02474	500	0.04440	500	0.01959	500	0.01959
500	0.02885	500	0.03683	500	0.02661	54	0.00052
500	0.04120	500	0.01932	500	0.05431	500	0.07082
500	0.02474	500	0.02252	500	0.04440	500	0.01959
500	0.02474	500	0.03757	500	0.01947	500	0.01959
500	0.02948	500	0.01959	500	0.02782	117	0.00087
500	0.02948	500	0.03538	500	0.02782	500	0.02782
500	0.02948	81	0.00086	500	0.02782	138	0.00090
139	0.00100	257	0.00087	500	0.03400	123	0.00095
500	0.03393	180	0.00072	500	0.03203	78	0.00092
500	0.02750	500	0.03648	500	0.01959	181	0.00090
84	0.00091	500	0.02681	149	0.00065	54	0.00096
271	0.00094	111	0.00096	345	0.00090	500	0.01931
500	0.04135	136	0.00093	133	0.00081	500	0.05470
500	0.02948	500	0.02317	500	0.02782	500	0.02782
500	0.05726	500	0.07082	500	0.05600	500	0.00673
153	0.00099	95	0.00089	211	0.00093	88	0.00084
500	0.02900	500	0.01932	500	0.02692	500	0.02317
240	0.00072	500	0.04440	500	0.04440	500	0.02782
150	0.00095	500	0.02782	500	0.03683	57	0.00086
500	0.02948	500	0.02438	500	0.02782	500	0.02782

Tabela 4.6: idem tabela anterior

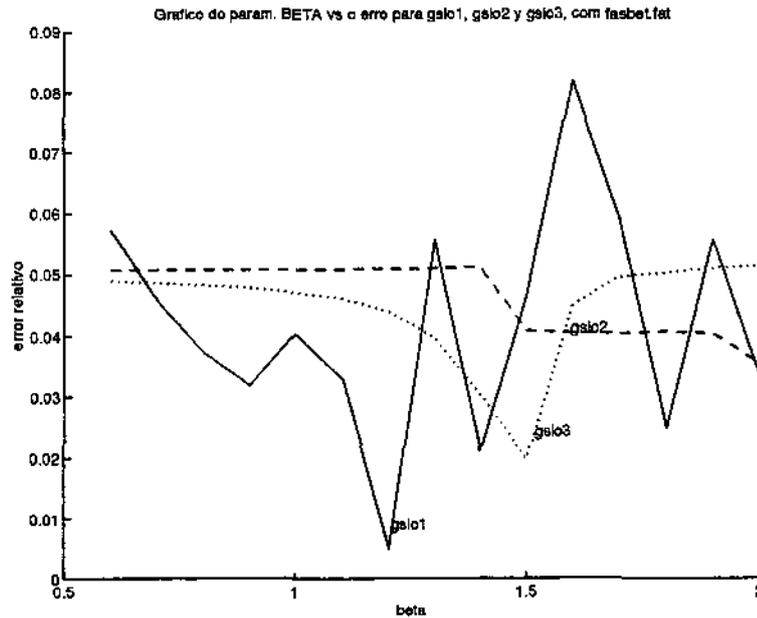


Figura 4.7: Dependência dos algoritmos ao parâmetro β

mudado significativamente em sucessivas iterações. Estes ciclos são terminados com um conjunto de iterações do algoritmo Gerchberg-Saxton. Isto faz decrescer o erro no caso que a iteração esteja indo na direção correta. Chamamos este algoritmo de GSIO4. A modo de exemplo, a tabela (4.7) expõe os níveis de erro atingidos por todos estes algoritmos, incluindo GSIO4, e o número de iterações requeridas para isso quando são aplicados sobre a função (4.1) e sobre o mesmo grupo de fases iniciais. Segundo as experiências numéricas, temos que em geral com esta nova variante obtém-se convergência para a solução num 30% mais do nível de convergência exibido por GSAXB. Este porcentagem é superior ao atingido pelos outros algoritmos. Esta combinação entre estes algoritmos consegue acelerar a convergência em pontos iniciais para os que Gerchberg-Saxton já converge para a solução mas também consegue tirar da estagnação a GSAXB numa proporção maior do que os outros.

Para analisar o comportamento dos algoritmos ante a presença de ruído nos dados, foi adicionado ruído uniforme às magnitudes da função e da transformada de Fourier. Para um nível de ruído baixo, até um 5% da magnitude da função objeto, e para as funções que não apresentam problemas de estagnação, o comportamento dos algoritmos não varia muito respecto ao caso sem ruído, no sentido que todos eles essencialmente continuam convergendo

<i>nit</i>	<i>erro GSAXB</i>	<i>nit</i>	<i>GSIO1</i>	<i>nit</i>	<i>GSIO2</i>	<i>nit</i>	<i>GSIO3</i>	<i>nit</i>	<i>GSIO4</i>
500	0.02474	500	0.07751	500	0.01959	500	0.01959	500	0.01959
500	0.04135	500	0.02252	500	0.05470	500	0.05470	500	0.03400
500	0.02948	163	0.00072	500	0.01959	500	0.03648	500	0.03304
306	0.00100	500	0.05439	500	0.04440	500	0.01947	349	0.00089
500	0.02883	500	0.03304	500	0.02660	500	0.02660	500	0.01959
500	0.02948	500	0.03538	500	0.02782	500	0.02782	500	0.02782
500	0.00099	500	0.05431	500	0.10494	500	0.01947	197	0.00084
500	0.02948	500	0.02438	206	0.00090	500	0.02683	213	0.00082
500	0.04135	500	0.02438	207	0.00098	500	0.05470	500	0.01959
83	0.00097	200	0.00091	87	0.00099	28	0.00092	28	0.00092
500	0.02691	500	0.01959	500	0.02692	500	0.02660	190	0.00084
500	0.03325	500	0.02782	500	0.02692	500	0.03538	500	0.02782
500	0.04135	500	0.05470	500	0.05470	500	0.05470	500	0.01932
500	0.02948	158	0.00097	500	0.02782	500	0.02782	500	0.01959
500	0.02474	119	0.00090	500	0.01959	500	0.01959	500	0.04440
500	0.02474	500	0.02660	500	0.03649	500	0.01959	500	0.03649
500	0.03259	184	0.00092	500	0.02692	500	0.03400	220	0.00099
500	0.03325	500	0.01959	289	0.00088	500	0.03538	191	0.00085
500	0.02474	108	0.00082	500	0.01959	500	0.01959	203	0.00095
500	0.02474	122	0.00081	500	0.01959	500	0.02252	500	0.05470
500	0.02750	500	0.02660	500	0.02438	101	0.00074	500	0.01959
500	0.04135	500	0.02782	262	0.00095	145	0.00091	500	0.04440
500	0.02467	500	0.01932	500	0.01947	500	0.01947	500	0.03648
500	0.02691	500	0.02683	500	0.02681	500	0.02317	236	0.00096
500	0.04135	95	0.00080	500	0.05470	500	0.05470	500	0.01959
500	0.04120	500	0.03400	500	0.04440	500	0.01947	286	0.00087
500	0.04135	500	0.05470	500	0.05470	500	0.05470	500	0.01959
138	0.00096	500	0.02782	500	0.02782	81	0.00097	500	0.01959
500	0.02883	500	0.01959	500	0.02692	500	0.02660	500	0.03649
333	0.00095	500	0.01959	500	0.04440	500	0.01947	500	0.02661

Tabela 4.7: Erro obtido pelos diferentes métodos aplicados à função (4.1)

para a solução perturbada, só que o erro quadrático agora é um pouco maior. Para estes casos, todos os algoritmos são razoavelmente robustos ante a presença de ruído nos dados. Para o caso da função (4.2), a figura (4.8) mostra as fases obtidas pelos diferentes métodos quando os dados são submetidos a 5% de ruído uniforme. Em todos os métodos, e nas primeiras 100 iterações, o erro quadrático passa de 10^{-5} para os dados exatos, a 10^{-3} para os dados perturbados.

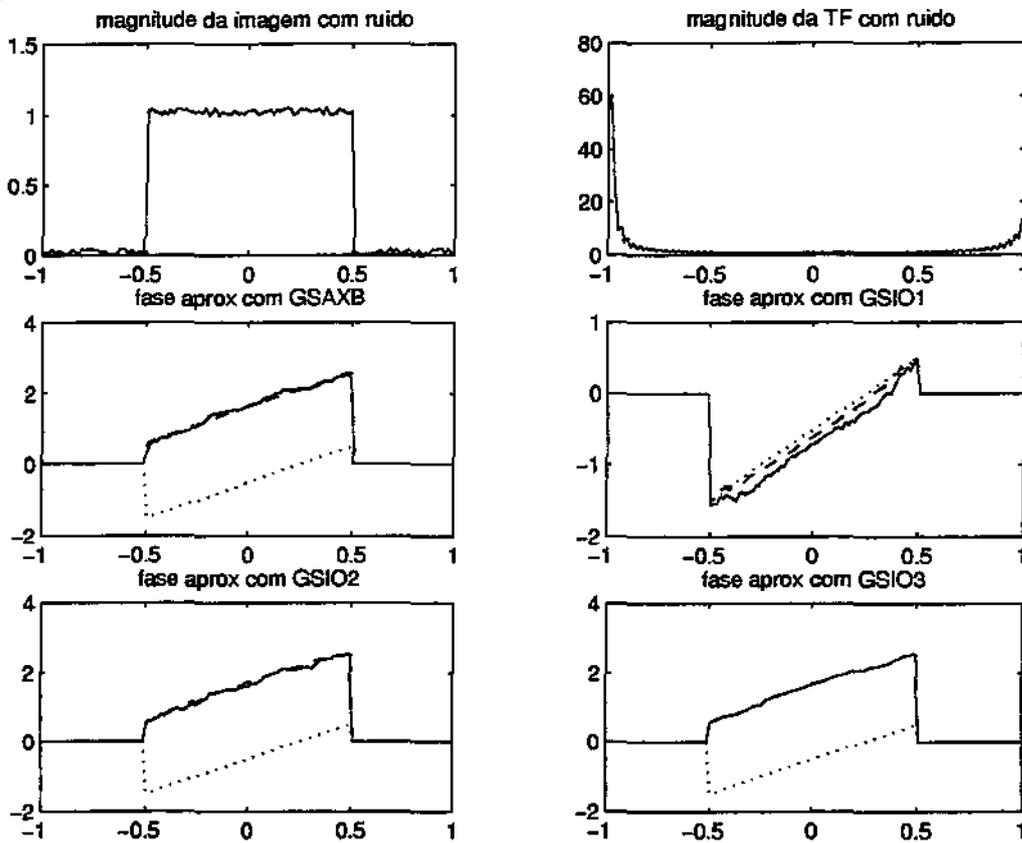


Figura 4.8: Fases exatas, e aproximadas para a função (4.2). ‘..’ fase exata da função. ‘- -’: fases obtidas por cada um dos métodos sem ruído. O traço contínuo corresponde as fases obtidas pelos métodos com 5% de ruído nos dados.

Quando aos dados são adicionadas maiores quantidades de ruído, algumas funções como por exemplo a (4.3), que não manifestava problemas de

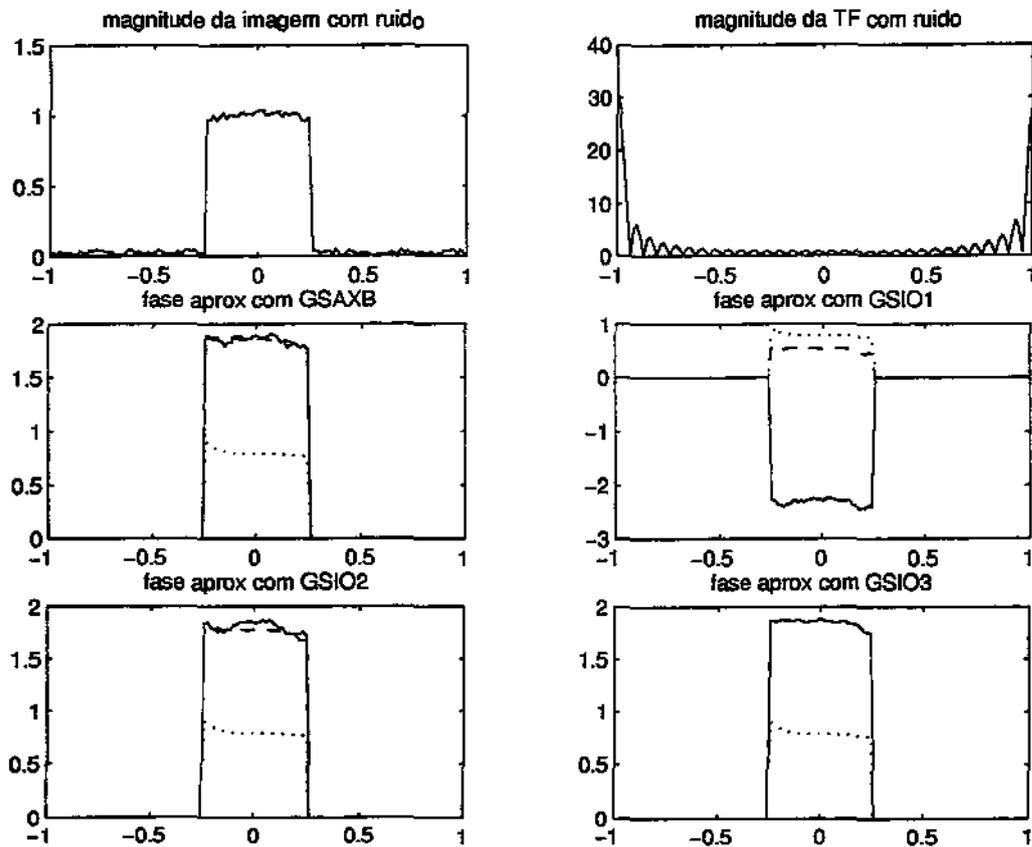


Figura 4.9: Fases exatas ('..') , e aproximadas com e sem ruído ('—' e '- -' resp.) para a função (4.3).

Um comportamento similar se observa para a função (4.1). Para níveis pequenos de ruído, a fase obtida por todos os métodos está muito próxima daquela obtida para os dados sem perturbações. Mas na medida que a quantidade do ruído nos dados é incrementada, as fases perturbadas começam a diferenciar-se bastante das outras. O exemplo mostrado nas figuras (4.10) e (4.11) confirma esta situação. Na fig. (4.10) se observa que quando a perturbação é pequena as três variantes de Gerchberg-Saxton continuam convergendo para a solução (notar que o método GSIO1 converge neste caso para uma conjugada da solução) . Porém, quando os dados são sometidos a perturbações maiores para o caso de GSIO1 e GSIO2, a convergencia é perdida e os algoritmos não conseguem reconstruir a solução (fig. (4.11)).

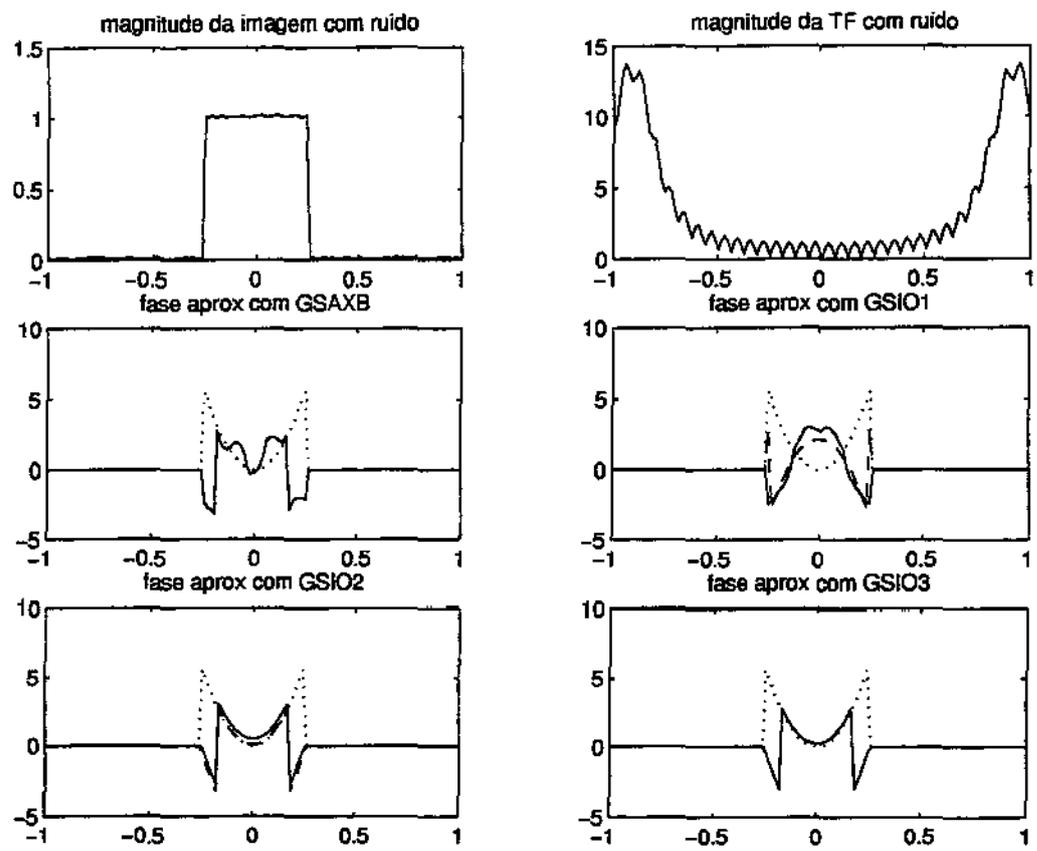


Figura 4.10: Idem anterior para a função (4.1) com 2% de ruído nas magnitudes em ambos planos.

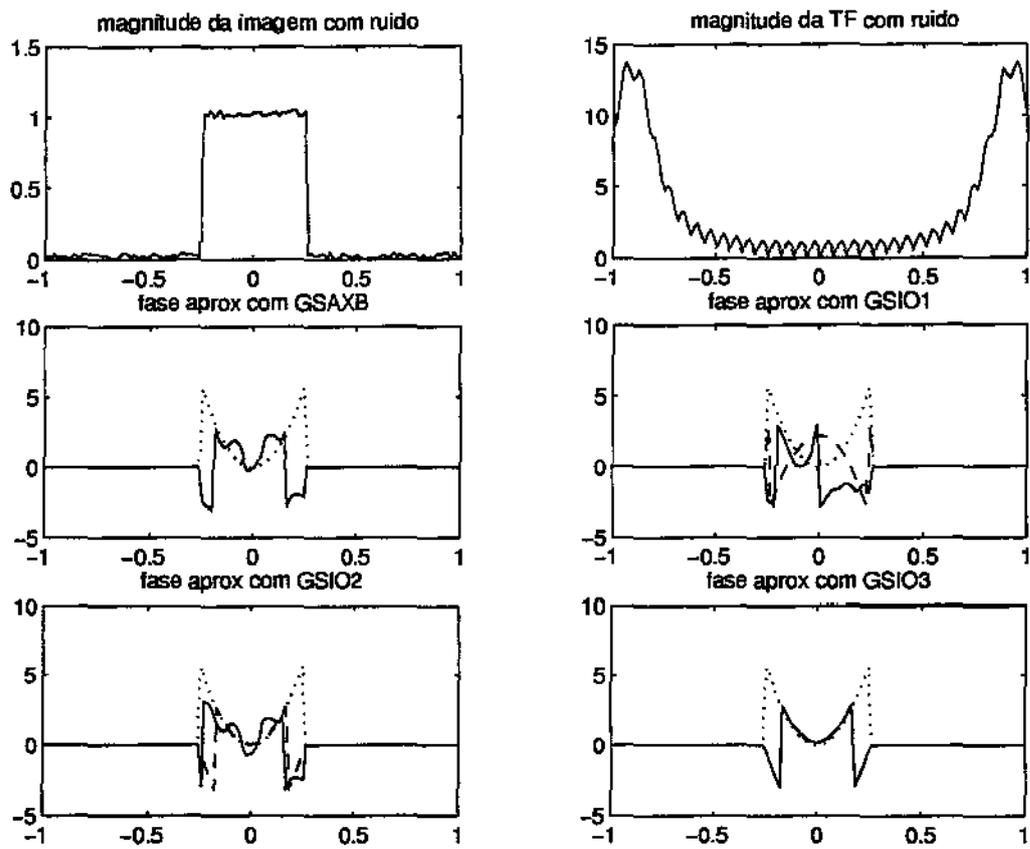


Figura 4.11: Idem anterior para a função (4.1) com 5% de ruído nas magnitudes em ambos planos.

Capítulo 5

Conclusões

No presente trabalho tratamos o problema da reconstrução da fase de uma função a valores complexos através do conhecimento das magnitudes dela própria e da sua transformada de Fourier. Estudamos o problema da unicidade da solução para o problema discreto tanto para o caso unidimensional quanto para o caso multidimensional. Através de uma análise detalhada estabelecemos as condições que devem ser satisfeitas pelos sinais unidimensionais para dar origem a soluções ambíguas. Provamos que estas condições são muito estritas, e exemplificamos a situação para um caso particular. Mostramos a relação existente entre ambigüidade na solução e fatorabilidade da z -transformada do sinal. Expusemos os resultados sobre unicidade provados por Hayes para o caso multidimensional: 'o conjunto de dados para os quais obtem-se soluções ambíguas está contido numa variedade algébrica de medida zero'. Calculamos a dimensão de tal variedade para o caso particular de um sinal discreto dois-dimensional, para o problema de uma e de duas magnitudes. Evidentemente o grau de dificuldade na determinação da dimensão desta variedade cresce com a dimensão do problema devido a complexidade involucrada na caracterização dos polinômios irredutíveis em varias variáveis. Outra dificuldade que aparece é a determinação da independência das equações não lineares que a determinam.

Se apresentaram os principais dos métodos numéricos para a resolução do problema: O método direto, o da máxima descida e o método das projeções. Este último foi estudado com maior profundidade. Também se estudaram as modificações do tipo 'input-output' e 'output-output' propostas por J. Fienup para conseguir tirar da estagnação ao algoritmo *error reduction* para o

problema de uma magnitude. Completamos detalhes da prova da relação existente entre as modificações feitas no input e aquelas produzidas no output. Dentro deste enfoque do tipo *'input-output'* se apresentaram as dois variantes propostas por Fienup para o problema das duas magnitudes (gsio2 e gsio3). Nos propoemos uma terceira variante *'output-output'* (gsio1). Todos estes métodos foram implementados computacionalmente e comparados os seus desempenhos tanto para o caso unidimensional quanto para o caso dois-dimensional.

Os resultados obtidos mostram que na maior parte dos casos Gerchberg-Saxton consegue convergir para a solução. Quando isto acontece, todas suas modificações também exibem um bom desempenho, sendo gsio3 aquele que converge com uma taxa de convergência maior. Porém, em algumas ocasiões Gerchberg-Saxton acaba-se estagnando. Nestes casos o comportamento dos métodos já não sempre é tão efetivo. Os múltiplos testes numéricos mostram que das três modificações, gsio1 é aquela que consegue em maior proporção tirar a Gerchberg-Saxton da estagnação. Baseados neste análise, combinamos ciclos de iterações de gsio3 com ciclos de iterações de gsio1. Desta maneira construímos um algoritmo que consegue acelerar a convergência em pontos onde Gerchberg-Saxton converge e que converge numa proporção maior em pontos de estagnação daquele.

Embora estas modificações apresentem um desempenho melhor que o método das projeções, a grande complexidade do problema faz com que até agora não se conte com nenhum algoritmo que garanta a convergência do processo iterativo para a solução em todos os casos.

Bibliografia

- [1] A. J. J. Drenth A.M.J. Huiser and H.A. Ferwerda. On phase retrieval in electron microscopy from image and diffraction pattern i. *Optik*, 45(4):303–316, 1976.
- [2] A. J. J. Drenth A.M.J. Huiser and H.A. Ferwerda. On phase retrieval in electron microscopy from image and diffraction pattern ii. *Optik*, 46(4):407, 1976.
- [3] R. H. T. Bates. On phase problems. i. *Optik*, 51(2):161–170, 1978.
- [4] J. R. Fienup. Improved synthesis and computational methods for computer-generated holograms. *Ph. D. thesis, Stanford University*, (chapter 5):297–305, May 1975.
- [5] J. R. Fienup. Iterative method applied to image reconstruction and to computer-generated holograms. *Optical Engineering*, 19(3):297–305, May/June 1980.
- [6] J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Applied Optics*, 21(15), August 1982.
- [7] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35:237–246, 1972.
- [8] Monson H. Hayes. The reconstruction of a multidimensional sequence from the phase or magnitude of its fourier transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-30(2), April 1982.

- [9] V. Yu. Ivanov M. A. Vorontsov and V. P. Sivokon. Phase retrieval from a set of intensity measurements: theory and experiment. *J. Optical Society of America A*, 9(9):1515–1524, September 1992.
- [10] Jorge L. C. Sanz. Mathematical considerations for the problem of fourier transform phase retrieval from magnitude. *SIAM J. Appl. Math.*, 45(4), August 1985.
- [11] Jorge L. C. Sanz and Thomas S. Huang. Unique reconstruction of a band-limited multidimensional signal from its phase or magnitude. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(11), November 1983.
- [12] W. O. Saxton. *Computer Techniques for Image Processing in Electron Microscopy*. Academic, New York, 1978.
- [13] P. Schiske. Uniqueness and ambiguity in the determination of phases from image and diffraction pattern intensities. *Optik*, 40(3):261–275, 1974.