UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

FORMALISMO LAGRANGIANO PARA CAMPOS MULTIVETORIAIS NO ESPAÇO-TEMPO

Antonio Manuel Moya

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada, área: Física-Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.**

Campinas, São Paulo, Brasil

1999

FORMALISMO LAGRANGIANO PARA CAMPOS MULTIVETORIAIS NO ESPAÇO-TEMPO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Antonio Manuel Moya e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de Abril de 1999

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.
Orientador

Banca examinadora:
1 Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.
2 Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
3 Prof. Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzun
4 Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
5 Prof. Dr. José Ricardo de Rezende Zeni

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP,como requisito parcial para a obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA APLICADA, Área: Física-Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Moya, Antonio Manuel

M873f Formalismo lagrangiano para campos multivetoriais no espaço-tempo / Antonio Manuel Moya -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lagrange, Funções de. 2. Dirac, Equações de. 3. Teoria quântica de campos. 4. Clifford, Algebra de. 5. Maxwell, Equações de. I. Rodrigues Jr., Waldyr Alves . II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 20 de abril de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). WALDYR ALVES RODRIGUES JÚNIOR

Prof (a). Dr (a). JAYME VAZ JÚNIOR

Guillermo Cabrera

Prof (a). Dr (a). GUILLERMO GERARDO CABRERA OYARZÚN

Prof (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof (a). Dr (a). JOSÉ RICARDO DE REZENDE ZENI

RESUMO

Desenvolvemos o formalismo Lagrangiano para os chamados campos relativísticos utilizando o cálculo do espaço-tempo, i.e., um cálculo multivetorial baseado na álgebra do espaço-tempo.

Derivamos rigorosamente a equação de campo, associada à Lagrangiana para um campo multivetorial (rotor ou spinor), a partir do princípio de mínima ação.

Derivamos as fórmulas gerais para os extensores canônicos da energia-momento e do momento angular, e obtemos duas formas equivalentes para os correspondentes teoremas de conservação, com campos multivetoriais (rotores) e campos spinoriais tratados de um modo completamente unificado.

Demonstramos que a parte antisimétrica do extensor de energia-momento é de grande importância no tratamento correto do momento angular, ela está relacionada à fonte do spin.

ABSTRACT

The Lagrangian formalism for the so-called relativistic fields is developed by using the space-time calculus, i.e., a multivector calculus based upon the space-time algebra.
The field equation, associated to the Lagrangian for a multivector field (rotor or spinor), is rigorously derived from the least action principle.
The general formulas for the canonical stress-energy and angular-momentum extensors are derived, and two equivalent forms for the corresponding conservation theorems are obtained, with multivector fields (rotors) and spinor fields treated in a unified way.
It is demonstrated that the antisymmetric part in the stress-energy extensor is potentially important to the correct treatment of the angular-momentum, the one is related to the spin source.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar a minha gratidão ao Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr. por ter-me sinalado o caminho e, fundamentalmente, por ter-me permitido trabalhar com libertade de pensamento.
Agradeço a minha esposa, Virginia Velma Fernández, pelo grande apoio durante o tempo de realização desta tese, especialmente, por ter suportado com seu amor e carinho as minhas variações de estado de espírito enquanto eu escrevia este trabalho.
Agradeço ainda a meus pais e minhas irmãs por terem acreditado em mim.
Finalmente, agradeço à CAPES e ao CNPq o apoio financiero na elaboração deste trabalho.

Dedico o presente trabalho a meus pais Manuel Moya e Lucia L. Muñoz, e a minha tia Pochi (in memoriam).

Conteúdo

Introdução

Muitos são os sistemas matemáticos utilizados na formulação das teorias físicas.

Na teoria eletromagnética, formulada no modelo tridimensional do espaço físico (i.e., em termos dos campos vetoriais elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$, etc.), é o *cálculo vetorial de Gibbs* que nos permite manipular as equações de Maxwell.

Quando a teoria eletromagnética é formulada no modelo do espaço-tempo de Minkowski, (i.e., a formulação covariante Lorentziana), é o *formalismo dos quadrivetores e quadritensores* que nos permite expressar as equações de Maxwell em termos do quadritensor do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$, etc.

O cálculo vetorial de Gibbs juntamente com o *cálculo spinorial* (diga-se, nas formas matriciais das *álgebras de Pauli e Dirac*), são utilizados na mecânica quântica na teoria do elétron de Pauli e Dirac.

A teoria da relatividade de Einstein encontra sua expressão natural no *cálculo tensorial clássico* de Riemann, Ricci, Levi-Civita e outros (i.e., a formulação covariante geral).

Existe uma ferramenta matemática, um *cálculo multivetorial sobre a variedade Minkowskiana* baseado na *álgebra geométrica de Hestenes*[4], que nos fornece uma linguagem unificada para os diferentes sistemas matemáticos empregados na formulação das teorias físicas. Tal ferramenta matemática é chamada de *cálculo geométrico*[8].

Os campos multivetoriais no espaço-tempo (i.e., as funções multivetoriais do vetor de posição, na álgebra geométrica de Hestenes), desempenham um papel fundamental na teoria de campos físicos, uma vez que com eles modelam-se os chamados campos clássicos e também os campos quânticos (em teorias de primeira quantização).

Por exemplo, na teoria eletromagnética de Maxwell, o campo eletromagnético é modelado por um campo bivetorial (i.e., o *campo de Faraday* F) e a fonte de cargas e correntes elétricas é dada por um campo vetorial (i.e., a *densidade de corrente* J).

No formalismo do cálculo geométrico, uma *única equação diferencial multivetorial*, agora dita *a equação de Maxwell*, codifica as quatro equações diferenciais vetoriais da formulação tridimensional[4] (as equações de Maxwell históricas) e/ou as duas equações diferenciais tensoriais da formulação quadridimensional (as equações de Maxwell na forma covariante Lorentziana).

O potencial eletromagnético (i.e., o *campo de Maxwell* A) e potencial de Hertz (i.e., o *bivetor de Hertz* Π) são modelados por um campo vetorial e um campo bivetorial no espaço-tempo, respectivamente. Recentemente, o bivetor de Hertz mostrou-se essencial para encontrar soluções subluminais e superluminais da equação de Maxwell[13],[17].

Na teoria de Dirac, o estado mecânico-quântico de um elétron (i.e., o campo Dirac) movendo-se num campo eletromagnético, é descrito por um campo spinorial (i.e., um objeto matemático que é representado numa base ortonormal da álgebra geométrica essencialmente por um campo multivetorial par, veja detalhes em [10]).

Não é exagero dizermos que o chamado *formalismo Lagrangiano* tem desempenhado um papel de fundamental importância na formulação das teorias físicas.

As *idéias chaves* do formalismo Lagrangiano, a *função Lagrangiana*, o *princípio de mínima ação*, etc., surgiram históricamente na chamada *mecânica analítica* desenvolvida por Lagrange, Hamilton, Jacobi e outros. Essas idéias chaves tem sido aplicadas sistemáticamente na formulação das teorias de campos clássicos e quânticos, e também da teoria da relatividade (restrita e geral) de Einstein.

Assim, na chamada *mecânica clássica*, existem funções Lagrangianas para sistemas de partículas (com interações Newtonianas), sistemas rígidos (corpos rígidos) e sistemas contínuos.

A teoria eletromagnética de Maxwell, formulada nos modelos tridimensional e/ou quadridimensional, possui também funções Lagrangianas.

Na mecânica ondulatória de Schrödinger e na mecânica quântica de Pauli e Dirac também foram aplicados os métodos do formalismo Lagrangiano.

Na teoria da relatividade geral, nós todos conhecemos a histórica Lagrangiana de Hilbert-Einstein.

Neste trabalho, elaboramos o formalismo Lagrangiano, utilizando os métodos do cálculo geométrico, para a chamada *teoria de campos relativísticos* (i.e., o campo vetorial de Maxwell e o campo spinorial de Dirac-Hestenes[10]).

Para elaborarmos o cálculo geométrico construimos a *álgebra de Clifford* associada a um espaço vetorial com tensor métrico (veja também [4] e [8]). Desenvolvemos logo os conceitos fundamentais da *teoria de funções multivetoriais* baseada nessa álgebra de Clifford; introduzimos aqui as funções multivetoriais paramétricas, as funções multivetoriais de variáveis multivetoriais, a noção de diferenciabilidade; definimos a derivação paramétrica, a derivação multivetorial, os operadores diferenciais, etc. (veja também [8]).

O cálculo diferencial e integral para essa teoria de funções multivetoriais é dito o *cálculo multivetorial* (aqui, só desenvolvemos a teoria de diferenciação, uma introdução à teoria de integração pode ver-se em [8]).

Partindo da noção de espaço-tempo de Minkowski, modelada na teoria de variedades, definimos o *espaço vetorial de Minkowski.* A álgebra de Clifford associada a esse espaço vetorial é a *álgebra geométrica de Hestenes* e o cálculo multivetorial baseado nessa álgebra é o *cálculo geométrico.*

Finalmente, elaboramos o formalismo Lagrangiano para campos multivetoriais no espaço-tempo.

Discutimos os conceitos envolvidos nas noções de *função Lagrangiana* e *ação*, e obtemos as *equações de Euler-Lagrange* correspondentes a alguns tipos de funções Lagrangianas a partir do *princípio de mínima ação.*

Definimos os conceitos importantes de tensor de energia-momento e tensor de momento angular, neste último analizamos o significado do momento angular orbital e do momento angular intrínseco (i.e., o spin).

No Apêndice A, resumimos as estruturas algébricas fundamentais sobra as quais baseiam-se as noções de campos k-tensoriais e multitensoriais, e desenvolvemos a sua estrutura de diferenciabilidade.

No Apêndice B, tratamos alguns aspectos gerais da eletrodinâmica clássica, no formalismo do cálculo do espaço-tempo. Discutimos especialmente o teorema da energia-momento.

No Apêndice C, tratamos alguns aspectos gerais da equação de Dirac, no formalismo do cálculo do espaço-tempo. Fundamentalmente, desenvolvemos linhas heurísticas para obtermos os teoremas da energia-momento e do momento angular.

CAPÍTULO 1

Álgebra de Clifford sobre um Espaço Linear com Métrica

1. Álgebra de Multitensores

Apresentaremos uma proposta original para o construção da álgebra de Clifford associada a um espaço linear com tensor métrico (podem ver-se outras propostas em [4] e [8]).

Primeiramente, introduziremos o conceito fundamental de multitensor de um espaço linear (real). O conjunto destes objetos tem uma estrutura natural de espaço linear (real).

O espaço dos multitensores será dotado com um produto de multitensores, o produto tensorial; e assim ele ganhará uma estrutura natural de álgebra associativa (real).

Construiremos a álgebra interior dos multitensores e a álgebra exterior dos multivetores (i.e., a álgebra de Grasmann). E por último, definiremos a álgebra de Clifford.

1.1 Espaço de Multitensores

Sejam V um espaço linear sobre R, de dimensão finita, e $T^k(V)$ o espaço de k-tensores[1] sobre V.

Um *multitensor de* V é uma ∞-upla de k-tensores de V, cujas k-ésimas componentes de ordem superior a algum inteiro não-negativo, são todas nulas, isto é

$$\tau : N_0 \to \bigcup_{j \in N_0} T^j(V) \text{ tal que para cada } k \in N_0 : \tau_k \in T^k(V), \tag{1.1}$$

onde existe $M \in N_0$ (N_0 denota o conjunto dos números naturais com 0, o zero real), tal que

[1] Um k-*tensor* de V ($k \in N_0, k \geq 1$) é uma função multilinear do produto cartesiano de k-cópias de V a R, isto é, $\tau : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{cópias}} \to R$ tal que para todos $\alpha_j, \beta_j \in R$ e $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j \in V$, com $1 \leq j \leq k : \tau(\mathbf{x}_1, \ldots, \alpha_j \mathbf{x}_j + \beta_j \mathbf{y}_j, \ldots, \mathbf{x}_k) = \alpha_j \tau(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_k) + \beta_j \tau(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{y}_j, \ldots, \mathbf{x}_k)$. Por conveniência, um número real é dito um 0-*tensor de* V ($k \in N_0, k = 0$); o inteiro não-negativo k é chamado de *ordem (ou graduação)* do k-tensor. $T^k(V)$. O conjunto dos k-tensores de V, tem uma estrutura natural de espaço linear sobre R. Notem-se as coincidências: $T^0(V) = R$ e $T^1(V) = V^*$ (o dual de V).

para todo $k \in N_0$, com $k > M$: $\tau_k = o$ (o denota o k-tensor nulo de $T^k(V)$).

O menor desses inteiros não-negativos será chamado de *grau* do multitensor τ (às vezes, indicado por M_τ).

Um multitensor τ pode ser convenientemente indicado por $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_{M_\tau})$.

O conjunto dos multitensores de V, denotado por $T(V)$, com a soma de multitensores e o produto de escalar real por multitensor "naturalmente definidas" (leve-se em conta que um multitensor é uma função!), é um espaço linear sobre R, *o espaço de multitensores sobre V*.

Proposição 1.1: O grau de $\sigma + \tau$ é o maior dos graus de σ ou τ, e o grau de $\lambda\tau$ ($\lambda \in R$) é igual ao grau de τ.

Proposição 1.2: $T_M(V)$, o conjunto dos multitensores de V com graus menores o iguais a M, é um subespaço de $T(V)$.

Proposição 1.3: Sejam $\langle \mathbf{e}_k \rangle$ e $\langle \varepsilon^k \rangle$ bases de V e V^* (o dual de V), onde a segunda é dual da primeira (i.e., $\varepsilon^k(\mathbf{e}_j) = \delta_j^k$), então $\langle (1, \varepsilon^{p_1}, \ldots, \varepsilon^{p_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{p_k}, \ldots, \varepsilon^{p_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{p_M}) \rangle_{1 \leq k \leq M}$ é uma base de $T_M(V)$.

Isto implica que, se a dimensão de V é n, então a dimensão de $T_M(V)$ é $1 + n + \cdots + n^k + \cdots + n^M = \dfrac{n^{M+1} - 1}{n - 1}$.

1.2 Operador k-Parte

Introduzimos no espaço de multitensores sobre V, um operador linear fundamental, *a k-parte* ($k \in N_0$)

$$\langle\rangle_k : T(V) \to T(V) \text{ tal que para todo } j \in N_0, \text{com } j \neq k : (\langle \tau \rangle_k)_j = o, \tag{1.2}$$

isto é, as j-ésimas componentes da k-parte de τ, com $j \neq k$, são todas nulas.

Se $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots)$, então $\langle \tau \rangle_k = (\ldots, o, \tau_k, o, \ldots)$, o mesmo τ_k poderia ser nulo ou não!.

Um multitensor de V, digamos τ, é dito *homogêneo de graduação k*, se somente se $\tau = \langle \tau \rangle_k$; isto é, as componentes de ordens distintas de k são nulas!.

Proposição 1.4: O conjunto de multitensores homogêneos de graduação k tem uma estrutura natural de espaço linear sobre R, é um subespaço de $T(V)$ isomorfo a $T^k(V)$.

Proposição 1.5: Qualquer multitensor pode ser expresso como uma soma de multitensores homogêneos $\tau = \sum_{k=0}^{M_t} \langle\tau\rangle_k$.

Isto significa que qualquer $T_M(V)$ é exatamente a soma direta de todos os espaços de k-tensores, de $k=0$ até $k=M$.

1.3 Produto Tensorial

Construimos um produto fundamental no espaço de multitensores de V, o *produto tensorial de multitensores*, definido por

$$T(V) \times T(V) \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \otimes \tau \in T(V) \text{ tal que: } (\sigma \otimes \tau)_k = \sum_{j=0}^{k} \sigma_j \otimes \tau_{k-j}, \qquad (1.3)$$

onde $\sigma_j \otimes \tau_{k-j}$ é o produto tensorial[2] da j-ésima componente de σ pela $(k-j)$-ésima componente de τ (i.e., um j-tensor de V e um $(k-j)$-tensor de V), isto significa que: se $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k, \ldots, \sigma_{M_\sigma})$ e $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_{M_\tau})$, então

$$\sigma \otimes \tau = (\sigma_0\tau_0, \sigma_0\tau_1 + \sigma_1\tau_0, \ldots, \sum_{j=0}^{k} \sigma_j \otimes \tau_{k-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{M_\sigma+M_\tau} \sigma_j \otimes \tau_{M_\sigma+M_\tau-j}).$$

Proposição 1.6: O grau do produto tensorial $\sigma \otimes \tau$ é a soma dos graus de σ e τ.

O produto tensorial de multitensores é distributivo à esquerda e à direita, e associativo.

A prova da distributividade não apresenta nenhuma dificuldade, depende exclusivamente da distributividade do produto tensorial de k-tensores.

Para provarmos a associatividade, isto é, para quaisquer $\sigma, \tau, \phi \in T(V)$: $(\sigma \otimes \tau) \otimes \phi = \sigma \otimes (\tau \otimes \phi)$, nos valeremos de um artificio de "decomposição e recomposição" que mostrará a coincidência da k-ésima componente de $(\sigma \otimes \tau) \otimes \phi$ com a k-ésima componente de $\sigma \otimes (\tau \otimes \phi)$.

Temos que

$$\begin{aligned} [(\sigma \otimes \tau) \otimes \phi]_k &= (\sigma \otimes \tau)_0 \otimes \phi_k + (\sigma \otimes \tau)_1 \otimes \phi_{k-1} + \cdots + (\sigma \otimes \tau)_k \otimes \phi_0 \\ &= (\sigma_0 \otimes \tau_0) \otimes \phi_k + (\sigma_0 \otimes \tau_1 + \sigma_1 \otimes \tau_0) \otimes \phi_{k-1} + \cdots \end{aligned}$$

[2] O *produto tensorial* de um j-tensor de V por um k-tensor de V é um $(j+k)$-tensor de V, definido por: (i) $\alpha, \beta \in R: \alpha \otimes \beta = \alpha\beta$, (ii) $\lambda \in R$ e $t \in T^p(V)$, com $p \geq 1$: $\lambda \otimes t = t \otimes \lambda = \lambda t$, (iii) $s \in T^j(V)$ e $t \in T^k(V)$, com $j, k \geq 1 : s \otimes t \in T^{j+k}(V)$ tal que $s \otimes t(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j+k}) = s(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j)t(\mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j+k})$.
O produto tensorial satisfaz as leis distributivas (à esquerda e à direita) e a lei associativa.

$$
\begin{aligned}
& +(\sigma_0 \otimes \tau_k + \sigma_1 \otimes \tau_{k-1} + \cdots + \sigma_k \otimes \tau_0) \otimes \phi_0 \\
= \; & \sigma_0 \otimes (\tau_0 \otimes \phi_k) + \sigma_0 \otimes (\tau_1 \otimes \phi_{k-1}) + \cdots + \sigma_0 \otimes (\tau_k \otimes \phi_0) \\
& +\sigma_1 \otimes (\tau_0 \otimes \phi_{k-1}) + \cdots + \sigma_1 \otimes (\tau_{k-1} \otimes \phi_0) + \sigma_k \otimes (\tau_0 \otimes \phi_0) \\
= \; & \sigma_0 \otimes (\tau_0 \otimes \phi_k + \tau_1 \otimes \phi_{k-1} + \cdots + \tau_k \otimes \phi_0) \\
& +\sigma_1 \otimes (\tau_0 \otimes \phi_{k-1} + \cdots + \tau_{k-1} \otimes \phi_0) + \cdots + \sigma_k \otimes (\tau_0 \otimes \phi_0) \\
= \; & \sigma_0 \otimes (\tau \otimes \phi)_k + \sigma_1 \otimes (\tau \otimes \phi)_{k-1} + \cdots + \sigma_k \otimes (\tau \otimes \phi)_0, \\
[(\sigma \otimes \tau) \otimes \phi]_k = \; & [\sigma \otimes (\tau \otimes \phi)]_k,
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a definição do produto tensorial de multitensores, as distributividades (à esquerda e à direita) e a associatividade do produto tensorial de k-tensores.

Desta maneira construimos uma estrutura algébrica $\langle T(V), \otimes \rangle$ que é uma álgebra associativa, dita a *álgebra de multitensores sobre V.*

Vejamos uma propriedade interessante na álgebra de multitensores.

Proposição 1.7: Se $\overset{\star}{\sigma}_j = (\ldots, \sigma_j, \ldots)$ e $\overset{\star}{\tau}_k = (\ldots, \tau_k, \ldots)$ são multitensores homogêneos de graduações j e k, então $\overset{\star}{\sigma}_j \otimes \overset{\star}{\tau}_k = (\ldots, \sigma_j \otimes \tau_k, \ldots)$ é um multitensor homogêneo de graduação $j+k$.

Isto quer dizer que os multitensores homogêneos de graduação k são algébricamente indistiguíveis dos k-tensores, com relação ao produto tensorial.

1.4 Conjugação

Primeiramente, definimos a conjugação de k-tensores pelo seguinte esquema axiomático

$$
- : T^k(V) \to T^k(V), \tau \mapsto \overline{\tau}, \tag{1.4}
$$

tal que (i) $\alpha \in R$ (0-tensor): $\overline{\alpha} = \alpha$, (ii) $a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \in T^k(V)$, com $k \geq 1$ (k-tensor simples): $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k)^- = (-1)^k a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$, (iii) $\lambda, \mu \in R$ e $\sigma, \tau \in T^k(V) : (\lambda\sigma + \mu\tau)^- = \lambda\overline{\sigma} + \mu\overline{\tau}$, linearidade (axioma de extensão linear).

Note-se que o axioma (iii) é necessário para fazermos a conjugação de um k-tensor de V do tipo não-simples, pois todo k-tensor não-simples é alguma combinação linear de k-tensores simples (i.e., um produto tensorial de um número k de fatores formas).

Definimos agora a conjugação de multitensores por

$$- : T(V) \to T(V), \tau \mapsto \overline{\tau}, \tag{1.5}$$

tal que para cada $k \in N_0 : (\overline{\tau})_k = (\tau_k)^-$.

Obviamente, $-$ é um operador linear involutivo; ademais, observamos que a homogeneidade preserva-se através da conjugação, isto é, o conjugado de um multitensor homogêneo é também um multitensor homogêneo.

1.5 Reversão

Primeiramente, definimos a reversão de k-tensores por um esquema axiomático

$$\sim: T^k(V) \to T^k(V), \tau \mapsto \widetilde{\tau}, \tag{1.6}$$

tal que (i) $\alpha \in R$ (0-tensor): $\widetilde{\alpha} = \alpha$, (ii) $a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k \in T^k(V)$,com $k \geq 1$ (k-tensor simples): $(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k)^\sim = a_k \otimes \cdots \otimes a_2 \otimes a_1$, (iii) $\lambda, \mu \in R$ e $\sigma, \tau \in T^k(V) : (\lambda\sigma + \mu\tau)^\sim = \lambda\widetilde{\sigma} + \mu\widetilde{\tau}$, linearidade (axioma de extensão linear).

O axioma (iii) é necessário para fazermos a reversão de k-tensores de V do tipo não-simples.

A reversão de multitensores define-se por

$$\sim: T(V) \to T(V), \tau \mapsto \widetilde{\tau}, \tag{1.7}$$

tal que para cada $k \in N_0 : (\widetilde{\tau})_k = (\tau_k)^\sim$.

Também, $\sim$ é um operador linear involutivo, e ainda preserva a homogeneidade.

2. Espaço com Produto Escalar

Para construirmos um produto escalar no espaço de multitensores sobre V, se faz necessesário definirmos primeiramente um produto escalar no espaço de k-tensores sobre V

Por sua vez, o produto escalar de k- tensores de V será definido mediante um esquema axiomático que faz uso do produto ordinário em R e de um tensor métrico de V.

2.1 Produto Escalar de k-Tensores

Seja $\langle V, g\rangle$ uma estrutura algébrica, na qual V é um espaço linear sobre R e g é um tensor métrico[3] de V, às vezes, chamada de *espaço com métrica.*

O isomorfismo fundamental[4], digamos $\#$, entre V e V^* (o dual de V) induzido pelo tensor métrico de V, permite-nos dotar a V^*com um *produto escalar* (i.e., o produto escalar de formas)

$$V^* \times V^* \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in R \text{ tal que: } a \cdot b = g(\#^{-1}a, \#^{-1}b). \tag{1.8}$$

Trata-se de um produto escalar "bem-definido", isto é, com distributividade, simetria, associatividade mista e não-degenerescência, devido às propriedades do tensor métrico.

Sejam $\langle \mathbf{e}_k\rangle$ e $\langle \varepsilon^k\rangle$ bases de V e V^* respectivamente, onde a segunda é dual da primeira (i.e $\varepsilon^k(\mathbf{e}_j) = \delta_j^k$). O produto escalar de a e b pode ser escrito, por exemplo: $a \cdot b = g^{jk}a_j b_k$; onde g^{jk} são as jk-ésimas entradas da inversa da matriz associada a g com relação a $\langle \mathbf{e}_k\rangle$,cujas jk-ésimas entradas são $g_{jk} = g(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$(esta última é inversível devido à não-degenerescência de g!), e $a_j = a(\mathbf{e}_j)$ é j-ésima componente de a em $\langle \varepsilon^k\rangle$, etc.

Agora, o *produto escalar de dois k-tensores de V* é um escalar (i.e., um número real), definido por

$$T^k(V) \times T^k(V) \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \cdot \tau \in R, \tag{1.9}$$

tal que (i) $\alpha, \beta \in R$ (dois 0-tensores): $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$, produto ordinário em R, (ii) $a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$, $b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \in T^k(V)$, com $k \geq 1$ (dois k-tensores simples): $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) \cdot (b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) = \dfrac{1}{k!}(a_1 \cdot b_1) \cdots (a_k \cdot b_k)$, (iii) $\sigma, \tau, \phi \in T^k(V) : (\sigma + \tau) \cdot \phi = \sigma \cdot \phi + \tau \cdot \phi$ e $\sigma \cdot (\tau + \phi) = \sigma \cdot \tau + \sigma \cdot \phi$, distributividades à esquerda e à direita, (iv) $\lambda \in R$ e $\sigma, \tau \in T^k(V) : (\lambda\sigma) \cdot \tau = \sigma \cdot (\lambda\tau) = \lambda(\sigma \cdot \tau)$, associatividade mista.

---

[3]Um tensor métrico de V é um 2-tensor de V, simétrico e não-degenerado, isto é: $g \in T^2(V)$ tal que (i) $\forall \mathbf{x} \in V, \forall \mathbf{y} \in V$: $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetria), (ii) $(\exists \mathbf{x} \in V \ / \ \forall \mathbf{y} \in V$: $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0) \Rightarrow \mathbf{x} = 0$ (não-degenerescência).

[4]Existe uma aplicação linear de V a V^*(o dual de V), digamos $\#$,definida por $\# : V \to V^*$ tal que para todo $\mathbf{y} \in V$: $\#\mathbf{x}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Se V é de dimensão finita então $\#$ é uma aplicação linear bijetora, é dizer, $\#$ é um isomorfismo linear entre V e V^*. Se $\mathbf{x} = x^k\mathbf{e}_k$, então $\#\mathbf{x} = g_{jk}x^j\varepsilon^k$ e ainda se $x = x_k\varepsilon^k$, deve ser $\#^{-1}x = g^{jk}x_j\mathbf{e}_k$.

Note-se que (iii) é um axioma de extensão linear e é necessário para fazermos o cálculo do produto escalar de dois k-tensores de V do tipo não-simples.

A consistência (não contradição interna) deste esquema axiomático pode ser mostrada fácilmente!.

Porém, está o produto escalar de k-tensores bem definido? Isto é, o produto definido acima satisfaz os axiomas de um produto escalar: a simetria, a distributividade, a associatividade mista e a não-degenerescência? (Veja, por exemplo, [1], [3]).

Para provarmos a propriedade de simetria devemos considerar por separado os casos dos números reais ($k = 0$) e k-tensores "própriamente ditos" ($k \geq 1$).

Se $\alpha, \beta \in R$, então: $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \cdot \alpha$; por (i), pela comutatividade do produto real e por (i); e portanto: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Sejam $\sigma, \tau \in T^k(V)$, com $k \geq 1$, se expressarmos σ e τ na base fundamental do espaço de k-tensores sobre V: $\sigma = \sigma_{p_1 \dots p_k} \varepsilon^{p_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{p_k}$ e $\tau = \tau_{q_1 \dots q_k} \varepsilon^{q_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{q_k}$, teremos que

$$
\begin{aligned}
\sigma \cdot \tau &= \sigma_{p_1 \dots p_k} \tau_{q_1 \dots q_k} (\varepsilon^{p_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{p_k}) \cdot (\varepsilon^{q_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{q_k}) \\
&= \sigma_{p_1 \dots p_k} \tau_{q_1 \dots q_k} \frac{1}{k!} (\varepsilon^{p_1} \cdot \varepsilon^{q_1}) \cdots (\varepsilon^{p_k} \cdot \varepsilon^{q_k}) \\
&= \tau_{q_1 \dots q_k} \sigma_{p_1 \dots p_k} \frac{1}{k!} (\varepsilon^{q_1} \cdot \varepsilon^{p_1}) \cdots (\varepsilon^{q_k} \cdot \varepsilon^{p_k}) \\
&= \tau_{q_1 \dots q_k} \sigma_{p_1 \dots p_k} (\varepsilon^{q_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{q_k}) \cdot (\varepsilon^{p_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{p_k}), \\
\sigma \cdot \tau &= \tau \cdot \sigma,
\end{aligned}
$$

onde utilizamos (ii), (iii), as comutatividades do produto real e do produto escalar de formas.

A distributividade e associatividade mista são dadas precisamente por (iii) e (iv).

Para provarmos a propriedade de não-degenerescência consideraremos novamente os casos dos números reais e k-tensores própriamente ditos.

Seja algum $\alpha \in R$, devemos provar que se $\alpha \cdot \beta = 0$, para todo $\beta \in R$, então $\alpha = 0$

A prova é trivial, como $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$ e β é um número real arbitrário, tome-se por exemplo $\beta = 1$, se seguirá que $\alpha = 0$

Seja algum $\sigma \in T^k(V)$, com $k \geq 1$, devemos provar que se $\sigma \cdot \tau = 0$, para todo $\tau \in T^k(V)$, então $\sigma = o$ (o é o k-tensor nulo de $T^k(V)$).

Já que τ é um multitensor arbitrário, escolha-se τ seqüencialmente igual a cada um dos elementos da base fundamental do espaço de k-tensores sobre V, esses são $\varepsilon^{q_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{q_k}$, com $q_1, \ldots, q_k = 1, \ldots, k$ (um número n^k de k-tensores simples!); todavia, se expressarmos σ na "recíproca" da base fundamental de $T^k(V)$: $\sigma = \sigma^{p_1 \cdots p_k} \varepsilon_{p_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{p_k}$, teremos que

$$\begin{aligned}
(\sigma^{p_1 \cdots p_k} \varepsilon_{p_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{p_k}) \cdot (\varepsilon^{q_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{q_k}) &= 0 \\
\sigma^{p_1 \cdots p_k} \frac{1}{k!} (\varepsilon_{p_1} \cdot \varepsilon^{q_1}) \cdots (\varepsilon_{p_k} \cdot \varepsilon^{q_k}) &= 0 \\
\sigma^{p_1 \cdots p_k} \frac{1}{k!} \delta^{q_1}_{p_1} \cdots \delta^{q_k}_{p_k} &= 0 \\
\sigma^{q_1 \cdots q_k} &= 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\sigma = o$. Note-se que utilizamos (ii), (iii), (iv) e a reciprocidade das bases $\langle \varepsilon_p \rangle$ e $\langle \varepsilon^q \rangle$ (i.e., $\varepsilon_p \cdot \varepsilon^q = \delta^q_p$).

Assim fica demonstrado que o produto escalar de k-tensores é um produto escalar bem-definido no espaço de k-tensores sobre V.

2.2 Produto Escalar de Multitensores

O *produto escalar de dois multitensores de* V é um escalar (i.e um número real), definido por

$$T(V) \times T(V) \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \cdot \tau \in R \text{ tal que: } \sigma \cdot \tau = \sum_{k=0}^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_k \cdot \tau_k, \qquad (1.10)$$

onde $\sigma_k \cdot \tau_k$ é o produto escalar das k-ésimas componentes de σ e τ (i.e., como sabemos, k-tensores de V).

Proposição 2.1: $\sigma \cdot \tau = \sum_{k=0}^{M} \sigma_k \cdot \tau_k$, com $M \geq máx(M_\sigma, M_\tau)$, o número de termos na soma é $mín(M_\sigma, M_\tau)$.

Provaremos agora que o produto escalar de multitensores é um produto escalar bem-definido no espaço de multitensores sobre V; i.e., satisfaz de fato as propriedades de simetria, distributividade, associatividade mista e não-degenerescência.

A simetria e a associatividade mista do produto escalar em $T(V)$ dependem exclusivamente da simetria e da associatividade do produto escalar em $T^k(V)$, e por isso seguem-se trivialmente.

A distributividade do produto escalar em $T(V)$; isto é, para quaisquer $\sigma, \tau, \phi, \in T(V)$: $(\sigma + \tau) \cdot \phi = \sigma \cdot \phi + \tau \cdot \phi$ e $\sigma \cdot (\tau + \phi) = \sigma \cdot \tau + \sigma \cdot \phi$, pode ser provada fácilmente se levarmos em conta algumas propriedades dos graus M_σ, M_τ, M_ϕ desses $\sigma, \tau, \phi \in T(V)$.

Podemos escrever, por exemplo,

$$\begin{aligned}(\sigma+\tau)\cdot\phi &= \sum_{k=0}^{máx(M_{\sigma+\tau},M_\phi)} (\sigma+\tau)_k\cdot\phi_k = \sum_{k=0}^{máx(M_{\sigma+\tau},M_\phi)} \sigma_k\cdot\phi_k + \sum_{k=0}^{máx(M_{\sigma+\tau},M_\phi)} \tau_k\cdot\phi_k \\ &= \sum_{k=0}^{máx(M_\sigma,M_\phi)} \sigma_k\cdot\phi_k + \sum_{k=0}^{máx(M_\tau,M_\phi)} \tau_k\cdot\phi_k = \sigma\cdot\phi+\tau\cdot\phi,\end{aligned}$$

onde utilizamos a definição do produto escalar em $T(V)$ (e a prop. 2.1), a óbvia propriedade dos graus: $máx(M_{\sigma+\tau}, M_\phi) \geq máx(M_\sigma, M_\phi)$ e $máx(M_{\sigma+\tau}, M_\phi) \geq máx(M_\tau, M_\phi)$ (leve-se em conta que $M_{\sigma+\tau} = máx(M_\sigma, M_\tau)$) e a distributividade do produto escalar em $T^k(V)$.

A associatividade mista do produto escalar em $T(V)$ também depende exclusivamente do produto escalar em $T^k(V)$.

A não-degenerescência do produto escalar em $T(V)$ é conseqüencia da não-degenerescência do produto escalar em $T^k(V)$.

Seja algum $\sigma \in T(V)$, devemos provar que: se $\sigma\cdot\tau = 0$, para todo $\tau \in T(V)$, então $\sigma = O$, (O é o multitensor nulo de $T(V)$).

Já que τ é um multitensor arbitrário, escolha-se τ seqüencialmente igual a cada um dos multitensores homogêneos de graduação k, digamos $\overset{\star}{\tau}_k = (\ldots, \tau_k, \ldots)$, com $k \in N_0$, teremos que $\sigma\cdot \overset{\star}{\tau}_k = 0$, para cada $k \in N_0$; isto é, pela definição do produto escalar em $T(V)$ $\sigma_k\cdot\tau_k = 0$, para todo $\tau_k \in T^k(V)$; porém, pela não-degenerescência do produto escalar em $T^k(V)$ devemos ter $\sigma_k = o$, para cada $k \in N_0$, i.e., $\sigma = O$.

Desta maneira demonstramos que o produto escalar de multitensores está bem definido.

A estrutura algébrica $\langle T(V), \cdot\rangle$ é um espaço com produto escalar baseada no espaço com métrica $\langle V, g\rangle$ e será chamada de *espaço com produto escalar.*

Finalizamos esta seção apresentando uma propriedade interessante em $\langle T(V), \cdot\rangle$.

Proposição 2.2: Se $\overset{\star}{\sigma}_k = (\ldots, \sigma_k, \ldots)$ e $\overset{\star}{\tau}_k = (\ldots, \tau_k, \ldots)$ são multitensores homogêneos de graduação k, então $\overset{\star}{\sigma}_k \cdot \overset{\star}{\tau}_k = \sigma_k\cdot\tau_k$; o produto escalar de multitensores homogêneos de distintas graduações é zero.

Este resultado pode ser interpretado como indistinção algébrica entre os multitensores homogêneos de graduação k e os k-tensores, com relação ao produto escalar.

3. Álgebra Interior

Introduziremos dois importantes produtos de multitensores: os produtos contraídos (ou contrações) á esquerda e á direita. Com as contrações o espaço de multitensores ganhará uma estrutura natural de álgebra não-associativa (real).

Todavia, para definirmos os produtos contraídos de multitensores precisamos definir os produtos contraídos de k-tensores. Isto será feito mediante esquemas axiomáticos que fazem uso do espaço de multitensores com produto escalar.

3.1 Produtos Contraídos de k-Tensores

Seja $(T(V), \cdot)$ o espaço de multitensores com produto escalar; o *produto contraído à esquerda* de um j-tensor de V por um k-tensor de V, com $j \leq k$, é um $(k-j)$-tensor de V definido por

$$T^j(V) \times T^k(V) \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \lrcorner\, \tau \in T^{k-j}(V), \tag{1.11}$$

tal que

(i) $\alpha, \beta \in R$ (dois 0-tensores): $\alpha \lrcorner\, \beta = \alpha\beta$, produto ordinário em R.

(ii) $\alpha \in R, \tau \in T^k(V)$,com $k \geq 1 : \alpha \lrcorner\, \tau = \alpha\tau = \tau\alpha$, produto de escalar por k-tensor

(iii) $a_1 \otimes \cdots \otimes a_j \in T^j(V), b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \in T^k(V)$, com $1 \leq j \leq k$ (um j-tensor e um k-tensor, ambos simples): $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_j) \lrcorner\, (b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) = (a_1 \otimes \cdots \otimes a_j) \cdot (b_1 \otimes \cdots \otimes b_j)^{\sim} b_{j+1} \otimes \cdots \otimes b_k$,

(iv) $\sigma, \tau \in T^j(V), \phi \in T^k(V) : (\sigma + \tau) \lrcorner\, \phi = \sigma \lrcorner\, \phi + \tau \lrcorner\, \phi$, distributividade à esquerda; $\sigma \in T^j(V), \tau, \phi \in T^k(V) : \sigma \lrcorner\, (\tau + \phi) = \sigma \lrcorner\, \tau + \sigma \lrcorner\, \phi$, distributividade à direita

(v) $\lambda \in R, \sigma \in T^j(V), \tau \in T^k(V) : (\lambda\sigma) \lrcorner\, \tau = \sigma \lrcorner\, (\lambda\tau) = \lambda(\sigma \lrcorner\, \tau)$, associatividade mista (axioma de extensão linear).

O *produto contraído à direita* de um j-tensor de V por um k-tensor de V, com $j \geq k$, é um $(j-k)$-tensor de V definido por

$$T^j(V) \times T^k(V) \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \llcorner \tau \in T^{j-k}(V), \tag{1.12}$$

tal que

(i) $\alpha, \beta \in R$ (dois 0-tensores): $\alpha \llcorner \beta = \alpha\beta$, produto ordinário em R

(ii) $\sigma \in T^j(V)$, com $j \geq 1, \beta \in R : \sigma \llcorner \beta = \beta\sigma = \sigma\beta$, produto de j-tensor por escalar

(iii) $a_1 \otimes \cdots \otimes a_j \in T^j(V), b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \in T^k(V)$, com $j \geq k \geq 1$ (um j-tensor e um k-tensor, ambos simples): $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_j) \llcorner (b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-k}(a_{j-k+1} \otimes \cdots \otimes a_j)^{\sim} \cdot (b_1 \otimes \cdots \otimes b_k)$

(iv) $\sigma, \tau \in T^j(V), \phi \in T^k(V) : (\sigma + \tau) \llcorner \phi = \sigma \llcorner \phi + \tau \llcorner \phi$, distributividade à esquerda; $\sigma \in T^j(V), \tau, \phi \in T^k(V) : \sigma \llcorner (\tau + \phi) = \sigma \llcorner \tau + \sigma \llcorner \phi$, distibutividade à direita

(v) $\lambda \in R, \sigma \in T^j(V)$, $\tau \in T^k(V) : (\lambda\sigma) \llcorner \tau = \sigma \llcorner (\lambda\tau) = \lambda(\sigma \llcorner \tau)$, associatividade mista (axioma de extensão linear)

Os axiomas (iv) e (v) nas definições (1.11) e (1.12) dos produtos contraídos são necessários para fazermos os produtos contraídos de k-tensores não-simples.

As provas de consistência destes esquemas axiomáticos não apresentam dificuldades.

3.2 Produtos Contraídos de Multitensores

O *produto contraído à esquerda* de dois multitensores de V é um multitensor de V, definido por

$$T(V) \times T(V) \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \lrcorner \tau \in T(V), \tag{1.13}$$

tal que para cada $k \in N_0 : (\sigma \lrcorner \tau)_k = \sum\limits_{j=0}^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_j \lrcorner \tau_{j+k}$, onde $\sigma_j \lrcorner \tau_{j+k}$ é o produto contraído à esquerda da j-ésima componente de σ pela $(j+k)$-ésima componente de τ, um j-tensor e um $(j+k)$-tensor, isto significa que: se $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k, \ldots, \sigma_{M_\sigma})$ e $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_{M_\tau})$, então

$$\sigma \lrcorner \tau = (\sum_{j=0}^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_j \lrcorner \tau_j, \ldots, \sum_{j=0}^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_j \lrcorner \tau_{j+k}, \ldots, \sum_{j=0}^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_j \lrcorner \tau_{j+M_\tau}).$$

O *produto contraído à direita* de dois multitensores de V é um multitensor de V, definido por

$$T(V) \times T(V) \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \llcorner \tau \in T(V), \tag{1.14}$$

tal que para cada $k \in N_0 : (\sigma \llcorner \tau)_k = \sum^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_{j+k} \llcorner \tau_j$, onde $\sigma_{j+k} \llcorner \tau_j$ é o produto contraído à direita da $(j+k)$-ésima componente de σ pela j-ésima componente de τ,um $(j+k)$-tensor e um j-tensor, isto significa que: se $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{M_\sigma})$ e $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{M_\tau})$, então

$$\sigma \llcorner \tau = \left(\sum_{j=0}^{máx(M_{\sigma s}, M_\tau)} \sigma_j \llcorner \tau_j, \ldots, \sum_{j=0}^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_{j+k} \llcorner \tau_j, \ldots, \sum_{j=0}^{máx(M_\sigma, M_\tau)} \sigma_{j+M_\sigma} \llcorner \tau_j \right).$$

Proposição 3.1: $(\sigma \lrcorner\, \tau)_k = \sum_{j=0}^{M} \sigma_j \lrcorner\, \tau_{j+k}$ e $(\sigma \llcorner \tau)_k = \sum_{j=0}^{M} \sigma_{j+k} \llcorner \tau_k$, com $M \geq máx(M_\sigma, M_\tau)$, o grau de $\sigma \lrcorner\, \tau$ é M_t e o grau de $\sigma \llcorner \tau$ é M_σ.

Os produtos contraídos de multitensores são distributivos à esquerda e à direita.

Portanto, $\langle T(V), \lrcorner, \llcorner \rangle$, é uma álgebra dupla (isto é, com relação a ambos os produtos $\lrcorner, \llcorner$) não-associativa!, será chamada de *álgebra interior sobre* $\langle V, g \rangle$.

Finalizamos esta seção apresentando uma propriedade interessante na álgebra interior.

Proposição 3.2: Se $\overset{\star}{\sigma}_j = (\ldots, \sigma_j, \ldots)$ e $\overset{\star}{\tau}_k = (\ldots, \tau_k, \ldots)$ são multitensores homogêneos de graduações j e k, então

$$\overset{\star}{\sigma}_j \lrcorner\, \overset{\star}{\tau}_k = \begin{cases} (\ldots, \sigma_j \lrcorner\, \tau_k, \ldots), & j \leq k \\ O, & j > k \end{cases} \quad \text{e} \quad \overset{\star}{\sigma}_j \llcorner \overset{\star}{\tau}_k = \begin{cases} (\ldots, \sigma_j \llcorner \tau_k, \ldots), & j \geq k \\ O, & j < k \end{cases},$$

os multitensores superiores são homogêneos de graduações $k - j$ e $j - k$ respectivamente e os inferiores são o multitensor nulo.

Tal fato pode ser interpretado como indistinção algébrica entre os multitensores homogêneos de graduação k e os k-tensores, com relação aos produtos contraídos.

Vimos nas seções (1.), (2.) e (3.) que os multitensores homogêneos de graduação k são algébricamente indistinguíveis dos k-tensores, como espaços lineares (prop. 1.4) e como álgebras (props. 1.7 e 3.2); isso permite-nos identificar esses objetos algébricos entre si!

Todavia, a k-ésima componente de um multitensor coincidirá com a k-parte do mesmo, e pela prop. (1.5), qualquer multitensor τ de grau M_τ poderá ser escrito simplesmente $\tau = \tau_0 + \cdots + \tau_k + \cdots + \tau_{M_\tau}$.

4. Álgebra Exterior

Definiremos o conceito importante de multivetor de um espaço linear (real); o conjunto dos multivetores é naturalmente um espaço linear (real).

O espaço de multivetores será dotado com um produto de multivetores, o produto exterior, e desta maneira ele virá a ser uma álgebra associativa (real).

4.1 Espaço de Multivetores

Sejam V um espaço linear sobre R, de dimensão finita, e $\Lambda^k(V)$ o espaço de k-vetores [5] sobre V.

Um *multivetor de* V é uma ∞-upla de k-vetores de V, isto é

$$A : N_0 \to \bigcup_{j \in N_0} \Lambda^j(V) \text{ tal que para cada } k \in N_0 : A_k \in \Lambda^k(V). \tag{1.15}$$

Proposição 4.1: Todo multivetor é um multitensor e o grau de um multivetor não é maior que a dimensão do espaço fundamental.

Isso é devido a que todo k-vetor é um k-tensor e todos os k-vetores, com $k > n$, (n é a dimensão de V) são k-vetores nulos (pela completa antisimetria do k-vetor!).

O conjunto dos multivetores de V, denotado por $\Lambda(V)$, é naturalmente um espaço linear sobre R , trata-se de um subespaço de $T(V)$, será chamado de *espaço de multivetores sobre* V.

Proposição 4.2: Sejam $\langle \mathrm{e}_k \rangle$ e $\langle \varepsilon^k \rangle$ bases de V e V^*, tais que a segunda é dual da primeira, então $\langle (1, \varepsilon^{p_1}, \ldots, \varepsilon^{p_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{p_k}, \ldots, \varepsilon^{p_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{p_n}) \rangle_{1 \leq k \leq n}$ é uma base de $\Lambda(V)$; isto implica que: se $\dim V = n$, então $\dim \Lambda(V) = 1 + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + n = 2^n$.

Proposição 4.3: O conjunto dos multivetores homogêneos de graduação k (i.e., $A = \langle A \rangle_k$) é um subespaço de $\Lambda(V)$, isomorfo a $\Lambda^k(V)$.

4.2 Produto Exterior

O *produto exterior* (i.e., o produto de Grassmann) *de dois multivetores de* V é um multivetor de V, definido por

$$\Lambda(V) \times \Lambda(V) \ni (A, B) \mapsto A \wedge B \in \Lambda(V), \tag{1.16}$$

tal que: $(A \wedge B)_k = \sum_{j=0}^{k} A_j \wedge B_{k-j}$,onde $A_j \wedge B_{k-j}$ é o produto exterior[6] da j-ésima componente

[5] Um *k-vetor* de V ($k \in N_0, k \geq 2$) é um k-tensor de V totalmente antisimétrico, isto é, $a \in T^k(V)$ tal que para todos $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in V$, com $1 \leq i \leq j \leq k$: $a(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_k) = -a(\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_k)$.

Por conveniência, um escalar real e um 1-tensor de V são ditos um *0-vetor* de V e um *1-vetor* de V ($k \in N_0, k \leq 1$) respectivamente. $\Lambda^k(V)$,o conjunto dos k-vetores de V, é um subespaço de $T^k(V)$.

Notem-se as coincidências: $\Lambda^0(V) = R$ e $\Lambda^1(V) = V^*$(o dual de V).

[6] O produto exterior (i.e de Grassmann) de um j-vetor de V por um k-vetor de V é um $(j+k)$-vetor de V,

de A pela $(k-j)$-ésima componente de B, i.e., um j-vetor de V e um $(k-j)$-vetor de V), isto significa que: se $A=(A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$ e $B=(B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots, B_n)$,então

$$A \wedge B = (A_0 B_0, A_0 B_1 + A_1 B_0, \ldots, \sum_{j=0}^{k} A_j \wedge B_{k-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{n} A_j \wedge B_{n-j}).$$

O produto exterior de multivetores possui as leis distributivas, à esquerda e à direita, e a lei associativa. As primeiras são conseqüência das correspondentes leis distributivas para o produto exterior de k-vetores e a segunda pode ser provada fácilmente seguindo um raciocínio análogo ao utilizado na prova de associatividade do produto tensorial de multitensores.

Desta maneira, concluimos que estrutura álgebrica $(\Lambda(V), \wedge)$ é uma álgebra associativa e será chamada de *álgebra de multivetores sobre* V (ou *álgebra exterior de Grassmann*).

Finalizando esta seção, veremos uma propriedade interessante na álgebra exterior e desenvolveremos alguns exemplos importantes.

Proposição 4.4: Se $\overset{\star}{A_j}=(\ldots, A_j, \ldots)$ e $\overset{\star}{B_k}=(\ldots, B_k, \ldots)$ são multivetores homogêneos de graduações j e k, então $\overset{\star}{A_j} \wedge \overset{\star}{B_k}=(\ldots, A_j \wedge B_k, \ldots)$ é multivetor homogêneo de graduação $j+k$.

Isto significa que os multivetores homogêneos de graduação k são algébricamente indistinguíveis dos k-vetores, com relação ao produto exterior.

De acordo com as props. (4.1), (4.3) e (4.4), os multivetores homogêneos de graduação k são algébricamente indistinguíveis dos k-vetores, e ainda pela prop. (1.5), todo multivetor poderá ser escrito como soma de k-vetores, de $k=0$ até $k=n$ (n é a dimensão do espaço fundamental).

Exemplo 1.1: Fórmula para a contração à esquerda de um vetor por um k-vetor simples[7]

$$a \lrcorner (b_1 \wedge \ldots \wedge b_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} (a \cdot b_j) b_1 \wedge \ldots \wedge \breve{b_j} \wedge \ldots \wedge b_k.$$

O símbolo $\breve{b_j}$ significa que o fator b_j deve ser tirado do j-ésimo termo (sem alterar as ordens

definido por: (i) $\alpha, \beta \in R : \alpha \wedge \beta = \alpha\beta$, (ii) $\lambda \in R$ e $u \in \Lambda^k(V)$, com $k \geq 1$: $\lambda \wedge u = u \wedge \lambda = \lambda u$, (iii) $a \in \Lambda^j(V)$ e $b \in \Lambda^k(V)$, com $j,k \geq 1$: $a \wedge b = \dfrac{(j+k)!}{j!k!} \mathcal{A}(a \otimes b)$, onde $\mathcal{A}$ é o operador de antisimetrização.

O produto exterior tem as leis distributivas (à esquerda e à direita) e a lei associativa; também possui uma lei de comutação: $a \in \Lambda^j(V)$ e $b \in \Lambda^k(V)$: $a \wedge b = (-1)^{jk} b \wedge a$.

[7]Um k-vetor simples em termos de k-tensores simples: $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = e^{j_1 \ldots j_k} a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_k}$, onde $e^{j_1 \ldots j_k}$ é o "símbolo de permutação de ordem k".

dos outros fatores!).

Só provaremos os casos particulares $k = 2$ e $k = 3$,utilizando a distributividade à direita e o axioma (*iii*) da contração à esquerda, o ax. (*ii*) da def. (1.9) e o ax. (*ii*) da def. (1.6), temos que

$$\begin{aligned}
a\lrcorner\,(b_1 \wedge b_2) &= a\lrcorner\,(b_1 \otimes b_2 - b_2 \otimes b_1) \\
&= (a \cdot b_1)b_2 - (a \cdot b_2)b_1, \\
a\lrcorner\,(b_1 \wedge b_2 \wedge b_3) &= a\lrcorner\,(b_1 \otimes b_2 \otimes b_3 + b_2 \otimes b_3 \otimes b_1 + b_3 \otimes b_1 \otimes b_2 \\
&\quad - b_1 \otimes b_3 \otimes b_2 - b_3 \otimes b_2 \otimes b_1 - b_2 \otimes b_1 \otimes b_3) \\
&= (a \cdot b_1)(b_2 \otimes b_3 - b_3 \otimes b_2) - (a \cdot b_2)(b_1 \otimes b_3 - b_3 \otimes b_1) \\
&\quad + (a \cdot b_3)(b_1 \otimes b_2 - b_2 \otimes b_1), \\
&= (a \cdot b_1)b_2 \wedge b_3 - (a \cdot b_2)b_1 \wedge b_3 + (a \cdot b_3)b_1 \wedge b_2.
\end{aligned}$$

Assim fica ilustrado o caso geral.

Exemplo 1.2: Identidade para desenvolver o produto escalar de dois k-vetores simples

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \cdot (b_1 \wedge \ldots \wedge b_k) = \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \cdots & a_1 \cdot b_k \\ \cdots & & \cdots \\ a_k \cdot b_1 & \cdots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix}.$$

Só apresentaremos a prova para o caso particular $k = 2$; utilizando o axioma (*ii*) e a distributividade do produto escalar temos que

$$\begin{aligned}
(a_1 \wedge a_2) \cdot (b_1 \wedge b_2) &= (a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1) \cdot (b_1 \otimes b_2 - b_2 \otimes b_1) \\
&= (a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) - (a_1 \otimes a_2) \cdot (b_2 \otimes b_1) \\
&\quad - (a_2 \otimes a_1) \cdot (b_1 \otimes b_2) + (a_2 \otimes a_1) \cdot (b_2 \otimes b_1) \\
&= \frac{1}{2!}(a_1 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2) - \frac{1}{2!}(a_1 \cdot b_2)(a_2 \cdot b_1) \\
&\quad - \frac{1}{2!}(a_2 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2) + \frac{1}{2!}(a_2 \cdot b_2)(a_1 \cdot b_1) \\
&= (a_1 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_2)(a_2 \cdot b_1)
\end{aligned}$$

$$(a_1 \wedge a_2) \cdot (b_1 \wedge b_2) \;=\; \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 \end{pmatrix}.$$

Isso ilustra o caso geral.

5. Álgebra de Clifford

Construiremos aqui a álgebra de Clifford associada à estrutura algébrica $\langle V, g\rangle$ onde V é um espaço linear sobre R, de dimensão finita, e g é um tensor métrico sobre V

Para tanto vamos dotar ao espaço de multivetores com um produto especial (dito produto de Clifford), um "tipo de combinação" dos produtos contraídos, nas duas versões (à esquerda e à direita), com o produto exterior.

O *produto de Clifford de dois multivetores de* V é um multivetor de V (denotado simplesmente por justaposição dos dois multivetores), será definido pelo seguinte esquema axiomático

$$\Lambda(V) \times \Lambda(V) \ni (A, B) \mapsto AB \in \Lambda(V), \tag{1.17}$$

tal que (i) $\lambda \in \Lambda^0(V) = R$ e $X \in \Lambda(V)$ (um escalar e um multivetor): $\lambda X = \lambda \lrcorner\, X = \lambda \wedge X$ e $X\lambda = X \llcorner \lambda = X \wedge \lambda$, (ii) $a \in \Lambda^1(V)$ e $A \in \Lambda(V)$ (um vetor e um multivetor):$aA = a\lrcorner\, A + a \wedge A$ e $Aa = A \llcorner a + A \wedge a$, (iii) $A, B, C \in \Lambda(V)$: $(AB)C = A(BC)$.

Observe-se que no axioma (i), de acordo com as defs. (1.13), (1.14) e (1.16), $\lambda X = X\lambda$ coincide exatamente com o produto do escalar λ pelo multivetor X; todavia, o produto de Clifford de dois números reais é o produto ordinário deles.

O produto de Clifford é distributivo à esquerda e à direita, e associativo.

A distributividade é conseqüência essencialmente das distributividades dos produtos contraídos e do produto exterior de multivetores, a associatividade é precisamente um axioma.

Construimos portanto uma estrutura algébrica $\langle \Lambda(V), \textit{produto de Clifford}\rangle$ associada à estrutura algébrica $\langle V, g\rangle$. A dependência desta última se dá através das contrações (à esquerda e à direita). Trata-se de uma álgebra associativa da maior importância, será chamada de *álgebra de Clifford sobre* $\langle V, g\rangle$ e denotada por $C\ell \langle V, g\rangle$.

Os multivetores, quando entendidos como elementos de $C\ell \langle V, g\rangle$, passam a ser chamados de *números de Clifford* (os elementos de qualquer álgebra chamam-se de números!).

Finalizando o Capítulo1, listamos algumas das identidades mais importantes nestas álgebras multivetoriais.

i. $A, B \in \Lambda(V) : \overline{A \wedge B} = \overline{A} \wedge \overline{B}, \overline{AB} = \overline{AB}$ e $\widetilde{A \wedge B} = \widetilde{B} \wedge \widetilde{A}, \widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$

ii. $A \in \Lambda(V) : \langle\overline{A}\rangle_k = (-1)^k \langle A\rangle_k$ e $\left\langle\widetilde{A}\right\rangle_k = (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} \langle A\rangle_k$

iii. $A_j \in \Lambda^j(V), B_k \in \Lambda^k(V) : A_j \lrcorner\, B_k = (-1)^{j(k-j)}\, B_k \llcorner A_j$ (com $j \leq k$) e $A_j \wedge B_k = (-1)^{jk} B_k \wedge A_j$

iv. $a \in \Lambda^1(V), A \in \Lambda(V) : a \lrcorner\, A = -\overline{A} \llcorner a = \frac{1}{2}(aA - \overline{A}a)$ e $a \wedge A = \overline{A} \wedge a = \frac{1}{2}(aA + \overline{A}a)$

v. $A, B \in \Lambda(V) : \frac{1}{2}\left\langle A\widetilde{B} - \widetilde{B}\overline{A}\right\rangle_1 = \left\langle\widetilde{\overline{B}} \lrcorner\, A\right\rangle_1$ e $\frac{1}{2}\left\langle A\widetilde{B} + \widetilde{B}\overline{A}\right\rangle_1 = \left\langle\widetilde{\overline{A}} \lrcorner\, B\right\rangle_1$

vi. $a \in \Lambda^1(V)$ e $A, B \in \Lambda(V) : (a \lrcorner\, A) \cdot B = A \cdot (a \wedge B)$

vii. $A, B, C \in \Lambda(V) : A \lrcorner\, (B \lrcorner\, C) = (A \wedge B) \lrcorner\, C$ e $(A \llcorner B) \llcorner C = A \llcorner (B \wedge C)$

viii. $A, B, C \in \Lambda(V) : (A \lrcorner\, B) \cdot C = B \cdot (\widetilde{A} \wedge C)$ e $(B \llcorner A) \cdot C = B \cdot (C \wedge \widetilde{A})$

ix. $A, B \in \Lambda(V) : \langle AB\rangle_0 = \widetilde{A} \cdot B = A \cdot \widetilde{B}$

x. $A, B, C \in \Lambda(V) : (AB) \cdot C = B \cdot (\widetilde{A}C)$ e $(BA) \cdot C = B \cdot (C\widetilde{A})$

xi. $a \in \Lambda^1(V)$ e $A, B \in \Lambda(V) : a \lrcorner\, (A \wedge B) = (a \lrcorner\, A) \wedge B + \overline{A} \wedge (a \lrcorner\, B)$

xii. $A_j \in \Lambda^j(V), B_k \in \Lambda^k(V) : A_jB_k = \langle A_jB_k\rangle_{|j-k|} + \langle A_jB_k\rangle_{|j-k|+2} + \cdots + \langle A_jB_k\rangle_{j+k}$

CAPÍTULO 2

Teoria de Funções Multivetoriais

Neste capítulo desenvolveremos os conceitos fundamentais da teoria de funções multivetoriais.

Serão introduzidas as noções de diferenciabilidade para as funcões multivetoriais de variável real e de variável multivetorial; definiremos a derivada paramétrica e a derivada multivetorial, e em particular, a derivada vetorial.

Introduziremos e desenvolveremos a noções de extensor e de funcional multivetorial de um extensor; e definiremos a derivada funcional.

1. Funções Multivetoriais de Variável Real

Uma aplicação de R (ou de um subconjunto aberto de R, digamos S) a $\Lambda(V)$, será chamada de *função multivetorial de variável real* (i.e., multivetor dependente de parâmetro real).

Uma *função multivetorial de k variáveis reais* é uma aplicação de R^k (ou de um subconjunto aberto de R^k) a $\Lambda(V)$ (i.e., multivetor dependente de k parâmetros reais).

A noção de limite, para as funções multivetoriais de variável real, pode ser introduzida fácilmente utilizando-se a noção de limite para funções reais ordinárias e a não-degenerescência do produto escalar de multivetores.

Seja $X : R \supset S \to \Lambda(V)$ uma função multivetorial de variável real, tomemos $\lambda_0 \in S$ e $L \in \Lambda(V)$.

Diz-se que o *limite de $X(\lambda)$ para λ aproximando-se a λ_0 é L*, e escreve-se $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda) = L$, se e somente se para todo multivetor $A \in \Lambda(V)$, é

$$L \cdot A = \lim_{\lambda \to \lambda_0} [X(\lambda) \cdot A]. \tag{2.1}$$

Note-se, no lado direito a presença do limite real ordinário.

Todavia, se existe o $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda)$ teremos para um multivetor arbitrário A, a sugestiva identidade

$$[\lim_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda)] \cdot A = \lim_{\lambda \to \lambda_0} [X(\lambda) \cdot A].$$

Qualquer função multivetorial, digamos $X(\lambda)$, pode ser escrita como uma das duas formas seguintes[8]

$$X(\lambda) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} X_J(\lambda) \varepsilon^J = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} X^J(\lambda) \varepsilon_J,$$

onde $X_J(\lambda) = X(\lambda) \cdot \varepsilon_J$ e $X^J(\lambda) = X(\lambda) \cdot \varepsilon^J$ são $2^n + 2^n$ funções reais ordinárias chamadas de componentes covariantes e contravariantes de $X(\lambda)$ respectivamente.

Proposição 1.1: Se existe $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda)$, então teremos que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} [\lim_{\lambda \to \lambda_0} X_J(\lambda)] \varepsilon^J = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} [\lim_{\lambda \to \lambda_0} X^J(\lambda)] \varepsilon_J.$$

Assim, o limite de funções multivetoriais de variável real terá propriedades análogas ao caso das funções reais ordinárias.

As noções de continuidade e derivação, para essas funções multivetoriais paramétricas, também podem ser introduzidas de modo completamente análogo ao caso das funções reais ordinárias, por exemplo: $X(\lambda)$ é dita *contínua em* λ_0 ($\lambda_0 \in S$) se e somente se

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda) = X(\lambda_0). \tag{2.2}$$

A *derivada de* $X(\lambda)$ *em* λ_0 ($\lambda_0 \in S$), denotada por $X'(\lambda_0)$, é definida por

$$X'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{X(\lambda) - X(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}. \tag{2.3}$$

Proposição 1.2: $X(\lambda)$ é contínua se e somente se as 2^n funções reais $X_J(\lambda)$ (ou as 2^n funções

[8] Sejam $\langle \varepsilon^J \rangle$ e $\langle \varepsilon_J \rangle$ duas bases de $\Lambda(V)$, definidas por $\varepsilon^J = 1, \varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_k}, \ldots, \varepsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_n}$ e $\varepsilon_J = 1, \varepsilon_{j_1}, \ldots, \varepsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_k}, \ldots, \varepsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_n}$ com os índices $j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_n$ variando desde 1 até n ($n = \dim V$). $J = 0, j_1, \ldots, j_1 \ldots j_k, \ldots, j_1 \ldots j_n$ é um *índice coletivo*.

Qualquer multivetor A pode ser expresso como $A = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} A_J \varepsilon^J = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} A^J \varepsilon_J$, onde $A_J = A \cdot \varepsilon_J$ e $A^J = A \cdot \varepsilon^J$ são $2^n + 2^n$ escalares (i.e., números reais), chamados de *componentes covariantes e contravariantes de* A, respectivamente.

$\nu(J) = 0, 1, \ldots, k, \ldots n$ para $J = 0, j_1, \ldots, j_1 \ldots j_k, \ldots, j_1 \ldots j_n$ é o *número de índices em* J.

reais $X^J(\lambda)$) são contínuas.

Proposição 1.3: Se existe a função derivada $X'(\lambda)$, então teremos que

$$X'(\lambda) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} X'_J(\lambda)\varepsilon^J = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} X^{J\prime}(\lambda)\varepsilon_J.$$

Portanto, a continuidade e a derivação de funções multivetoriais de variável real terão propriedades análogas ao caso das funções reais ordinárias. Por exemplo, as regras de derivação são

$$\begin{aligned}(X+Y)' &= X'+Y' \\ (X*Y)' &= X'*Y+X*Y' \text{ (regra de Leibnitz)} \\ (X\circ\phi)' &= (X'\circ\phi)\phi' \text{ (regra de cadeia)}\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $*$ é quaisquer dos quatro produtos de multivetores: $(\wedge), (\cdot), (\lrcorner, \llcorner)$ ou (*Clifford*); e ϕ é uma função real ordinária derivável com função derivada ϕ'.

No espaço linear dessas funções multivetoriais de variável escalar, do tipo deriváveis, podemos introduzir o operador de derivação $\frac{d}{d\lambda}$, definido por $\frac{d}{d\lambda}X(\lambda) = X'(\lambda)$.

Na mesma linha de raciocínio podemos desenvolver as noções de limite, continuidade e derivação para funções multivetoriais de k variáveis reais. Mais uma vez, teremos propriedades análogas ao caso das funções reais de várias variáveis.

2. Funções Multivetoriais de Variável Multivetorial

Uma aplicação de $\Lambda(V)$ (ou de um subespaço-parte[9]de $\Lambda(V)$) a $\Lambda(V)$, será chamada de *função multivetorial de variável multivetorial* (i.e., multivetor dependente de multivetor).

Uma *função multivetorial de k variáveis multivetoriais* é uma aplicação de $\underbrace{\Lambda(V)\times\cdots\times\Lambda(V)}_{k \text{ cópias}}$ (ou de um produto cartesiano de k subespaços-parte de $\Lambda(V)$) a $\Lambda(V)$ (i.e., multivetor dependente de k multivetores).

Introduzimos algumas operações algébricas com funções multivetoriais de variável multive-

[9]Um *subespaço-parte de* $\Lambda(V)$ é alguma soma de subespaços de multivetores homogêneos de $\Lambda(V)$. Note-se que $\Lambda(V)$ é mesmo um subespaço-parte de $\Lambda(V)$.

torial.

Dadas duas funções multivetoriais $F : \Lambda_1^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ e $G : \Lambda_2^\diamond(V) \to \Lambda(V)$, onde $\Lambda_1^\diamond(V)$ e $\Lambda_2^\diamond(V)$ são dois subespaços-parte de $\Lambda(V)$, podemos definir a soma e os produtos como segue:

$F + G : \Lambda_1^\diamond(V) \cap \Lambda_2^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ tal que $(F + G)(X) = F(X) + G(X)$,

$F * G : \Lambda_1^\diamond(V) \cap \Lambda_2^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ tal que $(F * G)(X) = F(X) * G(X)$, onde $*$ é quaisquer dos quatro produtos de multivetores:$(\wedge), (\cdot), (\lrcorner, \llcorner)$ ou $(Clifford)$.

Ainda, é possível definir a função composta[10], $F \circ G : \Lambda_2^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ tal que $(F \circ G)(X) = F\left[\langle G(X)\rangle_Y\right]$, com $Y \in domF \equiv \Lambda_1^\diamond(V)$.

Vejamos algumas possibilidades especiais de composição de funções multivetoriais.

Sejam $X : S \to \Lambda(V)$ e $F : \Lambda^\diamond(V) \to \Lambda(V)$, onde S é um subconjunto aberto de R e $\Lambda^\diamond(V)$ é um subespaço-parte de $\Lambda(V)$.

Definimos a função composta, $F \circ X : S \to \Lambda(V)$ tal que $(F \circ X)(t) = F\left[\langle X(t)\rangle_Y\right]$, com $Y \in domF \equiv \Lambda^\diamond(V)$.

Sejam $\phi : R \to R$ e $\Psi : \Lambda^\diamond(V) \to R$, a primeira uma função real ordinária e a segunda uma função escalar de variável multivetorial, onde $\Lambda^\diamond(V)$ é um subespaço-parte de $\Lambda(V)$.

Definimos a função composta $\phi \circ \Psi : \Lambda^\diamond(V) \to R$ tal que $(\phi \circ \Psi)(X) = \phi\left[\Psi(X)\right]$.

2.1 Diferenciabilidade

Seja $F : \Lambda^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ uma função multivetorial de variável multivetorial, onde $\Lambda^\diamond(V)$ é um subespaço-parte de $\Lambda(V)$.

F é dita *k-uplamente diferenciável* se e somente se para toda função multivetorial de k parâmetros escalares $X : R^k \to \Lambda(V)$, do tipo diferenciável em R^k : a função composta $(F \circ X) : R^k \to \Lambda(V)$ for uma função diferenciável em R^k; nos casos especiais $k = 1$ e $k = 2$, F poderia ser chamada de *simplesmente e duplamente diferenciável,* respectivamente.

Note-se que a soma e os produtos de funções diferenciáveis são também funções diferenciáveis; e todavia, a diferenciabilidade preserva-se através da composição de funções, justamente como deveria ser com uma diferenciabilidade bem-definida!

[10] Introduzimos um operador linear em $\Lambda(V)$, a *A-parte* $(A \in \Lambda(V),\ A \neq O)$, $\langle\rangle_A : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$, $X \to \langle X\rangle_A$ tal que: se para algum $k \in N_0$,com $0 \leq k \leq n$, é $\langle A\rangle_k = O$, então $\langle X\rangle_A = \sum\limits_{s \neq k} \langle X\rangle_s$. Em especial, definimos $\langle X\rangle_O = O$.

Isto é, $\langle X\rangle_A$ contem as mesmas partes já contidas em A.

Seja $F : \Lambda^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ uma função multivetorial de 1 variável multivetorial, pelo menos simplesmente diferenciável.

Definimos a *função diferencial* (ou *a diferencial*) *de* F como uma função multivetorial de 2 variáveis multivetoriais $\underline{F} : \Lambda^\diamond(V) \times \Lambda^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ tal que

$$\underline{F}(X,Y) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(X+\lambda Y) - F(X)}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} F(X+\lambda Y)\bigg|_{\lambda=0}. \tag{2.5}$$

A função $\underline{F}$ existe porque a função F é diferenciável.

Proposição 2.1: A função diferencial é linear na segunda variável.

De fato, sejam $\mu, \nu \in R$ e $Y, Z \in \Lambda^\diamond(V)$. Por definição,

$$\underline{F}(X, \mu Y + \nu Z) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F[X + \lambda(\mu Y + \nu Z)] - F(X)}{\lambda}.$$

O limite no lado direito pode ser calculado utilizando-se o teorema do valor médio.[11]

Introduzimos a função multivetorial auxiliar $f(\alpha, \beta) = F(X + \alpha Y + \beta Z)$, com $\alpha, \beta \in R$.

Se $F(X)$ é pelo menos duplamente diferenciável, então $f(\alpha,\beta)$ será diferenciável; i.e., suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha,\beta)$ serão contínuas.

De acordo com as definições de diferenciabilidade em (1) e (2.1) e a prop. (1.2), as componentes covariantes e contravariantes de $f(\alpha,\beta)$ com relação às bases multivetoriais $\langle \varepsilon^J \rangle$ e $\langle \varepsilon_J \rangle$, digamos $f_J(\alpha,\beta)$ e $f^J(\alpha,\beta)$, serão diferenciáveis. E consequentemente, suas respectivas derivadas parciais $\dfrac{\partial f_J}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)$, $\dfrac{\partial f_J}{\partial \beta}(\alpha,\beta)$ e $\dfrac{\partial f^J}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)$, $\dfrac{\partial f^J}{\partial \beta}(\alpha,\beta)$ serão contínuas.

Portanto, as componentes contravariantes $f^J(\alpha,\beta)$, por exemplo, podem ser desenvolvidas pelo teorema del valor médio. Temos que

$$f^J(\alpha,\beta) = f^J(0,0) + \alpha \frac{\partial f^J}{\partial \alpha}(\alpha_J, \beta) + \beta \frac{\partial f^J}{\partial \beta}(0, \beta_J), \text{ com } 0 < |\alpha_J| < |\alpha| \text{ e } 0 < |\beta_J| < |\beta|.$$

[11] Seja $\varphi : R \supset S \to R$ uma função real ordinária diferenciável (i.e., $\varphi(\lambda)$ e $\varphi'(\lambda)$ são contínuas!) em alguma vizinhança de $\lambda_0 \in S$, então temos que para todo λ nessa vizinhança de $\lambda_0 \in S : \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\varphi'(\lambda_1)$, com $0 < |\lambda_1 - \lambda_0| < |\lambda - \lambda_0|$.

Agora, utilizando a prop. (1.1), o limite no lado direito pode ser calculado como segue

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{F[X+\lambda(\mu Y+\nu Z)]-F(X)}{\lambda} &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\{\lim_{\lambda\to 0}\frac{f^J(\lambda\mu,\lambda\nu)-f^J(0,0)}{\lambda}\}\varepsilon_J \\
&= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\{\lim_{\lambda\to 0}[\mu\frac{\partial f^J}{\partial\alpha}(\alpha_J,\lambda\nu)+\nu\frac{\partial f^J}{\partial\beta}(0,\beta_J)]\}\varepsilon_J \\
&= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\{\mu\frac{\partial f^J}{\partial\alpha}(\lim_{\lambda\to 0}\alpha_J,\lim_{\lambda\to 0}\lambda\nu)+\nu\frac{\partial f^J}{\partial\beta}(\lim_{\lambda\to 0}0,\lim_{\lambda\to 0}\beta_J)\}\varepsilon_J \\
&= \mu\frac{\partial f}{\partial\alpha}(0,0)+\nu\frac{\partial f}{\partial\beta}(0,0),
\end{aligned}$$

no último passo tivemos em conta as continuidades de $\dfrac{\partial f^J}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)$, $\dfrac{\partial f^J}{\partial\beta}(\alpha,\beta)$.

E utilizando as definições de $\dfrac{\partial f^J}{\partial\alpha}(0,0)$, $\dfrac{\partial f^J}{\partial\beta}(0,0)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{F[X+\lambda(\mu Y+\nu Z)]-F(X)}{\lambda} &= \mu\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(\alpha,0)-f(0,0)}{\alpha}+\nu\lim_{\beta\to 0}\frac{f(0,\beta)-f(0,0)}{\beta} \\
&= \mu\lim_{\alpha\to 0}\frac{F(X+\alpha Y)-F(X)}{\alpha}+\nu\lim_{\beta\to 0}\frac{F(X+\beta Z)-F(X)}{\beta},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\underline{F}(X,\mu Y+\nu Z)=\mu\underline{F}(X,Y)+\nu\underline{F}(X,Z).$$

A seguir, obteremos as *regras de diferenciação* para a soma, os produtos e as composições de funções multivetoriais.

Proposição 2.2: Sejam $F(X)$ e $G(X)$ funções multivetoriais diferenciáveis, temos que

$$\begin{aligned}
\underline{F+G}(X,Y) &= \frac{d}{d\lambda}(F+G)(X+\lambda Y)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}F(X+\lambda Y)\Big|_{\lambda=0}+\frac{d}{d\lambda}G(X+\lambda Y)\Big|_{\lambda=0} \\
\underline{F+G}(X,Y) &= \underline{F}(X,Y)+\underline{G}(X,Y).
\end{aligned}$$

Proposição 2.3: Sejam $F(X)$ e $G(X)$ funções multivetoriais diferenciáveis, e $*$ é quaisquer dos quatro produtos de multivetores: $(\wedge), (\cdot), (\lrcorner, \llcorner)$ ou (*Clifford*), então teremos que

$$
\begin{aligned}
\underline{F*G}(X,Y) &= \frac{d}{d\lambda}(F*G)(X+\lambda Y)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}F(X+\lambda Y)\Big|_{\lambda=0} * G(X+\lambda Y)|_{\lambda=0} \\
&\quad + F(X+\lambda Y)|_{\lambda=0} * \frac{d}{d\lambda}G(X+\lambda Y)\Big|_{\lambda=0} \\
\underline{F*G}(X,Y) &= \underline{F}(X,Y)*G(X)+F(X)*\underline{G}(X,Y).
\end{aligned}
$$

Proposição 2.4: Sejam $X : S \to \Lambda(V)$ e $F : \Lambda^{\circ}(V) \to \Lambda(V)$, uma função de um parâmetro real e uma função de uma variável multivetorial, ambas do tipo diferenciável, temos que

$$(F \circ X)'(t) = \underline{F}\left[\langle X(t)\rangle_Y , \langle X'(t)\rangle_Y\right], \forall Y \in domF.$$

De fato, por definição

$$(F \circ X)'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F\left[\langle X(t+h)\rangle_Y\right] - F\left[\langle X(t)\rangle_Y\right]}{h}, \text{ com } Y \in domF.$$

Calcularemos o limite do lado direito utilizando um truque similar ao empregado na demonstração da prop. (2.1).

Introduzimos duas funções multivetoriáis auxiliares, $x(\beta) = \begin{cases} \langle X'(t)\rangle_Y & \beta = 0 \\ \left\langle \dfrac{X(t+\beta)-X(t)}{\beta} \right\rangle_Y & \beta \neq 0 \end{cases}$ com $|\beta| < \varepsilon$ (raio de alguma vizinhança de $t \in S$), e $f(\alpha,\beta) = F\left[\langle X(t)\rangle_Y + \alpha x(\beta)\right]$, com $\alpha \in R$ e $|\beta| < \varepsilon$.

Por serem $X(t)$ e $F(X)$ diferenciáveis (a segunda função, pelo menos duplamente diferenciável), $x(\beta)$ e $f(\alpha,\beta)$ serão diferenciáveis. Podemos desenvolver $f^J(\alpha,\beta)$ pelo teorema do valor médio, isto é, $f^J(\alpha,\beta) = f^J(0,\beta) + \alpha\dfrac{\partial f^J}{\partial \alpha}(\alpha_J,\beta)$, com $0 < |\alpha_J| < |\alpha|$.

Agora, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
(F\circ X)'(t) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\{\lim_{h\to 0}\frac{f^J(h,h)-f^J(0,h)}{h}\}\varepsilon_J = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\{\lim_{h\to 0}\frac{h\frac{\partial f^J}{\partial\alpha}(\alpha_J,h)}{h}\}\varepsilon_J \\
&= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\{\frac{\partial f^J}{\partial\alpha}(\lim_{h\to 0}\alpha_J, \lim_{h\to 0} h)\}\varepsilon_J
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(\alpha,0)-f(0,0)}{\alpha} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{F\left[\langle X(t)\rangle_Y + \lambda\,\langle X'(t)\rangle_Y\right] - F\left[\langle X(t)\rangle_Y\right]}{\lambda} \\
(F\circ X)'(t) &= \underline{F}\left[\langle X(t)\rangle_Y, \langle X'(t)\rangle_Y\right], \forall Y \in domF,
\end{aligned}
$$

onde utilizamos: a continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)$, a definição de $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)$ e a definição de função diferencial de F.

Proposição 2.5: Sejam $F : \Lambda_1^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ e $G : \Lambda_2^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ duas funções diferenciáveis, temos que

$$
\begin{aligned}
\underline{F\circ G}(X,Y) &= \frac{d}{d\lambda}(F\circ G)(X+\lambda Y)\bigg|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}F\left[\langle G(X+\lambda Y)\rangle_Z\right]\bigg|_{\lambda=0}, \text{ com } Z \in domF \\
&= \underline{F}\left[\langle G(X+\lambda Y)|_{\lambda=0}\rangle_Z, \left\langle \frac{d}{d\lambda}G(X+\lambda Y)\bigg|_{\lambda=0}\right\rangle_Z\right], \\
\underline{F\circ G}(X,Y) &= \underline{F}\left[\langle G(X)\rangle_Z, \langle \underline{G}(X,Y)\rangle_Z\right], \forall Z \in domF
\end{aligned}
$$

onde utilizamos, essencialmente, a prop. (2.4).

Proposição 2.6: Sejam $\phi : R \to R$ e $\Psi : \Lambda^\diamond(V) \to R$, a primeira uma função real ordinária derivável e a segunda uma função escalar de variável multivetorial diferenciável (pelo menos simplesmente diferenciável), temos que

$$
\underline{\phi\circ\Psi}(X,Y) = \phi'[\Psi(X)]\underline{\Psi}(X,Y) = (\phi'\circ\Psi)(X)\underline{\Psi}(X,Y).
$$

De fato, por definição

$$
\underline{\phi\circ\Psi}(X,Y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\phi[\Psi(X+\lambda Y)] - \phi[\Psi(X)]}{\lambda}.
$$

O limite no lado direito será calculado mediante o mesmo artifício já utilizado nas demonstrações das props. (2.1) e (2.4).

Introduzimos duas funções auxiliares, $\psi(\beta) = \begin{cases} \underline{\Psi}(X,Y) & \beta = 0 \\ \dfrac{\Psi(X+\beta Y)-\Psi(X)}{\beta} & \beta \neq 0 \end{cases}$, com $\beta \in R$, e $f(\alpha,\beta) = \phi[\Psi(X) + \alpha\psi(\beta)]$, com $\alpha, \beta \in R$. Desenvolvemos $f(\alpha,\beta)$ pelo teorema do valor médio, i.e., $f(\alpha,\beta) = f(0,\beta) + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha_1,\beta)$, com $0 < |\alpha_1| < |\alpha|$.

Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\underline{\phi \circ \Psi}(X,Y) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda,\lambda) - f(0,\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha_1,\lambda)}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\lim_{\lambda \to 0} \alpha_1, \lim_{\lambda \to 0} \lambda) \\
&= \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(\alpha,0) - f(0,0)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\phi[\Psi(X) + \alpha \underline{\Psi}(X,Y)] - \phi[\Psi(X)]}{\alpha} \\
\underline{\phi \circ \Psi}(X,Y) &= \phi'[\Psi(X)]\underline{\Psi}(X,Y) = (\phi' \circ \Psi)(X)\underline{\Psi}(X,Y),
\end{aligned}$$

onde utilizamos a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)$, a definição de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)$ e a definição de derivada da função real ordinária $\phi(t)$.

2.2 Derivadas Multivetoriais

Seja $F : \Lambda^\diamond(V) \to \Lambda(V)$ uma função multivetorial de variável multivetorial, do tipo diferenciável, e tomemos um multivetor arbitrário A.

A *função derivada* (ou *a derivada*) *de* F *na direção de* A é a função multivetorial de variável multivetorial, definida por

$$F'_A(X) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F[X + \lambda \langle A \rangle_X] - F(X)}{\lambda} = \underline{F}[X, \langle A \rangle_X] \tag{2.6}$$

Devido à linearidade da diferencial (prop. 2.1), a derivada direcional tem a propriedade fundamental

$$F'_{\alpha A + \beta B} = \alpha F'_A + \beta F'_B. \tag{2.7}$$

De fato, temos que

$$F'_{\alpha A+\beta B}(X) = \underline{F}[X, \langle \alpha A + \beta B \rangle_X] = \underline{F}[X, \alpha \langle A \rangle_X + \beta \langle B \rangle_X]$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \underline{F}[X, \langle A \rangle_X] + \beta \underline{F}[X, \langle B \rangle_X] \\
&= \alpha F'_A(X) + \beta F'_B(X).
\end{aligned}$$

A seguir, desenvolveremos as regras de derivação direcional para a soma, os produtos e as composições de funções multivetoriais. Utilizaremos a def. (2.6) e as correspondentes regras de diferenciação.

Sejam $F(X)$ e $G(X)$ duas funções multivetoriais diferenciáveis, e $*$ é quaisquer dos produtos de multivetores: $(\wedge), (\cdot), (\lrcorner, \llcorner)$ ou (*Clifford*),então utilizando a prop. (2.2) temos que

$$\begin{aligned} (F+G)'_A(X) &= \underline{F+G}\,[X, \langle A\rangle_X] = \underline{F}\,[X, \langle A\rangle_X] + \underline{G}\,[X, \langle A\rangle_X] \\ (F+G)'_A(X) &= F'_A(X) + G'_A(X), \end{aligned} \tag{2.8}$$

e, pela prop. (2.3), é

$$\begin{aligned} (F*G)'_A(X) &= \underline{F*G}\,[X, \langle A\rangle_X] \\ &= \underline{F}\,[X, \langle A\rangle_X] * G(X) + F(X) * \underline{G}\,[X, \langle A\rangle_X] \\ (F*G)'_A(X) &= F'_A(X) * G(X) + F(X) * G'_A(X). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sejam $X : S \to \Lambda(V)$ e $F : \Lambda^\circ(V) \to \Lambda(V)$, duas funções diferenciáveis, utilizando a prop. (2.4), obtemos que

$$\begin{aligned} (F\circ X)'(t) &= \underline{F}\,[\langle X(t)\rangle_Y, \langle X'(t)\rangle_Y] = \underline{F}\left[\langle X(t)\rangle_Y, \langle X'(t)\rangle_{\langle X(t)\rangle_Y}\right] \\ (F\circ X)'(t) &= F'_{X'(t)}\,[\langle X(t)\rangle_Y], \text{com } Y \in domF. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Tomemos $F : \Lambda_1^\circ(V) \to \Lambda(V)$ e $G : \Lambda_2^\circ(V) \to \Lambda(V)$, utilizando a prop. (2.5), temos que

$$\begin{aligned} (F\circ G)'_A(X) &= \underline{F\circ G}\,[X, \langle A\rangle_X] = \underline{F}\,[\langle G(X)\rangle_Y, \langle \underline{G}(X, \langle A\rangle_X)\rangle_Y] \\ &= \underline{F}\,[\langle G(X)\rangle_Y, \langle G'_A(X)\rangle_Y] \\ &= \underline{F}\left[\langle G(X)\rangle_Y, \langle G'_A(X)\rangle_{\langle G(X)\rangle_Y}\right] \\ (F\circ G)'_A(X) &= F'_{G'_A(X)}\,[\langle G(X)\rangle_Y], \text{ com } Y \in domF. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Tomemos $\phi : R \to R$ e $\Psi : \Lambda^\circ(V) \to R$, utilizando a prop. (2.6), temos que

$$(\phi\circ\Psi)'_A(X) = \underline{\phi\circ\Psi}\,[X, \langle A\rangle_X] = (\phi'\circ\Psi)(X)\underline{\Psi}\,[X, \langle A\rangle_X]$$

$$(\phi\circ\Psi)'_A(X) \;=\; (\phi'\circ\Psi)(X)\Psi'_A(X). \tag{2.12}$$

Introduzimos agora a definição de função derivada (ou derivada) de uma função multivetorial diferenciável.

Seja $F:\Lambda^\diamond(V)\to\Lambda(V)$ uma função multivetorial diferenciável; a *função derivada* (ou *a derivada*) *de* F é a função multivetorial $F':\Lambda^\diamond(V)\to\Lambda(V)$, dada por

$$F'(X)=\sum_J\frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon^J F'_{\varepsilon_J}(X)=\sum_J\frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon_J F'_{\varepsilon^J}(X), \tag{2.13}$$

onde $\langle\varepsilon^J\rangle$ e $\langle\varepsilon_J\rangle$ são duas bases quaisquer de $\Lambda(V)$, definidas como na nota de rodapé 8 (J é um índice coletivo e $\nu(J)$ é o número de índices); F'_{ε_J} e F'_{ε^J} são as derivadas direcionais de F nas direções dos multivetores base ε_J e ε^J.

Porém, está a função derivada bem definida?, i.e., $F'(X)$ independe das bases multivetoriais $\langle\varepsilon^J\rangle$ e $\langle\varepsilon_J\rangle$ utilizadas?

Provaremos que a função multivetorial definida acima possui a propriedade fundamental de invariancia com relação às bases utilizadas.

Sejam $\langle\overline{\varepsilon}^J\rangle$ e $\langle\overline{\varepsilon}_J\rangle$ algumas outras bases de $\Lambda(V)$, a segunda recíproca da primeira.

Só precisamos provar que $\varepsilon^J F'_{\varepsilon_J}(X)=\overline{\varepsilon}^J F'_{\overline{\varepsilon}_J}(X)$, para todo $J=0,j_1,\ldots,j_1\ldots j_k,\ldots,j_1\ldots j_n$.

Para $J=0$ a igualdade é trivial, pois $\varepsilon^0=\overline{\varepsilon}^0=1$ e $\varepsilon_0=\overline{\varepsilon}_0=1$.

Para $J=j_1\ldots j_k$, com $1\leq k\leq n$, temos que

$$\varepsilon^J F'_{\varepsilon_J}(X)=\varepsilon^{j_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{j_k}F'_{\varepsilon_{j_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{j_k}}(X),$$

e utilizando as fórmulas de expansão: $\varepsilon^{j_k}=(\varepsilon^{j_k}\cdot\overline{\varepsilon}_{p_k})\overline{\varepsilon}^{p_k}$ (os vetores da base $\langle\varepsilon^{j_k}\rangle$ escritos como combinação linear dos vetores da base $\langle\overline{\varepsilon}^{p_k}\rangle$) e $\overline{\varepsilon}_{p_k}=(\overline{\varepsilon}_{p_k}\cdot\varepsilon^{j_k})\varepsilon_{j_k}$ (os de $\langle\overline{\varepsilon}_{p_k}\rangle$ como combinação linear dos de $\langle\varepsilon_{j_k}\rangle$), e a prop. (2.7), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\varepsilon^J F'_{\varepsilon_J}(X) &= (\varepsilon^{j_1}\cdot\overline{\varepsilon}_{p_1})\overline{\varepsilon}^{p_1}\wedge\ldots\wedge(\varepsilon^{j_k}\cdot\overline{\varepsilon}_{p_k})\overline{\varepsilon}^{p_k}F'_{\varepsilon_{j_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{j_k}}(X)\\
&= \overline{\varepsilon}^{p_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\varepsilon}^{p_k}F'_{(\overline{\varepsilon}_{p_1}\cdot\varepsilon^{j_1})\varepsilon_{j_1}\wedge\ldots\wedge(\overline{\varepsilon}_{p_k}\cdot\varepsilon^{j_k})\varepsilon_{j_k}}(X)\\
&= \overline{\varepsilon}^{p_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\varepsilon}^{p_k}F'_{\overline{\varepsilon}_{p_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\varepsilon}_{p_k}}(X)\\
&= \overline{\varepsilon}^P F'_{\overline{\varepsilon}_P}(X).
\end{aligned}$$

Obviamente, se existem as derivadas direcionáis F'_A em qualquer direção A (para o qual F deve ser diferenciável!), então existirá a função derivada F'.

No espaço linear das funções multivetoriais de variável multivetorial, do tipo diferenciáveis, podemos introduzir o *operador de derivação* ∂_X, definido por $\partial_X F(X) = F'(X)$.

Também, podemos definir outros *operadores de derivação associados a* ∂_X, com relação a um multivetor arbitrário A, por

$$(A * \partial_X)F(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}(A * \varepsilon^J)F'_{\varepsilon_J}(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}(A * \varepsilon_J)F'_{\varepsilon^J}(X), \tag{2.14}$$

onde $*$ é quaisquer dos quatro produtos de multivetores: $(\wedge), (\cdot), (\lrcorner, \llcorner)$ ou (*Clifford*) e F é qualquer função multivetorial diferenciável.

Em particular, temos que

$$(A \cdot \partial_X)F(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}(A \cdot \varepsilon^J)F'_{\varepsilon_J}(X) = F'_{\sum_J \frac{1}{\nu(J)!} A^J \varepsilon_J}(X) = F'_A(X),$$

isto é, $(A \cdot \partial_X)F = F'_A$, tal fato significa que $A \cdot \partial_X$ é o *operador de derivação direcional,* com relação ao multivetor arbitrário A.

A propriedade fundamental da derivada direcional (2.7) e a definição da função derivada (2.13) podem ser escritas de maneiras bastante sugestivas, quais sejam:

$$\begin{aligned}
(\alpha A + \beta B) \cdot \partial_X &= \alpha A \cdot \partial_X + \beta B \cdot \partial_X, \\
\partial_X F(X) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon^J \varepsilon_J \cdot \partial_X F(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon_J \varepsilon^J \cdot \partial_X F(X).
\end{aligned}$$

As regras de derivação direcional, i.e., as props. (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), ficam

$$\begin{aligned}
(A \cdot \partial_X)(F + G) &= (A \cdot \partial_X)F + (A \cdot \partial_X)G, \\
(A \cdot \partial_X)(F * G) &= (A \cdot \partial_X)F * G + F * (A \cdot \partial_X)G, \\
(F \circ X)(t) &= (X'(t) \cdot \partial_Y)F\left[\langle X(t)\rangle_Y\right], \forall Y \in domF, \\
(A \cdot \partial_X)(F \circ G)(X) &= [(A \cdot \partial_X)G(X) \cdot \partial_Y]F\left[\langle G(X)\rangle_Y\right], \forall Y \in domF, \\
(A \cdot \partial_X)(\phi \circ \Psi) &= (\phi' \circ \Psi)(A \cdot \partial_X)\Psi.
\end{aligned}$$

É ainda possível e oportuna a introdução de outros *operadores lineares* $\partial_X *$ associados ao operador de derivação ∂_X, a saber

$$\partial_X * F(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J * F'_{\varepsilon_J}(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon_J * F'_{\varepsilon^J}(X) \tag{2.15}$$

onde $*$ é quaisquer dos quatro produtos de multivetores: $(\wedge), (\cdot), (\lrcorner, \llcorner)$ ou (*Clifford*) e F é qualquer função multivetorial diferenciável .

A linearidade dos produtos $*$ e a propriedade fundamental da derivada direcional (2.7), permite-nos demonstrar a invariancia desses operadores lineares com relação às bases multivetorias escolhidas.

Em particular, o operador $\partial_X \wedge$ será chamado de *operador rotacional* e $\partial_X \wedge F$ será dito o *rotacional de F.*

Os operadores $\partial_X \cdot$ e $\partial_X \lrcorner$ serão chamados de *operadores divergentes*; e $\partial_X \cdot F$ será dito o *divergente escalar de* F e $\partial_X \lrcorner\, F$ será dito o *divergente contraído de F.*

O operador ∂_X (i.e., o operador derivada) às vezes é chamado de *operador gradiente*, assim $\partial_X F$ será dito o *gradiente de F.*

Encerrando a seção (2), desenvolveremos alguns exemplos ilustrativos.

Exemplo 2.1: Seja a função escalar de variável multivetorial $\Lambda^\diamond(V) \ni X \mapsto X \cdot X \in R$, onde $\Lambda^\diamond(V)$ é algum subespaço-parte de $\Lambda(V)$. Calculemos: $A \cdot \partial_X(X \cdot X)$ e $\partial_X(X \cdot X)$

$$\begin{aligned}
A \cdot \partial_X(X \cdot X) &= \frac{d}{d\lambda}(X + \lambda \langle A \rangle_X) \cdot (X + \lambda \langle A \rangle_X)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}[(X \cdot X + 2\lambda \langle A \rangle_X \cdot X + \lambda^2 \langle A \rangle_X \cdot \langle A \rangle_X)]\Big|_{\lambda=0}, \\
A \cdot \partial_X(X \cdot X) &= 2 \langle A \rangle_X \cdot X = 2A \cdot X. \\
\partial_X(X \cdot X) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J \varepsilon_J \cdot \partial_X(X \cdot X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J 2(\varepsilon_J \cdot X) = 2X.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2: Seja $\Lambda^\diamond(V) \ni X \mapsto B \cdot X \in R$, com $B \in \Lambda(V)$. Calculemos: $A \cdot \partial_X(B \cdot X)$ e $\partial_X(B \cdot X)$

$$\begin{aligned}
A \cdot \partial_X(B \cdot X) &= \frac{d}{d\lambda} B \cdot (X + \lambda \langle A \rangle_X)\Big|_{\lambda=0} = B \cdot \langle A \rangle_X = A \cdot \langle B \rangle_X, \\
\partial_X(B \cdot X) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J \varepsilon_J \cdot \partial_X(B \cdot X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J (\varepsilon_J \cdot \langle B \rangle_X) = \langle B \rangle_X.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3: Seja $\Lambda^{\circ}(V) \ni X \mapsto (BXC)\cdot X \in R$, com $B, C \in \Lambda(V)$. Calculemos: $A\cdot\partial_X[(BXC)\cdot X]$ e $\partial_X[(BXC)\cdot X]$

$$\begin{aligned}
A\cdot\partial_X[(BXC)\cdot X] &= \frac{d}{d\lambda}[B(X+\lambda\langle A\rangle_X)C]\cdot(X+\lambda\langle A\rangle_X)\Big|_{\lambda=0}\\
&= \frac{d}{d\lambda}[(BXC)\cdot X+\lambda(B\langle A\rangle_X C)\cdot X+\lambda(BXC)\cdot\langle A\rangle_X) \\
&\qquad +\lambda^2(B\langle A\rangle_X C)\cdot\langle A\rangle_X]\Big|_{\lambda=0}\\
&= (B\langle A\rangle_X C)\cdot X+(BXC)\cdot\langle A\rangle_X = \langle A\rangle_X\cdot(BXC+\widetilde{B}X\widetilde{C}),\\
A\cdot\partial_X[(BXC)\cdot X] &= A\cdot\left\langle BXC+\widetilde{B}X\widetilde{C}\right\rangle_X.\\
\partial_X[(BXC)\cdot X] &= \sum_J\frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon^J\varepsilon_J\cdot\partial_X(BXC\cdot X) = \sum_J\frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon^J(\varepsilon_J\cdot\left\langle BXC+\widetilde{B}X\widetilde{C}\right\rangle_X),\\
\partial_X[(BXC)\cdot X] &= \left\langle BXC+\widetilde{B}X\widetilde{C}\right\rangle_X.
\end{aligned}$$

Neste último exemplo utilizamos essencialmente a ident. (x) da lista no final do Cap. 1.

Exemplo2.4: Consideremos $a\wedge B_k$, com $a\in\Lambda^1(V)$ e $B_k\in\Lambda^k(V)$, então $a\wedge B_k\in\Lambda^{k+1}(V)$, e podemos definir a função $(k+1)$-vetorial de variável vetorial $\Lambda^1(V)\ni a\mapsto a\wedge B_k\in\Lambda^{k+1}(V)$. Calculemos $A\cdot\partial_a a\wedge B_k$, o divergente $\partial_a\lrcorner\,(a\wedge B_k)$, o rotacional $\partial_a\wedge\,(a\wedge B_k)$ e o gradiente $\partial_a(a\wedge B_k)$

$$\begin{aligned}
A\cdot\partial_a(a\wedge B_k) &= \frac{d}{d\lambda}(a+\lambda\langle A\rangle_a)\wedge B_k\Big|_{\lambda=0} = \langle A\rangle_a\wedge B_k = \langle A\rangle_1\wedge B_k,\\
\partial_a\lrcorner(a\wedge B_k) &= \sum_J\frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon^J\lrcorner\,\varepsilon_J\cdot\partial_a(a\wedge B_k) = \sum_J\frac{1}{\nu(J)!}\varepsilon^J\lrcorner\,(\langle\varepsilon_J\rangle_1\wedge B_k),\\
\partial_a\lrcorner(a\wedge B_k) &= \sum_{j=1}^n\varepsilon^j\lrcorner\,(\varepsilon_j\wedge B_k) = (n-k)B_k.\\
\partial_a\wedge(a\wedge B_k) &= \sum_{j=1}^n\varepsilon^j\wedge(\varepsilon_j\wedge B_k) = O.\\
\partial_a(a\wedge B_k) &= \sum_{j=1}^n\varepsilon^j(\varepsilon_j\wedge B_k) = \sum_{j=1}^n[\varepsilon^j\lrcorner\,(\varepsilon_j\wedge B_k)+\varepsilon^j\wedge(\varepsilon_j\wedge B_k)],\\
\partial_a(a\wedge B_k) &= (n-k)B_k. \qquad (n=\dim V)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5: Consideremos $a\lrcorner\,B_k\in\Lambda^{k-1}(V)$, com $1\le k\le n$, podemos definir a função $(k-1)$-vetorial de variável vetorial: $\Lambda^1(V)\ni a\mapsto a\lrcorner\,B_k\in\Lambda^{k-1}(V)$. Calculemos $A\cdot\partial_a(a\lrcorner\,B_k)$, o divergente $\partial_a \lrcorner\, (a \lrcorner\, B_k)$, o rotacional $\partial_a \wedge\, (a \lrcorner\, B_k)$ e o gradiente $\partial_a (a \lrcorner\, B_k)$

$$
\begin{aligned}
A \cdot \partial_a (a \lrcorner\, B_k) &= \frac{d}{d\lambda}(a + \lambda \langle A \rangle_a) \lrcorner\, B_k \bigg|_{\lambda=0} = \langle A \rangle_a \lrcorner\, B_k = \langle A \rangle_1 \lrcorner\, B_k, \\
\partial_a \lrcorner (a \lrcorner\, B_k) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J \lrcorner\, \varepsilon_J \cdot \partial_a (a \lrcorner\, B_k) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J \lrcorner\, (\langle \varepsilon_J \rangle_1 \lrcorner\, B_k), \\
\partial_a \lrcorner (a \lrcorner\, B_k) &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \lrcorner\, (\varepsilon_j \lrcorner\, B_k) = \sum_{j=1}^{n} (\, \varepsilon^j \wedge \varepsilon_j) \lrcorner\, B_k = O. \\
\partial_a \wedge (a \lrcorner\, B_k) &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \wedge (\varepsilon_j \lrcorner\, B_k) = k B_k. \\
\partial_a (a \lrcorner\, B_k) &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j (\varepsilon_j \lrcorner\, B_k) = \sum_{j=1}^{n} [\varepsilon^j \lrcorner\, (\varepsilon_j \lrcorner\, B_k) + \varepsilon^j \wedge (\varepsilon_j \lrcorner\, B_k)], \\
\partial_a (a \lrcorner\, B_k) &= k B_k. \qquad (n = \dim V)
\end{aligned}
$$

Estes exemplos apresentados resumem algumas das fórmulas mais importantes do cálculo de funções multivetoriais.

3. k-Extensores

Uma função multilinear de $\Lambda_1^\diamond(V) \times \cdots \times \Lambda_k^\diamond(V)$ a $\Lambda^\diamond(V)$, onde $\Lambda_1^\diamond(V), \ldots, \Lambda_k^\diamond(V)$ e $\Lambda^\diamond(V)$ são subespaços-parte de $\Lambda(V)$, será dita de *k-extensor sobre* $\Lambda(V)$.

Devido à linearidade, um k-extensor sobre $\Lambda(V)$ é necessáriamente uma função multivetorial diferenciável. O conjunto dos k-extensores sobre $\Lambda(V)$ tem uma óbvia estrutura de espaço linear sobre R e será chamado de *espaço de k-extensores sobre* $\Lambda(V)$.

Note-se que um 1-extensor sobre $\Lambda(V)$ é exatamente uma função linear de um subespaço-parte $\Lambda_1^\diamond(V)$ a outro subespaço-parte $\Lambda^\diamond(V)$; i.e., um operador linear em $\Lambda(V)$. Será dito simplesmente um *extensor sobre* $\Lambda(V)$. O conjunto dos extensores sobre $\Lambda(V)$ será denotado por $ext[\Lambda_1^\diamond(V), \Lambda^\diamond(V)]$.

Em particular, uma função linear de $\Lambda^j(V)$ a $\Lambda^k(V)$, com $0 \leq j \leq n$ e $0 \leq k \leq n$ (n é a dimensão de V), será dita um *(j,k)-extensor sobre* $\Lambda(V)$, e o conjunto desses extensores será denotado por $ext[\Lambda^j(V), \Lambda^k(V)]$.

A noção de *extensor (k-extensor) sobre* $\Lambda(V)$ introduzida aqui, é a formulação rigorosa do conceito matemático chamado de *extensor* por Hestenes et al. em [8], ou de *função linear (multilinear)* por Doran et al. em [14]. Neste trabalho, escolhimos termo ex*tensor*. Porém, com essa entidade matemática modelaremos os historicamente chamados de *tensores de energia-momento* e de *momento angular*, na teoria de campos físicos.

Proposição 3.1: O conjunto dos (j,k)-extensores é naturalmente um espaço linear sobre os números reais.

Proposição 3.2: A composição de um (j,k)-extensor por um (k,l)-extensor dá por resultado um (j,l)-extensor.

Um caso especial e da maior importância é o $(1,1)$-extensor, por exemplo, podemos definir para ele os conceitos de extensor extendido[12], traço, bivetor e determinante. Estes três últimos serão definidos mais adiante, nos exemplos (2.7), (2.8) e (2.9).

Certamente, o conjunto dos extensores do tipo $(1,1)$ é um espaço linear real fechado com relação à composição de extensores.

3.1 Adjunção de Extensores

Introduzimos no espaço dos extensores sobre $\Lambda(V)$, um operador linear $\dagger$, definido por

$$t \mapsto t^{\dagger}, \tag{2.16}$$

tal que para todo $X : t^{\dagger}(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}[t(\varepsilon^J) \cdot X]\varepsilon_J = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}[t(\varepsilon_J) \cdot X]\varepsilon^J$.

$\dagger$ será chamado de *operador de adjunção* e $t^{\dagger}$ será dito o *adjunto de* t.

Certamente, $t^{\dagger}$ é um extensor associado a t, contudo, independente das bases $\langle \varepsilon^J \rangle$ e $\langle \varepsilon_J \rangle$.

Provaremos uma propriedade fundamental que relaciona $t(X)$ com $t^{\dagger}(X)$, usando-se uma condição de produto escalar.

Proposição 3.3: Sejam A e B dois multivetores arbitrários, temos que

$$t^{\dagger}(A) \cdot B = A \cdot t(B).$$

[12] Seja t um $(1,1)$-extensor sobre $\Lambda(V)$, podemos definir um extensor sobre $\Lambda(V)$, chamado de *extendido de t*, por $\underline{t}(X) = 1 \cdot X + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} t(\varepsilon^{j_1}) \wedge \ldots \wedge t(\varepsilon^{j_k})(\varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_k}) \cdot X = 1 \cdot X + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} t(\varepsilon_{j_1}) \wedge \ldots \wedge t(\varepsilon_{j_k})(\varepsilon^{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{j_k}) \cdot X$

Certamente, $\underline{t}$ é um extensor sobre $\Lambda(V)$ bem definido porque possui a propriedade fundamental de invariancia com respeito às bases $\langle \varepsilon^{j_i} \rangle$ e $\langle \varepsilon_{j_i} \rangle$ (com $\varepsilon_{p_i} \cdot \varepsilon^{q_i} = \delta^{q_i}_{p_i}$, $i = 1, \ldots, k$) utilizadas.

Ainda, $\underline{t}$ é o único extensor sobre $\Lambda(V)$ que satisfaz as seguintes propriedades: (i) $\alpha \in R : \underline{t}(\alpha) = \alpha$, (ii) $a_1, \ldots a_k \in \Lambda^1(V) \therefore \underline{t}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) = t(a_1) \wedge \ldots \wedge t(a_k)$, (com $k = 1, \ldots, n$).

De fato, utilizando-se a def. (2.16), é

$$t^\dagger(A)\cdot B = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!}[t(\varepsilon^J)\cdot A]\varepsilon_J\cdot B = A\cdot\sum_J \frac{1}{\nu(J)!}[(B\cdot\varepsilon_J)t(\varepsilon^J)] = A\cdot t(B).$$

Proposição 3.4: O operador de adjunção é involutivo, i.e., $(t^\dagger)^\dagger = t$.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades importantes da adjunção de extensores.

Proposição 3.5: Sejam t e u dois extensores sobre $\Lambda(V)$, então $(t+u)^\dagger = t^\dagger + u^\dagger$.

Tomemos X e Y dois multivetores de V, utilizando-se a prop. (3.3), temos que

$$\begin{aligned}(t+u)^\dagger(X)\cdot Y &= X\cdot(t+u)(Y) = X\cdot t(Y) + X\cdot u(Y)\\ &= t^\dagger(X)\cdot Y + u^\dagger(X)\cdot Y = (t^\dagger+u^\dagger)(X)\cdot Y,\end{aligned}$$

e daí, pela não-degenerescência do produto escalar, obtemos que

$$(t+u)^\dagger(X) = (t^\dagger+u^\dagger)(X).$$

Proposição 3.6: Sejam t e u dois extensores sobre $\Lambda(V)$, então $(t\circ u)^\dagger = u^\dagger\circ t^\dagger$.

Consideremos X e Y dois multivetores de V, novamente, pela prop. (3.3),

$$\begin{aligned}(t\circ u)^\dagger(X)\cdot Y &= X\cdot(t\circ u)(Y) = X\cdot t[u(Y)]\\ &= t^\dagger(X)\cdot u(Y) = u^\dagger[t^\dagger(X)]\cdot Y = (u^\dagger\circ t^\dagger)(X)\cdot Y,\end{aligned}$$

e, pela não-degenerescência do produto escalar,

$$(t\circ u)^\dagger(X) = (u^\dagger\circ t^\dagger)(X).$$

Esta última proposição permite-nos provar que o adjunto do inverso é o inverso do adjunto!

De fato, seja t um extensor inversível, isto é, existe um extensor t^{-1} tal que $t\circ t^{-1} = t^{-1}\circ t = i_d$, onde $i_d : \Lambda^\diamond(V) \to \Lambda^\diamond(V)$ tal que $i_d(X) = X$, é o ex*tensor identidade*. Podemos escrever

$$t\circ t^{-1} = t^{-1}\circ t = i \Rightarrow (t^{-1})^\dagger\circ t^\dagger = t^\dagger\circ(t^{-1})^\dagger = i^\dagger = i,$$

de onde obtemos o resultado $(t^{-1})^{\dagger} = (t^{\dagger})^{-1}$.

Ainda, pela prop.(3.3), deveria notar-se que o adjunto de um (j,k)-extensor sobre $\Lambda(V)$ é um (k,j)-extensor sobre $\Lambda(V)$. E, para um $(1,1)$-extensor sobre $\Lambda(V)$, o adjunto do extendido é o extendido do adjunto.

3.2 Operadores Diferenciais Associados a um Extensor

Sejam t um extensor sobre $\Lambda(V)$ (i.e., uma função multivetorial linear de uma variável multivetorial), e $*$ quaisquer dos produtos de multivetores; introduzimos os operadores lineares $t(\partial_X)*$ associados a t, definidos por

$$t(\partial_X) * F(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} t(\varepsilon^J)(\varepsilon_J \cdot \partial_X) F(X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} t(\varepsilon_J)(\varepsilon^J \cdot \partial_X) F(X) \qquad (2.17)$$

onde F é qualquer função multivetorial diferenciável. (Veja exemplos elementares em [14])

A linearidade de t e a propriedade fundamental (2.7) do operador derivada direcional $A \cdot \partial_X$, permitem-nos provar a invariancia de cada um dos operadores lineares $t(\partial_X) *$.

$t(\partial_X)\wedge$ será chamado de *t-operador rotacional*, $t(\partial_X) \wedge F$ é o *t-rotacional de F*.

$t(\partial_X)\lrcorner$ e $t(\partial_X)\cdot$ serão chamados de *t-operadores divergentes (contraído,* o primeiro; e *escalar,* o segundo!), $t(\partial_X) \lrcorner F$ é o *t-divergente contraído de F* e $t(\partial_X) \cdot F$ é o *t-divergente escalar de F*.

$t(\partial_X)$ é o *t-operador gradiente* e $t(\partial_X)\ F$ é o *t-gradiente de F*.

Estes operadores lineares são essenciais para a formulação da teoria de gravitação como uma teoria de calibre.

4. Funcionais Multivetoriais

Uma aplicação do espaço dos extensores $ext[\Lambda_1^\diamond(V), \Lambda^\diamond(V)]$ ao espaço dos multivetores $\Lambda(V)$, será chamada de *funcional multivetorial*.

Seja t um extensor sobre $\Lambda(V)$, digamos $t : \Lambda_1^\diamond(V) \to \Lambda^\diamond(V)$, e tomemos uma k-upla de multivetores $(A^1, \ldots, A^k)$ do subespaço-parte $\Lambda_1^\diamond(V)$ tal que "pelo menos um dos k multivetores $t(A^1), \ldots, t(A^k)$ seja não-nulo."

Consideremos uma função multivetorial $\mathcal{F} : \underbrace{\Lambda^\diamond(V) \times \cdots \times \Lambda^\diamond(V)}_{k \text{ cópias}} \to \Lambda(V)$, $(X^1, \ldots, X^k) \mapsto \mathcal{F}(X^1, \ldots, X^k)$, do tipo diferenciável, com relação a cada uma das k variáveis multivetoriais.

Notemos que $\mathcal{F}$ induz naturalmente um funcional multivetorial (com relação à k-upla de multivetores $(A^1,\ldots,A^k)$), definido por

$$\mathcal{F}_{(A^1\ldots,A^k)} : ext[\Lambda_1^\diamond(V),\Lambda^\diamond(V)] \to \Lambda(V), t \mapsto \mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}[t], \tag{2.18}$$

tal que $\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}[t] = \mathcal{F}[t(A^1),\ldots,t(A^k)]$.

O funcional multivetorial $\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}$ se dirá o *induzido* pela função multivetorial $\mathcal{F}$, ou também, que $\mathcal{F}$ é *geradora* de $\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}$.

4.1 Derivada Funcional

Se $\mathcal{F}$ é uma função multivetorial diferenciável então existirão as derivadas de $\mathcal{F}$ com relação a cada uma das k variáveis multivetoriais dela (i.e., as derivadas multivetoriais parciais: $\partial_{X^1}\mathcal{F},\ldots,\partial_{X^k}\mathcal{F}$), e assim, poderemos construir os seguintes k funcionais multivetoriais:

$$\left(\partial_{X^1}\mathcal{F}\right)_{(A^1,\ldots,A^k)}[t] = \partial_{X^1}\mathcal{F}[t(A^1),\ldots,t(A^k)],\ldots,\left(\partial_{X^k}\mathcal{F}\right)_{(A^1,\ldots,A^k)}[t] = \partial_{X^k}\mathcal{F}[t(A^1),\ldots,t(A^k)].$$

Agora, definimos a *derivada funcional de $\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}$ com relação a $t(A)$* (A é um multivetor de $\Lambda_1^\diamond(V)$), como uma combinação linear desses funcionais induzidos pelas derivadas multivetoriais parciais de $\mathcal{F}$, isto é,

$$\begin{aligned}\partial_{t(A)}\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}[t] &= A\cdot A^1(\partial_{X^1}F)_{(A^1,\ldots,A^k)}[t]+\cdots\\ &\quad + A\cdot A^k(\partial_{X^k}\mathcal{F})_{(A^1,\ldots,A^k)}[t].\end{aligned} \tag{2.19}$$

Notemos que $\partial_{t(A)}\,\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}$ é certamente um funcional multivetorial do extensor t.

$\partial_{t(A)}$ será chamado de *operador de derivada funcional,* e ainda notamos que ele tem a propriedade fundamental

$$\partial_{t(\alpha A+\beta B)} = \alpha\partial_{t(A)} + \beta\partial_{t(B)}. \tag{2.20}$$

A derivada funcional tem duas propriedades importantes, a saber

$$\partial_{t(A)}[\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)} + \mathcal{G}_{(A^1,\ldots,A^k)}] = \partial_{t(A)}\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)} + \partial_{t(A)}\mathcal{G}_{(A^1,\ldots,A^k)}, \tag{2.21a}$$

$$\partial_{t(A)}[\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}B] \;=\; [\partial_{t(A)}\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}]B. \tag{2.21b}$$

Onde $\mathcal{F}_{(A^1,\ldots,A^k)}$ e $\mathcal{G}_{(A^1,\ldots,A^k)}$ são dois funcionais multivetoriais induzidos quaisquer, e B é um multivetor arbitrário.

As noções de *funcional multivetorial* e *derivada funcional* introduzidas acima são propostas originais para a formalização rigorosa dos conceitos matemáticos apresentados por Doran et al. em [14].

Concluiremos a seção (4), apresentando alguns exemplos ilustrativos.

Exemplo 2.6: Seja h um $(1,1)$-extensor sobre $\Lambda(V)$, se $a \in \Lambda^1(V)$, então $h(a) \in \Lambda^1(V)$.

Consideremos o funcional escalar $ext[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)] \ni h \mapsto h(b)\cdot h(c) \in R$ e o funcional bivetorial $ext[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)] \ni h \mapsto h(b)\wedge h(c) \in \Lambda^2(V)$ (com $b, c \in \Lambda^1(V)$).

O primeiro tem a função geradora $\Lambda^1(V)\times\Lambda^1(V) \ni (x,y) \mapsto x\cdot y \in R$; e a função geradora do segundo é $\Lambda^1(V)\times\Lambda^1(V) \ni (x,y) \mapsto x\wedge y \in \Lambda^2(V)$.

As derivadas parciais da primeira são $\partial_x(x\cdot y) = \langle y\rangle_x = y$ e $\partial_y(x\cdot y) = \langle x\rangle_y = x$, e induzem os funcionais vetoriais $ext[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)] \ni h \mapsto h(c) \in \Lambda^1(V)$ e $ext[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)] \ni h \mapsto h(b) \in \Lambda^1(V)$.

As derivadas parciais da segunda são $\partial_x(x\wedge y) = (n-1)y$ e $\partial_y(x\wedge y) = -(n-1)x$ (n é a dimensão e V) e induzem os funcionais vetoriais $ext[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)] \ni h \mapsto (n-1)h(c) \in \Lambda^1(V)$ e $ext[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)] \ni h \mapsto -(n-1)h(b) \in \Lambda^1(V)$.

Calculemos as derivadas funcionais de ambos os funcionais com relação a $h(a)$ (com $a \in \Lambda^1(V)$).

$$\begin{aligned}
\partial_{h(a)}[h(b)\cdot h(c)] &= a\cdot b h(c) + a\cdot c h(b),\\
\partial_{h(a)}[h(b)\wedge h(c)] &= a\cdot b(n-1)h(c) - a\cdot c(n-1)h(b)\\
&= (n-1)h[(a\cdot b)c - (a\cdot c)b] = (n-1)h[a\lrcorner\,(b\wedge c)].
\end{aligned}$$

Exemplo 2.7: O traço de h, um escalar característico de h, definido por $tr(h) = h(\varepsilon^j)\cdot\varepsilon j = h(\varepsilon_j)\cdot\varepsilon^j$ (j somado desde 1 até n), é um funcional escalar do extensor h.

Sua função geradora é, por exemplo, $\underbrace{\Lambda^1(V)\times\cdots\times\Lambda^1(V)}_{n\text{ cópias}} \ni (x^1,\ldots,x^n) \mapsto x^1\cdot\varepsilon_1 + \cdots + x^n\cdot\varepsilon_n \in R$, de fato, essa função escalar de n variáveis vetoriais induz o funcional escalar (com relação a $(\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n)$), $ten[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)] \ni h \mapsto h(\varepsilon^1)\cdot\varepsilon_1+\cdots+h(\varepsilon^n)\cdot\varepsilon_n = tr(h) \in R$.

As derivadas parciais da função geradora são $\partial_{x^1}(x^1\cdot\varepsilon_1+\cdots+x^n\cdot\varepsilon_n) = \varepsilon_1,\ldots,$ $\partial_{x^n}(x^1\cdot\varepsilon_1+\cdots+x^n\cdot\varepsilon_n)=\varepsilon_n$.

Agora, a derivada funcional de $tr(h)$ com relação a $h(a)$ (com $a\in\Lambda^1(V)$) é

$$\partial_{h(a)}tr(h) = a\cdot\varepsilon^1\varepsilon_1+\cdots+a\cdot\varepsilon^n\varepsilon_n = a.$$

Exemplo 2.8: O bivetor de h, um bivetor caracerístico de h, definido por $biv(h) = h(\varepsilon^j)\wedge\varepsilon_j = h(\varepsilon_j)\wedge\varepsilon^j$, pode ser considerado como um funcional bivetorial de h, cuja função geradora é $\underbrace{\Lambda^1(V)\times\cdots\times\Lambda^1(V)}_{n\text{-cópias}} \ni (x^1,\ldots,x^n)\mapsto x^j\wedge\varepsilon_j\in\Lambda^2(V)$.

De fato, essa função bivetorial de n variáveis bivetoriais induz o funcional bivetorial com relação a $(\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n)$, $ext[\Lambda^1(V),\Lambda^1(V)]\ni h\mapsto h(\varepsilon^j)\wedge\varepsilon_j = biv(h)\in\Lambda^2(V)$.

As derivadas parciais da função geradora são $\partial_{x^i}(x^j\wedge\varepsilon_j) = (n-1)\varepsilon_i$ (com $1\le i\le n$).

A derivada funcional de $biv(h)$ com relação a $h(a)$ (com $a\in\Lambda^1(V)$)é

$$\partial_{h(a)}biv(h) = a\cdot\varepsilon^i(n-1)\varepsilon_i = (n-1)a.$$

Exemplo 2.9: O determinante de h, um escalar característico, definido por $\det(h) = \underline{h}(\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n)\cdot(\varepsilon_1\wedge\ldots\wedge\varepsilon_n) = \underline{h}(\varepsilon_1\wedge\ldots\wedge\varepsilon_n)\cdot(\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n)$, é um funcional escalar de h.

Pela fórmula de expansão de um n-vetor, digamos $\tau\in\Lambda^n(V)$, $\tau = \tau\cdot(\varepsilon_1\wedge\ldots\wedge\varepsilon_n)\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n = \tau\cdot(\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n)\varepsilon_1\wedge\ldots\wedge\varepsilon_n$, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\underline{h}(\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n) &= \underline{h}(\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n)\cdot(\varepsilon_1\wedge\ldots\wedge\varepsilon_n)\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n\\ &= \det(h)\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n,\end{aligned}$$

isto é, utilizando uma propriedade do extensor extendido (veja a nota de rodapé 12)

$$\det(h)\varepsilon^1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n = h(\varepsilon^1)\wedge\ldots\wedge h(\varepsilon^n).$$

Agora, "derivando funcionalmente" membro a membro, utilizando a propriedade (2.21b) temos que

$$
\begin{aligned}
[\partial_{h(a)} \det(h)]\varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n &= \partial_{h(a)}[h(\varepsilon^1) \wedge \ldots \wedge h(\varepsilon^n)] \\
&= \underline{h}[a \lrcorner (\varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n)],
\end{aligned}
$$

onde utilizamos uma generalização da segunda fórmula desenvolvida no exemplo(2.6) $\partial_{h(a)}[h(a^1) \wedge \ldots \wedge h(a^k)] = (n-k+1)\underline{h}[a \lrcorner (a^1 \wedge \ldots \wedge a^k)]$, com $k = 1, \ldots, n$.

Assim, obtemos uma fórmula para a derivação funcional do $\det(h)$ com relação a $h(a)$ (com $a \in \Lambda^1(V)$)

$$
\partial_{h(a)} \det(h) = \underline{h}[a \lrcorner (\varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n)](\varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n)^{-1},
$$

que ainda, pode ser escrita numa forma mais interessante!

$$
\partial_{h(a)} \det(h) = \det(h)(h^\dagger)^{-1}(a).
$$

É oportuno comentar que algumas das fórmulas desenvolvidas nos exemplos acima são essenciais para as formulações rigorosas da teoria de gravitação como uma teoria de calibre, tais como as propostas recentemente por Rodrigues Jr. e Souza (em [19]) e Lasenby, Doran e Gull (em [15] e [16]).

CAPÍTULO 3

Campos Multivetoriais no Espaço-Tempo de Minkowski

1. Campos Multivetoriais

Modelaremos a noção de espaço-tempo de Minkowski na teoria de variedades. E definiremos o espaço vetorial de Minkowski. A álgebra de Clifford associada a esse espaço vetorial é a álgebra geométrica de Hestenes[4].

Relacionaremos as derivadas de Dirac com as derivadas de Hestenes.

1.1 Módulo de Campos k-Vetoriais

Consideremos $\Lambda^k(TM) = \bigcup_{x \in M} \Lambda^k(T_xM)$ (com $k \geq 1$), o fibrado de k-vetores sobre uma variedade suave M; *um campo k-vetorial sobre M* é uma função,

$$a : M \to \Lambda^k(TM) \text{ tal que para cada } x \in M : a_{(x)} \in \Lambda^k(T_xM). \tag{3.1}$$

Isto é, a cada $x \in M$ corresponde um k-vetor em $\Lambda^k(T_xM)$ (o espaço de k-vetores de T_xM); certamente, trata-se de um caso particular de campo k-tensorial, porque para cada $x \in M$: $\Lambda^k(T_xM) \subset T^k(T_xM)$, um campo escalar considera-se um campo 0-vetorial.

Um campo k-vetorial (com $k \geq 2$) é um campo k-tensorial totalmente antisimétrico, assim a noção de diferenciabilidade não precisa de esclarecimentos (veja o Apêndice A).

$\Lambda^k(M)$, o conjunto dos campos k-vetoriais sobre M do tipo diferenciavéis, é um *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$; ainda, note-se que $\mathcal{F}(M) \subset \Lambda^k(M) \subset T^k(M)$ (tanto $\mathcal{F}(M)$ quanto $T^k(M)$ são conjuntos bem definidos no Apêndice A).

1.2 Álgebras de Campos Multivetoriais

Seja $\Lambda(TM) = \bigcup_{x \in M} \Lambda(T_xM)$ o fibrado de multivetores sobre a variedade suave M; um *campo* *multivetorial sobre M* é uma função,

$$A : M \to \Lambda(TM) \text{ tal que para cada } x \in M : A(x) \in \Lambda(T_xM). \tag{3.2}$$

Isto é, a cada $x \in M$ corresponde um multivetor em $\Lambda(T_xM)$ (o espaço de multivetores de T_xM); trata-se de um caso particular de campo multitensorial, pois $\Lambda(T_xM) \subset T(T_xM)$.

Observamos que a existência de um campo multivetorial A implica a existência de $n+1$ campos k-vetoriais $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (n é a dimensão de M), tais que para cada $x \in M : A_{(x)} = A_{0(x)} + A_{1(x)} + \cdots + A_{n(x)}$.

O campo multivetorial A é *diferenciável* se e somente se cada um dos $n+1$ campos k-vetoriais $A_0, A_1, \ldots, A_n$ é diferenciável.

$\Lambda(M)$, o conjunto dos campos multivetoriais diferenciáveis sobre M, é um *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$; temos que $\mathcal{F}(M) \subset \Lambda(M) \subset \mathcal{T}(M)$.

Vejamos agora que os campos k-vetoriais podem ser pensados como caso especial dos campos multivetoriais, porque os k-vetores são algébricamente indistiguíveis dos multivetores homogêneos de graduação k, e portanto temos as inclusões notáveis: $\mathcal{F}(M) \subset \Lambda^k(M) \subset \Lambda(M) \subset \mathcal{T}(M)$ (veja o Apêndice A).

Se definirmos o produto exterior de campos multivetoriais por $(A \wedge B)_{(x)} = A_{(x)} \wedge B_{(x)}$, para todo $x \in M$, então $\Lambda(M)$ ganhará uma estrutura de álgebra associativa sobre $\mathcal{F}(M)$ (i.e., a *álgebra exterior ou de Grassmann dos campos multivetoriais diferenciáveis*).

Por outro lado, se considerarmos a estutura mínima $\langle M, g\rangle$, poderemos definir o produto escalar, os produtos contraídos e finalmente o produto de Clifford, de campos multivetoriais.

$\Lambda(M)$, com os produtos contraídos de campos multivetoriais, definidos por $(A \lrcorner B)_{(x)} = A_{(x)} \lrcorner B_{(x)}$ e $(A \llcorner B)_{(x)} = A_{(x)} \llcorner B_{(x)}$, para todo $x \in M$, é uma álgebra dupla não associativa sobre $\mathcal{F}(M)$ (i.e., *a álgebra interior dos campos multivetoriais diferenciáveis*).

$\Lambda(M)$, com o produto geométrico de campos multivetoriais, definido por: $(AB)_{(x)} = A_{(x)}B_{(x)}$, para todo $x \in M$, é uma álgebra associativa sobre $\mathcal{F}(M)$ (i.e., *a álgebra de Clifford dos campos multivetoriais diferenciáveis*).

1.3 Derivação Fundamental de Campos Multivetoriais

Consideremos mais uma vez a estrutura mínima $\langle M, g\rangle$, sabemos que existem uma conexão linear e uma derivada covariante naturalmente induzidas pelo campo tensorial métrico (veja o Apêndice A).

O operador diferencial $\nabla_{\mathbf{u}}$ permite-nos definir três outros operadores diferenciais: o gradiente ∇, o divergente contraído $\nabla\lrcorner$ e o rotacional $\nabla\wedge$.

Sejam $\langle \mathbf{e}_k\rangle$ e $\langle \varepsilon^k\rangle$ *referenciais de Cartan*[13] de $\mathcal{V}(M)$ e $\Lambda^1(M)$ respectivamente, o segundo dual do primeiro (i.e., $\varepsilon^k(\mathbf{e}_j) = \delta^k_j$).

Definimos o *gradiente*, o *divergente contraído* e o *rotacional* de um campo multivetorial diferenciável sobre uma variedade suave

$$\begin{aligned} \nabla A &= \varepsilon^k \nabla_{\mathbf{e}_k} A, \\ \nabla\lrcorner A &= \varepsilon^k \lrcorner \nabla_{\mathbf{e}_k} A, \\ \nabla\wedge A &= \varepsilon^k \wedge \nabla_{\mathbf{e}_k} A. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Às vezes, o gradiente é chamado de *derivada de Dirac.*

Para mostrarmos que esses operadores diferenciáis estão bem definidos, devemos provar ainda que eles são independentes dos referenciais de Cartan utilizados.

Vamos provar essa propriedade de invariancia só para o caso do gradiente.

Tomemos $\langle \mathbf{e}'_k\rangle$ e $\langle \varepsilon^{k\prime}\rangle$, dois referenciais de Cartan quaisquer, tais que $\varepsilon^{k\prime}(\mathbf{e}'_j) = \delta^k_j$. Para um campo multivetorial diferenciável arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{k\prime}\nabla_{\mathbf{e}'_k} A &= \varepsilon^{k\prime}\nabla_{g(\mathbf{e}'_k,\mathbf{e}^s)\mathbf{e}_s} A = \varepsilon^{k\prime} g(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}^s)\nabla_{\mathbf{e}_s} A \\ &= \varepsilon^{k\prime} g(\#^{-1}\varepsilon'_k, \#^{-1}\varepsilon^s)\nabla_{\mathbf{e}_s} A = \varepsilon^{k\prime}(\varepsilon'_k \cdot \varepsilon^s)\nabla_{\mathbf{e}_s} A, \\ \varepsilon^{k\prime}\nabla_{\mathbf{e}'_k} A &= \varepsilon^s \nabla_{\mathbf{e}_s} A. \end{aligned}$$

Onde utilizamos a expansão $\mathbf{v} = g(\mathbf{v}, \mathbf{e}^k)\mathbf{e}_k$, a propr.($i.$) da derivada covariante, os referenciais de Cartan recíprocos $\varepsilon_k = \#\mathbf{e}_k$ e $\mathbf{e}^k = \#^{-1}\varepsilon^k$, a definição de produto escalar de vetores (formas,

[13] Uma familia de n campos vetoriais tangente $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tais que para cada $x \in M$: $\mathbf{e}_{1(x)}, \ldots, \mathbf{e}_{n(x)}$ seja uma base de T_xM, é dita um referencial de Cartan de $\mathcal{V}(M)$.

Análogamente definimos um referencial de Cartan de qualquer módulo sobre $\mathcal{F}(M)$.

veja a def.1.8) e a fórmula de expansão para um vetor (forma) $a = (a \cdot \varepsilon_k)\varepsilon^k$.

Fica assim demonstrado que o gradiente está bem definido!

Os operadores diferenciais introduzidos acima estão relacionados entre si, i.e.,$\nabla A = \nabla \lrcorner\, A + \nabla \wedge A$ (ou em termos de operadores, $\nabla = \nabla\lrcorner + \nabla\wedge$).

Listamos algumas propriedades muito importantes dessas "derivadas de Dirac".

i.$\forall A, B \in \Lambda(M) : \nabla * (A + B) = \nabla * A + \nabla * B$, ($*$ simboliza o produto de Clifford, $\lrcorner$ ou $\wedge$).

ii.$\forall A, B \in \Lambda(M) : \nabla \lrcorner\, (A \lrcorner\, B) = (\nabla \wedge A) \lrcorner\, B + \bar{A} \lrcorner\, (\nabla \lrcorner\, B)$ e $\nabla \wedge (A \wedge B) = (\nabla \wedge A) \wedge B + \bar{A} \wedge (\nabla \wedge B)$.

Finalizando esta seção, comentamos uma propriedade muito interessante que relaciona a *derivada direcional de Dirac* com a *derivada covariante de Levi-Civita*.

Por definição $n \cdot \nabla A = (n \cdot \varepsilon^k)\nabla_{\mathbf{e}_k} A$, porém

$$(n \cdot \varepsilon^k)\nabla_{\mathbf{e}_k} A = g(\#^{-1}n, \#^{-1}\varepsilon^k)\nabla_{\mathbf{e}_k} A = g(\mathbf{n}, \mathbf{e}^k)\nabla_{\mathbf{e}_k} A = \nabla_{g(\mathbf{n},\mathbf{e}^k)\mathbf{e}_k} A,$$

e assim, temos o resultado

$$n \cdot \nabla A = \nabla_{\mathbf{n}} A. \tag{3.4}$$

Onde $n = \#\mathbf{n}$ (ou equivalentemente $\mathbf{n} = \#^{-1}n$).

2. Campos Multivetoriais Parametrizados

Introduzimos aqui a noção de campo multivetorial parametrizado, do tipo diferenciável, sobre uma variedade suave.

Trata-se de um conceito da maior importância na elaboraração do formalismo Lagrangiano; a Lagrangiana de um campo multivetorial (rotor ou spinor, veja os Apêndices B e C) e os tensores de energia-momento e de momento angular associados a esse campo multivetorial são básicamente exemplos de campos multivetoriais parametrizados.

2.1 Campos Multivetoriais com Parâmetros Escalares

Sejam $S_1, \ldots, S_k$ (com $k \geq 1$), k subconjuntos abertos de R; chamaremos de *campo multivetorial sobre M com k parâmetros escalares* à aplicação

$$X : M \times S_1 \times \cdots \times S_k \to \Lambda(TM), \tag{3.5}$$

tal que para cada $x \in M : X_{(x)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda(T_xM)$, quaisquer que sejam os valores dos k parâmetros escalares $\lambda_1 \in S_1, \ldots, \lambda_k \in S_k$; o subíndice (x) indica a dependência explícita do ponto $x \in M$.

Isto implica a existência de duas aplicações: para cada ponto $x \in M$ existe uma função multivetorial de k parâmetros escalares, $S_1 \times \cdots \times S_k \ni (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto X_{(x)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda(T_xM)$, e para cada um dos k parâmetros escalares $\lambda_1 \in S_1, \ldots, \lambda_k \in S_k$ existe um campo multivetorial ordinário sobre M, $M \ni x \mapsto X_{(x)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda(T_xM)$.

Introduzimos as seguintes definições de diferenciabilidade:

i. X será dito *diferenciável localmente* se e somente se para cada $x \in M$ a função multivetorial $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto X_{(x)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ é diferenciável no sentido da definição de diferenciabilidade da teoria de funções multivetoriais (Capítulo 2, seção 1).

ii. X será dito d*iferenciável globalmente* se e somente se para cada um dos $\lambda_1 \in S_1, \ldots, \lambda_k \in S_k$ o campo multivetorial ordinário, $x \mapsto X_{(x)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ é diferenciável no sentido da definição da diferenciabilidade apresentada na subseção(1.2).

É quase evidente que o conjunto dos campos multivetoriais com parâmetros escalares é um *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$.

2.2 Campos Multivetoriais Parametrizados com Campos Multivetoriais

Consideremos k campos multivetoriais sobre M (com $k \geq 1$): $X^j : M \to \Lambda_j^\diamond(TM)$ tal que para cada $x \in M : X_{(x)}^j \in \Lambda_j^\diamond(T_xM)$ (com $1 \leq j \leq k$).

$\Lambda_j^\diamond(TM) = \bigcup\limits_{x \in M} \Lambda_j^\diamond(T_xM)$ é o $j-$ésimo fibrado de multivetores sobre M, formado pelos j-ésimos subespaços-parte de multivetores $\Lambda_j^\diamond(T_xM)$; construamos agora o fibrado de k multivetores sobre M: $\bigcup\limits_{x \in M} \Lambda_1^\diamond(T_xM) \times \ldots \times \Lambda_k^\diamond(T_xM)$.

Chamaremos de *campo multivetorial sobre M, parametrizado com os k campos multivetoriais* $X^1, \ldots, X^k$, à aplicação

$$\mathcal{F} : \bigcup_{x \in M} \Lambda_1^\diamond(T_xM) \times \ldots \times \Lambda_k^\diamond(T_xM) \to \Lambda(TM), \tag{3.6}$$

tal que para cada $x \in M : \mathcal{F}_{(x)}(X_{(x)}^1, \ldots, X_{(x)}^k) \in \Lambda(T_xM)$; o primeiro subíndice (x) indica a dependência explícita do ponto $x \in M$.

Um caso especial de grande importância é o campo multivetorial parametrizado com 1 campo multivetorial, do tipo linear, com relação ao seu único parâmetro. Tal campo multivetorial é dito um *campo tensorial sobre* M.

A estrutura do campo multivetorial parametrizado com campos multivetoriais implica a existência de *duas aplicações*: para cada $x \in M$, a *função multivetorial de* k *parâmetros multivetoriais*, $\Lambda_1^\diamond(T_xM) \times \cdots \times \Lambda_k^\diamond(T_xM) \ni (X^1_{(x)}, \ldots, X^k_{(x)}) \mapsto \mathcal{F}_{(x)}(X^1_{(x)}, \ldots, X^k_{(x)}) \in \Lambda(T_xM)$; e o *campo multivetorial ordinário sobre* M, $M \ni x \mapsto \mathcal{F}_{(x)}(X^1_{(x)}, \ldots, X^k_{(x)}) \in \Lambda(T_xM)$.

Introduzimos as seguintes definições de diferenciabilidade:

i. $\mathcal{F}$ será dito *diferenciável localmente* se e somente se para cada $x \in M$ a função multivetorial $(X^1_{(x)}, \ldots, X^k_{(x)}) \mapsto \mathcal{F}_{(x)}(X^1_{(x)}, \ldots, X^k_{(x)})$ é diferenciável no sentido da teoria de funções multivetoriais (Capítulo 2, subseção 2.1).

ii. $\mathcal{F}$ será dito *diferenciável globalmente* se e somente se para todos $X^1 \in \Lambda_1^\diamond(M), \ldots, X^k \in \Lambda_k^\diamond(M)$, o campo multivetorial ordinário $x \mapsto \mathcal{F}_{(x)}(X^1_{(x)}, \ldots, X^k_{(x)})$ é diferenciável no sentido da definição de diferenciabilidade, já tratada na subseção (1.2).

No mínimo, o conjunto dos campos multivetoriais parametrizados com campos multivetoriais deve ser um *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$.

3. Espaço-Tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski é modelado sobre uma estrutura mínima $\langle M, \eta, \Gamma \rangle$, onde M é uma variedade suave difeomorfica a R^4, η é um campo tensorial métrico sobre M e Γ é a conexão linear sobre M induzida por η (i.e., a conexão linear de Levi-Civita, como pode ver-se no Apêndice A).

Postulamos a existência de um *sistema de coordenadas global* sobre M, isto é, um homeomorfismo (i.e., uma correspodência biunívoca e continua), $M \ni x \longleftrightarrow (x^0(x), x^1(x), x^2(x), x^3(x)) \in R^4$, tal que as componentes covariantes de η na base vetorial coordenada $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle$ (i.e., um referencial global de Cartan em $\mathcal{V}(M)$, ver nota de rodapé 13) são dadas por

$$\eta(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} . \tag{3.7}$$

Notemos que a matriz associada a η com relação a $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle$ é a matriz diagonal $(\eta_{\mu\nu}) = diag(1,-1,-1,-1)$, e consequentemente a inversa dessa matriz coincidirá com ela mesma, $(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu})$.

Observe-se que a existência de um sistema coordenado global fundamental implica a existência de outros (infinitos) sistemas coordenados globais, tais que as componentes covariantes do campo tensorial métrico nas respectivas bases coordenadas são também $\eta_{\mu\nu}$.

As *coordenadas Minkowskianas*, $M \ni x \leftrightarrow x^\mu(x) \in R$, (com $\mu = 0,1,2,3$) (i.e., do sistema de coordenadas global fundamental) estão relacionadas com a coordenada de tempo $t \in R$ e as coordenadas cartesianas $x, y, z \in R$, por: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$; certamente, elas têm um significado geométrico-físico fundamental.

Introduzimos duas bases naturais $\langle\gamma^\mu\rangle$ e $\langle\gamma_\mu\rangle$, a primeira associada ao sistema coordenado Minkowskiano e a segunda associada a $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle$

$$\gamma^\mu : M \to \Lambda^1(TM), \tag{3.8}$$

tal que para cada $x \in M$: $\gamma^\mu|_{(x)}(\mathbf{v}_x) = \mathbf{v}_x x^\mu$, qualquer que seja $\mathbf{v}_x \in T_xM$; note que se $\mathbf{v}_x = v_x^\mu \left.\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{(x)}$, então $\mathbf{v}_x x^\mu = v_x^\mu$.

$$\gamma_\mu : M \to \Lambda^1(TM), \tag{3.9}$$

tal que para cada $x \in M : \gamma_\mu|_{(x)}(\mathbf{v}_x) = \eta_{(x)}(\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{(x)}, \mathbf{v}_x)$, qualquer que seja $\mathbf{v}_x \in T_xM$, isto é, $\gamma_\mu|_{(x)} = \# \left.\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{(x)}$ (veja nota de rodapé 4).

Certamente, os campos 1-vetoriais γ^μ e γ_μ são diferenciáveis e determinam dois referenciáis globais de Cartan de $\Lambda^1(M)$ (veja nota de rodapé 13).

A base natural $\langle\gamma^\mu\rangle$ é dual de $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle$, pois $\gamma^\mu(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}) = \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} x^\mu = \delta^\mu_\nu$; e as bases naturais $\langle\gamma^\mu\rangle$ e $\langle\gamma_\mu\rangle$ são recíprocas entre si, uma vez que $\gamma^\mu \cdot \gamma_\nu = \eta(\#^{-1}\gamma^\mu, \#^{-1}\gamma_\nu) = \eta(\#^{-1}\gamma^\mu, \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}) = \gamma^\mu(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta^\mu_\nu$.

Temos que $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$ e $\gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}\gamma_\nu$, e o tensor métrico fundamental pode ser escrito

$$\eta = \eta_{\mu\nu}\gamma^\mu \otimes \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu}\gamma_\mu \otimes \gamma_\nu. \tag{3.10}$$

Lema 3.1: As derivadas covariantes con relação a $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ dos campos 1-vetoriais base γ^μ e γ_μ são nulas.

Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(M)$, então $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \gamma^\mu(\mathbf{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\gamma^\mu(\mathbf{v}) - \gamma^\mu(\Gamma(\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}, \mathbf{v}))$, e pela fórmula de expansão de um 1-vetor numa base (i.e. $a = a(\dfrac{\partial}{\partial x^\beta})\gamma^\beta$), temos que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \gamma^\mu = [\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\gamma^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\beta}) - \gamma^\mu(\Gamma(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}))]\gamma^\beta = [\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta^\mu_\beta - \gamma^\mu(0)]\gamma^\beta = o.$$

A prova para γ_μ é análoga.

3.1 Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo

Introduziremos uma relação de equivalência entre os vetores tangente à variedade Minkowskiana M (i.e., uma relação de equivalência no fibrado tangente $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$).

Sejam $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_{x'} \in TM$, dois vetores tangente pertencentes a $T_x M$ e $T_{x'} M$ respectivamente, $\mathbf{v}_x$ é dito *equipolente* a $\mathbf{v}_{x'}$ (e escreve-se $\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{x'}$), se e somente se

$$\gamma_\mu\big|_{(x)}(\mathbf{v}_x) = \gamma_\mu\big|_{(x')}(\mathbf{v}_{x'}), \text{ com } \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.11}$$

Notemos que os vetores tangente $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{(x)} \in T_x M$ e $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{(x')} \in T_{x'} M$, isto é, os valores dos campos vetoriais coordenados $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ nos pontos $x, x' \in M$, são equipolentes.

A equipolência de vetores tangente preserva-se através das combinações lineares de números reais com vetores tangente.

O conjunto dos vetores tangente equipolentes sobre a variedade Minkowskiana, denotado por $\mathcal{M}$, tem uma estrutura natural de espaço linear sobre R; as *classes de equivalência* $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \mathcal{C}_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_{(x)}}$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$, formam uma base natural de $\mathcal{M}$, e portanto, $\dim \mathcal{M} = 4$.

Agora, definimos uma relação de equivalência entre os k-tensores (com $k \geq 1$) sobre M (i.e., uma relação de equivalênciano fibrado de k-tensores $T^k(TM) = \bigcup_{x \in M} T^k(T_x M)$).

Sejam $\tau_x, \tau_{x'} \in T^k(TM)$, dois k-tensores pertencentes a $T^k(T_x M)$ e $T^k(T_{x'} M)$, ligados aos pontos $x, x' \in M$ respectivamente. Definimos que $\tau_x = \tau_{x'}$ (τ_x é dito *equipolente* a $\tau_{x'}$) se e somente se

$$\forall \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{M} : \tau_x(\mathbf{v}_x^1, \ldots, \mathbf{v}_x^k) = \tau_{x'}(\mathbf{v}_{x'}^1, \ldots, \mathbf{v}_{x'}^k), \tag{3.12}$$

(note que $\mathbf{v}_x^1 = \mathbf{v}_{x'}^1, \ldots, \mathbf{v}_x^k = \mathbf{v}_{x'}^k$).

Por exemplo, os vetores base $\gamma_\mu\big|_x \in \Lambda^1(T_xM)$ e $\gamma_\mu\big|_{x'} \in \Lambda^1(T_{x'}M)$ são equipolentes.

O conjunto das classes de equivalencia dos k-tensores sobre M pode ser identificado com o espaço linear $T^k(\mathcal{M})$; em particular, o conjunto das classes dos k-vetores se identifica com o espaço linear $\Lambda^k(\mathcal{M})$.

Também, podemos definir uma relação de equivalência entre os multitensores sobre M (i.e., uma relação de equivalência no fibrado de multitensores $T(TM) = \bigcup\limits_{x \in M} T(T_xM)$).

Para $\tau_x, \tau_{x'} \in T(TM)$, dois multitensores do mesmo grau $K \in N_0$, ligados aos pontos $x, x' \in M$; $\tau_x = \tau_{x'}$ se e somente se

$$\forall k, \text{ com } 1 \leq k \leq K : (\tau_x)_k = (\tau_{x'})_k, \tag{3.13}$$

no sentido da def.(3.12).

Assim, o conjunto das classes de equivalência dos multitensores sobre M pode ser identificado com o espaço linear $T(\mathcal{M})$; especialmente, o conjunto das classes dos multivetores é o espaço linear $\Lambda(\mathcal{M})$.

A equipolência de k-tensores e de multitensores é preservada através de todos os produtos: o tensorial, o exterior e os contraídos (à esquerda e à direita); então, logicamente, a equipolência de multivetores será preservada através do produto de Clifford.

A álgebra de Clifford dos multivetores do espaço linear $\mathcal{M}$ (i.e., o espaço vetorial de Minkowski) será chamada de *álgebra geométrica do espaço-tempo.*

3.2 Campos Multivetoriais como Funções Multivetoriais de Parâmetros Escalares e/ou do Vetor de Posição

Notemos que $\forall x \in M$ existem os 4 parâmetros escalares $x^\mu \equiv x^\mu(x) \in R$ (as coordenadas Minkowskianas contravariantes) e os 4 parâmetros escalares $x_\mu \equiv x_\mu(x) \in R$ (as *coordenadas covariantes $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$).* Podemos definir o vetor de posição (associado ao ponto $x \in M$, e denotado também por x!),

$$x = x^\mu \gamma_\mu = x_\mu \gamma^\mu, \tag{3.14}$$

onde $\gamma_\mu, \gamma_\mu \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ são as classes de equivalência dos vetores base $\gamma_\mu\big|_x, \gamma_\mu\big|_x \in \Lambda^1(T_xM)$. Note que $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$.

Assim, qualquer campo escalar sobre a variedade Minkowskiana, $M \ni x \mapsto f(x) \in R$, tem duas funções escalares associadas que são as suas representantes em R^4 e $\Lambda^1(\mathcal{M})$, a primeira é a *expresão coordenada do campo escalar (* uma função escalar dos 4 parâmetros escalares $x^\mu \in R$, ou dos 4 parâmetros escalares $x_\mu \in R$) e a segunda é uma *função escalar do vetor de posição* $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$,

$$R^4 \ni (x^0, \ldots, x^3) \quad \mapsto \quad f(x^0, \ldots, x^3) \in R, \tag{3.15a}$$

$$\Lambda^1(\mathcal{M}) \ni x \quad \mapsto \quad f(x) = f(x^0, \ldots, x^3) \in R. \tag{3.15b}$$

Ambas as representantes de f serão denotadas pela mesma letra, uma vez que disto não resulta nenhuma confusão.

Deveria ser evidente que se o campo escalar é diferenciável (no sentido da definição de diferenciabilidade no Apêndice A) então as duas funções escalares serão diferenciáveis (no sentido de diferenciabilidade discutida no Capítulo 2).

Lema 3.2: Todo campo multivetorial, do tipo diferenciável, induz duas funções multivetoriais uma dos 4 parâmetros escalares $x^\mu \in R$ (ou dos 4 parâmetros escalares $x_\mu \in R$) e outra do vetor de posição $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, ambas são diferenciáveis.

Seja $M \ni x \mapsto A_{(x)} \in \Lambda(T_xM)$ um campo multivetorial, se tomamos qualquer uma das bases naturais $\left\langle 1, \ldots, \gamma_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \gamma_{\mu_k}, \ldots \right\rangle_{1 \leq k \leq 4}$ ou $\langle 1, \ldots, \gamma^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \gamma^{\mu_k}, \ldots \rangle_{1 \leq k \leq 4}$, então temos

$$A_{(x)} = A^0(x) + \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{k!} A^{\mu_1 \cdots \mu_k}(x) \gamma_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \gamma_{\mu_k} = A_0(x) + \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{k!} A_{\mu_1 \ldots \mu_k}(x) \gamma^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \gamma^{\mu_k}.$$

Podemos definir a função multivetorial de 4 parâmetros escalares

$$R^4 \ni (x^0, \ldots, x^3) \mapsto A(x^0, \ldots, x^3) \in \Lambda(\mathcal{M}), \tag{3.16a}$$

tal que

$A(x^0,\ldots,x^3) = A^0(x^0,\ldots,x^3) + \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{k!} A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}$, ou também, $A(x^0,\ldots,x^3) = A_0(x^0,\ldots,x^3) + \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{k!} A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)\gamma^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma^{\mu_k}$. Onde $(x^0,\ldots,x^3)\mapsto A^0(x^0,\ldots,x^3)$, $(x^0,\ldots,x^3)\mapsto A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)$ e $(x^0,\ldots,x^3)\mapsto A_0(x^0,\ldots,x^3)$, $(x^0,\ldots,x^3)\mapsto A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)$ são as funções escalares asssociadas às componentes contravariantes e covariantes do campo multivetorial A, no sentido da def.(3.15a); e $\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}, \gamma^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma^{\mu_k}\in\Lambda^k(\mathcal{M})$ são precisamente as classes de equivalência dos k-vetores base $\gamma_{\mu_1}\Big|_x\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}\Big|_x$, $\gamma^{\mu_1}|_x\wedge\ldots\wedge\gamma^{\mu_k}|_x\in\Lambda^k(T_xM)$.

Também é possível definir a função multivetorial de uma variável vetorial

$$\Lambda^1(\mathcal{M})\ni x\mapsto A(x)\in\Lambda(\mathcal{M}), \tag{3.16b}$$

tal que

$A(x) = A^0(x) + \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k} = A_0(x) + \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)\gamma^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma^{\mu_k}$, onde $x\mapsto A^0(x)$, $x\mapsto A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$ e $x\mapsto A_0(x)$, $x\mapsto A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$ são as funções escalares associadas no sentido da def.(3.15b).

As defs.(3.16a) e (3.16b) significam que $A(x^0,\ldots,x^3) = A(x)\in\Lambda(\mathcal{M})$ é a classe de equivalência de $A_{(x)}\in\Lambda(T_xM)$; as respectivas diferenciabilidades de cada uma dessas funções multivetoriais seguem lógicamente da diferenciabilidade do campo multivetorial.

Lema 3.3: A todo campo multivetorial com k parâmetros escalares, do tipo diferenciável (local e globalmente), $M\times S_1\times\cdots\times S_k\ni(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\mapsto X_{(x)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\Lambda(T_xM)$, podemos associar uma função multivetorial do vetor de posição (uma variável vetorial) e de k variáveis escalares

$$\Lambda^1(\mathcal{M})\times S_1\times\cdots\times S_k\ni(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\mapsto X(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\Lambda(\mathcal{M}), \tag{3.17}$$

tal que $X(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ (um multivetor de $\mathcal{M}$) é a classe de equivalência de $X_{(x)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ (o multivetor de T_xM); a função multivetorial $(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\mapsto X(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ é definida pelo mesmo esquema utilizado na def.(3.16b); sua diferenciabilidade com relação á variável vetorial é conseqüência da diferenciabilidade global do campo multivetorial parametrizado, e com relação às k variáveis escalares é precisamente a diferenciabilidade local do mesmo.

Lema 3.4: Todo campo multivetorial parametrizado com k campos multivetoriais, do tipo diferenciável (local e globalmente)

$$\Lambda_1^\diamond(T_xM)\times\cdots\times\Lambda_k^\diamond(T_xM)\ni(X^1_{(x)},\ldots,X^k_{(x)})\mapsto\mathcal{F}_{(x)}(X^1_{(x)},\ldots,X^k_{(x)})\in\Lambda(T_xM),$$

implica a existência de uma função multivetorial do vetor de posição (uma variável vetorial) e k variáveis multivetoriais

$$\Lambda^1(\mathcal{M})\times\Lambda_1^\diamond(\mathcal{M})\times\cdots\times\Lambda_k^\diamond(\mathcal{M})\ni(x,X^1,\ldots,X^k)\mapsto\mathcal{F}(x;X^1,\ldots,X^k)\in\Lambda(\mathcal{M}), \quad (3.18)$$

na qual uma *composição múltipla* $X^1\to X^1(x),\ldots,X^k\to X^k(x)$, dá origem à função multivetorial do vetor de posição,

$$\Lambda^1(\mathcal{M})\ni x\mapsto\mathcal{F}(x;X^1(x),\ldots,X^k(x))\in\Lambda(\mathcal{M}), \quad (3.19)$$

tal que $\mathcal{F}(x;X^1(x),\ldots,X^k(x))$ (um multivetor de $\mathcal{M}$) é a classe de equivalência de $\mathcal{F}_{(x)}(X^1_{(x)},\ldots,X^k_{(x)})$ (o multivetor de T_xM). Essa função multivetorial é definida de maneira análoga à usada def.(3.16b).

Sua diferenciabilidade provem da diferenciabilidade local e global do campo multivetorial parametrizado.

3.3 Derivada Vetorial Vs. Derivada Covariante

Lema 3.5: Para qualquer campo escalar sobre M, do tipo diferenciável, existe uma notável relação entre sua derivada vetorial direcional e suas derivadas parciais com relação a x^μ e x_μ

$$n\cdot\partial_x f(x)=n\cdot\gamma^\mu\frac{\partial f(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^\mu}=n\cdot\gamma_\mu\frac{\partial f(x_0,\ldots,x_3)}{\partial x_\mu},$$

onde $n\in\Lambda^1(\mathcal{M})$.

Seja $f\in\mathcal{F}(M)$, tomemos as funções escalares associadas, $\Lambda^1(\mathcal{M})\ni x\mapsto f(x)\in R$ (do vetor de posição) e $R^4\ni(x^0,\ldots,x^3)\mapsto f(x)\in R$ (das coordenadas contravariantes), então temos que

$$\frac{f(x+\lambda n)-f(x)}{\lambda}=\frac{f(x^0+\lambda n^0,\ldots,x^3+\lambda n^3)-f(x^0,\ldots,x^3)}{\lambda},$$

onde $x=x^\mu\gamma_\mu$ e $n=n^\mu\gamma_\mu$.

Tomando $\lim\limits_{\lambda\to 0}$ nos lados esquerdo e direito, e interpretando em termos de derivada vetorial direcional e de derivada ordinária, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda n)-f(x)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x^0+\lambda n^0,\ldots,x^3+\lambda n^3)-f(x^0,\ldots,x^3)}{\lambda}\\
&= \frac{d}{d\lambda}\,f(x^0+\lambda n^0,\ldots,x^3+\lambda n^3)\big|_{\lambda=0},\\
n\cdot\partial_x f(x) &= \frac{\partial f(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^\mu}n^\mu=n\cdot\gamma^\mu\frac{\partial f(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^\mu}.
\end{aligned}$$

Onde usamos uma regra de cadeia da derivação ordinária.

De forma completamente análoga, podemos provar que $n\cdot\partial_x f(x)=n\cdot\gamma_\mu\dfrac{\partial f(x_0,\ldots,x_3)}{\partial x_\mu}$.

Lema 3.6: Para todo campo multivetorial sobre M, do tipo diferenciável, existe uma importante relação entre sua "derivada direcional de Dirac" (i.e., a derivada covariante de Levi-Civita), sua derivada vetorial direcional e suas derivadas parciais com relação a x^μ e x_μ,

$$n\cdot\nabla A=n\cdot\partial_x A(x)=n\cdot\gamma^\mu\frac{\partial A(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^\mu}=n\cdot\gamma_\mu\frac{\partial A(x_0,\ldots,x_3)}{\partial x_\mu}.$$

Seja $A\in\Lambda(M)$, tomemos o referencial de Cartan $\left\langle 1,\ldots,\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k},\ldots\right\rangle_{1\leq k\leq 4}$, levando em conta a prop.(3.4) e $\nabla_{\mathbf{n}}\gamma_\mu=o$ (veja o lema 3.1), temos

$$\begin{aligned}
n\cdot\nabla A &= \mathbf{n}A^0+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}\mathbf{n}A^{\mu_1\cdots\mu_k}\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}A^{\mu_1\cdots\mu_k}\nabla_{\mathbf{n}}\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}\\
&= n^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}A^0+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}n^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}A^{\mu_1\cdots\mu_k}\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}\\
&= n\cdot\gamma^\mu[\frac{\partial A^0(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^\mu}+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}\frac{\partial A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^\mu}\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}], \qquad \text{(a)}
\end{aligned}$$

onde utilizamos a linearidade e a regra de Leibnitz da derivada covariante e a fórmula de expansão de um campo vetorial tangente $\mathbf{n}=n^\mu\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Por outro lado, tomemos as funções multivetoriais associadas ao campo multivetorial, $\Lambda^1(V)\ni x\mapsto A(x)\in\Lambda(V)$ (do vetor de posição) e $R^4\ni(x^0,\ldots,x^3)\mapsto A(x^0,\ldots,x^3)\in\Lambda(V)$

(das coordenadas contravariantes).

A derivada vetorial direcional de $A(x)$ é

$$\begin{aligned} n\cdot\partial_x A(x) &= n\cdot\partial_x[A^0(x)+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}] \\ &= n\cdot\partial_x A^0(x)+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}n\cdot\partial_x A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k} \\ &= n\cdot\gamma^{\mu}[\frac{\partial A^0(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^{\mu}}+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}\frac{\partial A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^{\mu}}\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}], \quad \text{(b)}\end{aligned}$$

onde utilizamos a linearidade e a regra de Leibnitz da derivada vetorial direcional, $n\cdot\partial_x\gamma_\mu = o$ e o lema 3.5.

As derivadas parciais de $A(x^0,\ldots,x^3)$ com relação a x^μ fornecem

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}[A^0(x^0,\ldots,x^3)+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}] \\ &= \frac{\partial A^0(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^{\mu}}+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k!}\frac{\partial A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^{\mu}}\gamma_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\gamma_{\mu_k}. \quad \text{(c)}\end{aligned}$$

Agora, combinando as eqs.(a), (b) e (c), obtemos finalmente que

$$n\cdot\nabla A = n\cdot\partial_x A(x) = n\cdot\gamma^{\mu}\frac{\partial A(x^0,\ldots,x^3)}{\partial x^{\mu}}.$$

De maneira análoga obtemos também o resultado

$$n\cdot\nabla A = n\cdot\partial_x A(x) = n\cdot\gamma_{\mu}\frac{\partial A(x_0,\ldots,x_3)}{\partial x_{\mu}}.$$

Costumeiramente, expressamos o conteúdo deste lema pelas correspondências

$$\gamma_\mu\cdot\nabla\leftrightarrow\gamma_\mu\cdot\partial_x\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial x^\mu}\ \text{e}\ \gamma^\mu\cdot\nabla\leftrightarrow\gamma^\mu\cdot\partial_x\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (3.20)$$

Ainda, o lema 3.6 tem uma conseqüência muito interessante, o gradiente ∇A, o divergente $\nabla\lrcorner\, A$ e o rotacional $\nabla\wedge A$ (i.e., as derivadas de Dirac) coincidem com o gradiente $\partial_x A(x)$, o divergente $\partial_x\lrcorner\, A(x)$ e o rotacional $\partial_x\wedge A(x)$ (i.e., as derivadas de Hestenes[4],[8]).; Este corolario justifica as correspondências $\nabla\leftrightarrow\partial_x$, $\nabla\lrcorner\leftrightarrow\partial_x\lrcorner$ e $\nabla\wedge\leftrightarrow\partial_x\wedge$.

CAPÍTULO 4

Formalismo Lagrangiano para Campos Multivetoriais

Desenvolveremos neste capítulo o formalismo Lagrangiano para campos multivetoriais[9] no espaço-tempo de Minkowski.

A idéia foi sugerida originalmente por Lasenby et al. em [9] e Rodrigues Jr. et al. em [18], porém sem justificativa matemática rigorosa.

Discutiremos especialmente os conceitos fundamentais envolvidos nas noções de Lagrangiana e ação e obteremos as equações de Euler-Lagrange correspondentes aos distintos tipos de Lagrangianas a partir do princípio de ação estacionária.

Além disso, introduziremos e discutiremos os conceitos de extensores de energia-momento e de momento angular.

1. Lagrangianas de Campos Multivetoriais

Existem exatamente três tipos fundamentais de Lagrangianas associadas a um campo multivetorial no espaço-tempo de Minkowski.

Seja X um campo multivetorial diferenciável sobre a variedade Minkowskiana M, e consideremos as derivadas especiais $\partial * X$, onde $*$ é quaisquer dos produtos de multivetores (*Clifford*), $(\lrcorner)$ ou $(\wedge)$ (i.e. $\partial * X$ é o gradiente ∂X, o divergente contraído $\partial\lrcorner\, X$ ou o rotacional $\partial \wedge X$).

Um campo escalar parametrizado com os campos multivetoriais X e $\partial * X$, do tipo diferenciável global e localmente,

$$\mathcal{L} : \bigcup_{x \in M} \langle \Lambda(T_x M) \rangle_{X_{(x)}} \times \langle \Lambda(T_x M) \rangle_{\partial * X_{(x)}} \to R, \tag{4.1a}$$

tal que para cada $x \in M : \mathcal{L}(X_{(x)}, \partial * X_{(x)}) \in R$, será chamado de *Lagrangiana associada ao campo multivetorial X*.

Essa aplicação do fibrado de duplas de multivetores $\bigcup\limits_{x\in M} \langle\Lambda(T_xM)\rangle_{X_{(x)}} \times \langle\Lambda(T_xM)\rangle_{\partial*X_{(x)}}$ a R implica a existência de uma uma função escalar de 2 variáveis multivetoriais

$$\langle\Lambda(\mathcal{M})\rangle_{X(x)} \times \langle\Lambda(\mathcal{M})\rangle_{\partial*X(x)} \ni (X, X_*) \mapsto \mathcal{L}(X, X_*) \in R, \tag{4.1b}$$

na qual a composição múltipla $X \to X(x)$ e $X_* \to \partial * X(x)$, dá origem à função escalar do vetor de posição

$$\Lambda^1(\mathcal{M}) \ni x \mapsto \mathcal{L}(X(x), \partial * X(x)) \in R, \tag{4.1c}$$

tal que $\mathcal{L}(X(x), \partial * X(x)) = \mathcal{L}(X_{(x)}, \partial * X_{(x)})$.

Note-se que $\Lambda^1(\mathcal{M}) \ni x \mapsto X(x) \in \langle\Lambda(\mathcal{M})\rangle_{X(x)}$ e $\Lambda^1(\mathcal{M}) \ni x \mapsto \partial * X(x) \in \langle\Lambda(\mathcal{M})\rangle_{\partial*X(x)}$ são as funções multivetoriais do vetor de posição x, associadas aos campos multivetoriais X e $\partial * X$.

Às vezes, para esses esquemas complicados de funções multivetoriais utilizaremos as notações simplificadas (e abusivas!) $x \mapsto (X, \partial * X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial * X)$.

Notemos os três tipos de Lagrangianas $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)$ e $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$.

1.1 Variação da Lagrangiana

Introduziremos dois conceitos fundamentais no formalismo Lagrangiano, a saber: Lagrangiana variada e primeira variação da Lagrangiana.

Seja Ω um subconjunto aberto de M, com fronteira $\partial\Omega$; tomemos um campo multivetorial arbitrário A (diferenciável!) que se anula sobre $\partial\Omega$ (i.e., $A|_{\partial\Omega} = O$).

Podemos definir uma função escalar do vetor de posição e de um parâmetro real, associada à Lagrangiana $(X, \partial * X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial * X)$, por

$$\mathcal{L}_A : \Lambda^1(\mathcal{M}) \times S_0 \to R, \tag{4.2}$$

tal que para $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ e $\lambda \in S_0$ (um subconjunto aberto de R, que contem o zero)

$$\mathcal{L}_A(x, \lambda) = \mathcal{L}(X(x) + \lambda \langle A(x)\rangle_{X(x)}, \partial * X(x) + \lambda \langle \partial * A(x)\rangle_{\partial*X(x)}).$$

Observe-se que $\mathcal{L}_A(x,0) = \mathcal{L}(X(x), \partial * X(x))$, por isso $\mathcal{L}_A$ será chamada de *Lagrangiana variada.*

Por outro lado, podemos desenvolver $\mathcal{L}_A$ pelo teorema do valor médio (de ordem 1). Obtemos que

$$\mathcal{L}_A(x,\lambda) = \mathcal{L}_A(x,0) + \partial_\lambda \mathcal{L}_A(x,\lambda)|_{\lambda=0}\, \lambda + \frac{1}{2!}\, \partial_\lambda^2 \mathcal{L}_A(x,\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_1} \lambda^2, \text{ com } 0 < |\lambda_1| < |\lambda|\,.$$

Se definirmos a função escalar de x e λ,

$$\delta\mathcal{L}_A : \Lambda^1(\mathcal{M}) \times S_0 \to R,\ (x,\lambda) \mapsto \delta\mathcal{L}_A(x,\lambda) = \partial_\lambda \mathcal{L}_A(x,\lambda)|_{\lambda=0}\, \lambda, \tag{4.3}$$

e levarmos em conta que $\mathcal{L}_A(x,0) = \mathcal{L}(X(x), \partial * X(x))$, poderemos escrever que

$$\mathcal{L}_A(x,\lambda) = \mathcal{L}(X(x), \partial * X(x)) + \delta\mathcal{L}_A(x,\lambda) + o(x,\lambda^2).$$

Portanto, $\delta\mathcal{L}_A$ é a aproximação linear a $\mathcal{L}_A$, e será convenientemente chamada de *primeira variação da Lagrangiana.*

Lema: A derivada da Lagrangiana variada em zero (i.e., $\partial_\lambda \mathcal{L}_A(x,\lambda)|_{\lambda=0}$) pode ser expressa em termos das derivadas multivetoriais parciais da Lagrangiana. Temos,

$$\partial_\lambda \mathcal{L}_A|_{\lambda=0} = A \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial * X) + \partial * A \cdot \partial_{X_*} \mathcal{L}(X, \partial * X). \tag{4.4}$$

De acordo com a def.(4.2), temos que (omitindo-se a variável vetorial x),

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \mathcal{L}_A|_{\lambda=0} &= \partial_\lambda \mathcal{L}(X + \lambda \langle A\rangle_X, \partial * X + \lambda \langle \partial * A\rangle_{\partial * X})|_{\lambda=0} \\
&= [\partial_\lambda (X + \lambda \langle A\rangle_X) \cdot \partial_X \mathcal{L}(X + \lambda \langle A\rangle_X, \partial * X + \lambda \langle \partial * A\rangle_{\partial * X}) + \\
&\quad \partial_\lambda (\partial * X + \lambda \langle \partial * A\rangle_{\partial * X}) \cdot \partial_{\partial * X} \mathcal{L}(X + \lambda \langle A\rangle_X, \partial * X + \lambda \langle \partial * A\rangle_{\partial * X})|_{\lambda=0} \\
&= \langle A\rangle_X \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial * X) + \langle \partial * A\rangle_{\partial * X} \cdot \partial_{X_*} \mathcal{L}(X, \partial * X) \\
&= A \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial * X) + \partial * A \cdot \partial_{X_*} \mathcal{L}(X, \partial * X),
\end{aligned}$$

onde utilizamos uma regra de cadeia do cálculo de funções multivetoriais, duas propriedades das funções escalares de variáveis multivetoriais, a saber, $\Phi(X)$, $A \cdot \partial_X \Phi(X) = A \cdot [\partial_X \Phi(X)]$ e $\partial_X \Phi(X) = \langle \partial_X \Phi(X) \rangle_X$, e a identidade algébrica $\langle A \rangle_X \cdot B = A \cdot \langle B \rangle_X$.

Às vezes, a fórmula (4.4) será escrita por abuso de notação

$$\partial_\lambda \mathcal{L}_A|_{\lambda=0} = A \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial * X) + \partial * A \cdot \partial_{\partial * X} \mathcal{L}(X, \partial * X).$$

1.2 Variação da Ação

Associado à Lagrangiana $(X, \partial * X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial * X)$, existe um escalar (i.e., um número real) chamado de *ação* (*sobre* Ω), definido por

$$S = \int_\Omega \mathcal{L}(X(x), \partial * X(x)) \gamma_{(x)}, \tag{4.5}$$

onde $\gamma_{(x)} = \gamma^0_{(x)} \wedge \gamma^1_{(x)} \wedge \gamma^2_{(x)} \wedge \gamma^3_{(x)}$ é o *elemento de volume de* M (i.e., para cada $x \in M$: $\gamma_{(x)} \in \Lambda^4(T_x M)$). Trata-se da integral de uma 4-forma diferencial na teoria de integração em variedades[1],[3].

Introduziremos os conceitos fundamentais de ação variada e primeira variação da ação.

Podemos definir a função real ordinária de S_0 (um subconjunto aberto de R, que contem o zero) a R

$$S_A : S_0 \to R, \lambda \mapsto S_A(\lambda) = \int_\Omega \mathcal{L}_A(x, \lambda) \gamma_{(x)}, \tag{4.6}$$

ou seja $S_A(\lambda) = \int_\Omega \mathcal{L}(X(x) + \lambda \langle A(x) \rangle_{X(x)}, \partial * X(x) + \lambda \langle \partial * A(x) \rangle_{\partial * X(x)}) \gamma_{(x)}$.

Observamos que $S_A(0) = S$. Por essa razão, a função ordinária S_A será chamada de *ação variada da Lagrangiana.*

Por outro lado, se desenvolvermos S_A pelo teorema do valor médio (de ordem 1), obteremos

$$S_A(\lambda) = S_A(0) + S'_A(0)\lambda + \frac{1}{2!} S''_A(\lambda_1)\lambda^2, \text{com } 0 < |\lambda_1| < |\lambda|,$$

e, definindo a função real ordinária δS_A,

$$\delta S_A : S_0 \to R, \lambda \mapsto \delta S_A(\lambda) = S'_A(0)\lambda, \tag{4.7}$$

e levando em conta que $S_A(0) = S$, teremos que

$$S_A(\lambda) = S + \delta S_A(\lambda) + o(\lambda^2).$$

Assim, δS_A é uma aproximação linear a S_A, e será chamada de *primeira variação da ação.*

Na mesma linha de raciocínio, poderiamos desenvolver as variações de ordens superiores da Lagrangiana e da ação. Porém não são aqui necessárias!

A seguir, mostraremos que para cada um dos três tipos de Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, $(X, \partial \lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \lrcorner\, X)$ e $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$, temos uma fórmula da derivada da ação variada em zero (i.e., $S'_A(0) = \partial_\lambda \int_\Omega \mathcal{L}_A(x, \lambda)\gamma_{(x)}\Big|_{\lambda=0} = \int_\Omega \partial_\lambda \mathcal{L}_A(x, 0)\gamma_{(x)}$).

Utilizaremos três identidades notáveis[14] do cálculo multivetorial

$$\begin{aligned}
\partial \cdot [\partial_a(aX) \cdot Y] &= (\partial X) \cdot Y + X \cdot (\partial Y), && \text{(4.8a)}\\
\partial \cdot [\partial_a(a \lrcorner\, X) \cdot Y] &= (\partial \lrcorner\, X) \cdot Y + X \cdot (\partial \wedge Y), && \text{(4.8b)}\\
\partial \cdot [\partial_a(a \wedge X) \cdot Y] &= (\partial \wedge X) \cdot Y + X \cdot (\partial \lrcorner\, Y), && \text{(4.8c)}
\end{aligned}$$

(a é um campo vetorial e X e Y são dois campos multivetoriais), e o *Teorema de Gauss-Stokes*

$$\int_\Omega (\partial \cdot v)\gamma = \oint_{\partial\Omega} v \lrcorner\, \gamma, \tag{4.9}$$

(v é um campo vetorial diferenciável arbitrário).

Agora, para o primeiro tipo de Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, pela fórmula (4.4), temos que (omitindo-se x)

$$S'_A(0) = \int_\Omega [A \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial X) + \partial A \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X)]\gamma, \tag{i}$$

o segundo termo da integral de volume pode ser fácilmente transformado, utilizando a identidade

[14] As idéias gerais para as demonstrações das identidades (4.8a), (4.8b0 e (4.8c), ficam ilustradas provando só a primeira $\partial \cdot [\partial_a(aX) \cdot Y] = \gamma^\beta \cdot \gamma^\mu \partial_\beta[(\gamma_\mu X) \cdot Y] = \gamma^\beta \cdot \gamma^\mu[(\gamma_\mu \partial_\beta X) \cdot Y + X \cdot (\gamma_\mu \partial_\beta Y)] = (\partial X) \cdot Y + X \cdot (\partial Y)$
Numa linha de raciocínio análoga, utlilizando as identidades $(b \lrcorner\, A) \cdot B = A \cdot (b \wedge B)$ e $(b \wedge A) \cdot B = A \cdot (b \lrcorner\, B)$, podemos provar facilmente a segunda e a terceira.

(4.8a) e o Teorema de Gauss-Stokes, dá

$$\begin{aligned}\int_\Omega [\partial A \cdot \partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)]\gamma &= \int_\Omega [\partial A \cdot \partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots) + A\cdot \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots) - A\cdot \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)]\gamma \\ &= \int_\Omega \{\partial \cdot [\partial_a(aA)\cdot \partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)] - A\cdot \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)\}\gamma \\ &= \oint_{\partial\Omega} [\partial_a(aA)\cdot \partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)]\lrcorner\,\gamma - \int_\Omega [A\cdot \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)]\gamma,\end{aligned}$$

e, levando em conta a *condição de fronteira* $A_{\partial\Omega} = O$, obtemos que

$$\int_\Omega [\partial A \cdot \partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)]\gamma = -\int_\Omega [A\cdot \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)]\gamma. \tag{ii}$$

Daí, colocando a eq.(ii) na eq.(i), obtemos a fórmula

$$S'_A(0) = \int_\Omega A\cdot[\partial_X \mathcal{L}(X,\partial X) - \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(X,\partial X)]\gamma. \tag{4.10}$$

Na mesma linha de raciocínio, utilizando as identidades (4.8b) e (4.8c) e o Teorema de Gauss-Stokes com a condição de fronteira $A_{\partial\Omega} = O$, obtemos para o segundo e terceiro tipo de Lagrangianas $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)$ e $(X, \partial\wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\wedge X)$ as fórmulas

$$S'_A(0) = \int_\Omega A\cdot[\partial_X\mathcal{L}(X,\partial\lrcorner\, X) - \partial\wedge\partial_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(X,\partial\lrcorner\, X)]\gamma, \tag{4.11}$$

$$S'_A(0) = \int_\Omega A\cdot[\partial_X\mathcal{L}(X,\partial\wedge X) + \partial\lrcorner\,\partial_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(X,\partial\wedge X)]\gamma. \tag{4.12}$$

1.3 Princípio de Ação Estacionária

O princípio de ação estacionária pode ser enunciado rigorosamente utilizando o conceito fundamental de primeira variação da ação.

O campo multivetorial X evolui de modo que a primeira variação da ação δS_A, para um campo multivetorial arbitrário A, seja identicamente nula; isto é,

$$\delta S_A(\lambda) = 0, \text{ para todo } \lambda \in S_0, \tag{4.13a}$$

ou equivalentemente

$$S'_A(0) = 0, \tag{4.13b}$$

a *condição de ser nula* a derivada da ação variada em zero.

1.4 Equação de Euler-Lagrange

O princípio de ação estacionária implica a existência de uma equação diferencial que deve ser satisfeita pelo campo multivetorial X. Tal equação diferencial é tradicionalmente conhecida como a *equação de Euler-Lagrange.*

Obteremos as equações de Euler-Lagrange correspondentes a cada um dos três tipos de Lagrangianas $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)$ e $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$.

Para cada caso, a equação diferencial satisfeita pelo campo multivetorial X é obtida a partir das fórmulas (4.10), (4.11) ou (4.12) sob a condição de anular-se a derivada da ação variada em zero.

No caso da Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, utilizando a fórmula (4.10) e a eq.(4.13b), temos

$$\int_\Omega A \cdot [\partial_X \mathcal{L}(X, \partial X) - \partial\partial_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X)]\gamma = 0,$$

e, pela arbitrariedade de A, obtemos que

$$\partial_X \mathcal{L}(X, \partial X) - \partial\partial_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X) = O. \tag{4.14}$$

A equação diferencial multivetorial (4.14) é equação de Euler-Lagrange para a evolução de um campo multivetorial X com Lagrangiana associada $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$.

Para as Lagrangianas $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)$ e $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$, das fórmulas (4.11) e (4.12) e a eq.(4.13b), obtemos que

$$\partial_X \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X) - \partial \wedge \partial_{\partial\lrcorner\, X} \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X) = O, \tag{4.15}$$

$$\partial_X \mathcal{L}(X, \partial \wedge X) - \partial\lrcorner\, \partial_{\partial\wedge X} \mathcal{L}(X, \partial \wedge X) = O. \tag{4.16}$$

Finalizamos esta subseção, com a apresentação de alguns exemplos importantes de aplicação do formalismo Lagrangiano.

Exemplo 4.1: Lagrangiana de Dirac.

Na Mecânica Quântica, uma partícula com massa m, carga elétrica e e spin $\frac{1}{2}$ (i.e., a partícula de Dirac) é descrita por um campo spinorial ψ (chamado de campo spinorial de Dirac-Hestenes), no nosso formalismo, ψ é *essencialmente* um campo multivetorial par. Para mais detalhes sobre este último,veja o Apêndice C.

A Lagrangiana para a partícula de Dirac, movendo-se num campo eletromagnético, é

$$\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) = \hbar(\partial\psi i\gamma_3) \cdot \psi - e(A\psi\gamma_0) \cdot \psi - mc\psi \cdot \psi,$$

onde A é o campo de Maxwell (i.e., o potencial eletromagnético). Lembre-se que $i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ é a unidade pseudo-escalar na álgebra de espaço-tempo.

Trata-se de uma Lagrangiana tipo $(\psi, \partial\psi) \mapsto \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$, e portanto a equação de Euler-Lagrange associada ao campo spinorial ψ, será

$$\partial_\psi \mathcal{L}(\psi, \partial\psi) - \partial\partial_{\partial\psi}\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) = O.$$

Calculemos as derivadas multivetoriais $\partial_\psi \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$ e $\partial_{\partial\psi}\mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$. Temos,

$$\begin{aligned}
\partial_\psi \mathcal{L}(\psi, \partial\psi) &= \hbar \langle \partial\psi i\gamma_3 \rangle_\psi - e\left\langle A\psi\gamma_0 + \widetilde{A}\psi\widetilde{\gamma}_0 \right\rangle_\psi - 2mc\psi \\
&= \hbar\partial\psi i\gamma_3 - 2eA\psi\gamma_0 - 2mc\psi, \\
\partial\partial_{\partial\psi}\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) &= -\hbar\partial_{\partial\psi}(\partial\psi \cdot \psi i\gamma_3) = -\hbar\psi i\gamma_3,
\end{aligned}$$

onde utilizamos as identidades do cálculo multivetorial $\partial_X(X \cdot X) = 2X$, $\partial_X(B \cdot X) = \langle B \rangle_X$ e $\partial_X[(BXC) \cdot X] = \left\langle BXC + \widetilde{B}X\widetilde{C} \right\rangle_X$. Desenvolvidas nos exemplos (2.1), (2.2) e (2.3) do Capítulo 2.

Assim, a equação diferencial que deve ser satisfeita pelo campo de Dirac ψ (i.e., a equação de Dirac), é

$$\begin{aligned}
\hbar\partial\psi i\gamma_3 - 2eA\psi\gamma_0 - 2mc\psi - \partial(-\hbar\psi i\gamma_3) &= O \\
\hbar\partial\psi i\gamma_3 - eA\psi\gamma_0 - mc\psi &= O, \\
\hbar\partial\psi i\sigma_3 - eA\psi &= mc\psi\gamma_0.
\end{aligned}$$

Observamos que a Lagrangiana de Dirac, pensada como função escalar de 2 variáveis multivetoriais $(\psi, \varphi) \mapsto \mathcal{L}(\psi, \varphi) = \hbar(\varphi i\gamma_3) \cdot \psi - e(A\psi\gamma_0) \cdot \psi - mc\psi \cdot \psi$, possui uma propriedade notável, a função composta $\psi \mapsto \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$, onde ψ satisfaz a equação de Dirac, é identicamente nula. Vejamos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) &= \hbar(\partial\psi i\gamma_3) \cdot \psi - e(A\psi\gamma_0) \cdot \psi - mc\psi \cdot \psi \\
&= (\hbar\partial\psi i\gamma_3 - eA\psi\gamma_0 - mc\psi) \cdot \psi, \\
\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) &= 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2: Lagrangiana de Maxwell.

Na Teoria Eletromagnética, a Lagrangiana associada ao campo de Maxwell A (i.e., o potencial eletromagnético, veja-se o Apêndice B) gerado por uma densidade de corrente J, é

$$\mathcal{L}(A, \partial \wedge A) = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 (\partial \wedge A) \cdot (\partial \wedge A) - A \cdot J.$$

Trata-se de uma Lagrangiana $(A, \partial \wedge A) \mapsto \mathcal{L}(A, \partial \wedge A)$, e assim a equação de Euler-Lagrange para A, será

$$\partial_A \mathcal{L}(A, \partial \wedge A) - \partial \lrcorner\, \partial_{\partial \wedge A} \mathcal{L}(A, \partial \wedge A) = O.$$

Calculamos as derivadas multivetoriais $\partial_A \mathcal{L}(A, \partial \wedge A)$ e $\partial_{\partial \wedge A} \mathcal{L}(A, \partial \wedge A)$.

$$\begin{aligned}
\partial_A \mathcal{L}(A, \partial \wedge A) &= -\langle J \rangle_A = -J, \\
\partial_{\partial \wedge A} \mathcal{L}(A, \partial \wedge A) &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \partial_{\partial \wedge A} (\partial \wedge A) \cdot (\partial \wedge A) = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 2\partial \wedge A.
\end{aligned}$$

Onde utilizamos as formulas multivetoriais $\partial_X (X \cdot X) = 2X$ e $\partial_X (B \cdot X) = \langle B \rangle_X$.

A equação diferencial satisfeita pelo campo de Maxwell A é então,

$$\begin{aligned}
-J + \varepsilon_0 c^2 \partial \lrcorner (\partial \wedge A) &= o, \\
\partial \lrcorner (\partial \wedge A) &= \mu_0 J, \qquad\qquad (\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1).
\end{aligned}$$

Para o campo de Faraday (i.e,. o campo eletromagnético) $F = \partial \wedge A$, temos que

$$\partial \lrcorner F = \mu_0 J \Leftrightarrow \partial F = \mu_0 J.$$

Esta última equação diferencial multivetorial será dita equação de Maxwell. Como mostrado no Apêndice B, ela codifica as quatro equações diferenciais vetoriais usuais dos textos elementares.

2. Extensor Canônico de Energia-Momento

Desenvolveremos um argumento heurístico para obtermos os extensores canônicos de energia associados a cada um dos três tipos de Lagrangianas $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, $(X, \partial \lrcorner X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \lrcorner X)$ e $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$.

Mostraremos que a invariancia translacional da Lagrangiana implica a existência de um campo extensorial do tipo $(1, 1)$ que certamente é conservado, esse é o extensor canônico de energia-momento.

Por uma translação ativa (i.e., do sistema físico) na direção constante γ_μ e de amplitude ε, o vetor de posição transforma-se por $x \to x' = x + \varepsilon\gamma_\mu$, a lei de transformação de um campo multivetorial X, tanto para rotor quanto para spinor, é $X(x) \to X'(x') = X(x)$, ou seja, $X(x) \to X'(x) = X(x'')$, com $x'' = x - \varepsilon\gamma_\mu$.Para mais esclarecimentos sobre os conceitos de rotor e spinor, veja os Apêndices B e C.

A invariancia translacional de uma Lagrangiana $(X, \partial * X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial * X)$, associada ao campo multivetorial X, significa que $\mathcal{L}[X(x), \partial * X(x)] = \mathcal{L}[X'(x'), \partial' * X'(x')]$, $(\partial \equiv \partial_x$ e $\partial' \equiv \partial_{x'})$, ou ainda, de uma maneira mais conveniente $\mathcal{L}[X(x''), \partial{*}X(x'')] = \mathcal{L}[X'(x), \partial{*}X'(x)]$, com $x'' = x - \varepsilon\gamma_\mu$.

Notemos que $X(x'')$ e $X'(x)$ são dependentes do vetor de posição x e do parâmetro real ε; a "grande ideia" é derivar com relação a ε ambos lados da condição de invariancia translacional, e valuar as equações em $\varepsilon = 0$.

Para ilustrarmos a situação geral, só desenvolveremos o teorema de conservação da energia-momento correspondente à Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$.

Neste caso, derivando com relação ao parâmetro real ε a condição de invariancia translacional, obtemos que

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon x'' \cdot \mathcal{L}[X(x''), \partial X(x'')] &= \partial_\varepsilon X'(x) \cdot \partial_X \mathcal{L}[X'(x), \partial X'(x)] \\ &+ \partial\partial_\varepsilon X'(x) \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}[X'(x), \partial X'(x)], \end{aligned} \qquad (i)$$

onde utilizamos duas regras de cadeia do cálculo multivetorial; no lado esquerdo com a função vetorial $\varepsilon \mapsto x''$ e a função escalar $x'' \mapsto \mathcal{L}[X(x''), \partial X(x'')]$ e no lado direito com as funções multivetoriais $\varepsilon \mapsto X(x'')$, $\varepsilon \mapsto \partial X(x'')$ e a função Lagrangiana $\mathcal{L}$; no segundo termo do lado direito usamos a comutação dos operadores ∂_ε e ∂.

Calculando ambos os lados da eq.(i) em $\varepsilon = 0$, levando em conta os resultados $X(x'')|_{\varepsilon=0} = X(x)$, $\partial X(x'')|_{\varepsilon=0} = \partial X(x)$ e $X'(x)|_{\varepsilon=0} = X(x)$, $\partial X'(x)|_{\varepsilon=0} = \partial X(x)$, temos que

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon x''\big|_{\varepsilon=0} \cdot \partial \mathcal{L}(X, \partial X) &= \partial_\varepsilon X'(x)\big|_{\varepsilon=0} \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial X) \\ &+ \partial\, \partial_\varepsilon X'(x)\big|_{\varepsilon=0} \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X),\end{aligned} \qquad (ii)$$

e, introduzindo na eq.(ii) os resultados $\partial_\varepsilon x''|_{\varepsilon=0} = -\gamma_\mu$ e $\partial_\varepsilon X'(x)|_{\varepsilon=0} = -\partial_\mu X(x)$, é

$$-\gamma_\mu \cdot \partial \mathcal{L}(X, \partial X) = -\partial_\mu X \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial X) - \partial\partial_\mu X \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X). \qquad (iii)$$

O lado direito da eq.(iii) pode ser escrita como o divergente de um campo vetorial, a saber

$$\begin{aligned}-\gamma_\mu \cdot \partial \mathcal{L}(\cdots) &= -\partial_\mu X \cdot \partial_X \mathcal{L}(\cdots) - \partial\partial_\mu X \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots) \\ &\quad -\partial_\mu X \cdot \partial\partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots) + \partial_\mu X \cdot \partial\partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots) \\ &= -\partial_\mu X \cdot [\partial_X \mathcal{L}(\cdots) - \partial\partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots)] - \partial \cdot \left\langle \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots) \right\rangle_1, \\ \Rightarrow \partial_\mu \mathcal{L}(X, \partial X) &= \partial \cdot \left\langle \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X) \right\rangle_1.\end{aligned} \qquad (iv)$$

Lembre-se que $\gamma_\mu \cdot \partial = \partial_\mu$ e $\gamma^\mu \cdot \partial = \partial^\mu$. Utilizamos nas deduções acima a equação de Euler-Lagrange (4.14) e a identidade[15] do cálculo multivetorial $\partial \cdot \left\langle X\widetilde{Y} \right\rangle_1 = (\partial X) \cdot Y + X \cdot (\partial Y)$,

[15] A identidade $\partial \cdot \left\langle X\widetilde{Y} \right\rangle_1 = (\partial X) \cdot Y + X \cdot (\partial Y)$ pode ser obtida facilmente da identidade (4.8a); de fato, no lado esquerdo da identidade (4.8a), temos que $\partial_a(aX) \cdot Y = \partial_a X \cdot (aY) = \partial_a(X\widetilde{Y}) \cdot a = \left\langle X\widetilde{Y} \right\rangle_1$.

onde X e Y são dois campos multivetoriais.

Ainda, o lado esquerdo da eq.(iv), pode ser escrito trivialmente como o divergente de um campo vetorial

$$\partial_\mu \mathcal{L}(\cdots) = \gamma^\beta \cdot \gamma_\mu \partial_\beta \mathcal{L}(\cdots) = \gamma^\beta \cdot [\partial_\beta \gamma_\mu \mathcal{L}(\cdots)] = \partial \cdot [\gamma_\mu \mathcal{L}(\cdots)]. \tag{v}$$

Finalmente, colocando a eq.(v) na eq.(iv), obtemos a equação diferencial multivetorial

$$\partial \cdot [\left\langle (\gamma_\mu \cdot \partial X) \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X) \right\rangle_1 - \gamma_\mu \mathcal{L}(X, \partial X)] = 0.$$

Desta maneira, provamos que para a Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$ existe um campo extensorial do tipo $(1, 1)$, definido por

$$T^\dagger(n) = \left\langle (n \cdot \partial X) \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X) \right\rangle_1 - n \mathcal{L}(X, \partial X), \tag{4.17}$$

tal que

$$\partial \cdot T^\dagger(\gamma_\mu) = 0. \tag{4.18a}$$

Os quatro campos vetoriais $T^\dagger(\gamma_\mu)$ têm divergentes nulos!

O campo extensorial $T(n)$, associado ao campo multivetorial com Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, é o *extensor canônico de energia-momento*, e os campos vetoriais $T^\dagger(\gamma_\mu)$ serão chamados de *vetores canônicos de energia-momento.* As quatro equações diferenciais (4.18a) expressam as leis de conservação dos vetores de energia-momento.

Ainda, devido à identidade do cálculo multivetorial $[\partial_n \cdot \partial T(n)] \cdot \gamma_\mu = \partial \cdot T^\dagger(\gamma_\mu)$, existe outra forma de expressar o teorema de conservação da energia que envolve o operador diferencial $\partial_n \cdot \partial$ e o extensor de energia-momento, a saber

$$\partial_n \cdot \partial T(n) = o. \tag{4.18b}$$

Assim, uma única equação diferencial expressa a lei de conservação do extensor de energia-momento.

Na mesma linha de raciocínio, podemos obter os vetores e extensores canônicos de energia-momento correspondentes às Lagrangianas $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)$ e $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\wedge X)$; nos passos que nos levam até a análoga da eq.(iv), devemos utilizar as identidades[16] do cálculo multivetorial $\partial \cdot \left\langle \widetilde{\overline{Y}} \lrcorner X \right\rangle_1 = (\partial\lrcorner\, X) \cdot Y + X \cdot (\partial \wedge Y)$ e $\partial \cdot \left\langle \widetilde{\overline{X}} \lrcorner Y \right\rangle_1 = (\partial \wedge X) \cdot Y + X \cdot (\partial\lrcorner\, Y)$, onde X e Y são dois campos multivetoriais.

Para a Lagrangiana do segundo tipo, temos que

$$T^\dagger(n) = \left\langle \widetilde{\overline{\partial}}_{\partial\lrcorner X} \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X) \lrcorner\, (n \cdot \partial X) \right\rangle_1 - n\mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X). \tag{4.19}$$

E o resultado correspondente à Lagrangiana do terceiro tipo é

$$T^\dagger(n) = \left\langle (n \cdot \partial \widetilde{\overline{X}}) \lrcorner\, \partial_{\partial\wedge X} \mathcal{L}(X, \partial \wedge X) \right\rangle_1 - n\mathcal{L}(X, \partial \wedge X). \tag{4.20}$$

Notamos que o teorema de conservação da energia-momento sempre pode ser expresso tanto na forma da eq.(4.18a) (como conservação dos vetores de energia-momento) quanto na forma da eq.(4.18b) (como conservação do extensor de energia-momento).

Obtivemos os três extensores de energia-momento e o teorema de conservação como conseqüência da invariancia translacional de cada uma das Lagrangianas, contudo, é possível conseguir esses resultados de uma maneira mais geral que *não envolve nenhuma condição especial de simetria!*

Para exemplificarmos, indicaremos como obter novamente o extensor canônico de energia-momento correspondente à Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$.

Derivando a Lagrangiana com relação à coordenada de posição x^μ, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{L}(X, \partial X) &= \partial_\mu X \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial X) + \partial_\mu \partial X \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X) \\ &= \partial_\mu X \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial X) + \partial \partial_\mu X \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X), \end{aligned}$$

onde usamos uma das regras de cadeia do cálculo multivetorial com as funções multivetoriais

[16]As identidades $\partial \cdot \left\langle \widetilde{\overline{Y}} \lrcorner X \right\rangle_1 = (\partial\lrcorner\, X) \cdot Y + X \cdot (\partial \wedge Y)$ e $\partial \cdot \left\langle \widetilde{\overline{X}} \lrcorner Y \right\rangle_1 = (\partial \wedge X) \cdot Y + X \cdot (\partial\lrcorner\, Y)$ podem ser obtidas das identidades (4.8b) e (4.8c); só devemos transformar os lados esquerdos destas últimas utilizando as identidades $a\lrcorner\, X = \frac{1}{2}(aX - \overline{X}a)$ e $\frac{1}{2}\left\langle X\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\overline{X} \right\rangle_1 = \left\langle \widetilde{\overline{Y}} \lrcorner X \right\rangle_1$, e as identidades $a \wedge X = \frac{1}{2}(aX + \overline{X}a)$ e $\frac{1}{2}\left\langle X\widetilde{Y} + \widetilde{Y}\overline{X} \right\rangle_1 = \left\langle \widetilde{\overline{X}} \lrcorner Y \right\rangle_1$.

$x^\mu \mapsto X$, $x^\mu \mapsto \partial X$ e a função Lagrangiana $\mathcal{L}$, no último passo utilizamos a comutação de operadores $\partial_\mu \partial = \partial \partial_\mu$.

Agora, utilizando a equação de Euler-Lagrange (4.14) e a identidade do cálculo multivetorial $\partial \cdot \left\langle X\widetilde{Y}\right\rangle_1 = (\partial X) \cdot Y + X \cdot (\partial Y)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \mathcal{L}(\cdots) &= \partial_\mu X \cdot \partial_X \mathcal{L}(\cdots) + \partial \partial_\mu X \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots) \\
&\quad + \partial_\mu X \cdot \partial \partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots) - \partial_\mu X \cdot \partial \partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots) \\
&= \partial_\mu X \cdot [\partial_X \mathcal{L}(\cdots) - \partial \partial_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots)] + \partial \cdot \left\langle \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\cdots)\right\rangle_1, \\
\partial_\mu \mathcal{L}(X, \partial X) &= \partial \cdot \left\langle \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X)\right\rangle_1.
\end{aligned}
$$

Essa equação diferencial multivetorial é precisamente a eq.(iv) na linha de raciocínio que conduz ao extensor canônico de energia-momento (4.17) e ao teorema de conservação da energia-momento (4.18a) e (4.18b).

Encerrando esta seção, apresentamos alguns exemplos de extensores canônicos de energia-momento.

Exemplo 4.3: Extensor canônico de energia-momento do campo de Dirac livre.

Como já vimos no exemplo (4.1), a Lagrangiana para o campo de Dirac livre (i.e., $A = o$) é

$$\mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) = \hbar(\partial\psi i \gamma_3) \cdot \psi - mc\psi \cdot \psi.$$

As derivadas multivetoriais $\partial\psi \mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi)$ e $\partial_{\partial\psi} \mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi)$ são

$$
\begin{aligned}
\partial\psi \mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) &= \hbar(\partial\psi i\gamma_3) - 2mc\psi, \\
\partial_{\partial\psi} \mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) &= -\hbar\psi i\gamma_3.
\end{aligned}
$$

A equação diferencial para o campo de Dirac livre é

$$
\begin{aligned}
\hbar\partial\psi i\gamma_3 - mc\psi &= 0, \\
\hbar\partial\psi i\sigma_3 &= mc\psi\gamma_0.
\end{aligned}
$$

De acordo com a def.(4.17), o adjunto do extensor de energia-momento do campo de Dirac livre será

$$
\begin{aligned}
T_o^{\dagger}(n) &= \left\langle (n \cdot \partial\psi)\widetilde{\partial}_{\partial\psi}\mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) \right\rangle_1 - n\mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) \\
&= \hbar \left\langle (n \cdot \partial\psi) i\gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 ,
\end{aligned}
$$

leve-se em conta que $\mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) = 0$, para toda solução da equação de Dirac livre, veja a observação no final do exemplo (4.1). Este resultado está de acordo com a fórmula do extensor de energia-momento (i.e., o tensor de Tetrode), discutida no Apêndice C.

Exemplo 4.4: Extensor canônico de energia-momento do campo de Maxwell livre.

De acordo com o exemplo (4.2), a Lagrangiana para o campo de Maxwell livre (i.e., $J = o$) é

$$
\mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) = -\frac{1}{2\mu_0}(\partial \wedge A) \cdot (\partial \wedge A).
$$

As derivadas multivetoriais $\partial_A \mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A)$ e $\partial_{\partial \wedge A}\mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A)$ são

$$
\begin{aligned}
\partial_A \mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) &= o, \\
\partial_{\partial \wedge A}\mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) &= -\frac{1}{\mu_0}\partial \wedge A.
\end{aligned}
$$

a equação diferencial multivetorial para o campo de Maxwell livre é

$$
\partial \lrcorner\, F = o \Leftrightarrow \partial F = O,
$$

onde $F = \partial \wedge A$.

O adjunto do extensor canônico de energia-momento do campo de Maxwell livre, utilizando a def.(4.20), será

$$
\begin{aligned}
T_o^{\dagger}(n) &= \left\langle (n \cdot \partial\widetilde{\widetilde{A}}) \lrcorner\, \partial_{\partial \wedge A}\mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) \right\rangle_1 - n\mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) \\
&= \frac{1}{\mu_0}[(n \cdot \partial A) \lrcorner\, F + \frac{1}{2} n F \cdot F].
\end{aligned}
$$

O extensor canônico de energia-momento é

$$
T_o(n) = \partial_b n \cdot T^{\dagger}(b) = \frac{1}{\mu_0}[\partial_b n \cdot (b \cdot \partial A) \lrcorner\, F + \frac{1}{2}\partial_b n \cdot bF \cdot F]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu_0}[-\partial_b(b\cdot\partial A)\cdot(n\lrcorner F)+\frac{1}{2}nF\cdot F]\\
&= \frac{1}{\mu_0}[(n\lrcorner F)\lrcorner F-(n\lrcorner F)\cdot\partial A+\frac{1}{2}nF\cdot F]\\
&= \frac{1}{2\mu_0}Fn\widetilde{F}-\frac{1}{\mu_0}(n\lrcorner F)\cdot\partial A.
\end{aligned}
$$

Onde utilizamos as identidades do cálculo multivetorial $\partial_b(b\cdot\partial)X=\partial X$ e $\partial_b[a(b\cdot\partial)X]=2(a\cdot\partial)X-a\partial X$, e no último passo, a identidade $Fn\widetilde{F}=2(n\lrcorner F)\lrcorner F+nF\cdot F$.

Observamos que o primeiro termo de $T_o(n)$ corresponde ao extensor de energia-momento deduzido no Apêndice B, esse tensor, como já sabemos, é conservado!

Além disso, podemos mostrar que o segundo termo de $T_o(n)$ é também um extensor conservado, isto é

$$
\begin{aligned}
\partial_n\cdot\partial(n\lrcorner F)\cdot\partial A &= \gamma^\mu\cdot\partial_n[(\partial_\mu n\lrcorner F)\cdot\gamma^\beta\partial_\beta A+(n\lrcorner\partial_\mu F)\cdot\gamma^\beta\partial_\beta A+(n\lrcorner F)\cdot\gamma^\beta\partial_\mu\partial_\beta A]\\
&= (\gamma^\mu\lrcorner\partial_\mu F)\cdot\gamma^\beta\partial_\beta A+(\gamma^\mu\lrcorner F)\cdot\gamma^\beta\partial_\mu\partial_\beta A\\
&= (\partial\lrcorner F)\cdot\partial A+(\gamma^\mu\wedge\gamma^\beta)\cdot F\partial_\mu\partial_\beta A=o,
\end{aligned}
$$

o primeiro termo é nulo porque $\partial\lrcorner F=o$ (no campo de Maxwell livre) e o segundo termo é nulo devido á antisimetria de $\gamma^\mu\wedge\gamma^\beta$ e à simetria de $\partial_\mu\partial_\beta$.

3. Extensor Canônico de Momento Angular

Mostraremos que a invariancia rotacional da Lagrangiana implica a existência de um campo extensorial do tipo $(1,2)$ que é conservado. Ele será chamado de extensor canônico de momento angular.

Por uma rotação ativa (i.e., do sistema físico), na bidireção constante $\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu$ e de amplitude θ, o vetor de posição transforma-se por $x\to x'=\exp(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu\theta/2)x\exp(-\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu\theta/2)$; as leis de transformação de um campo rotor X e de um campo spinorial ψ são

$$
\begin{aligned}
X(x) &\to X'(x')=\exp(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu\theta/2)X(x)\exp(-\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu\theta/2),\\
\psi(x) &\to \psi'(x')=\exp(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu\theta/2)\psi(x),
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
X(x) &\rightarrow X'(x) = \exp(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \theta/2) X(x'') \exp(-\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \theta/2), \\
\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \exp(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \theta/2) \psi(x''),
\end{aligned}
$$

onde $x'' = \exp(-\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \theta/2) x \exp(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \theta/2)$.

A invariancia rotacional de uma Lagrangiana $(X, \partial * X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial * X)$, associada ao campo multivetorial X (tanto um rotor quanto um spinor), significa que

$$
\mathcal{L}[X(x), \partial * X(x)] = \mathcal{L}[X'(x'), \partial' * X'(x')],
$$

onde $\partial = \partial_x$ e $\partial' = \partial_{x'}$, ou equivalentemente $\mathcal{L}[X(x''), \partial * X(x'')] = \mathcal{L}[X'(x), \partial * X'(x)]$.

Deduziremos explicitamente o extensor de momento angular correspondente à Lagrangiana de campo rotor $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$ e daremos o resultado para a Lagrangiana do campo spinorial $(\psi, \partial\psi) \mapsto \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$.

Ainda, comentaremos os extensores de momento angular correspondentes às Lagrangianas de campos rotor $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\ X)$ e $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$.

Derivando com relação ao parâmetro real θ a condição de invariancia rotacional da Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_\theta x'' \cdot \partial \mathcal{L}[X(x''), \partial X(x'')] &= \partial_\theta X'(x) \cdot \partial_X \mathcal{L}[X'(x), \partial X'(x)] \\
&\quad + \partial_\theta \partial X'(x) \cdot \partial_{\partial X} \mathcal{L}[X'(x), \partial X'(x)], \qquad (i)
\end{aligned}
$$

no lado esquerdo utilizamos uma das regras de cadeia com a função vetorial $\theta \mapsto x''$ e a função escalar $x'' \mapsto \mathcal{L}[X(x''), \partial X(x'')]$ e no lado direito utilizamos outra regra de cadeia com as funções multivetoriais $\theta \mapsto X'(x), \theta \mapsto \partial X'(x)$ e a função Lagrangiana $\mathcal{L}$; e no último termo tivemos em conta a comutação de operadores $\partial_\theta \partial = \partial \partial_\theta$.

Calculando ambos os lados da eq.(i) em $\theta = 0$, levando em conta os resultados $X(x'')|_{\theta=0} = X(x)$, $\partial X(x'')|_{\theta=0} = \partial X(x)$ e $X'(x)|_{\theta=0} = X(x)$, $\partial X'(x)|_{\theta=0} = \partial X(x)$, temos que

$$
\partial_\theta x''\big|_{\theta=0} \cdot \partial \mathcal{L}(X, \partial X) = \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0} \cdot \partial_X \mathcal{L}(X, \partial X)
$$

$$+\partial\, \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0} \cdot \partial_{\partial X}\mathcal{L}(X,\partial X). \qquad (ii)$$

Todavia, o lado direito da eq.(ii) pode ser escrito como o divergente de um campo vetorial, utilizando-se a equação de Euler-Lagrange (4.14) e a identidade do cálculo multivetorial $\partial \cdot \left\langle X\widetilde{Y}\right\rangle_1 = (\partial X)\cdot Y + X\cdot(\partial Y)$, one X e Y são dois campos multivetoriais.

$$\begin{aligned}
\partial_\theta x''\big|_{\theta=0}\cdot \partial\mathcal{L}(\cdots) &= \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0}\cdot \partial_X\mathcal{L}(\cdots) + \partial\,\partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0}\cdot\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\\
&\quad + \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0}\cdot \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots) - \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0}\cdot\partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\\
&= \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0}\cdot[\partial_X\mathcal{L}(\cdots) - \partial\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)]\\
&\quad +\partial\cdot\left\langle \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0}\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\right\rangle_1,\\
\Rightarrow \partial_\theta x''\big|_{\theta=0}\cdot\partial\mathcal{L}(X,\partial X) &= \partial\cdot\left\langle \partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0}\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X,\partial X)\right\rangle_1. \qquad (iii)
\end{aligned}$$

Calculemos $\partial_\theta x''|_{\theta=0}$, $\partial_\theta X'(x)|_{\theta=0}$.

$$\begin{aligned}
\partial_\theta x''\big|_{\theta=0} &= (-\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu/2)x + x(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu/2) = x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu),\\
\partial_\theta X'(x)\big|_{\theta=0} &= (\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu/2)X + x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\cdot\partial X + X(-\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu/2)\\
&= (\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\times X + x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\cdot\partial X.
\end{aligned}$$

Utilizando-se esses resultados[17] na eq.(iii), obtemos que

$$x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\cdot\partial\mathcal{L}(X,\partial X) = \partial\cdot\left\langle[(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\times X + x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\cdot\partial X]\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X,\partial X)\right\rangle_1. \qquad (iv)$$

Ainda, o lado esquerdo da eq.(iv) pode ser transformado em divergentes de campos vetoriais; isto é,

$$\begin{aligned}
x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\cdot\partial\mathcal{L}(\ldots) &= [x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)]\cdot\gamma^\beta\partial_\beta\mathcal{L}(\ldots)\\
&= \gamma^\beta\cdot\partial_\beta[x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\mathcal{L}(\ldots)] - \gamma^\beta\cdot[\gamma_\beta\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)]\mathcal{L}(\ldots)\\
&= \partial\cdot[x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\mathcal{L}(\ldots)]. \qquad (v)
\end{aligned}$$

[17] O ***produto comutador*** de dois multivetores define-se por $A\times B = \frac{1}{2}(AB - BA)$.

Portanto, introduzindo a eq.(v) na eq.(iv), obtemos finalmente para o campo rotor X que

$$\partial\cdot[x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\mathcal{L}(X,\partial X)-\left\langle[(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\times X+x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\cdot\partial X]\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X,\partial X)\right\rangle_1]=0.$$

Deste modo, demostramos que existe um campo extensorial do tipo $(1,2)$, digamos $J_X(n)$, tal que seu adjunto $J_X^\dagger(B)$, um campo extensorial do tipo $(2,1)$, é definido por

$$J_X^\dagger(B)=x\lrcorner\,B\mathcal{L}(X,\partial X)-\left\langle(B\times X+x\lrcorner\,B\cdot\partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X,\partial X)\right\rangle_1, \tag{4.21}$$

tal que

$$\partial\cdot J_X^\dagger(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)=0. \tag{4.22a}$$

Estas equações diferenciais expressam que os seis campos vetoriais $J_X^\dagger(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)$ estão sendo conservados.

O campo extensorial $J_X(n)$, associado ao campo rotor X (com Lagrangiana $(X,\partial X)\mapsto\mathcal{L}(X,\partial X)$), é o *extensor canônico de momento angular;* os campos vetoriais $J_X^\dagger(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)$ serão chamados de *vetores canônicos de momento angular.*

Contudo, existe outra forma de expressar o teorema de conservação do momento angular que só envolve o operador diferencial $\partial_n\cdot\partial$ e o extensor canônico $J_X(n)$ numa única equação diferencial, a saber

$$\partial_n\cdot\partial J_X(n)=o. \tag{4.22b}$$

Onde usamos a identidade do cálculo multivetorial $[\partial_n\cdot\partial J_X(n)]\cdot(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)=\partial\cdot J_X^\dagger(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)$.

Para um campo spinorial ψ com Lagrangiana do tipo $(\psi,\partial\psi)\mapsto\mathcal{L}(\psi,\partial\psi)$, o extensor canônico de momento angular pode ser obtido seguindo o mesmo raciocínio que levou à def.(4.21); só tenha-se em conta que $\partial_\theta\psi'(x)\big|_{\theta=0}=\frac{1}{2}(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\psi+x\lrcorner\,(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)\cdot\partial\psi$. Assim,

$$J_\psi^\dagger(B)=x\lrcorner\,B\mathcal{L}(\psi,\partial\psi)-\left\langle[\frac{1}{2}B\psi+(x\lrcorner\,B)\cdot\partial\psi]\widetilde{\partial}_{\partial\psi}\mathcal{L}(\psi,\partial\psi)\right\rangle_1. \tag{4.23}$$

Logicamente, no caso do campo spinorial ψ, teremos também o teorema de conservação do momento angular em quaisquer das duas versões, em função dos seis vetores $J_\psi^\dagger(\gamma_\mu\wedge\gamma_\nu)$ ou do extensor canônico $J_\psi(n)$

$$\partial \cdot J_\psi^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = 0, \tag{4.24a}$$

$$\partial_n \cdot \partial J_\psi(n) = o. \tag{4.24b}$$

O extensor de momento angular para um campo rotor X, com Lagrangiana do segundo tipo $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)$, é

$$J^\dagger(B) = x\lrcorner\, B\mathcal{L}(X, \partial\lrcorner X) - \left\langle \widetilde{\overline{\partial}}_{\partial\lrcorner\, X}\mathcal{L}(X, \partial\lrcorner X)\lrcorner\, [B \times X + (x\lrcorner\, B) \cdot \partial X] \right\rangle_1. \tag{4.25}$$

E, para um campo rotor X, com Lagrangiana do terceiro tipo $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$, é

$$J^\dagger(B) = x\lrcorner\, B\mathcal{L}(X, \partial \wedge X) - \left\langle \overline{\widetilde{[B \times X + (x\lrcorner\, B) \cdot \partial X]}}\lrcorner\, \partial_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(X, \partial \wedge X \right\rangle_1. \tag{4.26}$$

Os teoremas de conservação do momento angular seguem tendo as duas formas dadas pelas eqs.(4.22a) e (4.22b).

4. Extensor Canônico de Spin

Desenvolveremos uma linha heurística que nos permitirá discutir o momento angular intrínseco (i.e., o spin) de um campo multivetorial.

Para ilustrar a situação geral, investigaremos o caso do campo rotor X com Lagrangiana do tipo $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$; e logo, comentaremos os resultados correspondentes ao campo spinorial e aos outros dois casos de campos rotor.

Da eq.(4.21), pela fórmula multivetorial $J_X(n) = \partial_B n \cdot J_X^\dagger(B)$, determinamos $J_X(n)$

$$\begin{aligned} J_X(n) &= \partial_B n \cdot (x\lrcorner\, B)\mathcal{L}(X, \partial X) - \partial_B n \cdot \left\langle (B \times X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X, \partial X) \right\rangle_1 \\ &\quad - \partial_B n \cdot \left\langle (x\lrcorner\, B \cdot \partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X, \partial X) \right\rangle_1. \end{aligned}$$

O cálculo dos três termos do lado direito, fornece

$$\partial_B n \cdot (x\lrcorner\, B)\mathcal{L}(\ldots) = \partial_B (x \wedge n) \cdot B\mathcal{L}(\ldots) = x \wedge n\mathcal{L}(\ldots)$$

$$
\begin{aligned}
& = x \wedge [\partial_b n \cdot b\mathcal{L}(\ldots)], \\
\partial_B n \cdot \left\langle (B \times X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)\right\rangle_1 & = \partial_B[n\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)] \cdot (B \times X) = \partial_B[n\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)] \times \widetilde{X} \cdot B \\
& = \left\langle [n\partial_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)] \times \widetilde{X}\right\rangle_2 = -\left\langle X \times [\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)n]\right\rangle_2, \\
\partial_B n \cdot \left\langle (x \lrcorner B \cdot \partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\right\rangle_1 & = \partial_B n \cdot \left\langle B \cdot (x \wedge \partial_b)(b \cdot \partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\right\rangle_1 \\
& = \partial_B B \cdot (x \wedge \partial_b)n \cdot \left\langle (b \cdot \partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\right\rangle_1 \\
& = x \wedge [\partial_b n \cdot \left\langle (b \cdot \partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\right\rangle_1].
\end{aligned}
$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
J_X(n) & = x \wedge [\partial_b n \cdot b\mathcal{L}(\ldots)] + \left\langle X \times [\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)n]\right\rangle_2 - x \wedge [\partial_b n \cdot \left\langle (b \cdot \partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)\right\rangle_1] \\
& = \{\partial_b n \cdot [\left\langle (b \cdot \partial X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\cdots)\right\rangle_1 - b\mathcal{L}(\ldots)]\} \wedge x + \left\langle X \times [\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)n]\right\rangle_2,
\end{aligned}
$$

e todavia, usando a def.(4.17), obtemos finalmente

$$
\begin{aligned}
J_X(n) & = [\partial_b n \cdot T_X^{\dagger}(n)] \wedge x + \left\langle X \times \widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(\ldots)n\right\rangle_2 \\
& = T_X(n) \wedge x + \left\langle X \times \widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X, \partial X)n\right\rangle_2. \qquad (4.27a)
\end{aligned}
$$

Isso mostra que $J_X(n)$ pode ser escrito exatamente como a soma de dois campos extensoriais do tipo $(1,2)$. O termo $T_X(n) \wedge x$ é interpretado rotineiramente como a "parte orbital" do momento angular, já o termo $\left\langle X \times [\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X, \partial X)n]\right\rangle_2$ será identificado com a "parte intrínseca" do momento angular (i.e., o spin do campo rotor X!).

Por outro lado, pela eq.(4.23) e a def.(4.17), obtemos para o campo spinorial ψ que

$$
J_\psi(n) = T_\psi(n) \wedge x + \left\langle \frac{1}{2}\psi\widetilde{\partial}_{\partial\psi}\mathcal{L}(\psi, \partial\psi)n\right\rangle_2. \qquad (4.27b)
$$

Deste modo vemos a plausibilidade de definir, associado ao campo rotor X, o *extensor canônico de spin*, a saber

$$
S_X^{\dagger}(B) = -\left\langle (B \times X)\widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X, \partial X)\right\rangle_1, \qquad (4.28a)
$$

ou equivalentemente

$$S_X(n) = \left\langle X \times \widetilde{\partial}_{\partial X}\mathcal{L}(X, \partial X)n \right\rangle_2. \tag{4.28b}$$

Portanto, podemos também definir, associado ao campo spinorial ψ, o *extensor canônico de spin*

$$S_\psi^\dagger(B) = -\left\langle [\frac{1}{2}B\psi + (x\lrcorner\, B)\cdot\partial\psi]\widetilde{\partial}_{\partial\psi}\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) \right\rangle_1, \tag{4.29a}$$

ou, ainda

$$S_\psi(n) = \frac{1}{2}\left\langle \psi\widetilde{\partial}_{\partial\psi}\mathcal{L}(\psi, \partial\psi)n \right\rangle_2. \tag{4.29b}$$

Para um campo rotor X com Lagrangiana do tipo $(X, \partial\lrcorner\, X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)$, usando a eq.(4.25) e a def.(4.19), temos que

$$S^\dagger(B) = -\left\langle \widetilde{\widetilde{\partial}}_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)\lrcorner\, (B \times X) \right\rangle_1. \tag{4.30a}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
S(n) &= \partial_B n \cdot S^\dagger(B) = -\frac{1}{2}\partial_B n \cdot \left\langle (B \times X)\widetilde{\partial}_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(\cdots) - \widetilde{\partial}_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(\cdots)\overline{(B \times X)} \right\rangle_1 \\
&= -\frac{1}{2}\partial_B[n\partial_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(\cdots) \times \widetilde{X} - \partial_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(\cdots)n \times \widetilde{\overline{X}}] \cdot B, \\
S(n) &= \frac{1}{2}\left\langle X \times \widetilde{\partial}_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X)n - \overline{X} \times n\widetilde{\partial}_{\partial\lrcorner X}\mathcal{L}(X, \partial\lrcorner\, X) \right\rangle_2.
\end{aligned} \tag{4.30b}$$

Onde utilizamos a identidade algébrica $\left\langle \widetilde{\overline{Y}}\lrcorner\, X \right\rangle_1 = \frac{1}{2}\left\langle X\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\overline{X} \right\rangle_1$.

Para um campo rotor X com Lagrangiana do tipo $(X, \partial \wedge X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial \wedge X)$, utilizando a eq.(4.26) e a def.(4.20), temos

$$S^\dagger(B) = -\left\langle (\widetilde{\overline{B \times X}})\lrcorner\, \partial_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(X, \partial \wedge X) \right\rangle_1 \tag{4.31a}$$

e, então

$$\begin{aligned}
S(n) &= \partial_B n \cdot S^\dagger(B) = -\frac{1}{2}\partial_B n \cdot \left\langle (B \times X)\widetilde{\partial}_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(\cdots) + \widetilde{\partial}_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(\cdots)\overline{(B \times X)} \right\rangle_1 \\
&= -\frac{1}{2}\partial_B[n\partial_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(\cdots) \times \widetilde{X} + \partial_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(\cdots)n \times \widetilde{\overline{X}}] \cdot B, \\
S(n) &= \frac{1}{2}\left\langle X \times \widetilde{\partial}_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(X, \partial \wedge X)n + \overline{X} \times n\widetilde{\partial}_{\partial\wedge X}\mathcal{L}(X, \partial \wedge X) \right\rangle_2.
\end{aligned} \tag{4.31b}$$

onde utilizamos a identidade $\left\langle \widetilde{\overline{X}} \lrcorner Y \right\rangle_1 = \frac{1}{2} \left\langle X\widetilde{Y} + \widetilde{Y}\overline{X} \right\rangle_1$.

Logicamente, tanto para os rotores quanto para o spinor teremos seis *vetores canônicos de spin* $S^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu)$, associados a cada um dos campos X e ψ.

Mostramos agora que o spin de um campo multivetorial não é conservado, isto é, $\partial \cdot S^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) \neq 0$, ou $\partial \cdot \partial_n S(n) \neq O$).

De fato, aplicando o operador diferencial $\partial_n \cdot \partial$ à equação extensorial $J(n) = T(n) \wedge x + S(n)$, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_n \cdot \partial J(n) &= \partial_n \cdot \partial[T(n) \wedge x] + \partial_n \cdot \partial S(n) \\
&= \gamma^\mu \cdot \partial_n[\partial_\mu T(n) \wedge x + T(n) \wedge \partial_\mu x] + \partial_n \cdot \partial S(n) \\
&= [\partial_n \cdot \partial T(n)] \wedge x + biv(T) + \partial_n \cdot \partial S(n),
\end{aligned}$$

e, pelos teoremas de conservação da energia-momento e do momento angular, obtemos seguinte resultado fundamental

$$\partial_n \cdot \partial S(n) = -biv(T). \tag{4.32}$$

A equação diferencial multivetorial (4.23) tem como interpretação física que *a fonte do extensor de spin é o bivetor do extensor de energia-momento.*

Do ponto de vista matemático, a eq.(4.32) tem um significado muito interessante, trata-se de uma generalização da "condição de homogeneidade" de Euler.

Por exemplo, no caso do rotor X com Lagrangiana $(X, \partial X) \mapsto \mathcal{L}(X, \partial X)$, da def.(4.28b), temos

$$\begin{aligned}
\partial_n \cdot \partial S(n) &= \gamma^\mu \cdot \partial_n \partial_\mu \left\langle X \times \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X) n \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \partial_\mu X \times \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots)\gamma^\mu + X \times \partial_\mu \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots)\gamma^\mu \right\rangle_2 \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots)\gamma^\mu \right\rangle_2 - \frac{1}{2} \left\langle \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots)\partial X \right\rangle_2 + \left\langle X \times \widetilde{\partial}_X \mathcal{L}(\ldots) \right\rangle_2,
\end{aligned}$$

onde no último termo utilizamos a equação de Euler-Lagrange (4.14).

Por outro lado, pela def.(4.17), o bivetor do extensor canônico de energia-momento é

$$biv(T) = -biv(T^\dagger) = -T^\dagger(\gamma_\mu) \wedge \gamma^\mu = \gamma^\mu \wedge T^\dagger(\gamma_\mu)$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma^\mu \wedge \left\langle \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots) \right\rangle_1 = \left\langle \gamma^\mu \times \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots) \right\rangle_2 \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \partial X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots) \right\rangle_2 - \frac{1}{2} \left\langle \partial_\mu X \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(\ldots) \gamma^\mu \right\rangle_2,
\end{aligned}
$$

onde usamos a identidade $\langle a \times Z \rangle_2 = a \wedge \langle Z \rangle_1$.

Agora, somando ambas equações diferenciais e utilizando a eq.(4.32), obtemos finalmente que

$$
\left\langle X \times \widetilde{\partial}_X \mathcal{L}(X, \partial X) + \partial X \times \widetilde{\partial}_{\partial X} \mathcal{L}(X, \partial X) \right\rangle_2 = O. \tag{4.33a}
$$

Para o campo spinorial ψ com Lagrangiana $(\psi, \partial\psi) \mapsto \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$, a correspondente equação diferencial é

$$
\left\langle \psi \widetilde{\partial} \psi \mathcal{L}(\psi, \partial\psi) + \partial\psi \widetilde{\partial}_{\partial\psi} \mathcal{L}(\psi, \partial\psi) \right\rangle_2 = O. \tag{4.33b}
$$

Encerrando esta seção, apresentaremos alguns exemplos importantes.

Exemplo 4.5: Extensor canônico de spin do campo de Dirac Livre.

Pela def.(4.29b), o extensor canônico de spin do campo de Dirac livre, será

$$
S(n) = \frac{1}{2} \left\langle \psi \widetilde{\partial}_{\partial\psi} \mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) n \right\rangle_2,
$$

porém, do exemplo (4.3) obtemos que $\widetilde{\partial}_{\partial\psi} \mathcal{L}_o(\psi, \partial\psi) = -\hbar\psi i \gamma_3$, e então

$$
\begin{aligned}
S(n) &= \frac{1}{2} \left\langle \hbar\psi i \gamma_3 \widetilde{\psi} n \right\rangle_2 \\
&= \frac{\hbar}{2} i \left\langle \psi \gamma_3 \widetilde{\psi} n \right\rangle_2 = \frac{\hbar}{2} i (s \wedge n),
\end{aligned}
$$

onde $s = \psi \gamma_3 \widetilde{\psi}$ é o vetor de spin do campo de Dirac.

Este resultado está de acordo com o que obtivemos no Apêndice C.

Exemplo 4.6: Extensor canônico de spin do campo de Maxwell livre.

De acordo com a def.(4.31b), o extensor canônico de spin do campo de Maxwell livre, será

$$
S(n) = \frac{1}{2} \left\langle A \times \widetilde{\partial}_{\partial \wedge A} \mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) n + \overline{A} \times n \widetilde{\partial}_{\partial \wedge A} \mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) \right\rangle_2,
$$

pelo exemplo (4.4), ê $\widetilde{\partial}_{\partial\wedge A}\mathcal{L}_o(A, \partial \wedge A) = -\frac{1}{\mu_0}\partial \wedge A = -\frac{1}{\mu_0}F$, é

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{-1}{2\mu_0}\left\langle A \times \widetilde{F}n + \overline{A} \times n\widetilde{F}\right\rangle_2 = \frac{1}{2\mu_0}\langle A \times (Fn - nF)\rangle_2 \\ &= \frac{1}{\mu_0}A \wedge (F \llcorner n) = \frac{1}{\mu_0}(n \lrcorner F) \wedge A. \end{aligned}$$

Observe que $S(n)$ não é invariante de calibre! O potencial eletromagnético A possui uma *realidade insuspeitável* que não pode ser vista pelo formalismo usual.

Finalizando este capítulo, estudaremos um exemplo muito interessante que diz respeito do acoplamento entre o campo de Dirac e o campo de Maxwell.

Exemplo 4.7: Teoria Maxwell-Dirac.

Para um acoplamento entre o campo de Dirac e o campo de Maxwell, postulamos a Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\psi, \partial\psi, A, \partial \wedge A) = \hbar(\partial\psi i\gamma_3) \cdot \psi - A \cdot (e\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) - mc\psi \cdot \psi - \frac{1}{2\mu_0}(\partial \wedge A) \cdot (\partial \wedge A).$$

O segundo termo corresponde a um "acoplamento mínimo" entre o *campo de Maxwell* A e a *densidade de corrente elétricamente carregada* $e\psi\gamma_0\widetilde{\psi}$. Trata-se de uma Lagrangiana com duas variáveis dinâmicas ψ e A, uma combinação de Lagrangianas dos tipos primeiro e terceiro.

As derivadas multivetoriais $\partial_\psi\mathcal{L}(\cdots)$, $\partial_{\partial\psi}\mathcal{L}(\cdots)$ e $\partial_A\mathcal{L}(\cdots)$, $\partial_{\partial\wedge A}\mathcal{L}(\cdots)$ fornecem,

$$\begin{aligned} \partial_\psi\mathcal{L}(\cdots) &= \hbar\partial\psi i\gamma_3 - 2eA\psi\gamma_0 - 2mc\psi, \\ \partial_{\partial\psi}\mathcal{L}(\cdots) &= -\psi i\gamma_3, \\ \partial_A\mathcal{L}(\cdots) &= -e\psi\gamma_0\widetilde{\psi} = -eJ, \\ \partial_{\partial\wedge A}\mathcal{L}(\cdots) &= -\frac{1}{\mu_0}\partial \wedge A = -\frac{1}{\mu_0}F, \end{aligned}$$

onde $J = \psi\gamma_0\widetilde{\psi}$ é a densidade de corrente de probabilidade e $F = \partial \wedge A$ é o campo de Faraday.

Temos duas equações de Euler-Lagrange, uma para a variável dinâmica ψ

$$\begin{aligned} \partial_\psi\mathcal{L}(\cdots) - \partial\partial_{\partial\psi}\mathcal{L}(\cdots) &= O, \\ &\Rightarrow \hbar\partial\psi i\sigma_3 - eA\psi\gamma_0 = mc\psi\gamma_0, \end{aligned}$$

e outra para variável dinâmica A

$$\begin{aligned}\partial_A \mathcal{L}(\cdots) - \partial \lrcorner\, \partial_{\partial \wedge A} \mathcal{L}(\cdots) &= O, \\ &\Rightarrow \partial \lrcorner\, F = \mu_0 e J \Leftrightarrow \partial F = \mu_0 e J.\end{aligned}$$

A primeira é a equação de Dirac e a segunda é a equação de Maxwell (com densidade de corrente elétrica eJ).

O extensor canônico de energia-momento, generalizando os raciocínios que nos levaram até as fórmulas (4.17) e (4.20), será dado por

$$T^{\dagger}(n) = \left\langle (n \cdot \partial \psi) \widetilde{\partial}_{\partial \psi} \mathcal{L}(\cdots) \right\rangle_1 + \left\langle (n \cdot \partial \widetilde{\widetilde{A}}) \lrcorner\, \partial_{\partial \wedge A} \mathcal{L}(\cdots) \right\rangle_1 - n \mathcal{L}(\cdots),$$

isto é,

$$\begin{aligned}T^{\dagger}(n) &= \hbar \left\langle (n \cdot \partial \psi) i \gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 + \frac{1}{\mu_0} (n \cdot \partial A) \lrcorner\, F - n[(\hbar \partial \psi i \gamma_3 - eA\psi\gamma_0 - mc\psi) \cdot \psi - \frac{1}{2\mu_0} F \cdot F] \\ &= \hbar \left\langle (n \cdot \partial \psi) i \gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 + \frac{1}{\mu_0} [(n \cdot \partial A) \lrcorner\, F + \frac{1}{2} n F \cdot F].\end{aligned}$$

O primeiro termo é o extensor de energia-momento associado ao campo de Dirac livre (i.e., $A = o$), foi achado no exemplo (4.3); já o segundo termo corresponde ao extensor de energia-momento para o campo de Maxwell livre (i.e., $\psi = O$), encontrado no exemplo (4.4). Podemos escrever,

$$T^{\dagger}(n) = T^{\dagger}_{\psi}(n) + T^{\dagger}_{A}(n),$$

onde $T^{\dagger}_{\psi}(n) = \hbar \left\langle (n \cdot \partial \psi) i \gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1$ e $T^{\dagger}_{A}(n) = \dfrac{1}{\mu_0}[(n \cdot \partial A) \lrcorner\, F + \frac{1}{2} n F \cdot F]$.

Mostraremos que a partir do teorema de conservação da energia-momento $\partial_n \cdot \partial T(n) = o$ podemos obter novamente o teorema da energia-momento (C.4) discutido no Apêndice C.

Pelo teorema de conservação da energia-momento,temos

$$\partial_n \cdot \partial T_{\psi}(n) + \partial_n \cdot \partial T_A(n) = o, \tag{a}$$

porém, de acordo com o exemplo (4.4), $T_A(n) = \frac{1}{2\mu_0} F n \widetilde{F} - \frac{1}{\mu_0}(n \lrcorner F) \cdot \partial A$, e assim

$$\partial_n \cdot \partial T_A(n) = \partial_n \cdot \partial \frac{1}{2\mu_0} F n \widetilde{F} - \partial_n \cdot \partial \frac{1}{\mu_0}(n \lrcorner F) \cdot \partial A.$$

O primeiro termo fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_0} \partial_n \cdot \partial F n \widetilde{F} &= \frac{1}{2\mu_0} \gamma^\mu \cdot \partial_n [(\partial_\mu \widetilde{F}) n F + \widetilde{F}(\partial_\mu n) F + \widetilde{F} n (\partial_\mu F)] \\ &= \frac{1}{2\mu_0}(\widetilde{\partial F} F + \widetilde{F} \partial F) = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 e J F - F \mu_0 e J) = eJ \lrcorner F, \end{aligned} \tag{b}$$

e o segundo termo fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \partial_n \cdot \partial (n \lrcorner F) \cdot \partial A &= \frac{1}{\mu_0} \gamma^\mu \cdot \partial_n [(\partial_\mu n \lrcorner F) \cdot \partial A + (n \lrcorner \partial_\mu F) \cdot \partial A + (n \lrcorner F) \cdot \partial_\mu \partial A] \\ &= \frac{1}{\mu_0} [(\gamma^\mu \lrcorner \partial_\mu F) \cdot \partial A + (\gamma^\mu \lrcorner F) \cdot \partial_\mu \partial A] = eJ \cdot \partial A, \end{aligned}$$

e também, levando em conta a conservação da densidade de corrente $\partial \cdot J = 0$,

$$\begin{aligned} eJ \cdot \partial A &= e(\partial \cdot J A + J \cdot \partial A) = e[\gamma^\mu \cdot (\partial_\mu J) A + \gamma^\mu \cdot J (\partial_\mu A)] \\ &= e\gamma^\mu \cdot \partial_n [(\partial_\mu n) \cdot J A + n \cdot (\partial_\mu J) A + n \cdot J (\partial_\mu A)] = \partial_n \cdot \partial e (n \cdot J) A. \end{aligned} \tag{c}$$

Agora, introduzindo os resultados (b) e (c) na eq.(a), obtemos

$$\partial_n \cdot \partial [T_\psi(n) - e(n \cdot J) A] = eF \llcorner J,$$

isto é, existe um campo extensorial do tipo $(1,1)$, definido por $T_{Tetr}(n) = T_\psi(n) - e(n \cdot J)A$, tal que

$$\partial_n \cdot \partial T_{Tetr}(n) = eF \llcorner J, \tag{d}$$

$T_{Tetr}(n)$ é certamente o "tensor de Tetrode", pois o adjunto deste campo extensorial, $T^\dagger_{Tetr}(n) = T^\dagger_\psi(n) - \partial_b n \cdot e(b \cdot J) A = \hbar \left\langle (n \cdot \partial \psi) i \gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 - e(n \cdot A) J$ confere com o resultado obtido na seção C.2 do Apêndice C. Ainda, a eq.(d) é também consistente com a eq.(C.4), pois a terceira propriedade do "tensor de Tetrode", demonstrada no Apêndice C, diz que $\partial_n \cdot \partial T^\dagger_{Tetr}(n) = \partial_n \cdot \partial T_{Tetr}(n)$.

Observações Finais

Neste trabalho mostramos como o cálculo geométrico, i.e., o *cálculo multivetorial do espaço-tempo*, revela-se como uma linguagem natural na formulação de teorias Lagrangianas de campos físicos.

Vimos também que a *equação de campo* (i.e., a equação de Euler-Lagrange, uma única equação diferencial multivetorial), associada à Lagrangiana de um campo multivetorial (*rotor ou spinor*), pode ser obtida a partir do princípio de ação estacionária. Só obtivemos as equações de campo associadas a três tipos de Lagrangianas, eqs.(4.14),(4.15) e (4.16); porém os métodos aí empregados são generalizáveis a outros tipos de Lagrangianas de campo multivetorial.

Desenvolvimos uma linha heurística que nos permitiu obter as fórmulas gerais para os *extensores canônicos* de energia-momento e de momento angular, e os seus correspondentes *teoremas de conservação.*

Mostramos explicitamente que os teoremas de conservação da energia-momento e do momento angular podem ser expressos em duas formas equivalentes, como a *conservação de cada um* dos vetores canônicos, eqs.(4.18a), (4.22a) e (4.24a), ou como uma *única conservação* desses mesmos extensores, eqs.(4.18b), (4.22b) e (4.24b).

Vimos também que o extensor canônico de momento angular pode ser decomposto em exatamente dois termos extensoriais, um é interpretado como a *parte orbital* do momento angular e outro é identificado com a *parte intrínseca* do momento angular (i.e., o spin do campo rotor ou spinorial). Veja por exemplo, as eqs.(4.27a) e (4.27b).

Neste ponto, obtivemos um resultado fundamental sobre a implicação física de um extensor de energia-momento não necessáriamente simétrico. De acordo com a eq.(4.32), e já que só a parte antisimétrica de um extensor contribui ao seu próprio bivetor, a *parte antisimétrica* do extensor de energia-momento contribui à *fonte do spin.*

Finalmente, observamos que este trabalho fornece os fundamentos matemáticos para estendermos ainda o formalismo Lagrangiano a campos extensoriais; tornando possível obter as equações de campo associadas a Lagrangianas de campo extensorial, e desenvolver também os seus correspondentes teoremas de conservação da energia-momento e do momento angular.

Estas idéias chaves do formalismo Lagrangiano são aquelas naturais para a formulação da teoria de gravitação de Einstein no espaço-tempo de Minkowski, de acôrdo com as idéias embrionárias apresentadas por Rodrigues Jr. et al. em [19] e Lasenby et al. em [15] e [16].

Uma formulação rigorosa de uma tal teoria de calibre é apresentada na Tese de Doutorado de V. V. Fernández[20].

APÊNDICE A

Campos Multitensoriais sobre uma Variedade Suave

Primeiramente, apresentaremos resumidamente as estruturas algébricas fundamentais sobre as quais baseiam-se as noções de campos k-tensoriais e multitensoriais[1],[2],[3]. Logo depois, desenvolveremos a estrutura de diferenciabilidade desses campos fundamentais e definiremos a derivação covariante induzida por um campo tensorial métrico[1] (i.e., a derivada covariante de Levi-Civita).

A.1 Campos Vetoriais Tangentes

Seja M uma variedade suave de dimensão finita, uma função $f : M \to R$ é chamada de *campo escalar (ou função escalar de ponto) sobre* M.

O conjunto de campos escalares sobre M do tipo diferenciáveis[18], denotado por $\mathcal{F}(M)$, com a soma e o produto definidos naturalmente, é um *anel*.

Consideremos o *fibrado tangente sobre* M, $TM = \bigcup\limits_{x \in M} T_xM$, (i.e uma variedade suave de dimensão finita formada pelos pontos $x \in M$ e os vetores tangentes[19] de T_xM); um *campo vetorial tangente sobre* M é simplesmente uma função $\mathbf{v} : M \to TM$, tal que para cada $x \in M$: $\mathbf{v}_{(x)} \in T_xM$, isto é, a cada ponto $x \in M$ corresponde um vetor tangente de T_xM.

O campo vetorial $\mathbf{v}$ é dito *diferenciável* se e somente se para todo $f \in \mathcal{F}(M)$ o campo escalar $M \ni x \mapsto \mathbf{v}_{(x)}f \in R$ (i.e. uma função escalar de ponto, resultado da ação do vetor tangente $\mathbf{v}_{(x)}$ sobre o campo diferenciável f) é diferenciável.

O conjunto dos campos vetoriais tangentes sobre M do tipo diferenciáveis, denotado por $\mathcal{V}(M)$, tem uma estrutura natural de *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$.

---

[18] Seja $x \in M$ um ponto da variedade suave com n-upla coordenada $(x^1, \ldots, x^n) \in R^n$, em alguma carta local. O campo escalar $f(x)$ é dito diferenciável[1] em x se e somente se a sua expressão coordenada $f(x^1, \ldots, x^n)$ (i.e., um campo escalar ordinário) é diferenciável, no sentido da diferenciabilidade ordinária, em alguma vizinhança do $(x^1, \ldots, x^n)$.

[19] Um vetor tangente[1] ao ponto $x \in M$ é uma aplicação $\mathbf{v}_x : \mathcal{F}(M) \to R$, tal que (*i*) $\mathbf{v}_x(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{v}_x f + \beta \mathbf{v}_x g$, com $\alpha, \beta \in R$ (linearidade) (*ii*) $\mathbf{v}_x(fg) = (\mathbf{v}_x f)g(x) + f(x)(\mathbf{v}_x g)$ (regra de Leibnitz).

T_xM, o conjunto dos vetores tangentes ao ponto $x \in M$, é naturalmente um espaço linear sobre R; a dimensão de T_xM define a dimensão de M.

Lema 1: Todo campo vetorial tangente diferenciável induz um operador de derivação no anel de campos escalares diferenciáveis.

Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(M)$, então podemos definir um operador linear $\widehat{\mathbf{v}}$ no anel de campos escalares diferenciáveis $\mathcal{F}(M)$ por $\widehat{\mathbf{v}}: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ tal que para todo $x \in M : (\widehat{\mathbf{v}}\ f)(x) = \mathbf{v}_{(x)}\ f$.

Por ser $\mathbf{v}$ um campo vetorial diferenciável, o campo escalar $\widehat{\mathbf{v}}\ f$ deve ser também diferenciável; e portanto, o operador linear $\widehat{\mathbf{v}}$ correspondente a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(M)$ está bem definido.

$\widehat{\mathbf{v}}$ é um operador de derivação em $\mathcal{F}(M)$, isto é, para todos $\alpha, \beta \in R$ e $f, h \in \mathcal{F}(M)$: $\widehat{\mathbf{v}}\ (\alpha f + \beta h) = \alpha\ \widehat{\mathbf{v}}\ f + \beta\ \widehat{\mathbf{v}}\ h$ (linearidade) e $\widehat{\mathbf{v}}\ (fh) = (\widehat{\mathbf{v}}\ f)h + f(\widehat{\mathbf{v}}\ h)$ (regra de Leibnitz) $\mathcal{D}(M)$ denotará o conjunto dos operadores de derivação (ou, simplesmente, *derivadores*) sobre o anel dos campos escalares diferenciáveis. Se definirmos: $(\widehat{\mathbf{v}} + \widehat{\mathbf{w}})f = \widehat{\mathbf{v}}\ f + \widehat{\mathbf{w}}\ f$ (soma de derivadores) e $(h\ \widehat{\mathbf{v}})f = h(\widehat{\mathbf{v}}\ f)$ (produto de campo escalar por derivador), para todos $f, h \in \mathcal{F}(M)$, então $\mathcal{D}(M)$ será um *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$. Ainda, se dotarmos a $\mathcal{D}(M)$ de um produto de derivadores (o produto de Lie), $\mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(M) \ni (\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}}) \mapsto \left[\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}}\right] \in \mathcal{D}(M)$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}(M)$: $\left[\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}}\right] f = \widehat{\mathbf{v}}\ (\widehat{\mathbf{w}}\ f) - \widehat{\mathbf{w}}\ (\widehat{\mathbf{v}}\ f)$, então ele adquirirá uma estrutura natural de álgebra não associativa sobre $\mathcal{F}(M)$ (i.e. a ***álgebra de Lie dos derivadores*** associados aos campos vetoriais tangentes diferenciáveis).

Cuidado!, na prática, não se faz nenhuma distinção notacional entre $\mathbf{v}$ e $\widehat{\mathbf{v}}$.

A.2 Campos k-Tensoriais

Consideremos o fibrado de k-tensores sobre M (com $k \geq 1$), $T^k(TM) = \bigcup_{x \in M} T^k(T_xM)$; um *campo k-tensorial sobre M* é uma função

$$\tau : M \to T^k(TM), \tag{A.1}$$

tal que para cada $x \in M : \tau_{(x)} \in T^k(T_xM)$, isto é, a cada ponto $x \in M$ corresponde um k-tensor pertencente a $T^k(T_xM)$ (o espaço de k-tensores de T_xM).

Por conveniência, um campo escalar considera-se um campo 0-tensorial.

O campo k-tensorial τ é dito *diferenciável* se e somente se para todos $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{V}(M)$: o campo escalar $M \ni x \mapsto \tau_{(x)}(\mathbf{v}^1_{(x)}, \ldots, \mathbf{v}^k_{(x)}) \in R$ (i.e. a função escalar de ponto resultado da ação do k-tensor $\tau_{(x)}$ sobre os vetores tangentes $\mathbf{v}^1_{(x)}, \ldots, \mathbf{v}^k_{(x)}$), é diferenciável.

O conjunto dos campos k-tensoriais sobre M do tipo diferenciáveis, denotado por $\mathcal{T}^k(M)$, tem uma estrutura natural de *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$.

Lema 2: Todo campo k-tensorial diferenciável induz um k-tensor do módulo de campos vetoriais tangentes diferenciáveis.

Seja $\tau \in \mathcal{T}^k(M)$, então é possível definirmos um k-tensor de $\mathcal{D}(M)$, por

$$\widehat{\tau} : \underbrace{\mathcal{D}(M) \times \cdots \times \mathcal{D}(M)}_{k \text{ cópias}} \to \mathcal{F}(M),$$

tal que para cada $x \in M : \widehat{\tau}\ (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k)(x) = \tau_{(x)}(\mathbf{v}^1_{(x)}, \ldots, \mathbf{v}^k_{(x)})$, para todos $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{V}(M)$.

Dado que τ é um campo k-tensorial diferenciável, o campo escalar $\widehat{\tau}\ (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k)$ será também diferenciável, e assim, $\widehat{\tau}$ é uma aplicação do produto cartesiano de k cópias de $\mathcal{D}(M)$ a $\mathcal{F}(M)$ bem definida; por outro lado $\widehat{\tau}$ é certamente um k-tensor de $\mathcal{D}(M)$, pois $\widehat{\tau}$ é uma aplicação multilinear de k-cópias de $\mathcal{D}(M)$ a $\mathcal{F}(M)$.

O conjunto de k-tensores de $\mathcal{D}(M)$, denotado por $T^k[\mathcal{D}(M)]$, é lógicamente um *módulo sobre* $\mathcal{F}(M)$.

Na prática, não se faz nenhuma distinção notacional entre τ e $\widehat{\tau}$.

A.3 Campos Multitensoriais

Seja $T(TM) = \bigcup_{x \in M} T(T_xM)$ o fibrado de multitensores sobre M; um *campo multitensorial sobre* M é uma função

$$\tau : M \to T(TM), \tag{A.2}$$

tal que para cada $x \in M : \tau_{(x)} \in T(T_xM)$, ou seja, a cada ponto $x \in M$ corresponde um multitensor pertencente a $T(T_xM)$ (o espaço de multitensores de T_xM).

Note-se que a existência de um campo multitensorial τ implica a existência de no máximo M_τ campos k-tensoriais não nulos $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots \tau_{M_\tau}$ (M_τ é o grau de τ), tais que para cada $x \in M : \tau_{(x)} = \tau_{0(x)} + \tau_{1(x)} + \ldots + \tau_{k(x)} + \ldots + \tau_{M_\tau(x)}$.

O campo multitensorial τ é dito diferenciável se e somente se cada um dos M_τ campos k-tensoriais $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots \tau_{M_\tau}$ é diferenciável, no sentido da definição de diferenciabilidade dada na seção (A.3).

O conjunto dos campos multitensoriais sobre M do tipo diferenciáveis, denotado por $\mathcal{T}(M)$, tem uma estrutura mínima de módulo sobre $\mathcal{F}(M)$.

Se definirmos o produto tensorial de campos multitensoriais por: $(\tau \otimes v)_{(x)} = \tau_{(x)} \otimes v_{(x)}$, para todo $x \in M$, então $\mathcal{T}(M)$ ganhará uma estrutura de álgebra associativa sobre $\mathcal{F}(M)$ (i.e., a *álgebra tensorial dos campos multitensoriais diferenciáveis*).

Todavia, se dotarmos a variedade suave M de um campo tensorial métrico[20] g, poderemos definir o produto escalar e, portanto, os produtos contraídos de campos multitensoriais.

$\mathcal{T}(M)$, com os produtos contraidos de campos multitensoriais, $(\tau \lrcorner\, v)_{(x)} = \tau_{(x)} \lrcorner\, v_{(x)}$ e $(\tau \llcorner v)_{(x)} = \tau_{(x)} \llcorner v_{(x)}$ para todo $x \in M$, é uma dupla álgebra não associativa sobre $\mathcal{F}(M)$ (i.e., a *álgebra interior dos campos multitensoriais diferenciáveis*).

A.4 Derivação Covariante

Se dotamos a variedade suave M de um campo tensorial métrico g, poderemos construir naturalmente uma conexão linear[21] sobre M (i.e., a conexão linear de Levi-Civita), a saber

$$\Gamma : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M), (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \tag{A.3}$$

tal que para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}(M) : g(\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{v}g(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \mathbf{w}g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) + g(\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]) - g(\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]))$.

Agora, é possível definir uma derivação covariante de campos multitensoriais, associada à conexão linear de Levi-Civita (i.e., a derivada covariante de Levi-Civita), mediante um esquema axiomático.

Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(M)$, definimos o operador de derivada covariante $\nabla_{\mathbf{u}}$ agindo sobre os campos escalares, os campos k-tensoriais (com $k \geq 1$) e os campos multitensoriais, por

$$\mathcal{T}(M) \ni \tau \mapsto \nabla_{\mathbf{u}} \tau \in \mathcal{T}(M), \tag{A.4}$$

[20] Um campo tensorial métrico sobre M é um campo 2-tensorial diferenciável, simétrico e não-degenerado, isto é: $g \in \mathcal{T}^2(M)$ tal que (i) para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}(M) : g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (ii) se para algum $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(M)$ e para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}(M) : g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, então $\mathbf{v} = 0$.

[21] Uma conexão linear sobre M é uma aplicação $\Gamma : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M)$ tal que para todos $f, h \in \mathcal{F}(M)$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}(M) : \Gamma(f\mathbf{u} + h\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + h\Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $\Gamma(\mathbf{u}, f\mathbf{v} + h\mathbf{w}) = (\mathbf{u}f)\mathbf{v} + (\mathbf{u}h)\mathbf{w} + f\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + h\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

tal que

i. $f \in \mathcal{F}(M) : \nabla_{\mathbf{u}} f = \mathbf{u}f$, (derivador $\mathbf{u}$ agindo sobre f),

ii. $\tau \in \mathcal{T}^k(M), (k \geq 1) : \nabla_{\mathbf{u}}\tau(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k) = \mathbf{u}\tau(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k) - \sum_{j=1}^{k} \tau(\mathbf{v}^1, \ldots, \Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}^j), \ldots, \mathbf{v}^k)$,

iii. $\tau \in \mathcal{T}(M)$: se $\tau = \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_k + \cdots + \tau_{M_\tau}$, então $\nabla_{\mathbf{u}}\tau = \nabla_{\mathbf{u}}\tau_0 + \nabla_{\mathbf{u}}\tau_1 + \cdots + \nabla_{\mathbf{u}}\tau_k + \cdots + \nabla_{\mathbf{u}}\tau_{M_\tau}$.

Note-se, no axioma (*ii.*) as presenças do derivador $\mathbf{u}$ e da conexão linear $\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}^j)$; e no axioma (*iii.*) faz-se uma derivação covariante "componente a componente" do tipo do axioma (*ii*). A conexão linear de Levi-Civita conjuntamente com a sua derivada covariante associada têm duas propriedades muito importantes: (*i*) para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}(M) : \Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, (às vezes, chamada de simetria) (*ii*) $\nabla_{\mathbf{u}} g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ (teorema de Ricci).

A derivada covariante de Levi-Civita, como qualquer outra derivada covariante associada a uma conexão linear, tem as seguintes propriedades fundamentais:

i. $\forall f, h \in \mathcal{F}(M)$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}(M) : \nabla_{f\mathbf{u}+h\mathbf{v}}\tau = f\nabla_{\mathbf{u}}\tau + h\nabla_{\mathbf{v}}\tau$, $\forall \tau \in \mathcal{T}(M)$,

ii. $\forall \tau, \upsilon \in \mathcal{T}(M) : \nabla_{\mathbf{u}}(\tau + \upsilon) = \nabla_{\mathbf{u}}\tau + \nabla_{\mathbf{u}}\upsilon$,

iii. $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ e $\tau, \upsilon \in \mathcal{T}(M) : \nabla_{\mathbf{u}}(f\tau) = (\mathbf{u}f)\tau + f(\nabla_{\mathbf{u}}\tau)$ e $\nabla_{\mathbf{u}}(\tau \otimes \upsilon) = (\nabla_{\mathbf{u}}\tau) \otimes \upsilon + \tau \otimes (\nabla_{\mathbf{u}}\upsilon)$ (regras de Leibnitz).

Assim, as derivadas covariantes de um produto escalar e dos produtos contraídos de campos multitensoriais seguem as regras de Leibnitz.

APÊNDICE B

Eletrodinâmica Clássica

B.1 Equação de Maxwell

O campo eletromagnético (i.e., o *campo de Faraday* F, um campo bivetorial no espaço-tempo de Minkowski) gerado por uma fonte de cargas e correntes elétricas (i.e., a *densidade de corrente* J, um campo vetorial definido também sobre o espaço-tempo) satisfaz, no formalismo da álgebra do espaço-tempo, a equação diferencial

$$\partial F = \mu_0 J, \tag{B.1}$$

chamada de *equação de Maxwell*[4],[11].

Porém, devido a que $\partial F = \partial \lrcorner\, F + \partial \wedge F$, essa equação diferencial equivale a duas equações diferenciáis

$$\begin{aligned} \partial \lrcorner\, F &= \mu_0 J, & \text{(B.2a)} \\ \partial \wedge F &= O. & \text{(B.2b)} \end{aligned}$$

Além disso, postulamos que tanto o campo de Faraday quanto a densidade de corrente são *campos rotor*[22].

A covariancia de Poincaré da equação de Maxwell pode ser provada fácilmente.

Sob uma transformação ativa de Poincaré (i.e., do sistema físico), se o vetor de posição se transforma $x \to x' = Rx\widetilde{R} + a$, então as leis de transformação do campo de Faraday e da densidade de corrente serão $F(x) \to F'(x') = RF(x)\widetilde{R}$ e $J(x) \to J'(x') = RJ(x)\widetilde{R}$ (por ambos serem rotores).

[22] Um *campo rotor* sobre o espaço-tempo Minkowskiano é modelado por um campo multivetorial A e possui a propriedade de simetria: sob uma *transformação ativa de Poincaré* (i.e., do sistema físico), se a lei de transformação do vetor de posição é $x \to x' = Rx\widetilde{R} + a$, onde R é um *"rotador de Lorentz" constante* (i.e., $R \in \Lambda^+(M) : R\widetilde{R} = 1$ e $\partial R = O$) e a é um *deslocamento constante* (i.e., $a \in \Lambda^1(M)$ e $\partial a = O$), então a lei de transformação de A será $A(x) \to A'(x') = RA(x)\widetilde{R}$.

Devemos provar que $\partial F(x) = \mu_0 J(x)$ implica $\partial' F'(x') = \mu_0 J'(x')$ $(\partial = \partial_x$ e $\partial' = \partial_{x'})$. Temos,

$$
\begin{aligned}
\partial F(x) &= \mu_0 J(x), \\
\Rightarrow R\partial F(x)\widetilde{R} &= \mu_0 R J(x)\widetilde{R}, \\
\Rightarrow \partial' F'(x') &= \mu_0 J'(x').
\end{aligned}
$$

Onde utilizamos a *transformação do gradiente de rotor* $\partial F(x) \rightarrow \partial' F'(x') = R\partial F(x)\widetilde{R}$.

Obteremos a partir da eq.(B.1) as quatro equações de Maxwell históricas.

Porém, se faz necessário comentar primeiramente algumas definições e propriedades fundamentais sobre os vetores e pseudo-vetores no *referencial inercial do espaço associado ao vetor tipo-tempo* γ_0 $\langle \boldsymbol{\sigma}_1 = \gamma_1\gamma_0, \boldsymbol{\sigma}_2 = \gamma_2\gamma_0, \boldsymbol{\sigma}_3 = \gamma_3\gamma_0 \rangle$, (i.e., o método de separação do espaço-tempo em espaço e tempo[4]).

Um *vetor do espaço* (i.e., um vetor polar de Gibbs) é um bivetor do espaço-tempo que anticomuta com γ_0; um bivetor do espaço-tempo que comute com γ_0 será dito um *pseudo-vetor do espaço* (i.e., um vetor axial de Gibbs).

Todavia, todo pseudovetor pode ser escrito como produto da unidade pseudoescalar do espaço-tempo (i.e., $i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \in \Lambda^4(\mathcal{M})$) por algum vetor.

Para todo $a \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ existem um escalar α (i.e., um número real) e um vetor de Gibbs $\mathbf{a}$, tais que

$$
\begin{aligned}
a\gamma_0 &= \alpha + \mathbf{a}, && \text{(B.3a)} \\
\gamma_0 a &= \alpha - \mathbf{a}. && \text{(B.3b)}
\end{aligned}
$$

Esses são únicos e estão dados pelas fórmulas $\alpha = a \cdot \gamma_0$ e $\mathbf{a} = a \wedge \gamma_0$.

Para todo $B \in \Lambda^2(\mathcal{M})$ existem um vetor de Gibbs $\mathbf{b}$ e um pseudo-vetor de Gibbs $i\mathbf{c}$, tais que

$$
\begin{aligned}
B &= \mathbf{b} + i\mathbf{c}, && \text{(B.4a)} \\
\gamma_0 B \gamma_0 &= -\mathbf{b} + i\mathbf{c}. && \text{(B.4b)}
\end{aligned}
$$

Essa decomposição é única, e vem dada pelas fórmulas $\mathbf{b} = (B\llcorner\gamma_0)\gamma_0$ e $i\mathbf{c} = (B \wedge \gamma_0)\gamma_0$.

Temos ainda dois produtos de vetores do espaço: o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}), &\text{(B.5a)} \\ i\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}). &\text{(B.5b)} \end{aligned}$$

Certamente o primeiro é um escalar e o segundo é um vetor do espaço.

Além disso, podemos definir o operador gradiente no referencial inercial do espaço $\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3 \rangle$, por

$$\boldsymbol{\nabla} = \gamma_0 \wedge \partial = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{\sigma}_k \partial_k, \tag{B.6}$$

obviamente, teremos que

$$\begin{aligned} \gamma_0 \partial &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}, &\text{(B.7a)} \\ \partial \gamma_0 &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}. &\text{(B.7b)} \end{aligned}$$

O operador gradiente agindo sobre campos multivetoriais[23] do espaço dá também por resultado campos multivetoriais do espaço.

Todavia, é possível definir dois operadores diferenciáis associados a $\boldsymbol{\nabla}$ que agem sobre campos vetoriais do espaço.

Para todo campo vetorial do espaço, digamos $\mathbf{a} = a^k \boldsymbol{\sigma}_k$, temos o divergente (escalar) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}$ e o rotacional (vetorial) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}$;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{a} + \widetilde{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{a}}) = \partial_k a^k, &\text{(B.8a)} \\ i\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{a} - \widetilde{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{a}}) \\ &= (\partial_2 a^3 - \partial_3 a^2)\boldsymbol{\sigma}_1 + (\partial_3 a^1 - \partial_1 a^3)\boldsymbol{\sigma}_2 + (\partial_1 a^2 - \partial_2 a^1)\boldsymbol{\sigma}_3. &\text{(B.8b)} \end{aligned}$$

[23]As eqs.(B.4a) e (B.4b) implicam que os bivetores do espaço-tempo são a *soma direta* dos vetores e pseudo vetores de Gibbs. Assim, chamaremos de *multivetores do espaço* (o números de Pauli) aos *multivetores pares do espaço-tempo* quando são expressos como a *soma direta dos escalares, vetores polares, vetores axiais e pseudo-escalares.*

Os três operadores diferenciáis estão relacionados entre si

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} + i\nabla \times \mathbf{a}. \tag{B.9}$$

Agora, podemos deduzir fácilmente as equações de Maxwell.

O campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo magnético $\mathbf{B}$, de acordo com as eqs.(B.4a) e (B.4b), podem ser definidos como campos vetoriais de Gibbs, pelas fórmulas

$$F = \frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}, \tag{B.10a}$$

$$\gamma_0 F \gamma_0 = -\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}. \tag{B.10b}$$

A densidade de carga ρ é um campo escalar e a densidade de corrente $\mathbf{j}$ é um campo vetorial de Gibbs, eles podem ser dados, de acordo com as eqs.(B.3a) e (B.3b), pelas fórmulas

$$J\gamma_0 = c\rho + \mathbf{j}, \tag{B.11a}$$

$$\gamma_0 J = c\rho - \mathbf{j}. \tag{B.11b}$$

Assim, multiplicando a eq.(B.1) por γ_0, e utilizando as eqs.(B.7a), (B.10a) e (B.11b), podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \partial F &= \mu_0 \gamma_0 J, \\
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\right)\left(\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}\right) &= \mu_0 (c\rho - \mathbf{j}), \\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\nabla\mathbf{E} + i\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + i\nabla\mathbf{B} &= \mu_0 c\rho - \mu_0 \mathbf{j},
\end{aligned}$$

ou seja, pela eq.(B.9), temos que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\nabla \cdot \mathbf{E} + i\frac{1}{c}\nabla \times \mathbf{E} + i\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + i\nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 c\rho - \mu_0 \mathbf{j},$$

e finalmente, igualando as partes escalar, vetorial, pseudo-vetorial e pseudo-escalar, obtemos as equações de Maxwell!

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}), \\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0, \qquad (\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

B.2 Extensor de Energia-Momento

Desenvolveremos um argumento heurístico para obtermos um teorema de conservação da energia-momento do campo eletromagnético, e daí identificaremos o extensor e os vetores canônicos de energia-momento.

Da equação de Maxwell (B.1), e a sua reversa, obtemos que

$$\widetilde{\partial F}F+\widetilde{F}\partial F=\mu_0(JF+\widetilde{F}J)=2\mu_0 J\lrcorner\, F,$$

ou seja

$$\frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu\widetilde{F}\gamma^\mu F+\widetilde{F}\gamma^\mu\partial_\mu F)=J\lrcorner\, F.$$

O lado esquerdo da última equação pode ser escrito de uma maneira que envolve as derivadas vetoriais direcionais $\gamma^\mu\cdot\partial_n$. Temos,

$$\frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu\widetilde{F}\gamma^\mu F+\widetilde{F}\gamma^\mu\partial_\mu F)=\gamma^\mu\cdot\partial_n\frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu\widetilde{F}nF+\widetilde{F}\partial_\mu nF+\widetilde{F}n\partial_\mu F),$$

(tenha-se em conta que $\gamma^\mu\cdot\partial_n\partial_\mu n=o$).

Assim, temos que

$$\gamma^\mu\cdot\partial_n\partial_\mu(\frac{1}{2\mu_0}\widetilde{F}nF)=J\lrcorner\, F.$$

Isto significa que existem um operador diferencial e um campo extensorial do tipo $(1,1)$, definidos por: $\partial_n \cdot \partial = \gamma^\mu \cdot \partial_n \partial_\mu$ e $T^\dagger(n) = \dfrac{1}{2\mu_0}\widetilde{F}nF$, tais que

$$\partial_n \cdot \partial T^\dagger(n) = J \lrcorner\, F, \tag{B.13}$$

(lembre-se que o adjunto de um $(1,1)$-extensor é também um $(1,1)$-extensor). Esta última equação diferencial é o *teorema da energia-momento.*

O operador diferencial $\partial_n \cdot \partial$ é da maior importância no formalismo Lagrangiano e surge naturalmente para dar conta das quantidades físicas conservadas, por exemplo, na conservação da energia-momento e do momento angular.

Além dissso, ele joga um papel fundamental nas equações de Euler-Lagrange associadas às Lagrangianas de campos extensoriais.

O campo extensorial $T(n)$, associado ao campo de Faraday F, é o *extensor de energia-momento.*

Notemos que no caso do campo eletromagnético: $T(n) = \partial_b n \cdot T^\dagger(b) = \partial_b n \cdot \dfrac{1}{2\mu_0}\widetilde{F}bF = \partial_b \dfrac{1}{2\mu_0}Fn\widetilde{F} \cdot b = \partial_b T^\dagger(n) \cdot b = T^\dagger(n)$, isto é, o extensor de energia-momento é *simétrico*!.

Note-se que o lado esquerdo da eq.(B.13) multiplicado escalarmente pelos vetores base γ_μ pode ser escrito como divergentes de campos vetoriais

$$\begin{aligned}
[\partial_n \cdot \partial T^\dagger(n)] \cdot \gamma_\mu &= \gamma^\beta \cdot \partial_n \partial_\beta [T^\dagger(n) \cdot \gamma_\mu] = \gamma^\beta \cdot \partial_n \partial_\beta [n \cdot T(\gamma_\mu)] \\
&= \gamma^\beta \cdot \partial_n [(\partial_\beta n) \cdot T(\gamma_\mu) + n \cdot \partial_\beta T(\gamma_\mu)] \\
&= \gamma^\beta \cdot [\partial_\beta T(\gamma_\mu)] = \partial \cdot T(\gamma_\mu).
\end{aligned}$$

Obtemos assim uma expressão equivalente para o teorema da energia que envolve os divergentes dos quatro campos vetoriais $T(\gamma_\mu)$,

$$\partial \cdot T(\gamma_\mu) = (J \lrcorner\, F) \cdot \gamma_\mu. \tag{B.14}$$

Os campos vetoriais $T(\gamma_\mu)$ serão chamados de *vetores canônicos de energia-momento.*

Notemos que se $J = 0$, então a energia-momento do campo eletromagnético será conservada!

A seguir, obteremos as fórmulas usuais para a densidade de energia e o vetor de Poynting em termos de E e B; e veremos qual é o significado da primeira equação diferencial do teorema da energia-momento (B.14), no referencial inercial do espaço $\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3 \rangle$.

A densidade de energia ε e o vetor de Poynting S estão dados pelas fórmulas

$$\begin{aligned} T(\gamma_0)\gamma_0 &= \varepsilon + \frac{1}{c}S, && \text{(B.15a)} \\ \gamma_0 T(\gamma_0) &= \varepsilon - \frac{1}{c}S. && \text{(B.15b)} \end{aligned}$$

Assim, utilizando as defs.(B.10a), (B.10b), (B.5a) e (B.5b), obtemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}[T(\gamma_0)\gamma_0 + \gamma_0 T(\gamma_0)] = \frac{1}{2}\frac{-1}{2\mu_0}(F\gamma_0 F\gamma_0 + \gamma_0 F\gamma_0 F) \\ &= \frac{1}{2}\frac{-1}{2\mu_0}[(\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B})(-\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}) + (-\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B})(\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B})] \\ &= \frac{1}{2\mu_0}(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} + \mathbf{B}^2) \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2, && \text{(B.16)} \\ \frac{1}{c}S &= \frac{1}{2}[T(\gamma_0)\gamma_0 - \gamma_0 T(\gamma_0)] = \frac{1}{2}\frac{1}{2\mu_0}(-F\gamma_0 F\gamma_0 + \gamma_0 F\gamma_0 F) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\mu_0}[-(\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B})(-\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}) + (-\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B})(\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B})] \\ &= \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c}(-i)\frac{1}{2}(\mathbf{EB} - \mathbf{BE}) \Rightarrow S = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}. && \text{(B.17)} \end{aligned}$$

Essas são as fórmulas usuais para ε e S em função de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Agora, tomemos a equação diferencial correspondente a γ_0 do teorema da energia-momento (B.14), temos que

$$\begin{aligned} \partial \cdot T(\gamma_0) &= (J \lrcorner F)\cdot\gamma_0, \\ \frac{1}{2}[\partial T(\gamma_0) + \widetilde{\partial T(\gamma_0)}] &= \frac{1}{4}(JF\gamma_0 - FJ\gamma_0 + \gamma_0 JF - \gamma_0 FJ), \\ \partial\gamma_0\gamma_0 T(\gamma_0) + \widetilde{\partial\gamma_0\gamma_0 T(\gamma_0)} &= \frac{1}{2}[J\gamma_0\gamma_0 F\gamma_0 - FJ\gamma_0 + (\gamma_0 JF - \gamma_0 F\gamma_0\gamma_0 J)^{\sim}]. \end{aligned}$$

Porém, utilizando a eq.(B.7b), a def.(B.15b) e a identidade (B.9), o primeiro termo do lado esquerdo pode ser escrito

$$\begin{aligned} \partial\gamma_0\gamma_0 T(\gamma_0) &= (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla})(\varepsilon - \frac{1}{c}\mathbf{S}) \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\varepsilon - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} + \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{S} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \nabla\varepsilon - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{1}{c}\nabla\cdot\mathbf{S} + i\frac{1}{c}\nabla\times\mathbf{S},$$

e então, o lado esquerdo é

$$\partial\gamma_0\gamma_0T(\gamma_0) + \partial\widetilde{\gamma_0\gamma_0T}(\gamma_0) = 2\frac{1}{c}(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S}).$$

Ainda, utilizando as defs.(B.10a), (B10b), (B.11a), (B.11b), (B.5a) e (B.5b), temos

$$\begin{aligned} J\gamma_0\gamma_0F\gamma_0 - FJ\gamma_0 &= (c\rho+\mathbf{j})(-\frac{1}{c}\mathbf{E}+i\mathbf{B}) - (\frac{1}{c}\mathbf{E}+i\mathbf{B})(c\rho+\mathbf{j}) \\ &= -2\rho\mathbf{E} - \frac{1}{c}(\mathbf{jE}+\mathbf{Ej}) + i(\mathbf{jB}-\mathbf{Bj}) \\ &= -2(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}), \end{aligned}$$

e assim, para o lado direito, temos que

$$J\gamma_0\gamma_0F\gamma_0 - FJ\gamma_0 + (J\gamma_0\gamma_0F\gamma_0 - FJ\gamma_0)^{\sim} = -4\frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.$$

Portanto, a primeira equação diferencial do teorema da energia-momento (B.14), no referencial inercial do espaço $\langle\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3\rangle$ é

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -(\nabla\cdot\mathbf{S} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}). \tag{B.18}$$

A eq.(B.18) é precisamente o *teorema de Poynting*!

B.3 Potencial Eletromagnético e Bivetor de Hertz

Se o potencial eletromagnético A (i.e., um campo vetorial definido sobre o espaço-tempo, às vezes, chamado de *campo de Maxwell*) satisfaz as duas equações diferenciais

$$\partial^2 A = \mu_0 J, \tag{B.19a}$$

$$\partial\cdot A = 0. \tag{B.19b}$$

(esta última é conhecida como *condição-gauge* de Lorenz[24]), então $F = \partial \wedge A$ é uma solução da equação de Maxwell $\partial F = \mu_0 J$.

É bastante simples ver isso, utilizando as eqs.(B.19b) e (B.19a) (nessa ordem!), temos que

$$\partial F = \partial\partial \wedge A = \partial(\partial \cdot A + \partial \wedge A) = \partial\partial A = \partial^2 A = \mu_0 J$$

Desta maneira encontramos que $F = \partial \wedge A$ é uma *solução formal* para a equação de Maxwell.

Veremos que também é possível encontrar, sob certas condições, uma solução formal do sistema de equações diferenciais (B.19a) e (B.19b). Isso se consegue com o bivetor de Hertz.

Seja Π um campo bivetorial no espaço-tempo (i.e., o potencial de Hertz, chamado ainda de *bivetor de Hertz*); e tomemos outro campo bivetorial também no espaço-tempo, digamos K, tal que $\partial \lrcorner\, K = J$.

Se Π satisfaz a equação diferencial

$$\partial^2 \Pi = \mu_0 K, \tag{B.20}$$

(onde estabelecemos a condição $\partial \lrcorner\, K = J$), então $A = \partial \lrcorner\, \Pi$ será uma solução das equações diferenciais do campo de Maxwell.

De fato, vemos que

$$\partial \cdot A = \partial \lrcorner\, (\partial \lrcorner\, \Pi) = 0,$$

já que para todo campo multivetorial $\partial \lrcorner\, (\partial \lrcorner\, X) = O$. E asim, a eq.(B.19b) fica satisfeita trivialmente.

Utilizando a eq.(B.20) e a condição $\partial \lrcorner\, K = J$, temos que

$$\partial^2 A = \partial^2(\partial \lrcorner\, \Pi) = \partial \lrcorner\, (\partial^2 \Pi) = \partial \lrcorner\, (\mu_0 K) = \mu_0 J,$$

e portanto, a eq.(B.19a) também fica satifeita.

Desta maneira conseguimos uma *solução formal* para as equações diferenciais do potencial eletromagnético.

[24] A *condição-gauge* é devida ao L. Lorenz e não ao conhecido H. A. Lorentz.

Observamos que os campos multivetoriais A, Π e K devem ser todos do tipo campos rotor, para que seja mantida a *invariancia de Poincaré* das eqs.(B.19a) e (B.20) (e da condição $\partial \lrcorner K = J$).

Por último, se faz oportuno comentar que recentemente Rodrigues Jr. e Lu, 1997 (veja [13]) mostraram que o potencial de Hertz é essencial para encontrarmos soluções da equação de Maxwell livre com $v \neq c$.

APÊNDICE C

Teoria de Dirac

C.1 Equação de Dirac

O estado mecânico-quântico de uma partícula carregada elétricamente movendo-se num campo eletromagnético e descrito, em termos da primeira quantização, pelo *campo de Dirac* ψ, (i.e., um *campo spinorial*[25] no espaço-tempo de Minkowski), que satifaz a seguinte equação diferencial

$$\hbar\partial\psi i\sigma_3 - eA\psi = mc\psi\gamma_0, \tag{C.1}$$

onde m é a massa da partícula, e é a carga elétrica da partícula (no caso de um elétron $e = -|e|$) e A é o campo de Maxwell (lembre-se que $i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \in \Lambda^4(\mathcal{M})$ é a unidade pseudo-escalar na álgebra do espaço-tempo).

A eq.(C.1), é dita equação de Dirac-Hestenes[5],[6],[7],[12].

A equação de Dirac-Hestenes tem a propriedade básica de covariancia de Poincaré.

Sob uma transformação ativa de Poincaré (i.e., do sistema físico) se o vetor de posição transforma-se $x \to x' = Rx\widetilde{R} + a$, então as leis transformação do campo de Dirac e do campo de Maxwell serão $\psi(x) \to \psi'(x') = R\psi(x)$ (por ser um *spinor*) e $A(x) \to A'(x') = RA(x)\widetilde{R}$ (por ser um *rotor*).

Devemos provar que, se $\psi(x)$ satisfaz $\hbar\partial\psi(x)i\sigma_3 - eA(x)\psi(x) = mc\psi(x)\gamma_0$, então $\psi'(x')$ satisfará $\hbar\partial'\psi'(x')i\sigma_3 - eA'(x')\psi'(x') = mc\psi'(x')\gamma_0$ ($\partial \equiv \partial_x$ e $\partial' \equiv \partial_{x'}$). Temos,

$$\begin{aligned} \hbar\partial\psi(x)i\sigma_3 - eA(x)\psi(x) &= mc\psi(x)\gamma_0, \\ \Rightarrow \hbar R\partial\psi(x)i\sigma_3 - eRA(x)\widetilde{R}R\psi(x) &= mcR\psi(x)\gamma_0, \end{aligned}$$

[25]Um *campo spinorial de Dirac Hestenes* sobre o espaço-tempo Minkowskiano é dado por uma classe de equivalência, cujos elementos com relação a uma base ortonormal são essencialmente *campos multivetoriais pares*, (veja detalhes em [10]).

Por uma *transformação ativa de Poincaré* (i.e., do sistema físico), se o vetor de posição se transforma por $x \to x' = Rx\widetilde{R} + a$, então ψ se transformará por $\psi(x) \to \psi'(x') = R\psi(x)$.

$$\Rightarrow \hbar\partial'\psi'(x')i\sigma_3 - eA'(x')\psi'(x') \;=\; mc\psi'(x')\gamma_0.$$

Onde utilizamos a *transformação do gradiente de spinor* $\partial\psi(x) \to \partial'\psi'(x') = R\partial\psi(x)$.

A seguir, obteremos a partir da eq.(C.1) dois teoremas fundamentais que relacionam entre si os distintos *observáveis mecânico-quânticos.*

Da equação de Dirac-Hestenes (C.1), obtemos fácilmente que

$$\hbar\partial\psi i\gamma_3\widetilde{\psi} = eA\psi\gamma_0\widetilde{\psi} + mc\psi\widetilde{\psi}. \tag{i}$$

Por outro lado, temos as identidades seguintes

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}) &= \partial_\mu\psi i\gamma_3\widetilde{\psi} + \psi i\gamma_3\partial_\mu\widetilde{\psi}, && (ii.a)\\ \left\langle\partial_\mu\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}\right\rangle_1 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi i\gamma_3\widetilde{\psi} - \psi i\gamma_3\partial_\mu\widetilde{\psi}). && (ii.b)\end{aligned}$$

A primeira é a regra de Leibnitz e a segunda envolve uma identidade muito útil, na álgebra do espaço-tempo, $\langle n^\circ ímpar\rangle_1 = \frac{1}{2}(n^\circ ímpar + \widetilde{n^\circ ímpar})$.

Somando $(ii.a)$ e $(ii.b)$, depois de termos reconstruido os gradientes, obtemos que

$$\frac{1}{2}\partial(\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}) + \gamma^\mu\left\langle\partial_\mu\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}\right\rangle_1 = \partial\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}. \tag{iii}$$

Agora, introduzindo a eq.(i) no lado direito da ident.(iii), temos que

$$\frac{\hbar}{2}\partial(is) + \hbar\gamma^\mu\left\langle\partial_\mu\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}\right\rangle_1 = eAJ + mc\psi\widetilde{\psi}, \tag{C.2}$$

onde $s = \psi\gamma_3\widetilde{\psi}$ é o *vetor de spin* (is, o dual de s, é o *trivetor de spin*) e $J = \psi\gamma_0\widetilde{\psi}$ é a *densidade de corrente de probabilidade.* E assim, o primeiro teorema ficou provado.

Também, da equação de Dirac-Hestenes podemos obter que

$$\hbar\partial\psi\gamma_0\widetilde{\psi} = -eA\psi i\gamma_3\widetilde{\psi} - mc\psi i\sigma_3\widetilde{\psi}. \tag{iv}$$

E ainda, temos as duas identidades

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) &= \partial_\mu\psi\gamma_0\widetilde{\psi}+\psi\gamma_0\partial_\mu\widetilde{\psi}, & (v.a)\\ \left\langle\partial_\mu\psi\gamma_0\widetilde{\psi}\right\rangle_3 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi\gamma_0\widetilde{\psi}-\psi\gamma_0\partial_\mu\widetilde{\psi}). & (v.b)\end{aligned}$$

A primeira não precisa comentário e a segunda envolve outra identidade muito importante, na álgebra do espaço-tempo, $\langle n^\circ ímpar\rangle_3 = \frac{1}{2}(n^\circ ímpar - \widetilde{n^\circ ímpar})$.

Somando $(v.a)$ e $(v.b)$, depois de termos reconstruido os gradientes, chegamos a

$$\frac{1}{2}\partial(\psi\gamma_0\widetilde{\psi})+\gamma^\mu\left\langle\partial_\mu\psi\gamma_0\widetilde{\psi}\right\rangle_3 = \partial\psi\gamma_0\widetilde{\psi}. \qquad (vi)$$

E, introduzindo a eq.(iv) no lado direito da ident.idade (vi), obtemos

$$\frac{\hbar}{2}\partial J+\hbar\gamma^\mu\left\langle\partial_\mu\psi\gamma_0\widetilde{\psi}\right\rangle_3 = -eAis - mcS, \qquad (C.3)$$

onde $S=\psi i\sigma_3\widetilde{\psi}$ é o *bivetor de spin.* Deste modo, ficou provado o segundo teorema.

Observe-se que se tomarmos a 0-parte da eq.(C.3), obteriamos que $\partial\cdot J=0$, isto é precisamente, a conservação da densidade de corrente de probabilidade!.

C.2 Extensor de Energia-Momento do Campo de Dirac

Desenvolveremos um argumento heurístico que nos conduzirá ao teorema da energia-momento do campo de Dirac, daí identificaremos o extensor de energia-momento (i.e., o *tensor de Tetrode*[6]) e os vetores canônicos de energia-momento.

A partir da equação de Dirac-Hestenes obtemos que o campo spinorial ψ satisfaz a equação diferencial de ordem 2,

$$\hbar^2\partial^2\psi = (e^2A^2-m^2c^2)\psi - \hbar e[(\partial A)\psi + 2A\cdot\partial\psi]i\sigma_3, \qquad (vii)$$

onde utilizamos a identidade do cálculo multivetorial $\partial(aX)=(\partial a)X-a(\partial X)+2a\cdot\partial X$, a é um campo vetorial e X é um campo multivetorial.

Por outro lado, utilizando mais uma vez a identidade $\langle n^\circ ímpar\rangle_1 = \frac{1}{2}(n^\circ ímpar+\widetilde{n^\circ ímpar})$, temos que

$$\left\langle \partial^2\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}\right\rangle_1 = \frac{1}{2}(\partial^2\psi i\gamma_3\widetilde{\psi} - \psi i\gamma_3\partial^2\widetilde{\psi}). \qquad (viii)$$

Logo, introduzindo a eq.(vii) nos termos do lado direito da identidade (vi), obtemos

$$\hbar\left\langle \partial^2\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}\right\rangle_1 = eF\llcorner J + e[(\partial\cdot A)J + (A\cdot\partial)J], \qquad (ix)$$

onde $F = \partial\wedge A$ é o campo de Faraday. Esse é básicamente o teorema da energia-momento.

Todavia, veremos como é possível colocar tanto o lado esquerdo quanto o segundo termo do lado direito da eq.(vii), numa forma sugestiva: o *operador diferencial* $\partial_n\cdot\partial$ agindo sobre um *campo* $(1,1)$*-extensorial.*

O lado esquerdo da eq.(ix) pode ser transformado

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial^2\psi i\gamma_3\widetilde{\psi}\right\rangle_1 &= \frac{1}{2}(\partial^2\psi i\gamma_3\widetilde{\psi} - \psi i\gamma_3\partial^2\widetilde{\psi}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial^2\psi i\gamma_3\widetilde{\psi} - \partial_\mu\psi i\gamma_3\partial^\mu\widetilde{\psi} + \partial^\mu\psi i\gamma_3\partial_\mu\widetilde{\psi} - \psi i\gamma_3\partial^2\widetilde{\psi}) \\
&= \frac{1}{2}[\partial_n\cdot\partial(n\cdot\partial\psi)i\gamma_3\widetilde{\psi} - \partial_\mu\psi i\gamma_3\gamma^\mu\cdot\partial_n(n\cdot\partial\widetilde{\psi}) \\
&\quad + \gamma^\mu\cdot\partial_n(n\cdot\partial\psi)i\gamma_3\partial_\mu\widetilde{\psi} - \psi i\gamma_3\partial_n\cdot\partial(n\cdot\partial\widetilde{\psi})] \\
&= \gamma^\mu\cdot\partial_n\partial_\mu\frac{1}{2}[(n\cdot\partial\psi)i\gamma_3\widetilde{\psi} - \psi i\gamma_3(n\cdot\partial\widetilde{\psi})] \\
&= \partial_n\cdot\partial\left\langle (n\cdot\partial\psi)i\gamma_3\widetilde{\psi}\right\rangle_1, \qquad (x)
\end{aligned}$$

onde utilizamos as duas identidades do cálculo multivetorial $\partial_n\cdot\partial(n\cdot\partial X) = \partial^2 X$ e $\partial^\mu X = \gamma^\mu\cdot\partial_n(n\cdot\partial X)$, a regra de Leibnitz, e ainda a identidade $\langle n°\textit{ímpar}\rangle_1 = \frac{1}{2}(n°\textit{ímpar} + \widetilde{n°\textit{ímpar}})$ no penúltimo passo.

O segundo termo do lado direito da eq.(ix) também pode ser transformado

$$\begin{aligned}
(\partial\cdot A)J + (A\cdot\partial)J &= \gamma^\mu\cdot(\partial_\mu A)J + \gamma^\mu\cdot A\partial_\mu J \\
&= \gamma^\mu\cdot\partial_n[(\partial_\mu n)\cdot AJ + n\cdot(\partial_\mu A)J + n\cdot A\partial_\mu J] \\
&= \gamma^\mu\cdot\partial_n\partial_\mu(n\cdot AJ) \\
&= \partial_n\cdot\partial(n\cdot AJ). \qquad (xi)
\end{aligned}$$

Agora, colocando as identidades (x) e (xi) na eq.(ix) obtemos finalmente que

$$\partial_n \cdot \partial[\hbar \left\langle (n \cdot \partial\psi) i\gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 - en \cdot AJ] = eF \llcorner J.$$

Desta maneira, mostramos que existe um campo extensorial do tipo $(1,1)$, definido por $T^\dagger(n) = \hbar \left\langle (n \cdot \partial\psi) i\gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 - en \cdot AJ$, tal que

$$\partial_n \cdot \partial T^\dagger(n) = eF \llcorner J. \tag{C.4}$$

Esta equação diferencial é o *teorema da energia-momento.* O campo extensorial $T(n)$, associado ao campo de Dirac ψ (o campo de Maxwell A entra como parâmetro!), é o *extensor de energia-momento.*

Logicamente, existe também uma expressão equivalente para o teorema da energia-momento que envolve os divergentes dos *vetores canônicos de energia-momento* (i.e., os campos vetoriais $T(\gamma_\mu)$)

$$\partial \cdot T(\gamma_\mu) = e(F \llcorner J) \cdot \gamma_\mu. \tag{C.5}$$

Notemos que se $F = O$, então a energia-momento do campo de Dirac será conservada!

A seguir, obteremos três resultados notáveis ao respeito do extensor de energia-momento; calcularemos o traço e o bivetor do extensor de energia-momento, e provaremos a interessante propriedade $\partial_n \cdot \partial T^\dagger(n) = \partial_n \cdot \partial T(n)$.

Calculamos $tr(T)$,

$$tr(T) = tr(T^\dagger) = T^\dagger(\gamma_\mu) \cdot \gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot T^\dagger(\gamma_\mu).$$

Porém, tomando a 0-parte da eq.(C.2), temos que

$$\hbar\gamma^\mu \cdot \left\langle \partial_\mu \psi i\gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 = eA \cdot J + mc\psi \cdot \psi.$$

E assim, é

$$tr(T) \;\; = \;\; \gamma^\mu \cdot T^\dagger(\gamma_\mu)$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma^\mu \cdot (\hbar \left\langle \partial_\mu \psi i \gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 - e\gamma_\mu \cdot AJ), \\
tr(T) &= mc\psi \cdot \psi. \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

Calculamos $biv(T)$,

$$biv(T) = -biv(T^\dagger) = -T^\dagger(\gamma_\mu) \wedge \gamma^\mu = \gamma^\mu \wedge T^\dagger(\gamma_\mu).$$

Todavia, tomando a 2-parte da eq.(C.2), temos

$$\frac{\hbar}{2}\partial \lrcorner\, (is) + \gamma^\mu \wedge \hbar \left\langle \partial_\mu \psi i \gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 = eA \wedge J.$$

E portanto, obtemos que

$$
\begin{aligned}
biv(T) &= \gamma^\mu \wedge T^\dagger(\gamma_\mu) \\
&= \gamma^\mu \wedge (\hbar \left\langle \partial_\mu \psi i \gamma_3 \widetilde{\psi} \right\rangle_1 - e\gamma_\mu \cdot AJ), \\
biv(T) &= -\frac{\hbar}{2}\partial \lrcorner\, is = \frac{\hbar}{2} i\partial \wedge s. \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}
$$

No último passo, utilizamos a *transformação de dualidade* $i\partial \wedge X = -\partial \lrcorner\, (iX)$.

Agora, tomemos a seguinte identidade

$$T^\dagger(n) - T(n) = n \lrcorner\, biv(T),$$

e se aplicarmos o operador diferencial $\partial_n \cdot \partial$, teremos que

$$
\begin{aligned}
\partial_n \cdot \partial T^\dagger(n) - \partial_n \cdot \partial T(n) &= \partial_n \cdot \partial [n \lrcorner\, biv(T)] \\
&= \gamma^\mu \cdot \partial_n [\partial_\mu n \lrcorner\, biv(T) + n \lrcorner\, \partial_\mu biv(T)] \\
&= \partial \lrcorner\, biv(T) = \partial \lrcorner\, (-\frac{\hbar}{2}\partial \lrcorner\, is) = o, \\
&\Rightarrow \partial_n \cdot \partial T^\dagger(n) = \partial_n \cdot \partial T(n). \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

No último passo, usamos a eq.(C.7) e utilizamos a identidade $\partial\lrcorner(\partial\lrcorner X) = O$.

C.3 Extensor de Momento Angular do Campo de Dirac

O teorema do momento angular será deduzido a partir do teorema da energia-momento, utilizando as eqs.(C.7) e (C.8) obtidas na seção C.2.

Multiplicando exteriormente a eq.(C.4) pelo vetor de posição x e levando em conta a eq.(C.8), obtemos

$$[\partial_n \cdot \partial T(n)] \wedge x = e(F\llcorner J) \wedge x.$$

Porém, utilizando a identidade do cálculo multivetorial $\partial_n \cdot \partial[T(n) \wedge x] = [\partial_n \cdot \partial T(n)] \wedge x + biv(T)$, obtemos que

$$\partial_n \cdot \partial[T(n) \wedge x] - biv(T) = e(F\llcorner J) \wedge x. \qquad (xii)$$

Agora, mostraremos explícitamente que o bivetor do extensor de energia-momento pode ser escrito ainda como $\partial_n \cdot \partial$ (*campo* $(1,2)$-*extensorial*).

Da eq.(C.7) temos que

$$\begin{aligned} biv(T) &= \frac{\hbar}{2} i\partial \wedge s = -\frac{\hbar}{2} i\partial_\mu (s \wedge \gamma^\mu) = -\frac{\hbar}{2}\gamma^\mu \cdot \partial_n i[(\partial_\mu s) \wedge n + s \wedge (\partial_\mu n)] \\ &= -\gamma^\mu \cdot \partial_n \partial_\mu \frac{\hbar}{2} i(s \wedge n) = -\partial_n \cdot \partial \frac{\hbar}{2} i(s \wedge n). \end{aligned}$$

Fica assim provado que existe um campo extensorial do tipo $(1,2)$, definido por $S(n) = \frac{\hbar}{2} i(s \wedge n)$, tal que

$$biv(T) = -\partial_n \cdot \partial S(n). \qquad (xiii)$$

Logo, introduzindo a eq.$(xiii)$ no lado esquerdo da eq.(xii), obtemos finalmente que

$$\partial_n \cdot \partial[T(n) \wedge x + S(n)] = e(F\llcorner J) \wedge x.$$

Desta maneira, provamos que existe um campo extensorial do tipo $(1,2)$, associado ao campo de Dirac ψ, definido por $J(n) = T(n) \wedge x + S(n)$, tal que

$$\partial_n \cdot \partial J(n) = e(F\llcorner J) \wedge x. \qquad (C.9)$$

Esta equação diferencial é o *teorema do momento angular*, $J(n)$ é o *extensor de momento angular total.*

O termo $T(n) \wedge x$ é a *"parte orbital"* e $S(n)$ é a *"parte intríseca"* (i.e., *o extensor de spin*) do momento angular do campo de Dirac.

Observe-se que o lado esquerdo da eq.(C.9) multiplicado escalarmente pelos bivetores base $\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$ pode ser escrito como divergentes de campos vetoriais

$$\begin{aligned}
[\partial_n \cdot \partial J(n)] \cdot (\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) &= \gamma^\beta \cdot \partial_n \partial_\beta [J(n) \cdot (\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu)] = \gamma^\beta \cdot \partial_n \partial_\beta [n \cdot J^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu)] \\
&= \gamma^\beta \cdot \partial_n [(\partial_\beta n) \cdot J^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) + n \cdot \partial_\beta J^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu)] \\
&= \gamma^\beta \cdot [\partial_\beta J^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu)] = \partial \cdot J^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu).
\end{aligned}$$

Chegamos assim numa forma equivalente para o teorema de momento angular que envolve os divergentes dos seis campos vetoriais $J^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu)$ (i.e., os *vetores canônicos de momento angular*),

$$\partial \cdot J^\dagger(\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = e[(F \llcorner J) \wedge x] \cdot (\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu). \tag{C.10}$$

Notemos que se $F = O$, então o momento angular do campo de Dirac será conservado!

Referências Bibliográficas

[1] D. MARTIN, *Manifold Theory, An Introduction for Mathematical Physics* (Ellis Horwood Limited, England, 1991).

[2] Y. CHOQUET-BRUHAT, C. DEWITT-MORETTE and M. DILLARD-BLEICK, *Analysis, Manifolds and Physics*, revised edition, (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982).

[3] R. L. BISHOP and S. I. GOLDBERG, *Tensor Analysis on Manifolds* (Dover Publications, Inc., New York, 1980).

[4] D. HESTENES, *Space-Time Algebra* (Gordon and Breach, New York, 1966).

[5] D. HESTENES, *"Real spinor Fields"*, J. Math. Phys., **8**(4), 798-808, (1967).

[6] D. HESTENES, *"Local Observables in the Dirac Theory"*, J. Math. Phys., **14**(7), 893-905, (1973).

[7] D. HESTENES, *"Observables, Operators, and Complex Numbers in the Dirac Theory"*, J. Maths. Phys., **16**(3), 556-571, (1975).

[8] D.HESTENES and G.SOBCZYK, *Clifford Algebra to Geometric Calculus, A Unified Language for Mathematics and Physics* (D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1984).

[9] A. LASENBY, C. DORAN and S. GULL, *"A Multivector Aproach to Lagrangian Field Theory"*, Foundations of Physics, **23**(10), 1295-1327, (1993).

[10] W. A. RODRIGUES, Jr., Q. A. G. de SOUZA, J. VAZ, Jr. and P. LOUNESTO, *"Dirac-Hestenes Spinor Field on Riemann-Cartan Manifolds"*, International Journal of Theoretical Physics, **35**(9), 1849-1899, (1996).

[11] B. JANCEWICZ, *Multivetors and Clifford Algebras in Electrodynamics* (World Scientific, Singapore, 1988).

[12] P. LOUNESTO, *"Clifford Algebras, Relativity and Quantum Mechanics"*, in Gravitation: The Spacetime Structure, in P. Letelier and W. A. Rodrigues, Jr., (eds.) (World Scientific, Singapore, 1994).

[13] WALDYR A. RODRIGUES, Jr. and JIAN-YU LU, *"On the Existence of Undistorted Progressive Waves (UPWs) of Arbitrary Speeds $0 \leq v < \infty$ in Nature"*, Foundation of Physics,

27(3), 435-508, (1997).

[14] C. DORAN A. LASENBY and S. GULL, *"Linear Algebra"*, in Clifford (Geometric) Algebras, with Applications to Physics, Mathematics and Engineering, in William E. Baylis (ed.) (Birkhäuser, Boston, 1996).

[15] A. LASENBY, C. DORAN and S. GULL, *"Gravity I - Introduction"*, in Clifford (Geometric) Algebras, with Applications to Physics, Mathematics and Engineering, in William E. Baylis (ed.) (Birkhäuser, Boston, 1996).

[16] A. LASENBY, C. DORAN and S. GULL, *"Gravity II - Field Equations"*, in Clifford (Geometric) Algebras, with Applications to Physics, Mathematics and Engineering, in William E. Baylis (ed.) (Birkhäuser, Boston, 1996).

[17] W. A. RODRIGUES, Jr. and J. VAZ, Jr., "From Electromagnetism to Relativistic Quantum Mechanics", Foundations of Physics, **28**(8), 789-814, (1998).

[18] W. A. RODRIGUES, Jr., Q. A. G. de SOUZA and J. VAZ, Jr., *"Lagrangian Formulation in the Clifford Bundle of the Dirac-Hestenes Equation on a Riemann-Cartan Spacetime"*, in P. Letelier and W. A. Rodrigues Jr. (eds.), Gravitation: the Spacetime Structure (Proc. SILARG VIII, Aguas de Lindóia, July 25-30, 1993), 534-543, (World Scientific, Singapore, 1994).

[19] W. A. RODRIGUES, Jr. and Q. A. G. de SOUZA, *"The Clifford Bundle and the Nature of the Gravitational Field"*, Found. Phys., **23(11)**, 1465-1490, (1993).

[20] V. V. FERNÁNDEZ, *"Teoria de Gravitação no Espaço-Tempo de Minkowski"*, Tese de Doutorado, IGW-UNICAMP, em preparação, (1999).