OSCILAÇÕES:
EXISTENCIA E ESTABILIDADE

Maria Zoraide Martins Costa Soares

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. ORLANDO FRANCISCO LOPES

CAMPINAS
1975

Meus agradecimentos
ao
Prof. Dr. ORLANDO FRANCISCO LOPES

SUMÁRIO

O objetivo deste trabalho é estabelecer condições para que certos sistemas periódicos tenham soluções periódicas e os mesmos sejam uniformemente assintoticamente estáveis. As demonstrações correspondentes encontram-se no capítulo II, onde ainda colocamos alguns exemplos de aplicação do resultado.

No capítulo III, tratamos da existencia e não existencia de oscilações livres, através de três exemplos, sendo um deles a equação de Lienard. Para esta última usamos um critério puramente geométrico de estabilidade para o círculo limite. E para finalizar, fizemos uma aplicação do teorema de Poincaré-Bendixon, isto é, mostramos a existência de uma órbita periódica para o sistema $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=o$.

- ÍNDICE -

Oscilações:

Existencia e Estabilidade.

CAPÍTULO I

Existência de Oscilação Forçada

Iniciaremos este capítulo com algumas definições sobre limitações de soluções. Em seguida, com o auxílio da função de Liapunov demonstraremos um teorema que nos garante a existência de soluções periódicas para sistemas periódicos e daremos três exemplos para ilustrá-lo.

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \tag{1.1}$$

onde $F(t,x)$ é contínua em IxR^n, $I = [0,\infty)$

Definição 1.1

Uma solução $x(t;t_o,x_o)$ de (1.1) é limitada, se existe $\beta > o$ tal que $\| x(t;t_o,x_o) \| < \beta$ para todo $t \geqslant t_o$; β pode depender de cada solução.

Definição 1.2

As soluções de (1.1) são equilimitadas, se para todo $\alpha > o$ e $t_o \varepsilon I$, existe $\beta(t_o,\alpha) \geq o$ tal que se $\| x_o \| < \alpha$, $\| x(t;t_o,x_o) \| < \beta(t_o,\alpha)$ para todo $t \geqslant t_o$.

Definição 1.3

As soluções de (1.1) são uniformemente limitadas, se β na definição 1.2 é independente de t_o.

Definição 1.4

As soluções de (1.1) são ultimamente limitadas se existe $B > o$, $T > o$ tal que para toda solução $x(t,t_o,x_o)$ de (1.1) $\| x(t;t_o,x_o) \| < B$ para todo $t \geqslant t_o + T$; B é independente da particular solução enquanto T pode depender de cada solução.

Definição 1.5

As soluções de (1.1) são equiultimamente limitadas, se existe $B > o$ e se correspondendo a todo $\alpha > o$ e $t_o \varepsilon I$, existe $T(t_o,\alpha) > o$ tal que $\| x_o \| < \alpha$ implica $\| x(t;t_o,x_o) \| < B$ para todo $t \geqslant t_o + T(t_o,\alpha)$.

Definição 1.6

As soluções de (1,1) são uniformemente ultimamente limitadas se o T na definição 1.5 é independente de t_o.

Definição 1.7

Seja $V: [o, \infty) \times \Omega \to R$, $\Omega \subset R^n$ aberto, define-se

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,\xi) = \overline{\lim_{h\to o^+}} \frac{1}{h}\left[V(t+h, x(t+h;t,\xi)) - V(t, \xi)\right] \text{ onde}$$

$x(t; \tau, \xi)$ é a solução de (1.1) passando por $(\tau, \xi) \in [o, \infty) \times R^n$.

Teorema 1.1

Suponhamos que exista uma função de Liapunov $V(t,x)$ definida em $o \leq t < \infty$, $\|x\| > R$, (onde R pode ser grande) que satisfaça as seguintes condições:

(i) $a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|)$, onde $a(r)$ é contínua e crescente, $a(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$ e $b(r)$ é contínua e crescente.

(ii) $\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \leq -c(\|x\|)$, onde $c(r)$ é contínua e positiva para $r \geq R$.

Então, as soluções de (1.1) são uniformemente ultimamente limitadas.

Demonstração

Primeiramente mostraremos que as soluções são uniformemente limitadas.

Seja $\alpha > R$. Se $\|x\| = \alpha$, temos por (i) que $V(t,x) \leq b(\alpha)$ e que existe $\beta > o$ tal que $a(\beta) > b(\alpha)$. Suponhamos que exista x_o tal que $\|x_o\| < \alpha$ e que exista t' satisfazendo:

$$\|x(t';t_o,x_o)\| = \beta$$

Como $\|x_o\| < \alpha$, existem t_1 e t_2 tais que $t_o \leq t_1 < t_2 \leq t'$,

$$\|x(t_1;t_o,x_o)\| = \alpha, \quad \|x(t_2;t_o,x_o)\| = \beta \text{ e}$$

$$\alpha < \|x(t;t_o,x_o)\| < \beta, \quad \text{se } t_1 < t < t_2.$$

Logo,

$V(t_1,x) \leq b(\alpha)$, $V(t_2,x) \geq a(\beta)$. Mas, isto é uma contradição pois se $\dot{V}(t,x) < o$, a função $V(t,x)$ não é crescente.

Portanto, $\|x(t;t_o,x_o)\| < \beta$ se $\|x_o\| < \alpha$, isto é, as soluções são uniformemente limitadas.

Mostraremos agora que as soluções são uniformemente últimamente limitadas.

De (i) vem que se $\|x\| > \alpha, a(\alpha) \leq V(t,x)$. Seja $\gamma > \alpha$ Como as soluções são uniformemente limitadas, existe γ' dependendo somente de γ tal que $\|x(t;t_o,x_o)\| < \gamma'$ para $\|x_o\| < \gamma$ e $t \geq t_o$.

Consideremos a função V(t,x) no seguinte domínio A: $t > t_o, \alpha < x < \gamma'$.

Como $\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \leq -c(\|x\|)$, existe um número $-k$ dependendo somente de γ' tal que no domínio A valem as desigualdades:

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \leq -k \quad , \quad V(t,x) - V(t_o,x_o) \leq -k(t-t_o)$$

Também, no domínio A valem as desigualdades para a função V(t,x):

1) $V(t,x) > a(\alpha)$
2) $V(t,x) < b(\gamma')$

Consequentemente, a solução tem que sair de A, mas isto só acontece para $\|x\|$ decrescente.

Logo, existe t' satisfazendo:

$t_o < t' < t_o + \frac{1}{k}(b(\gamma') - a(\alpha))$ tal que $\|x(t';t_o,x_o)\| = \alpha$

Obs.

A condição (ii) pode ser escrita: $\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \leq -d(x)$, onde d é contínua e $d > o$ se $\|x\| \geq R$.

Consideremos agora o sistema:

(1.2) $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$, onde F(t,x) é contínua em IxR^n e periódica em t, de período $\omega > o$, $F(t,o) \equiv 0$.

Teorema 1.2

Se as soluções de (1.2) são equilimitadas, então são uniformemente limitadas.

Demonstração

Seja $\alpha > o$. Consideremos as soluções começando em (t_o,x_o) tal que $o \leq t_o < \omega$, $\|x_o\| < \alpha$. Existe um $\beta(\alpha) > o$, tal que as

soluções consideradas são limitadas.
Como as soluções são por hipótese equilimitadas, existe $\gamma(\beta) > o$ tal que se $\|x_o\| < \beta$, $\|x(t;t_o,x_o)\| < \gamma$ para todo $t \geq \omega$; o que implica que se $o \leq t_o < \omega$ e $\|x_o\| < \alpha$, $\|x(t;t_o,x_o)\| < \gamma$ para todo $t \geq t_o$.
Como $F(t,x)$ é periódica, vem que se $\|x_o\| < \alpha$; $\|x(t;t_o,x_o)\| < \gamma$ para todo $t \geq t_o$.

Lema 1.1

Sejam S e S_1 subconjuntos limitados do R^n, S_o um subconjunto fechado do R^n, $S_o \subset S_1 \subset S$, f uma aplicação contínua de S em R^n. Suponhamos que para um inteiro positivo m, f^m está bem definida em S_1, $\bigcup_{o \leq j \leq m} f^j(S_o) \subset S_1$ e $f^m(S_1) \subset S_o$. Então f tem um ponto fixo em S_o.

Teorema 1.3

Se as soluções de (1.2) são equiultimamente limitadas por B, então existe uma solução periódica $x(t)$ de período ω tal que $\|x(o)\| \leq B$.

Demonstração

Seja f a aplicação definida por $f(x_o) = x(\omega\,;\,o,x_o)$.
Como equiultimalimitação implica equilimitação e como o sistema (1.2) é periódico, vem pelo teorema 1.2 que as soluções são uniformemente limitadas. Logo existe $\beta(B) > o$ tal que se $t_o \in I$ e $\|x_o\| \leq B$ então $\|x(t;t_o,x_o)\| < \beta$ para todo $t \geq t_o$.
Tambem existem γ e γ' satisfazendo: se $\|x_o\| < \beta$ então $\|x(t;t_o,x_o)\| < \gamma$ para todo $t \geq t_o$ e se $\|x_o\| < \gamma$ então $\|x(t;t_o,x_o)\| < \gamma^*$ para todo $t \geq t_o$. Seja $S \subset R^n$ o conjunto dos pontos x com $\|x\| < \gamma$ então $f(S)$ está contido na bola fechada de raio γ^*.
Como as soluções são por hipótese equiultimamente limitadas, segue-se que existe um $T > o$ satisfazendo a condição: $t \geq T$ e $\|x_o\| < \beta$ então $\|x(t;o,x_o)\| < B$, e portanto, existe um inteiro positivo m tal que $\|x(m\,\omega;o,x_o)\| < B$ se $\|x_o\| < \beta$.
Consideremos a bola fechada de raio B, o S do lema 1.1 e S_1 o con -

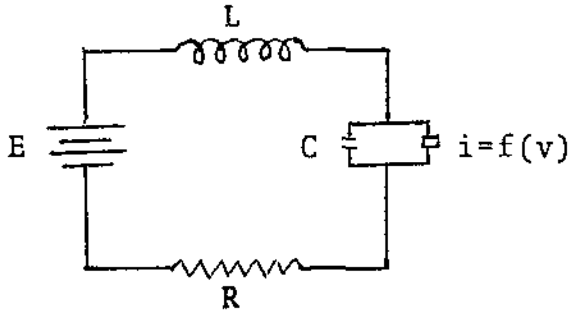
junto tal que $\| x \| < \beta$. Estes conjuntos satisfazem as hipóteses do lema 1.1. Logo, existe um ponto fixo x_0 na bola fechada de raio B, o que implica a existência de uma solução periódica de período ω.

Corolário 1.1

Se as soluções de (1.2) são uniformemente ultimamente limitadas, então existe uma solução periódica de período ω.

Exemplo 1.1

Consideremos o circuito abaixo:



O quadrado neste diagrama simboliza um diodo Esaki, com função característica f(v), representando o fluxo de corrente como uma função da voltagem v. As leis de Kirchoff nos dão a relação entre a corrente i e a voltagem v:

$$(1.3)\qquad L\,\frac{di}{dt} = E(t) - Ri - v$$

$$- C\,\frac{dv}{dt} = f(v) - i$$

onde R, L, C são constantes positivas; E é contínua positiva e periódica de período $\omega > o$.

Seja a função de Liapunov $V(i,v) = \frac{1}{2}\,(Li^2 + Cv^2)$.

Então,

$$\dot{V}_{(1.3)}(i,v) = -Ri^2 + E(t)i - vf(v) =$$
$$= - Ri\left[\left(i - \frac{E(t)}{R}\right) + vf(v)\right]$$

Supondo $vf(v) \to \infty$ para $|v| \geq v_0$, vem que $\dot{V} < o$.

Portanto, as soluções de (1.3) são uniformemente ultimamente limitadas, e pelo teorema 1.3, existe uma solução periódica de período ω.

Exemplo 1.2

Seja o sistema:

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(y) - g(x) + p(t) \end{aligned}$$

onde $f(y)$ e $g(x)$ satisfazem condições para unicidade de soluções do sistema, $p(t)$ é contínua e periódica de período ω. Suponhamos que $g(x)\ \mathrm{sgn}\ x \to \infty$ quando $|x| \to \infty$ e $f(y)\ \mathrm{sgn}\ y \to \infty$ quando $|y| \to \infty$.

Seja a função de Liapunov $V(x,y)$ definida por:

$$V(x,y) = \begin{cases} G(x) + \frac{y^2}{2}, & |x| < \infty, \quad y \geq b \\ G(x) + \frac{y^2}{2} + y - b, & x \geq a, \quad |y| \leq b \\ G(x) + \frac{y^2}{2} - 2b, & |x| \leq a, \quad y \leq -b \\ G(x) + \frac{y^2}{2} - \frac{2b}{a}x, & |x| \leq a, \quad y \leq -b \\ G(x) + \frac{y^2}{2} + 2b, & x \leq -a, \quad y \leq -b \\ G(x) + \frac{y^2}{2} - y + b, & x \leq -a, \quad |y| \leq b \end{cases}$$

onde, $G(x) = \int_0^x g(x)dx$, a e b são números que serão escolhidos.

$$\dot{V}_{(1.4)}(x,y) = \begin{cases} -yf(y) + p(t)y, & |x| \leq \infty, \quad y \geq b & (1) \\ -yf(y) + p(t)y - (f(y) + g(x) - p(t)), & x \geq a, \quad |y| \leq b & (2) \\ -yf(y) + p(t)y, & x > a, \quad y \leq -b & (3) \\ -yf(y) + p(t)y - \frac{2b}{a}y, & |x| \leq a, \quad y \leq -b & (4) \\ -yf(y) + p(t)y, & x < -a, \quad y \leq -b & (5) \\ -yf(y) + p(t)y + f(y) + g(x) - p(t), & x \leq -a, \quad |y| < b & (6) \end{cases}$$

Nos casos (1), (3) e (5), tomando b grande, fixo, temos $yf(y) > 0$ e $|f(y)| > 2 \sup|p(t)|$, e então

$$\dot{V}(x,y) = -yf(y) + p(t)y = -yf(y)\left[1 - \frac{p(t)}{f(y)}\right] < 0$$

Como $g(x)\,\mathrm{sgn}\,x \to +\infty$ quando $|x| \to \infty$, escolhendo a grande, vemos que:

$$-yf(y) + p(t)y - f(y) - g(x) + p(t) < 0 \qquad e$$

$$-yf(y) + p(t)y + f(y) + g(x) - p(t) < 0 \qquad ;$$

isso significa que $\dot{V}_{(1.4)}(x,y) < 0$ nos casos (2) e (6).

No caso (4), se $y \leq -b$, com b grande então

$$\dot{V}_{(1.4)}(x,y) = -yf(y) + p(t)y - \frac{2by}{a} = -yf(y)\left[1 - \frac{p(t)}{f(y)} - \frac{2b}{af(y)}\right] 0$$

Portanto, $V(x,y)$ satisfaz as hipóteses do teorema 1.1 e do corolário 1.1. Consequentemente existe uma solução periódica de ω.

Exemplo 1.3

Consideremos a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = R(x,\dot{x},t)$$

Fazendo $y = \dot{x} + F(x)$, onde $F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi$, obtemos o sistema:

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) + R(x,y,t) \end{aligned}$$

Suponhamos que as funções $f(x)$, $g(x)$ e $R(x,y,t)$ são contínuas e satisfazem as condições exigidas para unicidade de soluções do sistema, $R(x,y,t-1) = R(x,y,t)$.

Suponhamos também que existam constantes $L > H > 0$ e $K > 0$ tais que:

1) $|R(x,y,t)| < H$, $\forall\, x,y,t$

2) $g(x)\,\mathrm{sgn}\,x \geq L$, para $|x| \geq 1$

3) $f(x) \geq K$, para $|x| \geq 1$

Seja a função de Liapunov

$$V(x,y) = y^2 - yF(x) + \frac{1}{2}F^2(x) + 2\int_0^x g(\xi)\,d\xi$$

$$\dot{V}_{(1.5)}(x,y) = -\left[y - F(x)\right]^2 f(x) - g(x)F(x) + \left[2y - F(x)\right] R(x,y,t).$$

Mostraremos que existe $h_1 > o$ tal que para $|x| > h_1$, $\dot{V}_{(1.5)}(x,y) < 0$.

Suponhamos $x > o$ (a demonstração para $x < o$ é semelhante).

Por hipótese, temos para $x \geq 1$ e $y \geq \frac{1}{2} F(x)$

$$\dot{V}_{(1.5)}(x,y) = -\left[y - F(x)\right]^2 f(x) - g(x)F(x) + \left[2y - F(x)\right] R(x,y,t) <$$
$$< -\left[y - F(x)\right]^2 K - LF(x) + |2y - F(x)| H$$

Mostremos que para x suficientemente grande, a equação

$\left[y - F(x)\right]^2 K + LF(x) - |2y - F(x)| H = o$ não tem solução real.

Se $x \geq 1$ e $y \geq \frac{1}{2} F(x)$, a equação fica:

$$\left[y - F(x)\right]^2 K + LF(x)^2 - \left[2y - F(x)\right] H = o$$

O discriminante desta equação é:

$$4\left[K^2F^2(x) + 2KHF(x) + H^2 - K^2F^2(x) - KLF(x)\right] =$$
$$4\left[KHF(x) + H^2 - KLF(x)\right] = -4K(L-H)F(x) + H^2$$

Como por hipótese $f(x) \geq K$ para $|x| \geq 1$, então $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \infty$ e portanto o discriminante é negativo.

Logo, para x suficientemente grande e $y > \frac{1}{2}F(x)$, $\dot{V}_{(1.5)}(x,y) < o$

Quando $x \geq 1$ e $y \leq \frac{1}{2}F(x)$, teremos:

$$\dot{V}_{(1.5)}(x,y) < -\left[y - F(x)\right]^2 K + LF(x) + \left[2y - F(x)\right] H$$

Como antes, mostremos que a equação:

$$\left[y - F(x)\right]^2 K + LF(x) + \left[2y - F(x)\right] H = o$$

não tem solução real para x suficientemente grande.

O discriminante desta equação é:

$4\left[H^2 - KLF(x)\right]$, pelo mesmo motivo anterior, é negativo.

Portanto, $\exists\ h_1 > o$ tal que $\dot{V}_{(1.5)}(x,y) < o$ para $|x| > h_1$

Se $|x| \leq h_1$, da expressão de $\dot{V}_{(1.5)}(x,y)$ é facil ver que existe $h_2 > o$ tal que $\dot{V}_{(1.5)}(x,y) < o$ para $|x| \leq h_1$ e $|y| > h_2$.

Como as condições do teorema 1.3 são satisfeitas, existe uma solução periódica.

CAPÍTULO II

Estabilidade de Oscilações Forçadas

Voltaremos a estudar o sistema (1.3), só que agora mostraremos que o mesmo é uniformemente assintoticamente estável. Também trabalharemos um pouco com o sistema

$$\frac{dx}{dt} = y - k\left[F(x) - P(t)\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = -g(x)$$

Primeiramente veremos que é uniformemente ultimamente limitado e acrescentaremos condições para que seja uniformemente assintoticamente estável.

Consideremos o sistema de equações diferenciais:

$$(2.1) \qquad \frac{dx}{dt} = F(t,x)$$

No estudo do comportamento de um par de soluções, é natural introduzirmos o sistema produto

$$(2.2) \qquad \dot{x} = F(t,x) \quad , \quad \dot{y} = F(t,y)$$

Suponhamos que $F(t,x)$ seja contínua em IxR^n, $I = [o,\infty)$.

Definição 2.1

O sistema (2.1) é uniformemente estável em relação a (∞, ∞) se para todo $\varepsilon > o$ e todo $t_o \geq o$, existe um $\delta(\varepsilon) > o$ tal que se $\|x_o - x_o'\| < \delta(\varepsilon)$, então
$\|x(t;t_o,x_o) - x(t;t_o,x_o')\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_o$

Definição 2.2

O sistema (2.1) é quase uniformemente assintoticamente estável em relação a (∞, ∞), se para todo $\varepsilon > o$ e todo $\alpha > o$, existe um $T(\varepsilon, \alpha) > o$ tal que se $\|x_o - x_o'\| < \alpha$ então
$\|x(t;t_o,x_o) - x(t;t_o,x_o')\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_o + T(\varepsilon, \alpha)$.

Definição 2.3

O sistema (2.1) é uniformemente assintoticamente estável em relação a (∞ , ∞) se as condições das definições 2.1 e 2.2 são satisfeitas.

Teorema 2.1

Suponhamos que exista uma função de Liapunov $V(t,x,y)$ definida em $o \leq t < \infty$, $\|x - y\| \leq H$, $H > o$, de $IxR^n xR^n$ e satisfazendo as seguintes condições:

(i) $a(\|x - y\|) \leq V(t,x,y) \leq b(\|x-y\|)$, onde $a(r)$ e $b(r)$ são contínuas, crescentes e positivas,

(ii) $\dot{V}_{(2.1)}(t,x,y) \leq o$ no interior do domínio.

Então, o sistema (2.1) é uniformemente estável em relação a (∞ , ∞).

Demonstração

Mostraremos inicialmente que toda solução de (2.1) existe no futuro. Suponhamos que uma solução $x(t;t_o,x_o)$ de (2.1) satisfaz $\|x(t;t_o,x_o)\| \to \infty$ quando $t \to \sigma - o$, onde $t_o < \sigma < \infty$.
Seja $x(t;\sigma;x_o')$ uma solução de (2.1) passando por (σ, x_o').
Então existe um intervalo $[\sigma-h, \sigma+h]$, $h > o$ no qual esta solução está definida. Seja $\varepsilon > o$, $\varepsilon < H$ e δ tal que $b(\delta)$ a (ε).
Considerando a função $V(t, x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções de (2.1), se $\|x(\sigma-h) - y(\sigma-h)\| <$ então, por (1) e (ii), $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ para $t \in [\sigma-h, \sigma+h]$.
Seja N o menor inteiro tal que $x(\sigma-h, t_o,x_o) - x(\sigma-h,\sigma,x_o')\|/\delta < N$
Subdividindo o segmento de reta que une $x(\sigma-h;t_o,x_o)$ a $x(\sigma-h;\sigma,x_o')$ em N partes, vemos que
$\|x(t;t_o,x_o) - x(t,\sigma,x_o')\| < \varepsilon N$ para $t \in [\sigma-h, \sigma+h]$. Para $t \in [\sigma-h, \sigma+h]$, $x(t;\sigma,x_o)$ é limitada e isto nos dá uma contradição. Logo, toda solução existe no futuro.

Dado $\varepsilon > o$, $\varepsilon < H$, escolhemos $\delta > o$ tal que $b(\delta) < a(\varepsilon)$.
Suponhamos que $\|x_o - x_o'\| < \delta$ para todo $t_o \geq o$ e que

$\|x(t;t_o,x_o) - x(t;t_o,x_o')\| = \varepsilon$ para algum $t \geq t_o$.

Denotemos $x(t;t_o,x_o') \equiv y(t)$

De (i) e (ii) vem que $a(\varepsilon) \leq V(t,x,y)$ e $V(t,x,y,) \leq$ $\leq V(t_o,x_o,y_o) \leq b(\delta)$. O que é uma contradição.

Teorema 2.2

Suponhamos que exista uma função de Liapunov $V(t,x,y)$ definida em $t\varepsilon I$, $\|x - y\| < H$, $H > o$ de $IxR^n \times R^n$ e satisfazendo as seguintes condições:

(i) $a(\|x - y\|) \leq V(t,x,y) \leq b(\|x - y\|)$ onde $a(r)$ e $b(r)$ são contínuas, positivas e crescentes,

(ii) $V'_{(2.2)}(t,x,y) \leq -c(\|x - y\|)$ onde $c(r)$ é contínua, positiva e definida.

Então, o sistema (2.1) é uniformemente assintoticamente estável em relação a (∞, ∞)

Demonstração

Se V não depende de t, temos $V'_{(2.2)}(x,y) \leq -d(\|x-y\|)$, $d > o$ se $x \neq y$ e $V'_{(2.2)}(x,y) = o$ quando $x=y$.

O teorema 2.1 garante que o sistema é uniformemente estável em relação a (∞, ∞). Logo, para todo $\varepsilon > o$, existe $\delta(\varepsilon) > o$ tal que $\|x_o - x'_o\| < \delta(\varepsilon)$ então

$\|x(t;t_o,x_o) - x(t;t_o,x'_o)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_o$; portanto, basta mostrar que existe T tal que $\|x_o - x'_o\| < \delta(\varepsilon)$ então

$\|x(t;t_o,x_o) - x(t;t_o,x'_o)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_o + T$.

Existe um número $-K$, dependendo somente de δ, tal que enquanto $\|x - y\| > \delta$, $V_{(2.2)}(t,x,y) \leq -c(\|x - y\|) \leq -K$. Logo, $v(t,x,y) - v(t_o,x_o,y_o) \leq -K(t - t_o)$. Tambem temos,

$V(t,x,y) \leq V(t_o,x_o,y_o) \leq b(\delta)$ e $V(t_o x_o,y_o) \geq a(\delta)$

Se $t > t_o + T$ onde $T = \dfrac{b(\delta) - a(\varepsilon)}{K}$,

$V(t,x,y) < V(t_o,x_o,y_o) - K(t - t_o) < b(\delta) - Kt_o - b(\delta) + a(\varepsilon) + Kt_o = a(\varepsilon)$. Portanto,

$V(t,x,y) < a(\varepsilon)$ para $t > t_o + T$. Logo, $\|x - y\| < \varepsilon$ para $t > t_o + T$

Exemplo 2.1

Consideremos o sistema:

$$(2.3)\quad \begin{aligned} L\frac{di}{dt} &= E(t) - Ri - v \\ -C\frac{dv}{dt} &= f(v) - i, \end{aligned}$$ onde R, L, C são constantes positivas,

E é contínua e de período $\omega > o$, f é monótona crescente e $vf(v) \to \infty$ para $|v| \geq v_o$.

Seja o sistema produto,

$$(2.4)\quad \begin{aligned} L\frac{di}{dt} &= E(t) - Ri - v & \qquad L\frac{dI}{dt} &= E(t) - RI - V \\ -C\frac{dv}{dt} &= f(v) - i & \qquad -C\frac{dV}{dt} &= f(V) - I \end{aligned}$$

A função de Liapunov

$V(\ (i,v),\ (I,V)\ ) = \left[L(\ i - I)^2 - C(\ v - V)^2\right] / 2$, tem derivada

$$\dot{V}_{(2.4)} = -R(i - I)^2 - (v - V)\ \ (f(v) - f(V)\ \ ) =$$
$$= -\left[R(i - I)^2 - (v - V)\ \ (f(v) - f(V)\right])$$

Pelo teorema 2.2, o sistema (2.3) é uniformemente assintoticamente estável.

Exemplo 2.2

Consideremos o sistema:

$$(2.5)\quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - F(x) \\ \frac{dy}{dt} &= -ax + p(t) \end{aligned}$$

onde p(t) é contínua de período $\omega > o$; $a > o$ e existe $K > o$ tal que $f(x) \geq K$ para todo x e $F(x) = \int_0^x f(\ \xi\ )d\ \xi$.

Seja o sistema produto

$$(2.6)\quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - F(x) & \qquad \frac{dx}{dt} &= Y - F(X) \\ \frac{dy}{dt} &= -ax + p(t) & \qquad \frac{dY}{dt} &= aX + p(t) \end{aligned}$$

A função de Liapunov

$v((\ (x,y),\ (X,Y)\ ) = a(x - X)^2 + (y - Y)^2$, tem derivada

$$\dot{V}_{(2.6)} = -2a(x - X)\ \ (F(x) - F(X)\ \ )$$

$= -2a(x - X)^2 f(\bar{x}) < o$

Portanto, o sistema (2.5) é uniformente assintoticamente estável.

Exemplo 2.3

Consideremos a equação

(2.7) $\ddot{x} - kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t)$, onde

(1) f, g e p são contínuas, g satisfaz uma condição de Lipschitz na vizinhança de cada ponto x e p(t) tem período $\omega > o$;

(2) existem números positivos a, α, β tais que $f(x) \geq \alpha$ para $|x| \geq a$, $g(x) \geq \beta$ para $x \geq a$, $g(x) \leq \beta$ para $x \leq -a$;

(3) a função $P(t) = \int_0^t p(\xi)\, d\xi$ é limitada para todo t.

Nas condições acima, segue-se que a pode ser suposto suficientemente grande para satisfazer a condição:

(4) existe um número positivo γ tal que:

$F(x) - E \geq \gamma$ para $x \geq a$, $F(x) + E \leq -\gamma$ para $x \leq -a$,

$G(x) > o$ para $|x| \geq a$, onde $F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$,

$G(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi$ e

$E > o$ é tal que $|P(t)| < E$, para todo t.

A equação (2.7) é equivalente ao sistema:

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - k\left[F(x) - P(t)\right] \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x) \end{aligned}$$

De agora em diante suporemos $k \geq 1$.

Sejam λ_0 tal que $|F| + E \leq \lambda_0$ para $|x| \leq a$ e λ_1 uma constante que será determinada a seguir.

Consideremos o retângulo R, definido pelas desigualdades

$|x| \leq a, \quad |y| \leq k\lambda_0 + \lambda_1$

Mostremos agora que quando t cresce, toda solução do sistema (2.8), estará no interior do retângulo R.

Lema 2.1

$= - 2a(x - X)^2 f(\tilde{x}) < o$

Portanto, o sistema (2.5) é uniformemente assintoticamente estável.

Exemplo 2.3

Consideremos a equação

(2.7) $\ddot{x} - kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t)$, onde

(1) f, g e p são contínuas, g satisfaz uma condição de Lipschitz na vizinhança de cada ponto x e p(t) tem período $\omega > o$;

(2) existem números positivos a, α, β tais que $f(x) \geq \alpha$ para $|x| \geq a$, $g(x) \geq \beta$ para $x \geq a$, $g(x) \leq \beta$ para $x \leq -a$;

(3) a função $P(t) = \int_0^t p(\xi)\, d\xi$ é limitada para todo t.

Nas condições acima, segue-se que a pode ser suposto suficientemente grande para satisfazer a condição:

(4) existe um número positivo γ tal que:

$F(x) - E \geq \gamma$ para $x \geq a$, $F(x) + E \leq -\gamma$ para $x \leq -a$,

$G(x) > o$ para $|x| \geq a$, onde $F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$,

$G(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi$ e

$E > o$ é tal que $|P(t)| < E$, para todo t.

A equação (2.7) é equivalente ao sistema:

$$
(2.8) \quad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y - k\left[F(x) - P(t)\right] \\
\frac{dy}{dt} &= - g(x)
\end{aligned}
$$

De agora em diante suporemos $k \geq 1$.

Sejam λ_0 tal que $|F| + E \leq \lambda_0$ para $|x| \leq a$ e λ_1 uma constante que será determinada a seguir.

Consideremos o retângulo R, definido pelas desigualdades

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq k\,\lambda_0 + \lambda_1$$

Mostremos agora que quando t cresce, toda solução do sistema (2.8), estará no interior do retângulo R.

Lema 2.1

Seja $|x_0| \leq a$ e $|y_0| > k\lambda_0 + \lambda_1$. Então a solução passando por (x_0, y_0) quando $t = t_0$, entrará no retângulo quando t cresce ou deixará a faixa $|x| \leq a$.

Demonstração:

Dividindo a segunda equação pela primeira do sistema (2.8), iremos obter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g(x)}{y - k\,|F(x) - P(t)|}$$

na faixa $|x| \leq a$, temos $|F(x) - E| \leq \lambda_0$, logo, dentro desta faixa mas fora de R, temos:

$$|y - k\left[F(x) - P(t)\right]| > |y| - k|F(x) - E| > k\lambda_0 + \lambda_1 - k\lambda_0 = \lambda_1$$

Mas como $|x| \leq a$, vem que $|g(x)| \leq \delta$, donde

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < \frac{\delta}{\lambda}$$

Logo, quando t cresce, a solução em discussão deixará a faixa $|x| \leq a$ se a solução não entrar no retângulo R.

Observação:

O tempo necessário para a solução cortar a faixa $|x| \leq a$, fora do retângulo R, tem um limitante superior τ_1. Com efeito, suponhamos que a solução passe pela faixa $|x| \leq a$, acima de R.

Então a primeira equação do sistema fica:

$$dx = \left[y - k(F(x) - P(t)\right] dt > \lambda_1\, dt$$

Consequentemente,

$2a > \lambda_1 (t_1 - t_2)$, onde t_1 e t_2 denotam o tempo em que a solução em discussão intercepta as retas $x = \pm a$.

Lema 2.2

Toda solução começando fora da faixa $|x| \leq a$, alcança-a num tempo finito.

Demonstração

Consideremos a função $V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x)$

$$\dot{V}_{(2.8)} = -kg(x) \; (F(x) - P(t))$$

Escolhemos um ponto (x_0, y_0) fora da faixa $|x| \leq a$, supo -

nhamos $x_o > a$. Consideremos a solução $x(t)$, $y(t)$ com condição inicial $x = x_o$, $y = yo$ para $t = t_o$. Enquanto esta solução estiver fora da faixa $|x| \leq a$, as desigualdades $g(x) \geq$ e $F(x) - P(t) \geq F(x) - E \geq \gamma$ são satisfeitas ao longo dessa solução.

Logo, as desigualdades:

$\dot{V}_{(2.8)} \leq - k\, \beta\, \gamma$ e $V > o$, ocorrem ao longo desta solução fora da faixa $|x| \leq a$.

Consequentemente, a solução deixa o semiplano $x \geq a$ num tempo $t = \tau$ e $\tau - t_o < \frac{1}{K\, \beta\, \gamma} \; V(x_o, y_o)$

Lema 2.3

Se λ_1 é suficientemente grande, então toda solução do sistema (2.8) entrará no retângulo R quando t cresce.

Demonstração

Seja $x(t)$, $y(t)$ uma solução do sistema (2.8) e suponhamos que ela permanece fora do retângulo R para todo t. Segue-se do lema 2.1 e 2.2 que esta solução interceptará cada uma das retas $x = \pm a$, um número infinito de vezes.

Sejam t_1 e t_2 dois tempos sucessivos da intersecção da solução com a reta $x = - a$. Mostraremos que existe um q tal que

$$y^2(t_1) - y^2(t_2) \geq kq.$$

Por definição, suponhamos $y(t_1) > o$. Quando t cresce (a partir de t_1), a solução em discussão entrará na faixa $|x| \leq a$ e para $t = \theta_1$ interceptará a reta $x = a$ e entrará no semiplano $x > a$. Segue-se do lema 2.2 que num tempo maior, a solução voltará a interceptar a reta $x = a$ para $t = \theta > \theta$; $y(\theta_2) < o$ porque $x = a$ quando $\dot{x} > o$ e $y > \lambda_o\, k + \lambda_1$. Consequentemente, a solução interceptará a reta $x = -a$ quando $t = \theta_3$ e interceptará esta reta quando $t = t_2 > \theta_3$.

O incremento $\Delta_1 V$ ao longo da solução, quando t varia de t_1 a θ_1 é

$$|\Delta_1 V| = K \left| \int_{t_1}^{\theta_1} g(x) \; (F(x) \; - \; P(t)\,)\, dt \right| = k \left| \int_{-a}^{a} (F(x) - P(t))\, \frac{dy}{dx}\, dx \right| \leq$$

$$\leq K \int_{-a}^{a} (|F| \; + \; E) \left| \frac{dy}{dx} \right| dx \leq 2ak\lambda_{\bullet} \frac{\delta}{\lambda_1},$$ decorrendo do fato de que

$\dot{V}_{(2.3)} = - kg(x) [F(x) - P(t)]$

Esta estimativa tambem é válida para o incremento $\nabla_3 V$ quando $\Theta_2 \leqslant t \leqslant \Theta_3$. Logo, o incremento total de V nestes dois intervalos satisfaz a desigualdade:

$$\Delta_1 V + \Delta_3 V \leqslant \frac{4\ a\ k\ \lambda_0\ \delta}{\lambda_1}$$

Por outro lado, no intervalo de tempo entre Θ_1 e Θ_2, a função V é decrescente e y decresce ao mesmo tempo. Seja $\Delta_2 V$ o incremento de V ao longo da solução no intervalo $\Theta_1 \leqslant t \leqslant \Theta_2$

$$\Delta_2 V = - k \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} g\ g(x) \quad (F(x) - P(t)\ )\ dt = k \int_{y(\Theta_1)}^{y(\Theta_2)} (g\ (x) - P(t)\ )\ dy$$

Como $x \geqslant a$ para $\Theta_1 \leqslant t \leqslant \Theta_2$ e consequentemente $F(x) - E \geqslant \gamma$, está claro que $y(\Theta_1) > \lambda_1$ e $y(\Theta_2) <- \lambda_1$ pois os lados verticais do retângulo são maiores que $2\lambda_1$.

Logo, $\Delta_2 V < - 2\ k\ \lambda_1 \gamma$. O mesmo acontece com a estimativa do incremento $\Delta_4 V$ no intervalo $\Theta_3 \leqslant t \leqslant t_2$.

Então, $\Delta_2 V + \Delta_4 V < - 4k\ \lambda_1 \gamma$.

Seja ΔV o incremento total de V, ao longo da solução, no intervalo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,

$$\Delta V \leqslant \frac{4\ a\ k\ \lambda_0 \delta}{\lambda_1} - 4\ k\lambda_1 \gamma \quad \text{ou}$$

$$V(t_2) - V(t_1) \leqslant 4\ k\ (\ - \lambda_1 \gamma + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} a\ \delta)$$

$$V(t_1) - V(t_2) \geqslant 4\ k\ (\ \lambda_1 \gamma - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} a\ \delta)$$

Escolhemos $\lambda_1 > \left(\frac{\lambda_0 a\ \delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}$ e fazendo

$$q = 8\ [\ \lambda_1 \gamma - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} a\ \delta\ ] > 0$$

obtemos

$$y^2(t_1) - y^2(t_2) = 2\ (\ V(t_1) - V(t_2)\ ) \geqslant 8\ k\ (\lambda_1 \gamma - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} a\ \delta) \geqslant k\ q$$

Mas então está claro que após um número suficientemente grande de intersecções com a reta $x = -a$, a solução em discussão entrará no retângulo R. Isto contradiz a hipótese de que nossa solução permaneceria fora do retângulo R para todo t.

Este lema implica que o sistema (2.8) é uniformemente ultimamente limitado.

Teorema 2.3

Suponhamos que as condições (1) a (3) do presente exemplo sejam satisfeitas e seja $k > 1$. Então existe um $M > o$ tal que toda solução de (2.8) entrará na região $|x| < M$, $|y| < M(1 + k)$ quando t cresce, e permanecerá lá.

Demonstração

Se a solução permanece no retângulo R, então o teorema está provado. Pelo lema 2.3, toda solução atingirá este retângulo. Suponhamos que ela também deixa o retângulo, digamos em $x = a$, num tempo $t = t_o$. Em tal ponto, $\frac{dx}{dt}$ é igual a $\dot{x}_o$.

A trajetória torna a voltar num tempo t, em tal ponto $\frac{dx}{dt} = o$

Integrando a equação (2.7) de t_o a t, obtemos:

$$- \dot{x}_o + k(F(x) - F(a)) + \beta (t - t_o) \leq$$

$$\leq k(P(t) - P(t_o)) \leq 2kE \qquad \text{pois,}$$

$g(x) > \beta$ para $x \geq a$ e $|P(t)| \leq E$.

Consequentemente, $k(F(x) - F(a)) \leq 2kE + \dot{x}_o$.

Segue-se da primeira equação do sistema (2.8) que em $x = a$, o maior valor possivel de $\dot{x}_o$ é da forma $kC + D < k(C + D)$ onde C e D são constantes positivas independentes de k,

$C = \lambda_o - 2a > E > o$, $D = \lambda_1 + E > o$.

Consequentemente, para $x \geq a$, a desigualdade acima fica:

$F(x) \leq F(a) + 2E + C + D = K > o$

Como F cresce monotonicamente quando $x \geq a$, a desigualdade nos dá $x \leq \varepsilon$ onde $\varepsilon \geq a$.

Na faixa $|x| \leq \varepsilon$, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{|-g(x)|}{|y - k(f(x) - P(t))|} \leq \frac{|-g(x)|}{|y| - k(K + E)} < 1 \quad \text{para}$$

y suficientemente grande.
O que contradiz o lema 2.3

Teorema 2.4

Suponhamos que as condições do teorema anterior são satisfeitas. Se além disso, $f(x) \geqslant A > o$ para todo x, então para t suficientemente grande, a desigualdade $\left|\frac{dx}{dt}\right| < N$, onde N é uma constante independente de k e suficientemente grande, é satisfeita para todas as soluções.

Demonstração

Para todo $\varepsilon > o$, arbitrário e para t suficientemente grande, é impossível $\dot{x}(t) > \varepsilon$, porque $|x(t)|$ é limitada. Então, ou $\dot{x}(t) \to o$ para $t \to \infty$ e o teorema está provado, ou $\dot{x}(t)$ oscila infinitamente quando t cresce.

Se t_1 é um dos pontos de máximo de $\dot{x}(t_1)$ então $\ddot{x}(t_1) = o$.
A equação (2.7) nos dá.

$$\dot{x}(t_1) = \frac{kp(t_1) - g(x(t_1))}{kf(x(t_1)}$$

Pelo teorema anterior $|x|$ é limitado por uma constante que não depende de k, então $|g(x)| < L$, onde L é também independente de k.
Como $k > 1$, temos:

$$\dot{x}(t_1) < \frac{k \max p(t) + L}{k\ A} < \frac{k(\max p(t) + L)}{k\ A} = K$$ e K é independente de k.

Logo, $\dot{x}(t)$ tem um limitante superior fixo, independente de k, para todos os seus pontos de máximo e, consequentemente, para t suficientemente grande. Semelhante argumento acontece para o mínimo.

Para a demonstração do próximo teorema, precisaremos dos seguintes resultados.

Consideremos o sistema $\dot{x} = f(t;x)$ onde f é periódica do período $\omega > o$.
Seja $x(t;t_o,x_o)$ uma solução com condições iniciais $t = t_o$, $x = x_o$. Suponhamos que o ponto x_o do hiperplano $t = o$ é tal que a

solução $x(t;o,x_o)$ pode ser estendida para $o \leq t \leq \omega$. Associando o ponto $x(\omega;o,x_o)$ com o ponto x_o, obtemos uma transformação T do hiperplano $t = o$, através do qual as soluções estendidas por múltiplos inteiro do período, passam pelo hiperplano $t = 0$.

Segue-se da unicidade e da continuidade das soluções que o conjunto de todos os pontos onde T está definida é aberto e que neste conjunto T é um homeomorfismo. Também, da ω - periodicidade da função $f(t,x)$ vem que se $T(x_o) = x_o$ então a solução $x(t;o,x_o)$ é ω -periódica e inversamente se $x(t+\omega;o,x_o) = x(t;o,x_o)$ então $T(x_o) = x_o$.

Quando o sistema acima é uniformemente ultimamente limitado, existe uma bola de centro na origem e raio h, digamos $B_h(o)$ tal que para toda bola $B_a(o)$ existe um número natural $k(a)$, tal que para todo $k \geq k(a)_a$, $T^k(B_a(o)) \subset B_h(o)$.

Seja $I = \bigcap_{l=o}^{\infty} T^{lk(a)}(B_a(o))$, temos que $I \neq \emptyset$, independente de $B_a(o)$, fechado, limitado e invariante por T.

Convém observarmos que se o sistema acima é uniformemente ultimamente limitado e I se degenera num ponto, então o sistema é uniformemente assintoticamente estável.

Suponhamos agora que para a equação (2.7) as seguintes condições são satisfeitas:

(1) as funções f, g e p são contínuas; g satisfaz uma condição de Lipschitz na vizinhança de cada ponto x e $p(t)$ tem período ω;

(2) existe uma constante positiva α tal que $f(x) \geq \alpha$ para todo x;

(3) a função $g(x)$ é duas vezes continuamente diferenciável no intervalo $|x| \leq M$, e M é definida no teorema 2.3. Quando $|x| \leq M$, temos $g'(x) > o$. Existe um $\beta > o$ tal que $g(x) \operatorname{sgn} x \geq \beta$ para $|x| \geq M$.

(4) existe um E positivo, tal que $|p(t)| < E$, $P(t) = \int_o^t p(\xi)\, d\xi| \leq E$, para todo t.

<u>Teorema 2.5</u>

Suponhamos que as condições (1) a (4) acima são satisfeitas então para todo $k \geq k_o$, onde $k_o = \frac{1}{2} N \max_{|x| \leq M} \frac{g''(x)}{f(x)g'(x)}$, e as constantes M e N são definidas nos teoremas 2.3 e 2.4, o sistema (2.8) é uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração

Fixemos $k > k_o$. Como já sabemos que o sistema (2.8) é uniformemente ultimamente limitado, vamos mostrar que o conjunto I definido anteriormente se degenera num ponto.

Suponhamos que não, isto é, que I contenha dois pontos distintos, separados por uma distância d >o. Tomemos os dois pontos (x_{10}, y_{10}) e (x_{20}, y_{20}) de I e unamo-los por um arco suave γ que não se intercepta e que esteja inteiramente contido em U, onde U é uma vizinhança suficientemente pequena de I tal que as desigualdades $|x| \leq M$, $\left|\frac{dx}{dt}\right| = | y - k(F(x) - P(t))| < N$ são satisfeitas para toda solução passando por U quando t = o

Sejam $x = \Phi(u)$ e $y = \psi(u)$, $o \leq u \leq 1$ as equações paramétricas de γ tais que $x_{10} = \Phi(o)$, $y_{10} = \psi(o)$, $x_{20} = \Phi(1)$, $y_{20} = \psi(1)$; Não é difícil ver que a curva pode ser escolhida de modo que exista uma constante Γ que não depende da escolha dos pontos de I, nem da particular escolha da curva γ e que satisfaça a desigualdade $(\phi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 \leq \Gamma$ para todos os pontos em I e para todo $u \in [o, 1]$.

Estendemos a solução $(x(t,u), y(t,u))$ do sistema (2.8) através de todos os pontos do arco γ tal que $x(o,u) = \Phi(u)$ e $y(o,u) = \psi(u)$. Como o arco γ está em U e pela definição de U, temos:

$|x(t,u)| < M$, $|\dot{x}(t,u)| = |y(t,u) - k(F(x) - P(t))| < N$

Seja C(t), $(t \geq o)$ a curva definida pelas equações paramétricas $x = x(t,u)$, $y = y(t,u)$, $o \leq u \leq 1$.

Como a distância entre os pontos $(x(t,o), y(t,o))$ e $(x(t,1), y(t,1))$ é menor ou igual ao comprimento da curva C(t), temos:

$$(2.9)\qquad \left[(x(t,o) - x(t,1))^2 + (y(t,o) - y(t,1))^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \int_o^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial u}x(t,u)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}(t,u)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} du \quad .$$

Fazendo: $v_1(t,u) = \frac{\partial x}{\partial u}(t,u)$, $v_2(t,u) = \frac{\partial y}{\partial u}(t,u)$, vemos que as funções $v_1(t,u)$ e $v_2(t,u)$ satisfazem o seguinte sistema linear de equações diferenciais:

$$(2.10)\qquad \frac{dv_1}{dt} = v_2 - kf(x(t,u)v_1, \quad \frac{dv_2}{dt} = -g'(x(t,u))\, v_1$$

Consideremos a função:

$$W(t,u) = g'(x(t,u))v_1^2 + v_2^2 - 2\,\eta v_1 v_2 \qquad (t \geq o \ , \ o \leq u \leq 1)$$

W é uma forma quadrática nas variáveis v_1 e v_2 e tem coeficientes dependentes de t e de u. Escolhamos uma constante η tal que a forma W seja positiva definida uniformemente em relação a $|x| \leq M$. Mas para que isto seja feito, é suficiente escolher o número η satisfazendo a desigualdade $\eta^2 < \min_{|x| \leq M} g'(x)$

Com o auxílio dos sistemas (2.8) e (2.10) obtemos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (g''(x)\dot{x} - 2kg'(x)\, f(x) + 2\,\eta g'(x))\, v_1^2 -$$

$$- 2\eta\, v_2^2 + 2\, k\eta\, f(x)v_1v_2$$

O arco γ está contido em U e k é fixo tal que $k > k_o$ e valem ainda $|x| \leq M$, $|\dot{x}| \leq N$, para todo $t \geq o$. Consequentemente, temos a desigualdade para todo $t \geq o$:

$g''(x)\,\dot{x} - 2\,k\,g'(x)f(x) \leq -\mu < o$,

onde μ é alguma constante suficientemente pequena. Seja $\chi > o$ tal que $g'(x) < \chi$ e $f(x) < \chi$ para $|x| \leq M$. Então obtemos:

$$\frac{\partial W}{\partial t} \leq (-\mu + 2\eta\,\chi)\, v_1^2 + 2\, k\eta\, f(x)v_1v_2 - 2\eta\, v_2^2$$

Para η suficientemente pequeno a forma da direita da de sigualdade acima é negativa definida, Fixemos η tal que o lado direito da desigualdade acima seja negativa definida e tal que $\eta^2 < \min_{|x|\leq M} g'(x)$. Então a função W será uma forma que é uniformemente positiva definida para $|x| \leq M$.

Então existe um $\lambda > o$ tal que a desigualdade $\frac{\partial W}{\partial t}(t,u) \leq -\lambda\, W(t,u)$ para todo $t \geq o$. Logo,

$$W(t,u) \leq W(o,u)\, e^{-\lambda t}, \quad t \geq o.$$

Da forma da função W e da desigualdade

$(\Phi'(u))^2 - (\psi'(u))^2 = v_1^2(o,u) + v_2^2(o,u) < \Gamma$, segue-se que existe um número $\bar{W}$ que não depende nem da escolha dos pontos de I, nem da curva γ e tal que

$$W(t,u) \leq \bar{W} e^{-\lambda t}$$

Como para $t \geq o$, a função $W(t,u)$ é uma forma uniformemente positiva definida nas variáveis v_1 e v_2, a última desigualdade implica a existência de um τ, tal que para $t \geq \tau$ e toda escolha de dois pontos de I, a desigualdade

$$\left[v_1^2(t,u) + v_2^2(t,u)\right]^{\frac{1}{2}} < \frac{d}{2} \text{ é verdadeira.}$$

Agora escolhamos um número natural n bem grande, tal que $n\,\omega > \tau$. Segue-se da desigualdade (2.9) que

$$\left[(x(n\,\omega, o) - x(n\,\omega, 1))^2 + (y(n\,\omega, o) - y(n\,\omega, 1))^2\right]^{\frac{1}{2}} < \frac{d}{2}$$

Como (x_{10}, y_{10}) e (x_{20}, y_{20}) são dois pontos arbitrários de I e o conjunto I é invariante pela transformação T^n, os pontos $(x(n\,\omega,o), y(n\,\omega,o))$ e $(x(n\,\omega, 1), y(n\,\omega,1))$ são pontos de I que estão a uma distância menor que $\frac{d}{2}$.

Mas, pela definição o conjunto I contém dois pontos separados por uma distância d. O que é uma contradição.

CAPÍTULO III

Existência e Não Existência de Oscilações Livres

Vamos procurar condições sobre os parâmetros do sistema:

$$L\frac{di}{dt} = E - Ri - v$$

$$-C\frac{dv}{dt} = f(v) - i \quad ,$$

para que o mesmo possua uma órbita periódica.
Para finalizar, faremos um estudo da equação de Lienard e
$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = o$

Consideremos o sistema:

$$(3.1)\quad \begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = E - Ri - v = I(i,\ v) \\ -C\dfrac{dv}{dt} = f(v) - i = \dot{v}(i,v) \end{cases}$$

onde E, R, L, C, são constantes positivas e $vf(v) \geq o$, para todo v.

<u>Lema 3.1</u>

Se existe um $A > o$ tal que $xf(x) > \frac{E^2}{R}$ para $|x| > A$, então toda solução de (3.1), é limitada.

<u>Demonstração</u>

Se $W(i,v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$, então a derivada de W ao longo das soluções de (3.1) é:

$$\dot{W}_{(3.1)} = -\left[Ri\left(i - \frac{E}{R}\right) + vf(v)\right]$$

Seja $W_o = \frac{1}{2}\left[L\left(\frac{E}{R}\right)^2 + CA^2\right]$. Se $W(i,v) > W_o$ então $|i| > \frac{E}{R}$ ou $|v| > A$.

Se $|i| > \frac{E}{R}$ então $\dot{W}_{(3.1)} < o$. Quando $|i| \leq \frac{E}{R}$ e $|v| > A$, então

$$\dot{W}_{(3.1)} < -(Ri^2 - Ei + \frac{E^2}{R}) = -\left[Ri^2 - E(i - \frac{E}{R})\right] \leq -Ri^2 \leqslant o$$

Para $i = 0$ e $|v| > A$, também temos $\dot{W}_{(3.1)} < o$ na região $W(i,v) > W_o$. Como a região $W < \rho$ é limitada para todo ρ e $W(i,v) \to \infty$ quando $|i|$, $|v| \to \infty$, segue-se que toda solução de (3.1) é limitada. Nosso problema é encontrar condições sobre f e sobre os parâmetros do sistema (3.1) de maneira que as soluções se aproximem de um ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$

Para a demonstração do lema seguinte, faremos uso do princípio de invariância: Sejam V uma função de Liapunov definida num aberto G do R^n, $S = \{x \in \bar{G}, \dot{V}(x) = \hat{o}\}$ e M o maior conjunto invariante de $\dot{x} = f(x)$ em S.

Se $\gamma^+(x_o)$ é uma órbita limitada de $\dot{x} = f(x)$ que está em G então o conjunto ω limite de γ^+ pertence a M, isto é, $x(t;\, t_o,\, x_o) \to M$ quando $t \to \infty$.

Lema 3.2

Se as condições do lema 3.1 são satisfeitas e $f'(v) > o$ para todo v, então toda solução de (3.1) se aproxima do único ponto de equilíbrio.

Demonstração

É facil de ver que existe apenas um ponto de equilíbrio se $f'(v) > o$, para todo v.

Se $Q(i,v) = \frac{1}{2L} I^2 + \frac{1}{2C} V^2$, então

$$\dot{Q}_{(3.1)} = \left(-\frac{RI}{L} - \frac{V}{C},\ -\frac{I}{L} + \frac{V}{C} f'(v)\right) \cdot \left(\frac{I}{L},\ -\frac{V}{C}\right) = -\frac{RI^2}{L^2} - \frac{VI}{CL} + \frac{VI}{CL} - \frac{V^2}{C^2} f'(v)$$

portanto,

$$\dot{Q}_{(3.1)} = -\frac{RI^2}{L^2} - \frac{V^2}{C^2} f'(v) = -\left(\frac{RI^2}{L^2} + \frac{V^2}{C^2} f'(v)\right) \leqslant o$$

Pelo lema anterior, todas as soluções de (3.1) são limitadas e $\dot{Q}_{(3.1)} = o$, somente no ponto de equilíbrio. Logo, pelo princípio da invariância acima, o lema 3.2 está provado.

Faremos uso na demonstração do próximo teorema, do seguinte resultado.

Teorema de Poincaré - Bendixson: Se γ^+ é uma semiórbita positiva limitada e $\omega(\gamma^+)$ não contém nenhum ponto crítico, então:

(i) $\gamma^+ = \omega(\gamma^+)$

ou

(ii) $\omega(\gamma^+) = \bar{\gamma}^+ - \gamma^+$

Em cada caso, o conjunto ω-limite é uma órbita periódica e no último caso, ela é conhecida como círculo limite.

<u>Teorema 3.1</u>

Se $\; -f'(v) < \frac{1}{R}, \quad \max_v\left(-\frac{f'(v)}{C}\right) > \frac{R}{L}$, então existe um valor de E tal que o sistema (3.1) tem pelo menos uma órbita periódica.

<u>Demonstração</u>

Escolhamos E tal que o ponto de equilíbrio (i_o, v_o) seja tal que

$$-\frac{f'(v_o)}{C} > \frac{R}{L};$$

Pelo lema 3.1, existe um círculo Ω com centro em (o,o) tal que as trajetórias de (3.1) cortam Ω de fôra para dentro. Se $i = i_o + u$ e $v = v_o + w$, $x = (u, w)$, então

$$(3.2) \quad \dot{x} = Ax + \ldots, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{f'(v_o)}{C} \end{pmatrix} \quad \text{onde}$$

.... representam os termos em x de ordem superior.

As hipóteses do teorema implicam que os autovalores de A tem parte real positiva. Logo as soluções de (3.2) se aproximam de (i_o, v_o) quando $t \to -\infty$. Consequentemente, existe uma semi-órbita positiva de (3.1) que está em Ω'. Pelo teorema de Poincaré - Bendixson, existe uma órbita periódica.

Observemos que o sistema (3.1) pode ser escrito como:

$$L\frac{di}{dt} = \frac{\partial P}{\partial i}$$

$$-C\frac{dv}{dt} = \frac{\partial P}{\partial v}, \qquad \text{onde}$$

$$P(i,v) = Ei - \frac{Ri^2}{2} - iv + \int_o^v f(\xi)\, d\xi = -\frac{I^2}{2R} + U(v) \quad \text{e}$$

$$U(v) = \frac{(E-v)^2}{2R} + \int_o^v f(\xi)\, d\xi$$

Teorema 3.2

Se existe um $A \geqslant o$ tal que $vf(v) \geqslant o$, $vf(v) \geqslant \frac{E^2}{R}$ para $|v| > A$ e $\frac{f'(v)}{C} + \frac{R}{L} > o$ para todo v, então toda solução de (3.1) se aproxima de um ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$.

Demonstração

Consideremos a função $S = Q + \lambda P$, onde Q é definida no lema 3.2, P é definida acima e $-\frac{f'(v)}{C} < \lambda < \frac{R}{L}$

Como $\frac{\partial P}{\partial i} = I$ e $\frac{\partial P}{\partial v} = V$, vem que:

$$\dot{P}_{(3.1)} = \frac{I^2}{L} - \frac{V^2}{C} \quad \text{e}$$

$$\dot{S}_{(3.1)} = \dot{Q}_{(3.1)} + \lambda\dot{P}_{(3.1)} = -\left(\frac{RI^2}{L^2} + \frac{f'(v)V^2}{C^2}\right) + \lambda\frac{LI^2}{L^2} + \lambda\frac{CV^2}{C^2}$$

$$\dot{S}_{(3.1)} = -\left[\frac{(R-\lambda L)I^2}{L^2} + \frac{(f'(v)+\lambda C)V^2}{C^2}\right] \leqslant o$$ por causa da escolha de λ.

Além disso, $\dot{S}_{(3.1)} = o$, se e somente se $I = o$ e $V = o$, isto é, somente nos pontos de equilíbrio de (3.1). Como as soluções de (3.1) são limitadas, segue-se a conclusão do teorema.

Vamos mostrar agora que a equação de Lienard

(3.3) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = o$

possui uma única solução periódica e esta é estável.

Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $f(x)$ é par, $g(x)$ é impar, $xg(x) > o$ para todo $x \neq o$ e $f(o) < o$;

(2) $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas e $g(x)$ é lipschitziana;

(3) $F(x) \to \pm\infty$ quando $x \to \pm\infty$, onde $F(x) = \int_o^x f(\xi)\, d\xi$;

(4) $F(x)$ tem um zero simples em $x = a$; para $x \geq a$ a função $F(x)$ cresce monotonicamente com x.

Introduzimos novas variáveis:

$$y = \dot{x} + F(x), \qquad \lambda(x,y) = \frac{y^2}{2} + G(x),$$

onde $G(x) = \int_o^x g(\xi)\, d\xi$.

Calculemos a taxa de variação da energia $\frac{d\lambda}{dt}$, que será usada nas integrais de linha. Temos:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y^2}{2} + G(x)\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot{x} + F(x))^2 + G(x)\right] =$$

$= \dot{x}(\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x)) + F(x)\frac{d}{dt}(\dot{x} + F(x))$. Como o coeficiente de $\dot{x}$ é nulo por causa de (3.3), temos:

$d\lambda = F(x)dy$

A energia liberada do sistema é $\int F(x)dy$ e, se o sistema está num estado estacionário de oscilação, temos a seguinte condição de Lienard: $\oint F(x)dy = o$

Esta integral de linha é feita ao longo de uma trajetória. O argumento de Lienard, bem como de outros autores é que $\oint F(x)dy = o$ é uma condição para a existência de um círculo limite.

Consideremos o sistema equivalente:

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned}$$

Como F(x) é a integral de uma função contínua, sua derivada é contínua e consequentemente F(x) satisfaz uma condição de Lipschitz. g(x) também satisfaz uma condição de Lipschitz por hipótese; logo, o teorema de existência e unicidade de soluções se aplica ao sistema (3.4).

Como F(x) e g(x) são ímpares, segue-se que se x(t), y(t) é uma solução de (3.4), também o é -x(t), -y(t). Logo, toda curva simétrica, em relação a origem, a uma trajetória é também uma trajetória. Como a origem é o único ponto de equilíbrio de (3.4), toda trajetória precisa conter a origem em seu interior.

A tangente as curvas integrais é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{g(x)}{y - F(x)}$$

Vemos que para $x = o$, $y \neq o$ todas as curvas integrais tem tangente horizontal porque $g(o) = o$.

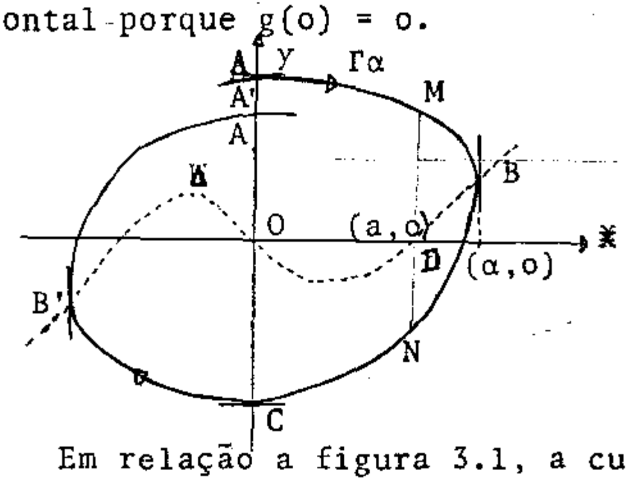


figura 3.1

Em relação a figura 3.1, a curva $\Delta: y - F(x) = o$, intercepta a curva integral Γ nos pontos B e B' nos quais a tangente a Γ é vertical porque $\frac{dy}{dx} = \infty$. Como $xg(x) > o$, y decresce ao longo de Γ do lado direito do eixo dos y e cresce no lado esquerdo de Oy. x cresce se Γ está acima de Δ e decresce em caso contrário. Podemos supor que a curva é como na figura 3.1. Denotemos a abcissa do ponto B por α e a curva Γ por Γα.

Se Γα é fechada, ela é simétrica em relação a origem. Se ela não é simétrica, sua reflexão na origem pode ser uma outra trajetória fechada. Esta outra trajetória interceptaria $\Gamma\alpha$, o que é absurdo. Logo, se $\Gamma\alpha$ é fechada, temos $|OA| = |OC|$. Inversamente, se $|OA|=|OC|$, a imagem do arco $\widehat{AC}$ na origem forma com $\widehat{AC}$ uma trajetória fechada e desta maneira $\Gamma\alpha$ é fechada. Logo, $|OA| = |OC|$ é uma condição necessária e suficiente para que $\Gamma\alpha$ seja fechada. Esta condição é também expressa por $\lambda(0,A) = \lambda(o,C)$, o que abreviaremos para $\lambda(A) = \lambda(C)$. Para provarmos que isto é possivel, consideremos as integrais de linha ao longo de $\Gamma\alpha$. Pondo:

$$\Phi(\alpha) = \lambda(C) - \lambda(A) = \int_{ABC} d\lambda = \int_{ABC} F(x)dy$$

É suficiente estudar a integral ao longo de $\Gamma\alpha$ somente do lado direito de Oy, desde que tudo é simétrico à esquerda de Oy.

Se $\alpha < a$ (a é a abcissa do ponto D no qual a curva Δ corta o eixo dos x), $dy < o$ (porque $\Delta < o$) mas como $F(x) < o$, a integral $\int_{ABC} F(x)dy > o$. Consequentemente, $\lambda(C) > \lambda(A)$. A energia é absorvida e não existe trajetória fechada.

Consideremos agora $\alpha > a$ (como indicado na figura 3.1). Seja MN a perpendicular ao eixo das abcissas passando por D. (de abcissa $x = a$) e consideremos dois trechos de $\Gamma\alpha$: o primeiro consistindo dos dois pedaços entre o eixo dos y e a reta MN, o outro, o arco MBN. Para simplificar chamemos os primeiros arcos de (1) (consistindo de AM e NC) e o segundo (o arco MBN) de (2). Então temos:

$$\Phi_1(\alpha) = \int_{AM} d\lambda + \int_{NC} d\lambda \quad ; \quad \Phi_2(\alpha) = \int_{MBN} d\lambda$$

Como $d\lambda = F(x)dy$ e $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{g(x)}{y - F(x)}$, temos

$$d\lambda = F(x)\frac{dy}{dx}dx = -\frac{F(x)g(x)}{y - F(x)}dx$$

Como $F(x) < o$ para $x < a$, $d\lambda$ é positivo para o trecho da trajetória (1) descrito na direção $A \to M$, o mesmo acontece para o outro trecho de (1) na direção $N \to C$. Isto mostra que $\Phi_1(\alpha) > o$.

Quanto a $\Phi_2(\alpha)$, temos que $d\lambda < o$, logo $\Phi_2(\alpha) < o$. Se α

cresce e fixado x, o arco AM "cresce para cima" e o arco NC, "cresce para baixo". Isto significa que $|y|$ cresce e consequentemente $\Phi_1(\alpha)$ decresce (pois os limites de integração são fixos).

Analisaremos agora o comportamento de $\Phi_2(\alpha)$ correspondente a integral de linha ao longo da trajetória MBN (figura 3.1). Se a amplitude cresce de α_1 para α_2, o novo trecho fica M'B'N', (figura 3.2). Mostraremos que $\Phi_2(\alpha_2) < \Phi_2(\alpha_1)$

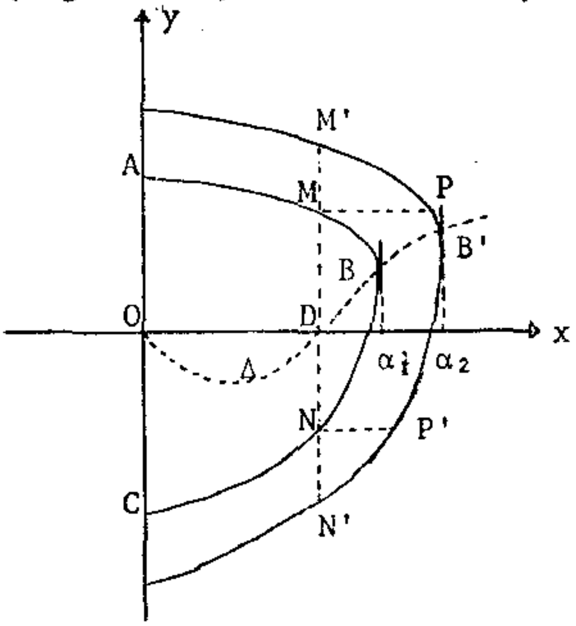


figura 3.2

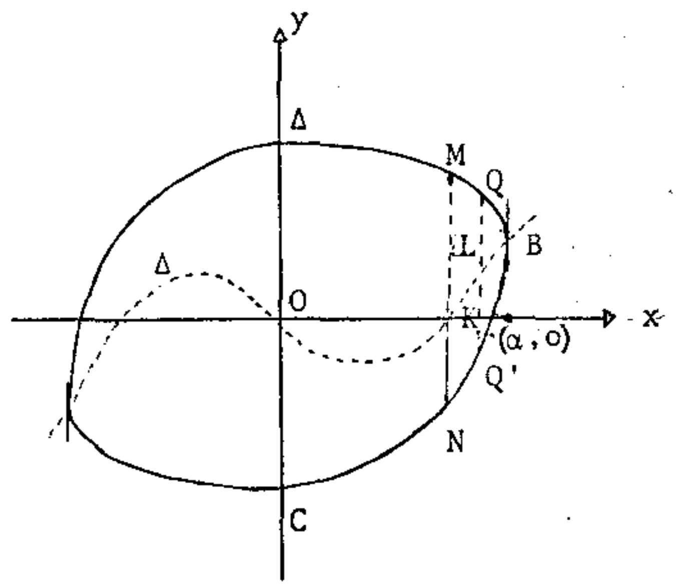


figura 3.3

Se traçarmos paralelas ao eixo dos x pelos pontos M e N, obtemos P e P' que seccionam o arco M'B'N' em três arcos M'P , PP' e P'N'. Seja:

$$\int_{M'B'N'} F(x)\,dy = \int_{M'P} F(x)\,dy + \int_{PP'} F(x)\,dy + \int_{P'N'} F(x)\,dy$$

Como $F(x) > o$ e $dy < o$ nestes arcos, as integrais são então negativas e podemos escrever

$$\int_{M'B'N'} F(x)\,dy < \int_{PP'} F(x)\,dy$$

os limites de integração de MP e NP' sendo o mesmo (para y), a integral ao longo de MBN é maior do que ao longo de PP', visto que para o último arco as abcissas são maiores que para o primeiro e as integrais são negativas; logo,

$$\int_{PP'} F(x)dy \quad < \quad \int_{MBN} F(x)dy$$

e

$$\int_{M'B'N'} F(x)dy \quad < \quad \int_{MEN} F(x)dy'$$

finalmente, temos que $\Phi_2(\alpha_2) < \Phi_2(\alpha_1)$ para $\alpha_2 > \alpha_1$; logo $\Phi(\alpha) = \Phi_1(\alpha) + \Phi_2(\alpha)$ é uma função monótona decrescente.
Notamos que se $\alpha < a$, $\Phi(\alpha) = \Phi_1(\alpha) > o$.

Agora , mostremos que $-\Phi_2(\alpha) \to \infty$ quando $\alpha \to \infty$. Fixemos algum valor de x, digamos $a < x_1 < \alpha$ e tracemos uma paralela ao eixo dos y passando por $x = x_1$ (a reta QQ'), figura 3.3.
Temos:

$\int_{MBN} F(x)dy < \int_{QBQ'} F(x)dy$. Para o arco QBQ' tem-se $x > x_1$ e logo, $F(x) > F(x_1)$. Assim,

$\Phi_2(\alpha) = \int_{MBN} F(x)dy < F(x_1) \int_{QBQ'} dy = -F(x_1)\ |\overline{QQ'}|$ e, consequentemente, (chamando K o ponto (x_1, o)), temos:

$-\Phi_2(\alpha) = -\int_{MBN} F(x)dy \quad \overline{KL}.\ \overline{QQ'}.$

Está claro que os segmentos $\overline{KL}$ e $\overline{QQ'}$ podem ser tão grandes quanto desejamos se α é suficientemente grande; o que mostra que $-\Phi_2(\alpha) \to \infty$ quando $\alpha \to \infty$. Como para α suficientemente pequeno, $\Phi(\alpha) > o$ e $\Phi(\alpha) \to -\infty$ quando $\alpha \to \infty$, existe um e somente um valor de $\alpha = \alpha_0$ tal que $\Phi(\alpha_0) = o$, o que mostra que existe uma e só uma curva fechada tal que $\lambda(A) = \lambda(C)$.

Se A_o e C_o são pontos de intersecção de $\Gamma\alpha_0$ com o eixo dos y, o ponto C está tão próximo a $\Gamma\alpha_0$ quanto A se $\alpha < \alpha_0$, por isso A' está tão próximo de $\Gamma\alpha_0$ quanto A. Um argumento semelhante é usado para $\alpha > \alpha_0$, que é um critério puramente geométrico de estabilidade para o círculo limite.

Para finalizar, consideremos o sistema $\dot{x} = Ax$. Se os autovalores de A tem parte real positiva e se existe uma trajetória limitada, o teorema de Poincaré Bendixon garante a existencia de uma trajetória periódica. Vamos ilustrar o que afirmamos com o seguinte exemplo.

Seja

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} - g(x) = 0$$

Fazendo $y = \dot{x} + F(x)$, onde $F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$, obtemos o sistema

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned}$$

Suponhamos que as funções f(x) e g(x) são contínuas e satis - fazem as condições exigidas para a unicidade de soluções; $xg(x) > o$ para $x \neq o$, $g(o) = o$, $f(o) < o$. Ainda que exista $g'(o)$ e $g'(o) > o$ e constantes $L > o$, $K > o$ tais que

$$g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant L \quad , \quad \text{para } |x| \geqslant a$$

$$f(x) \geqslant K \quad , \quad \text{para } |x| \geqslant a$$

Com estas condições sabemos pelo exemplo (1.3) que as soluções (3.5) são uniformemente ultimamente limitadas.

O sistema

$$\dot{X} = AX + \ldots \quad , \quad \text{onde } A = \begin{pmatrix} -f(o) & 1 \\ -g'(o) & o \end{pmatrix}$$

e... representam os termos em X de ordem superior, tem $\det A = g'(o) > o$ e $\operatorname{trc} A = -f(o) > o$. Portanto, os autovalores de A tem parte real positiva.

Consequentemente chegamos a existencia de uma órbita periódica.

BIBLIOGRAFIA

Hale J.K. - Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience

Hahn W. - Theory and Application of Liapunov's Direct Method, Prentice-Hall, 1963.

Minorsky Nicholas - Nonlinear Oscillations, Van Nostrand.

Pliss V.A - Nonlocal Problems of the theory of Oscillations, Academic Press, 1966.

Yoshizawa T. - Stability Theory by Liapunov's Second Method, The Mathematical Society of Japan, 1966.