Subvariedades Homogêneas em Codimensão Dois

por

Helvecio Pereira de Castro

Tese desenvolvida sob a orientação da Professora Maria Helena Noronha (California State University - Northridge), em co-orientação com o Prof. Francesco Mercuri (IMECC - UNICAMP)

Banca Examinadora:

Marcos Dajczer (IMPA)
Ruy Tojeiro de Figueiredo Jr. (UFU)
Antonio Carlos Asperti (USP)
Renato Hyuda de Luna Pedrosa (UNICAMP)
Maria Helena Noronha (CSU)

IMECC-UNICAMP

1996

Subvariedades Homogêneas em Codimensão Dois

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Helvecio Pereira de Castro e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 04 de julho de 1996

Maria Helena Noronha

Profa. Dra. Maria Helena Noronha
Orientadora

California State University
Northridge

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Castro, Helvecio Pereira de

C279s Subvariedades homogêneas em codimensão dois / Helvecio Pereira de Castro -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientadora : Maria Helena Noronha.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Geometria riemaniana. 2.Espaços homogêneos. 3. Subvariedades. 4. Lie, Grupos de. I. Noronha, Maria Helena. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 04 de Julho de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARCOS DAJCZER

Prof (a). Dr (a). RUY TOJERO DE FIGUEIREDO JR.

Antonio Carlos Asperti

Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI

Prof (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA

Maria Helena Noronha

Prof (a). Dr (a). MARIA HELENA NORONHA

À Lucília

Agradecimentos,

À Prof. Maria Helena Noronha (Orientadora), e ao Prof. Francesco Mercuri (Co-orientador), pelas valiosas sugestões que tornaram esta Tese possível.

Aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás, pelo constante estímulo.

A todos os amigos, que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho.

A minha família, que soube compreender e apoiar, dando o suporte necessário para continuar.

Resumo

Neste Trabalho são estudadas imersões isométricas de variedades Riemannianas homogêneas no espaço Euclideano em codimensão dois. É considerado o problema de rigidez para estas imersões, e mostrado que toda subvariedade rígida é isoparamétrica.

Para imersões não rígidas é obtido também um teorema de classificação para variedades de dimensão maior que 4. *No caso em que a variedade homogênea é também uma variedade de Einstein obtemos uma classificação completa. sem a restrição na dimensão da variedade.*

Em seguida os resultados obtidos são aplicados ao estudo das variedades de cohomogeneidade 1. É mostrado que uma hipersuperfície compacta do espaço Euclideano que admite uma ação de um subgrupo do grupo das isometrias com órbitas principais de codimensão 1 e curvatura seccional positiva, é uma hipersuperfície de revolução.

Índice

Introdução

Uma variedade Riemanniana M é homogênea se o grupo de isometrias $Iso(M)$ age transitivamente em M, isto é, para cada x e $y \in M$ existe uma isometria h tal que $h(x) = y$. Os exemplos mais simples de variedades homogêneas são as esferas, os espaços projetivos e em geral os espaços simétricos.

Imersões de variedades homogêneas no espaço Euclideano têm sido estudadas em codimensão 1. Foi mostrado por Kobayashi [18] que uma hipersuperfície compacta homogênea é congruente a uma esfera. Este resultado foi estendido para hipersuperfícies não-compactas por Nagano-Takahashi em [25]. Neste trabalho é provado que uma hipersuperfície homogênea é um produto de uma esfera por um espaço Euclideano, se o posto da segunda forma fundamental é diferente de 2 em algum ponto. Finalmente Harle [14] estendeu este resultado para hipersuperfícies cuja segunda forma fundamental tem posto 2. Subvariedades homogêneas em codimensão 2 não foram estudadas até o momento, e saber se o plano hiperbólico ou o espaço hiperbólico 3−dimensional imergem isometricamente em $I\!R^4$ e $I\!R^5$ respectivamente, tornaram-se problemas clássicos em geometria diferencial.

O objetivo deste trabalho é estudar imersões isométricas de variedades Riemannianas homogêneas M^n em $I\!R^{n+2}$. Obtemos como principal resultado uma classificação completa para imersões como índice de nulidade relativa mínimo $\nu_0 = min\{\nu_f(x) : x \in M\} \leq n-5$, em particular para as subvariedades compactas de dimensão $n \geq 5$.

Como no estudo das hipersuperfícies, distinguimos dois casos: imersões rígidas e não-rígidas. Recordamos que uma imersão isométrica $f : M^n \to I\!R^N$ é rígida se para cada imersão g de M existe uma isometria T de R^N tal que $g = T \circ f$. O estudo de subvariedades homogêneas está intimamente relacionado com o problema de rigidez, pois se uma imersão é rígida, cada isometria da variedade M é induzida por um movimento rígido do ambiente, tornando $f(M)$ uma variedade extrinsecamente homogênea. Isto implica que a segunda forma fundamental da imersão é invariante por isometrias. No caso de hipersuperfícies, isto implica imediatamente que $f(M)$ é uma subvariedade isoparamétrica. Uma questão natural é saber se a mesma conclusão pode ser obtida em codimensão 2. Respondemos positivamente esta pergunta, obtendo assim o resultado:

Teorema 1 Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea. Se f é rígida então $f(M) = \bar{M}^{n-k} \times I\!R^k$, onde $\bar{M}^{n-k}$ é uma hipersuperfície isoparamétrica compacta de uma esfera.

Observamos que as hipersuperfícies isoparamétricas homogêneas da esfera são classificadas em [32].

Para obter uma caracterização das subvariedades não-rígidas, usamos o teorema de rigidez de do Carmo-Dajczer ([8]). No contexto de imersões de variedades homogêneas M^n em codimensão 2, obtemos que a imersão f satisfaz um dos seguintes casos se $\nu_0 \leq n-5$:

a) f é rígida.

b) Existe um referencial ortonormal ξ, η do espaço normal em cada ponto, tal que $\mathrm{rk}A_\eta \leq 1$ e $h_* \circ A_\xi = \pm A_\xi \circ h_*$ para cada isometria h de M.

c) $\nu_f \equiv \nu_0$, e existe um referencial ortonormal ξ, η do espaço normal em cada ponto, tal que $\mathrm{rk}A_\eta \equiv 2$ e $h_* \circ A_\xi = \pm A_\xi \circ h_*$ para cada isometria h de M.

Estudamos separadamente os casos (b) e (c) e obtemos os seguintes resultados.

Teorema 2 Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$, uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea tal que $\nu_0 \leq n-4$. Suponha que em cada $x \in M$ existe uma base ortonormal $\{\xi, \eta\}$ de $T_xM^\perp$ tal que $\mathrm{rk}(A_\eta) \leq 1$ e $h_* \circ A_\xi = \pm A_\xi \circ h_*$ para toda isometria h de M. Então $M = \bar{M}^m \times I\!R^{\nu_0}$ e $f = \bar{f} \times i$ onde $i : I\!R^{\nu_0} \to I\!R^{\nu_0}$ é a identidade e $\bar{\nu}_0 = 0$. Além disso um dos casos seguintes ocorrem:

a) $\bar{M}$ é isométrica a uma esfera S^m e $\bar{f}$ é homotópica através de imersões isométricas à imersão de S^m em um hiperplano de $I\!R^{n+2}$.

b) $\bar{M}$ é recoberta por $S^{m-1} \times I\!R$ e $\bar{f} \circ \pi$ é homotópica através de imersões isométricas a $g \times i$ onde g é a imersão de S^{m-1} em um hiperplano e i é a aplicação identidade. (π é a aplicação de recobrimento.

Teorema 3 Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade homogênea. Suponha que em cada $x \in M$ existe uma base ortonormal $\{\xi, \eta\}$ do espaço normal $T_xM^\perp$ tal que $h_* \circ A_\xi = \pm A_\xi \circ h_*$ para toda isometria h de M, e $\mathrm{rk}(A_\eta) \equiv 2$.

a) Se M é compacta e $n \geq 4$ então M é isométrica ao produto Riemanniano $S^2 \times S^{n-2}$.

b) Se M é não-compacta e $\nu_f \leq n-5$, então M é isométrica a $S^2 \times S^k \times I\!R^{n-2-k}$, onde $n-2-k = \nu_f$.

Observe que dos Teoremas 1, 2 e 3 obtemos a seguinte classificação para subvariedades homogêneas em codimensão 2.

Teorema 4 Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea. Suponha que $\nu_0 \leq n-5$. Então um dos casos seguintes ocorre:

a) $f(M) = \bar{M} \times I\!R^{\nu_0}$, onde $\bar{M}$ é uma hipersuperfície homogênea isoparamétrica compacta em uma esfera,

b) $M = \bar{M} \times I\!R^{\nu_0}$, $f = \bar{f} \times i$ onde $i : I\!R^{\nu_0} \to I\!R^{\nu_0}$ é a identidade e $\bar{M}$ é isométrica a $S^{n-\nu_0}$ ou o recobrimento de $\bar{M}$ é $S^{n-\nu_0-1} \times I\!R$.

Uma generalização natural de variedades homogêneas são as variedades de cohomogeneidade k. Uma variedade Riemanniana M é uma $G-$variedade de cohomogeneidade k se G é um subgrupo conexo e fechado de $Iso(M)$ que age em M com órbitas principais de codimensão k. Recentemente o estudo de hipersuperfícies de cohomogeneidade 1 tem chamado a atenção dos geômetras. Como as hipersuperfícies de revolução são os exemplos naturais de tais hipersuperfícies, é uma pergunta natural saber quando uma hipersuperfície de cohomogeneidade 1 é de revolução. Em Asperti-Mercuri-Noronha [3] foi provado que se uma $G-$variedade compacta M^n de cohomogeneidade 1 está imersa em $I\!R^{n+1}$ e cada órbita principal tem curvatura seccional constante então M^n está imersa como hipersuperfície de revolução. Como as órbitas principais de uma hipersuperfície de cohomogeneidade 1 são subvariedades homogêneas em codimensão dois, os resultados aqui obtidos mostram que para $n \geq 5$ podemos substituir a hipótese de curvatura seccional constante por curvatura seccional positiva. Provamos o seguinte:

Teorema 5 Seja $f : M^n \to I\!R^{n+1}$, $n \geq 5$, uma imersão isométrica e M uma $G-$variedade compacta de cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais pela ação de G tem curvatura seccional positiva então $f(M)$ é uma hipersuperfície de revolução.

Os casos restantes para o entendimento completo de subvariedades homogêneas em codimensão dois são imersões não-rígidas cujo índice de nulidade relativa mínimo é $\nu_0 = n-2, n-3, n-4$. Os métodos utilizados aqui não se aplicam a estes casos. Todavia, para variedades homogêneas de Einstein obtemos uma classificação completa. Observamos que a classe das variedades homogêneas de Einstein inclui os espaços homogêneos com isotropia irredutível, por um resultado de J. A. Wolf (ver [7] p. 187).

Como superfícies homogêneas têm curvatura constante e variedades de Einstein $3-$dimensionais têm curvatura seccional constante, estudamos o caso $n \geq 4$. Observamos que ou M tem curvatura de Ricci *nula* e então é *plana* por um resultado de

D. V. Alekseevskii e B. N. Kimelfeld (ver [7] p. 191) ou $\nu_f \equiv 0$. Por outro lado, variedades homogêneas de Einstein de dimensão 4 são simétricas, por um teorema de Jensen [17]. Obtemos destes fatos, juntamente com os resultados deste trabalho, o teorema abaixo.

Teorema 6 Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 4$, uma imersão isométrica de uma variedade homogênea de Einstein. Então um dos casos seguintes ocorrem.

a) M é plana e então é um produto $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde T^k é um toro de dimensão $k \leq 2$.

b) M é uma esfera ou o produto de duas esferas, cada uma de dimensão maior que 1.

Esta Tese é organizada da seguinte maneira. No capítulo inicial recordamos alguns conceitos básicos de imersões isométricas com o objetivo principal de estabelecer as notações. No segundo capítulo estudamos o problema de rigidez para imersões de variedades homogêneas em codimensão 2 e provamos o teorema 1. Na última seção obtemos uma classificação inicial das subvariedades homogêneas em codimensão 2. No capítulo 3, estudamos as imersões cujo espaço normal tem uma direção η tal que o posto de A_η é ≤ 2, provando assim os teoremas 2 e 3, e terminando com o teorema de classificação para $\nu_0 \leq n-5$. No capítulo 4, primeiramente, aplicamos os resultados dos capítulos 2 e 3 para estudar as hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade 1. Na segunda seção obtemos a classificação completa das imersões em codimensão 2 de variedades homogêneas de Einstein.

Capítulo 1

Imersões Isométricas

1.1 Equações Básicas

As variedades que consideraremos neste trabalho serão sempre conexas e de classe C^∞. Sejam M^n e $\bar{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente. Uma aplicação diferenciável $f : M^n \to \bar{M}^m$ é uma imersão se para todo $x \in M$ a diferencial $df_x : T_xM \to T_{f(x)}\bar{M}$ é injetiva. Se f é uma imersão então $m \geq n$, e o número $p = m - n$ é chamado de codimensão de f. No caso em que M e $\bar{M}$ são variedades Riemannianas com métricas $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_{\bar{M}}$ respectivamente, uma imersão f é chamada imersão isométrica se

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle df_xX, df_xY\rangle_{\bar{M}}$$

para todo $x \in M$ e quaisquer $X, Y \in T_xM$.

Seja $f : M^n \to \bar{M}^m$ uma imersão isométrica. Para cada $x \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de x tal que a restrição $f|_U$ é uma mergulho sobre $f(U)$. Algumas vezes identificamos U com $f(U)$ através do difeomorfismo $f|_U$, e cada vetor $X \in T_xM$ com $df_xX \in T_{f(x)}\bar{M}$. Com esta identificação o espaço tangente a M em x se torna um subespaço do espaço tangente a $\bar{M}$, e o produto interno de $T_{f(x)}\bar{M}$ decompõe $T_{f(x)}\bar{M}$ na soma direta

$$T_{f(x)}\bar{M} = T_xM \oplus T_{f(x)}M^\perp$$

onde $T_{f(x)}M^\perp$ é o complemento ortogonal de T_xM em $T_{f(x)}\bar{M}$. Obtemos então o fibrado vetorial normal $TM^\perp = \cup_{x\in M}T_{f(x)}M^\perp$ de f. O fibrado tangente de $\bar{M}$ é a soma de Whitney dos fibrados TM e $TM^\perp$. Em relação a esta decomposição, temos as projeções

$$(\ )^\top : T\bar{M}|_{f(M)} \to TM \quad , \quad (\ )^\perp : T\bar{M}|_{f(M)} \to TM^\perp$$

que são as componentes tangencial e normal respectivamente.

Seja $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\bar{M}$. Segue da unicidade da conexão Riemanniana que a componente tangencial de $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana ∇, de M, isto é, se $X, Y \in TM$ então

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\bar{\nabla}_X Y)^{\perp}$$

Definimos uma aplicação $\alpha : TM \times TM \to TM^{\perp}$ por $\alpha(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^{\perp}$, chamada segunda forma fundamental de f. Mostra-se facilmente a partir das propriedades de ∇ e $\bar{\nabla}$ que α é simétrica e bilinear sobre $C^{\infty}(M)$. Em particular, exprimindo α em um sistema de coordenadas, concluímos que a aplicação $\alpha_x : T_xM \times T_xM \to T_{f(x)}M^{\perp}$ dada por $\alpha_x(X, Y) = \alpha(X, Y)(x)$ depende apenas dos vetores $X(x)$ e $Y(x)$. α_x é a segunda forma fundamental de f no ponto x.

Seja $X \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$. Denotamos por $A_{\xi}X$ a componente tangencial de $-\bar{\nabla}_X \xi$, isto é, $A_{\xi}X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^{\top}$. Segue imediatamente das propriedades de $\bar{\nabla}$ que

$$\langle A_{\xi}X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle$$

Então $A_{\xi} : T_xM \to T_xM$ é um operador linear simétrico. A_{ξ} é chamado operador de Weingarten na direção de ξ.

A componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, denotada por $\nabla^{\perp}_X \xi$, define uma conexão no fibrado normal $TM^{\perp}$. $\nabla^{\perp}$ é chamada conexão normal de f. Então

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_{\xi}X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

Da mesma forma como é definido o tensor de curvatura de uma variedade Riemanniana com conexão ∇ por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

definimos o tensor de curvatura normal $R^{\perp}$ por

$$R^{\perp}(X, Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} \xi$$

Utilizando as expressões acima obtemos as três equações básicas de uma imersão isométrica, a saber, as equações de Gauss, Ricci e Codazzi. Sejam $X, Y, Z, W \in TM$. Tomando a componente tangencial do tensor de curvatura de $\bar{M}$, denotado por $\bar{R}$, obtemos a equação de Gauss:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle$$

Se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)Y, X \rangle$ são as curvaturas seccionais de M e $\bar{M}$ segundo o plano gerado por vetores ortonormais $X, Y \in T_xM$, a equação de Gauss é simplesmente

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2$$

Se $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$, tomando as componentes normal e tangencial de $\bar{R}(X,Y)\xi$ obtemos as equações de Ricci e Codazzi respectivamente. Se $\eta \in TM^{\perp}$, podemos expressar a equação de Ricci como

$$\langle \bar{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$$

onde $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$. Analogamente podemos expressar a equação de Codazzi como

$$(\bar{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi)$$

onde por definição

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^{\perp}\xi} X$$

No caso particular em que $\bar{M}$ tem curvatura seccional constante c, que indicaremos com a notação $\bar{M}_c$, as equações acima assumem uma forma mais simples. Neste caso o tensor de curvatura de $\bar{M}$ é dado por:

$$\bar{R}(X,Y)Z = c(X \wedge Y)Z = c(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)$$

para todo $X, Y, Z \in T\bar{M}$. Então as equações de Gauss, Ricci e Codazzi se escrevem respectivamente como

(1) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\langle (X\wedge Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle$

(2) $\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$

(3) $(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi)$

para $X, Y, Z, W \in TM$ e $\xi, \eta \in TM^{\perp}$

Seja $f : M^n \to \bar{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$ é um campo vetorial unitario então

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X, Y\rangle \xi \quad , \quad \bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X$$

Neste caso a equação de Ricci é identicamente nula, e as equações de Gauss e Codazzi são respectivamente

$$R(X,Y) = c(X \wedge Y) + A_\xi X \wedge A_\xi Y \tag{1.1}$$

$$\nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y) = \nabla_Y(A_\xi X) - A_\xi(\nabla_Y X) \tag{1.2}$$

Dizemos que uma imersão isométrica tem fibrado normal plano se $R^{\perp} = 0$. Segue da equação de Ricci que $R^{\perp} = 0$ se e somente se para todo $x \in M$ existe uma base de T_xM que diagonaliza simultaneamente A_ξ e A_η.

Uma variedade Riemanniana $m-$dimensional, simplesmente conexa, de curvatura seccional constante c, é denotada usualmente por Q_c^m. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica. Se M é simplesmente conexa, f é caracterizada pelas equações de Gauss, Ricci e Codazzi. Este é o chamado teorema fundamental das subvariedades.

Teorema 1.1.1 *(Teorema Fundamental das Subvariedades)*

i) *Seja M^n uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial Riemanniano de posto p com uma conexão compatível ∇', e α uma seção simétrica do fibrado $Hom(TM \times TM, E)$.*

Se α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c, então existe uma imersão isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$, e um isomorfismo $\tilde{f} : E \to TM^{\perp}$, tal que para todo $X, Y \in TM$ e toda seção local ξ e η de E

$$\langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \quad , \quad \tilde{f}\alpha(X, Y) = \tilde{\alpha}(X, Y) \quad , \quad \tilde{f}\nabla'_X \xi = \nabla^{\perp}_X \tilde{f}(\xi),$$

onde $\tilde{\alpha}$ e $\nabla^{\perp}$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente.

ii) *Suponha que f e g são imersões isométricas de uma variedade conexa M^n em Q_c^{n+p}. Seja $TM_f^{\perp}$, α_f e $\nabla_f^{\perp}$ o fibrado normal, a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente; e $TM_g^{\perp}$, α_g e $\nabla_g^{\perp}$ os objetos correspondentes para g. Se existe um isomorfismo $\tilde{\phi} : TM_f^{\perp} \to TM_g^{\perp}$ tal que, para todo $X, Y \in TM$ e toda seção $\xi, \eta \in TM_f^{\perp}$*

$$\langle \tilde{\phi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \quad , \quad \tilde{\phi}\alpha_f(X, Y) = \alpha_g(X, Y) \quad , \quad \tilde{\phi}(\nabla_f)^{\perp}_X \xi = (\nabla_g)^{\perp}_X \tilde{\phi}(\xi),$$

então existe uma isometria $\tau : Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$ tal que

$$g = \tau \circ f \;\; e \;\; \tau_*|_{TM_f^{\perp}} = \tilde{\phi}.$$

Uma prova deste teorema pode ser vista em [19]

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \bar{M}^{n+p}$, se a segunda forma fundamental α é identicamente nula em todo ponto $x \in M$, dizemos que a imersão é totalmente geodésica. Definimos o espaço de nulidade relativa em $x \in M$ da imersão f, como o espaço de nulidade de α, isto é,

$$N_f(x) = \{X \in T_xM : \alpha(X, Y) = 0 \quad \forall \; Y \in T_xM\}$$

A dimensão de $N_f(x)$, denotada por $\nu_f(x)$, é o índice de nulidade relativa de f em x.

O primeiro espaço normal de f em $x \in M$ é definido como o subespaço $N_1(x)$ de $T_{f(x)}M^\perp$

$$N_1(x) = span\{\alpha(X,Y) : X, Y \in T_xM\},$$

onde $span\{\alpha(X,Y)\}$ denota o subespaço gerado pela segunda forma fundamental de f. Dizemos que a imersão é $1-$regular se a dimensão de $N_1(x)$ é constante em M. Neste caso N_1 é um sub-fibrado de $TM^\perp$.

Uma imersão isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ admite redução de codimensão a q, se existe uma subvariedade totalmente geodésica Q_c^{n+q} em Q_c^{n+p}, com $q < p$, tal que $f(M) \subset Q_c^{n+q}$. Uma imersão é chamada substancial se a codimensão não pode ser reduzida. Neste caso a codimensão mínima é chamada de codimensão substancial. Um resultado básico neste contexto é o teorema de Erbacher [13]. Este teorema afirma que se f é uma imersão isométrica $1-$regular de M^n em Q_c^{n+p}, tal que N_1 é um subfibrado de posto $q < p$ que é paralelo, isto é, $\nabla_X^\perp \xi \in N_1$ para qualquer seção ξ de N_1 então f tem codimensão substancial q.

Capítulo 2

Subvariedades Homogêneas e Rigidez

2.1 Generalidades

Uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$ é homogênea se o grupo das isometrias de M, denotado por $Iso(M)$, é transitivo (isto é, para cada x e y em M, existe uma isometria $h \in Iso(M)$ tal que $h(x) = y$). Dada uma variedade Riemanniana M, o grupo de isometrias é um grupo de Lie ([19]) que age naturalmente em M. Em geral existe mais de um grupo de Lie agindo por isometrias transitivamente em uma variedade Riemanniana homogênea (por exemplo o subgrupo das translações age transitivamente no espaço Euclideano).

Definição 2.1.1 *Uma variedade Riemanniana M é $G-$homogênea, se G é um subgrupo fechado de $Iso(M)$ que age transitivamente em M.*

O subgrupo de isotropia $H(x) = \{h \in G : h(x) = x\}$ no ponto $x \in M$ é um subgrupo compacto do subgrupo de isotropia $\{h \in Iso(M) : h(x) = x\}$. A representação linear de isotropia é definida como o homomorfismo de $H(x)$ no grupo de transformações lineares de T_xM dado por $h \mapsto dh_x$. A imagem de $H(x)$ pela representação de isotropia é chamada grupo de isotropia linear em x. Como uma isometria h é determinada dando somente $h(x)$ e a diferencial dh_x, então a representação linear de isotropia é injetiva.

Uma variedade $G-$homogênea M, é chamada espaço de isotropia irredutível se a representação linear de isotropia de G for irredutível. Foi demonstrado por J. A. Wolf (ver [7] p. 187) que se uma variedade Riemanniana homogênea tem isotropia irredutível então a métrica é Einstein.

Um campo vetorial X em M é chamado campo de Killing (ou isometria infinitesimal), se o grupo local a $1-$parâmetro de difeomorfismos gerado por X em uma vizinhança de cada ponto de M, consiste de isometrias locais. Um campo X é de

Killing se e somente se

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$$

para quaisquer $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Em uma variedade Riemanniana a álgebra de Lie do grupo $Iso(M)$ das isometrias de M é isomorfa à álgebra de Lie de todos os campos de Killing completos. Se M é completa este isomorfismo é sobre todos os campos de Killing de M ([19]). Seja M uma variedade Riemanniana $G-$homogênea, e $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de G. Para cada $X \in \mathcal{G}$, seja $exp(tX)$ o subgrupo a $1-$parâmetro de G gerado por X. Então $\varphi_t(y) = exp(tX).y$ é um grupo a $1-$parâmetro de isometrias. Identificamos (pelo isomorfismo citado acima) $X \in \mathcal{G}$ com o campo vetorial (denotado por X) em M gerado pelo grupo de difeomorfismos φ_t.

Seja $M = G/H$ uma variedade Riemanniana $G-$homogênea, onde H é o subgrupo de isotropia em $x \in M$. A subálgebra de Lie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ gerada por H é identificada com a subálgebra dos campos de Killing que se anulam em x. Seja ad_G a representação adjunta de G. Como H é compacto, $ad_G(H)$ é um subgrupo compacto do grupo linear de $\mathcal{G}$. Em geral, um espaço homogêneo G/H é dito *redutivo* se existe uma decomposição $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ de $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{K}$ é ad_G-invariante. Esse é sempre o caso se H é compacto, e então uma variedade Riemanniana homogênea é redutiva. Fixada uma decomposição $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, podemos identificar $\mathcal{K}$ com T_xM tomando o valor em x do campo de Killing correspondente.

Associada à decomposição $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ existe uma conexão ∇^c em M, denominada conexão canônica (ver O. Kowalsky [20]). Esta conexão é caracterizada pela proposição $I.6$ de [20]. O teorema abaixo relaciona algumas propriedades da conexão canônica.

Teorema 2.1.2 *Seja ∇^c a conexão canônica associada à decomposição $\mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$ da variedade Riemanniana $M = G/H$, H o subgrupo de isotropia em $p \in M$.*

1. *Para cada $X \in \mathcal{K}$ seja $\gamma(t) = exp(tX).p$ em M. Então o ∇^c-transporte paralelo de vetores tangentes em p ao longo da curva γ, $0 \leq t \leq s$, coincide com a diferencial de $exp(sX)$ atuando em M.*

2. *Para cada $X \in \mathcal{K}$, a curva $\gamma(t) = exp(tX).p$ é uma ∇^c-geodésica. Reciprocamente, toda ∇^c-geodésica por p é da forma $exp(tX).p$ para algum $X \in \mathcal{K}$.*

3. *A conexão ∇^c é completa.*

A prova deste teorema pode ser vista em O. Kowalsky [20].

Seja M uma variedade Riemanniana simplesmente conexa. Então (Teorema de de Rham) M é isométrica ao produto $M_0 \times M_1 \times ... \times M_r$ onde M_0 é um espaço Euclideano e $M_1, ..., M_r$ são variedades Riemannianas simplesmente conexas e irredutíveis. A decomposição é única a menos da ordem. M é homogênea se e somente se cada fator é é uma variedade homogênea (Teo. 5.1, pag. 211 de [19]).

Seja $\tilde{M}$ o recobrimento universal de M com a métrica Riemanniana induzida pela projeção $p : \tilde{M} \to M$. Seja $\tilde{X}$ um campo vetorial em $\tilde{M}$ induzido por X. Se X é um campo de Killing em M então $\tilde{X}$ é um campo de Killing em $\tilde{M}$ ([19] pag. 243). Se M é homogênea então $\tilde{M}$ é homogênea.

2.2 Subvariedades Extrinsecamente Homogêneas em Codimensão Dois

Dizemos que uma imersão isométrica $f : M^n \to Q_c^m$ é rígida se para cada imersão isométrica $g : M^n \to Q_c^m$, existe uma isometria $T : Q_c^m \to Q_c^m$ tal que $g = T \circ f$. Se a imersão f é rígida, e h é uma isometria de M, existe uma isometria $\tilde{h}$ de Q_c^m tal que

$$f \circ h = \tilde{h} \circ f.$$

Então $f(M)$ é uma variedade extrinsecamente homogênea.

Um imersão isométrica no espaço Euclideano tem curvatura principal constante se os operadores de Weingarten tem autovalores constantes (com mesma multiplicidade) para qualquer campo normal paralelo ao longo de qualquer curva ([16]). Uma subvariedade do espaço Euclideano é isoparamétrica se tem fibrado normal plano e curvatura principal constante.

Uma caracterização das subvariedades de curvatura principal constante é dada por Heintze-Olmos-Thorbergsson em [16]. É mostrado que uma subvariedade de $\mathbb{R}^N$ tem curvatura principal constante se e somente se é isoparamétrica ou uma variedade focal de alguma subvariedade isoparamétrica. Uma subvariedade M de $\mathbb{R}^N$ é uma variedade focal de $\bar{M}$ se $\dim M < \dim \bar{M}$ e existe uma seção paralela ξ em $T\bar{M}^{\perp}$ tal que $M = \{\bar{p} + \xi(\bar{p}) : \bar{p} \in \bar{M}\}$.

Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea com segunda forma fundamental α. Como em [28], definimos $\nabla^c\alpha$ por

$$(\nabla^c_X \alpha)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla^c_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla^c_X Z)$$

onde $\nabla^{\perp}$ denota a conexão normal. Provaremos em seguida o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2.1 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea. Se f é rígida então $f(M) = \bar{M}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, onde $\bar{M}^{n-k}$ é uma hipersuperfície isoparamétrica compacta da esfera.*

Prova:

Provaremos primeiramente que $\nabla^c\alpha = 0$, onde α é a segunda forma fundamental de f. Seja $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$ uma decomposição redutiva de $M = G/H$ e $\gamma(t) = exp(tX)(p)$ uma ∇^c−geodésica por p, onde X denota um campo de Killing. Dado $\xi \in T_pM^{\perp}$, visto que cada isometria de M é identificada com uma isometria de $\mathbb{R}^{n+2}$, podemos definir $\xi(t)$ ao longo de γ por

$$\xi(t) = exp(tX)_*(\xi).$$

O operador de Weingarten correspondente tem autovalores constantes ao longo de γ. Isto implica que, se $V, W \in T_pM$ e $V(t)$, $W(t)$ são os transportes ∇^c-paralelos ao longo de γ, então

$$\alpha(V(t), W(t)) = exp(tX)_*(\alpha(V, W))$$

e então $\langle \alpha(V(t), W(t)), \xi(t)\rangle$ é constante ao longo de γ.

Seja $\{\xi_1, \xi_2\}$ uma base ortonormal de $T_pM^\perp$, $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de A_{ξ_1}. Definindo $\xi_i(t)$ e $X_i(t)$ em γ por transporte ∇^c-paralelo, temos

$$\frac{d}{dt}\langle \alpha(X_i, X_j)(t), \xi_2(t)\rangle = 0 = \langle \nabla^\perp_X \alpha(X_i(t), X_j(t)), \xi_2(t)\rangle + \langle \alpha(X_i(t), X_j(t)), \nabla^\perp_X \xi_2(t)\rangle$$

Como $\nabla^\perp_X \xi_2$ é múltiplo de ξ_1, e $X_i(t)$ diagonaliza $A_{\xi_1(t)}$, a equação acima implica que

$$\nabla^\perp_X \alpha(X_i(t), X_j(t)) = a\xi_1(t), \text{ para } i \neq j$$

Como $\nabla^c R = 0$, aplicando a equação de Gauss

$$R(X_i, X_j)X_j = A_{\alpha(X_j, X_j)}X_i - A_{\alpha(X_i, X_j)}X_j$$

temos

$$A_{\nabla^\perp_X \alpha(X_j, X_j)}X_i - A_{\nabla^\perp_X \alpha(X_i, X_j)}X_j = 0 \tag{2.1}$$

Como $A_{\nabla^\perp_X \alpha(X_i, X_j)}X_j$ é múltiplo de X_j, tomando produto interno por X_k com $k \neq j$ obtemos

$$\langle A_{\nabla^\perp_X \alpha(X_j, X_j)}X_i, X_k\rangle = 0 \quad para \;\; i, k \neq j. \tag{2.2}$$

Tomando o produto por X_j obtemos

$$\langle \nabla^\perp_X \alpha(X_j, X_j), \alpha(X_i, X_j)\rangle = \langle \nabla^\perp_X \alpha(X_i, X_j), \alpha(X_j, X_j)\rangle. \tag{2.3}$$

$\langle \alpha(X_j, X_j), \alpha(X_i, X_j)\rangle$ é constante ao longo de γ pois são imagens de isometrias, e então:

$$\langle \nabla^\perp_X \alpha(X_j, X_j), \alpha(X_i, X_j)\rangle = -\langle \nabla^\perp_X \alpha(X_i, X_j), \alpha(X_j, X_j)\rangle \tag{2.4}$$

Combinando as equações 2.3 e 2.4 obtemos

$$\langle \nabla^\perp_X \alpha(X_j, X_j), \alpha(X_i, X_j)\rangle = 0 \quad \forall\, j \neq i \tag{2.5}$$

Como $\langle \alpha(X_j, X_j), \alpha(X_j, X_j)\rangle$ é constante, obtemos

$$\langle \nabla^\perp_X \alpha(X_j, X_j), \alpha(X_j, X_j)\rangle = 0 \tag{2.6}$$

Isto implica que $\nabla^{\perp}_X \alpha(X_j, X_j)$ é ortogonal ao primeiro espaço normal da imersão em p, denotado por $N_1(p)$. Afirmamos que $\dim N_1(p) = 2$ e então

$$\nabla^{\perp}_X \alpha(X_j, X_j) = 0 \quad \forall\, j$$

De fato, suponha que exista um vetor normal η tal que $A_\eta = 0$. Seja ξ um vetor ortogonal a η. A rigidez de f implica que $\dim N_1(x) = 1$ para todo $x \in M$, isto é, $A_\eta \equiv 0$. Observamos que $f(M)$ não está contida em um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+2}$ e o operador de Weingarten A_ξ tem um autovalor constante não-nulo. Aplicando a equação de Codazzi concluímos que $\nabla^{\perp}\eta = 0$ e então N_1 é paralelo (ver proposição 4.5 de [9]). Então, por um resultado de Erbacher [13], f reduz codimensão, contradizendo que a imersão é rígida.

Analogamente, se $\{Y_j\}$ diagonaliza A_{ξ_2} obtemos que

$$\nabla^{\perp}_X \alpha(Y_j, Y_j) = 0 \quad \forall\, j$$

$X_i = \sum_k a_{ik} Y_k$, onde os a_{ik}'s são constantes ao longo de γ. Para $i \neq j$ temos:

$$\alpha(X_i, X_j) = \sum_k a_{ik} a_{jk} \alpha(Y_k, Y_k) + \sum_{l \neq k} a_{ik} a_{jl} \alpha(Y_k, Y_l)$$

$$\nabla^{\perp}_X \alpha(X_i, X_j) = \sum_{l \neq k} a_{ik} a_{jl} \nabla^{\perp}_X \alpha(Y_k, Y_l)$$

Mas para $k \neq l$ $\nabla^{\perp}_X \alpha(Y_k, Y_l)$ é múltiplo de ξ_2 e $\nabla^{\perp}_X \alpha(X_i, X_j)$ é múltiplo de ξ_1. Então $\nabla^{\perp}_X \alpha(X_i, X_j) = 0\ \forall\, i \neq j$. Logo $\nabla^c \alpha = 0$.

Seja $c(t)$ uma curva diferenciável por partes e $\xi(t)$ um campo normal paralelo ao longo de c. Sejam $V(t)$ e $W(t)$ campos ∇^c-paralelos ao longo de c. Como $\nabla^c \alpha = 0$, temos então

$$\nabla^{\perp}_{c'(t)} \alpha(V(t), W(t)) = 0$$

Portanto $\langle \alpha(V(t), W(t)), \xi(t) \rangle$ é constante ao longo de c, isto é, A_ξ tem autovalores constantes. Então $f(M)$ é uma subvariedade de curvatura principal constante. Pelo teorema de Heintze-Olmos-Thorbergsson (Teorema A de [16]), $f(M)$ é uma subvariedade isoparamétrica ou uma variedade focal de uma subvariedade isoparamétrica de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Se $f(M)$ é focal de uma isoparamétrica N em $\mathbb{R}^{n+2}$. N é uma subvariedade $(n+1)-$dimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$. Então $N = S^m \times \mathbb{R}^k$ por ser isoparamétrica. Como M é $n-$dimensional ($n \geq 2$) então $N = S^1 \times \mathbb{R}^n$ e M é totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{n+2}$, contradizendo o fato de que f é rígida. Portanto $f(M)$ é uma subvariedade isoparamétrica e o resultado segue agora dos teoremas 1.18 e 1.20 de [33] ■

As hipersuperfícies isoparamétricas homogêneas da esfera são classificadas em [32], visto que são órbitas da representação de isotropia de um par Riemanniano simétrico (também chamado *s−representação*).

2.3 Rigidez de Subvariedades Homogêneas em Codimensão Dois

Um teorema clássico de Beez-Killing afirma que uma imersão isométrica de M^n em Q_c^{n+1} cujo posto da segunda forma fundamental é ≥ 3 em todo ponto é rígida. Uma generalização deste resultado para codimensões maiores foi obtida por Allendoerfer. Se $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ é uma imersão isométrica, e $\xi_1, ..., \xi_p$ é uma base de $T_{f(x)}M^\perp$, o número tipo $\tau(x)$ é definido como o maior inteiro τ, para o qual existe $X_1, ..., X_\tau \in T_xM$ tal que os τp vetores $A_{\xi_i}(X_j)$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq \tau$, são linearmente independentes. $\tau(x)$ não depende da base $\xi_1, ..., \xi_p$ escolhida. Observe que se a codimensão p é 1, então $\tau(x)$ é o posto da segunda forma fundamental. O resultado de Allendoerfer afirma que se uma imersão $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ tem número tipo $\tau(x) \geq 3$ em todo $x \in M$, então f é rígida.

Um resultado global devido a Sacksteder diz que se M^n é compacta ($n \geq 3$ se $c \leq 0$ e $n \geq 4$ se $c > 0$) então $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ é rígida se o conjunto dos pontos em que f é totalmente geodésica não disconecta M.

Neste trabalho usaremos os resultados de do Carmo-Dajczer para estudar rigidez em codimensão 2. Definimos agora o conceito de $s-$nulidade de uma imersão isométrica que foi introduzido em [8] no estudo de rigidez. Seja $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Para cada inteiro s, $1 \leq s \leq p$, e para cada subespaço $s-$dimensional $U^s \subset T_{f(x)}M^\perp$ defina $\alpha_{U^s} : T_xM \times T_xM \to U^s$ como a projeção de α em U^s, isto é,

$$\alpha_{U^s}(X, Y) = \pi_{U^s} \circ \alpha(X, Y)$$

onde π_{U^s} é a projeção ortogonal $\pi_{U^s} : T_{f(x)}M^\perp \to U^s$. A $s-$nulidade de f em x, é definida por:

$$\nu_s(x) = \max_{U^s \subset T_{f(x)}M^\perp} \{\dim(N(\alpha_{U^s}))\}$$

onde $N(\alpha_{U^s})$ denota o espaço de nulidade de α_{U^s}, isto é,

$$N(\alpha_{U^s}) = \{X \in T_xM : \alpha_{U^s}(X, Y) = 0 \quad \forall \ Y \in T_xM\}$$

A $1-$nulidade $\nu_1(x)$ é a dimensão máxima que o núcleo de um operador de Weingarten assume em x. De fato, se η é um gerador unitário do subespaço $1-$dimensional U^1 em $T_{f(x)}M^\perp$ então

$$\alpha_{U^1}(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle \eta = \langle A_\eta X, Y \rangle \eta$$

Logo $N(\alpha_{U^1}) = \ker(A_\eta)$ e $\nu_1(x) = \max\{\dim(\ker A_\eta) : \eta \in T_{f(x)}M^\perp\}$. do Carmo - Dajczer provaram o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1 *Seja $f : M^n \to I\!R^{n+k}$ uma imersão isométrica, com $n > 2k$, $k \leq 5$. Suponha que para todo $x \in M$ e todo inteiro s, $1 \leq s \leq k$, a $s-$nulidade $\nu_s(x)$ de f em x satisfaz $\nu_s(x) \leq n - (2s+1)$. Então f é rígida.*

Observe que o fato de uma imersão isométrica $f : M^n \to I\!R^N$ ser rígida não implica que a restrição $f|_U$ a um aberto $U \subset M$ é rígida. Por outro lado quando f não é rígida pode existir $U \subset M$ tal que $f|_U$ é rígida.

Lema 2.3.2 *Seja $f : M^n \to I\!R^N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa. Se f é não-rígida então existe $p \in M$ e uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f|_{U'}$ é não-rígida para qualquer vizinhança $U' \subset U$ de p.*

Prova:

Suponha que para cada $x \in M$ e toda vizinhança U de x existe um aberto $U' \subset U$ tal que $f|_{U'}$ é rígida. Fixemos um ponto p e uma vizinhança U' de p tal que $f|_{U'}$ é rígida. Se $g : M^n \to I\!R^N$ é outra imersão isométrica, existe uma isometria T de $I\!R^N$ tal que $f|_{U'} = T \circ g|_{U'}$. Definimos:

$$A = \{x \in M : f(x) = T(g(x))\}$$

É claro que A é não vazio e fechado. Além disso, o interior de A, denotado por $int(A)$ é não vazio. Seja q um ponto limite de $int(A)$. Nossa suposição implica que existe uma vizinhança V de q tal que $f|_V$ é rígida. Portanto existe uma isometria S de $I\!R^N$ tal que $f|_V = S \circ g|_V$. Seja $W = V \cap int(A)$. W é não vazio e $S = T$ em $g(W)$. Novamente nossa suposição implica que para cada $x \in W$ existe uma vizinhança $W' \subset W$ de x tal que $f|_{W'}$ é rígida, caso contrário x e W satisfariam o lema. Então $g|_{W'}$ é também rígida, o que implica que não existe um subespaço afim de $I\!R^N$ contendo $g(W')$. Como S e T coincidem em $g(W')$ então $S = T$ em todo ponto de $I\!R^N$. portanto $V \subset A$, A é aberto e então $A = M$. Mas isto significa que f é rígida, o que contradiz a hipótese do lema. ∎

Lema 2.3.3 *Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$, $n \geq 5$ uma imersão isométrica de uma variedade homogênea tal que $\nu_f(x) \leq n - 5$ para todo $x \in M$. Então ou f é rígida ou para todo $x \in M$ existe $\eta \in T_{f(x)}M^\perp$ tal que $\mathrm{rk}(A_\eta) \leq 2$.*

Prova:

Suponhamos que f é não-rígida. Mostraremos que o índice de $1-$nulidade satifaz $\nu_1(x) \geq n-2$ para todo $x \in M$. Isto significa que existe $\eta \in T_{f(x)}M^\perp$ tal que $\mathrm{rk}(A_\eta) \leq 2$. De fato, suponha que exista $q \in M$ com $\nu_1(q) \leq n-3$. Então existe uma vizinhança V de q tal que $\nu_1(x) \leq n-3$ para todo $x \in V$. Visto que $n \geq 5$ e $\nu_2(x) = \nu(x) \leq n-5$, segue do teorema 2.3.1 que $f|_{V'}$ é rígida para todo aberto $V' \subset V$. Como estamos supondo que f não é rígida, pelo lema acima existe $p \in M$ e uma vizinhança U de p tal que se $U' \subset U$ e $p \in U'$ então $f|_{U'}$ não é rígida. Se M é homogênea existe uma isometria h de M tal que $h(p) = q$. Então existe um aberto $V' \subset V$ dado por $V' = h(U')$ para algum $U' \subset U$ com $p \in U'$. Temos então que $f|_{V'}$ é rígida e $f|_{U'}$ é não-rígida. Isto é uma contradição, visto que U' e V' são variedades Riemannianas isométricas. ■

Utilizaremos a seguir um lema algébrico obtido por M. do Carmo e M. Dajczer [8]. Este lema desempenha um papel crucial em alguns problemas relacionados com rigidez de imersões isométricas.

Seja W um espaço vetorial real $m-$dimensional. Uma forma bilinear simétrica $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle : W \times W \to I\!R$ será chamada *produto interno* se além disso for não-degenerada, isto é, se $x \in W$ e $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle = 0$ para todo $y \in W$ então $x = 0$. Se q é a dimensão maximal de um subespaço de W onde $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ é negativa definida, e $p = m - q$, dizemos que $(W\, , \langle\!\langle , \rangle\!\rangle)$ é do tipo (p, q) e denotamos por $W^{(p,q)}$. Um subespaço $V \subset W$ é *degenerado* relativo a $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ se a restrição do produto interno $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ a $V \times V$ é degenerado. Um vetor $x \in W$ tal que $\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = 0$ é chamado um *vetor nulo*; chamaremos um subespaço de W de *subespaço nulo* se todos os seus elementos são vetores nulos. É imediato verificar que um subespaço $V \subset W$ é não-degenerado se e somente se $V \cap V^{\perp} = \{0\}$ onde $V^{\perp}$ denota o subespaço ortogonal a V. Se V é degenerado então $V \cap V^{\perp}$ é um subespaço nulo não trivial de W.

Seja V um espaço vetorial real $n-$dimensional e $\beta : V \times V \to W$ uma forma bilinear (com valor vetorial) simétrica. Dizemos que β é *plana* em relação ao produto interno $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle : W \times W \to I\!R$ se,

$$\langle\!\langle \beta(x,y), \beta(z,w) \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \beta(x,w), \beta(z,y) \rangle\!\rangle \;\; \forall\, x,y,z,w \in V, \tag{2.7}$$

e que β é *nula* se

$$\langle\!\langle \beta(x,y), \beta(z,w) \rangle\!\rangle = 0 \;\; \forall\, x,y,z,w \in V. \tag{2.8}$$

Denotaremos o *espaço de nulidade* de β por $N(\beta)$, isto é:

$$N(\beta) = \{\, x \in V \,:\, \beta(y,x) = 0 \;\; \forall\, y \in V\}$$

A dimensão de $N(\beta)$ (*nulidade de* β), será denotada por $\nu(\beta)$. Podemos agora enunciar o referido lema algébrico:

Lema 2.3.4 *Seja* $\beta : V^n \times V^n \to W^{(k,k)}$ *uma forma bilinear simétrica, tal que* $\beta \not\equiv 0$. *Suponha que* β *é plana em relação ao produto interno* $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ *em* $W^{(k,k)}$, *e que* $n - 2k > \nu(\beta)$. *Então, se* $k \leq 5$, W *admite uma decomposição em soma direta ortogonal*

$$W^{(k,k)} = W_1{}^{(r,r)} \oplus W_2{}^{(k-r,k-r)}$$

tal que, se escrevermos $\beta(x,y) = \beta_1(x,y) \oplus \beta_2(x,y)$, *onde* $\beta_1(x,y) \in W_1$ *e* $\beta_2(x,y) \in W_2$, $x, y \in V$, *temos:*

i) $\beta_1 \neq 0$ *e* β_1 *é nula, isto é* $\langle\!\langle \beta_1(x,y), \beta_1(z,w) \rangle\!\rangle = 0 \;\; \forall\, x,y,z,w \in V$

ii) β_2 *é plana* *e* $\dim(N(\beta_2)) \geq n - \dim(W_2)$.

A prova deste lema pode ser obtida em [8], onde os autores conjecturam além disso, que o mesmo resultado deve valer sem a restrição $k \leq 5$. A aplicação que faremos aqui (para $k = 2$) é como em [8] e [22], e pode ser descrita como se segue.

Considere duas imersões isométricas $f : M^n \to I\!R^{n+2}$ e $\tilde{f} : M^n \to I\!R^{n+2}$. Sejam $\alpha : T_pM \times T_pM \to T_{f(p)}M^\perp$ e $\tilde{\alpha} : T_pM \times T_pM \to T_{\tilde{f}(p)}M^\perp$ a segunda forma fundamental em $p \in M$ de f e $\tilde{f}$ respectivamente. No espaço W definido por:

$$W = T_{f(p)}M^\perp \oplus T_{\tilde{f}(p)}M^\perp$$

defina o produto interno

$$\langle\!\langle \xi + \tilde{\xi}, \eta + \tilde{\eta} \rangle\!\rangle = \langle \xi, \eta \rangle - \langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle \tag{2.9}$$

onde $\xi, \eta \in T_{f(p)}M^\perp$ $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in T_{\tilde{f}(p)}M^\perp$ e $\langle , \rangle$ é o produto interno de $I\!R^{n+2}$. Observe que $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ é do tipo $(2,2)$, isto é $W = W^{(2,2)}$.

Defina além disso uma forma bilinear simétrica $\beta : T_pM \times T_pM \to W^{(2,2)}$ por:

$$\beta(X,Y) = \alpha(X,Y) \oplus \tilde{\alpha}(X,Y) \quad \forall\, X, Y \in T_pM \tag{2.10}$$

Segue da equação de Gauss para f e $\tilde{f}$ que:

$$\begin{aligned} \langle \alpha(X,Y), \alpha(Z,W) \rangle - \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) \rangle &= \\ = \langle \tilde{\alpha}(X,Y), \tilde{\alpha}(Z,W) \rangle &- \langle \tilde{\alpha}(X,W), \tilde{\alpha}(Y,Z) \rangle \end{aligned}$$

de onde se obtém que:

$$\langle\!\langle \beta(X,Y), \beta(Z,W) \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \beta(X,W), \beta(Y,Z) \rangle\!\rangle \;\; \forall\; X, Y, Z, W \in T_pM$$

o que mostra que β é uma forma bilinear plana em relação ao produto interno definido acima. Neste contexto poderemos então aplicar o lema 2.3.4 se tivermos $\nu(\beta) < n-4$.

Observação 2.3.5 A decomposição $W = W_1 \oplus W_2$ do lema 2.3.4 não é única. Na aplicação do mesmo para o caso em que $W = T_{f(p)}M^{\perp} \oplus T_{\tilde{f}(p)}M^{\perp}$, podemos observar que:

a) Se β é nula, então $\langle \alpha(X,Y), \alpha(Z,W)\rangle = \langle \tilde{\alpha}(X,Y), \tilde{\alpha}(Z,W)\rangle$, para todo $X, Y, Z, W \in T_pM$, o que implica que existe um operador linear ortogonal

$$T : T_{f(p)}M^{\perp} \to T_{\tilde{f}(p)}M^{\perp} \text{ tal que } \tilde{\alpha} = T \circ \alpha.$$

Assim se $\theta \in T_{f(p)}M^{\perp}$ e $\tilde{\theta} = T(\theta)$ os operadores de Weingarten A_θ e $A_{\tilde{\theta}}$ são iguais.

b) Se β não é nula então $W_1 = W_1^{(1,1)}$ e $W_2 = W_2^{(1,1)}$. Segue da demonstração em [8] do lema acima que podemos obter $W_1 = U \oplus \tilde{U}$, $W_2 = V \oplus \tilde{V}$, onde $U, V \subset T_{f(p)}M^{\perp}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \subset T_{\tilde{f}(p)}M^{\perp}$, $U \perp V$, e $\tilde{U} \perp \tilde{V}$.

De fato, o subespaço $S(\beta) \subset W$ é degenerado, isto é, $S(\beta) \cap S(\beta)^{\perp} \neq \{0\}$. Se β não é nula segue que $S(\beta) \cap S(\beta)^{\perp}$ é 1−dimensional. Seja $\xi + \tilde{\xi} \in S(\beta) \cap S(\beta)^{\perp}$. Podemos tomar W_1 como o subespaço de W gerado pelos vetores $\{\xi + \tilde{\xi}, \xi - \tilde{\xi}\}$ e W_2 seu complemento ortogonal. Então se $\eta \perp \xi$ em $T_{f(p)}M^{\perp}$ e $\tilde{\eta} \perp \tilde{\xi}$ em $T_{\tilde{f}(p)}M^{\perp}$, $W_1 = span\{\xi + 0, 0 + \tilde{\xi}\}$ e $W_2 = span\{\eta + 0, 0 + \tilde{\eta}\}$.

Portanto, se $\dim(N(\beta)) < n-4$, podemos aplicar o lema 2.3.4. No caso em que β não é nula, existem $\xi, \eta \in T_{f(p)}M^{\perp}$ e $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in T_{\tilde{f}(p)}M^{\perp}$, com $\xi \perp \eta$, $\tilde{\xi} \perp \tilde{\eta}$ e:

$$\beta_1 = \alpha_\xi + \tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}} \quad , \quad \beta_2 = \alpha_\eta + \tilde{\alpha}_{\tilde{\eta}}$$

onde $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}, \tilde{\alpha}_{\tilde{\eta}}$ são as projeções de α e $\tilde{\alpha}$, nas direções dos vetores ξ, η, $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ respectivamente. Para $\forall\, X, Y, Z, W \in T_pM$ temos:

i) $\langle\!\langle \beta_1(X,Y), \beta_1(Z,W)\rangle\!\rangle = 0$, ou seja

$$\langle \alpha_\xi(X,Y), \alpha_\xi(Z,W)\rangle = \langle \tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}(X,Y), \tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}(Z,W)\rangle \tag{2.11}$$

ii) $\langle\!\langle \beta_2(X,Y), \beta_2(Z,W)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \beta_2(X,W), \beta_2(Y,Z)\rangle\!\rangle$, ou seja

$$\begin{aligned}\langle \alpha_\eta(X,Y), \alpha_\eta(Z,W)\rangle - \langle \alpha_\eta(X,W), \alpha_\eta(Y,Z)\rangle &= \\ = \langle \tilde{\alpha}_{\tilde{\eta}}(X,Y), \tilde{\alpha}_{\tilde{\eta}}(Z,W)\rangle - \langle \tilde{\alpha}_{\tilde{\eta}}(X,W), \tilde{\alpha}_{\tilde{\eta}}(Y,Z)\rangle \end{aligned} \tag{2.12}$$

Lema 2.3.6 *Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$, $n \geq 5$, uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M. Sejam $p, q \in M$, e h uma isometria tal que $h(p) = q$. Suponha que $\dim[dh_p(N_f(p)) \cap N_f(q)] \leq n - 5$ (em particular se $\nu_f(p) \leq n - 5$). Então existem $\xi \in T_{f(p)}M^\perp$ e $\tilde{\xi} \in T_{f(q)}M^\perp$ para os quais $A_{\tilde{\xi}} = A_\xi$, isto é*

$$dh_p(A_\xi X) = A_{\tilde{\xi}}(dh_p X) \quad \forall\, X \in T_pM$$

Além disso, se as segundas formas fundamentais em p e q não são congruentes, existem $\eta \perp \xi$ e $\tilde{\eta} \perp \tilde{\xi}$ com $\mathrm{rk}A_\eta \leq 2$, $\mathrm{rk}A_{\tilde{\eta}} \leq 2$, e se $\mathrm{rk}A_\eta = 2$ (ou $\mathrm{rk}A_{\tilde{\eta}} = 2$) então $dh_p(\ker A_\eta) = \ker A_{\tilde{\eta}}$.

Prova:

Considere as imersões isométricas f e $\tilde{f} = f \circ h$, e denote por α e $\tilde{\alpha}$, respectivamente, a segunda forma fundamental em p dessas imersões. Como observamos acima, a forma $\beta = \alpha + \tilde{\alpha}$ é plana e $\nu(\beta) = \dim(dh_p N_f(p) \cap N_f(q)) \leq n - 5$. Podemos então aplicar o lema 2.3.4 e obter a decomposição $\beta = \beta_1 + \beta_2$, onde $\beta_1 \neq 0$ é *nula*, β_2 é plana, e além disso $\nu(\beta_2) \geq n - \dim W_2$.

Se $\beta_2 = 0$ então β é nula, o que significa que α e $\tilde{\alpha}$ são congruentes. Pela observação 2.3.5 item-a, existe um operador $T : T_{f(p)}M^\perp \to T_{f(q)}M^\perp$ tal que $\tilde{\alpha} = T \circ \alpha$. Escolha um vetor $\xi \in T_{f(p)}M^\perp$, defina $\tilde{\xi} = T(\xi)$ e então $A_{\tilde{\xi}} = A_\xi$.

Caso contrário, se $\beta_2 \neq 0$, então, como $\dim(W_2)$ é par, segue que $\dim(W_2) = 2$. Logo, existem $\xi, \eta \in T_{f(p)}M^\perp$ e $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in T_{f(q)}M^\perp$, $\xi \perp \eta$ e $\tilde{\xi} \perp \tilde{\eta}$, para os quais se verificam as equações 2.11 e 2.12, e tal que $\nu(\beta_2) \geq n - dim(W_2) = n - 2$.

Observe que $\ker A_\eta = N(\alpha_\eta)$, logo $\dim(\ker A_\eta) = \nu(\alpha_\eta) \geq \nu(\beta_2) \geq n - 2$. Analogamente se mostra que $\dim(\ker A_{\tilde{\eta}}) \geq n - 2$.

Suponhamos que $\dim(\ker A_\eta) = n - 2$. Se $X \in \ker A_{\tilde{\eta}} = N(\tilde{\alpha}_{\tilde{\eta}})$, temos então pela equação 2.12 que:

$$\langle \alpha_\eta(X, Y), \alpha_\eta(Z, W) \rangle \;=\; \langle \alpha_\eta(X, W), \alpha_\eta(Y, Z) \rangle \quad \forall\; Y, Z, W \in T_pM$$

Defina $\varphi : T_pM \to I\!R$, $\varphi(W) = \alpha_\eta(X, W)$. É claro que $\dim(\ker(\varphi)) \geq n - 1$. Como $\dim(\ker A_\eta) = n - 2$, existe $W \in \ker(\varphi)$ tal que $W \notin \ker(A_\eta)$, ou seja, $\alpha_\eta(X, W) = 0$ e existe Z tal que $\alpha_\eta(Z, W) \neq 0$. Pela equação acima então temos que $\alpha_\eta(X, Y) = 0$ $\forall\, Y$, ou seja, $X \in \ker(A_\eta)$. Isto mostra que $\ker(A_{\tilde{\eta}}) \subset dh_p(\ker A_\eta)$. Segue que

$$dh_p(\ker A_\eta) = \ker(A_{\tilde{\eta}})$$

pois $\dim(\ker(A_{\tilde{\eta}})) \geq n - 2$ e $\dim(dh_p(\ker A_\eta)) = n - 2$

Para concluir a demonstração resta mostrar que $A_{\tilde{\xi}} = A_\xi$ para o caso em que α e $\tilde{\alpha}$ não são congruentes.

Observamos em primeiro lugar, que na equação 2.11 se fizermos $Z = X$ e $W = Y$, temos que $|\alpha_\xi(X,Y)| = |\tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}(X,Y)|$ para quaisquer $X, Y \in T_pM$. Se existirem vetores $X_0, Y_0, X_1, Y_1 \in T_pM$ para os quais se verifiquem:

$$\alpha_\xi(X_0, Y_0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}(X_0, Y_0) \neq 0 \quad e \quad \alpha_\xi(X_1, Y_1) = -\tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}(X_1, Y_1) \neq 0$$

teríamos uma contradição com a equação 2.11. Podemos então escolher $\tilde{\xi}$ convenientemente, de modo que:

$$\alpha_\xi(X,Y) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}(X,Y) \;\; \forall \;\; X, Y \in T_pM^n$$

Como já observamos, $\tilde{\alpha}_{\tilde{\xi}}(X,Y) = \hat{\alpha}_{\tilde{\xi}}(dh_pX, dh_pY)$ onde $\hat{\alpha}$ é a segunda forma fundamental da imersão f em q. Portanto

$$\alpha_\xi(X,Y) = \hat{\alpha}_{\tilde{\xi}}(dh_pX, dh_pY) \;\; \forall \;\; X, Y \in T_pM^n$$

Como $\alpha_\xi(X,Y) = \langle A_\xi X, Y\rangle$ e $\hat{\alpha}_{\tilde{\xi}}(dh_pX, dh_pY) = \langle A_{\tilde{\xi}}(dh_pX), dh_pY\rangle$, então para todo $X, Y \in T_pM^n$

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle A_{\tilde{\xi}}(dh_pX), dh_pY\rangle = \langle (dh_p)^{-1}(A_{\tilde{\xi}}(dh_pX)), Y\rangle$$

onde a segunda igualdade vem do fato de h ser uma isometria. Temos então finalmente que

$$dh_p(A_\xi X) = A_{\tilde{\xi}}(dh_pX) \quad \forall \;\; X \in T_pM^n.$$

Isto conclui a demonstração do lema. ■

Lema 2.3.7 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 5$, uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea. Suponha que existam $p, q \in M$ satisfazendo as seguintes condições: $\nu_f(p) \leq n - 5$ e $\operatorname{rk}(A_\theta) \geq 2$ para todo $\theta \in T_{f(q)}M^\perp$. Então $\nu_f \equiv \nu_f(p)$, e a distribuição de nulidade relativa é invariante por isometrias. Além disso, para todo $x \in M$ e todo $\theta \in T_{f(x)}M^\perp$, $\operatorname{rk}(A_\theta) \geq 2$.*

Prova:

Afirmamos, em primeiro lugar, que todo operador de Weingarten em p tem posto ≥ 2. De fato, se a segunda forma fundamental de f nos pontos p e q são congruentes, a afirmação é óbvia. Este é o caso se $\operatorname{rk}(A_\theta) \geq 3 \; \forall \theta \in T_{f(q)}M^\perp$. Caso contrário, segue do lema 2.3.6 que existe $\eta \in T_{f(p)}M^\perp$ tal que $\operatorname{rk}A_\eta = 2$. Como $\nu_f(p) \leq n - 5$ então $\operatorname{rk}A_\theta \geq 3$ para todo $\theta \in T_{f(p)}M^\perp$ que não é múltiplo de η.

Podemos agora repetir o argumento acima para o ponto p e um ponto $x \in M$ qualquer. Se h é uma isometria tal que $h(p) = x$, denotando por α e $\tilde{\alpha}$ as segundas formas fundamentais em p das imersões f e $\tilde{f} = f \circ h$ respectivamente, observamos que se α e $\tilde{\alpha}$ são congruentes então $\nu_f(x) = \nu_f(p)$, $\mathrm{rk}A_\theta \geq 2$ para todo θ em $T_{f(x)}M^\perp$ e $dh_p(N_f(p)) = N_f(x)$. Por outro lado, se α e $\tilde{\alpha}$ não são congruentes segue do lema 2.3.6 que existem ξ, $\eta \in T_{f(p)}M^\perp$, e $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta} \in T_{f(x)}M^\perp$ tais que $dh_p A_\xi = A_{\tilde{\xi}} dh_p$, $dh_p(\ker A_\eta) = \ker A_{\tilde{\eta}}$, e $\dim(\ker A_{\tilde{\eta}}) = n-2$, portanto $dh_p(N_f(p)) = N_f(x)$. Em particular $\nu_f(x) = \nu_f(p)$. Como $\dim(\ker A_{\tilde{\eta}}) = n-2$ então todo operador de Weingarten em x tem posto ≥ 2, senão o índice de nulidade seria maior do que $n-5$.

Consideremos agora outro ponto $y \in M$ escolhido arbitrariamente e g uma isometria tal que $g(x) = y$. Como $(g \circ h)(p) = y$, segue do que foi mostrado acima que $d(g \circ h)_p(N_f(p)) = N_f(y)$. Como também $dh_p(N_f(p)) = N_f(x)$, é imediato verificar que $dg_x(N_f(x)) = N_f(y)$, e o lema está demonstrado. ∎

O resultado abaixo tem um papel central na classificação das subvariedades homogêneas em codimensão dois.

Teorema 2.3.8 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea tal que $\nu_0 = \min\{\nu_f(x) : x \in M\} \leq n-5$. Então um dos casos seguintes ocorrem:*

a) Em todo $x \in M$ existe $\eta(x) \in T_{f(x)}M^\perp$ tal que $\mathrm{rk}A_{\eta(x)} \leq 1$. Se $x, y \in M$ são pontos arbitrários e h é uma isometria tal que $h(x) = y$ existem $\xi(x) \in T_{f(x)}M^\perp$ ortogonal a $\eta(x)$, e $\xi(y) \in T_{f(y)}M^\perp$ ortogonal a $\eta(y)$ tais que $A_{\xi(x)} = A_{\xi(y)}$, isto é

$$dh_x(A_{\xi(x)}X) = A_{\xi(y)}(dh_x X) \;\; \forall \;\; X \in T_x M^n$$

b) $\nu_f \equiv \nu_0$ e em todo $x \in M$ existe $\eta \in TM^\perp$, tal que $\mathrm{rk}A_{\eta(x)} = 2$. A distribuição $\ker(A_\eta)$ é diferenciável e invariante por isometrias. Além disso se $x, y \in M$ e h é uma isometria tal que $h(x) = y$ então existem $\xi(x) \perp \eta(x)$, e $\xi(y) \perp \eta(y)$ tal que $A_{\xi(x)} = A_{\xi(y)}$.

c) f é rígida.

Prova:

Suponhamos que existe $q \in M$ tal que $\mathrm{rk}A_\theta \geq 2$, $\forall \theta \in T_{f(q)}M^\perp$. Pelo lema 2.3.7, $\nu_f = \nu_0$, e $\forall x \in M$, $\forall \theta \in T_{f(x)}M^\perp$, $\mathrm{rk}A_\theta \geq 2$. Pelo lema 2.3.3, ou f é rígida ou $\forall x \in M$ existe $\eta \in T_{f(x)}M^\perp$ tal que $\mathrm{rk}A_\eta = 2$. Note que em cada ponto não podem existir duas direções linearmente independentes com rk ≤ 2, caso contrário $\nu \geq n-4$. As afirmações restantes em a) e b) seguem agora do lema 2.3.6. ■

Observação : Uma mesma imersão pode satisfazer mais de um item da teorema; como veremos no próximo capítulo, se uma imersão é caracterizada pelo item (a) então ela não é rígida, enquanto que no caso do item (b) veremos que a imersão é rígida.

Se $\mathrm{rk}(A_\eta)$ é constante em uma vizinhança $U \subset M$ então as seções ξ e η podem ser escolhidas diferenciáveis em U. Seja $\rho : U \subset M = G/H \to G$ uma seção local diferenciável, onde H é o subgrupo de isotropia de $G = Iso(M)$ em $p \in U$. Para cada $x \in U$, $\rho(x)$ é uma isometria que denotamos por ρ_x que aplica p em x. Se X é um vetor em T_pM definimos o campo $X(x) = (\rho_x)_*(X)$ que é diferenciável em U. Fixado ξ em $T_pM^\perp$, podemos definir $\xi(x)$ em cada $x \in U$ por:

$$A_{\xi(x)}(X(x)) = (\rho_x)_*(A_\xi X)$$

para todo $X \in T_pM$, onde $X(x) = (\rho_x)_*(X)$. Observe que $A_{\xi(x)}(X(x))$ define um campo diferenciável em U, visto que ρ é diferenciável.

Seja $X \in \ker(A_{\eta(p)})$. Se $\nu_f \leq n-3$ existe $Y \in T_pM$ tal que $\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle \neq 0$. Estendemos X, Y a campos diferenciáveis em U através de ρ. Observe que a constante $\langle \alpha(X(x), Y(x)), \xi(x) \rangle$ é não nula. Como $X \in \ker(A_\eta)$, então

$$\alpha(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle \xi$$

logo ξ é diferenciável. No caso em que $\mathrm{rk}(A_\eta) = 1$, se $\nu_f \leq n-2$ então a dimensão do primeiro espaço normal é 2. A diferenciabilidade de ξ então segue do fato que A_ξ é diferenciável. ■

Capítulo 3

Imersões com Posto menor que Três

3.1 Imersões com $\mathrm{rk}A_\eta \leq 1$.

Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea tal que $\nu_0 = \min_{x \in M}\{\nu_f(x)\} \leq n - 4$. Suponha que para cada $x \in M$ existe uma base ortonormal $\{\xi, \eta\}$ do espaço normal $T_xM^\perp$ tal que $h_* \circ A_\xi = \pm A_\xi \circ h_*$ para toda isometria $h \in Iso(M)$, e $\mathrm{rk}A_\eta \leq 1$. Observe se U é uma aberto no qual $\mathrm{rk}A_\eta \equiv 1$, então $\ker A_\eta$ é uma distribuição diferenciável definida em U.

Lema 3.1.1 *Seja $U \subset M$ um aberto tal que $\nu_f \leq n - 4$ e $\mathrm{rk}A_\eta \equiv 1$ em U. Se X é um campo vetorial em $\ker(A_\eta)$ então $(\nabla^\perp_X \eta)(p) = 0$ para todo $p \in U$.*

Prova:

Fixe um ponto $p \in U$ qualquer, denote por V o núcleo do operador A_η, onde $\eta = \eta(p)$ e escolha um vetor unitário ξ em $T_{f(p)}M^\perp$ ortogonal a η. Consideremos o seguinte subespaço W

$$W = \{Z \in V : A_\xi Z \in \mathrm{im}A_\eta\}$$

Afirmamos que $\dim W \leq n - 3$. De fato, como $\mathrm{rk}A_\eta = 1$, então o operador

$$A_\xi|_W : W \to \mathrm{im}A_\eta$$

tem posto ≤ 1, logo se $\dim W > n - 3$ seguiria que $\dim\ker(A_\xi|_W) > n - 4$. Como $\ker(A_\xi|_W) \subset \ker A_\eta$, segue que $\ker(A_\xi|_W) \subset N_f(p)$, e então $\nu_f(p) > n - 4$, o que contradiz a hipótese.

Assim o complemento ortogonal de W em V tem dimensão ≥ 2. Sejam X_1, X_2 campos pertencentes ao núcleo de A_η com $X_1(p), X_2(p) \perp W$, e $\{X_1(p), X_2(p)\}$ linearmente independentes. Como $A_\eta X_2 \equiv 0 \equiv A_\eta X_1$, da equação de Codazzi:

$$\nabla_{X_1} A_\eta X_2 - A_\eta \nabla_{X_1} X_2 - A_{\nabla^\perp_{X_1}\eta} X_2 = \nabla_{X_2} A_\eta X_1 - A_\eta \nabla_{X_2} X_1 - A_{\nabla^\perp_{X_2}\eta} X_1$$

temos

$$A_{\nabla^{\perp}_{X_2}\eta}X_1 - A_{\nabla^{\perp}_{X_1}\eta}X_2 = A_\eta[X_1, X_2] \in \mathrm{im}A_\eta.$$

Agora, observando que $\nabla^{\perp}_{X_2}\eta = \lambda\xi$ e $\nabla^{\perp}_{X_1}\eta = \delta\xi$ e restringindo a equação acima ao ponto p, temos

$$A_\xi[\lambda(p)X_1(p) - \delta(p)X_2(p)] \in \mathrm{im}A_\eta$$

Porém $\bar{X} = [\lambda(p)X_1(p) - \delta(p)X_2(p)] \perp W$, logo $\bar{X} = 0$ pela definição de W. Isto implica que $\lambda(p) = \delta(p) = 0$ pois $\{X_1(p), X_2(p)\}$ é linearmente independente, e portanto:

$$(\nabla^{\perp}_{X_1}\eta)(p) = (\nabla^{\perp}_{X_2}\eta)(p) = 0$$

Consequentemente, para todo campo vetorial $X \in \ker A_\eta$ tal que $X(p) \perp W$ temos $(\nabla^{\perp}_{X}\eta)(p) = 0$.

Consideremos agora, campos $X, Y \in \ker A_\eta$ com $X(p) \perp W$ e $X(p) \neq 0$. Novamente aplicando a equação de Codazzi, temos:

$$A_\eta[X,Y] = A_{\nabla^{\perp}_{Y}\eta}X - A_{\nabla^{\perp}_{X}\eta}Y = A_{\nabla^{\perp}_{Y}\eta}X$$

onde a igualdade da direita vem do fato que $\nabla^{\perp}_{X}\eta = 0$. Como $\nabla^{\perp}_{Y}\eta = \lambda\xi$, se $\lambda(p) \neq 0$ resulta da equação acima que $A_{\xi(p)}X \in \mathrm{im}A_\eta$. Mas isto contradiz a escolha de X, logo $(\nabla^{\perp}_{Y}\eta)(p) = 0$. ∎

Lema 3.1.2 *Seja U como no lema 3.1.1. Então existe uma imersão isométrica de U em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Prova:

Já vimos que ξ é uma seção diferenciável do fibrado normal sobre U. Consideremos o fibrado $E = TU \times \mathbb{R}$ contido no fibrado normal. Definimos $\bar{\alpha} : TU \times TU \to E$ por

$$\bar{\alpha}(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle \xi.$$

Mostraremos que $\bar{\alpha}$ satisfaz as equações de Gauss e Codazzi e então o resultado segue do Teorema Fundamental das Subvariedades. A equação de Gauss segue imediatamente do fato que $\mathrm{rk}A_\eta \equiv 1$. Para a equação de Codazzi, consideremos X e Y tangentes a U. Devemos mostrar que

$$\nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X.$$

Pela equação de Codazzi para a imersão f

$$\nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X$$

observamos que é suficiente mostrar que

$$A_{\nabla^\perp_X \xi} Y = A_{\nabla^\perp_Y \xi} X \ \ \forall X, Y.$$

Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base ortonormal tal que $X_i \in \ker A_\eta$ para $i \geq 2$. Usando o lema 3.1.1 concluímos que cada lado da equação acima é igual a $\langle X, X_1\rangle\langle Y, X_1\rangle A_\eta(X_1)$ e então a equação de Codazzi está verificada. ∎

Teorema 3.1.3 *Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$, uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea tal que $\nu_0 = min\{\nu_f(x) : x \in M\} \leq n-4$. Suponha que para cada $x \in M$ existe uma base ortonormal $\{\xi, \eta\}$ de $T_xM^\perp$ tal que $\mathrm{rk}(A_\eta) \leq 1$ e $h_* \circ A_\xi = \pm A_\xi \circ h_*$ para toda $h \in Iso(M)$. Então $M = \bar{M}^m \times I\!R^{\nu_0}$ e $f = \bar{f} \times i$ onde $i : I\!R^{\nu_0} \to I\!R^{\nu_0}$ é a identidade e $\min_{x\in\bar{M}}\{\nu_{\bar{f}}(x)\} = 0$. Além disso um dos casos seguintes ocorrem:*

a) $\bar{M}$ é isométrica a uma esfera S^m e $\bar{f}$ é homotópica através de imersões isométricas à imersão de S^m em um hiperplano de $I\!R^{m+2}$.

b) $\bar{M}$ é recoberta por $S^{m-1} \times I\!R$ e $\bar{f} \circ \pi$ é homotópica através de imersões isométricas a $g \times i$ onde g é a imersão de S^{m-1} em um hiperplano e i é a aplicação identidade (π é a aplicação de recobrimento).

Prova:

Suponhamos primeiramente que $A_\eta \equiv 0$. Observe que $\nu_f(x) \leq n-2$ para todo $x \in M$, caso contrário pela homogeneidade M seria *plana* o que contradiz $\nu_0 \leq n-4$. Então para qualquer campo vetorial Y tangente a M encontramos X linearmente independente com Y tal que $A_\xi X \neq 0$. Aplicando a equação de Codazzi para X e Y na direção de η, obtemos $\langle \nabla^\perp_Y \eta, \xi\rangle = 0$, mostrando que o primeiro espaço normal de f é paralelo. Pelo resultado de Erbacher em ([13]) f reduz codimensão. Então M é uma hipersuperfície homogênea de um subespaço afim $(n+1)-$dimensional de $I\!R^{n+2}$ e portanto tem curvatura seccional não-negativa.

Suponhamos agora que exista $p \in M$ tal que $\mathrm{rk} A_\eta = 1$. Observe que como A_ξ é constante, então $\nu_f(p) = /min\{\nu_f\} \leq n-4$. Então pelo lema 3.1.2 existe uma vizinhança U de p que pode ser imersa isometricamente em $I\!R^{n+1}$. Além disso, visto que para toda isometria $h \in Iso(M)$ temos $h_* \circ A_\xi = \pm A_\xi \circ h_*$, os autovalores de

A_ξ são constantes e então U é uma *hipersuperfície isoparamétrica local* de $I\!R^{n+1}$. Um resultado de Terng (ver Teorema 3.4 em [34]) afirma que existe uma hipersuperfície isoparamétrica completa N de $I\!R^{n+1}$ que estende U. Da classificação das hipersuperfícies isoparamétricas no espaço Euclideano temos que $N = S^l \times I\!R^{n-l}$. Portanto U tem curvatura seccional não-negativa e, pela homogeneidade, M também tem curvatura seccional não-negativa.

Em ambos os casos, a primeira parte do teorema segue do resultado de Hartman em [15].

Estudamos agora a imersão $\bar{f} : \bar{M}^m \to I\!R^{m+2}$. Observe que $\bar{M}$ e $\bar{f}$ satisfazem as hipóteses desta seção. Usando a mesma notação, suponhamos inicialmente que $A_\eta \equiv 0$. Usando a equação de Codazzi e o fato que $\nu_0 \leq n-4$, concluímos que η é paralelo e então $\bar{f}(\bar{M})$ está contida em um hiperplano de $I\!R^{m+2}$. Portanto, pela classificação das hipersuperfícies homogêneas concluímos que $\bar{M}$ é isométrica a uma esfera S^m, visto que $\bar{\nu}_0 = 0$. Se existe uma vizinhança U de $\bar{M}$ tal que $\mathrm{rk} A_\eta \equiv 1$, obtemos como acima que U é um aberto de uma esfera S^m ou de $S^{m-1} \times I\!R$. Isto implica pela homogeneidade que ou $\bar{M}$ tem curvatura constante ou existem duas distribuições involutivas e paralelas definidas em $\bar{M}$ de dimensão 1 e $m-1$. No primeiro caso os resultados de [5] e [6] implicam que $\bar{M}$ é simplesmente conexa e portanto $\bar{M}$ é isométrica a uma esfera S^m. O segundo caso implica, pelo teorema de decomposição de de Rham, que o recobrimento universal de $\bar{M}$ é $S^{m-1} \times I\!R$.

Se $\bar{M}$ é isométrica a uma esfera, visto que $m \geq 4$, aplicando um teorema de Moore ([24]) obtemos que $\bar{f}$ é homotópica através de imersões isométricas à imersão de S^m em um hiperplano.

Por outro lado, se o recobrimento de $\bar{M}$ é $S^{m-1} \times I\!R$ o Teorema 2(ii) de [27] descreve a imersão. ∎

Obs. Se $\bar{M}$ é não-compacta podemos aplicar o Teorema 1 de [27]. Segue deste resultado que $\bar{M}$ é simplesmente conexa, e então $\bar{M}$ é isométrica a $S^{n-1} \times I\!R$.

3.2 Imersões com rk$A_\eta = 2$

Nesta seção f denota uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana homogênea $n-$dimensional M em $I\!R^{n+2}$ tal que em cada ponto de M existem seções diferenciáveis ortonormais ξ , η do fibrado normal, satisfazendo as seguintes propriedades. $\mathrm{rk}(A_\eta) = 2$ e a distribuição $\ker(A_\eta)$ é invariante por isometrias; e A_ξ é constante, isto é, se h é uma isometria de M, então $h_* A_\xi = \pm A_\xi h_*$. Em particular isto implica que $\nu_f(x)$ é constante em M.

Proposição 3.2.1 *Sejam δ_i, $i = 1, 2$ os autovalores não-nulos de A_η. Se δ_i é constante e $\nu_f \leq n - 4$ então $M = S^2 \times S^k \times I\!R^{n-2-k}$, onde $n - 2 - k = \nu_f$.*

Prova:

Seja $h \in Iso(M)$ e $\bar{f} = f \circ h$. Visto que A_ξ e A_η são constantes, para pontos arbitrários $p, q \in M$ temos que α_p e α_q são congruentes. A equação de Codazzi implica que $\langle \nabla^\perp_X \xi, \eta \rangle(p) = \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta \rangle(q)$. Segue então do Teorema de Rigidez que f e $\bar{f}$ são congruentes. Portanto para cada $h \in Iso(M)$ existe um movimento rígido $\tilde{h}$ de $I\!R^{n+2}$ tal que $\tilde{h} \circ f = \bar{f} = f \circ h$. Então a prova do teorema 2.2.1 implica que $f(M) = \bar{M}^m \times I\!R^{n-m}$, e $\bar{M}$ é uma hipersuperfície isoparamétrica de uma esfera S. Além disso $m \geq 4$ pois $\nu_0 \leq n - 4$.

Seja N um vetor unitário normal a S em $I\!R^{n+2}$. Se V é um vetor tangente a S temos que N, V são campos ortonormais do fibrado normal da imersão $i : \bar{M} \longrightarrow I\!R^{n+2}$. Seja θ o ângulo tal que

$$N = cos(\theta)\xi + sen(\theta)\eta \qquad V = -sen(\theta)\xi + cos(\theta)\eta.$$

Visto que N é umbílico, então A_V tem um autovalor μ de multiplicidade $m - 2$. Portanto os autovalores distintos de μ devem ter o mesmo valor, pois $m \geq 4$ (ver [32]). Isto implica que $\bar{M}$ é um produto $S^2 \times S^k$, e o resultado segue. ■

Observamos que com as hipóteses da proposição acima, concluímos que $S^k \times I\!R^{n-2-k}$ são as folhas da distribuição dada por $\ker A_\eta$. Assim elas são totalmente geodésicas em M e os campos normais ξ e η são paralelos. Mostraremos que sob as hipóteses desta seção obtemos a mesma conclusão, o que implica que $\delta = \delta_1 = \delta_2$ é constante.

Lema 3.2.2 *A distribuição $\ker(A_\eta)$ é involutiva e suas folhas são variedades homogêneas.*

Prova:

Suponhamos inicialmente que, para toda isometria h temos que $h_* \circ A_{\eta(p)} = A_{\eta(q)} \circ h_*$, $\forall p, q$ tais que $h(p) = q$. Como A_ξ é constante, a demonstração do Teorema 2.2.1 implica que f é isoparamétrica em uma esfera, em particular, tem fibrado normal plano em $\mathbb{R}^{n+2}$. Aplicando a equação de Codazzi para $X, Y \in \ker A_\eta$, temos

$$A_\eta[X,Y] = A_{\nabla^\perp_X \eta} Y \; - \; A_{\nabla^\perp_Y \eta} X \tag{3.1}$$

Como $\nabla^\perp_X \eta$ e $\nabla^\perp_Y \eta$ são múltiplos de ξ, segue que $A_\eta[X,Y] = 0$, logo $\ker A_\eta$ é involutiva.

Podemos então supor que existe uma isometria h tal que $h(p) = q$ e $h_* \circ A_{\eta(p)} \neq \pm A_{\eta(q)} \circ h_*$.

Sejam $X \in \ker(A_\eta)$ e $Z \in TM$ campos definidos em uma vizinhança de p. Então $\bar{X} = h_*(X)$ e $\bar{Z} = h_*(Z)$ são campos definidos em uma vizinhança de q e $\bar{X} \in \ker(A_\eta)$ pois $\ker(A_\eta)$ é invariante por isometrias. Consideremos as equações de Codazzi para A_ξ em p e q.

$$\nabla_X A_\xi(Z) \; - \; A_\xi(\nabla_X Z) \; - \; A_{\nabla^\perp_X \xi} Z = \nabla_Z A_\xi(X) \; - \; A_\xi(\nabla_Z X) \; - \; A_{\nabla^\perp_Z \xi} X$$

$$\nabla_{\bar{X}} A_\xi(\bar{Z}) \; - \; A_\xi(\nabla_{\bar{X}} \bar{Z}) \; - \; A_{\nabla^\perp_{\bar{X}} \xi} \bar{Z} = \nabla_{\bar{Z}} A_\xi(\bar{X}) \; - \; A_\xi(\nabla_{\bar{Z}} \bar{X}) \; - \; A_{\nabla^\perp_{\bar{Z}} \xi} \bar{X}.$$

Comparando estas equações e usando o fato que A_ξ é constante, $\nabla^\perp_{\bar{Z}} \xi$ e $\nabla^\perp_Z \xi$ são múltiplos de η e que $X, \bar{X} \in \ker(A_\eta)$ obtemos

$$\langle \nabla^\perp_{\bar{X}} \xi, \eta \rangle A_\eta \bar{Z} = \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta \rangle \bar{A}_\eta Z$$

onde $\bar{A}_\eta Z = h_*(A_\eta Z)$. Como esta equação vale para todo $Z \in T_pM$, se $\langle \nabla^\perp_{\bar{X}} \xi, \eta \rangle \neq 0$, segue que $h_* \circ A_{\eta(p)} = k A_{\eta(q)} \circ h_*$. Porém $\mathrm{rk}(A_{\eta(p)}) = \mathrm{rk}(A_{\eta(q)}) = 2$ e $(\ker(A_\eta))^\perp$ é invariante por isometrias. Como A_ξ é constante, a equação de Gauss implica que a restrição de A_η ao subespaço $(\ker(A_\eta))^\perp$ tem determinante constante. Como este determinante é não-nulo, segue da expressão acima que $k^2 = 1$, e isto implica que $h_* \circ A_{\eta(p)} = A_{\eta(q)} \circ h_*$ ou $h_* \circ A_{\eta(p)} = -A_{\eta(q)} \circ h_*$. Portanto $\langle \nabla^\perp_X \xi, \eta \rangle = 0$ para todo $X \in \ker(A_\eta)$.

Por fim observamos que as folhas de $\ker(A_\eta)$ são homogêneas, pois esta distribuição é invariante por isometrias. Sejam N_p e N_q as folhas maximais , pelos pontos p e $q \in M$ respectivamente. Se $h \in Iso(M)$ e $h(p) = q$, então existem vizinhanças $U_p \subset N_p$ e $U_q \subset N_q$ tais que $h(U_p) = U_q$. De fato, consideremos uma curva diferenciável $c : (-\epsilon, \epsilon) \to N_p$ qualquer satisfazendo $c(0) = p$. Como $c'(t) \in \ker A_{\eta(c(t))}$ e a distribuição é invariante por isometrias, então $(h \circ c)'(t) = dh_{c(t)}(c'(t))$ pertence à distribuição para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, logo (ver [19]. vol.-1 pag. 86) a curva

$t \mapsto (h \circ c)(t)$ está contida na variedade integral pelo ponto $(h \circ c)(0) = h(p) = q$, isto é, $h(c(t)) \in N_q$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Assim, o conjunto $A = \{x \in N_p : h(x) \in N_q\}$ é aberto em N_p. É claro que o mesmo argumento mostra que o complementar $A^c = \{x \in N_p : h(x) \notin N_q\}$ também é aberto em N_p. Logo como $A \neq \phi$ ($p \in A$), pela conexidade segue que $h(N_p) \subset N_q$. Como p e q são escolhidos arbitrariamente, então $h(N_p) = N_q$.

Em particular, cada variedade integral maximal é uma variedade Riemanniana homogênea com a métrica induzida de M, pois se $q \in N_p$ então a restrição $h|_{N_p}$ é uma isometria de N_p. Além disso duas variedades integrais distintas N_p e N_q são variedades isométricas. ∎

Consideremos a imersão $g = f|_{N_p} : N_p \to \mathbb{R}^{n+2}$, e denotemos a segunda forma fundamental e a conexão normal de g por $\bar{\alpha}$ e $\bar{\nabla}^{\perp}$ respectivamente. Como acima, N_g denota o espaço de nulidade relativa e $N_1(g)$ denota o primeiro espaço normal de g.

Lema 3.2.3 $\dim N_1(g) \leq 1$ *e* g *é uma imersão* 1*-regular.*

Prova:

O espaço normal de g é gerado por η, ξ, Z_1, Z_2, onde Z_1, Z_2 é uma base de $\mathrm{im}(A_\eta)$. Considerando a equação de Codazzi

$$\nabla_Z A_\eta(X) - A_\eta(\nabla_Z X) - A_{\nabla_Z^{\perp}\eta} X = \nabla_X A_\eta(Z) - A_\eta(\nabla_X Z) - A_{\nabla_X^{\perp}\eta} Z$$

onde $X \in \ker(A_\eta)$ e $Z \in \mathrm{im}(A_\eta)$ e tomando o produto interno por $Y \in \ker(A_\eta)$, temos

$$\langle \nabla_Z^{\perp}\eta, \xi\rangle\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = \langle \nabla_X Y, A_\eta(Z)\rangle. \tag{3.2}$$

Como o núcleo da aplicação linear $Z \mapsto \nabla_Z^{\perp}\eta$ de T_pM em $T_pM^{\perp}$ tem dimensão $\geq n-1$ e $\dim(\mathrm{im}A_\eta) = 2$, segue que existe $Z \in \mathrm{im}(A_\eta)$ tal que $\langle \nabla_Z^{\perp}\eta, \xi\rangle = 0$. Por (3.2) temos então que $\langle \nabla_X Y, A_\eta Z\rangle = 0 \ \forall\ X, Y \in \ker(A_\eta)$. Se existe uma isometria h tal que $h(p) = p$ e $W = h_*(A_\eta Z) \neq \pm A_\eta Z$ então $\langle \nabla_X Y, W\rangle = 0$ e portanto N_p é totalmente geodésica em M. Neste caso segue de (3.2) e do fato que A_ξ é constante, que ou g é totalmente geodésica ou então $N_1(g)$ é gerado por ξ.

Caso contrário a projeção ortogonal de $\{\nabla_X Y : X, Y \in \ker(A_\eta)\}$ sobre $\mathrm{im}(A_\eta)$ é uma distribuição $1-$dimensional invariante por isometrias. Denotemos por Z_1 um campo unitário que gera localmente esta distribuição, e $Z_2 \in \mathrm{im}(A_\eta)$ um campo unitário ortogonal a Z_1. Observe que para toda isometria h de M temos $h_*(Z_1) = \pm Z_1$ e $h_*(Z_2) = \pm Z_2$. Novamente por 3.2 temos

$$\langle \nabla_X Y, Z_1\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle\langle \nabla_W^{\perp}\eta, \xi\rangle$$

onde $A_\eta(W) = Z_1$. Portanto para $X, Y \in \ker(A_\eta)$

$$\bar{\alpha}(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle (\xi \;+\; \langle \nabla^\perp_W \eta, \xi \rangle Z_1)$$

Visto que A_ξ é constante, g é $1-$regular. Observemos também que $\langle \nabla^\perp_W \eta, \xi \rangle$ é constante visto que a distribuição gerada por Z_1 é invariante por isometrias e A_ξ é constante. ∎

Lema 3.2.4 *Se ν_f e ν_g denotam o índice de nulidade relativa de f e g respectivamente, temos:*
(a) Se M é compacta e $n \geq 4$, então $\nu_g \equiv 0$ e $N_1(g)$ é paralelo.
(b) Se M é não-compacta e $\nu_f \leq n-5$, então $\nu_g < n-3$ e $N_1(g)$ é paralelo.

Prova:

Se M é compacta existe um ponto $x_0 \in M$ tal que $\alpha(X.X) \neq 0$ para qualquer $X \in T_{x_0}M$. Segue da prova do lema 3.2.3 que se Y é uma direção de nulidade relativa para g em $x \in M$, então $\langle \alpha(Y,Y), \xi \rangle = 0$. Visto que $Y \in \ker A_\eta$, $\ker(A_\eta)$ é invariante por isometrias e A_ξ é constante, se h é uma isometria tal que $h(x) = x_0$ então $\alpha(\bar{Y}, \bar{Y}) = 0$ onde $\bar{Y} = h_*(Y)$. Isto contradiz a escolha do ponto x_0, consequentemente $\nu_g(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Se $n \geq 4$ então $\dim(N_p) \geq 2$. Sejam X e Y campos linearmente independentes tangentes a N_p e β um campo normal ortogonal a $N_1(g)$. Segue da equação de Codazzi que

$$\langle \bar{\alpha}(X,X), \bar{\nabla}^\perp_Y \beta \rangle = 0$$

Visto que $\bar{\alpha}(X,X) \neq 0$ então $\bar{\nabla}^\perp_Y \beta$ é ortogonal a $N_1(g)$ para todo Y tangente a N_p. Portanto $N_1(g)$ é paralelo.

Para demonstrar a parte (b), observamos inicialmente que $\nu_g \leq \nu_f + 2$. Logo $\nu_g \leq n-3$. Suponhamos que $\nu_g = n-3$. Como $\dim(N) = n-2$ então para X ortogonal a N_g, $\bar{\alpha}(X,X) \neq 0$. Aplicando novamente a equação de Codazzi para $Y \in N_g$ e $\beta \in N_1(g)^\perp$ obtemos $\langle \bar{\alpha}(X,X), \bar{\nabla}^\perp_Y \beta \rangle = 0$. Como $\zeta = \xi + \langle \nabla^\perp_W \eta, \xi \rangle Z_1$ pertence a $N_1(g)$, segue então que para Y como acima, $\bar{\nabla}^\perp_Y \zeta$ é paralelo a ζ. Porém como observamos na prova do lema 3.2.3, $\langle \nabla^\perp_W \eta, \xi \rangle$ é constante e portanto $||\zeta||$ é constante, implicando que $\nabla^\perp_Y \zeta = 0$. Então,

$$\bar{\nabla}^\perp_Y \xi = -\langle \nabla^\perp_W \eta, \xi \rangle \bar{\nabla}^\perp_Y Z_1$$

Segue que $\langle A_\xi Y, Z_1 \rangle = \langle \bar{\nabla}^\perp_Y \xi, Z_1 \rangle = 0$.

Isto implica que $\dim\{A_\xi(Y) : Y \in N_g\} \leq 1$, de onde concluímos que $\nu_g \leq \nu_f + 1$. Como estamos supondo $\nu_g = n-3$ temos uma contradição com $\nu_f \leq n-5$. Portanto, $\nu_g < n-3$. Podemos então considerar vetores linearmente independentes X, Y tangentes a N_p que não pertencem a $\ker(A_\zeta)$. Aplicando a equação de Codazzi como acima, obtemos que ζ e $N_1(g)$ são paralelos. ∎

Proposição 3.2.5 *Nas hipóteses desta seção temos:*

(a) Se M é compacta e $n \geq 4$, então N é isométrica a uma esfera S^{n-2}.

(b) Se M é não compacta e $\nu_f \leq n-5$, então N é isométrica ao produto Riemanniano $S^k \times I\!\!R^{n-2-k}$, onde $k = n-2-\nu_g \geq 2$.

Prova:

Como $N_1(g)$ é paralelo, pelo resultado de Erbacher ([13]) concluímos que $g(N)$ pertence a um subespaço afim $(n-1)$-dimensional de $I\!\!R^{n+2}$. Como pelo lema 3.2.2, N é uma variedade Riemanniana homogênea, o resultado segue de [18], [25] e [14]. ∎

Lema 3.2.6 *Com a notação do lema 3.2.3 temos:*

(a) $A_\xi(Z_1)$ é ortogonal a $\ker(A_\eta)$

(b) $A_\xi(Z_2)$ é ortogonal a TS^k.

Prova:

Seja $\zeta = \xi + \langle \nabla^\perp_W \eta, \xi\rangle Z_1$ como acima. Visto que ζ é paralelo, então

$$\bar{\nabla}^\perp_X \xi = -\langle \nabla^\perp_W \eta, \xi\rangle \bar{\nabla}^\perp_X Z_1 \quad \forall X \in \ker(A_\eta) \tag{3.3}$$

Concluímos, como na prova do lema 3.2.4, que $\langle A_\xi(Z_1), X\rangle = 0$ para todo X tangente a N_p. Para provar o item (b) podemos supor que $A_\xi(Z_2)$ não é ortogonal a $\ker(A_\eta)$ em todo ponto, visto que A_ξ é constante. Observe que a projeção ortogonal de $A_\xi(Z_2)$ sobre $\ker(A_\eta)$ gera uma distribuição 1−dimensional, que é invariante por isometrias, pela observação feita na prova do lema 3.2.3. Seja V um vetor unitário pertencente a esta distribuição. Mostraremos que V é uma direção de nulidade relativa da imersão g e isto implica o item (b) do lema.

Segue da equação de Gauss que $\langle R(X,Y)Z_1, Z_2\rangle = 0$ para quaisquer $X, Y \in \ker(A_\eta)$. Então pela equação de Ricci, concluímos que a imersão $i : N \to M$ tem fibrado normal plano. Denotemos por $\tilde{\nabla}^\perp$ e $\tilde{R}^\perp$ a conexão normal e o tensor de curvatura normal da imersão i. Como A_ξ é constante segue de 3.3 que $\langle \bar{\nabla}^\perp_X Z_1, Z_2\rangle$ é constante, logo $\tilde{\nabla}^\perp_X Z_1 = cZ_2$ onde c é uma constante. Isto implica que

$$\langle \tilde{\nabla}^\perp_X \tilde{\nabla}^\perp_Y Z_1, Z_2\rangle = 0 \quad \forall\, X, Y \in \ker(A_\eta)$$

Então, usando que $\tilde{R}^\perp = 0$, concluímos que $\tilde{\nabla}^\perp_{[X,Y]} Z_1 = 0$. Este fato implica que $\langle \bar{\nabla}^\perp_{[X,Y]} Z_1, Z_2 \rangle = 0$, e por (3.3) segue que $\langle A_\xi(Z_2), [X,Y] \rangle = 0$. Em particular temos que $[X, V]$ é ortogonal a V e portanto $\langle \nabla_V V, X \rangle = 0$ para todo $X \in \ker(A_\eta)$ ortogonal a V. Pela proposição 3.2.5 N é isométrica a $S^k \times I\!R^{n-2-k}$. Seja $\bar{V}$ um campo vetorial unitário na direção da projeção ortogonal de V sobre TS^k. Como acima, podemos mostrar que $\langle \nabla_{\bar{V}} \bar{V}, X \rangle = 0$ para qualquer $X \in TS^k$ ortogonal a $\bar{V}$. Se $k = 2$ então $\bar{V} \equiv 0$, visto que a direção $\bar{V}$ é invariante por isometrias e distribuição gerada por $\bar{V}$ seria totalmente geodésica em S^2. Por outro lado, se $k \geq 3$, consideremos campos X e Y tangentes a S^k e ortogonais a $\bar{V}$. X e Y são autovetores de A_ξ correspondentes ao mesmo autovalor $\lambda \neq 0$. Afirmamos que $\nabla_X Y$ é também um autovetor de A_ξ correspondente ao autovalor λ. Consideremos a equação de Codazzi

$$\nabla_X A_\xi Z - A_\xi \nabla_X Z - A_{\nabla^\perp_X \xi} Z = \nabla_Z A_\xi X - A_\xi \nabla_Z X - A_{\nabla^\perp_Z \xi} X$$

onde Z é um campo vetorial qualquer. Observando que A_ξ é constante, $X \in \ker(A_\eta)$ e $\nabla^\perp_X \xi = 0$, concluímos que

$$\langle A_\xi(\nabla_X Y), Z \rangle = \lambda \langle \nabla_X Y, Z \rangle,$$

o que prova a afirmação. Se $\langle \nabla_X Y, \bar{V} \rangle \neq 0$ então $\bar{V}$ é um autovetor da A_ξ, visto que para vetores ortogonais $\nabla_X Y \in TS^k$ por 3.2. Isto implica que $\langle A_\xi Z_2, \bar{V} \rangle = 0$ e então $A_\xi Z_2$ é ortogonal a TS^k. Por outro lado se $\langle \nabla_X Y, \bar{V} \rangle = 0$ obtemos uma contradição computando a curvatura seccional de S^k segundo o plano gerado por X e $\bar{V}$. Esta curvatura é dada por:

$$\langle \bar{R}(X, \bar{V})\bar{V}, X \rangle = -\bar{V} \langle \nabla_X \bar{V}, X \rangle \; + \; \langle \nabla_X \bar{V}, \nabla_{\bar{V}} X \rangle \; - \; \langle \nabla_{[X,\bar{V}]} \bar{V}, X \rangle =$$

$$= -\langle [X, \bar{V}], X \rangle \, \langle \nabla_X \bar{V}, X \rangle = -\langle \nabla_X \bar{V}, X \rangle^2 \; \leq \; 0.$$

pois $\nabla_{\bar{V}} X$ é ortogonal a X e $\bar{V}$, e estendendo X e $\bar{V}$ por isometrias, $\langle \nabla_X \bar{V}, X \rangle$ é constante. ∎

Lema 3.2.7 *As folhas N de $\ker(A_\eta)$ são totalmente geodésicas em M, e ξ e η são seções paralelas do fibrado normal da imersão f.*

Prova:

Segue da prova do lema 3.2.3 que para $X, Y \in \ker(A_\eta)$ temos $\langle \nabla_X Y, Z_2 \rangle = 0$. Então temos que provar que $\langle \nabla_X Y, Z_1 \rangle = 0$. Para autovetores ortogonais X, Y do operador de Weingarten A_ζ temos $\langle \nabla_X Y, Z_1 \rangle = 0$. Se X é uma direção de nulidade relativa da imersão g, também temos $\langle \nabla_X X, Z_1 \rangle = 0$, por 3.2. Assim falta provar que $\langle \nabla_X X, Z_1 \rangle = 0$ para $X \in TS^k$. Suponhamos que $\langle \nabla_X X, Z_1 \rangle \neq 0$. Segue da prova do lema 3.2.6 que se $X \in TS^k$, então X e $\nabla_X X$ são autovetores de A_ξ com mesmo autovalor λ. Visto que $\langle \nabla_X X, Z_2 \rangle = 0$ e $\nabla_X X$ não tem componente na direção de nulidade de g então $A_\xi(Z_1) = \lambda Z_1$. Se $\nu_g > \nu_f$, então $span\{Z_2, V\}$ é invariante por A_ξ.

Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base ortonormal que diagonaliza A_ξ com autovalores λ_i e $X_1, X_2 \in span\{Z_2, V\}$. Como $V \in N_g$, $\langle \alpha(V, V), \xi \rangle = 0$. Então segue da equação de Gauss que a curvatura seccional do plano gerado por Z_2 e V é $-\langle A_\xi(V), Z_2 \rangle^2$, logo um dos autovalores de A_ξ é não-positivo. Assumiremos então que $\lambda_1 \neq \lambda$. Consideremos os casos possíveis $\lambda_2 = \lambda$ e $\lambda_2 \neq \lambda$. Mostraremos que ambos os casos conduzem a uma contradição.

Caso 1 : Se $\lambda_i \neq \lambda$ para $i = 1, 2$, e X é um vetor unitário no autoespaço de λ, pela equação de Codazzi

$$\nabla_{X_i} A_\xi X - A_\xi \nabla_{X_i} X - a_i A_\eta X = \nabla_X A_\xi X_i - A_\xi \nabla_X X_i - b A_\eta X_i$$

onde $a_i = \langle \nabla^\perp_{X_i} \xi, \eta \rangle$ e $b = \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta \rangle$, obtemos

$$\lambda \nabla_{X_i} X - A_\xi \nabla_{X_i} X = \lambda_i \nabla_X X_i - A_\xi \nabla_X X_i + A_\eta(U)$$

onde $U = (a_i X - b X_i)$. Notemos que $\langle \nabla^\perp_U \xi, \eta \rangle = 0$ e então ou $U \in \ker(A_\eta)$ ou $A_\eta(U)$ é paralelo a Z_2 por 3.2. Em qualquer dos casos temos $\langle A_\eta(U), Y \rangle = 0$ para todo Y no autoespaço de λ, denotado por E_λ. Isto implica na equação de Codazzi acima que

$$(\lambda_i - \lambda) \langle \nabla_X X_i, Y \rangle = 0.$$

Como estamos supondo que $\lambda_i \neq \lambda$ concluímos que $\langle \nabla_X Y, X_i \rangle = 0$. Observamos que A_ξ pode ter autovalores *nulos*. Visto que $\lambda \neq 0$, com uma aplicação similar da equação de Codazzi obtemos que $\nabla_X Y$ é ortogonal a $\ker(A_\xi)$. Então a distribuição definida pelo autoespaço E_λ é auto-paralela em M e suas variedades integrais são esferas S^{k+1} de curvatura constante λ^2. Observe que o campo vetorial Z_1 é tangente a S^{k+1} e invariante por isometrias. Portanto a caracteristica de Euler $\chi(S^{k+1}) = 0$ e então k é *par*. Como E_λ é auto-paralela, $\nabla_{Z_1} Z_1 \in TS^k$. Como Z_1 e TS^k são invariantes por isometrias então $\nabla_{Z_1} Z_1$ também é invariante por isometrias, e isto implica que $\nabla_{Z_1} Z_1 = 0$, caso contrário a característica de Euler de uma esfera de dimensão *par* seria nula. Usando que $\nabla_{Z_1} Z_1 = 0$ e $\langle \nabla_X X, Z_1 \rangle$ é constante, computamos a curvatura seccional do plano gerado por Z_1 e $X \in TS^k$. Obtemos uma contradição, visto que

$$\langle R(X, Z_1) Z_1, X \rangle\rangle = -Z_1 \langle \nabla_X Z_1, X \rangle + \langle \nabla_X Z_1, \nabla_{Z_1} X \rangle - \langle \nabla_{[X, Z_1]} Z_1, X \rangle$$

$$= -\langle \nabla_X X, Z_1 \rangle^2 \leq 0.$$

Caso 2: Suponhamos que $\lambda_2 = \lambda$. Neste caso mostraremos primeiramente que $\langle A_\xi V, Z_2 \rangle = 0$. Este fato implica que $\lambda_1 = 0$. Consideremos a equação de Codazzi

$$\nabla_{Z_1} A_\xi V - \langle \nabla^\perp_{Z_1} \xi, \eta \rangle \, A_\eta V - A_\xi \nabla_{Z_1} V = \nabla_V A_\xi Z_1 - \langle \nabla^\perp_V \xi, \eta \rangle \, A_\eta Z_1 - A_\xi \nabla_V Z_1.$$

Tomando o produto interno com V e observando que $\langle \nabla_V V, Z_1 \rangle = 0$ e A_ξ é constante, obtemos

$$2\langle \nabla_{Z_1} V, Z_2 \rangle \, \langle A_\xi V, Z_2 \rangle = \langle \nabla_V Z_1, Z_2 \rangle \, \langle A_\xi V, Z_2 \rangle.$$

Portanto se $\langle A_\xi V, Z_2 \rangle \neq 0$ temos que $2\langle \nabla_{Z_1} V, Z_2 \rangle = \langle \nabla_V Z_1, Z_2 \rangle$. Isto implica que se $\langle \nabla_{Z_1} V, Z_2 \rangle = 0$ então $\langle \nabla_V Z_1, Z_2 \rangle = 0$. Porém este último fato, juntamente com 3.3, implica que $\langle A_\xi V, Z_2 \rangle = 0$. Suponhamos então que $\langle \nabla_{Z_1} V, Z_2 \rangle \neq 0$. Tomando o produto interno da equação de Codazzi acima por X_2 e usando o fato que X_2 é um autovetor de A_ξ com autovalor λ obtemos

$$\langle \nabla_{Z_1} V, X_2 \rangle \, \lambda + \langle \nabla_{Z_1} X_2, Z_2 \rangle \, \langle A_\xi V, Z_2 \rangle = 0.$$

Como o plano $\{Z_2, V\}$ é invariantes por A_ξ, a restrição de A_ξ a este plano tem autovalores distintos, e os vetores Z_2 e V são invariantes por isometrias, segue que os autovetores de A_ξ são invariantes por isometrias. Então $X_2 = rZ_2 + sV$, onde r e s são constantes. Portanto a equação acima é equivalente a

$$(r\lambda + s\langle A_\xi V, Z_2 \rangle)\langle \nabla_{Z_1} V, Z_2 \rangle = 0$$

e então, se $r \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{s}{r}\langle A_\xi V, Z_2 \rangle.$$

Isto implica que

$$\lambda_1 = \frac{r}{s}\langle A_\xi V, Z_2 \rangle.$$

Considerando a mesma equação de Codazzi e tomando o produto interno por X_1 teremos agora

$$-\langle \nabla_{Z_1} V, X_1 \rangle \, \lambda_1 - \langle \nabla_{Z_1} X_1, Z_2 \rangle \, \langle A_\xi V, Z_2 \rangle = (\lambda - \lambda_1)\langle \nabla_V Z_1, X_1 \rangle.$$

Escrevendo $X_1 = -sZ_2 + rV$, um cálculo direto a partir da expressão para λ_1 implica que $-(1/rs)\langle \nabla_V Z_1, X_1 \rangle = 0$. Isto, juntamente com $\langle \nabla_V V, Z_1 \rangle = 0$ implica que $\langle \nabla_V Z_1, Z_2 \rangle = 0$. Este último fato implica que $\langle A_\xi V, Z_2 \rangle = 0$ por (3.3).

Mostramos então que se $\nu_g > \nu_f$, A_ξ tem dois autovalores distintos que são constantes em M e um deles é *zero*, e além disso $\ker(A_\xi) \subset \ker(A_\eta)$. Estes fatos implicam que a curvatura normal da imersão f é *zero*. Aplicando a equação de Codazzi, e utilizando o teorema de decomposição de de Rham concluímos que o recobrimento universal $\tilde{M}$ fatora em $\bar{M} \times \mathbb{R}^{n-2-k}$, onde $n-2-k = \nu_f$. Então a imersão $\tilde{f} = f \circ p = \bar{f} \times i$, onde p é a aplicação de recobrimento e $i : \mathbb{R}^{n-2-k} \to \mathbb{R}^{n-2-k}$ é a identidade. Observe que $\bar{f}$ é uma imersão em codimensão 2 com uma direção normal umbílica dada por ξ e para a direção ortogonal η ainda temos $\mathrm{rk}(A_\eta) = 2$. Segue do Teorema Fundamental das Subvariedades que $\bar{M}$ pode ser realizada como hipersuperfície de uma esfera S de curvatura constante. O número tipo desta imersão é 2 e $\bar{M}$ tem curvatura escalar constante. Além disso, a hipótese sobre o índice de nulidade relativa implica que $\bar{M}$ tem dimensão ≥ 4. Um teorema de Harle (ver [14]) afirma que com estas condições, a imersão de $\bar{M}$ em S é rígida. Como $\bar{M}$ é homogênea, concluímos que os autovalores de A_η são constantes e então a imagem de $\bar{M}$ é uma subvariedade isoparamétrica de S. Isto é uma contradição, visto que o autovalor *zero* de A_η tem multiplicidade $\dim \bar{M} - 2$, e isto implica que os autovalores não-nulos de A_η são os mesmos. Neste caso $\bar{M}$ seria um produto, o que contradiz que $A_\xi = \lambda I$, para $\lambda \neq 0$. Se $\nu_g = \nu_f$, com o mesmo argumento utilizado no caso 1, concluímos que todos os autovalores de A_ξ são iguais a λ, e isto resulta em uma contradição, como vimos acima. Por fim, segue de (3.2) que $\nabla^{\perp}_X \eta = \nabla^{\perp}_X \xi = 0$ para todo $X \in TM$. ∎

Teorema 3.2.8 *Com as hipóteses desta seção temos:*

(a) Se M é compacta e $n \geq 4$ então M é isométrica ao produto Riemanniano $S^2 \times S^{n-2}$

(b) Se M é não-compacta e $\nu_f \leq n-5$ então $M = S^2 \times S^k \times \mathbb{R}^{n-2-k}$, onde $k = n-2-\nu_f$.

Prova:

Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base ortonormal de autovetores do operador A_ξ com autovalores correspondentes λ_i. Segue do lema 3.2.7 que o fibrado normal da imersão f é plano e então podemos supor que $X_i \in \ker A_\eta$ para $i \geq 3$. Pela proposição 3.2.5 sabemos que cada folha N de $\ker(A_\eta)$ é um produto $S^k \times \mathbb{R}^{n-2-k}$ e, como o fibrado normal é plano, temos $\nu_f = \nu_g$. Este fato implica que os autovalores não-nulos de A_ξ correspondentes a direções em $\ker(A_\eta)$ são os mesmos. Denotemos por λ este autovalor. Consideremos a distribuição

$$D = \{X \in \ker A_\eta \ : \ A_\xi(X) = \lambda X\}.$$

D é globalmente definida, invariante por isometrias e diferenciável. Além disso a hipótese sobre a dimensão de M e ν_f implicam que $\dim D \geq 2$. Mostraremos em seguida que D e $D^{\perp}$ são involutivas e paralelas. Dividimos a prova em dois casos.

Caso 1: $\nu_f = 0$, isto é, $D = \ker A_\eta$. Afirmamos que $\lambda_1 = \lambda_2$. Se forem distintos então os autovetores X_1 e X_2 são invariantes por isometrias. Considerando a equação de Codazzi

$$\nabla_{X_1} A_\eta(X_2) - A_\eta(\nabla_{X_1} X_2) - A_{\nabla^\perp_{X_1}\eta}(X_2) = \nabla_{X_2} A_\eta(X_1) - A_\eta(\nabla_{X_2} X_1) - A_{\nabla^\perp_{X_2}\eta}(X_1).$$

e tomando o produto interno com $X \in \ker A_\eta$ obtemos

$$\langle \nabla_{X_1} X_2, X\rangle\, \delta_2 = \langle \nabla_{X_2} X_1, X\rangle\, \delta_1 \tag{3.4}$$

onde δ_i denota o autovalor de A_η correspondente a X_i. Como X_1 e X_2 são invariantes por isometrias então também $\langle \nabla_{X_1} X_2, X\rangle$ é invariante por isometrias. Portanto se $\langle \nabla_{X_1} X_2, X\rangle \neq 0$ concluímos que δ_1/δ_2 é constante. Por outro lado, pela equação de Gauss temos que $\delta_1\delta_2$ é constante. Portanto δ_1 e δ_2 são constantes. Neste caso f é rígida. Isto é uma contradição pois, como observamos acima, implicaria que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Então $\langle \nabla_{X_1} X_2, X\rangle = 0$. Vamos supor agora que $\lambda_i \neq \lambda$ para $i = 1, 2$. Como ξ é um campo normal paralelo e os autovalores de A_ξ são constantes, segue da equação de Codazzi que $\langle \nabla_{X_i} X_i, X\rangle = 0$ para $i = 1, 2$ e todo $X \in \ker(A_\eta)$. Isto implica que M é localmente um produto Riemanniano e então a curvatura seccional $K(X_i, X) = \lambda_i\lambda = 0$. Isto resulta na mesma contradição $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Portanto um dos autovalores λ_i é igual a λ. Supondo que $\lambda_2 = \lambda$, obtemos através de uma aplicação da equação de Codazzi que as distribuições $span\{X_1\}$ e $span\{X_1\}^\perp$ são involutivas e paralelas. Então $K(X_1, X) = 0$ para todo $X \perp X_1$. Em particular, temos

$$K(X_1, X_2) = \lambda_1\lambda + \delta_1\delta_2 = 0 = K(X_1, X_3) = \lambda_1\lambda$$

e novamente obtemos uma contradição pois isto implica que $\delta_1\delta_2 = 0$.

Então $\lambda_1 = \lambda_2$ e o mesmo argumento usado no último parágrafo da prova do lema 3.2.7 implica que se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ então $A_\xi \neq \lambda I$. Portanto $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda$. Logo se $X \in D$, tomando o produto interno da equação de Codazzi

$$(\nabla_{X_i} A_\xi)(X) = (\nabla_X A_\xi)(X_i)$$

com X_j obtemos $\langle \nabla_{X_i} X_j, X\rangle = 0$ para todo $i, j = 1, 2$. Então D e $D^\perp$ são involutivas e paralelas e pelo teorema de decomposição de de Rham concluímos que o recobrimento universal $\tilde{M}$ de M, considerado com a métrica do recobrimento, é um produto Riemanniano $M_1^2 \times M_2^{n-2}$. Pelo resultado em [2], $\tilde{f} = f \circ p$, onde p é a aplicação de recobrimento, é um produto de imersões em codimensão 1. Como M_1 e M_2 são variedades homogêneas, concluímos que M_1 é isométrica a uma esfera 2-dimensional e M_2 isométrica a uma $(n-2)$-esfera. Então as curvaturas seccionais de $\tilde{M}$ são não-negativas e portanto as de M também. Novamente pelo resultado em [5] temos que M é simplesmente conexa e portanto é um produto Riemanniano $S^2 \times S^{n-2}$.

Caso 2: $\nu_f > 0$. Vamos mostrar inicialmente que $\lambda_1 = \lambda_2$. Suponhamos que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Concluímos novamente de (3.4) que $\langle \nabla_{X_1} X_2, X \rangle = 0$ para $X \in \ker A_\eta$. Portanto $span\{X_1, X_2\}$ é integrável. Tomando o produto interno da equação de Codazzi

$$\nabla_X A_\eta X_i - A_\eta \nabla_X X_i = \nabla_{X_i} A_\eta X - A_\eta \nabla_{X_i} X$$

sucessivamente com X_1 e X_2 obtemos

$$X(\delta_1) = \delta_1 \langle \nabla_{X_1} X_1, X \rangle$$

$$X(\delta_2) = \delta_2 \langle \nabla_{X_2} X_2, X \rangle.$$

Visto que $\delta_1\delta_2$ é constante, temos $\delta_2 X(\delta_1) + \delta_1 X(\delta_2) = 0$ e isto implica que

$$\langle \nabla_{X_1} X_1, X \rangle = -\langle \nabla_{X_2} X_2, X \rangle. \tag{3.5}$$

Então, se $\lambda_1 = \lambda$, para um autovetor X correspondente a λ, e $V \in N_f$, resulta da equação de Codazzi

$$\langle \nabla_{X_2} X_2, X \rangle = 0 \quad , \quad \langle \nabla_{X_1} X_1, V \rangle = 0.$$

Este fato, juntamente com (3.5) implica que $span\{X_1, X_2\}$ é paralela. Assim M seria localmente um produto Riemanniano e isto implicaria que $K(X_1, X) = 0 = \lambda^2$. Repetindo o mesmo argumento, concluímos que $\lambda_i \neq \lambda$ e $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1, 2$. Neste caso aplicando a mesma equação de Codazzi temos novamente que $span\{X_1, X_2\}$ é paralela e M é localmente produto. Então $K(X_i, X) = 0 = \lambda\lambda_i$ e portanto $\lambda_i = 0$.

Então $\lambda_1 = \lambda_2$. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, A_ξ tem somente dois autovalores que são constantes. Como ξ é paralelo, da equação de Codazzi obtemos que o recobrimento universal $\tilde{M} = \bar{M} \times I\!R^m$ e a imersão f restrita a $\bar{M}$ tem índice de nulidade relativa nulo. Mostramos no caso 1 que este fato não pode ocorrer. Então $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda$. Se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, teríamos que $span\{X_1, X_2\}$ é paralelo e M é localmente um produto. Como observamos antes, isto implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e este é o único caso possível aqui. Segue que $D = \{X \in \ker A_\eta \mid A_\xi(X) = \lambda X\}$ e $D^\perp$ são integráveis e paralelas. Então o recobrimento universal de M é um produto $\bar{M}^{n-k} \times S^k$ e a imersão $\tilde{f} = f \circ p$ é um produto de imersões $f = f_1 \times f_2$, onde a segunda forma fundamental de f_1 tem posto 2. Agora, pelo resultado de [14] (ver também [10] teorema 3.4), $\bar{M}^{n-k} = S^2 \times I\!R^{n-2-k}$. Como acima, observamos que M tem curvatura seccional não-negativa e portanto M é simplesmente conexa. Isto conclui a prova do teorema. ∎

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Hipersuperfícies de Revolução

Dizemos que uma variedade Riemanniana é uma $G-$variedade de cohomogeneidade 1 se o grupo G age efetivamente e isometricamente em M, com órbitas principais de codimensão 1, isto é, as órbitas de dimensão maximal tem codimensão 1. Em uma $G-$variedade compacta de cohomogeneidade 1 todas as órbitas têm codimensão 1 e são difeomorfas, exceto duas no máximo. Hipersuperfícies do espaço Euclideano com uma ação de cohomogeneidade 1 foram estudadas em [30]. Foi provado que se as órbitas principais de G são umbílicas em M então M está imersa como uma hipersuperfície de revolução. Uma hipersuperfície de R^{n+1} é chamada hipersuperfície de revolução se é invariante pela ação do grupo $SO(n)_l$ de rotações em torno de uma linha fixa l de R^{n+1}. Em [3] os autores provaram que se cada órbita principal tem curvatura seccional constante então ela é umbilica em M. Portanto, pela classificação das subvariedades homogêneas em codimensão dois, temos o teorema seguinte.

Teorema 4.1.1 *Seja $f : M^n \to I\!R^{n+1}$, $n \geq 5$, uma imersão isométrica e M uma $G-$variedade compacta de cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais pela ação de G têm curvatura seccional positiva então $f(M)$ é uma hipersuperfície de revolução.*

Prova:

Como M é compacta existe $p \in M_{reg}$ tal que $\tau(p) \geq 3$. Por continuidade, $\tau(x) \geq 3$ em todo ponto x em uma vizinhança $U \subset M_{reg}$ de p. Portanto $\tau(x) \geq 3$ para todo ponto $x \in \Gamma = G(U)$. Pelo teorema de Beez-Killing $f|_\Gamma$ é rígida. Portanto existe um homomorfismo ϕ de G sobre um subgrupo G' do grupo de isometrias de $I\!R^{n+1}$ tal que $\phi(g)f(x) = f(g(x))$ para toda $g \in G$ e $x \in \Gamma$. Como M é compacta então G e G' são compactos. Por um resultado de Cartan (ver [19] vol. II, p. 111) concluímos que G' tem um ponto fixo em $I\!R^{n+1}$. Então a imagem da órbita Σ_x está contida em uma esfera S^n centrada em algum ponto fixo de G', logo é uma hipersuperfície isoparamétrica de S^n. Agora aplicamos às órbitas em Γ a fórmula de Cartan para hipersuperfícies isoparamétricas de esferas,

$$\sum_{i \neq j} m_i \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0$$

onde c é a curvatura constante da esfera, e $\lambda_1, ..., \lambda_g$ são as curvaturas principais distintas de multiplicidade m_i, $i = 1, ..., g$. Visto que, pela equação de Gauss, as curvaturas seccionais dos planos gerados pelas direções principais são dadas por $c + \lambda_i \lambda_j$, a positividade destas curvaturas implica que as órbitas em U são umbílicas em S^n. Seja $\gamma(t)$ a geodésica normal tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = \xi$. Seja N um vetor unitário normal a S^n e V um vetor tangente a S^n. Como ξ pertence ao plano gerado por N e V, e N e V são umbílicos, então ξ é umbílico. Portanto órbitas principais com $\tau(x) \geq 3$ são umbílicas em M, e isométricas a uma esfera S^{n-1}. Segue então que cada órbita principal é difeomorfa a S^{n-1}.

Observemos que se $\tau(x) \leq 2$ ao longo de uma órbita principal Σ, então Σ é uma variedade homogênea compacta imersa em codimensão 2 , com seções ortonormais do fibrado normal tal que $\mathrm{rk} A_\eta \leq 2$ e A_ξ constante, visto que $\xi = \gamma'(t)$. Como $\dim(\Sigma) \geq 4$, podemos então aplicar os teoremas 3.1.3 e 3.2.8. Como sabemos que estas órbitas são difeomorfas a esferas, concluímos que são de fato, isométricas a S^{n-1}. Agora, a prova do Teorema 1 em [3] mostra que órbitas de curvatura seccional constante e $\tau(x) \leq 2$ são umbílicas em M. ∎

4.2 Subvariedades Homogêneas de Einstein em Codimensão Dois

Subvariedades de Einstein homogêneas em codimensão dois foram consideradas em [4]. Uma variedade Riemanniana é uma variedade de Einstein quando o tensor de Ricci satisfaz:

$$Ric(X,Y) = \rho\langle X,Y\rangle$$

para todo vetor tangente X e Y e alguma constante $\rho \in I\!R$. Variedades de curvatura constante c são exemplos de variedades de Einstein onde $\rho = (n-1)c$. Para $n = 3$ toda variedade de Einstein tem curvatura seccional constante. Hipersuperfícies de Einstein completas no espaço Euclideano são esferas ou cilindros sobre curvas planas completas. Observemos que a classe das variedades homogêneas de Einstein incluem as variedades homogêneas com isotropia irredutível [7].

Provaremos primeiramente uma proposição sobre variedades 4−dimensionais. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão 4. Seja Λ^2 o fibrado das 2−formas e $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ a decomposição nos autoespaços do $\star$−operador de Hodge. O tensor de Weyl W deixa $\Lambda^2_\pm$ invariante e denotamos por $W^\pm$ sua restrição a $\Lambda^2_\pm$. Uma variedade orientada 4−dimensional é chamada *auto-dual* se $W^- = 0$.

Proposição 4.2.1 *Seja $f : M^4 \to I\!R^6$, uma imersão isométrica de uma variedade orientável, localmente irredutível e localmente simétrica. Então M tem curvatura seccional constante.*

Prova:

Segue do corolário 4 de [12] que M é auto-dual para alguma orientação. Além disso se M não tem curvatura seccional constante então ou M ou o recobrimento duplo de M é uma variedade de Kähler auto-dual. Mostraremos que se M está imersa isometricamente em $I\!R^6$, isto implica que M é plana, contradizendo a irredutibilidade local de M.

Suponha primeiro que $R^\perp = 0$. Então segue da equação de Ricci que o operador de curvatura é puro e então $W^+ = W = 0$ (ver [7] lema 16.20 p. 439). Então M é conformemente plana, e visto que é uma variedade de Einstein localmente irredutível e localmente simétrica, M tem curvatura constante. Caso contrário, seja ξ e η vetores de $T_{f(p)}M^\perp$. Se $\{Y_1, ..., Y_4\}$ é uma base ortonormal de T_pM e X e Y dois vetores arbitrários, a equação de Gauss implica

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{4}\langle R(X,Y_i)Y_i, Y\rangle = t_1\langle A_\xi Y, X\rangle + t_2\langle A_\eta Y, X\rangle - \langle A_\xi X, A_\xi Y\rangle - \langle A_\eta X, A_\eta Y\rangle$$

onde $t_1 = tr(A_\xi)$ e $t_2 = tr(A_\eta)$.

Agora, seja $\{X_1, ..., X_4\}$ e $\{Z_1, ..., Z_4\}$ bases ortonormais de autovetores de A_ξ e A_η respectivamente. Denotemos os autovalores de A_ξ por λ_i e de A_η por μ_i. Suponhamos que nenhuma destas duas bases diagonaliza simultaneamente A_ξ e A_η. Então, como X_1 não é um autovetor de A_η, existem Z_1 e Z_2 tais que $\langle X_1, Z_i\rangle \neq 0$, para $i = 1, 2$. Visto que $Ric(X_1, X_j) = 0$ para todo $j \neq 1$ e X_1 um autovetor de A_ξ obtemos da expressão acima que

$$A_\eta(t_2X_1 - A_\eta(X_1)) = \gamma X_1.$$

Escrevendo $X_1 = \sum_i a_iZ_i$, a equação acima implica que $a_i \sum j \neq i\mu_j\mu_i = \gamma a_i$, para todo i e, sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$. Obtemos

$$\sum_{j\neq 1} \mu_j\mu_1 = \gamma \qquad \sum_{j\neq 2} \mu_j\mu_2 = \gamma.$$

Portanto, μ_1 e μ_2 são raízes distintas da equação quadrática $x^2 - t_2x + \gamma = 0$ e então $t_2 = \mu_1 + \mu_2$ e $\mu_1\mu_2 = \gamma$. Isto implica que $\sum_{i\neq 1,2} \mu_i = 0$. Isto mostra também que se $\langle X_1, Z_i\rangle \neq 0$, para $i \geq 3$, o autovalor correspondente de Z_i é μ_1 ou μ_2. Portanto podemos supor que X_1 pertence ao plano gerado por Z_1, Z_2. Repetimos agora o mesmo procedimento para A_ξ. Existe X_2 tal que $\langle X_2, Z_1\rangle \neq 0$, e temos $t_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\sum_{i\neq 1,2} \lambda_i = 0$ e $\lambda_1\lambda_2 = \delta$, onde

$$A_\xi(t_1Z_1 - A_\xi(Z_1)) = \delta Z_1.$$

Novamente, X_2 pode ser escolhido de modo que $Z_1 \in span\{X_1, X_2\}$. Assim

$$span\{X_1, X_2\} = span\{Z_1, Z_2\}$$

e as curvaturas de Ricci são dadas pela curvatura seccional $K(X_1, X_2) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2$. Além disso, o plano $span\{X_1, X_2\}$ é invariante por A_ξ e A_η. Isto implica que $span\{X_3, X_4\}$ é também invariante por A_ξ e A_η e então a 2−forma $X_1 \wedge X_2$ e $X_3 \wedge X_4$ são autovetores do operador de curvatura $\mathcal{R}$ com os mesmos autovalores, pois $K(X_1, X_2) = K(X_3, X_4)$. Isto implica que M tem curvatura seccional constante, caso contrário, visto que $W^- = 0$, concluímos que W^+ tem um autovalor denotado por $W_1^+ = 0$. Portanto, os outros dois autovalores satisfazem $W_2^+ + W_3^+ = 0$. Se M ou o recobrimento duplo é uma variedade de Kähler auto-dual, a proposição 2 de [12] mostra que para variedades de Kähler (com orientação natural) $\#specW^+ \leq 2$. Portanto $W_2^+ = 0$, $W_3^+ = 0$ e sendo Kähler e localmente simétrica, é plana. ∎

Teorema 4.2.2 *Seja $f : M^n \to I\!R^{n+2}$, $n \geq 4$ uma imersão isométrica de uma variedade de Einstein homogênea. Um dos casos seguintes ocorrem.*

a) M é plana e então é um produto $T^k \times I\!R^{n-k}$, onde T^k é um toro de dimensão $k \leq 2$.

b) M é uma esfera ou um produto de duas esferas, cada uma de dimensão maior que 1.

Prova:

Visto que M é de Einstein, as curvaturas de Ricci são dadas por S/n, onde S é a curvatura escalar. Observamos inicialmente que se $S = 0$, sendo homogênea, M é plana e então é um produto $T^k \times I\!R^{n-k}$ onde T^k é um toro (ver [7], Vol I, p. 191). Como M está imersa isometricamente em $I\!R^{n+2}$, um resultado clássico de Tompkins ([35]) implica que $k \leq 2$. Por outro lado, se $S \neq 0$, então $\nu_f(p) = 0$ para todo $p \in M$. Suponhamos primeiro, que f é rígida. Visto que $\nu_f = 0$, o teorema 2.2.1 implica que $f(M)$ é uma hipersuperfície compacta em uma esfera S^{n+1}. Então é uma hipersuperfície de Einstein de uma esfera. Um resultado de Ryan em [31], p. 376, implica que $f(M)$ e então a própria M é isométrica a uma esfera ou ao produto de duas esferas, cada uma de dimensão maior que 1.

Se f é não-rígida, suponhamos primeiramente que $n \geq 5$. Novamente, pelo fato $\nu_f \equiv 0$, em todo ponto de M, existe uma base ortonormal ξ , η do espaço normal tal que $\mathrm{rk}(A_\eta) \leq 2$ e A_ξ é constante. Pelos teoremas 3.1.3 e 3.2.8 concluímos que M é isométrica a uma esfera S^n ou ao produto $S^2 \times S^{n-2}$. Se $n = 4$, um resultado de Jensen implica que M é uma espaço simétrico. Se M é localmente irredutível obtemos da proposição 4.2.1 que M é isométrica a uma esfera S^4, visto que o espaço hiperbólico $4-$dimensional não pode ser imerso em $I\!R^6$. Se M é localmente redutível, sendo de Einstein, é recoberta por um produto de superfícies de mesma curvatura constante. Neste caso o resultado em [2] implica que a imersão é um produto de duas hipersuperícies, e visto que o plano hiperbólico não pode ser imerso isometricamente em $I\!R^3$, M é um produto de duas $2-$esferas de mesma curvatura constante. ∎

Referências

[1] A. V. Alekseevsky, D. V. Alekseevsky, *Riemannian G−manifolds with one dimensional orbit space*, Ann. Global Anal. and Geom. **11** (1993), 197-211.

[2] S. Alexander, R. Maltz, *Isometric immersions of Riemannian products in Euclidean space*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 47-57.

[3] A. C. Asperti, F. Mercuri, M. H. Noronha, *Cohomogeneity one manifolds and hipersurfaces of revolution*, bulletino della Unione Matematica Italiana.

[4] A. C. Asperti, H. P. Castro, M. H. Noronha, *Compact homogeneous Einstein Manifolds in codimension two*, Relatorio de Pesquisa - Unicamp.

[5] Y.Baldin , F. Mercuri, *Isometric immersions in codimension two with nonegative curvature*, Math. Z. **173** (1980), 111-117.

[6] Y. Baldin, F. Mercuri, *Codimension two nonorientable submanifolds with nonegative curvature*, Proc. A. M. S. **103** (1988), 918-920.

[7] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb (3) **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[8] M. do Carmo , M. Dajczer, *Conformal Rigidity*, Amer. J. Math., **109** (1987), 963-985.

[9] M. Dajczer *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series **13** Publish or Perish Inc., Houston, 1990.

[10] M. Dajczer, D. Gromoll, *Gauss parametrizations and rigidity aspects of submanifolds*, J. Dif. Geom. **22** (1985), 1-12.

[11] M. Dajczer , D. Gromoll *Isometric deformations of compact Euclidean submanifolds in codimension 2*, Duke Math. J. **79** (1995), 605-618.

[12] A. Derdzinski, *Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four*, Composito Math. **49** (1983), 405-433.

[13] J. Erbacher, *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Dif. Geom. **5** (1971), 333-340.

[14] C. E. Harle, *Rigidity of hypersurfaces of constant scalar curvature*, J. Dif. Geom. **5** (1971), 85-111.

[15] P. Hartman, *On the isometric immersion in Euclidean space of manifolds with non-negative sectional curvatures*, Trans. AMS **147** (1970), 529-540.

[16] E. Heintze, C. Olmos, G. Thorbergsson, *Submanifolds with constant principal curvatures and normal holonomy groups*, International J. of Math. vol. 2, No 2 (1991), 167-175.

[17] G. R. Jensen, *Homogeneous Einstein spaces of dimension four*, Composito Math. **49** (1983), 405-433.

[18] S. Kobayashi, *Compact homogeneous hypersurfaces*, Trans. A. M. S. **88** (1958), 137-143.

[19] S. Kobayashi , K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry*, Wiley, New York,1963.

[20] O. Kowalsky, *Generalized symmetric spaces*, Lec. Notes Math. **805**, Berlim-Heidelberg-New York (1980).

[21] H. B. Lawson, W. Y. Hsiang, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Diff. Geom. **5** (1971), 1-38.

[22] J. D. Moore, *Submanifolds of constant positive curvature I*, Duke Math. J. **44** (1977),449-489.

[23] J. D. Moore, *Isometric Immersions of Riemannian products*, J. Diff. Geometry **5** (1971), 159-168.

[24] J. D. Moore, *On extendability of isometric immersions of spheres*, preprint.

[25] T. Nagano, T. Takahashi, *Homogeneous hypersurfaces in Euclidean space*, J. Math. Soc. Japan, **12** (1960), 1-7.

[26] K. Nomizu, *Characteristic roots and vectors of a differentiable family of symmetric matrices*, Linear and Multilinear Algebra **1** (1973), 159-162.

[27] M. H. Noronha, *Nonnegatively curved submanifolds in codimension two*, Trans. A. M. S. **332** (1992), 351-364.

[28] C. Olmos, C. Sánchez, *A geometric characterization of the orbit of s−representations*, J. reine angew. Math. **420** (1991), 195-202.

[29] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. **13** (1966), 459-469.

[30] F. Podestá, A. Spiro, *Cohomogeneity one hypersurfaces of the Euclidean space*, Ann. Global Anal. and Geom. **13** (1995), 169-184.

[31] P. J. Ryan, *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces*, Tohoku Math. J. **21** (1969), 363-388.

[32] R. Takagi, T. Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere*, Differential Geometry, in honor of K. Yano Kinokuniya, Tokyo (1972), 469-481.

[33] C. L. Terng, *Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups*, J. Diff. Geom. **21** (1985), 79-107.

[34] C. L. Terng, *Submanifolds with flat normal bundle*, Math. Ann. **277** (1987) 95-111.

[35] C. Tompkins, *Isometric embeddings of flat manifolds in euclidean space*, Duke Math. J., **5** (1934), 58-61.

[36] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, New-York 1983.

[37] L. Whitt, *Isometric homotopy and codimension two isometric immersions of the n-sphere into Euclidean space*, J. Diff. Geom. **14** (1979), 295-302.