



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Variedades Bandeira, f -Estruturas e Métricas $(1,2)$ -Simpléticas

Sofía Pinzón Durán[†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Co-Orientador: Prof. Dr. Nir Cohen

[†]Este trabalho teve apoio financeiro do CNPQ.

Variedades Bandeira, f -Estruturas e Métricas (1,2)-Simpléticas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Sofía Pinzón Durán** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de junho de 2003.

Prof. Dr. **Caio José Colletti Negreiros**.

Orientador

Prof. Dr. **Nir Cohen**.

Co-Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Nir Cohen

Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio

Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Pinzón Durán, Sofía

P658v Variedades Bandeira, f -Estruturas e Métricas (1,2)-Simpléticas, / Sofía
Pinzón Durán – Campinas, [S.P.: s.n.], 2003.

Orientador: Caio José Colletti Negreiros.

Co-Orientador: Nir Cohen.

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Aplicações holomorfas. 3. Curvaturas. 4.
Torneios. I. Negreiros, Caio José Colletti. II. Cohen, Nir. III. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. IV. Título.

Ao Javier e ao nosso filho Iori André,
um dos melhores presentes que recebemos
da nossa estadia no Brasil.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pela bolsa de doutorado que me foi concedida entre março de 1999 e fevereiro do 2003.

À Universidade Estadual de Campinas, Unicamp e ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC por ter permitido realizar meus estudos de Doutorado.

À Universidade Industrial de Santander-UIS.

Ao meu orientador Caio José Colleti Negreiros, pela orientação, confiança e amizade.

Ao meu co-orientador Nir Cohen, pela orientação, ajuda, apoio e amizade.

Ao professor Luiz San Martin pelos ensinamentos e as valiosas e acertadas sugestões.

Ao Javier, meu companheiro, pela colaboração e apoio nos momentos que mais precisei.

A minha mãe e muito especialmente ao meu pai que lamentavelmente partiu para sempre mas continua presente em todos os momentos da minha vida.

Aos meus irmãos e sobrinhos pela força e carinho.

A Deus por sua presença na minha vida.

Ao Marlio por toda a colaboração, força e amizade.

Aos professores da Escuela de Matemáticas-UIS.

Aos membros da banca examinadora: Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes, Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio, e Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino pelas sugestões e correções ao trabalho.

Aos amigos Colombianos, Brasileiros, Chilenos, Argentinos, Cubanos, Bolivianos, muito

especialmente a Jaime e Martha, Roberto, Lucy, Valeria, Sergio, Nora, Eduardo e Martha, Diana e Carlos, Martha Celia, Fernando, Andrés, Frederico, Rita, Adelia, Edson Carlos, Edson Arrazola, Yuri, Julia, Everaldo, Eyüp, Erhan, Jones, Gil e tantos outros que fizeram a minha permanência no Brasil muito agradável.

A Cidinha, Ednaldo e Tania, funcionários da secretaria de Pós-Graduação em Matemática, pela colaboração e amizade.

Ao povo Brasileiro em geral por sua cultura, em particular, sua música e costumes.

Abstract

We characterize, in graph theoretic terms, the invariant f -structures $\mathcal{F}$ on the classical maximal flag manifold $\mathbb{F}(n)$ which admit (1,2)-symplectic metrics. More generally, we characterize, in terms of roots, invariant f -structures with the same property on general flag manifolds. Our work was motivated by the problem of characterizing f -harmonic maps from a Riemannian manifold into a flag manifold.

In the special case of almost-complex structures, our analysis extends and unifies two previous approaches: a paper of A.E. Brouwer 1980 on locally transitive digraphs, involving unpublished work by P.J. Cameron; and papers by Mo, Paredes, Negreiros, Cohen and San Martin on cone-free digraphs.

We also calculate some curvatures on $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ and give integrability conditions for the two complementary distributions determined by $\mathcal{F}$.

Resumo

Seja $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ uma variedade bandeira geral, onde G é um grupo de Lie semi-simples complexo e P_Θ é um subgrupo parabólico de G , determinado por Θ , um subconjunto de raízes simples de $\mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G . Quando $\Theta = \emptyset$, temos uma variedade bandeira maximal, e escrevemos $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}$, caso contrário, $\mathbb{F}_\Theta$ é uma variedade bandeira parcial. Uma f -estrutura $\mathcal{F}^\Theta$ será chamada (1,2)-admissível se existe uma métrica Λ^Θ tal que a f -variedade $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$ é (1,2)-simplética.

No caso da variedade bandeira maximal clássica, $\mathbb{F}(n)$, caracterizamos às f -estruturas U -invariantes (1,2)-admissíveis estabelecendo uma bijeção entre f -estruturas invariantes e digrafos (grafos orientados não necessariamente completos), estendemos a digrafos a condição *localmente transitivo* (LT) dada por Brouwer [6] para torneios. Mostramos que no contexto de torneios, as condições LT e *livre de cone*(LC) ([27]), são equivalentes. Considerando $\mathbb{F}_\Theta$, geral, estendemos às f -estruturas a condição LC, dada em termos de raízes em [10], no contexto de estruturas quase-complexas. Mostramos que, como no caso quase-complexo, esta condição estendida é necessária para a f -estrutura ser (1,2)-admissível. A suficiência é mostrada no caso maximal associado a uma álgebra de Lie de posto menor ou igual a três e para uma classe de f -estruturas em $\mathbb{F}_\Theta$, que chamamos *completamente não transitivas*. Estudamos também a condição Kähler em $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}, \Lambda^\Theta)$, e a integrabilidade da $\mathcal{F}^\Theta$.

CONTEÚDO

1	Preliminares	1
1.1	Sistemas de Raízes	1
1.2	As Variedades Bandeira $\mathbb{F}$	3
1.3	Métricas Invariantes	6
1.4	f -Estruturas	6
1.4.1	Tensor de Nijenhüis	7
1.4.2	f -Estruturas Invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$	12
1.5	Aplicações Harmônicas	14
1.6	A conexão Riemanniana em $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$	14
2	O Caso A_n	17
2.1	Os casos $\mathbb{F}(2), \mathbb{F}(3), \mathbb{F}(4)$	21
2.2	f -Estruturas Localmente Transitivas	22
2.3	Digrafos Completamente Não Transitivos	27
2.4	O Caso Geral	28
3	O caso invariante $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$	33
3.1	A Forma de Kähler	34
3.2	Transitividade Local Geral	36

3.3	Álgebras de Lie de Posto Três	39
3.3.1	O Caso B_3	40
3.3.2	O caso C_3	43
3.4	O caso G_2	45
3.5	f -Estruturas Completamente Não Transitivas	47
4	Condições de Integrabilidade	51
5	Variedades Bandeira e Curvatura	57
5.1	Curvatura Seccional de $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$	57
5.2	Curvatura e Estrutura Quase-Complexa	59
5.3	Curvatura Bi-seccional Holomorfa	61
5.4	Curvatura Seccional Kähleriana	63
A	f-Estruturas $(1,2)$-admissíveis e métricas correspondentes em A_3	65
B	f-Estruturas Invariantes Localmente Transitivas em B_3	73
C	Métricas $(1,2)$-simpléticas em B_3	103
D	f-Estruturas Invariantes associadas com C_3	131
E	f-Estruturas Invariantes Associadas com G_2	137

Introdução

Uma variedade bandeira geral é um espaço homogêneo redutivo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ onde G é um grupo de Lie complexo semi-simples e P_Θ é o subgrupo parabólico de G determinado por Θ , um subconjunto de raízes simples de $\mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G . Equivalentemente podemos escrever $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ onde U é uma forma real compacta de G e $K_\Theta = U \cap P_\Theta$ é o centralizador de um toro. Quando $\Theta = \emptyset$, $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}$ corresponde à variedade bandeira maximal. Caso contrário, $\mathbb{F}_\Theta$ corresponde a uma variedade bandeira parcial (veja [43]).

O tema central de nosso trabalho são as f -estruturas invariantes, definidas sobre uma variedade bandeira geral. A noção de f -estrutura foi introduzida por Yano [23], como sendo um tensor $\mathcal{F}$, de tipo (1,1) que satisfaz a identidade $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. Uma variedade diferencial munida de uma f -estrutura será chamada uma f -variedade [36]. Estas estruturas foram estudadas por Rawnsley em [36], no contexto de espaços Twistor. Também foram estudadas, entre outros, por Black em [3] e por Mo e Negreiros em [28], visando relacionar este tipo de estruturas diferenciáveis com a existência e a descrição de aplicações harmônicas entre uma variedade quase-complexa e uma f -variedade. Especificamente, em Black [3] aparece o seguinte teorema que é uma extensão de um resultado dado por Rawnsley [36] e que teve origem em um teorema de Lichnerowicz [25].

Teorema 1. *Sejam (M, g, J) uma variedade Riemanniana com J , uma estrutura quase-complexa; ω, σ , as formas de Kähler de M e N , respectivamente; $(N, h, \mathcal{F})$ uma f -variedade; e $\phi : (M, g, J) \rightarrow (N, h, \mathcal{F})$ uma aplicação tal que*

- (i) ϕ é f -holomorfa i.e. satisfaz $d\phi \cdot J = \mathcal{F} \cdot d\phi$,
- (ii) M é co-simplética, isto é, $d^*(\omega) = 0$,
- (iii) $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$ (veja definição 1.24).

Então ϕ é harmônica. Aqui ∇ denota a derivada covariante em N com respeito à conexão Riemanniana de h .

Enquanto à condição (iii), comentamos que quando $\mathcal{F}$ é uma estrutura quase-complexa, esta condição equivale a $d\sigma^{(1,2)} = 0$ ((1,2)-simplética, [36]). Generalizando, se $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$ para uma f -variedade, dizemos que a f -variedade é (1,2)-simplética. Caso exista uma métrica h tal que $(N, h, \mathcal{F})$ é (1,2)-simplética, chamaremos $\mathcal{F}$ de (1,2)-admissível. Nosso principal objetivo neste trabalho consiste em caracterizar as f -estruturas (1,2)-admissíveis na variedade $\mathbb{F}_\Theta$.

O caso especial da variedade bandeira maximal $\mathbb{F}(n+1)$, associada à álgebra de Lie clássica $A_n = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ é tratado no capítulo 2. A metodologia usada consiste em estabelecer uma bijeção entre as f -estruturas invariantes e *digrafos*, ou seja, grafos orientados finitos (não necessariamente completos). Com isto estendemos o caso particular das estruturas quase-complexas invariantes relacionadas a torneios (grafos orientados completos), estudado entre outros por [7], [27], [33], [9].

Usando digrafos, abordamos no Capítulo 2 resultados obtidos por [27], [33] e [9], que relacionavam a propriedade (1,2)-admissível com a propriedade *livre de cone*, no caso quase-complexo. Lembramos [27], que um torneio é chamado livre de cone se ele omite dois 4-subtorneios chamados *cone*, dados por (37), (38) na Figura 2.7. Uma caracterização independente da condição livre de cone foi estudada por A. E. Brouwer em [6], isto é, *torneios localmente transitivos*. No Capítulo 2 seção 2.2 mostramos a equivalência destas duas caracterizações.

Ainda no Capítulo 2 estendemos a definição da propriedade localmente transitivo às f -estruturas sobre $\mathbb{F}(n)$. Mostramos que neste caso uma f -estrutura é localmente transitiva se, e somente se, ela é (1,2)-admissível.

Os resultados obtidos no Capítulo 1 são parcialmente generalizados, no Capítulo 3, em duas direções, simultaneamente: do caso A_n a qualquer álgebra semi-simples complexa, e

de bandeira maximal a bandeira parcial. Consideraremos, então, as f -variedades bandeira gerais $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$.

Nossa metodologia envolve a combinatória das raízes como generalização da combinatória de digrafos. De maneira análoga ao caso quase-complexo estudado em [10], definimos a condição localmente transitivo em termos de quádruplas de raízes. Utilizamos o mesmo argumento que em [10], para mostrar que a condição localmente transitivo é necessária para $\mathcal{F}$ ser (1,2)-admissível. Esta condição é também suficiente, quando são consideradas as variedades bandeira maximais associadas às álgebras B_3, C_3, G_2 , como mostramos em forma exaustiva neste capítulo e nos Apêndices C- E. Com isto o Teorema 8.1 em [10], pode ser re-escrito da seguinte forma:

Teorema 2. *Seja Π um sistema de raízes associado a B_l ou C_l ou F_4 e J uma estrutura quase-complexa invariante sobre a variedade bandeira maximal correspondente. Então J é afim (e portanto (1,2)-admissível, veja [40]) se, e somente se, ela é localmente transitiva.*

No mesmo capítulo mostramos a equivalência entre as propriedades localmente transitivo e (1,2)-admissível para todas as álgebras de posto menor ou igual a três. Este resultado sugere a possível suficiência no caso maximal para qualquer álgebra semi-simples complexa, dado que a necessidade já foi mostrada acima. Só conseguimos mostrar a suficiência num caso particular de f -estruturas que chamamos *completamente não transitivas* abreviado CNT. Para este mesmo tipo de f -estruturas obtemos o seguinte corolário ligado ao Teorema 1.

Corolário 1. *Seja (M, g, J) uma variedade Riemanniana co-simpética, com estrutura quase-complexa J e forma de Kähler Ω . Seja $\phi : (M, g, J) \rightarrow (\mathbb{F}, \mathcal{F})$ uma aplicação f -holomorfa, com $\mathcal{F}$ CNT. Então ϕ é harmônica com respeito à métrica Cartan Killing.*

No capítulo 4 discutimos, no caso da f -variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$, a propriedade Kähler e as condições de integrabilidade para a f -estrutura invariante $\mathcal{F}^\Theta$. No contexto de variedades diferenciáveis quase-Hermitianas gerais, (M, J, Ω) , a estrutura quase-complexa é paralela ($\nabla J = 0$) se, e somente se, a forma de Kähler da variedade é fechada ($d\Omega = 0$), isto é, se, e somente se, (M, J, Ω) é Kähler. Por isto, o análogo para f -variedades, $(M, \mathcal{F})$, da condição Kähler é que a f -estrutura seja paralela, isto é, $\nabla \mathcal{F} = 0$. O paralelismo da $\mathcal{F}$ não garante, em geral, a sua integrabilidade. No caso $\mathbb{F}(n)$ caracterizamos a integrabilidade da $\mathcal{F}$ em termos de digrafos, isto é, $\mathcal{F}$ é integrável se, e somente se, o digrafo associado omite os subdigrafos (2)-(6) na figura 2.4. Estendemos assim o resultado, dado por Burstall [7], que

caracteriza estruturas quase-complexas integráveis pela ausência de 3-ciclos ((6) na Figura 2.4) no torneio associado.

No último capítulo, aproveitamos a forma encontrada no Capítulo 1 para a conexão Riemanniana de $\mathbb{F}_\Theta$ associada à métrica invariante Λ^Θ para calcular algumas curvaturas, visando relacioná-las com propriedades topológicas e geométricas da $\mathbb{F}_\Theta$. Em particular, os resultados reafirmam que uma variedade bandeira maximal Kähler, diferente de $\mathbb{F}(2)$, não pode ser nem biholomorficamente equivalente, nem holomorficamente isométrica, a nenhum espaço projetivo $\mathbb{C}P(n)$.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo fixamos as notações a serem usadas no trabalho e apresentamos alguns resultados que serão básicos no decorrer do trabalho.

1.1 Sistemas de Raízes

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples sobre $\mathbb{C}$. Seja $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, isto é, uma subálgebra abeliana maximal tal que para cada $H \in \mathfrak{h}$ o endomorfismo $ad(H)$ de $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Seja α um funcional linear sobre o espaço vetorial complexo $\mathfrak{h}$ e denote por $\mathfrak{g}_\alpha$ o subespaço linear de $\mathfrak{g}$ dado por:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \quad \text{para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Note que para $\alpha = 0$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}$. O funcional linear α é chamado uma raiz (de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$) se $\alpha \neq 0$ e $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Em tal caso $\mathfrak{g}_\alpha$ é chamado um *subespaço raiz*. Denotamos por Π o conjunto de raízes não nulas do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e por B a forma Cartan-Killing em $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, isto é, $B(X, Y) = \langle X, Y \rangle = tr(adXadY)$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dado que $\mathfrak{g}$ é semi-simples, B é não degenerada sobre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, a restrição de B a $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ é também não-degenerada e assim para cada $\alpha \in \Pi$ existe um único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $B(H, H_\alpha) = \langle H, H_\alpha \rangle = \alpha(H)$, para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Tome $(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta)$ para toda $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, segue-se então que $(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear simétrica não-degenerada sobre $\mathfrak{h}^*$.

Teorema 1.1. [43] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

1. *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição em espaços de raízes $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$.*
2. *Os espaços raiz $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$ são de dimensão complexa um.*
3. *Se α e β são duas raízes quaisquer (incluindo 0) e $\beta \neq -\alpha$, então $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_\beta$ são ortogonais com relação a B .*
4. *Se α é uma raiz não nula, $\Pi \cap \mathbb{Z}\{\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$.*
5. *Para cada $\alpha \in \Pi$ existe um vetor $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ de forma tal que para todo $\alpha, \beta \in \Pi$ temos:*
 - (a) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ (para todo $H \in \mathfrak{h}$);
 - (b) $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha + \beta \notin \Pi$;
 - (c) $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 1$ se $\alpha + \beta = 0$ e $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ nos outros casos.
 - (d) $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}$, se $\alpha + \beta \in \Pi$ com $m_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned} m_{-\alpha, -\beta} &= -m_{\alpha, \beta} \\ m_{-\alpha, \alpha+\beta} &= m_{\alpha+\beta, -\beta} = m_{-\beta, -\alpha}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Os elementos $\{X_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ que satisfazem o item 5 no teorema acima serão chamados uma *base de Weyl* ou *Cartan-Weyl*

Teorema 1.2. [43] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semi-simples, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, e Π o sistema de raízes associado. Denote por $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ o subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado sobre $\mathbb{R}$ pelos $H_\alpha, \alpha \in \Pi$.*

1. *A restrição da forma de Cartan-Killing B de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ é real e estritamente positiva sobre $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_\mathbb{R}$.*

2. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}.$

Teorema 1.3. [43] *Seja $\Pi^+ \subset \Pi$ o conjunto das raízes positivas do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Suponha que l é o posto de $\mathfrak{g}$, então existe um subconjunto de raízes $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ com as seguintes propriedades:*

- (i) *Cada $\alpha_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq l$, não pode ser escrita como soma de outras duas raízes positivas.*
- (ii) *Cada raiz $\alpha \in \Pi$ pode ser escrita como combinação linear, a coeficientes inteiros, de elementos de Σ , isto é $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$ com n_i inteiro para $i = 1, \dots, l$.*

Um subconjunto de raízes Σ com as propriedades listadas no Teorema 1.3 será chamado um sistema simples de raízes.

Definição 1.4. [39] *Uma álgebra de Lie real é dita compacta se sua forma de Cartan-Killing é negativa definida.*

Teorema 1.5. [39] *Toda álgebra de Lie semi-simples complexa $\mathfrak{g}$ admite formas reais compactas. Se $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ são formas reais compactas de $\mathfrak{g}$, então existe um automorfismo ϕ de $\mathfrak{g}$ tal que $\phi(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$ e, portanto, as formas reais compactas são isomorfas entre si.*

Definição 1.6. [17] *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{a}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Borel se ela é uma subálgebra solúvel maximal.*

Definição 1.7. [17] *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ é chamada subálgebra parabólica, se $\mathfrak{p}$ contém alguma subálgebra de Borel.*

1.2 As Variedades Bandeira $\mathbb{F}$

Uma variedade Bandeira é um espaço homogêneo reutivo $G/C(S)$ onde G é um grupo de Lie complexo semi-simples e $C(S)$ é o centralizador de um toro S (não necessariamente maximal em G .) Quando S é um toro maximal dizemos que a variedade bandeira é maximal geral e denotamos por $\mathbb{F}$. Por exemplo, no caso clássico, isto é, se G é o grupo especial unitário SU_n ,

$C(S)$ deve ser conjugado a um subgrupo da forma $SU_{n_1} \times SU_{n_2} \times \dots \times SU_{n_k}$, com $n_1, n_2, \dots, n_k$ inteiros positivos satisfazendo $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Se $m_i = n_1 + \dots + n_i$, o quociente $SU_n / (SU_{n_1} \times \dots \times SU_{n_k})$ pode ser identificado com o conjunto $F(m_1, \dots, m_k)$ de “bandeiras parciais” $\{0\} = E_0 \subset E_{m_1} \subset \dots \subset E_{m_{k-1}} \subset E_{m_k} = \mathbb{C}^n$, onde E_i é um subespaço de $\mathbb{C}^n$ de dimensão i . O caso $n_r = 1$ para todo $1 \leq r \leq k$ será denotado por $\mathbb{F}(n)$ e esta pode-se identificar com o conjunto das “bandeiras totais” $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{n-1} \subset E_n = \mathbb{C}^n$.

As variedades bandeira possuem uma identificação, mais geral, em termos de raízes, da seguinte forma: Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, denote por Π o conjunto das raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Fixemos daqui para frente uma base de Weyl de $\mathfrak{g}$ como no item 5 do Teorema 1.1. Seja $\Pi^+ \subset \Pi$ uma escolha de raízes positivas. Denote por Σ o correspondente sistema simples de raízes. Tome Θ um subconjunto de Σ e $\langle \Theta \rangle$ o conjunto de raízes gerado por Θ . O conjunto $\Pi \setminus \langle \Theta \rangle$ será denotado como $\langle \Theta \rangle^\perp$ e as raízes em $\langle \Theta \rangle^\perp$ serão chamadas raízes complementares com respeito a Θ . Seja $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^+$. Sobre $\mathfrak{g}$ temos a seguinte decomposição:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\beta \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}, \quad (1.2)$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$, é o espaço raiz complexo correspondente a α .

Seja agora $\mathfrak{p}_\Theta$ a subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ determinada por Θ . Então,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\beta. \quad (1.3)$$

Assim, a equação (1.2) pode ser re-escrita como:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_\Theta \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}. \quad (1.4)$$

A variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$ associada ao par $\{\mathfrak{g}, \Theta\}$ corresponde ao espaço homogêneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$, onde G é o grupo de Lie complexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$ e P_Θ é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G .

Considere a variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. Denote por U a forma real compacta de G correspondente a $\mathfrak{u}$. Seja $K_\Theta = P_\Theta \cap U$. K_Θ , por construção, é o centralizador de um toro. Seja a subálgebra real $\mathfrak{t}_\Theta = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_\Theta$, denotaremos por $\mathfrak{t}_\Theta^\mathbb{C}$ a sua complexificada. Podemos

escrever,

$$\mathfrak{t}_\Theta^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \quad (1.5)$$

U age transitivamente sobre $\mathbb{F}_\Theta$ e assim podemos escrever $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$. Se $\Theta = \emptyset$, $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}$ corresponde à variedade bandeira maximal. Caso contrário, $\mathbb{F}_\Theta$ corresponde a uma variedade bandeira parcial.

Seja $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$. Assumimos $\mathfrak{u}$ como o subespaço real gerado por $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, (veja Teorema 1.2) e A_α, S_α , com $\alpha \in \Pi \setminus \Theta$, onde $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ e $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. A variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ é um espaço homogêneo redutivo. De fato, seja $\mathfrak{u}_\beta = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta})$, $\beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, e $\mathfrak{q}_\Theta = \sum_{\beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{u}_\beta$. Portanto,

$$(i) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{t}_\Theta \oplus \mathfrak{q}_\Theta, \quad \mathfrak{t}_\Theta \cap \mathfrak{q}_\Theta = \emptyset;$$

$$(ii) \quad \text{Ad}(K_\Theta)\mathfrak{q}_\Theta \subset \mathfrak{q}_\Theta, \text{ isto implica } [\mathfrak{t}_\Theta, \mathfrak{q}_\Theta] \subset \mathfrak{q}_\Theta.$$

Denote por b_0 a origem de $\mathbb{F}_\Theta$, visto como espaço homogêneo de U . Identificamos $\mathfrak{q}_\Theta = T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$. Esta identificação é dada por $X \in \mathfrak{q}_\Theta \rightarrow X_{b_0} \in T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$, isto é, por avaliação de $X \in \mathfrak{q}_\Theta$ em b_0 como um campo vetorial sobre $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$ (veja [24] pág. 191).

O espaço tangente a $\mathbb{F}_\Theta$ em b_0 identifica-se naturalmente com o subespaço $\mathfrak{q}_\Theta = \mathfrak{u} \ominus \mathfrak{t} = \sum_{\beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{u}_\beta$, gerado por $A_\alpha, S_\alpha, \alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$. Analogamente, o espaço tangente complexificado de $\mathbb{F}_\Theta$ é identificado com $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h} = \oplus_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha$. Pelo item (ii) acima, a ação adjunta de K_Θ deixa $\mathfrak{q}$ invariante e o decompõe em componentes irredutíveis que são invariantes pela ação adjunta de K_Θ (veja [41]).

Como $\mathfrak{q}_\Theta$ é gerado por $A_\alpha, S_\alpha, \alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, citamos a seguir algumas das propriedades destes vetores (ver [39] seção 12.2):

$$\begin{aligned} [A_\alpha, S_{-\alpha}] &= 2iH_\alpha, & \langle iH_\alpha, A_\beta \rangle &= \langle iH_\alpha, S_\beta \rangle = \langle A_\alpha, S_\beta \rangle = 0, \\ [iH_\alpha, S_\beta] &= -\beta(H_\alpha)A_\beta, & [S_\alpha, S_\beta] &= -m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta}, \\ [iH_\alpha, A_\beta] &= \beta(H_\alpha)S_\beta, & [A_\alpha, A_\beta] &= m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta}, \\ \langle A_\alpha, A_\alpha \rangle &= \langle S_\alpha, S_\alpha \rangle = -2, & [A_\alpha, S_\beta] &= m_{\alpha,\beta}S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta}S_{\alpha-\beta}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.3 Métricas Invariantes

Uma métrica Riemanniana U -invariante $ds_{\Lambda^\Theta}^2$ em $\mathbb{F}_\Theta$ é completamente determinada por seus valores na origem, isto é, por um produto interno $(\cdot, \cdot)$ em $\mathfrak{q}_\Theta$, invariante sob a ação adjunta de K_Θ ([4], [26], [41]). Qualquer produto interno em $\mathfrak{q}_\Theta$, invariante pela ação adjunta de K_Θ , tem a forma $(X, Y)_{\Lambda^\Theta} = -\langle \Lambda^\Theta \circ X, Y \rangle$, com $\Lambda^\Theta : \mathfrak{q}_\Theta \rightarrow \mathfrak{q}_\Theta$ positivo-definido com relação à forma Cartan-Killing e $\circ$ o produto de Hadamard ou produto termo a termo. O produto interno $(\cdot, \cdot)_{\Lambda^\Theta}$ admite uma extensão natural a uma forma bilinear simétrica sobre a complexificada $\mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C}$ de $\mathfrak{q}_\Theta$. Usaremos a mesma notação $(\cdot, \cdot)_{\Lambda^\Theta}$ para esta forma, bem como para a correspondente aplicação complexificada Λ^Θ . A K_Θ -invariância de $(\cdot, \cdot)_{\Lambda^\Theta}$ equivale a afirmar que a base de Weyl é base complexa de autovetores para a ação de Λ^Θ , ou seja em $\mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C}$ nós temos

$$\Lambda^\Theta X_\alpha = \lambda_\alpha^\Theta X_\alpha, \quad (1.7)$$

com $\lambda_\alpha^\Theta = \lambda_{-\alpha}^\Theta > 0$, para $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$. Para a álgebra real $\mathfrak{q}_\Theta$, os elementos da base canônica A_α , S_α , com $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, são autovetores de Λ^Θ , para o mesmo autovalor λ_α^Θ .

Denotamos por $ds_{\Lambda^\Theta}^2$ a métrica U -invariante associada com Λ^Θ . No que segue usaremos Λ^Θ como sinônimo da própria $ds_{\Lambda^\Theta}^2$ (simbolizaremos Λ no caso da variedade bandeira maximal $\mathbb{F}$).

Lema 1.8. [41] *Considere $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$ onde $\Lambda^\Theta = (\lambda_\alpha^\Theta)_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle}$. Suponha $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_\beta$ na mesma componente irredutível da representação adjunta de K_Θ em $\mathfrak{q}_\Theta$, então $\lambda_\alpha^\Theta = \lambda_\beta^\Theta$.*

1.4 f -Estruturas

K. Yano em 1961 [22] introduz a noção de f -estrutura para uma variedade Riemanniana qualquer, da seguinte forma.

Definição 1.9. *Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional e $\mathcal{F}$ um campo tensorial de tipo $(1,1)$ tal que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. $\mathcal{F}$ é chamado uma f -estrutura sobre TM .*

Uma variedade Riemanniana com uma f -estrutura $\mathcal{F}$ será dita uma f -variedade (veja [36]).

Seja $\mathcal{F} : TM \rightarrow TM$ uma f -estrutura. Definimos os operadores lineares $l, p : TM \rightarrow TM$ da seguinte maneira:

$$l = -\mathcal{F}^2, \quad p = \mathcal{F}^2 + 1. \quad (1.8)$$

Da identidade $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ decorre que:

$$l + p = 1, \quad l^2 = l, \quad p^2 = p, \quad lp = pl = 0, \quad (1.9)$$

onde 1 denota a identidade. Em outras palavras os operadores l e p são operadores de projeção complementares sobre TM . Assim, dada $\mathcal{F}$, uma f -estrutura não nula, para cada ponto $x \in M$, existem em $T_x M$ distribuições complementares L e P correspondentes aos operadores de projeção l e p respectivamente. Se o posto de $\mathcal{F}$ é igual a r , então L é de dimensão r e P tem dimensão $n - r$, onde n é a dimensão de M .

Afirmção 1.10. [18] *Para a f -estrutura $\mathcal{F}$ sejam l, p como acima. Então:*

$$\mathcal{F}l = l\mathcal{F} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}p = p\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{F}^2 l = -l,$$

isto é, $\mathcal{F}$ age sobre L como uma estrutura quase-complexa e sobre P como o operador nulo.

Demonstração : Seja $X \in L$, então $\mathcal{F}^2(X) = \mathcal{F}^2(lX) = -l(X) = -X$. Agora, seja $X \in P$ então $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(pX) = \mathcal{F}p(X) = (\mathcal{F}^3 + \mathcal{F})(X) = 0$. ■

Se o posto da $\mathcal{F}$ é n , então $\mathcal{F}$ satisfaz $\mathcal{F}^2 + 1 = 0$ e conseqüentemente $\mathcal{F}$ é uma estrutura quase-complexa. Quando o posto da $\mathcal{F}$ é $(n - 1)$ ela é chamada estrutura quase-contato [21].

1.4.1 Tensor de Nijenhüis

Seja $\Gamma(M)$ o espaço dos campos vetoriais de uma variedade diferencial M e A, B campos tensoriais de tipo $(1, 1)$ em M . A aplicação $N : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ definida por

$$\begin{aligned} N_{A,B}(X, Y) = & [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X, Y] + BA[X, Y] \\ & - A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y], \end{aligned}$$

$X, Y \in \Gamma(M)$, é um campo tensorial de tipo $(1, 2)$ e $N(X, Y) = -N(Y, X)$. N é chamado o tensor de Nijenhüis associado com A e B (veja [32]). Logo para uma f -estrutura $\mathcal{F}$ o tensor de Nijenhüis $N(X, Y)$ associado a $A = B = \mathcal{F}$ é dado por:

$$1/2N(X, Y) = [\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}X, Y] - \mathcal{F}[X, \mathcal{F}Y] - l[X, Y]. \quad (1.10)$$

No caso da $\mathcal{F}$ ser uma estrutura quase-complexa, se o tensor de Nijenhüis é identicamente nulo então $\mathcal{F}$ é integrável ou equivalentemente, a variedade M é complexa.

Lema 1.11. *O tensor de Nijenhüis, a f -estrutura $\mathcal{F}$ e as projeções associadas p, l satisfazem as seguintes identidades para quaisquer campos vetoriais X, Y :*

$$(i) \quad N(pX, pY) = lN(pX, pY) = -l[pX, pY]; \quad (1.11)$$

$$(ii) \quad pN(X, Y) = p[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y]; \quad (1.12)$$

$$(iii) \quad pN(lX, lY) = p[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y]; \quad (1.13)$$

$$(iv) \quad pN(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) = p[lX, lY]; \quad (1.14)$$

$$(v) \quad N(lX, lY) = 0 \text{ se, e somente se, } N(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) = 0. \quad (1.15)$$

Demonstração : De fato, usando (1.9) e (1.10)

$$(i) \quad \begin{aligned} N(pX, pY) &= [\mathcal{F}pX, \mathcal{F}pY] - \mathcal{F}[\mathcal{F}pX, pY] - \mathcal{F}[pX, \mathcal{F}pY] - l[pX, pY] \\ &= -l[pX, pY] \end{aligned}$$

e portanto

$$lN(pX, pY) = -l^2[pX, pY] = -l[pX, pY] = N(pX, pY);$$

(ii)

$$\begin{aligned} pN(X, Y) &= p[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] - p\mathcal{F}[\mathcal{F}X, Y] - p\mathcal{F}[X, \mathcal{F}Y] - pl[X, Y] \\ &= p[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y]; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} pN(lX, lY) &= p[\mathcal{F}lX, \mathcal{F}lY] - p\mathcal{F}[\mathcal{F}lX, lY] - p\mathcal{F}[lX, \mathcal{F}lY] - pl[lX, lY] \\ &= p[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y]; \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} pN(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) &= p[\mathcal{F}^2X, \mathcal{F}^2Y] - p\mathcal{F}[\mathcal{F}^2X, \mathcal{F}Y] - p\mathcal{F}[\mathcal{F}X, \mathcal{F}^2Y] - pl[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] \\ &= p[lX, lY]; \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} N(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) &= [\mathcal{F}^2X, \mathcal{F}^2Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}^2X, \mathcal{F}Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}X, \mathcal{F}^2Y] - l[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] \\ &= [lX, lY] + \mathcal{F}[lX, \mathcal{F}Y] + \mathcal{F}[\mathcal{F}X, lY] - l[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N(lX, lY) &= [\mathcal{F}lX, \mathcal{F}lY] - \mathcal{F}[\mathcal{F}lX, lY] - \mathcal{F}[lX, \mathcal{F}lY] - l[lX, lY] \\ &= [\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}X, lY] - \mathcal{F}[lX, \mathcal{F}Y] - l[lX, lY]. \end{aligned}$$

Suponha que $N(lX, lY) = 0$, temos

$$\mathcal{F}[lX, \mathcal{F}Y] + \mathcal{F}[\mathcal{F}X, lY] = [\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] - l[lX, lY],$$

logo

$$\begin{aligned} N(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) &= [\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] + [lX, lY] - l[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] - l[lX, lY] \\ &= (1 - l)[lX, lY] + (1 - l)[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] \\ &= p[lX, lY] + p[\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y] = pN(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) + pN(lX, lY), \\ &= pN(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) \end{aligned}$$

ou seja $(1-p)N(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) = lN(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) = 0$, portanto $N(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) = 0$. A recíproca se demonstra de maneira análoga.

■

Suponha L integrável e X' , um campo vetorial arbitrário, tangente a uma variedade integral de L . Define-se sobre TM um operador $\mathcal{F}'$ (para mais detalhes veja [18]) da seguinte

forma: $\mathcal{F}'X' = \mathcal{F}X'$. Assim por (1.9) $\mathcal{F}'$ é uma estrutura quase-complexa sobre cada variedade integral de L .

Definição 1.12. [18] Dizemos que $\mathcal{F}$ é parcialmente integrável se ambos L e $\mathcal{F}'$ são integráveis.

Teorema 1.13. [18] Uma condição necessária e suficiente para uma f -estrutura $\mathcal{F}$ ser parcialmente integrável é que uma das seguintes condições equivalentes

$$N(lX, lY) = 0 \quad \text{ou} \quad N(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) = 0$$

seja satisfeita para quaisquer campos vetoriais X, Y .

Dado que $l + p = 1$, o tensor de Nijenhüis $N(X, Y)$ pode ser re-escrito como:

$$\begin{aligned} N(X, Y) = & \quad lN(lX, lY) + pN(lX, lY) + N(lX, pY) + \\ & + N(pX, lY) + N(pX, pY). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Usando o Teorema 1.13 e a equação 1.16 temos o seguinte teorema:

Teorema 1.14. [18] Uma condição necessária e suficiente para a distribuição P ser integrável e $\mathcal{F}$ ser parcialmente integrável, é que

$$N(X, Y) = N(lX, pY) + N(pX, lY) \tag{1.17}$$

para quaisquer campos vetoriais X, Y .

A derivada de Lie $\mathfrak{L}_Y \mathcal{F}$ é dada por

$$(\mathfrak{L}_Y \mathcal{F})X = \mathcal{F}[X, Y] - [\mathcal{F}X, Y]. \tag{1.18}$$

De (1.31) e (1.18) obtemos:

$$N(lX, pY) = \mathcal{F}(\mathfrak{L}_{pY} \mathcal{F})lX = \mathcal{F}\{l(\mathfrak{L}_{pY} \mathcal{F})lX\}, \tag{1.19}$$

pelo qual

$$\mathcal{F}N(lX, pY) = -l(\mathfrak{L}_{pY} \mathcal{F})lX. \tag{1.20}$$

Agora utilizando (1.19) e (1.20) temos o seguinte teorema:

Teorema 1.15. [18] *O campo tensorial $l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})l$ é identicamente nulo para qualquer campo vetorial Y se e somente se $N(lX, pY) = 0$ para quaisquer campos vetoriais X, Y .*

Observação 1.16. [18] *Quando ambas L, P são integráveis ao mesmo tempo, podemos escolher um sistema de coordenadas locais de tal forma que as coordenadas de L são representadas colocando $n - r$ coordenadas locais constantes e as de P colocando mais r coordenadas constantes, onde r é o posto de $\mathcal{F}$. Tal sistema coordenado é chamado sistema de coordenadas adaptado.*

Num sistema de coordenadas adaptado, os operadores de projeção l, p podem ser assumidos da seguinte forma:

$$l = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$$

onde 1_r e 1_{n-r} são as matrizes identidade de ordem r e $n - r$ respectivamente. Dado que $\mathcal{F}$ satisfaz $\mathcal{F}l = l\mathcal{F} = \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}p = p\mathcal{F} = 0$, num sistema de coordenadas adaptado, a $\mathcal{F}$ tem componentes da forma

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Assim, para um campo vetorial pY em P , a derivada de Lie $\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F}$ tem componentes da forma:

$$\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Logo, se assumimos que o campo tensorial $l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})l$ é identicamente nulo para qualquer campo vetorial Y , temos então $\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F} = 0$, o que significa que as componentes de $\mathcal{F}$ são independentes das coordenadas as quais são constantes ao longo da variedade integral da distribuição L num sistema de coordenadas adaptado. Reciprocamente, se as componentes de $\mathcal{F}$ são independentes do sistema de coordenadas, é fácil ver que $l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})l$ é identicamente nulo para qualquer campo vetorial Y . Pelas observações anteriores e o Teorema 1.15 temos:

Teorema 1.17. [18] *Suponha que ambas L e P são integráveis e que um sistema de coordenadas adaptado tenha sido escolhido. Uma condição necessária e suficiente para as com-*

ponentes locais da $\mathcal{F}$ ser funções independentes das coordenadas, as quais são constantes ao longo da variedade integral de L , é que $N(lX, pY) = 0$ para quaisquer campos vetoriais X, Y .

Definição 1.18. [18] Dizemos que uma f -estrutura, $\mathcal{F}$, é integrável se satisfaz as seguintes três condições:

- (i) A f -estrutura $\mathcal{F}$ é parcialmente integrável.
- (ii) A distribuição P é integrável.
- (iii) As componentes da $\mathcal{F}$ são independentes das coordenadas as quais, num sistema de coordenadas adaptado, são constantes ao longo das variedades integrais da L .

Assim para finalizar essa seção temos:

Teorema 1.19. [18] Uma condição necessária e suficiente para a f -estrutura $\mathcal{F}$ ser integrável é que

$$N(X, Y) = 0$$

para quaisquer par de campos vetoriais X, Y .

Demonstração : Basta utilizar a forma do tensor de Nijenhüis dada na subseção 1.4.1 e ver que cada um dos termos da direita anulam-se sob as condições da definição 1.18. ■

1.4.2 f -Estruturas Invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$

Uma f -estrutura definida numa variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$ será denotada por $\mathcal{F}^\Theta$. Introduzimos agora a noção de “ f -estrutura U -invariante” em $\mathbb{F}_\Theta$.

Definição 1.20. Uma f -estrutura $\mathcal{F}^\Theta$ é chamada U -invariante se para cada $x \in \mathbb{F}_\Theta$ o endomorfismo $\mathcal{F}_x^\Theta : T_x \mathbb{F}_\Theta \rightarrow T_x \mathbb{F}_\Theta$ satisfaz $du_x \circ \mathcal{F}_x^\Theta = \mathcal{F}_{ux}^\Theta \circ du_x$, para todo $u \in U$.

Proposição 1.21. Uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}^\Theta$ é completamente determinada por um endomorfismo $\mathcal{F}^\Theta : \mathfrak{q}_\Theta \rightarrow \mathfrak{q}_\Theta$, satisfazendo $(\mathcal{F}^\Theta)^3 + \mathcal{F}^\Theta = 0$ e $\mathcal{F}^\Theta$ comuta com a ação adjunta de K_Θ , isto é, $Ad(K_\Theta)\mathcal{F}^\Theta = \mathcal{F}^\Theta Ad(K_\Theta)$.

Demonstração : Tendo $\mathcal{F}^\Theta$ as condições da proposição, seja $x \in \mathbb{F}_\Theta$. Como a ação adjunta de U sobre $\mathbb{F}^\Theta$ é transitiva, existe $u \in U$ tal que $x = ub_0$. Considerando a multiplicação à esquerda $u : \mathbb{F}_\Theta \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta$, definimos o homomorfismo

$$\mathcal{F}_x^\Theta : T_x(\mathbb{F}_\Theta) \longrightarrow T_x(\mathbb{F}_\Theta)$$

da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_x^\Theta = du_{b_0} \circ \mathcal{F}^\Theta \circ (du_{b_0})^{-1}.$$

Agora devemos mostrar:

(a) a definição de $\mathcal{F}_x^\Theta$ não depende da escolha de $u \in U$.

(b) $(\mathcal{F}_x^\Theta)^3 + \mathcal{F}_x^\Theta = 0$.

(c) $du_x \circ \mathcal{F}_x^\Theta = \mathcal{F}_{ux}^\Theta \circ du_x$.

A demonstração de (a) e (c) é a mesma de [26] ou [41]. Portanto resta mostrar (b).

(b)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{\Theta^3} &= (du_{b_0} \circ \mathcal{F}^\Theta \circ (du_{b_0})^{-1}) \circ (du_{b_0} \circ \mathcal{F}^\Theta \circ (du_{b_0})^{-1}) \circ (du_{b_0} \circ \mathcal{F}^\Theta \circ (du_{b_0})^{-1}) \\ &= du_{b_0} \circ (\mathcal{F}^\Theta)^3 \circ (du_{b_0})^{-1} = -\mathcal{F}_x^\Theta \end{aligned}$$

■

Denotamos também por $\mathcal{F}^\Theta$ a sua complexificada. O endomorfismo $\mathcal{F}^\Theta : \mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C}$ é diagonalizável com valores próprios $i, 0, -i$ e determina os espaços próprios correspondentes $\mathfrak{q}_\Theta^+, \mathfrak{q}_\Theta^0, \mathfrak{q}_\Theta^-$. Temos então $\mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C} = \mathfrak{q}_\Theta^+ + \mathfrak{q}_\Theta^0 + \mathfrak{q}_\Theta^-$ com $\overline{\mathfrak{q}_\Theta^+} = \mathfrak{q}_\Theta^-$. A U -invariância de $\mathcal{F}^\Theta$ garante que $\mathcal{F}^\Theta(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, com igualdade quando $\mathcal{F}^\Theta$ é uma estrutura quase-complexa invariante (veja [41]). Assim $\mathcal{F}^\Theta$ é determinado de maneira única pelos valores $\varepsilon_\alpha^\Theta \in \{0, \pm 1\}$, $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, definidos por $\mathcal{F}^\Theta(X_\alpha) = i\varepsilon_\alpha^\Theta X_\alpha$. Estes valores satisfazem $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$, portanto $\mathcal{F}^\Theta$ é definida pelos seus valores em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+$. No que segue abusamos da notação e identificamos a f -estrutura invariante $\mathcal{F}^\Theta$ sobre $\mathbb{F}_\Theta$ com $\varepsilon^\Theta = \{\varepsilon_\alpha^\Theta : \alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle\}$.

Pela notação anterior nas distribuições L e P temos $L = \{X_\alpha \in \mathfrak{q}_\Theta, \varepsilon_\alpha = \pm 1\}$ e $P = \{X_\alpha \in \mathfrak{q}_\Theta, \varepsilon_\alpha = 0\}$.

Em analogia com as estruturas quase-complexas, os vetores próprios associados a 0 serão ditos de tipo $(1, 0, 0)$, os associados a $+i$ de tipo $(0, 1, 0)$ e os associados a $-i$ de tipo $(0, 0, 1)$.

Lema 1.22. *Considere $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta)$, onde $\mathcal{F}^\Theta = \{\varepsilon_\alpha^\Theta\}_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle}$. Suponha que $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_\beta$ estão em uma mesma componente irredutível da representação adjunta de K_Θ em $\mathfrak{q}_\Theta$, então $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta$.*

Demonstração : Seja $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$ com $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta$ numa mesma componente irredutível da representação adjunta de K_Θ em $\mathfrak{q}_\Theta$, isto é, existe $\gamma \in \langle \Theta \rangle$ tal que $\alpha + \gamma = \beta$. Assim para todo x no subespaço de $\mathfrak{h}$ determinado por $\langle \Theta \rangle^\perp$ temos,

$$\beta(x) = \langle \beta, x \rangle = \langle \alpha + \gamma, x \rangle = \langle \alpha, x \rangle + \langle \gamma, x \rangle = \alpha(x),$$

portanto $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta$. ■

1.5 Aplicações Harmônicas

Sejam (M, g) e (N, h) duas variedades Riemannianas. Uma aplicação $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é harmônica se ela é um ponto crítico do funcional energia

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi(x)|^2 v_g \quad (1.23)$$

onde $d\phi(x) : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} N$, $x \in M$ e a norma de $d\phi(x)$ é dada por:

$$|d\phi(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \langle d\phi(x)(X_i), d\phi(x)(X_i) \rangle_h \quad (1.24)$$

para $X_1, \dots, X_m$ uma base ortonormal de $T_x M$.

Isto é, ϕ é harmônica se e somente se satisfaz as equações de Euler-Lagrange

$$\delta E(\phi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(\phi_t) = 0 \quad (1.25)$$

para toda variação (ϕ_t) , $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, de ϕ .

1.6 A conexão Riemanniana em $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$

Já vimos na seção 1.2 que $\mathbb{F}_\Theta$ é um espaço homogêneo reutivo. Pelo Teorema 3.3 no capítulo X em [24] podemos definir uma aplicação bilinear simétrica $U : \mathfrak{q}_\Theta \times \mathfrak{q}_\Theta \rightarrow \mathfrak{q}_\Theta$ por:

$$2\Lambda^\Theta(U(X, Y), Z) = \Lambda^\Theta(X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}_\Theta}) + \Lambda^\Theta([Z, X]_{\mathfrak{q}_\Theta}, Y),$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{q}_\Theta$; ou seja,

$$2\langle \Lambda^\Theta \circ U(X, Y), Z \rangle = \langle \Lambda^\Theta \circ X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}_\Theta} \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{q}_\Theta}, \Lambda^\Theta \circ Y \rangle.$$

Utilizando a invariância de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, isto é,

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}, Z \rangle = \langle X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}_\Theta} \rangle \quad (1.26)$$

temos,

$$2\langle \Lambda^\Theta \circ U(X, Y), Z \rangle = -\langle [\Lambda^\Theta \circ X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}, Z \rangle + \langle [X, \Lambda^\Theta \circ Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}, Z \rangle.$$

Daqui finalmente,

$$2\Lambda^\Theta \circ U(X, Y) = [X, \Lambda^\Theta \circ Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} - [\Lambda^\Theta \circ X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}. \quad (1.27)$$

Como a *conexão Riemanniana* ∇ em $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$ é dada por

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} + 2U(X, Y), \quad (1.28)$$

temos então

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} + \Lambda^{\Theta^{-1}} \circ ([X, \Lambda^\Theta Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} - [\Lambda^\Theta X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}) \quad (1.29)$$

com $X, Y \in \mathfrak{q}_\Theta$ e $(\Lambda^\Theta)^{-1}$ a inversa de Λ^Θ com respeito ao produto de Hadamard. É de notar que os autovalores de $(\Lambda^\Theta)^{-1}$ correspondem aos inversos multiplicativos dos autovalores de Λ^Θ , ou seja $(\Lambda^\Theta)^{-1} = ((\lambda_\alpha^\Theta)^{-1})_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle}$.

A ação concreta da conexão Riemanniana sobre os elementos da base de Weyl é descrita a seguir.

Proposição 1.23. *Para $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$ sejam $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, e $X_\alpha, X_\beta, X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}_\Theta$, elementos na base de Weyl. Então*

$$\nabla_{X_\alpha} X_\beta = m_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta + \lambda_\beta^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta}{2\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta} X_{\alpha+\beta}. \quad (1.30)$$

Demonstração : Da equação (1.29) via cálculo direto, usando o item 5 no Teorema 1.1, e a equação (1.7) temos:

$$\begin{aligned} 2\nabla_{X_\alpha} X_\beta &= [X_\alpha, X_\beta]_{\mathfrak{q}_\Theta} + \Lambda^{\Theta^{-1}} \circ ([X_\alpha, \Lambda^\Theta \circ X_\beta]_{\mathfrak{q}_\Theta} - [\Lambda^\Theta \circ X_\alpha, X_\beta]_{\mathfrak{q}_\Theta}) \\ &= m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + \Lambda^\Theta \circ (m_{\alpha, \beta} \lambda_\beta X_{\alpha+\beta} - m_{\alpha, \beta} \lambda_\alpha^\Theta X_{\alpha+\beta}) \\ &= m_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta + \lambda_\beta^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta}{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta} X_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

■

Seja agora $(N, h, \mathcal{F})$ uma f -variedade Riemanniana. Lembramos (veja por exemplo [20]) que para $X, Y \in TN$, a derivada covariante de $\mathcal{F}$ é dada por:

$$(\nabla \mathcal{F})(X, Y) = \nabla_X \mathcal{F}(Y) - \nabla_Y \mathcal{F}(X) - \mathcal{F}([X, Y]). \quad (1.31)$$

Definição 1.24. (i) Definimos $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)}(X, Y)$ como $\nabla \mathcal{F}(X, Y)$ se $X \in TN^+$ e $Y \in TN^-$.

(ii) $(N, h, \mathcal{F})$ é dita f - $(1, 2)$ -simplética se $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

Apontamos que quando $\mathcal{F}$ é uma estrutura quase complexa, a forma de Kähler $\sigma(X, Y) = h(X, \mathcal{F}(Y))$ é anti-simétrica, e Rawnsley e Salamon [36], [21] mostraram que $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$ precisamente quando $(N, h, \mathcal{F})$ é 1, 2-simplética, i.e. $d\sigma^{1,2} = 0$. Seja agora (M, g, J) uma variedade Riemanniana com J uma estrutura quase-complexa e forma de Kähler ω . O seguinte teorema devido a Black [3], o qual tem origem no paper [25], é uma das motivações do nosso trabalho.

Teorema 1.25. *Seja $\phi : (M, g, \mathcal{F}) \rightarrow (N, h, \mathcal{F})$ uma aplicação tal que*

1. ϕ é f -holomorfa i.e. satisfaz $d\phi \cdot J = \mathcal{F} \cdot d\phi$,
2. M é co-simplética, isto é, $d^*(\omega) = 0$,
3. $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

Então ϕ é harmônica.

Pelo Teorema anterior, o estudo de aplicações harmônicas em variedades bandeira induz uma análise intensiva das propriedades das f -estruturas que admitem métricas $(1, 2)$ -simpléticas, ou seja, as f -estruturas $(1, 2)$ -admissíveis.

CAPÍTULO 2

O Caso A_n

Neste capítulo damos uma descrição completa das f –estruturas invariantes $(1,2)$ –admissíveis no caso da variedade bandeira maximal $\mathbb{F}(n)$ associada à álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, ou seja, o caso da bandeira maximal associada às álgebras de tipo A_n . Neste caso o conjunto formado por $E_{jk}, j \neq k$ e $E_{jj} - E_{kk}, j < k$ é uma base para $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}$ é a subálgebra das matrizes diagonais, $\Theta = \emptyset$ assim $\mathfrak{q}$ é gerada pelas matrizes $A_{jk} = E_{jk} - E_{kj}$ e $S_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj})$.

Para $\mathbb{F}(n)$ e $\mathcal{F}$ uma estrutura quase-complexa é possível estabelecer uma correspondência entre $\mathcal{F}$ e um grafo orientado completo (torneio) (veja [27], [33] [9]).

Mo e Negreiros provaram em [28] que existem $3^{\binom{n}{2}}$ f –estruturas $U(n)$ –invariantes sobre uma variedade bandeira complexa e que elas estão em correspondência 1:1 com as matrizes antisimétricas $\epsilon(\mathcal{F}) = \{\varepsilon_{ij}\}$ onde ε_{ij} toma valores no conjunto $\{-1, 0, 1\}$, o que sugere uma correspondência 1:1 entre f –estruturas invariantes e grafos orientados (digrafos) não necessariamente completos.

Ao longo do nosso trabalho a palavra *digrafo* significará invariavelmente um grafo orientado finito $\mathcal{G} = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de setas de $\mathcal{G}$. Se $v, w \in V$ então uma seta $v \rightarrow w$, significará $vw \in E$. O símbolo $v \leftrightarrow w$ indicará que vw ou wv estão em E . Além disso, definimos os conjuntos v –perdedor e v –ganhador da

seguinte forma:

$$\mathcal{G}_p(v) = \{w \in V : vw \in E\}, \quad \mathcal{G}_g(v) = \{w \in V : wv \in E\},$$

tais conjuntos considerados como subdigrafos de $\mathcal{G}$. Os anteriores digrafos são o análogo ao conceito de “vizinhança” de um vértice utilizada na teoria de grafos não dirigidos. Finalmente, dizemos que v é um *ganhador* (resp. *perdedor*) em $\mathcal{G}$ se $\mathcal{G}_p(v)$ ou $\mathcal{G}_g(v)$ é igual a $V \setminus \{v\}$.

Cada digrafo determina um vetor placar $(s_1, \dots, s_n)$, $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ onde s_i é a cardinalidade do conjunto de vértices do subdigrafo $\mathcal{G}_g(v_i)$ para algum v_i vértice de $\mathcal{G}$.

Definição 2.1. *Sejam $\mathcal{G}_1$ um digrafo com n vértices $\{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{G}_2$ um digrafo com m vértices $\{1, \dots, m\}$. Um homomorfismo entre $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ é uma aplicação $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que*

$$s \xrightarrow{\mathcal{G}_1} t \implies \phi(s) \xrightarrow{\mathcal{G}_2} \phi(t) \quad \text{ou} \quad \phi(s) = \phi(t)$$

e se

$$s \not\xrightarrow{\mathcal{G}_1} t \implies \phi(s) \not\xrightarrow{\mathcal{G}_2} \phi(t)$$

Quando ϕ é bijetiva dizemos que $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são isomorfos.

Para $n = 2$ existem 2 classes de isomorfismos, para $n = 3$ aparecem 7 classes de isomorfismos e para $n = 4$, 42 classes de isomorfismos (veja Figuras 2.3, 2.4, 2.5-2.7).

Note que, como no caso de torneios, o vetor placar não determina completamente o digrafo, isto é, existem digrafos não isomorfos com placares iguais (veja por exemplo (3) e (4) na Figura 2.4 e (3),(4),(5) na Figura 2.5).

As f -estrutura invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$, estão em correspondência 1:1 com digrafos de n vértices através da matriz de incidência do digrafo. De fato, no caso $\mathbb{F}(n)$ o sistema de raízes Π pode ser identificado com o conjunto $\{(j, k) : 1 \leq j, k \leq n, j \neq k\}$, onde pares de raízes opostas $\{\alpha, -\alpha\}$ correspondem a pares $\{(j, k), (k, j)\}$. Lembremos que uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}$ é determinada pelos seus valores em Π^+ . Estes valores são ordenados, formando uma matriz $\varepsilon = (\varepsilon_{jk})_{n \times n}$. A matriz ε pode-se identificar com a matriz de incidência de algum digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ com $V = \{1, \dots, n\}$ da seguinte maneira: Se $\mathcal{F}(E_{jk}) = i\varepsilon_{jk}E_{jk}$ então $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ é tal que para $j < k$

$$j \rightarrow k \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{jk} = 1$$

e

$$j \leftarrow k \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{jk} = -1$$

e

$$j \not\leftrightarrow k \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{jk} = 0$$

estabelecendo assim uma correspondência biunívoca entre f -estruturas invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$ e digrafos de n vértices. Uma construção similar é válida para métricas invariantes $\Lambda = \{\lambda_{jk}\}$ em $(\mathbb{F}(n), \mathcal{F})$, de maneira que podemos identificar cada λ_{jk} com um peso positivo definido sobre a seta jk do digrafo E . Note que se $\varepsilon_{jk} = 0$ o peso λ_{jk} não aporta maior informação dado que $jk \notin E$.

Exemplo 1.1: Consideremos

$$\mathbb{F}(3) = U(3)/(U(1) \times U(1) \times U(1)) = U(3)/T.$$

Neste caso,

$$\mathfrak{q} = T(\mathbb{F}(3))_{(b_0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{C} \right\}$$

Tomemos a seguinte f -estrutura sobre $\mathbb{F}(3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & ia & -ib \\ i\bar{a} & 0 & 0 \\ (-i\bar{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como o elemento $(1,2)$ da matriz foi multiplicado por $\sqrt{-1}$, o digrafo correspondente tem uma seta indo de 1 para 2; o mesmo acontece com o elemento $(1,3)$, então o digrafo tem uma seta indo de 1 para 3. O elemento $(2,3)$ foi multiplicado por 0, então o digrafo não tem uma seta ligando 2 com 3. O digrafo da Figura 2.1 é o digrafo associado a esta f -estrutura. De acordo com Black [3], as condições para $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$ ser $(1,2)$ -simplética são determinadas

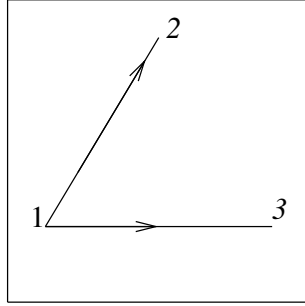


Figura 2.1: Digrafo do Exemplo 1.1

pelas seguintes regras:

$$\text{Se } k \rightarrow j, k \rightarrow l, j \not\leftrightarrow l \quad \text{então } \lambda_{jk} = \lambda_{kl}; \quad (2.1)$$

$$\text{Se } j \rightarrow k, l \rightarrow k, j \not\leftrightarrow l \quad \text{então } \lambda_{jk} = \lambda_{kl}; \quad (2.2)$$

$$\text{Se } k \rightarrow j, j \rightarrow l, k \rightarrow l \quad \text{então } \lambda_{kl} = \lambda_{jk} + \lambda_{jl}. \quad (2.3)$$

o que pode ser resumido na Figura 2.2.

$\lambda_{lj} = \lambda_{lk}$		$\lambda_{lk} = \lambda_{lj} + \lambda_{jk}$

Figura 2.2: Condições da métrica

Nossa intenção é caracterizar as f -estruturas invariantes que admitem métricas (1,2)-simpléticas. Em outros termos, desejamos caracterizar os digrafos $\mathcal{G} = (V, E)$ que admitem pesos positivos $\Lambda = (\lambda_{jk})$ os quais satisfazem as propriedades (2.1), (2.2) e (2.3).

2.1 Os casos $\mathbb{F}(2), \mathbb{F}(3), \mathbb{F}(4)$

As Figuras 2.3, 2.4, 2.5-2.7 mostram as classes de isomorfismos de f -estruturas invariantes em $\mathbb{F}(n)$ para $n = 2, 3, 4$, respectivamente. Para $n = 2, 3$ todas as classes são $(1,2)$ -admissíveis.

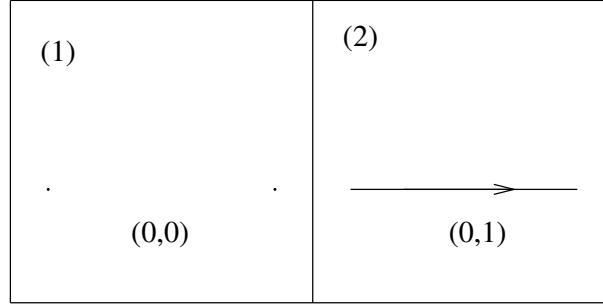


Figura 2.3: Classes de isomorfismos para $n=2$

De fato, no caso $\mathbb{F}(3)$ existem 7 classes de isomorfismos de f -estruturas invariantes (ver Figura 2.4). A métrica Cartan-Killing, $\lambda_{ij} = 1$ é $(1,2)$ -simplética para todas as f -estruturas na Figura 2.3 e as f -estruturas correspondentes a (1)-(6) na Figura 2.4 a classe (7) que corresponde às estruturas quase-complexas invariantes integráveis (ou seja Kähler) e portanto é $(1,2)$ -admissível (veja [9]).

Em $\mathbb{F}(4)$ existem 42 classes de isomorfismos de f -estruturas invariantes (ver Figuras 2.5, 2.6, e 2.7). Só as 36 que aparecem em 2.5 e 2.6 são $(1,2)$ -admissíveis. De fato as sete classes (1), (2), (3), (6), (7), (15), (25) são trivialmente $(1,2)$ -admissíveis, dado que nelas não aparecem as configurações dadas na Figura 2.2. As 29 classes (8)-(14), (16)-(24) e (26)-(36) junto com as métricas que elas admitem, aparecem no Apêndice A.

As seis classes restantes, (37)-(42), aparecem na Figura 2.7 e foram separadas das anteriores precisamente por não serem $(1,2)$ -admissíveis. De fato, as classes (37) e (38) representam torneios e portanto foram estudadas em [33] e [9] e ali mostrou-se que elas não são $(1,2)$ -admissíveis. Nas seguintes 4 classes aplicamos as condições dadas por (2.1), (2.2) e (2.3) para mostrar a $(1,2)$ -admissibilidade:

Na classe (39) $\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}$, $\lambda_{23} = \lambda_{24} + \lambda_{34}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{34}$, do anterior teríamos que $\lambda_{12} + \lambda_{24} = 0$ o que é absurdo dadas as condições da métrica Λ .

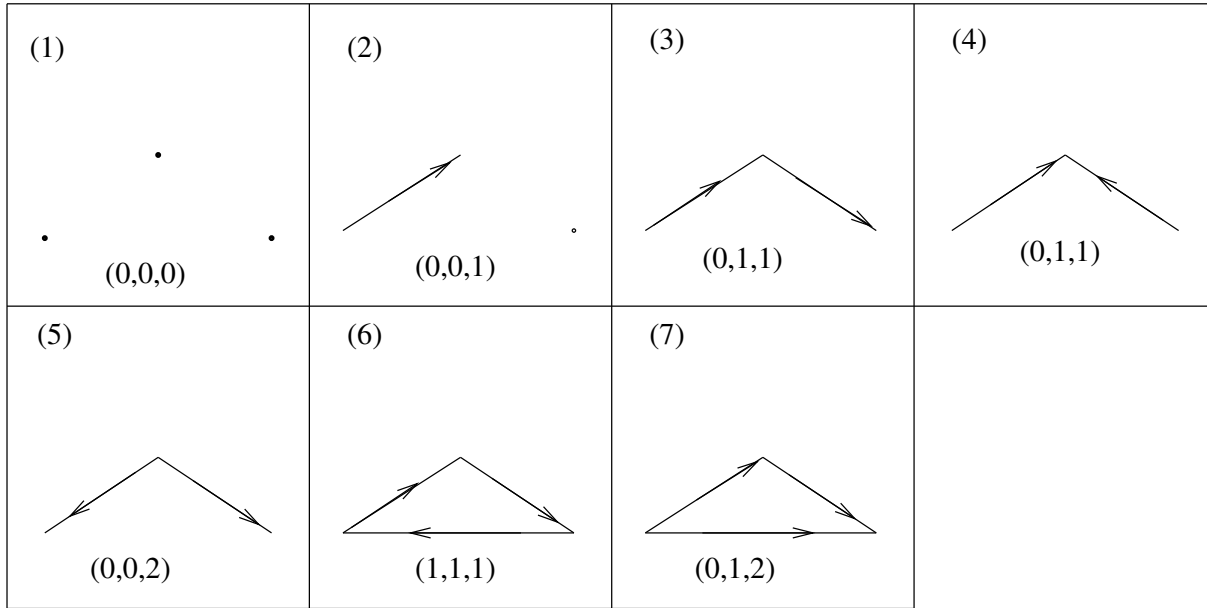


Figura 2.4: Classes de isomorfismos para $n=3$

Na classe (40) $\lambda_{23} = \lambda_{13} + \lambda_{12}$, $\lambda_{34} = \lambda_{23} + \lambda_{24}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{34}$, do anterior teríamos que $\lambda_{12} + \lambda_{24} = 0$ o que é absurdo dadas as condições da métrica Λ .

Na classe (41) $\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}$, $\lambda_{34} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$, do anterior teríamos que $\lambda_{12} = 0$, absurdo.

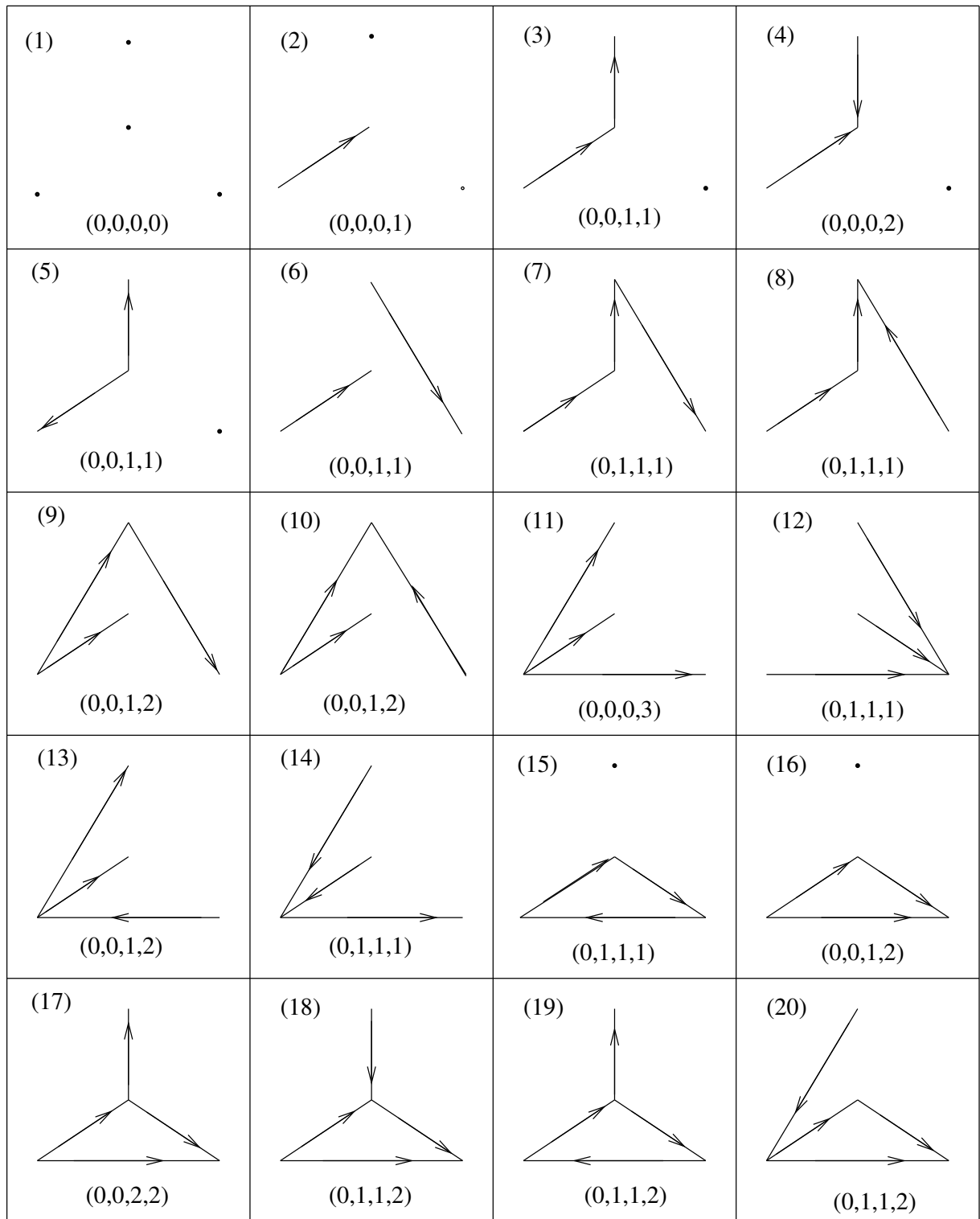
Na classe (42) $\lambda_{23} = \lambda_{13} + \lambda_{12}$, $\lambda_{34} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$, do anterior teríamos que $\lambda_{12} = 0$, absurdo.

2.2 f -Estruturas Localmente Transitivas

As seguintes definições são cruciais para obter nosso principal resultado neste capítulo.

Definição 2.2. Um digrafo $\mathcal{G}' := (V', E')$ é chamado:

1. trivial se cardinalidade do conjunto E' é zero;
2. transitivo se a relação “ $\rightarrow$ ” é transitiva (ou seja, para $i, j, k \in V'$, $i \rightarrow j \rightarrow k$ implica $i \rightarrow k$);

Figura 2.5: Classes de isomorfismos para $n=4$

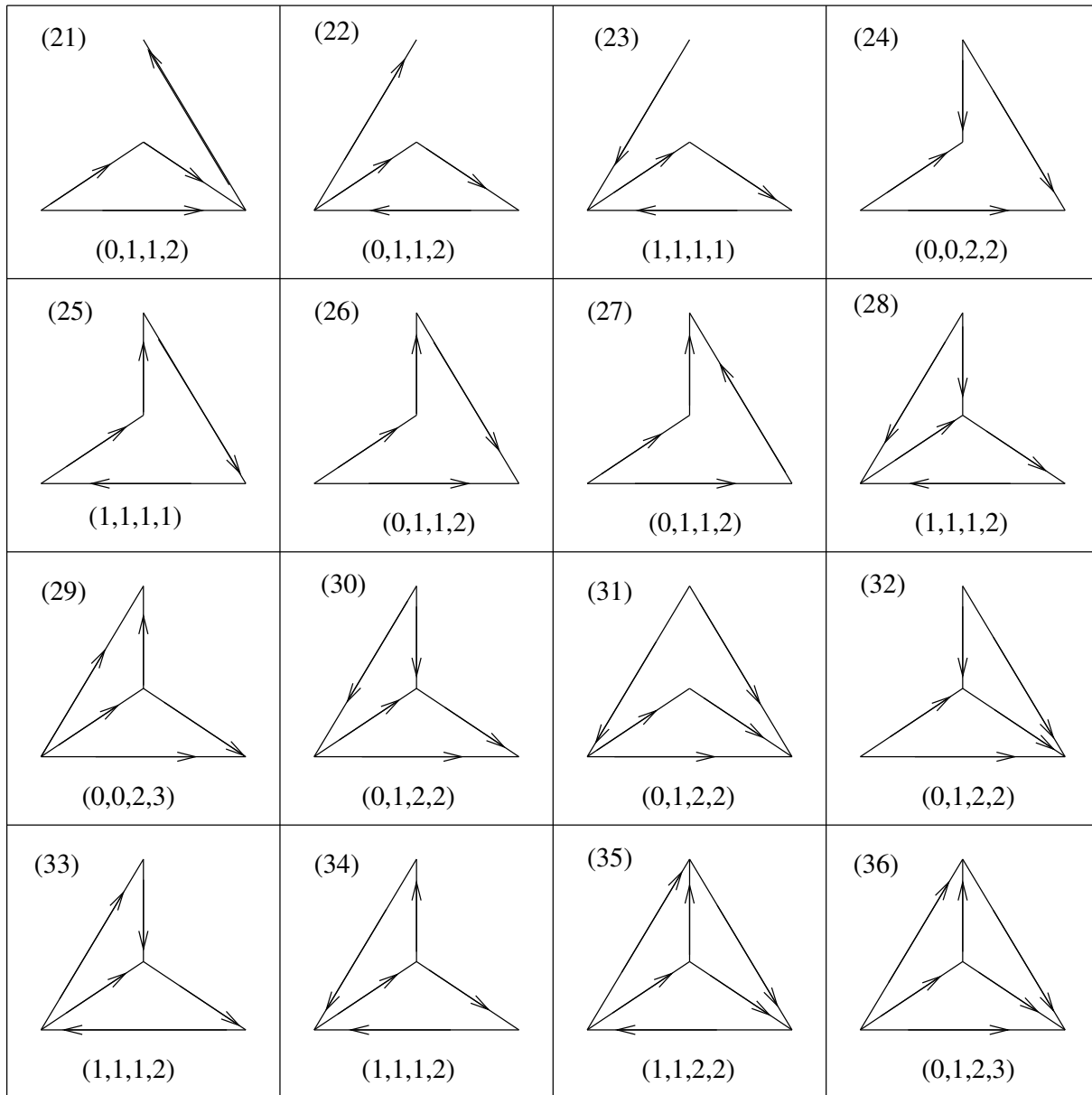


Figura 2.6: Classes de isomorfismos para $n=4$

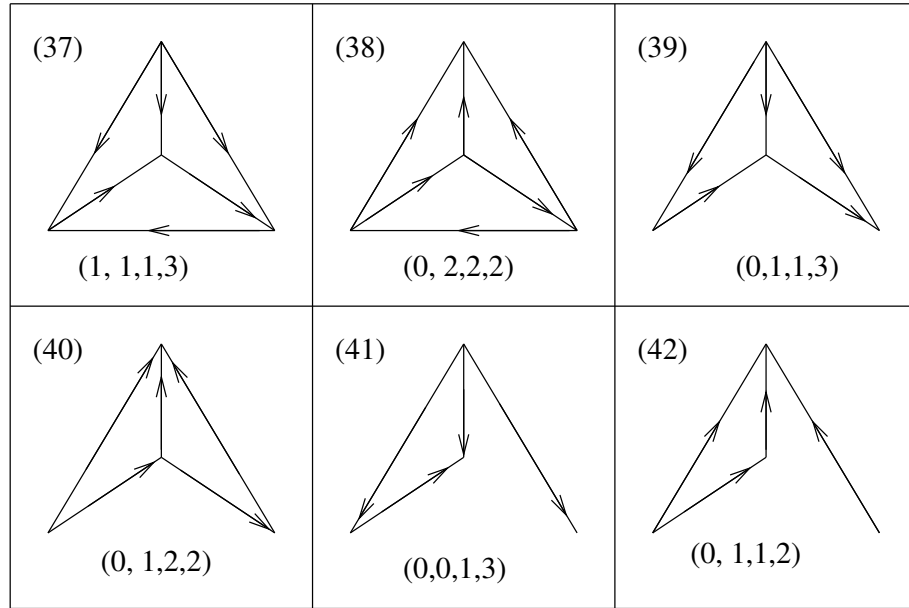


Figura 2.7: Classes de isomorfismos para $n=4$

3. relativamente conexo se para todo $i, j, k \in V'$ $i \rightarrow j$ implica $i \leftrightarrow k$ ou $j \leftrightarrow k$.

Transitividade em digrafos *completos* tem sido bastante estudada e pode ser caracterizada pela ausência de 3-ciclos (isto é, 3-subdigrafo da forma $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$). A matriz de incidência é semelhante, a menos de permutações, à matriz canônica $\varepsilon_{jk} = 1$ ($j < k$) [30]. Porém, nós estamos interessados na seguinte versão *local* desta propriedade.

Definição 2.3. Dizemos que o digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ é localmente transitivo se $\forall v \in V$ cada um dos conjuntos $\mathcal{G}_p(v)$ e $\mathcal{G}_q(v)$ é transitivo e relativamente conexo.

Com respeito às f -estruturas invariantes dizemos que $\mathcal{F}$ é localmente transitiva se seu digrafo associado é localmente transitivo.

Observação 2.4. Da Definição 2.3 temos:

1. Transitividade local significa que o digrafo $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_q(v)$ omite determinados 4-subdigrafos, isto é, aqueles que possuem um subconjunto não vazio de setas de um 3-ciclo, (ver Figura 2.7).

2. No caso não-completo, a definição 2.3 é mais flexível: esta definição permite que algum destes subdigrafos , dizemos $\mathcal{G}_g(v)$, pode ser trivial, enquanto que $\mathcal{G}_p(v)$ pode ser transitivo e relativamente conexo.
3. Se $\max\{|\mathcal{G}_g(v)|, |\mathcal{G}_p(v)|\} \leq 2 \quad \forall v \in V$, então $\mathcal{G}$ é localmente transitivo.

Em $\mathbb{F}(3)$ pode-se ver facilmente que as 7 classes de isomorfismos de f -estruturas invariantes são todas localmente transitivas, verificando que os digrafos associados a estas f -estruturas (ver Figura 2.4) são localmente transitivos.

Em $\mathbb{F}(4)$, das 42 classes de isomorfismos de f -estruturas invariantes, apenas as 36 que aparecem nas Figuras 2.5 e 2.6 são localmente transitivas.

De acordo com a Figura 2.7, um 4-digrafo não localmente transitivo tem um ganhador ou um perdedor mas não ambos. As setas do 3-digrafo obtido apagando o ganhador/perdedor formam um subconjunto não vazio das setas de um 3-ciclo (ver Figura 2.7).

Daqui para frente identificaremos as f -estruturas invariantes $\mathcal{F}$ com seu digrafo associado $\mathcal{G}$.

Lema 2.5. $\mathcal{G}$ é localmente transitivo se, e somente se, cada 4-subdigrafo de $\mathcal{G}$ é localmente transitivo.

Demonstração : Se $\mathcal{G}$ é localmente transitivo então qualquer subdigrafo of $\mathcal{G}$, incluso os 4-subdigrafos, são localmente transitivo. Resta mostrar a outra direção do lema. Para isto assuma que $\mathcal{G}$ não é localmente transitivo. Então temos dois casos, que visam a existência de um 4-subdigrafo não localmente transitivo, completando assim a demonstração.

Caso 1: Existe $v \in V$ tal que um dos conjuntos $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_g(v)$ não é transitivo. Isto quer dizer que existem $j, k, l \in V$ tal que $jk, kl \in E$ mas $jl \notin E$. Podemos verificar que com as condições anteriores se lj pertence ou não a E , o 4-subdigrafo de $\mathcal{G}$ com vértices $\{v, j, k, l\}$ corresponde a um dos três primeiros digrafos na Figura 2.7 e, portanto, não é localmente transitivo.

Caso 2: Existe $v \in V$ tal que um dos conjuntos $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_g(v)$ não é relativamente conexo. Isto é, estes conjuntos contêm $j, k, l \in V$ tais que $jk \in E$ mas $jl, kl, lj, lk \notin E$. Aqui também o 4-subdigrafo com vértices $\{v, j, k, l\}$ obtido com as condições anteriores

corresponde a um dos três últimos digrafos na Figura 2.7. Portanto ele não é localmente transitivo.

■

No importante caso de digrafos *completos*, a f -estrutura invariante associada é uma estrutura quase-complexa. Exatamente dois dos seis 4-digrafos não localmente transitivos na Figura 2.7 são completos, aqueles que contêm um ganhador/perdedor e um 3-ciclo. Em [29] estes dois digrafos foram chamados “conados” e em [9],[8] um digrafo completo $\mathcal{G}$ que omitia estes dois digrafos foi chamado “livre de cone”. O Lemma 2.5 estabelece portanto que $\mathcal{G}$ é localmente transitivo se, e somente se, ele é livre de cone. Temos então como resultado que os dois conjuntos de digrafos completos estudados separadamente em [29],[34], [9],[8] (digrafos livres de cone) e [6] (digrafos localmente transitivos) são iguais. Brouwer em [6] calcula a quantidade de torneios localmente transitivos de n vértices a ser:

$$\sum_{d|n} \left(\frac{2^{d-1}}{d} \text{odd}\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{e|\frac{n}{d}} \frac{\mu(e)}{e} \right), \quad (2.4)$$

onde μ é a função de Möbius e $\text{odd}(j)$ é 1 ou zero dependendo se j é ímpar ou par, respectivamente. Com isso foi respondida a pergunta feita em [33] sobre a quantidade de estruturas quase complexas invariantes (1,2)-admissíveis em $\mathbb{F}(n)$.

2.3 Digrafos Completamente Não Transitivos

Estudamos aqui a forma das métricas (1,2)-simpléticas sobre uma classe especial de digrafos localmente transitivos que chamaremos digrafos completamente não transitivos.

Definição 2.6. (i) Um triângulo transitivo é um digrafo completo transitivo $\mathcal{G}_t = (V_t, E_t)$ com $|V_t| = 3$. Assumindo $V_t = \{u, v, w\}$ e $E = \{uv, vw, uw\}$, nos referiremos a uv, vw como os lados e a uw como a basedo digrafo $\mathcal{G}_t$.

(ii) Um digrafo $\mathcal{G}' = (V', E')$ será dito completamente não transitivo (simbolizaremos CNT) se $\mathcal{G}'$ não contém triângulos transitivos.

Um digrafo CNT é localmente transitivo. De fato, os conjuntos $\mathcal{G}'_g(v)$ e $\mathcal{G}'_p(v)$ são triviais no sentido da Definição 2.2 (equivalentemente, o digrafo é também livre de cone dado que cada 4-digrafo conado contém um triângulo transitivo, veja a Figura 2.7).

Ao mesmo tempo, um digrafo CNT admite métricas (1,2)-simpléticas, isto é, pesos positivos $\{\lambda_e > 0, e \in E'\}$ os quais satisfazem as identidades (2.1)-(2.3). De fato, devido à ausência de triângulos transitivos o sistema de equações (2.1)-(2.3) não possui identidades do tipo (2.3); logo a *métrica Cartan-Killing* $\lambda \equiv 1$, que satisfaz automaticamente (2.1-2.2), é (1,2)-simplética (em geral, $\mathcal{G}'$ admite métricas (1,2)-simpléticas não-constantes junto com a métrica Cartan-Killing).

Observamos que a métrica Cartan-Killing $\lambda \equiv 1$ sobre um digrafo $\mathcal{G}'$ é (1,2)-simplética se e somente se $\mathcal{G}'$ é CNT. Em particular se $\mathcal{G}'$ é completo, a métrica Cartan-Killing é (1,2)-simplética somente se $|V| \leq 3$, como foi observado em [8].

Agora defina a seguinte relação de equivalência entre as setas de E' : $e \sim e'$ se para algum $v, v', u \in V$ nós temos $e = vu$ e $e' = v'u$, ou $e = uv$ e $e' = uv'$. Uma métrica sobre $\mathcal{G}'$ é (1,2)-simplética se e somente se ela é constante sobre cada classe de equivalência em E' . Assim, a dimensão do espaço das métricas (1,2)-simpléticas é igual ao número de classes de equivalência η em E' .

Como pode-se calcular η diretamente de $\mathcal{G}'$? Nós não conhecemos a resposta, mas sugerimos que η é o número de componentes conexas em uma floresta geradora para $\mathcal{G}'$, assumindo que cada vértice na floresta é um ganhador ou um perdedor.

2.4 O Caso Geral

No estudo das métricas (1,2)-simpléticas sobre um digrafo localmente transitivo $\mathcal{G}$, nossa metodologia será a de reduzir $\mathcal{G}$ a um digrafo associado $\mathcal{G}'$ CNT com o mesmo conjunto de vértices, baseado no seguinte "lema de remoção de setas".

Lema 2.7. *Seja $\mathcal{G} = (V, E)$ um digrafo localmente transitivo que não é CNT. Então E contém pelo menos uma seta e a qual é uma base mas não é um lado. Conseqüentemente, o subdigrafo $\tilde{\mathcal{G}} := (V, E \setminus \{e\})$ é localmente transitivo.*

Demonstração : Seja $\mathcal{G}_* = (V_*, E_*)$ um subdigrafo de $\mathcal{G}$ completo maximal transitivo e $|V_*| \geq 3$. A hipótese garante a existência de pelo menos um desses subdigrafos. Então $\mathcal{G}_*$ possui uma única base $e \in E_*$ que não é um lado. De fato $\mathcal{G}_*$ é isomorfo ao torneio canônico. O vetor placar de $\mathcal{G}_*$ é $(0, 1, 2, \dots, r-1)$ $V_* = \{1, 2, \dots, r\}$. $\mathcal{G}_*$ possui uma seta ligando ganhador e perdedor, por exemplo e_{1r} que é a única seta que é base em qualquer triângulo de $\mathcal{G}_*$ em que ela apareça. A seta e_{1r} é portanto uma base em $\mathcal{G}$. Afirmamos que e_{1r} não pode ser lado em algum triângulo transitivo de $\mathcal{G}$. Assuma ao contrário que tal triângulo $\mathcal{G}_t = (V_t, E_t)$ existe. Note que $V_t \not\subset V_*$ dado que e não é um lado em $\mathcal{G}_*$. Logo, o subdigrafo $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ suportado sobre $V_* \cup V_t$ contém estritamente $\mathcal{G}_*$. Transitividade local de $\mathcal{G}$ implica que $\mathcal{G}^*$ é de novo completo e transitivo. De fato em $\mathcal{G}_t$, $V_t = \{1, r, t\}$, $t \geq r$. Para cada $v \in V_*$ considere o 4-subdigrafo de $\mathcal{G}^*$ suportado sobre os vértices $1, t, r, v$. Como $\mathcal{G}$ é localmente transitivo necessariamente deve existir a seta vt , caso contrário este 4-subdigrafo seria um dos seis na Figura 2.7. Logo o placar em cada vértice de V_* aumenta de 1. Portanto o vetor placar de $\mathcal{G}^*$ é $(0, 1, \dots, r)$ o que implica que $\mathcal{G}^*$ é completo e transitivo, contradizendo a maximalidade de $\mathcal{G}_*$.

A seguir mostraremos que $\tilde{\mathcal{G}}$ é localmente transitivo. Pelo Lema 2.5 é suficiente mostrar que cada 4-subdigrafo $\hat{\mathcal{G}}$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ é localmente transitivo. Se e não é um lado em $\hat{\mathcal{G}}$ não há nada a demonstrar dado que $\hat{\mathcal{G}}$ é subdigrafo de $\mathcal{G}$. Caso contrário, assuma $e = uw$ com u, w vértices em $\hat{\mathcal{G}}$. Suponha que $\hat{\mathcal{G}}$ não é localmente transitivo. De acordo com a Figura 2.7 $\hat{\mathcal{G}}$ contém um ganhador ou um perdedor, v . Dado que e não está em $\hat{\mathcal{G}}$, $v \neq u, w$. Em qualquer dos dois casos, v ganhador ou perdedor, e é um lado no triângulo transitivo $\{v, u, w\}$, o que é impossível pela primeira parte do lema. ■

Pelo Lema 2.5 e por [9], temos que uma f -estrutura quase-complexa invariante sobre $\mathbb{F}(n)$ é localmente transitiva se e somente se ela é (1,2)-admissível. A extensão do resultado anterior para qualquer f -estrutura invariante sobre $\mathbb{F}(n)$ é nosso principal resultado neste capítulo.

Teorema 2.8. *O digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ admite métricas (1,2)-simpléticas se e somente se é localmente transitivo.*

Demonstração : Para $n < 4$, observamos na Seção 2.2, que $\mathcal{G}$ é sempre localmente transitivo. Para $n = 4$, a verificação é baseada nos digrafos das Figuras 2.5 e 2.6 e as métricas

admitidas aparecem no Apêndice A. Assim, assuma $n > 4$.

Se $\mathcal{G}$ admite métricas (1,2)-simpéticas, então, por restrição, cada 4-subdigrafo de $\mathcal{G}$ é (1,2)-admissível, e pela observação acima localmente transitivo. Pelo Lemma 2.5, $\mathcal{G}$ é localmente transitivo.

Reciprocamente, assuma que $\mathcal{G}$ é localmente transitivo. Argumentamos por indução: Se $\mathcal{G}$ é CNT então a existência de métricas (1,2)-simpéticas foi garantida na seção anterior. Caso contrário, pelo Lemma 2.7 seguimos removendo seqüencialmente bases $e_k, k = 1, \dots, r$ de $\mathcal{G} = (V, E)$, obtendo uma seqüência de digrafos $\tilde{\mathcal{G}}_k = (V, \tilde{E}_k)$ localmente transitivos. O processo acaba quando não existem mais triângulos transitivos, ou seja, quando $\tilde{\mathcal{G}}_k = (V, \tilde{E}_k)$ é CNT, para algum k . Pela hipótese de indução, cada $\tilde{\mathcal{G}}_k$ admite métricas (1,2)-simpéticas. Estendemos, em forma inversa à remoção de bases, a métrica sobre $\mathcal{G}_{\parallel-\infty}$ definindo $\lambda_{e_k} = \lambda_{\tilde{e}} + \lambda_{\tilde{e}}$, onde $\tilde{e}, \tilde{e}$ são os lados correspondentes à base e_k . Esta é a única extensão para a qual Λ é (1,2)-simpática sobre o triângulo em questão, portanto a única extensão à qual *deve* ser (1,2)-simpática para todo $\mathcal{G}$. Queremos mostrar que de fato esta é (1,2)-simpática.

Passo 1. A extensão é bem definida. Isto é, assuma que $e = uv$ é simultaneamente base para dois triângulos transitivos, dizemos, $\{uv, vw, uw\}$ e $\{uz, zw, uw\}$ com $\{u, v, w, z\} \subset V$. Precisamos mostrar que a priori

$$\lambda_{uz} + \lambda_{zw} = \lambda_{uv} + \lambda_{vw}. \quad (2.5)$$

Há dois casos a considerar. Se $v \leftrightarrow z$, podemos assumir por determinação $v \rightarrow z$. Neste caso, por (2.3) nós temos a priori $\lambda_{vz} = \lambda_{uz} - \lambda_{uv}$ e $\lambda_{vz} = \lambda_{vw} - \lambda_{zw}$, implicando (2.5). Caso contrário, por (2.1-2.2) nós temos a priori $\lambda_{uv} = \lambda_{uz}$ $\lambda_{vw} = \lambda_{zw}$, de novo implicando (2.5).

Passo 2. Mostramos aqui que a métrica estendida é de fato (1,2)-simpática. Cada conflito com (2.1-2.3) poderia envolver a seta removida e , já que $\tilde{\mathcal{G}}$ por hipótese satisfaz estas restrições. Pelo Lemma (2.7), e não é um lado em $\mathcal{G}$, portanto qualquer conflito com (2.3) é do tipo já discutido no Passo 1.

Um conflito com (2.1) implica que $\lambda_e \neq \lambda'_e$ onde, dizemos, $e = uv$ e $e' = tw$. Isto pode ocorrer somente se $t \not\leftrightarrow u$. Agora é fácil ver independentemente da relação entre v e t que $\mathcal{G}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ não podem ser ambos localmente transitivos, dado que um dos dois contém um dos digrafos não localmente transitivos que aparecem na Figura 2.7. Isto é uma contradição das nossas hipóteses.

Um conflito com (2.2) produz uma contradição semelhante, e assim a demonstração é completa. ■

Assuma que o digrafo localmente transitivo é reduzido, via remoção de bases, a um digrafo CNT, $\mathcal{G}'$. O Teorema 2.8 mostra que cada métrica (1,2)-simplética sobre $\mathcal{G}'$ estende-se de forma única a uma métrica (1,2)-simplética sobre $\mathcal{G}$. Assim, a dimensão do cone convexo de métricas (1,2)-simpléticas é igual em ambos digrafos (na seção anterior esta foi denotada por η). Não é claro como calcular η diretamente do digrafo original $\mathcal{G}$. Uma aproximação é representar (2.1)-(2.3) como um sistema linear homogêneo e calcular a dimensão do seu núcleo.

Terminamos este capítulo com algumas observações.

- (i) O digrafo CNT $\mathcal{G}'$ obtido de $\mathcal{G}$ pela remoção de bases não depende da ordem das bases removidas.
- (ii) Um digrafo CNT $\mathcal{G}'$ é a consequência de uma supressão não vazia de bases de um digrafo localmente transitivo se e somente se a união de todos os subdigrafos de $\mathcal{G}'$ do tipo $\{uv, vw, zw\}$ e $\{wz, wv, vu\}$ não contém cada subdigrafo do tipo $\{uv, vw\}$;
- (iii) Viu-se que um digrafo CNT é o resultado de uma remoção de bases de um digrafo *transitivo* se, e somente se, ele é a união de caminhos dirigidos abertos cujos vértices terminais são exclusivamente ganhadores ou perdedores.

Já vimos que em [6] o autor aplica um argumento de contagem (2.4) com a finalidade de enumerar os digrafos localmente transitivos *completos* com n vértices. A primeira vista parece que esse método não é adequado para a enumeração de *todos* os digrafos localmente transitivos de n vértices. Um caminho possível para atacar o problema poderia ser enumerar primeiro os CNT e então imaginarmos quantos digrafos localmente transitivos podem ser transformados a partir de supressão de bases em um digrafo CNT dado.

CAPÍTULO 3

O caso invariante $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$

No caso de variedade bandeira maximal para uma álgebra de Lie semi-simples complexa geral, não podemos fazer uso da combinatória de digrafos mas sim de uma abordagem combinatória mais geral, baseada em sistemas de raízes. Em [10] Cohen, Negreiros e San Martin deram uma interpretação, em termos de sistemas de raízes, da condição *livre de cone*. Neste capítulo pretendemos estender às f -estruturas invariantes os resultados obtido em [10] para estruturas quase-complexas invariantes.

No capítulo anterior enunciamos o seguinte lema em termos de 3-digrafos, associados a uma tripla de raízes de $\mathfrak{su}(n)$. Este teorema pode ser entendido como um caso particular do Lema 4.2 na pag. 30 em [3]. Nós aqui o enunciamos e damos sua demonstração no caso de uma variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$, isto é, uma bandeira associada a qualquer álgebra de Lie semi-simples complexa $\mathfrak{g}$ e Θ um subconjunto das raízes simples em um sistema de raízes associado a $\mathfrak{g}$ veja seção 1.2.

Lema 3.1. *A f -variedade $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta, \mathcal{F}^\Theta)$ é $(1, 2)$ -simplética se, e somente se, para todo $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$ com $X_\alpha \in \mathfrak{q}_\Theta^+$ e $X_\beta \in \mathfrak{q}_\Theta^-$ temos:*

$$\text{Se } X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}_\Theta^0 \text{ então } \lambda_\alpha^\Theta = \lambda_\beta^\Theta; \quad (3.1)$$

$$\text{se } X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}_\Theta^+ \text{ então } \lambda_\alpha^\Theta = \lambda_\beta^\Theta + \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta. \quad (3.2)$$

Demonstração : Com X_α, X_β como no teorema e usando a Definição (1.24) e a equação (1.30) temos

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) &= -im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta + \lambda_\beta^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta}{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta} X_{\alpha+\beta} - im_{\beta,\alpha} \frac{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta + \lambda_\alpha^\Theta - \lambda_\beta^\Theta}{2\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta} X_{\alpha+\beta} + \\ &\quad - \mathcal{F}(m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}) = im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_\beta^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta - \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta}{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta} X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Por isso, se $X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}_\Theta^0$ nós temos

$$0 = (\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) = im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_\beta^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta}{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta} X_{\alpha+\beta},$$

logo $\lambda_\beta^\Theta = \lambda_\alpha^\Theta$. Em forma semelhante, se $X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}_\Theta^+$ nós temos

$$0 = (\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) = im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_\beta^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta - \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta}{\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta} X_{\alpha+\beta},$$

e assim $\lambda_\beta^\Theta = \lambda_\alpha^\Theta + \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta$. ■

3.1 A Forma de Kähler

Seja $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta, \mathcal{F}^\Theta)$ uma f -variedade bandeira geral e

$$\Omega^\Theta(X, Y) = \Lambda^\Theta(X, \mathcal{F}^\Theta(Y)) = -\langle \Lambda^\Theta \circ X, \mathcal{F}^\Theta \circ Y \rangle,$$

sua forma de Kähler.

Estendemos esta 2-forma U -invariante a uma 2-forma sobre a complexificada $\mathfrak{q}_\Theta^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{q}_\Theta$, a qual denotamos também por Ω^Θ . Ω^Θ é antisimétrica, dado que, sua ação sobre os elementos na base de Weyl é descrita por

$$\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta) = -i\lambda_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta \langle X_\alpha, X_\beta \rangle.$$

Lembramos que $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ a menos que $\alpha + \beta = 0$, e neste caso temos

$$\begin{aligned} \Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta) &= -i\lambda_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta = i\lambda_\alpha^\Theta \varepsilon_\alpha^\Theta = \\ &= -(-i\lambda_\beta^\Theta \varepsilon_\alpha^\Theta \langle X_\beta, X_\alpha \rangle) = -\Omega^\Theta(X_\beta, X_\alpha). \end{aligned}$$

Resumindo: Ω^Θ é não trivial somente nos casos $\alpha = -\beta$ com $\varepsilon_\alpha^\Theta \neq 0$, produzindo o valor

$$\Omega^\Theta(X_\alpha, X_{-\alpha}) = i\lambda_\alpha^\Theta \varepsilon_\alpha^\Theta. \quad (3.3)$$

De maneira análoga que em [10] computamos $d\Omega^\Theta$.

Proposição 3.2. *Seja $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$. Então $d\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ é zero a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e $\{X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\} \not\subset \mathfrak{q}_\Theta^0$. Neste caso temos,*

$$3d\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta).$$

Demonstração : Se $X, Y, Z \in \mathfrak{q}_\Theta$ então $d\Omega^\Theta$ na origem é dada por (ver [24])

$$\begin{aligned} 3d\Omega^\Theta(X, Y, Z) &= (\nabla_X \Omega^\Theta)(Y, Z) - (\nabla_Y \Omega^\Theta)(X, Z) + (\nabla_Z \Omega^\Theta)(X, Y) = \\ &= \nabla_X \Omega^\Theta(Y, Z) - \Omega^\Theta(\nabla_X Y, Z) - \Omega^\Theta(Y, \nabla_X Z) - \\ &- \nabla_Y \Omega^\Theta(X, Z) + \Omega^\Theta(\nabla_Y X, Z) + \Omega^\Theta(X, \nabla_Y Z) + \\ &+ \nabla_Z \Omega^\Theta(X, Y) - \Omega^\Theta(\nabla_Z X, Y) - \Omega^\Theta(X, \nabla_Z Y) = \\ &= -\Omega^\Theta([X, Y], Z) + \Omega^\Theta(X, [Y, Z]) - \Omega^\Theta(Y, \nabla_X Z) - \\ &- \Omega^\Theta(\nabla_Z X, Y). \end{aligned}$$

Agora usando o item 5 no Teorema 1.1 e (1.29) temos

$$\begin{aligned} 3d\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= -m_{\alpha,\beta} \Omega^\Theta(X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) + m_{\beta,\gamma} \Omega^\Theta(X_\alpha, X_{\beta+\gamma}) - \\ &- m_{\alpha,\gamma} \frac{\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta + \lambda_\gamma^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta}{2\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta} \Omega^\Theta(X_\beta, X_{\alpha+\gamma}) - m_{\gamma,\alpha} \frac{\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta + \lambda_\alpha^\Theta - \lambda_\gamma^\Theta}{2\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta} \Omega^\Theta(X_{\alpha+\gamma}, X_\beta). \end{aligned}$$

Aplicando (3.3) no lado direito, vemos que $d\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ anula-se a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e $\{X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\} \not\subset \mathfrak{q}_\Theta^0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} 3d\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= i(-m_{\alpha,\beta} \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta - m_{\beta,\gamma} \varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \\ &+ m_{\alpha,\gamma} \frac{\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta + \lambda_\gamma^\Theta - \lambda_\alpha^\Theta}{2\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta} \varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta - m_{\gamma,\alpha} \frac{\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta + \lambda_\alpha^\Theta - \lambda_\gamma^\Theta}{2\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta} \varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta). \end{aligned}$$

A identidade $\alpha + \beta + \gamma = 0$ implica que $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$ (ver [16]). Além disso, como $m_{\alpha,\beta} = -m_{\beta,\alpha}$ temos finalmente

$$3d\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta).$$

■

Damos a seguir uma definição que nos permitirá distinguir as triplas de raízes de acordo com os valores que $\mathcal{F}$ assume nas respectivas distribuições.

Definição 3.3. *Seja $\mathcal{F}^\Theta = \{ \varepsilon_\alpha^\Theta \}_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle}$ uma f -estrutura invariante. Uma tripla de raízes $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$ é dita uma (p, q, r) -tripla ($p + q + r = 3$) se*

$$(i) \quad \alpha + \beta + \gamma = 0;$$

(ii) *o conjunto $\{ \varepsilon_\alpha^\Theta, \varepsilon_\beta^\Theta, \varepsilon_\gamma^\Theta \}$ contém p zeros, q uns e r menos um.*

(iii) *Denotaremos por $\{p, q, r\} = (p, q, r) \cup (p, r, q)$.*

Nesta notação as $\{0, 3, 0\}$ -triplas e $\{0, 1, 2\}$ -triplas correspondem respectivamente às $\{0, 3\}$ -triplas e $\{1, 2\}$ -triplas, no caso quase-complexo (veja, [40], [41]). Além das anteriores aparecem as $\{3, 0, 0\}$ -triplas que correspondem ao caso $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta = \varepsilon_\gamma^\Theta = 0$, as $\{2, 1, 0\}$ -triplas quando $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta = 0$ e $\varepsilon_\gamma^\Theta = +1$ ou -1 , as $\{1, 2, 0\}$ -triplas e as $\{1, 1, 1\}$ -triplas.

A definição anterior e o Lema 3.1 implicam na seguinte proposição.

Proposição 3.4. *O par invariante $(\mathcal{F}^\Theta = \{ \varepsilon_\alpha^\Theta \}, \Lambda^\Theta = \{ \lambda_\alpha^\Theta \})$ é $(1, 2)$ -simplético se e somente se*

$$\varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta = 0$$

para todas as $\{0, 1, 2\}$ -triplas e $\{1, 1, 1\}$ -triplas em $\mathfrak{q}_\Theta$.

Observação 3.5. *Em virtude da Proposição 3.4 chamaremos daqui para frente as triplas $\{0, 1, 2\}$ e $\{1, 1, 1\}$ de $\{1, 2\}$ -triplas.*

3.2 Transitividade Local Geral

Considere $\mathcal{F}^\Theta$, uma f -estrutura invariante sobre uma variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$. Uma pergunta pertinente é quando $\mathcal{F}^\Theta$ admite métricas $(1, 2)$ -simpléticas invariantes, ou seja, quando $\mathcal{F}^\Theta$ é $(1, 2)$ -admissível. No capítulo anterior vimos que no caso $\mathbb{F} = \mathbb{F}(n)$, isto ocorre exatamente quando $\mathcal{F}$ é *localmente transitiva*. Quando $\mathbb{F}_\Theta$ é geral mas $\mathcal{F}^\Theta$ é uma estrutura quase-complexa invariante, isto ocorre se, e somente se, $\mathcal{F}^\Theta$ é *afim*, como é discutido em [40] e [41]. Em [10], se introduz uma definição generalizada da propriedade *livre de cone* e mostra-se que uma condição necessária para que uma estrutura quase-complexa $\mathcal{F}$ seja $(1, 2)$ -admissível é que $\mathcal{F}$ seja livre de cone nesta nova definição. Também mostra-se que no

caso geral $\mathcal{F}$ livre de cone generalizada é equivalente a $\mathcal{F}$ afim. Assim estas três propriedades são equivalentes no contexto das estruturas quase-complexa invariantes.

Queremos agora generalizar as propriedades livre de cone e transitividade local às variedades bandeira gerais munidas com f -estruturas invariantes, preservando o termo "localmente transitivo" para a nova definição desta propriedade:

Definição 3.6. *Seja $\mathcal{F}^\Theta = \{\varepsilon_\alpha^\Theta\}_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle}$ uma f -estrutura invariante. Seja a quádrupla $Q := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, com $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ um conjunto sem pares de raízes opostas ou iguais.*

(i) *Dizemos que uma tripla de raízes $\{(u + v), \omega_1, \omega_2\}$ é extraída de Q por u e v se $\{u, v, \omega_1, \omega_2\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.*

(ii) *Dizemos que $\mathcal{F}$ é localmente transitiva se o conjunto formado pelas $\{0, 3, 0\}$ -triplas, $\{1, 2, 0\}$ -triplas e $\{2, 1, 0\}$ -triplas extraídas de Q , tem cardinalidade diferente de 1.*

Se $\mathcal{F}^\Theta$ é uma estrutura quase-complexa $\Theta = \emptyset$, isto é, a variedade bandeira é maximal, nossa definição coincide com a definição livre de cone dada em [10]. Assim como em [10] a condição de que a quádrupla não contenha pares de raízes opostas ou iguais é redundante e é incluída só para enfatizá-la. De fato, se

(i) $\beta = -\alpha$. Então $\delta = -\gamma$, e as triplas extraídas de Q são, $\{\alpha + \gamma, -\alpha, -\gamma\}$, $\{\alpha - \gamma, -\alpha, \gamma\}$, $\{-\alpha + \gamma, \alpha, -\gamma\}$, $\{-\alpha - \gamma, \alpha, \gamma\}$. Suponha por exemplo, que $\{\alpha + \gamma, -\alpha, -\gamma\}$ é uma $(0, 0, 3)$ -tripla, ou $\{1, 2, 0\}$ -tripla ou $\{2, 1, 0\}$ -tripla então $\{-\alpha - \gamma, \alpha, \gamma\}$ seria uma $(0, 3, 0)$ -tripla ou $\{2, 1, 0\}$ -tripla ou $\{1, 2, 0\}$ -tripla respectivamente. É fácil ver que neste caso, este tipo de triplas aparece em pares.

(ii) Se $\alpha = \beta$, como 2α e $\delta + \gamma = -2\alpha$ não podem ser raízes, as possíveis triplas extraídas de Q são $\{\alpha, \alpha + \delta, \gamma\}$, $\{\alpha, \delta, \alpha + \gamma\}$, $\{\alpha, \alpha + \delta, \gamma\}$ e $\{\alpha, \delta, \alpha + \gamma\}$ mais uma vez a condição localmente transitivo é satisfeita.

A seguinte proposição reforça o fato de que a definição geral de localmente transitivo é baseada no que acontece no caso A_n .

Proposição 3.7. *Na variedade bandeira maximal associada a $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, uma f -estrutura invariante é localmente transitiva no sentido da definição 3.6 se, e somente se, cada 4-subdigrafo do digrafo associado não é um dos seis digrafos na Figura 2.7.*

Demonstração : Sejam $\mathcal{F}$ uma f -estrutura invariante e $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ seu digrafo correspondente, suponha que $\mathcal{F}$ é localmente transitiva no sentido da Definição 3.6.

Seja $\{i, j, k, l\}$ um 4-subdigrafo de $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ e considere o correspondente conjunto das raízes $p = \{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\} \subset \Pi$ com $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{kl} + \alpha_{li} = 0$. Se $\mathcal{F}|_p$ é uma estrutura quase-complexa invariante, em [10] mostrou-se que $\{i, j, k, l\}$ não é um cone, então $\{i, j, k, l\}$ não é um dos seis digrafos na Figura 2.7. Caso contrário, de $q = \{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$ extraímos quatro triplas $\{\alpha_{ik}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$, $\{\alpha_{jl}, \alpha_{li}, \alpha_{ij}\}$, $\{\alpha_{ki}, \alpha_{ij}, \alpha_{jk}\}$ e $\{\alpha_{lj}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}\}$. Cada uma destas triplas corresponde a um 3-subdigrafo, isto é, $\{\alpha_{ik}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$ é associado a $\{i, k, l\}$. Dado que o número de triplas do tipo $\{1, 2, 0\}$ e $\{2, 1, 0\}$ extraídas de q deve ser diferente de 1, $\{i, j, k, l\}$ é diferente dos últimos quatro digrafos em 2.7.

Para demonstrar o recíproco, da mesma forma que em [10] um conjunto de quatro raízes $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ com $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ que não contém pares de raízes opostas ou iguais, tem a forma $\{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$ para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ e como o subdigrafo associado é diferente dos seis 4-digrafos na Figura 2.7 então a cardinalidade do conjunto de triplas extraídas de p do tipo $\{0, 3, 0\}$, $\{1, 2, 0\}$, $\{2, 1, 0\}$ é diferente de 1. Repetindo o argumento acima, nós temos a condição de localmente transitivo generalizada. ■

Agora estendemos o Teorema 3.3 em [10] para variedades bandeira gerais e para f -estruturas.

Teorema 3.8. *Uma condição necessária para $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$ ser $(1, 2)$ -simplética é que $\mathcal{F}^\Theta$ seja localmente transitiva no sentido da Definição 3.6.*

Demonstração : Lembramos que $d^2 = 0$ computando $d^2\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)$ temos que as únicas quádruplas $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$ de interesse, são aquelas satisfazendo $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ com $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \not\subseteq \mathfrak{q}_\Theta^0$. Assim como no caso das estruturas quase-complexas, nós temos os seguintes 6 termos:

1. $+im_{\alpha, \beta} m_{\gamma, \delta} (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta + \varepsilon_\delta^\Theta \lambda_\delta^\Theta),$
2. $-im_{\beta, \gamma} m_{\delta, \alpha} (\varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_{\beta+\gamma}^\Theta \lambda_{\beta+\gamma}^\Theta + \varepsilon_\delta^\Theta \lambda_\delta^\Theta),$

3. $+im_{\gamma,\delta}m_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha^\Theta\lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_\beta^\Theta\lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_{\gamma+\delta}^\Theta\lambda_{\gamma+\delta}^\Theta),$
4. $-im_{\beta,\delta}m_{\alpha,\gamma}(\varepsilon_\alpha^\Theta\lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta\lambda_\gamma^\Theta + \varepsilon_{\beta+\delta}^\Theta\lambda_{\beta+\delta}^\Theta),$
5. $-im_{\alpha,\gamma}m_{\beta,\delta}(\varepsilon_\beta^\Theta\lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_{\alpha+\gamma}^\Theta\lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta + \varepsilon_\delta^\Theta\lambda_\delta^\Theta),$
6. $+im_{\alpha,\delta}m_{\beta,\gamma}(\varepsilon_\beta^\Theta\lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta\lambda_\gamma^\Theta + \varepsilon_{\alpha+\delta}^\Theta\lambda_{\alpha+\delta}^\Theta).$

Agora seja $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \not\subseteq \mathfrak{q}_\Theta^0$ uma quádrupla de raízes tal que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. Dos seis termos acima, aqueles que correspondem às $\{1, 2\}$ -triplas, isto é, os termos correspondentes às $\{0, 1, 2\}$ -triplas e $\{1, 1, 1\}$ -triplas extraídas de Q , são zero se $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$ é $(1, 2)$ -simplética. Assim para $d^2\Omega^\Theta$ ser zero não existe uma métrica Λ^Θ tal que ao extrair exatamente uma tripla dos tipos $\{1, 2, 0\}$ ou $\{2, 1, 0\}$ ou $\{0, 3, 0\}$ os termos correspondentes na numeração acima sejam zero. Se R é o conjunto das raízes que aparecem nas triplas extraídas de Q e $\mathcal{F}|_R$ é uma estrutura quase-complexa invariante este caso corresponde ao estudado em [10] e aqui é impossível extrair exatamente uma $\{0, 3, 0\}$ -tripla. Note que é possível aparecer duas delas ou as três juntas, (ver por exemplo (19) na Figura 2.5 e (23) na Figura 2.6). ■

Daqui para frente e até o final deste capítulo, os resultados obtidos referem-se só a f -variedades bandeira maximais $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$.

3.3 Álgebras de Lie de Posto Três

Em [10] mostra-se que, exceto quando o sistema de raízes corresponde a G_2 , a condição *livre de cone* é uma condição de subsistemas de Π de posto três. O propósito desta seção é estender às f -estruturas invariantes os resultados obtidos em [10] para estruturas quase-complexas invariantes em sistemas de raízes de posto três (principalmente os irredutíveis A_3, B_3, C_3). Note primeiro que os sistemas de raízes redutíveis de posto três são $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$, $A_1 \oplus A_2$ e $A_1 \oplus B_2$. Nestes casos as f -estruturas invariantes admitem métricas $(1, 2)$ -simpléticas. De fato, os casos A_1 e A_2 correspondem a $\mathbb{F}(2)$ e $\mathbb{F}(3)$ respectivamente e já foram analisados no capítulo anterior. Para o caso B_2 (isomorfo a C_2) o sistema de raízes positivas é $\Pi^+(B_2) = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$. A menos de sinais existe só uma quádrupla em B_2 , $\{\alpha, \alpha, \beta, -(2\alpha + \beta)\}$, e as duas únicas possíveis triplas extraídas dela são iguais, portanto qualquer f -estrutura invariante $\mathcal{F}$ definida sobre a variedade bandeira maximal cor-

respondente é localmente transitiva. Para ver o recíproco, isto é, que $\mathcal{F}$ é (1,2)-admissível, basta definir a métrica na única tripla que aparece, $(\alpha, \alpha + \beta, -2\alpha - \beta)$. Portanto para os casos mencionados anteriormente temos a equivalência entre localmente transitivo e (1,2)-admissibilidade.

No que concerne ao caso $A_3 = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ já vimos no Capítulo 2 que a f -estrutura invariante $\mathcal{F}$ corresponde a um digrafo $\mathcal{G}(\mathcal{F})$. Pela Proposição 3.7, $\mathcal{F}$ é localmente transitiva se e somente se $\mathcal{G}$ não é um dos seis digrafos na Figura 2.7, ou seja $\mathcal{G}$ corresponde a um dos digrafos nas Figuras 2.5 e 2.6. A seguir consideramos o caso B_3 .

3.3.1 O Caso B_3

A realização standard do sistema positivo de raízes de B_3 é $L \cup S$ onde $L = \{e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 3\}$ e $S = \{e_i : 1 \leq i < j \leq 3\}$ são os conjuntos de raízes longas e curtas respectivamente. O conjunto L é isomorfo ao sistema de raízes positivas de A_3 , $L_3 = \{\alpha_{ij} : 1 \leq i < j \leq 3\}$ via a seguinte bijeção:

Raízes simples: $\alpha_{12} \leftrightarrow e_2 - e_3$; $\alpha_{23} \leftrightarrow e_1 - e_2$; $\alpha_{34} \leftrightarrow e_2 + e_3$.

Raízes de altura 2: $\alpha_{13} \leftrightarrow e_1 - e_3$; $\alpha_{24} \leftrightarrow e_1 + e_3$.

Raízes de altura 3: $\alpha_{14} \leftrightarrow e_1 + e_2$.

Proposição 3.9. *Suponha $\mathbb{F}$ a variedade bandeira maximal associada a B_3 com uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}$ é (1,2)-admissível se e somente se $\mathcal{F}$ é localmente transitiva.*

Demonstração : Seja $\mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha\}$ uma f -estrutura invariante na variedade bandeira maximal associada a B_3 . Sua restrição $\mathcal{F}^l$ às raízes longas L é também localmente transitiva, por isto podemos assumir que ela é representada por um dos 34 digrafos nas figuras 2.5 e 2.6. Assim para que $\mathcal{F}$ seja localmente transitiva resta ver o que acontece nas raízes curtas e_1, e_2, e_3 . Para isto só apresentamos as quádruplas que aparecem em B_3 que não são quádruplas de

raízes longas. A menos de mudança de sinais, são as seguintes 18 quádruplas.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{-e_1, e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3\}, & Q_2 &= \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, -e_1, -e_3\}, \\
Q_3 &= \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -e_2, -e_1\}, & Q_4 &= \{e_2 - e_3, e_2 + e_3, -e_2, -e_2\}, \\
Q_5 &= \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, -e_1, -e_1\}, & Q_6 &= \{e_2 + e_3, e_1 - e_3, -e_2, -e_1\}, \\
Q_7 &= \{e_1 - e_3, e_1 + e_3, -e_1, -e_1\}, & Q_8 &= \{e_2 - e_3, -(e_2 + e_3), e_3, e_3\}, \\
Q_9 &= \{e_2 - e_3, -(e_1 + e_2), e_3, e_1\}, & Q_{10} &= \{e_1 - e_2, -(e_1 - e_3), e_2, -e_3\}, \\
Q_{11} &= \{e_1 - e_2, -(e_1 + e_3), e_2, e_3\}, & Q_{12} &= \{e_1 - e_2, -(e_1 + e_2), e_2, e_2\}, \\
Q_{13} &= \{e_2 + e_3, -(e_1 + e_3), -e_2, e_1\}, & Q_{14} &= \{e_2 + e_3, -(e_1 + e_2), -e_3, e_1\}, \\
Q_{15} &= \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_3), e_3, e_3\}, & Q_{16} &= \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_2), e_3, e_2\}, \\
Q_{17} &= \{e_1 + e_3, -(e_1 + e_2), -e_3, e_2\}, & Q_{18} &= \{e_2 - e_3, -(e_1 - e_3), -e_2, e_1\}.
\end{aligned}$$

Listamos a seguir as triplas extraídas em cada quádrupla. Notamos que as quádruplas $Q_4, Q_5, Q_7, Q_8, Q_{12}, Q_{15}$ são excluídas pela definição 3.6 .

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \begin{pmatrix} \{-e_2, e_2 - e_3, e_3\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_1 - e_2, e_2 - e_3\} \\ \{e_1 - e_3, -e_1, e_3\} \\ \{e_2, -e_1, e_1 - e_2\} \end{pmatrix} & Q_2 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_3, -e_1, -e_3\} \\ \{-e_2, e_2 + e_3, -e_3\} \\ \{e_2, e_1 - e_2, -e_1\} \\ \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_2, e_2 + e_3\} \end{pmatrix} \\
Q_3 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -e_2, -e_1\} \\ \{-e_3, e_1 + e_3, -e_1\} \\ \{e_3, e_2 - e_3, -e_2\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 - e_3, e_1 + e_3\} \end{pmatrix} & Q_6 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -e_2, -e_1\} \\ \{e_3, e_1 - e_3, -e_1\} \\ \{-e_3, e_2 + e_3, -e_2\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 + e_3, e_1 - e_3\} \end{pmatrix} \\
Q_9 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 + e_3), e_3, e_1\} \\ \{e_2, -(e_1 + e_2), e_1\} \\ \{-e_2, e_2 - e_3, e_3\} \\ \{e_1 + e_3, e_2 - e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{10} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 - e_3), e_2, -e_3\} \\ \{e_1, -(e_1 - e_3), -e_3\} \\ \{-e_1, e_1 - e_2, e_2\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 - e_2, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix} \\
Q_{11} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 + e_3), e_2, e_3\} \\ \{e_1, -(e_1 + e_3), e_3\} \\ \{-e_1, e_1 - e_2, e_2\} \\ \{e_2 + e_3, e_1 - e_2, -(e_1 + e_3)\} \end{pmatrix} & Q_{13} &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_2), -e_2, e_1\} \\ \{e_3, -(e_1 + e_3), e_1\} \\ \{-e_3, e_2 + e_3, -e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, -(e_1 + e_3)\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{14} &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_3), -e_3, e_1\} \\ \{e_2, -(e_1 + e_2), e_1\} \\ \{-e_2, e_2 + e_3, -e_3\} \\ \{e_1 - e_3, e_2 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{16} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 + e_3), e_3, e_2\} \\ \{e_1, -(e_1 + e_2), e_2\} \\ \{-e_1, e_1 - e_3, e_3\} \\ \{e_2 + e_3, e_1 - e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} \\
Q_{17} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 - e_3), -e_3, e_2\} \\ \{e_1, -(e_1 + e_2), e_2\} \\ \{-e_1, e_1 + e_3, -e_3\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{18} &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_2), -e_2, e_1\} \\ \{-e_3, -(e_1 - e_3), e_1\} \\ \{e_3, e_2 - e_3, -e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quando $\mathcal{F}$ é uma estrutura quase-complexa invariante, os únicos casos a considerar foram (35) e (36) na figura 2.6. Nestes casos podia-se assumir $\varepsilon_{e_3} = +1$, dado que a reflexão r_3 com respeito a e_3 deixa L_3 invariante fixando a raiz mais alta $e_1 + e_2$. O caso $\varepsilon_{e_3} = -1$ seguia por simetria. No nosso caso, esta invariança não garante a simetria dos resultados, por isto temos de estudar todas as opções de ε_α para α nas raízes curtas. As f -estruturas localmente transitivas que podem ser definidas em B_3 são descritas a partir dos Lemas B.1 a B.34 no Apêndice B. Para mostrar que qualquer f -estrutura localmente transitiva é (1,2)-admissível as (1,2)-triplas em B_3 têm que satisfazer 3.1 e 3.2 no Teorema 3.1.

A menos de sinais, as triplas que aparecem em B_3 são as seguintes:

$$\begin{array}{ll}
\{(e_2 - e_3), (e_1 + e_3), -(e_1 + e_2)\} & \{(e_2 - e_3), (e_1 - e_2), -(e_1 - e_3)\} \\
\{(e_1 - e_2), (e_2 + e_3), -(e_1 + e_3)\} & \{(e_1 - e_3), (e_2 + e_3), -(e_1 + e_2)\} \\
\{(e_2 - e_3), e_3, -e_2\} & \{(e_1 - e_2), e_2, -e_1\} \\
\{(e_2 - e_3), e_3, -e_2\} & \{(e_2 + e_3), -e_3, -e_2\} \\
\{(e_1 + e_2), -e_1, -e_2\} & \{(e_1 + e_3), -e_3, -e_1\}.
\end{array}$$

Ao fazer os cálculos diretos, verificamos que qualquer f -estrutura que não é localmente transitiva também não é (1,2)-admissível. As métricas (1,2)-simpléticas admitidas aparecem no Apendice C.

Observação 3.10. *Note que as estruturas quase-complexas associadas aos ideais abelianos $M(J_3)$ e $M(J_4)$ que aparecem em [10] são (1,2)-admissíveis (veja 35(b)v e 34(b)iii respectivamente no Apêndice A) e pela Proposição 3.9 segue uma demonstração direta de que em B_3 a condição livre de cone em [10] é equivalente à condição (1,2)-admissível.*

3.3.2 O caso C_3

A discussão no caso das álgebras do tipo C_3 segue o mesmo procedimento utilizado no caso B_3 . Na realização standard de C_3 , suas raízes curtas coincidem com as raízes longas de B_3 enquanto as longas são dadas por $\pm 2e_i, i = 1, 2, 3$.

Proposição 3.11. *Seja $\mathbb{F}$ a variedade bandeira maximal associada a C_3 com uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}$ é $(1,2)$ -admissível se e somente se $\mathcal{F}$ é localmente transitiva.*

Demonstração : Como no caso B_3 , podemos assumir que a restrição às raízes curtas, $\mathcal{F}^s$, de uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}$ localmente transitiva corresponde a um dos digrafos nas Figuras 2.5 e 2.6. Assim, resta encontrar para que valores das raízes longas a $\mathcal{F}$ é localmente transitiva. Utilizando a mesma metodologia que no caso B_3 , observamos que as quádruplas que aparecem em C_3 que não são quádruplas de raízes curtas são:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{-2e_1, e_1 - e_2, e_1 + e_3, e_2 - e_3\}, & Q_2 &= \{e_2 - e_3, e_1 - e_3, -(e_1 - e_2), 2e_3\}, \\
Q_3 &= \{e_2 - e_3, e_1 + e_2, e_3 - e_1, -2e_2\}, & Q_4 &= \{e_2 - e_3, -(e_1 + e_3), e_1 - e_2, 2e_3\}, \\
Q_5 &= \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\}, & Q_6 &= \{e_1 - e_2, e_1 + e_3, e_2 - e_3, -2e_1\}, \\
Q_7 &= \{e_2 + e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2), -2e_3\}, & Q_8 &= \{e_2 + e_3, e_1 + e_2, -(e_1 + e_3), -2e_1\}, \\
Q_9 &= \{e_1 - e_3, e_1 + e_2, e_3 - e_2, -2e_1\}, & Q_{10} &= \{e_1 + e_3, -(e_3 + e_2), e_1 + e_2, -2e_1\}, \\
Q_{11} &= \{-(e_1 - e_2), e_1 + e_3, e_2 - e_3, -2e_2\}, & Q_{12} &= \{e_1 - e_2, -(e_2 + e_3), -(e_1 - e_3), +2e_2\}, \\
Q_{13} &= \{e_2 - e_3, e_2 - e_3, -2e_2, 2e_3\}, & Q_{14} &= \{e_1 - e_2, e_1 - e_2, -2e_1, 2e_2\}, \\
Q_{15} &= \{e_2 + e_3, e_2 + e_3, -2e_2, -2e_3\}, & Q_{16} &= \{e_1 - e_3, e_1 - e_3, -2e_1, 2e_3\}, \\
Q_{17} &= \{e_1 + e_3, e_1 + e_3, -2e_1, -2e_3\}, & Q_{18} &= \{e_1 + e_2, e_1 + e_2, -2e_2, -2e_1\}, \\
Q_{19} &= \{-(e_2 + e_3), e_1 - e_3, -(e_1 - e_2), 2e_3\}, & Q_{20} &= \{e_2 - e_3, e_1 - e_2, -(e_1 + e_3), 2e_3\}.
\end{aligned}$$

Agora analisamos as triplas extraídas em cada quádrupla. Notamos que as quádruplas $Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}$ são excluídas pela definição 3.6. A seguir listamos as triplas extraídas das quádruplas restantes:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_3), e_1 + e_3, -2e_1\} \\ \{(e_1 + e_2), e_1 - e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 - e_3, e_1 + e_3\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_2 - e_3, e_1 - e_2\} \end{pmatrix} & Q_2 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_3, 2e_3\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_2 - e_3, 2e_3\} \\ \{e_1 + e_3, e_2 - e_3, -(e_1 + e_2)\} \\ \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_2), e_2 + e_3\} \end{pmatrix} \\
Q_3 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -(e_1 - e_2), -2e_1\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_1 + e_2, -(e_1 - e_3)\} \\ \{e_2 + e_3, e_2 - e_3, -2e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix} & Q_4 &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_3), 2e_3\} \\ \{e_2 + e_3, -(e_1 + e_3), e_1 - e_2\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_2 - e_3, 2e_3\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_1 - e_2, e_2 - e_3\} \end{pmatrix} \\
Q_5 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 + e_3, e_1 - e_3\} \\ \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_2, e_2 + e_3\} \end{pmatrix} & Q_6 &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_3, e_1 + e_3, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 - e_3, e_1 + e_3\} \\ \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, -2e_1\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 - e_2, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix} \\
Q_7 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_3), e_1 + e_3, -2e_3\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \\ \{-(e_2 - e_3), e_2 + e_3, -2e_3\} \\ \{e_1 - e_3, e_2 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_8 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_2), e_1 + e_2, -2e_2\} \\ \{-(e_2 - e_3), e_1 + e_2, -(e_1 + e_3)\} \\ \{e_2 - e_3, e_2 + e_3, -2e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, -(e_1 + e_3)\} \end{pmatrix} \\
Q_9 &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_3), e_1 + e_2, -(e_2 - e_3)\} \\ \{e_1 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\} \\ \{e_1 - e_3, -(e_2 - e_3), -(e_1 - e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{10} &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_1 + e_2, -(e_2 + e_3)\} \\ \{e_1 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\} \\ \{-(e_1 - e_2), e_1 + e_3, -(e_2 + e_3)\} \end{pmatrix} \\
Q_{11} &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -(e_1 - e_2), -2e_2\} \\ \{-(e_2 + e_3), -(e_1 - e_2), e_1 + e_3\} \\ \{e_2 + e_3, e_2 - e_3, -2e_2\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{12} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 - e_3), -(e_2 + e_3), -(e_1 - e_3)\} \\ \{e_1 + e_2, -(e_2 + e_3), -(e_1 - e_3)\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_1 - e_2, 2e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix} \\
Q_{19} &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_3, 2e_3\} \\ \{-(e_2 - e_3), e_1 - e_3, -(e_1 - e_2)\} \\ \{e_2 - e_3, -(e_2 + e_3), 2e_3\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_1 + e_3, -(e_1 - e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{20} &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_3), 2e_3\} \\ \{e_2 + e_3, e_1 - e_2, -(e_1 + e_3)\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_2 - e_3, 2e_3\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

As f -estruturas localmente transitivas que podem ser definidas em $\mathbb{F}$ são descritas a partir dos lemas D.1 a D.24 no Apêndice D. Para mostrar que qualquer f -estrutura localmente

transitiva é (1,2)-admissível, as (1,2)-triplas em C_3 têm que satisfazer 3.1 e 3.2 no Teorema 3.1. A menos de sinais as triplas que aparecem em C_3 são as seguintes:

$$\begin{array}{ll} \{(e_2 - e_3), (e_1 + e_3), -(e_1 + e_2)\} & \{(e_2 - e_3), (e_1 - e_2), -(e_1 - e_3)\} \\ \{(e_1 - e_2), (e_2 + e_3), -(e_1 + e_3)\} & \{(e_1 - e_3), (e_2 + e_3), -(e_1 + e_2)\} \\ \{(e_2 - e_3), e_2 + e_3, -2e_2\} & \{(e_1 - e_2), -(e_1 + e_2), 2e_2\} \\ \{(e_1 - e_3), e_1 + e_3, -2e_1\} & \{(e_1 + e_2), e_1 - e_2, -2e_1\} \\ \{(e_1 - e_3), -(e_1 + e_3), 2e_3\} & \{-(e_2 + e_3), e_2 - e_3, 2e_3\}. \end{array}$$

Ao fazer os cálculos diretos pudemos ver que qualquer f -estrutura que não é localmente transitiva também não é (1,2)-admissível. ■

Observação 3.12. *Note que pela proposição anterior e pelo lema D.24 no Apêndice D, ε_{2e_1} pode assumir o valor de -1 quando $\varepsilon_{\alpha_{14}} = 1$. Assim na Proposição 4.3 de [10] deve aparecer mais um ideal abeliano $M(J_4) = \{2e_1\}$ localmente transitivo e (1,2)-admissível.*

Pelas Proposições 3.9, 3.11 e a Observação 3.10 o Teorema 8.1 em [10] pode-se reformular da seguinte forma:

Teorema 3.13. *Seja Π um sistema de raízes associado a B_l ou C_l ou F_4 e J uma estrutura quase-complexa invariante sobre a variedade bandeira maximal correspondente. Então J é afim (e portanto (1,2)-admissível, veja [40]) se e somente se satisfaz a condição livre de cone (localmente transitiva).*

3.4 O caso G_2

Como mencionamos antes, G_2 é o único sistema de raízes de posto dois onde a condição livre de cone, e por extensão a condição localmente transitivo, é não vazia. Com ânimo de completar a nossa análise, estendemos às f -estruturas invariantes os resultados obtidos neste caso para estruturas quase-complexas invariantes em [10].

As raízes positivas de G_2 são $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$. O conjunto de raízes curtas $\{\pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$ é um sistema de raízes do tipo A_2 . Seja $\mathcal{F}$ uma f -estrutura invariante sobre a variedade bandeira associada à álgebra G_2 e denote por $\mathcal{F}^s$

sua restrição ao conjunto de raízes curtas. Em $\mathbb{F}(3)$, a variedade bandeira maximal associada com A_2 , existem sete classes de isomorfismos de f -estruturas invariantes correspondentes aos digrafos que aparecem na Figura 2.4. Se $\mathcal{F}$ é localmente transitiva, $\mathcal{F}^s$ corresponde a um desses sete digrafos. A menos de mudança de sinais, em G_2 existem três quádruplas:

$$Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}.$$

$$Q_2 = \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}.$$

$$Q_3 = \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2), -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}.$$

Notamos que a quádrupla Q_2 é excluída pela definição 3.6. A continuação listamos as triplas extraídas das quádruplas restantes.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \{\alpha_1, \alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\} \\ \{-(\alpha_1 + 3\alpha_2), \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\} \\ \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \\ \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \{2\alpha_1 + 3\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2), -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\} \\ \{\alpha_1 + 3\alpha_2, -\alpha_2, -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\} \\ \{\alpha_2, \alpha_1, -(\alpha_1 + \alpha_2)\} \\ \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \end{pmatrix}$$

Quando $\mathcal{F}^s$ corresponde a uma estrutura quase-complexa invariante, os únicos casos a considerar são (6) e (7) na figura 2.4. Nestes casos podia-se assumir $\varepsilon_{\alpha_1} = +1$, dado que a reflexão r_1 com respeito a α_1 satisfaz $r_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ e $r_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2$ implicando que r_1 deixa $\mathcal{F}^s$ invariante, e portanto os valores admitidos quando $\varepsilon_{\alpha_1} = -1$ ficam determinados por simetria. No nosso caso, esta invariança não garante a simetria dos resultados, por isto temos de estudar todas as opções para as raízes longas.

No Apêndice E listamos, em forma de lemas, as f -estruturas invariantes localmente transitivas.

Da mesma forma que em B_3 e C_3 temos a seguinte proposição:

Proposição 3.14. *Seja $\mathbb{F}$ a variedade bandeira maximal associada a G_2 , munida de uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}$ é (1,2)-admissível se e somente se $\mathcal{F}$ é localmente transitiva.*

Demonstração : As f -estruturas localmente transitivas que podem ser definidas em $\mathbb{F}$ são descritas a partir dos Lemas E.1 a E.7 no Apêndice E. Para mostrar que qualquer f -estrutura localmente transitiva é (1,2)-admissível as (1,2)-triplas em G_2 , tem que satisfazer 3.1 e 3.2 no Teorema 3.1. A menos de sinais, as triplas que aparecem em G_2 são as seguintes:

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1, \alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\} && \{\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \\ &\{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} && \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \\ &\{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}. \end{aligned}$$

Ao fazer os cálculos diretos verificamos que qualquer f -estrutura que não é localmente transitiva também não é (1,2)-admissível. ■

3.5 f -Estruturas Completamente Não Transitivas

A demonstração da equivalência das condições localmente transitiva e (1,2)-admissível no caso das álgebras do tipo A_n e os cálculos feitos nos casos B_3, C_3, G_2 sugerem a equivalência destas duas condições no caso geral. Só conseguimos mostrar a suficiência para um tipo específico de f -estruturas que, em analogia com o caso A_n , serão chamadas *completamente não transitivas*. Primeiro algumas definições e alguns lemas inspirados no caso A_n .

Definição 3.15. *Seja Π um sistema de raízes e $\mathcal{F}$ uma f -estrutura invariante não trivial sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é transitiva se todas as triplas de Π são do tipo $\{0, 1, 2\}$.*

Lema 3.16. *Assuma $\text{posto}(\mathfrak{g}) \geq 2$ e $\mathbb{F}$ a variedade bandeira maximal associada a G . Seja $\mathcal{F}$ uma f -estrutura invariante transitiva definida sobre $\mathbb{F}$, então $\mathcal{F}$ corresponde à estrutura quase-complexa invariante canônica.*

Demonstração : Primeiro devemos mostrar que $\mathcal{F}$ é de fato estrutura quase-complexa, isto é, $\mathfrak{q}^0$ é trivial. Se $\text{posto}(\mathfrak{g}) \geq 2$, e α é uma raiz simples, existe pelo menos uma raiz β de altura maior ou igual que dois, isto é, existe $\gamma \in \Pi$ com $\beta = \alpha + \gamma$. Considere a tripla $\{\alpha, \gamma, -\beta\}$, como $\mathcal{F}$ é transitiva, $\varepsilon_\alpha \neq 0$. Se α não é simples existe $\beta, \gamma \in \Pi$ com $\alpha = \beta + \gamma$. Na tripla $\{\beta, \gamma, -\alpha\}$ pela transitividade de $\mathcal{F}$ ε_α também deve ser diferente de zero. Concluimos assim que $\mathfrak{q}^0$ é trivial e portanto $\mathcal{F}$ é uma estrutura quase-complexa. Agora o fato de só aparecer triplas do tipo $\{0, 1, 2\}$ e $\mathfrak{q}^0$ ser trivial garante que o conjunto $P = \{\alpha \in \Pi, \quad \varepsilon_\alpha = +1\}$ é

uma escolha de raízes para alguma ordem lexicográfica, dado que P é fechado pela soma e $P \cup -P = \Pi$. Assim $\mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha = +1 \quad \text{se} \quad \alpha \in \Pi^+\}$ e pela Proposição 2.4 em [40], $\mathcal{F}$ é a estrutura quase-complexa canônica. ■

Definição 3.17. Dizemos que uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}$ é completamente não transitiva (abreviado CNT) se ela não possui triplas de raízes do tipo $\{0, 1, 2\}$. Um exemplo destas estruturas, que justifica a sua nomenclatura, é fornecido pelas f -estruturas associadas com digrafos CNT no caso A_n .

Lema 3.18. Seja uma quádrupla de raízes $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ com $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. Suponha que em Q não existem pares de raízes iguais ou opostas, então o número de triplas extraídas de Q é quatro.

Demonstração : Note que o sistema gerado pela quádrupla de raízes Q no lema é um sistema de posto menor ou igual a três. Pelas condições da quádrupla, os únicos casos onde a condição é não vazia são $G_2, A_1 \oplus G_2, A_3, B_3, C_3$. O caso G_2 foi analisado na Seção 3.4 e na página 46 vimos que a quantidade de triplas extraídas para cada quádrupla é quatro. $A_1 \oplus G_2$ satisfaz o lema pela análise anterior. No caso A_3 , as Figuras 2.5-2.7 mostram o lema e para os casos B_3, C_3 veja as páginas 41, 43. ■

Lema 3.19. Uma f -estrutura invariante CNT definida sobre $\mathbb{F}$ é localmente transitiva.

Demonstração : Seja Π o sistema de raízes correspondente a $\mathbb{F}$. Se $\dim(\Pi) = 1$ a condição localmente transitiva é vazia, assim assumamos $\dim(\Pi) \geq 2$. Pela Definição 3.17 e pelo Lema 3.18 para qualquer quádrupla de raízes em Π a quantidade de triplas extraídas são quatro e do tipo $\{3, 0, 0\}$, $\{1, 2, 0\}$, $\{2, 1, 0\}$, $\{1, 1, 1\}$ ou $\{0, 3, 0\}$. Portanto as únicas possibilidades de que tal f -estrutura não satisfaça a condição (ii) na definição 3.6 é quando três de tais triplas sejam do tipo $\{3, 0, 0\}$ e a outra do tipo não permitido, ou três triplas sejam do tipo $\{1, 1, 1\}$ e outra do tipo não permitido (veja condição (ii) na definição 3.6). Isto é impossível, dado que cada raiz ou sua oposta aparece em uma das quatro triplas, a combinatória das raízes não permite os casos citados. ■

Agora estamos prontos para demonstrar o seguinte:

Lema 3.20. Toda f -estrutura invariante CNT é (1,2)-admissível.

Demonstração : Como $\mathcal{F}$ não contém triplas do tipo $\{0, 1, 2\}$ as métricas admitidas devem satisfazer a condição 3.1 no Teorema 3.1. Assim, como no caso A_n , a métrica Cartan-Killing em que $\lambda_\alpha = 1$ para toda $\alpha \in \Pi$, satisfaz esta condição. ■

Em analogia com o caso A_n damos também a seguinte definição .

Definição 3.21. *Em uma tripla de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ do tipo $\{0, 1, 2\}$, com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta \neq \varepsilon_\gamma$, γ será dito base e α, β lados. Uma raiz $\alpha \in \Pi$ é dita uma base (lado) se for base (lado) para alguma tripla de raízes de Π .*

Lema 3.22. *Em uma f -estrutura invariante transitiva $\mathcal{F}$ existe uma raiz que é base mas não é lado para alguma tripla de raízes em Π .*

Demonstração : Sendo $\mathcal{F}$ transitiva, existe um conjunto de raízes positivas Π^+ tal que $\varepsilon_\alpha = +1$, se $\alpha \in \Pi^+$. Seja μ a raiz de maior altura em Π^+ . Então $\mu \in \Pi^+$ e $\varepsilon_\mu = +1$. Considere a tripla $\{\alpha, \beta, \mu\}$. Como $\alpha + \beta + \mu = 0$, pela maximalidade de μ temos que α e β estão em Π^- . Logo $-1 = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta \neq \varepsilon_\mu$, portanto μ é base. Pela arbitrariedade de α, β fica demonstrado o lema. ■

Assuma $\mathcal{F}$ uma f -estrutura invariante definida sobre $\mathbb{F}$ e Π o sistema de raízes correspondente. A restrição da $\mathcal{F}$ a um subsistema de Π será chamada f -subestrutura.

Conjectura 3.23. *Seja $\mathcal{F}$ uma f -estrutura invariante localmente transitiva que não é CNT. Então em Π^+ existe uma raiz α que é base mas não é lado em alguma tripla de Π .*

Vale a pena notar que se a Conjectura 3.23 é verdadeira, temos uma demonstração para a seguinte conjectura.

Conjectura 3.24. *Seja $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, ds_\Lambda^2)$. Se $\mathcal{F}$ é localmente transitiva então $\mathcal{F}$ é $(1,2)$ -admissível.*

Para finalizar o capítulo, aplicando o Teorema 1.25 e o Lema 3.5 temos:

Teorema 3.25. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão par, com estrutura quase-complexa J , forma de Kähler Ω e $\phi : (M, g, J) \rightarrow (\mathbb{F}, \mathcal{F})$ uma aplicação f -holomorfa ($d\phi \circ J = \mathcal{F} \circ d\phi$) com $\mathcal{F}$ CNT, assuma ademais que M é co-simplética, isto é $d^*\Omega = 0$. então ϕ é harmônica com respeito à métrica Cartan Killing.*

CAPÍTULO 4

Condições de Integrabilidade

Neste capítulo voltamos a considerar a variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$. Estudamos sob que condições $\mathbb{F}_\Theta$ é f -Kähler. Estudamos também as condições de integrabilidade das distribuições determinadas por uma f -estrutura invariante sobre $\mathfrak{q}_\Theta$ e analisaremos as f -estruturas horizontais.

Seja (M, J, g, Ω) uma variedade Hermitiana diferenciável, onde J é uma estrutura quase-complexa e Ω a forma de Kähler associada à métrica g . Dizemos que M é *quase-Kähler* se a forma de Kähler Ω é fechada, isto é se $d\Omega = 0$. Se ademais J é integrável (isto é, o tensor de Nijenhuis N identicamente nulo) dizemos que M é uma *variedade Kähler*. No contexto de variedades diferenciáveis gerais, temos também a equivalência entre o paralelismo da J , isto é $\nabla J = 0$, onde ∇ é a conexão Riemanniana associada a g , e o fato da M ser uma variedade Kähler (veja [20]). Por isto, o análogo para a f -variedade $(M, \mathcal{F}, g)$ da condição Kähler é que a $\mathcal{F}$ seja paralela. Notamos que no caso invariante $(\mathbb{F}_\Theta, J^\Theta, \Lambda^\Theta)$, como foi mostrado em [40] e [41], quase-Kähler implica Kähler. Daqui temos a seguinte definição:

Definição 4.1. *Seja $\mathcal{F}^\Theta$ uma f -estrutura invariante sobre $\mathbb{F}_\Theta$. Dizemos que $\mathbb{F}_\Theta$ é uma f -variedade Kähler se $\mathcal{F}^\Theta$ é paralela.*

Usando as equações (1.7), (1.30) e (1.31) chegamos ao seguinte resultado.

Proposição 4.2. *Para cada $X_\alpha, X_\beta \in \mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C}$ temos:*

$$(\nabla \mathcal{F}^\Theta)(X_\alpha, X_\beta) = im_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_\alpha^\Theta(\varepsilon_\alpha^\Theta - \varepsilon_\beta^\Theta) + \lambda_\beta^\Theta(\varepsilon_\beta^\Theta - \varepsilon_\alpha^\Theta) + \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta(\varepsilon_\alpha^\Theta + \varepsilon_\beta^\Theta - 2\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)}{2\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta}$$

com $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$.

Da proposição anterior é fácil ver que se existem triplas do tipo $\{0, 3, 0\}$, $\{1, 2, 0\}$ ou $\{2, 1, 0\}$ a f -variedade bandeira não pode ser Kähler. Aqui recuperamos a condição de não existência de triplas do tipo $\{0, 3\}$ no caso de estruturas quase-complexas invariantes. Assim em $\mathbb{F}_\Theta$ temos o seguinte resultado.

Lema 4.3. *Uma condição necessária e suficiente para $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$ ser uma f -variedade Kähler é que em $\mathfrak{q}_\Theta$ não existam triplas do tipo $\{0, 3, 0\}$, $\{1, 2, 0\}$ ou $\{2, 1, 0\}$. Em particular para $(\mathbb{F}(n), \mathcal{F}, \Lambda)$ Kähler, o digrafo associado a $\mathcal{F}$ omite as configurações (2), (3) e (6) na Figura 2.4.*

Notamos que a f -variedade $(\mathbb{F}(3), \mathcal{F}, \Lambda)$ é Kähler quando a $\mathcal{F}$ corresponde aos digrafos (1), (4), (5) e (7) na Figura 2.4. Em $\mathbb{F}(4)$, corresponde aos digrafos (16) na Figura 2.5 e (29), (32), (33) e (36) na Figura 2.6.

No Capítulo 1 vimos que uma f -estrutura $\mathcal{F}$ define, sobre o espaço tangente à variedade, dois operadores de projeção complementares l, p . No caso de variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$, considere os operadores l e p definidos sobre $\mathfrak{q}_\Theta$ da mesma forma que em (1.8) e com as propriedades dadas em (1.9). Estes operadores determinam em $\mathfrak{q}_\Theta$ distribuições complementares L e P . Nosso propósito daqui para frente consiste em estudar, em termos de raízes, condições de integrabilidade para $\mathcal{F}$, L e P .

Sabemos que P é integrável se e somente se P é involutiva (veja por exemplo [13] e [20]), isto é $l[pX, pY] = 0$ para todo X, Y campos vetoriais na variedade. Assim no nosso caso, $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$, fixando uma base de Weyl, tome X_α, X_β , $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$ elementos básicos e P e L as duas distribuições determinadas por l, q em $\mathfrak{q}_\Theta$. Temos:

$$\begin{aligned} l[pX_\alpha, pX_\beta] &= l[((\mathcal{F}^\Theta)^2 + 1)(X_\alpha), ((\mathcal{F}^\Theta)^2 + 1)(X_\beta)] \\ &= l[-(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 X_\alpha + X_\alpha, -(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 X_\beta + X_\beta] \\ &= ((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - 1) l[X_\alpha, X_\beta] \\ &= m_{\alpha, \beta} ((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 + 1) (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 X_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Do anterior concluímos:

Teorema 4.4. *Uma condição necessária e suficiente para a distribuição P ser integrável é que em $\mathbf{q}_\Theta$ não existam triplas do tipo $\{2, 1, 0\}$. No caso $\mathbb{F}(n)$ esta condição diz que o digrafo associado a $\mathcal{F}$ omite o subdigrafo (2) na Figura 2.4.*

Demonstração : Pelas contas acima, P é integrável se e somente se

$$((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 + 1)(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 = 0,$$

assim P não é integrável nos casos onde $((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 + 1) \neq 0$ e $(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 \neq 0$, ou seja, nos casos onde $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta = 0$ e $\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta = \pm 1$, demonstrando assim o teorema. ■

Agora, L é integrável se e somente se $p[lX_\alpha, lX_\beta] = 0$ com $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$; mas

$$\begin{aligned} p[lX_\alpha, lX_\beta] &= ((\mathcal{F}^\Theta)^2 + 1)[-(\mathcal{F}^\Theta)^2 X_\alpha, -(\mathcal{F}^\Theta)^2 X_\beta] \\ &= (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2((\mathcal{F}^\Theta)^2 + 1)[X_\alpha, X_\beta] \\ &= m_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2(1 - (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2)X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Daqui temos o seguinte teorema:

Teorema 4.5. *Uma condição necessária e suficiente para a distribuição L ser integrável é que em $\mathbf{q}_\Theta$ não existam triplas do tipo $\{1, 2, 0\}$, ou $\{1, 1, 1\}$. No caso $\mathbb{F}(n)$ esta condição é equivalente a que o digrafo associado a $\mathcal{F}$ omite os subgrafos (3), (4), (5) na Figura 2.4.*

Demonstração : Vimos que L é integrável se e somente se $(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2(1 - (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2) = 0$, assim os únicos casos onde L não é integrável são quando $(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 \neq 0$ e $1 - (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 \neq 0$. Por isto L não é integrável se $\varepsilon_\alpha^\Theta = \pm 1$ e $\varepsilon_\beta^\Theta = \pm 1$ e $\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta = 0$ o que corresponde ao tipo de triplas e subgrafos mencionados no teorema. ■

Teorema 4.6. *Uma condição necessária e suficiente para a f -estrutura invariante $\mathcal{F}^\Theta$ definida sobre $\mathbb{F}_\Theta$, ser parcialmente integrável é que não existam em $\mathbf{q}_\Theta$ triplas do tipo $\{0, 3, 0\}$, $\{1, 2, 0\}$ e $\{1, 1, 1\}$. Em $\mathbb{F}(n)$ esta condição equivale à não existência de subgrafos do tipo (3), (4), (5) e (6) na Figura 2.4.*

Demonstração : Usando a definição de tensor de Nijenhuis dada na seção 1.4.1 e as propriedades dos operadores $\mathcal{F}^\Theta$ e l dadas em (1.8) e o teorema 1.13, temos para $X_\alpha, X_\beta \in \mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
N(lX_\alpha, lX_\beta) &= [\mathcal{F}^\Theta lX_\alpha, \mathcal{F}^\Theta lX_\beta] - \mathcal{F}^\Theta[\mathcal{F}^\Theta lX_\alpha, lX_\beta] - \mathcal{F}^\Theta[lX_\alpha, \mathcal{F}^\Theta lX_\beta] - l[lX_\alpha, lX_\beta] \\
&= [\mathcal{F}^\Theta X_\alpha, \mathcal{F}^\Theta X_\beta] - \mathcal{F}^\Theta[\mathcal{F}^\Theta X_\alpha, lX_\beta] - \mathcal{F}^\Theta[lX_\alpha, \mathcal{F}^\Theta X_\beta] - l[lX_\alpha, lX_\beta] \\
&= -\varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta [X_\alpha, X_\beta] - \mathcal{F}^\Theta(i\varepsilon_\alpha^\Theta (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 [X_\alpha, X_\beta]) - \mathcal{F}^\Theta(i(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 \varepsilon_\beta^\Theta [X_\alpha, X_\beta]) + \\
&\quad -l(i(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 [X_\alpha, X_\beta]) \\
&= \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta (-1 + \varepsilon_\beta^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta + \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta - \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2) [X_\alpha, X_\beta]
\end{aligned}$$

Assim os únicos casos onde $\mathcal{F}^\Theta$ não é parcialmente integrável são quando $\varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta \neq 0$ e $(-1 + \varepsilon_\beta^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta + \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta - \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2) \neq 0$. Do anterior temos que $\varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_\beta^\Theta = \pm 1$ e em ambos casos $\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta$ deve ser zero, produzindo assim as triplas e as configurações dos digrafos mencionadas.

■

Agora utilizando as equações (1.19) e (1.20) temos o seguinte teorema:

Teorema 4.7. *Seja $\mathcal{F}^\Theta$ uma f -estrutura invariante definida sobre $\mathbb{F}_\Theta$, com L e P integráveis. Uma condição necessária e suficiente para $\mathcal{F}^\Theta$ ter suas componentes locais independentes das coordenadas é que não existam em $\mathfrak{q}_\Theta$ triplas do tipo $\{2, 1, 0\}$, $\{1, 2, 0\}$ e $\{1, 1, 1\}$. Em $\mathbb{F}(n)$ esta condição equivale à não existência de subdigrafos do tipo (2), (3), (4) e (5) na Figura 2.4.*

Demonstração : pelo teorema 1.17, as componentes locais da $\mathcal{F}^\Theta$ são independentes das coordenadas se $N(lX, pY) = 0$ e

$$\begin{aligned}
N(lX_\alpha, pX_\beta) &= [\mathcal{F}^\Theta lX_\alpha, \mathcal{F}^\Theta pX_\beta] - \mathcal{F}^\Theta[\mathcal{F}^\Theta lX_\alpha, pX_\beta] - \mathcal{F}^\Theta[lX_\alpha, \mathcal{F}^\Theta pX_\beta] - l[lX_\alpha, pX_\beta] \\
&= -\mathcal{F}^\Theta[\mathcal{F}^\Theta X_\alpha, pX_\beta] - l[lX_\alpha, pX_\beta] \\
&= -\mathcal{F}^\Theta[\mathcal{F}^\Theta X_\alpha, (\mathcal{F}^\Theta)^2 X_\beta] - \mathcal{F}^\Theta[\mathcal{F}^\Theta X_\alpha, X_\beta] - l[lX_\alpha, (\mathcal{F}^\Theta)^2 X_\beta] - l[lX_\alpha, X_\beta] \\
&= -\mathcal{F}^\Theta(-i\varepsilon_\alpha^\Theta (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 [X_\alpha, X_\beta]) - \mathcal{F}^\Theta(i\varepsilon_\alpha^\Theta [X_\alpha, X_\beta]) + (\mathcal{F}^\Theta)^2((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 [X_\alpha, X_\beta]) \\
&\quad -l(\varepsilon_\alpha^\Theta [X_\alpha, X_\beta]) \\
&= \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta (1 - (\varepsilon^\Theta \beta)^2 + \varepsilon_\alpha^\Theta (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta - \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta) [X_\alpha, X_\beta].
\end{aligned}$$

Logo as componentes locais dependem do sistema de coordenadas nos casos onde $\varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta \neq 0$ e $1 - (\varepsilon^\Theta \beta)^2 + \varepsilon_\alpha^\Theta (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta - \varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta \neq 0$, isto é, quando $\varepsilon_\alpha^\Theta \varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta = -1$ e $\varepsilon_\beta^\Theta = 0$, fornecendo as triplas e os digrafos no teorema.

■

Teorema 4.8. *Uma f -estrutura invariante $\mathcal{F}^\Theta$ definida sobre $\mathbb{F}_\Theta$ é integrável se e somente se não existem em $\mathfrak{q}_\Theta$ triplas do tipo $\{0, 3, 0\}$, $\{2, 1, 0\}$, $\{1, 1, 1\}$ e $\{1, 2, 0\}$. Em $\mathbb{F}(n)$ esta condição equivale à não existência de subdigrafos do tipo (2), (3), (4), (5) e (6) na figura 2.4, isto é, o digrafo associado à $\mathcal{F}$, é isomorfo ao digrafo nulo ou ao torneio canônico (ver por exemplo [27], [33], [9]).*

Demonstração : Imediata aplicando na Definição 1.18 os Teoremas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7. ■

Estendemos assim o teorema dado por Burstall [7] para estruturas quase-complexas invariantes no qual ele mostra que uma estrutura quase-complexa é integrável se e somente se o torneio associado é isomorfo ao torneio canônico, ou seja, não contém tri-ciclos (triplas do tipo $\{0, 3, 0\}$). Observamos também que a condição de integrabilidade dada aqui é mais forte que a condição Kähler. Por exemplo, para $\mathbb{F}(3)$ as f -estruturas invariantes associadas aos digrafos (4) e (5) são Kähler mas não são integráveis. De igual forma, em $\mathbb{F}(4)$ as f -estruturas associadas aos digrafos (29), (32) e (34) são Kähler mas não integráveis. Uma justificativa para a observação anterior é que o paralelismo da $\mathcal{F}^\Theta$ garante que as distribuições $\mathfrak{q}_\Theta^+$, $\mathfrak{q}_\Theta^-$, q_Θ^0 são integráveis mas não garante a integrabilidade da $\mathcal{F}^\Theta$. De fato, se $\mathcal{F}^\Theta$ é paralela,

$$\mathcal{F}^\Theta[X, Y] = \nabla_X \mathcal{F}^\Theta Y - \nabla_Y \mathcal{F}^\Theta X, \quad (4.1)$$

para quaisquer X, Y , logo para X_α, X_β na base de Weyl associada a $\mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C}$ temos $\mathcal{F}^\Theta[X_\alpha, X_\beta] = \nabla_{X_\alpha} \mathcal{F}^\Theta X_\beta - \nabla_{X_\beta} \mathcal{F}^\Theta X_\alpha$. Assim se X_α, X_β estão na mesma distribuição temos $\mathcal{F}^\Theta[X_\alpha, X_\beta] = i\varepsilon_\alpha^\Theta[X_\alpha, X_\beta]$. Agora para $\mathcal{F}^\Theta$ ser integrável é preciso que $N(X, Y) = 0$. Usando as equações (1.10) e (4.1) temos

$$1/2N(X_\alpha, X_\beta) = (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 \nabla_{X_\alpha} X_\beta - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 \nabla_{X_\alpha} X_\beta - (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 [X_\alpha, X_\beta].$$

O lado direito não é nulo em geral. Se $\mathcal{F}^\Theta$ é uma estrutura quase-complexa, é claro que $N = 0$.

Para finalizar este capítulo consideramos uma classe de f -estruturas caracterizadas em [3] e [28] as f -estruturas horizontais.

Este tipo de estruturas foram estudadas por Black em [3].

Definição 4.9. [3] *Uma f -estrutura invariante definida sobre $\mathbb{F}$ que satisfaz $[\mathfrak{q}^+, \mathfrak{q}^-] \subset \mathfrak{h}$ será dita uma f -estrutura horizontal.*

Teorema 4.10. *Se $\mathcal{F}$ é horizontal então $\mathcal{F}$ é CNT e portanto $(1,2)$ -admissível.*

Demonstração : É fácil ver da Definição 4.9 que em $\mathfrak{q}$ não podem existir triplas do tipo $\{0, 1, 2\}$ logo $\mathcal{F}$ é CNT e pelo Lema 3.20 $(1,2)$ -admissível. ■

Note que não toda f –estrutura CNT é horizontal, veja por exemplo (4), (8) na Figura 2.5 e (22), (23) na Figura 2.6.

CAPÍTULO 5

Variedades Bandeira e Curvatura

Neste capítulo, consideramos a variedade bandeira geral $\mathbb{F}_\Theta$ (veja seção 1.2 e especificamente (1.2)) como um espaço homogêneo reutivo, munida da métrica U -invariante Λ^Θ e uma estrutura quase-complexa invariante $\mathcal{F}$. Nossa referência central é a seção 2 no capítulo X de [24]. O objetivo principal deste capítulo é explorar a forma para a *conexão Riemanniana* associada com a métrica Λ^Θ (veja Capítulo 1, seção 1.6) para calcular algumas classes de curvaturas, de forma que permita comparar os resultados que aparecem nas variedades bandeira com caracterizações geométricas já existentes (veja por exemplo [42], [12]).

5.1 Curvatura Seccional de $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$

Em (1.30) demos a forma da conexão Riemanniana para $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = U/K_\Theta$ em termos de elementos básicos em $\mathfrak{q}_\Theta^\mathbb{C}$. Também na *Proposição 2.3 no capítulo X* em [24] é dado o tensor de curvatura em b_0 correspondente à conexão dada em (1.29) é:

$$R(X, Y)_{b_0} = [\nabla^{\mathfrak{q}_\Theta}(X), \nabla^{\mathfrak{q}_\Theta}(Y)] - \nabla^{\mathfrak{q}_\Theta}([X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}) - ad([X, Y]_{\mathfrak{t}_\Theta})$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{q}_\Theta$. Com $\mathfrak{q}_\Theta$ e $\mathfrak{t}_\Theta$ como em (1.5). Aqui $\nabla^{\mathfrak{q}_\Theta}$ representa a conexão Riemanniana em $\mathfrak{q}_\Theta$ e $[\]_{\mathfrak{q}_\Theta}, [\]_{\mathfrak{t}_\Theta}$ representa a projeção do colchete sobre os respectivos espaços. Com isto estamos prontos para calcular algumas curvaturas em $\mathbb{F}_\Theta$.

Sabemos de [20] que para cada plano gerado pelos vetores X, Y no espaço tangente à variedade, a curvatura seccional do plano é definida por

$$K(X, Y) = \Lambda^\Theta(R(X, Y)X, Y) \quad (5.1)$$

Tambem na Proposição 2.3 do Capítulo X de [24] temos que

$$R(X, Y)_{b_0} = [\nabla^{\mathfrak{q}_\Theta}(X), \nabla^{\mathfrak{q}_\Theta}(Y)] - \nabla([X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}) - ad([X, Y]_{\mathfrak{t}_\Theta}) \quad (5.2)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{q}_\Theta$.

Assim aplicando as equações (5.1) e (5.2) temos:

$$K(X, Y) = \Lambda^\Theta(\nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}} X - [[X, Y]_{\mathfrak{t}_\Theta}, X], Y) \quad (5.3)$$

Suponha agora que $[X, Y]_{\mathfrak{t}_\Theta} = 0$. Usando (5.3), (1.29) e a invariança de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (1.26) temos:

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \Lambda^\Theta(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - \Lambda^\Theta(\nabla_Y \nabla_X X, Y) - \Lambda^\Theta(\nabla_{[X, Y]} X, Y) \\ &= \Lambda^\Theta(\tfrac{1}{2}[X, \nabla_Y X], Y) + \Lambda^\Theta(\tfrac{1}{2}(\Lambda^\Theta)^{-1}[X, \Lambda^\Theta \nabla_Y X], Y) \\ &\quad - \Lambda^\Theta(\tfrac{1}{2}(\Lambda^\Theta)^{-1}[\Lambda^\Theta X, \nabla_Y X], Y) - \Lambda^\Theta(\tfrac{1}{2}[[X, Y], X], Y) + \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(\Lambda^\Theta)^{-1}[[X, Y], \Lambda^\Theta X], Y) + \Lambda^\Theta(\tfrac{1}{2}(\Lambda^\Theta)^{-1}[\Lambda^\Theta[X, Y], X], Y) \\ &= -\{\tfrac{1}{2}\langle [X, \nabla_Y X], \Lambda^\Theta Y \rangle + \tfrac{1}{2}\langle [X, \Lambda^\Theta \nabla_Y X], Y \rangle - \tfrac{1}{2}\langle [\Lambda^\Theta X, \nabla_Y X], Y \rangle \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\langle [[X, Y], X], \Lambda^\Theta Y \rangle - \tfrac{1}{2}\langle [[X, Y], \Lambda^\Theta X], Y \rangle + \tfrac{1}{2}\langle [\Lambda^\Theta[X, Y], X], Y \rangle\} \\ &= -\{-\tfrac{1}{2}\langle \nabla_Y X, [X, \Lambda^\Theta Y] \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \Lambda^\Theta \nabla_Y X, [X, Y] \rangle + \tfrac{1}{2}\langle \nabla_Y X, [\Lambda^\Theta X, Y] \rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\langle \nabla_X X, [Y, \Lambda^\Theta Y] \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \nabla_X X, [Y, Y] \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \nabla_X X, [\Lambda^\Theta Y, Y] \rangle \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\langle [X, Y], [X, \Lambda^\Theta Y] \rangle - \tfrac{1}{2}\langle [X, Y], [\Lambda^\Theta X, Y] \rangle + \tfrac{1}{2}\langle \Lambda^\Theta[X, Y], [X, Y] \rangle\} \\ &= \tfrac{1}{2}\langle [X, Y], [X, \Lambda^\Theta Y] \rangle - \tfrac{1}{4}\langle (\Lambda^\Theta)^{-1}[\Lambda^\Theta X, Y], [X, \Lambda^\Theta Y] \rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\langle (\Lambda^\Theta)^{-1}[X, \Lambda^\Theta Y], [X, \Lambda^\Theta Y] \rangle - \tfrac{3}{4}\langle \Lambda^\Theta[X, Y], [X, Y] \rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\langle [\Lambda^\Theta X, Y], [X, Y] \rangle + \tfrac{1}{4}\langle (\Lambda^\Theta)^{-1}[\Lambda^\Theta X, Y], [\Lambda^\Theta X, Y] \rangle \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\langle (\Lambda^\Theta)^{-1}[X, \Lambda^\Theta Y], [\Lambda^\Theta X, Y] \rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

Lema 5.1. *Considere a variedade bandeira maximal $\mathbb{F}$, e os vetores básicos A_α, S_α , $\alpha \in \Pi$.*

Então

(i) $K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -\xi_{\alpha, \beta} m_{\alpha, \beta}^2 + \xi_{-\alpha, \beta} m_{-\alpha, \beta}^2$, onde

$$\xi_{\alpha, \beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta + \frac{\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 - 2\lambda_\alpha \lambda_\beta}{2(\lambda_{\alpha+\beta})} - \frac{3\lambda_{\alpha+\beta}}{2} \quad (5.5)$$

$$(ii) \quad K(A_\alpha, S_{-\alpha}) = -4\lambda_\alpha \alpha(H_\alpha)$$

Demonstração :

- (i) É imediato usando (5.4) e (1.6) e a propriedade $m_{\alpha, -\beta}^2 = m_{-\alpha, \beta}^2$.
- (ii) Na variedade bandeira maximal o único caso onde $[X, Y]_{\mathfrak{h}} \neq 0$ é quando $X = A_\alpha$ e $Y = S_{-\alpha}$, em tal caso $[A_\alpha, S_{-\alpha}] = 2iH_\alpha$, resultando em

$$\begin{aligned}
 K(A_\alpha, S_{-\alpha}) &= \Lambda(\nabla_{A_\alpha} \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha, S_{-\alpha}) - \Lambda(\nabla_{S_{-\alpha}} \nabla_{A_\alpha} A_\alpha, S_{-\alpha}) \\
 &\quad - \Lambda(\nabla_{[A_\alpha, S_{-\alpha}]} A_\alpha, S_{-\alpha}) - \Lambda(\Lambda([A_\alpha, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{h}}) A_\alpha, S_{-\alpha}) \\
 &= \Lambda(\tfrac{1}{2}[A_\alpha, \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha}) + \Lambda(\tfrac{1}{2}\Lambda^{-1}[A_\alpha, \Lambda \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha}) + \\
 &\quad - \Lambda(\tfrac{1}{2}\Lambda^{-1}[\Lambda A_\alpha, \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha}) - \Lambda(\tfrac{1}{2}[S_{-\alpha}, \nabla_{A_\alpha} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha}) + \\
 &\quad - \Lambda(\tfrac{1}{2}\Lambda^{-1}[S_{-\alpha}, \Lambda \nabla_{A_\alpha} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha}) + \Lambda(\tfrac{1}{2}\Lambda^{-1}[\Lambda A_\alpha, \nabla_{A_\alpha} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha}) + \\
 &\quad - ds_\Lambda^2([A_\alpha, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{h}}, A_\alpha, S_{-\alpha}) \\
 &= -\{\tfrac{\lambda_\alpha}{2}\langle [A_\alpha, \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha} \rangle + \tfrac{1}{2}\langle [A_\alpha, \Lambda \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha} \rangle + \\
 &\quad - \tfrac{1}{2}\langle [\Lambda A_\alpha, \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha} \rangle - \tfrac{\lambda_\alpha}{2}\langle [S_{-\alpha}, \nabla_{A_\alpha} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha} \rangle + \\
 &\quad - \tfrac{1}{2}\langle [S_{-\alpha}, \Lambda \nabla_{A_\alpha} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha} \rangle + \tfrac{1}{2}\langle [\Lambda A_\alpha, \nabla_{A_\alpha} A_\alpha]_{\mathfrak{q}}, S_{-\alpha} \rangle\} + \\
 &\quad \lambda_\alpha \langle [2iH_\alpha, A_\alpha], S_{-\alpha} \rangle \\
 &= -\{-\tfrac{\lambda_\alpha}{2}\langle \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha, [A_\alpha, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{q}} \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \Lambda \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha, [A_\alpha, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{q}} \rangle + \\
 &\quad + \tfrac{1}{2}\langle \nabla_{S_{-\alpha}} A_\alpha, [\Lambda A_\alpha, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{q}} \rangle + \tfrac{\lambda_\alpha}{2}\langle \nabla_{A_\alpha} A_\alpha, [S_{-\alpha}, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{q}} \rangle + \\
 &\quad + \tfrac{1}{2}\langle \Lambda \nabla_{A_\alpha} A_\alpha, [S_{-\alpha}, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{q}} \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \nabla_{A_\alpha} A_\alpha, [\Lambda A_\alpha, S_{-\alpha}]_{\mathfrak{q}} \rangle\} + \\
 &\quad + 2\lambda_\alpha \langle \alpha(H_\alpha) S_{-\alpha}, S_{-\alpha} \rangle \\
 &= -4\lambda_\alpha \alpha(H_\alpha).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Portanto $K(A_\alpha, S_{-\alpha}) < 0$ dado que $\alpha(H_\alpha)$ é um racional positivo. ■

5.2 Curvatura e Estrutura Quase-Complexa

Seja $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ uma variedade quase-Hermitiana, isto é $\mathcal{F}$ corresponde de fato a uma estrutura quase-complexa. Suponha que $\alpha, \beta \in \Sigma$ então $\alpha - \beta$ não é raiz e (5.5) se reduz a:

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -\xi_{\alpha, \beta} m_{\alpha, \beta}^2.$$

Suponha agora que $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ é Kähler e que $\{\alpha, \beta, -(\alpha + \beta)\}$ é uma $\{0, 1, 2\}$ -tripla. Existem quatro casos:

1. Se $\lambda_\alpha = \lambda_\beta + \lambda_{\alpha+\beta}$, temos:

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -2\lambda_\beta(m_{\alpha,\beta})^2 < 0.$$

2. Se $\lambda_\beta = \lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+\beta}$, temos:

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -2\lambda_\alpha(m_{\alpha,\beta})^2 < 0.$$

3. Se $\lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$, temos:

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = \frac{2\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}(m_{\alpha,\beta})^2 > 0.$$

4. Se $\lambda_{\alpha+\beta} = 2\lambda_\alpha$, temos:

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = \lambda_\alpha(m_{\alpha,\beta})^2 > 0. \quad (5.7)$$

Agora quando $\alpha - \beta$ é também raiz e $\{\alpha, \beta, -(\alpha + \beta)\}, \{\beta, -\alpha, \alpha - \beta\}$ são $\{0, 1, 2\}$ -triplas, temos os seguintes casos:

1. Se $\lambda_\alpha = \lambda_\beta + \lambda_{\alpha+\beta}$, então $\lambda_{\alpha-\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$,

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -2\lambda_\beta\{(m_{\alpha,\beta})^2 - \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}(m_{\alpha,-\beta})^2\}.$$

2. Se $\lambda_\beta = \lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+\beta}$ então $\lambda_{\alpha-\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$,

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -2\lambda_\alpha\{(m_{\alpha,\beta})^2 - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}(m_{\alpha,-\beta})^2\}.$$

3. Se $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$, então:

- Se $\lambda_\alpha = \lambda_\beta + \lambda_{\alpha-\beta}$, temos:

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -2\lambda_\beta\{-\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}(m_{\alpha,\beta})^2 + (m_{\alpha,-\beta})^2\}.$$

- Se $\lambda_\beta = \lambda_\alpha + \lambda_{\alpha-\beta}$, temos:

$$K(A_\alpha, S_\beta) = K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = -2\lambda_\alpha \left\{ -\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} (m_{\alpha,\beta})^2 + (m_{\alpha,-\beta})^2 \right\}.$$

Exemplo 5.2. No caso invariante $(\mathbb{F}(3), \mathcal{F}, \Lambda)$ Kähler e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_\alpha & 2\lambda_\alpha \\ \lambda_\alpha & 0 & \lambda_\alpha \\ 2\lambda_\alpha & \lambda_\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja estamos no caso 4 do item (ii) acima. Como $\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta$ não são raízes, temos:

$$\begin{aligned} K(A_\alpha, S_\beta) &= K(S_\alpha, S_\beta) = K(A_\alpha, A_\beta) = \lambda_\alpha (m_{\alpha,\beta})^2, \\ K(A_\alpha, A_{\alpha+\beta}) &= K(A_\alpha, S_{\alpha+\beta}) = K(S_\alpha, A_{\alpha+\beta}) = \\ &= K(S_\alpha, A_{\alpha+\beta}) = K(S_\beta, A_{\alpha+\beta}) = K(S_\beta, A_{\alpha+\beta}) = 0 \\ K(A_\alpha, S_\alpha) &= K(A_\beta, S_\beta) = 4\lambda_\alpha \alpha(H_\alpha) > 0 \end{aligned}$$

Assim a curvatura escalar de $(\mathbb{F}(3))$ é $3\lambda_\alpha (m_{\alpha,\beta})^2 + 8\lambda_\alpha \alpha(H_\alpha) > 0$.

Também temos a curvatura de Ricci $Ric(A_{\alpha+\beta}) = Ric(S_{\alpha+\beta}) = 0$, e $Ric(A_\alpha) = Ric(A_\beta) = Ric(S_\alpha) = Ric(S_\beta) = 2\lambda_\alpha (m_{\alpha,\beta})^2 + 4\lambda_\alpha \alpha(H_\alpha) > 0$.

Das $\mathbb{F}(n)$ este é o único caso onde $Ric > 0$.

Nas seções a seguir estudamos alguns tipos de curvatura tais como *Curvatura Bi-seccional Holomorfa*, e *Curvatura Seccional Kähleriana*, com a finalidade de conhecer alguns aspectos da geometria e topologia da variedade $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ através dos possíveis valores destas curvaturas, (ver por exemplo [24], [42], [12], [37]).

5.3 Curvatura Bi-seccional Holomorfa

Seja (N, J, g) uma variedade Riemanniana Hermitiana, $HBRem^N(X, Y)$ denota a curvatura biseccional holomorfa de N , dada pela seguinte fórmula (veja [24]):

$$HBRem^N(X, Y) = g(R^N(X, JX)Y, JY),$$

onde R^N é o tensor de curvatura em N . No nosso caso, $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$, e lembrando que para os vetores básicos A_α, S_β

$$\mathcal{F}(A_\alpha) = \varepsilon_\alpha S_\alpha, \quad \mathcal{F}(S_\alpha) = -\varepsilon_\alpha A_\alpha,$$

temos:

$$\begin{aligned} HB\text{Riem}(A_\alpha, S_\beta) &= \Lambda(R(A_\alpha, \mathcal{F}(A_\alpha))S_\beta, \mathcal{F}(S_\beta)) \\ &= -\Lambda(R(A_\alpha, \varepsilon_\alpha S_\alpha)S_\beta, \varepsilon_\beta A_\beta) \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \Lambda(R(A_\alpha, S_\alpha)S_\beta, A_\beta) \\ HB\text{Riem}(A_\alpha, A_\beta) &= \Lambda(R(A_\alpha, \mathcal{F}(A_\alpha))A_\beta, \mathcal{F}(A_\beta)) \\ &= \Lambda(R(A_\alpha, \varepsilon_\alpha S_\alpha)A_\beta, \varepsilon_\beta S_\beta) \\ &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \Lambda(R(A_\alpha, S_\alpha)A_\beta, S_\beta) \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \Lambda(R(A_\alpha, S_\alpha)S_\beta, A_\beta) \\ HB\text{Riem}(S_\alpha, S_\beta) &= \Lambda(R(S_\alpha, \mathcal{F}(S_\alpha))S_\beta, \mathcal{F}(S_\beta)) \\ &= \Lambda(R(S_\alpha, -\varepsilon_\alpha A_\alpha)A_\beta, -\varepsilon_\beta A_\beta) \\ &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \Lambda(R(S_\alpha, A_\alpha)S_\beta, A_\beta) \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \Lambda(R(A_\alpha, S_\alpha)S_\beta, A_\beta) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} HB\text{Riem}(A_\alpha, S_\beta) &= HB\text{Riem}(A_\alpha, A_\beta) = HB\text{Riem}(S_\alpha, S_\beta) = \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (m_{\alpha, \beta}^2 (2\lambda_\beta - 2\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+\beta}) - \frac{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)^2}{\lambda_\alpha - \beta} m_{\alpha, -\beta}^2) \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} HB\text{Riem}(A_\alpha, S_{-\alpha}) &= \Lambda(R(A_\alpha, \mathcal{F}(A_\alpha))S_{-\alpha}, \mathcal{F}(S_{-\alpha})) \\ &= \varepsilon_\alpha^2 \Lambda(R(A_\alpha, S_{-\alpha})S_{-\alpha}, A_\alpha) \\ &= -\Lambda(R(A_\alpha, S_{-\alpha})A_\alpha, S_{-\alpha}) \\ &= -K(A_\alpha, S_{-\alpha}) \\ &= 4\alpha(H_\alpha)\lambda_\alpha > 0. \end{aligned}$$

Agora suponha que $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ é Kähler e tome $\alpha, \beta \in \Sigma$, então $\alpha - \beta$ não é raiz; portanto:

$$HB\text{Riem}(A_\alpha, S_\beta) = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta m_{\alpha, \beta}^2 (2\lambda_\beta - 2\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+\beta})$$

logo se $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0, 1, 2\}$ -tripla o único caso interessante é quando $\lambda_{\alpha+\beta} = 2\lambda_\alpha$, resultando em

$$HB\text{Riem}(A_\alpha, S_\beta) = -2m_{\alpha, \beta}^2 \lambda_\alpha < 0.$$

Do anterior, e pelo resultado obtido por Siu e Yau [42], se $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ é Kähler ela não pode ser biholomorficamente equivalente a nenhum espaço projetivo $\mathbb{C}P(n)$.

5.4 Curvatura Seccional Kähleriana

Seja P um 2-plano gerado por uma base ortonormal X, Y define-se o ângulo de P , $\theta \in [0, \pi]$ por:

$$\cos(\theta) = |g(X, \mathcal{F} Y)|$$

e a curvatura seccional Kähleriana $K^*(P)$ como:

$$K^*(P) = \frac{4K(P)}{1 + 3\cos^2(\theta)}$$

No nosso caso, normalizando A_α e S_β $\alpha, \beta \in \Pi$, eles são uma base ortonormal para $\mathfrak{q}$. Se $P = \text{ger}\{A_\alpha, S_\beta\} \subset \mathfrak{q}$ temos:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= |\Lambda(S_\alpha, \mathcal{F}(S_\beta))| = |\Lambda(A_\alpha, -\varepsilon_\beta A_\beta)| = \\ &= |\lambda_\alpha \langle A_\alpha, A_\beta \rangle| \end{aligned}$$

Assim $\cos(\theta)$ somente será diferente de zero quando $\beta = \pm\alpha$ e nesse caso $\cos(\theta) = 1$, pela normalização da base. Sendo assim,

$$K^*(P) = K(P) = -4\lambda_\alpha \alpha(H_\alpha) < 0.$$

Logo quando $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ é Kähler ela não pode ser holomorficamente isométrica a nenhum espaço projetivo $\mathbb{C}P(n)$ (veja [24] pág.369).

APÊNDICE A

F-Estruturas (1,2)-admissíveis e métricas correspondentes em A_3

Apresentamos as f -estruturas invariantes definidas na variedade bandeira maximal associada a A_3 que são (1,2)-admissíveis e suas respectivas métricas. As classes mencionadas a seguir correspondem aos digrafos mostrados nas Figuras 2.5-2.7.

As classes (1)-(3), (6)-(7), (15), (25) admitem métricas (1,2)-simpléticas sem nenhuma condição. Na classe (4) a f -estrutura e a família de métricas (1,2)-admissível correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23}.$$

Na classe (5) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23}.$$

Na classe (8) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{34}.$$

Na classe (9) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{13}.$$

Na classe (10) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{34}.$$

Na classe (11) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14}.$$

Na classe (12) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{24} = \lambda_{34}.$$

Na classe (13) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{12}.$$

Na classe (14) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{12}.$$

Na classe (16) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{24}.$$

Na classe (17) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{24}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{24}.$$

Na classe (18) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{24}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23}.$$

Na classe (19) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{24}.$$

Na classe (20) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{24}.$$

Na classe (21) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{24}.$$

Na classe (22) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{12}.$$

Na classe (23) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{14}.$$

Na classe (24) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{14}.$$

Na classe (26) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{14} = \lambda_{34}.$$

Na classe (27) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{14}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{34}.$$

Na classe (28) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{14}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{13} + \lambda_{12}.$$

Na classe (29) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23}.$$

Na classe (30) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{24}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{12} + \lambda_{13}.$$

Na classe (31) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{34} = \lambda_{13} + \lambda_{14}, \quad \lambda_{24} = \lambda_{34}.$$

Na classe (32) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{24}, \quad \lambda_{34} = \lambda_{23} + \lambda_{24}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{34}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23}.$$

Na classe (33) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{13} + \lambda_{23}.$$

Na classe (34) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \lambda_{13} = \lambda_{14}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{24}.$$

As classes (35) e (36) e as métricas (1,2)-admissíveis que elas admitem foram bastante estudadas em [33] e [9].

Na classe (35) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34}.$$

Na classe (36) a f - estrutura e a família de métricas (1,2)-admissíveis correspondentes são :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{13} + \lambda_{34} = \lambda_{12} + \lambda_{24}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34}.$$

APÊNDICE B

F-Estruturas Invariantes Localmente Transitivas em B_3

Apresentamos em forma de Lemas as f -estruturas invariantes localmente transitivas definidas na variedade bandeira maximal associada a B_3 . Observamos que nas demonstrações só apresentaremos as quádruplas onde a condição localmente transitiva não é satisfeita, no resto dos casos basta verificar que todas as quádruplas satisfazem esta condição. Lembramos que $\mathcal{F}^l$ corresponde a $\mathcal{F}$ restita às raízes longas de B_3 e as quádruplas mencionadas neste apêndice aparecem na página 41.

Lema B.1. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (1) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ é localmente transitiva para qualquer valor de e_1, e_2, e_3 .*

Lema B.2. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (2) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

$$(i) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_{17} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_{18} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_{18} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_{17} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.3. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (3) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.4. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (4) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.5. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (5) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.6. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (6) e (7) na Figura 2.5, a $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos casos onde as três raízes tomam valores não nulos ao mesmo tempo, isto é:*

$$(i) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(iii) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(iv) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.7. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (8) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

$$(i) \quad \varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(iii) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(iv) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$$

$$(v) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1.$$

$$(vi) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1, 1 \text{ ou seja neste caso nenhuma } f\text{-estrutura invariante é localmente transitiva .}$$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_{18} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.8. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (9) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1, 1$, ou seja neste caso nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.9. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (10) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja neste caso nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1, -1$, ou seja neste caso nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_9 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.10. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (11) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.11. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (12) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.12. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (13) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

$$(i) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$$

$$(iii) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(iv) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$$

$$(v) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$$

Demonstração :

(i) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(iii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.13. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (14) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

$$(i) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$$

$$(iii) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$$

$$(iv) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$$

$$(v) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$$

Demonstração :

(i) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_9 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.14. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (15) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_{16} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.15. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (16) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$ ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1, 0$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- viii Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.



Lema B.16. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (17) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja aqui nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ix) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.17. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (18) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja aqui nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.18. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (19) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ix) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.19. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (20) e (21) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja aqui nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- [(ii)] Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.20. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (22) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.21. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (23) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.22. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (24) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- [(ii)] Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.23. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (25) na Figura 2.6, a $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos casos onde as três raízes tomam valores não nulos ao mesmo tempo, isto é:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- [(ii)] Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6..
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.24. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (26) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- [(ii)] Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(v) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.25. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (27) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

$$(i) \quad \varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$$

$$(iii) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$$

$$(iv) \quad \varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$$

$$(v) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$$

$$(vi) \quad \varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$$

Demonstração :

(i) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

[(ii)] Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.26. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (28) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 .
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (ix) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.27. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (29) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_9 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 .
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ix) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.28. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (30) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_{10} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.29. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (31) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 .
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ix) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.30. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (32) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.31. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (33) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_{18} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_{17} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.32. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (34) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.33. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (35) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_{18} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema B.34. *Se $\mathcal{F}^l$ corresponde a (36) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva só nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, ou seja nenhuma f -estrutura invariante é localmente transitiva.
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (ii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0$ em Q_6 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = -1$ em Q_9 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vi) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (vii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (viii) Se $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ix) Se $\varepsilon_{e_1} = 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

APÊNDICE C

Métricas (1,2)-simpléticas em B_3

Apresentamos as métrica (1,2)-simpléticas associadas às f -estruturas invariantes (1,2)-admissíveis na variedade bandeira maximal associada a B_3 . Lembramos que os valores de $\Lambda|_{F^l}$ aparecem no Apêndice A. Logo, aqui colocaremos somente os valores de

$$\mathcal{F}^c = \begin{pmatrix} \varepsilon_{e_1} \\ \varepsilon_{e_2} \\ \varepsilon_{e_3} \end{pmatrix} \quad \Lambda|_{F^c} = \Lambda^c = \begin{pmatrix} \lambda_{e_1} \\ \lambda_{e_2} \\ \lambda_{e_3} \end{pmatrix}.$$

1. $\mathcal{F}^l = (1)$ na figura 2.5 os únicos casos interessantes são quando o autovalor ε_α é não nulo em pelo menos duas raízes $\alpha \in \Pi$ e nesse caso o valor da métrica nessas raízes deve ser o mesmo. Nos outros casos a métrica toma valores sem nenhuma restrição, além das óbvias, (positividade, simetria).

2. $\mathcal{F}^l = (2)$ na figura 2.5 os únicos casos interessantes são

$$(i) \mathcal{F}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^c = \begin{pmatrix} \lambda_{e_1} \\ \lambda_{12} + \lambda_{e_3} \\ \lambda_{e_3} \end{pmatrix} \quad (ii) \mathcal{F}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^c = \begin{pmatrix} \lambda_{e_1} \\ \lambda_{e_3} - \lambda_{12} \\ \lambda_{e_3} \end{pmatrix}$$

3. $\mathcal{F}^l = (3)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1, \lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ não existe restrições para a métrica.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1, \lambda_{12} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1, \lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, \lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.
- viii. $\varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1, \lambda_{23} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
- ix. $\varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1, \lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{23}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{23}$.

4. $\mathcal{F}^l = (4)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$ não há restrições para a métrica.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{23}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$, $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.
- viii. $\varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{23}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

5. $\mathcal{F}^l = (5)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ não há restrições para a métrica.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

v. $\varepsilon_{e_2} = 1\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = 1\varepsilon_{e_1} = -1$, $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

vii. $\varepsilon_{e_2} = -1\varepsilon_{e_1} = 0$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

6. $\mathcal{F}^l = (6)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 1\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = -1\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.

- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

7. $\mathcal{F}^l = (7)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{23}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

8. $\mathcal{F}^l = (8)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ não há restrições para a métrica.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{23}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

9. $\mathcal{F}^l = (9)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ não há restrições para a métrica.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_2}$.

- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{12}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{12}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- viii. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{12}$.
- ix. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{13}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.

10. $\mathcal{F}^l = (10)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$, e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.

- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{13}$.

11. $\mathcal{F}^l = (11)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} = \lambda_{13}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} = \lambda_{12}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

12. $\mathcal{F}^l = (12)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$, -1 não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} = \lambda_{24} = \lambda_{34}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14} = \lambda_{24}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{24} = \lambda_{14}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$, e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.

13. $\mathcal{F}^l = (13)$ na figura 2.5 temos:

(a) Se $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{13}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{14} + \lambda_{e_2}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.

viii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{14} + \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_1}$.

ix. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{13} + \lambda_{e_3}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{12} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{12} + \lambda_{e_3}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$.

vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.

14. $\mathcal{F}^l = (14)$ na figura 2.5 temos:

(a) Se $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{14} + \lambda_{e_1}$.

vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.

viii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{14} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.

ix. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} = \lambda_{12}$.

- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_2} + \lambda_{12}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} + \lambda_{13}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3} = \lambda_{14}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3} + \lambda_{12}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{13} + \lambda_{e_3}$.

15. $\mathcal{F}^l = (15)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.
- viii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1}$.
- ix. $\varepsilon_{e_2} = -1$, e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{12}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.

16. $\mathcal{F}^l = (16)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0, -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1}$

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.

17. $\mathcal{F}^l = (17)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{e_2} = \lambda_{14}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3} = 2\lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.

18. $\mathcal{F}^l = (18)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0 - 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{23} = \lambda_{12}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} = \lambda_{12}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$, e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.

- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

item $\mathcal{F}^l = (19)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{12} = \lambda_{34}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{23} = \lambda_{e_3} = \lambda_{24} = \lambda_{14}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{23} = \lambda_{14}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.

19. $\mathcal{F}^l = (20)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{24}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} = \lambda_{24}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_1}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2} = \lambda_{24}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

20. $\mathcal{F}^l = (21)$ na figura 2.5 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0, -1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$, $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \lambda_{24}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{24}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{24}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_3} = \lambda_{14} = \lambda_{24}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$, e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

21. $\mathcal{F}^l = (22)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{13} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{13} = \lambda_{24}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.
- viii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{13} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.
- ix. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2} = 2\lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_1}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$.

22. $\mathcal{F}^l = (23)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} = \lambda_{13}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{24}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{13} = \lambda_{14}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{13} = \lambda_{14}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2} = \lambda_{13} = \lambda_{14}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_1}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3} = 2\lambda_{e_2}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3} = 2\lambda_{e_2}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.

23. $\mathcal{F}^l = (24)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0, -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{34}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

24. $\mathcal{F}^l = (25)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{12} = \lambda_{34}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{23} = \lambda_{e_3} = \lambda_{24} = \lambda_{14}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{23} = \lambda_{14}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.

25. $\mathcal{F}^l = (26)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{14} = \lambda_{23}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{34}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1} = \lambda_{23}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{12} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

26. $\mathcal{F}^l = (27)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3} = \lambda_{14} = \lambda_{23}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{34}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_1} = \lambda_{23}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} = \lambda_{12} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

27. $\mathcal{F}^l = (28)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{13} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3} =$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} = \lambda_{24}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14} = \lambda_{24}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.

28. $\mathcal{F}^l = (29)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$, -1 não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} =$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{e_2} = \lambda_{23}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{13}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.

29. $\mathcal{F}^l = (30)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{13} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} = \lambda_{24}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{13} = \lambda_{e_3}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3} =$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2} = \lambda_{24}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.

iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.

iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.

vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.

30. $\mathcal{F}^l = (31)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$, -1 não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{13} = \lambda_{34}$ e $\lambda_{14} = 2\lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{24}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

31. $\mathcal{F}^l = (32)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{23}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{24} = 2\lambda_{e_1}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} = \lambda_{23} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_1}$.

32. $\mathcal{F}^l = (33)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{13} = \lambda_{24}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} = \lambda_{23}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{e_1} = \lambda_{13} = \lambda_{24}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} = \lambda_{24}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{13}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$.
- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} = \lambda_{14}$ e $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} = \lambda_{e_3} = \lambda_{13}$.

33. $\mathcal{F}^l = (34)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_1} = \lambda_{23}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{13} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{e_3} = \lambda_{13} = \lambda_{24}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{13} = \lambda_{24} = \lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3} = 2\lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{e_2} = \lambda_{e_3}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.

34. $\mathcal{F}^l = (35)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34} = \lambda_{14}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} = \lambda_{24}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.
- v. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$ e $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.

- vi. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{23}$.
- vii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_1}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$,
 $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$, e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e
 $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_3}$,
 $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} = \lambda_{14}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e
 $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

35. $\mathcal{F}^l = (36)$ na figura 2.6 temos:

(a) $\varepsilon_{e_3} = 0$

- i. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$, -1 não há restrições para a métrica.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} = \lambda_{24}$ e
 $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} = \lambda_{34}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_2} = \lambda_{23}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(b) $\varepsilon_{e_3} = 1$

- i. $\varepsilon_{e_2} = \varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{e_3} = \lambda_{24}$.
- ii. $\varepsilon_{e_2} = 0$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$.
- iii. $\varepsilon_{e_2} = 1$ e $\varepsilon_{e_1} = 1$ temos $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} + \lambda_{e_1}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_3}$, $\lambda_{12} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_3}$,
 $\lambda_{14} = \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}$, $\lambda_{34} = \lambda_{e_2} + \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}$.
- iv. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$, e $\lambda_{24} = \lambda_{e_3}$.

v. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{34} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{24} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

(c) $\varepsilon_{e_3} = -1$

i. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = 0$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2}$.

ii. $\varepsilon_{e_2} = -1$ e $\varepsilon_{e_1} = -1$ temos $\lambda_{12} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_2}$, $\lambda_{13} = \lambda_{e_3} - \lambda_{e_1}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}$.

APÊNDICE D

F-Estruturas Invariantes associadas com C_3

Apresentamos em forma de lemas as f -estruturas invariantes localmente transitivas na variedade bandeira maximal associada a C_3 . Observamos que nas demonstrações só apresentaremos as quádruplas onde a condição localmente transitiva não é satisfeita, no resto dos casos basta verificar que todas as quádruplas satisfazem esta condição. Neste caso os cálculos foram mais simples do que em B_3 , dado que o valor da f -estrutura invariante $\mathcal{F}$ nas raízes longas independe uma da outra. Para verificar os valores admitidos por ε_{2e_1} bastava verificar a condição (ii) na definição 3.6 nas quádruplas $Q_1, Q_5, Q_6, Q_9, Q_{10}$; para ε_{2e_2} , nas quádruplas Q_3, Q_8, Q_{11}, Q_{12} ; e para ε_{2e_3} , nas quádruplas $Q_2, Q_4, Q_7, Q_{19}, Q_{20}$. As quádruplas aqui mencionadas aparecem na página 43. Lembramos que $\mathcal{F}^c$ corresponde à restrição da $\mathcal{F}$ às raízes curtas de C_3 .

Lema D.1. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (1)-(7), (12), (15) e (19) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ é localmente transitiva para qualquer valor de $2e_1, 2e_2, 2e_3$.*

Lema D.2. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (8) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_2} = -1$, e $\varepsilon_{2e_3} = 0$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_2} = -1$ em Q_8 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, e se $\varepsilon_{2e_3} = 0$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.3. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (9) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_3} = -1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = -1$ em Q_4 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.4. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (10) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_2} = \pm 1, e \varepsilon_{2e_3} = -1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_2} = \pm 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, e se $\varepsilon_{2e_3} = -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.5. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (11), (13) e (14) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.6. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (16) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, e se $\varepsilon_{2e_2} = 1$ em Q_8 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.7. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (17) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, -1$ e $\varepsilon_{2e_3} = 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{2e_2} = 0, -1$ em Q_8 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.8. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (18) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_1} = 0, -1, \varepsilon_{2e_2} = 1$ e $\varepsilon_{2e_3} = 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_1} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{2e_2} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.9. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (19) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não aceita nenhuma f -estrutura invariante localmente transitiva.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = 0, 1$ em Q_4 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = -1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.10. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (20) na Figura 2.5 e (21) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_2} = 1$ em Q_8 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.11. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (22) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = -1$ em Q_4 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, e se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.12. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (23) na Figura 2.5, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_1} = -1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_1} = -1$ em Q_5 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.13. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (24) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não aceita nenhuma f -estrutura invariante localmente transitiva .*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 0$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.14. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (26) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_2} = 1$ e $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_2} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.15. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (27) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_3} = 0$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = 0$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.16. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (28) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_1} = -1$, $\varepsilon_{2e_2} = 0, -1$ e $\varepsilon_{2e_3} = 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_2} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{2e_2} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.17. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (29) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não aceita nenhuma f -estrutura invariante localmente transitiva.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = 0, 1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = -1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.18. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (30) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_2} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.19. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (31) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_3} = 0, -1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.20. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (32) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não aceita nenhuma f -estrutura invariante localmente transitiva.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ em Q_2 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_4 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.21. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (33) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_2} = 1$ e $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_2} = 1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6, se $\varepsilon_{2e_3} = -1$ em Q_4 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.22. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (34) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_3} = 1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_3} = 1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.23. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (35) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_1} = 1$ e $\varepsilon_{2e_3} = 0, -1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_1} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema D.24. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (36) na Figura 2.6, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos casos onde $\varepsilon_{2e_2} = 0, -1$ e $\varepsilon_{2e_3} = 0, -1$.*

Demonstração : Se $\varepsilon_{2e_2} = 0, -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6 e se $\varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ em Q_{20} não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

APÊNDICE E

F-Estruturas Invariantes Associadas com G_2

Apresentamos em forma de lemas as f -estruturas invariantes localmente transitivas definidas na variedade bandeira maximal associada a G_2 . Observamos que nas demonstrações só apresentaremos as quádruplas onde a condição localmente transitiva não é satisfeita, no resto dos casos basta verificar que todas as quádruplas satisfazem esta condição. Lembramos que $\mathcal{F}^c$ corresponde à restrição de $\mathcal{F}$ às raízes curtas de G_2 e as quádruplas mencionadas neste apêndice aparecem na página 46.

Lema E.1. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (1) na Figura 2.4, $\mathcal{F}$ é localmente transitiva para qualquer valor de $\varepsilon_{\alpha_1}, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2}, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2}$.*

Lema E.2. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (2) na Figura 2.4, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva no caso em que $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$.*

Demonstração : Nas condições do lema, se $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6. ■

Lema E.3. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (3) na Figura 2.4, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos seguintes casos:*

$$(i) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1.$$

$$(iii) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1.$$

Demonstração :

(i) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(ii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(iii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema E.4. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (4) na Figura 2.4, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos seguintes casos:*

$$(i) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1.$$

$$(iii) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1.$$

$$(iv) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1.$$

Demonstração :

(i) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ em Q_3 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

(ii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

- (iii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema E.5. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (5) na Figura 2.4, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$.

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

Lema E.6. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (6) na Figura 2.4, $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos seguintes casos:*

- (i) $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0$.
- (iii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$.

$$(iv) \ \varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1.$$

$$(v) \ \varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1.$$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (iv) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (v) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

Lema E.7. *Se $\mathcal{F}^c$ corresponde a (γ) na Figura 2.4, a $\mathcal{F}$ não é localmente transitiva nos seguintes casos:*

$$(i) \ \varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1.$$

$$(ii) \ \varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0.$$

Demonstração :

- (i) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.
- (ii) Se $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0$ em Q_1 não se cumpre a condição (ii) na definição 3.6.

■

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. F. Adams, *Lectures on Lie Groups*, New York, 1969.
- [2] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [3] M. Black, *Harmonic Maps into Homogeneous Spaces*. Pitman Research Notes, Math series 255. Longman, Harlow, 1991.
- [4] A. Borel, Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups. *Proc. Nat. Acad. of Sci.* **40**:1147-1151, 1954.
- [5] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I. *Amer. J. Math.* **80**:458-538, 1958.
- [6] A.E. Brouwer, The enumeration of locally transitive tournaments. Technical Report ZW 138/80, Mathematische Centrum, Amsterdam, April 1980.
- [7] F.E. Burstall and S. Salamon, Tournaments, flags and harmonic maps. *Math Ann.* **277**:249-265, 1987.
- [8] N. Cohen, C.J.C. Negreiros and L.A.B. San Martin, Characterization of (1,2)-symplectic metrics on flag manifolds. *Contemporary Math.*, **288**:300–304, 2002.

- [9] N. Cohen, C.J.C. Negreiros and L. A. B. San Martin, (1,2)-Symplectic metrics, flag manifolds and tournaments. *Bull. of London Math. Soc.* **34**:641-649, 2002.
- [10] N. Cohen, C.J.C. Negreiros and L. A. B. San Martin, A rank-three condition for invariant (1,2)-symplectic almost Hermitian structures on flag manifolds, *Bull. Braz. Math. soc. New Series* **33**: 49-73, 2002.
- [11] J. Eells and S. Salamon, Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4)* **12**:589-640, 1985.
- [12] J. Eells and L. Lemaire, Another Report on Harmonic Maps. *Bull. London Math. Soc.* **20**:385-524, 1988.
- [13] G. Frobenius, Über die Unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, *Sitzungsber. Königl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin* **29**:654-665, 1911.
- [14] A. Gray, Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds, *Michigan Math. J.* **2**:273-287, 1965.
- [15] A. Gray and L. M. Hervella, The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants. *Ann. Mat. Pura Appl* **123**:35-58, 1980.
- [16] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces*. Acad. Press, 1978.
- [17] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1980.
- [18] S. Ishihara and K. Yano, On Integrability Conditions of a structure f satisfying $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **15**:217-222, 1964.
- [19] V. Kac *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1985.
- [20] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience Publishers, 1963.
- [21] S. Sasaki, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure (I), *Tôhoku Math. J.* **12**: 459-476, 1960.

- [22] K. Yano, On a structure $\mathcal{F}$ satisfying $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$, *Technical Report* No. 12, Univ. of Washington, 1961.
- [23] K. Yano, On a structure defined by a tensor field of type (1,1) satisfying $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. *Tensor* **14**:99-109, 1963.
- [24] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 2, Interscience Publishers, 1969.
- [25] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variétés Kähleriennes. *Symp. Math.* **3** (Bologna), 341-402, 1970.
- [26] E. C. Licurgo Santos, Estruturas Quase-Hermitianas Invariantes e Ideais Abelianos, MSc. Dissertação, State University of Campinas, 2003.
- [27] X. Mo and C.J.C. Negreiros, Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds, *Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting*, Rio Claro, Brazil, World Scientific(1999)
- [28] X. Mo and C.J.C. Negreiros, Horizontal f-structures, ϵ -matrices and Equiharmonic moving flags. Relatório de Pesquisa, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, 1999.
- [29] X. Mo and C.J.C. Negreiros, (1, 2)-Symplectic structure on flag manifolds. *Tôhoku Math. J.*, **52**:271-282, 2000.
- [30] W. Moon, *Topics on Tournaments*. Holt, Reinhart and Winston, 1968.
- [31] C.J.C. Negreiros, Some remarks about harmonic maps into flag manifolds. *Indiana Univ. Math. J.* **37**:617-636, 1988.
- [32] Nijenhuis, A. X_{n-1} -forming sets of eigenvectors, *Indag. Math.* **13**: 200-212, 1951.
- [33] M. Paredes, Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira, Ph. D. Thesis, State University of Campinas, 2000.
- [34] M. Paredes, Families of (1,2)-symplectic metrics on flag manifolds, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **29**:651-664, 2002.

- [35] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*. Clarendon Press. Oxford, 1986.
- [36] J.H. Rawnsley, *f-Structures, f-Twistor Spaces and Harmonic Maps*. Lec. Notes in Math. **1164**, Springer 1986.
- [37] J.Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Ann. of math.* **113**: 1-24, 1981.
- [38] S. Salamon, *Harmonic and holomorphic maps*. Lec. Notes in Math. **1164**, Springer 1986.
- [39] L. A. B. San Martin, *Algebras de Lie*. Campinas, S.P. Editora da Unicamp, 1999.
- [40] L.A.B. San Martin and C.J.C. Negreiros, Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds. A aparecer em *Adv. in Math.*
- [41] R.C. de Jesus Silva *Estruturas Quase Hermitianas Invariantes em Espaços Homogêneos de Grupos Semi-simples*, Ph. D. Thesis, State University of Campinas, 2003.
- [42] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, *Invent. Math.* **59**: 189-204, 1980.
- [43] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups, I*. Springer-Verlag, 1972.
- [44] J. A. Wolf and A. Gray, Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I. *J. Diff. Geom.* **2**:77-114, 1968.
- [45] J. A. Wolf and A. Gray, Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, II. *J. Diff. Geom.* **2**:115-159, 1968.

ÍNDICE

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, 19
- $\{0, 1, 2\}$ -triplas, 38
- $\{0, 3, 0\}$ -triplas, 38
- $\{1, 1, 1\}$ -triplas, 38
- $\{1, 2, 0\}$ -triplas, 38
- $\{1, 2\}$ -triplas, 38
- $\{2, 1, 0\}$ -triplas, 38
- $\{3, 0, 0\}$ -triplas, 38
- f -estrutura, 7
- f -estrutura completamente não transitiva, 51
- f -holomorfa, 52
- f -estrutura U -invariante, 13
- f -estrutura localmente transitiva, 28
- f -estruturas Horizontais, 58
- f -holomorfa, 17
- f -variedade Kähler, 54
- (1,2)-admissível, 17
- Álgebras de Lie de posto três, 42
- álgebra compacta, 3
- álgebras de tipo A_n , 19
- 3-ciclo, 28
- digrafo trivial, 27
- aplicação harmônica, 15
- bandeiras parciais, 4
- bandeiras totais, 4
- base, 30, 52
- base de Weyl, 2
- co-simplética, xiv, 17
- componentes, 12
- conexão Riemanniana, 16
- curvatura biseccional holomorfa, 65
- curvatura escalar, 64
- curvatura seccional, 60
- curvatura seccional Kähleriana, 66
- derivada de lie, 11
- digrafo, 19
- digrafo livre de cone, 29
- digrafo localmente transitivo, 28

- digrafo relativamente conexo, 28
- digrafo transitivo, 27
- digrafos completamente não transitivos, 30
- digrafos conados, 29
- distribuições complementares, 7
- espaço homogêneo reutivo, 3
- espaço homogêneo reutivo , 5
- espaço tangente a $\mathbb{F}_\Theta$, 5
- estrutura quase-complexa, 8
- estrutura quase-contato, 8
- forma Cartan-Killing, 1
- forma de Kähler, 36
- formas reais compactas, 3
- função de Möbius, 30
- ganhador, 20
- homomorfismo, 20
- integrável, 12
- lados, 30, 52
- localmente transitiva geral, 39
- métrica U -invariante, 6
- operadores de projeção, 7
- parcialmente integrável, 10
- perdedor, 20
- produto de Hadamard, 6
- quase f -variedade, 7
- quadrupla, 39
- raízes complementares, 4
- raiz, 1
- setas, 19
- sistema de coordenadas adaptado, 11
- subálgebra de Borel, 3
- subálgebra parabólica, 3
- subespaço raiz, 1
- tensor de Nijenhuis, 8
- transitiva, 50
- triplas extraídas, 39
- vértices, 19
- variedade bandeira, xiii, 3
- variedade bandeira maximal geral, 4
- variedades bandeira, 4
- vetor placar, 20
- vizinhança, 20