Existência de Soluções para um Problema de Lubrificação Elastohidrodinâmica com Cavitação

Patrícia Nunes da Silva

IMECC - UNICAMP
1999

Existência de Soluções para um Problema de Lubrificação Elastohidrodinâmica com Cavitação

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Patrícia Nunes da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de fevereiro de 1999.

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Silva, Patrícia Nunes

Si38e Existência de soluções para um problema de lubrificação elastohidrodinâmica com cavitação / Patrícia Nunes da Silva - Campinas, [S.P.: s.n.], 1999

Orientador: José Luiz Boldrini

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cavitação 2. Mancais I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 23 de fevereiro de 1999 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof (a). Dr (a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA

Prof (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

Agradecimentos

Ao prof. José Luiz Boldrini pela dedicação e incentivo.

A Arlan, Lucelina e Sílvia pelo apoio "técnico".

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

Neste trabalho estudaremos uma desigualdade variacional associada às equações que descrevem o escoamento de um fluido viscoso e incompressível entre um rolamento e uma dada superfície e cuja incógnita é a pressão.

A formulação do problema envolve a consideração de dois fenômenos: a cavitação e a deformação elástica. Na região em que não há cavitação, a pressão satisfaz a equação de Reynolds e esta equação torna-se não linear devido à deformação da supefície do rolamento. A este modelo está associada uma desigualdade variacional, descrita em Oden e Wu [10], que pode ser analisada utilizando a teoria de operadores pseudomotônicos.

Demonstraremos a existência de solução da desigualdade variacional, a chamada solução fraca, para o caso do mancal esférico e, para o caso do mancal cilíndrico, demonstraremos apenas algumas propriedades do operador não linear presente na desigualdade em estudo. Obteremos, também, uma relação entre a solução fraca e o problema original (válida para ambos os casos).

Introdução

Um problema de grande interesse industrial é o de escoamento de um fluido lubrificante entre um rolamento e uma dada superfície. Neste caso, para se obter as equações que controlam o fenômeno, é usual se fazer uma série de hipóteses simplificadoras que levam à chamada equação de Reynolds, a qual relaciona a espessura do filme lubrificante à pressão hidrodinâmica (veja, por exemplo, Batchelor [3]). Entre tais hipóteses simplificadoras estão as de que o fluido é viscoso e incompressível e a de que as superfícies em contato com o fluido são superfícies rígidas.

Entretanto, quando um lubrificante é forçado a fluir em um mancal com rolamento elástico (isto é quando a situação física é tal que não podemos desconsiderar a elasticidade do material do rolamento), pode ocorrer uma deformação deste rolamento, o que, por sua vez, afeta o campo de fluxo do lubrificante. Neste caso, é comum relacionar a espessura do filme de fluido à pressão do fluido usando a teoria de contato Hertziana (que associa o deslocamento à pressão do fluido através de um certo operador integral). Este problema se insere na teoria de lubrificação elastohidrodinâmica e será abreviado no decorrer texto por LEH.

Um outro fenômeno a ser considerado no escoamento do fluido é a ocorrência de cavitação. Pelo fato da equação de Reynolds ser válida somente em regiões em que não há cavitação, teremos que modelar o problema como um problema de fronteira livre, formulado pelo que chamaremos de modelo de cavitação de Reynolds. A este modelo está associada uma desigualdade variacional, descrita em Oden e Wu [10], que pode ser analisada utilizando a teoria de operadores pseudomonotônicos.

O objetivo deste trabalho é fazer um detalhamento matemático do problema descrito por Oden e Wu em [10]. Serão explicitadas todas as demonstrações envolvidas na obtenção de solução da desigualdade variacional, a chamada solução fraca, para o caso do mancal esférico e, para o caso do mancal cilíndrico, demonstraremos apenas algumas propriedades do operador não linear presente na desigualdade variacional. Obteremos, também, uma relação entre a solução fraca e o problema original (válida para ambos os casos).

No Capítulo 1, apresentamos resultados básicos para a resolução da desigualdade variacional; no Capítulo 2, provamos a existência de solução da desigualdade variacional de forma abstrata; no Capítulo 3, introduzimos o modelo de cavitação de Reynolds e no Capítulo 4, aplicamos os resultados do Capítulo 2 para provar a existência de solução do problema LEH na sua forma variacional e estabelecemos sua relação com a solução do problema original.

Capítulo 1

Preliminares

Sejam um espaço de Banach reflexivo e separável U e seu dual topológico U^*. Consideremos $\emptyset \neq K \subset U$ um conjunto fechado, convexo e limitado e um operador $A : K \to U^*$. Estaremos interessados na existência de uma solução da seguinte desigualdade variacional:

Encontrar $u \in K$ tal que

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0, \ \forall v \in K. \tag{1}$$

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e teoremas usados na obtenção deste resultado, além de definições que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

Estaremos seguindo nesta apresentação as referências [1], [5], [6], [8], [11] e [13].

Denotaremos por $u_n \xrightarrow{\omega} u$ a convergência fraca da sequência u_n para u; por $u_n \longrightarrow u$ a convergência na norma e por $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$, a dualidade entre U^* e U.

1 Métodos de Compacidade

Para obtenção de resultados de existência de soluções de certos problemas matemáticos, é frequente o uso dos chamados métodos de compacidade. No caso do Problema (1), empregaremos esta técnica através dos seguintes passos:

1. Restrição do Problema contínuo (1) a uma série de problemas aproximados, correspondentes às restrições do Problema (1) a uma sequência

de espaços $K_m, m \in \mathbb{N}$, de dimensão finita, cuja união seja densa em K.

2. Obtenção de uma sequência (u_m) de soluções correspondentes a cada uma das restrições anteriores.

3. Limitação uniforme da sequência de soluções (u_m).

4. Obtenção de uma subsequência (u_{m_k}), tal que $u_{m_k} \xrightarrow{\omega} u \in U$ (o argumentode compacidade é usado aqui).

5. Demonstração de que u é de fato solução do Problema (1).

A seguir, comentaremos alguns resultados que serão necessários para a execução dos passos anteriores.

Um ponto crucial para resolvermos o Problema (1) será garantirmos a existência de solução quando estivermos em dimensão finita, fato que permitirá a execução do passo 2. Para tanto, usaremos o seguinte teorema de ponto fixo:

Lema 1 (Teorema de Ponto Fixo de Brouwer) *Sejam $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e convexo e $F : K \to K$ uma função contínua. Então, F possui um ponto fixo.*

O próximo resultado nos permitirá efetivamente executar o passo 2, pois ele garantirá a resolução de cada problema aproximado.

Proposição 2 *Sejam $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e compacto e $A : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ um operador contínuo. Então, existe ao menos uma solução $u \in K$ de*

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0, \ \forall v \in K. \tag{2}$$

Prova: Sejam $(\cdot\,,\cdot)$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$ e $\pi : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ o operador (dado pelo Teorema de Riez) definido por

$$\langle Au, v \rangle = (\pi Au, v), \ Au \in (\mathbb{R}^n)^*, \ v \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, provar o teorema é equivalente a mostrar que existe $u \in K$ tal que

$$(u, v - u) \geq (u - \pi Au, v - u), \ \forall v \in K.$$

Como o operador $\Pr_K(I - \pi A) : K \to K$, composição do operador projeção em K com o operador $(I - \pi A)$, I identidade, é contínuo, pelo Teorema de Ponto Fixo de Brouwer, ele admite um ponto fixo $u \in K$, ou seja,

$$u = \Pr_K(I - \pi A)u.$$

Pela caracterização da projeção num convexo, $\forall v \in K$,

$$(Pr_K(I - \pi A)u, v - Pr_K(I - \pi A)u) \geq ((I - \pi A)u, v - Pr_K(I - \pi A)u),$$

ou seja,

$$(u, v - u) \geq (u - \pi Au, v - u), \quad \forall v \in K.$$

■

Para execução do passos 4 e 5, a hipótese de ser *"U um espaço de Banach reflexivo"* será fundamental, pois poderemos utilizar o seguinte resultado:

Proposição 3 *Seja U um espaço de Banach reflexivo. Temos*

1. *Toda sequência limitada de U tem uma subsequência fracamente convergente.*

2. *As convergências fraca-* e fraca coincidem em U^*.*

2 Espaços de Sobolev

O contexto em que se insere o problema que estaremos interessados em resolver naturalmente envolve os chamados espaços de Sobolev. Assim recordemos alguns resultados sobre tais espaços funcionais.

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega) = \{f;\ f : \Omega \to \mathbb{R},\ ||f||^p_{L^p} = \int_\Omega |f|^p d\Omega < \infty\}$, sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido de distribuições. No entanto, nem sempre $D^\alpha u$ é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$ (v. [8]). As funções que possuem tal representação são reunidas nos denominados espaços de Sobolev. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq m, p < \infty$, o espaço de Banach formado pelas funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertença a

$L^p(\Omega)$ munido da seguinte norma:

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p. \tag{3}$$

Quando $p = 2$ denotaremos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Ao fecho das funções teste na norma definida em (3), denotaremos $W_0^{m,p}$ e, analogamente, quando $p = 2$, H_0^m.

Muitas propriedades dos espaços de Sobolev, e em particular as propriedades de imersão de tais espaços, dependem da regularidade de Ω, conjunto aberto no qual eles estão definidos. Em geral, essa regularidade é expressa em termos de condições geométricas que podem ou não ser satisfeitas por Ω. Precisaremos, portanto, de algumas definições que serão utilizadas para caracterizar tais condições.

Definição 4 (cone finito) *Dados um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, uma bola aberta B_1 centrada em x e uma bola aberta B_2 que não contenha x, o conjunto $C_x = B_1 \cap \{x + \lambda(y - x);\ y \in B_2,\ \lambda > 0\}$ é um **cone finito** em $\mathbb{R}^n$ com vértice em x.*

Definição 5 (propriedade do cone) *Dizemos que Ω tem a **propriedade do cone** se existe um cone finito C, tal que cada ponto $x \in \Omega$ é vértice de um cone finito C_x contido em Ω e congruente a C.(Note que C_x não precisa ser obtido de C apenas por translação e sim por qualquer movimento rígido.)*

Como os elementos de $W^{m,p}(\Omega)$ correspondem a classes de funções que diferem num conjunto de medida nula, convém esclarecer qual o significado de termos imersões de $W^{m,p}(\Omega)$ em espaços de Banach X. Quando $X = W^{j,q}(\Omega)$ a imersão $W^{m,p}(\Omega) \to X$ será equivalente a $W^{m,p}(\Omega) \subset X$, enquanto quando $X = C_B^j(\Omega) = \{f \in C^j(\Omega),\ D^\alpha f \text{ limitada em } \Omega \ \text{ para todo } |\alpha| \leq j\}$, a imersão $W^{m,p} \to X$ implicará o fato de cada classe de funções de $W^{m,p}(\Omega)$ conter um elemento de X.

Sempre que $W^{m,p}(\Omega)$ está imerso em X, existe uma constante K independente de $u \in W^{m,p}$ tal que

$$\|u\|_X \leq K\|u\|_{m,p,\Omega}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Quando Ω possui a propriedade do cone, tal constante depende de Ω apenas em função dos parâmetros do cone C.

Os resultados apresentados a seguir(v. [1], p. 97 e p. 144) permitem relacionar os vários espaços de Sobolev entre si e com outros espaços funcionais.

Proposição 6 *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Sejam j e m inteiros não-negativos e p satisfazendo $1 \leq p < \infty$. Temos*

1. *se $mp < n$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq \frac{kp}{(n-mp)};$$

2. *se $mp = n$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty;$$

3. *se $mp > n$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega).$$

Temos também as imersões compactas. Elas serão importantes para garantir a limitação do operador A. Esta propriedade, juntamente com o fato de A ser pseudomonótono, implicará a continuidade do operador A em dimensão finita. Com isto, poderemos através da Proposição 2, executar o passo 2.

Definição 7 *Sejam E e F espaços vetoriais normados (reais ou complexos). Diz-se que uma aplicação linear $L : E \to F$ é compacta, se para cada subconjunto limitado $B \subset E$, $L(B)$ é relativamente compacto em F, ou seja, $\overline{L(B)}$ é compacto.*
Uma condição equivalente é que para cada sequência limitada $(x_n) \subset E$, exista uma subsequência (x_{n_k}) tal que $(L(x_{n_k}))$ convirja em F.

Proposição 8 *Sejam $\Omega_0 \subset \Omega$ subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que Ω_0 é limitado e Ω possui a popriedade do cone; sejam também j e m inteiros tais que $j \geq 0$ e $m \geq 1$ Então,*

1. *se $n = mp$, a imersão abaixo é compacta*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0), \quad 1 \leq q < \infty;$$

2. *se $mp > n$, a imersão abaixo é compacta*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega_0).$$

Observação: Com o resultado do item 2 da proposição anterior podemos obter a imersão compacta de $W^{m,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega_0)$ para $1 \leq q \leq \infty$. Para tanto basta lembrarmos que $C^j_B(\Omega_0)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega_0)$ para $1 \leq q \leq \infty$ e que a composição desta imersão com a decorrente do item citado resulta também compacta.

3 Propriedades Adicionais de Conjuntos Convexos e Topologia Fraca

Se tivermos cumprido os passos 1-4, para satisfazermos o passo 5 da Seção 1, é necessário (e não suficiente) garantirmos que $u \in K$. Para tanto, utilizaremos o seguinte fato

Proposição 9 *Sejam U um espaço vetorial normado e $K \subset U$ um conjunto convexo e fechado. Então, K é fracamente fechado.*

De fato, este resultado é uma consequência de (lembre que um conjunto convexo contém todas as combinações convexas de seus elementos)

Proposição 10 (Mazur) *Sejam U um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset U$ uma sequência fracamente convergente para u em U. Então, existe uma combinação convexa $y_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$, $\sum_{n=1}^{m} \alpha_n = 1, \alpha_n \geq 0$ tal que a sequência $(y_m) \subset U$ converge na norma para u em U.*

4 Desigualdades em $H^1(\Omega)$

Para estabelecermos uma relação entre a solução do Problema (1) e a do problema de lubrificação, precisaremos da noção de desigualdade (tanto $\geq$ quanto $>$) no sentido de $H^1(\Omega)$.

Estaremos seguindo nesta seção a referência [5](v. Capítulo II, p. 35 e p. 43).

Definição 11 *Seja $m \geq 1$, um número inteiro. Denotamos por $H^{m,\infty}(\Omega)$ a classe das funções de $C^{m-1}(\overline{\Omega})$ cujas derivadas de ordem $m-1$ satisfazem uma condição de Lipschitz em $\overline{\Omega}$. Em particular, quando tais funções tem suporte compacto em Ω, denotamos tal classe por $H^{m,\infty}_0(\Omega)$.*

Definição 12 *Sejam $u \in H^1(\Omega)$ e $E \subset \overline{\Omega}$. Dizemos que a função* **u** ***é não-negativa em* E *no sentido de* $\mathbf{H}^1(\Omega)$**, *$u \geq 0$ em E em $H^1(\Omega)$, se existe uma sequência $(u_m) \subset H^{1,\infty}(\Omega)$ tal que*

$$u_n(x) \geq 0, \ \ \forall x \in E; \ \ u_n \longrightarrow u \text{ em } H^1(\Omega).$$

Se $-u \geq 0$ em E em $H^1(\Omega)$, dizemos que **u** ***é não-positiva em* E *em* $\mathbf{H}^1(\Omega)$**, *e denotamos por $u \leq 0$ em E em $H^1(\Omega)$. Se $u \geq 0$ em E em $H^1(\Omega)$ e $u \leq 0$ em E em $H^1(\Omega)$, dizemos que $u = 0$ em E em $H^1(\Omega)$. Analogamente, dizemos que $u \leq v$ em E em $H^1(\Omega)$, se $v - u \geq 0$ em E em $H^1(\Omega)$, com $u, v \in H^1(\Omega)$.*

Podemos comparar a noção de desigualdade em $H^1(\Omega)$ com a de desigualdade q.t.p. em Ω através da seguinte proposição:

Proposição 13 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, $E \subset \overline{\Omega}$ e $u \in H^1(\Omega)$.*

1. *Se $u \geq 0$ em E em $H^1(\Omega)$, então $u \geq 0$ em E q.t.p..*
2. *Se $u \geq 0$ em Ω q.t.p., então $u \geq 0$ em Ω em $H^1(\Omega)$.*
3. *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $u \geq 0$ em Ω q.t.p., então existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u_n \geq 0$ em Ω e $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$.*
4. *Se E é um aberto em Ω e $u \geq 0$ em E q.t.p., então $u \geq 0$ em K no sentido de $H^1(\Omega)$ para todo compacto $K \subset E$.*

Pelo fato de estarmos interessados num problema de fronteira livre, precisaremos da noção de desigualdade estrita no sentido de $H^1(\Omega)$ para definirmos o conjunto "não coincidente".

Definição 14 *Seja $u \in H^1(\Omega)$. Dizemos que* **$\mathbf{u}(x) > 0$ *em* $\mathbf{x} \in \Omega$ *no sentido de* $\mathbf{H}^1(\Omega)$** *se existe uma vizinhança $B_\rho(x)$ e $\varphi \in H_0^{1,\infty}(B_\rho(x)), \varphi \geq 0$ e $\varphi(x) > 0$, tal que $u - \varphi \geq 0$ em $B_\rho(x)$ no sentido de $H^1(\Omega)$.*

Capítulo 2

Formulação abstrata e Existência de solução

Neste capítulo apresentaremos um resultado de existência de solução para o seguinte problema:

Encontrar $u \in K$ tal que

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K \tag{1}$$

com $A : K \to U^*$ e hipóteses adequadas sobre A, U e K.

Para resolver o Problema variacional (1), utilizaremos o método de compacidade conforme apresentado no capítulo anterior. Num primeiro momento, estaremos restritos a conjuntos K, fechados, convexos e limitados. Posteriormente resolveremos o caso K não-limitado utilizando a existência de solução da desigualdade variacional em subconjuntos convexos e limitados de K e hipóteses adicionais sobre o operador A.

Uma das hipóteses sobre A será a seguinte:

Definição 1 *Sejam U um espaço de Banach, U^* seu dual topológico e $\emptyset \neq K \subset U$ um conjunto convexo e fechado. Dizemos que um operador $A : K \to U^*$ é **pseudomonótono** se para toda sequência $(u_m) \subset K$ que converge na topologia fraca para $u \in K$ e é tal que* $\limsup \langle Au_m, u_m - u \rangle \leq 0$, *tivermos,*

$$\liminf \langle Au_m, u_m - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle, \quad \forall v \in U.$$

Teorema 2 *Sejam*
U um espaço de Banach real, reflexivo e separável,
$K \subset U$, um conjunto não vazio, convexo, limitado e fechado e
$A : K \to U^*$ um operador limitado e pseudomonótono. Então, existe ao menos uma solução da desigualdade variacional

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0, \ \ \forall v \in K \tag{2}$$

A demonstração seguirá os seguintes passos:

1. Obteremos um subconjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots\}$ de K denso e enumerável.

2. Consideraremos conjuntos de dimensão finita $K_m = U_m \cap K$, onde U_m é o espaço gerado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, isto é, $U_m = span\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e resolveremos:

$$\langle Au_m, v - u_m \rangle \geq 0, \ \forall v \in K_m \tag{3}$$

3. Limitaremos a sequência (u_m) uniformemente a fim de extrair uma subsequência fracamente convergente

4. Usaremos o fato de A ser pseudomonótono para obter, a partir do passo 2, a desigualdade (2).

A Proposição 2 do capítulo anterior garante a existência de solução para o Problema (3) se A for um operador contínuo em K_m. Tal propriedade será decorrência do lema abaixo.

Definição 3 *Sejam X um espaço de Banach e $\emptyset \neq K \subset X$ um conjunto convexo e fechado. Dizemos que um operador $A : K \to X^*$ é **demicontínuo** se, e somente se, para toda sequência $(u_n) \subset K$ que convirja para u, tenhamos*

$$Au_n \xrightarrow{\omega} Au.$$

Lema 4 *Sejam X um espaço de Banach, $M \subset X$ um subespaço de dimensão finita, $\emptyset \neq K \subset X$ um conjunto convexo e fechado e $K_M = K \cap M$. Se $A : K \to X^*$ é demicontínuo, então o operador $\tilde{A} : K_M \subset M \to M^*$, onde $\tilde{A}$ é a restrição do operador A a K_M, é contínuo.*

Prova: Indiquemos por $j : M \to X$ a imersão natural de M em X e seu adjunto $j^* : X^* \to M^*$. Seja $j^* \circ A \circ j = \tilde{A} : K_M \to M^*$.
Se a sequência $(x_n) \subset K_M$ é tal que x_n converge na norma para $x \in K_M$, então para todo $v \in M$, temos

$$\lim \langle \tilde{A}x_n, v \rangle = \lim \langle Ajx_n, jv \rangle = \langle Ajx, jv \rangle = \langle \tilde{A}x, v \rangle.$$

Como M é de dimensão finita, $\tilde{A}$ é contínuo em K_M. ■

Mostraremos agora, que todo operador pseudomonótono e limitado é demicontínuo.

Lema 5 *Sejam U um espaço de Banach real e reflexivo, $K \subset U$, um conjunto não vazio, convexo e fechado e $A : K \to U^*$ um operador limitado e pseudomonótono. Então, A é demicontínuo.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência de K tal que $u_n \to u$. Pelo fato de A ser limitado e da sequência (u_n) ser convergente, a sequência (Au_n) é limitada. Além disso, como U é reflexivo, podemos extrair uma subsequência convergente, $(Au_{n'}) \xrightarrow{\omega} b \in U^*$.

Como

$$0 \leq |\langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle| \leq \|Au_{n'}\| \|u_{n'} - u\|,$$

a convergência de u_n para u e a limitação de $(A_{n'})$ implicam que

$$\lim \langle Au_{n'}, u_{n'} - u\rangle = 0$$

Logo, como A é pseudomonótono,

$$\liminf \langle Au_{n'}, u_{n'} - w\rangle \geq \langle Au, u - w\rangle, \quad \forall w \in U.$$

Por outro lado, do fato de $u_{n'} \longrightarrow u$ e de $Au_{n'} \xrightarrow{\omega} b$, segue que

$$\liminf \langle Au_{n'}, u_{n'} - w\rangle = \langle b, u - w\rangle$$

Logo, $\langle Au, u - w\rangle \leq \langle b, u - w\rangle, \ \forall w \in U$, ou seja, $b = Au$.

Com o argumento acima, de toda subsequência de (Au_n) podemos extrair uma subsequência fracamente convergente para Au. Portanto,

$$Au_n \xrightarrow{\omega} Au$$

Ou seja, A é demicontínuo.

■

Demonstração do Teorema 2:

Estaremos seguindo as referências [9] e [7].

Passo 1. Iniciamos observando que como U é separável, existe $W = \{w_1, w_2, \dots\}$ enumerável, $W \subset U$ tal que $\overline{W} = U$.

Agora, obteremos um conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots\}$ de K, denso e enumerável, escolhendo elementos de K em função dos elementos do conjunto W. Para cada $w_i \in W$, consideremos $B_{ij} = B(w_i, \frac{1}{j}) = \{w \in W, \|w - w_i\| \leq \frac{1}{j}\}$.

Colecionemos no conjunto I os pares ordenados (i, j) tais que a intersecção das bolas B_{ij} com o conjunto K seja não-vazia, isto é $I = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B_{ij} \cap K \neq \emptyset$ para algum j$\}$

Temos, por construção, que o conjunto I é não-vazio e enumerável. De fato, como $\overline{W} = U$, para qualquer $v \in K$, existe uma sequência

$$(z_n), z_n = w_{i_n} \text{ tal que } z_n \to v.$$

Ou seja, em particular, $\exists\, n_0$ tal que para $n \geq n_0$,

$$\|z_n - v\| < \frac{1}{2}.$$

Desse modo, $v \in B(z_n, \frac{1}{2}) = B(w_{i_n}, \frac{1}{2})$ e, portanto, $(i_n, 2) \in I, \forall n \geq n_0$. Por outro lado, I é enumerável, pois é subconjunto de um conjunto enumerável, $I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

O conjunto B será construído da seguinte forma: para cada bola B_{ij} cuja intersecção com o conjunto K é não-vazia, escolheremos um elemento pertencente a esta intersecção. Isto é, para cada $(i, j) \in I$, seja w_{ij} escolhido tal que $w_{ij} \in K \cap B_{ij}$. Mostraremos que $B = \{w_{ij}, (i, j) \in I\}$ é o conjunto que procuramos, pois B é um subconjunto denso de K, isto é, $\overline{B} = K$.

De fato, seja $v \in K$. Como $\overline{W} = U$, existe uma sequência (z_n), $z_n = w_{i_n}$ tal que $z_n \to v$.

De tal sequência podemos extrair uma subsequência (z_{n_k}) que satisfaça: $\|z_{n_k} - v\| < \frac{1}{k}$ e $n_k < n_{k+1}$. Logo $B_{i_{n_k}k} \cap K \neq \emptyset$ e, portanto, o elemento

$w_{i_{n_k}k} \in B$ satisfaz

$$\|w_{i_{n_k}k} - v\| \leq \|w_{i_{n_k}k} - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - v\| < \frac{2}{k}.$$

Portanto, a sequência (v_k), com $v_k = w_{i_{n_k}k}$ é tal que

$$(v_k) \subset B \text{ e } v_k \to v,$$

ou seja, $K \subset \overline{B}$

Por outro lado, por construção, $B \subset K$. Temos, portanto, $\overline{B} \subset \overline{K} = K$. Logo, $\overline{B} = K$.

Passo 2. Seja N suficientemente grande para que $\exists\,(i,j) \in I$ e $i+j \leq N+1$.

Para cada $m \in \mathbb{N}, m \geq N$, seja o subespaço $U_m = span\{w_{ij} \in B,\ i+j \leq m+1 \text{ e } (i,j) \in I\}$.

Consideremos a família de conjuntos

$$\begin{gathered} K_m = U_m \cap K, m \geq N \\ \overline{\cup_{m \geq N} K_m} = K \end{gathered} \tag{4}$$

esta última propriedade é válida pois, como $B \subset \cup_{m\geq N} K_m \subset K$, temos

$$K = \overline{B} \subset \overline{\cup_{m\geq N} K_m} \subset \overline{K} = K.$$

Por construção, cada conjunto K_m é um subconjunto não-vazio, convexo, limitado e fechado de U. Para resolvermos a Desigualdade variacional (3), resta mostrarmos que $A : K_m \to U_m^*$ é contínuo, o que é decorrência dos Lemas 4 e 5.
Logo, pela Proposição 2 do Capítulo 1, existe uma solução $u_m \in K_m$ da desigualdade variacional

$$\langle Au_m, v - u_m \rangle \geq 0,\ v \in K_m \tag{5}$$

Passo 3. Como K é limitado, a sequência (u_m), gerada na resolução de (5), é limitada.

Pelo fato de U ser Banach reflexivo, podemos extrair de (u_m) uma subsequência (u_{m_k}) tal que

$$u_{m_k} \xrightarrow{\omega} u \in U.$$

Como $K \subset U$ é convexo e fechado, K é fracamente fechado. Portanto, $u \in K$

Passo 4. Já temos a convergência fraca $u_{m_k} \xrightarrow{\omega} u$. Para usarmos o fato de A ser pseudomonótono, mostremos, inicialmente, que

$$\limsup \langle Au_{m_k}, u_{m_k} - u \rangle = 0 \tag{6}$$

Como $\overline{\cup_{m \geq N} K_m} = K$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos escolher $u_\varepsilon \in \cup_{m \geq N} K_m$ tal que

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon, \tag{7}$$

Pelo fato de $K_m \subset K_{m+1}$, para k suficientemente grande, temos, por (5),

$$\langle Au_{m_k}, u_\varepsilon - u_{m_k} \rangle \geq 0.$$

Além disso, por (7) e pelo fato de A ser limitado, temos

$$|\langle Au_{m_k}, u_\varepsilon - u \rangle| \leq C\varepsilon. \qquad (C > 0 \text{ constante})$$

Desse modo,

$$|\limsup \langle Au_{m_k}, u_{m_k} - u \rangle| = |\limsup [\langle Au_{m_k}, u_{m_k} - u_\varepsilon \rangle + \langle Au_{m_k}, u_\varepsilon - u \rangle]| \leq 0 + C\varepsilon,$$

o que implica

$$\limsup \langle Au_{m_k}, u_{m_k} - u \rangle = 0.$$

Agora, pelo fato de A ser pseudomonótono, para todo $v \in U$ obtemos

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf \langle Au_{m_k}, u_{m_k} - v \rangle$$

Portanto por (5), para $v \in \cup_{m \geq N} K_m$,

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf \langle Au_{m_k}, u_{m_k} - v \rangle \leq 0$$

Como $\overline{\cup_{m \geq N} K_m} = K$, temos

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0, \ \ \forall v \in K$$

■

O lema abaixo permitirá que estabeleçamos a existência de solução para o Problema (1) quando o conjunto K não for limitado.

Lema 6 *Sejam*
U um espaço de Banach real, reflexivo e separável,
$K \subset U$, não vazio, convexo e fechado e
$A : K \to U^*$.
Então, uma condição necessária e suficiente para que exista uma solução da desigualdade variacional

$$u \in K : \langle Au, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K \tag{8}$$

é que exista um número real $r > 0$ tal que, sendo $K_r = K \cap \overline{B_r(0)}$, $\overline{B_r(0)} = \{v \in U : \|v\|_U \leq r\}$, ao menos uma solução da desigualdade

$$u_r \in K_r : \langle Au_r, v - u_r \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K_r \tag{9}$$

pertença ao interior da bola $B_r(0)$, ou seja, tenhamos a desigualdade estrita

$$\|u_r\|_U < r. \tag{10}$$

Prova:(v. [9], p. 1190) Para provar que a condição é necessária, basta tomarmos $r > \|u\|$.

Mostremos agora que ela é também suficiente. Seja u_r uma solução da desigualdade (9) que satisfaça (10) e $\tilde{v} \in K$ arbitrário. Pelo fato de u_r pertencer ao interior de $B_r(0)$ existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$w = u_r + \theta(\tilde{v} - u_r) \in K_r \subset K.$$

Logo, fazendo em (9) $v = w$, temos

$$\langle Au_r, \theta(\tilde{v} - u_r) \rangle \geq 0.$$

Dividindo por θ,

$$\langle Au_r, \tilde{v} - u_r \rangle \geq 0.$$

Portanto, u_r é solução de (8), isto é, u_r é solução da desigualdade variacional sobre todo o convexo K.

■

Em outras palavras, haverá solução no caso K não limitado se, e somente se, existir uma solução de (9) que seja ponto interior da bola de raio r centrada na origem.

Um exame cuidadoso do lema anterior e uma comparação com o Teorema 2 revela que sempre existem soluções de (9) se A satisfizer as hipóteses deste último, pois K_r é convexo, limitado, fechado e não-vazio (para r suficientemente grande). Portanto, para garantir a existência de solução do Problema (1), basta exigirmos de A uma condição adicional que garanta que a condição (10) seja satisfeita. Uma noção fraca de coercividade cumprirá este papel como veremos no teorema abaixo.

Definição 7 *Sejam U um espaço de Banach, U^* seu dual topológico, $K \subset U$ um conjunto fechado, convexo e não-vazio e um operador $A : K \to U^*$. Dizemos que o operador A* **é coercivo em** *K se existir $v_0 \in K$ tal que*

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{\langle Av, v - v_0\rangle}{\|v\|} = +\infty, \; v \in K.$$

Proposição 8 *Sejam K um subconjunto fechado, convexo e não-vazio de um espaço de Banach reflexivo e separável U, $A : K \longrightarrow U^*$ um operador pseudomonótono, limitado e coercivo em K. Então, existe ao menos um elemento $u \in K$ tal que*

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0, \; \forall v \in K. \tag{11}$$

Prova: (v. [9], p. 1191) Pelo Teorema 2, sob as hipóteses acima, para r suficientemente grande existem soluções u_r da desigualdade variacional (12) para os conjuntos convexos limitados e não-vazios K_r conforme definidos no Lema 6. Portanto para provarmos a proposição, basta exibirmos $\bar{r}$ tal que $\|u_{\bar{r}}\| < \bar{r}$.

Seja $r_0 \geq \|v_0\|$ tal que $K_r \neq \emptyset, \;\; \forall r \geq r_0$. Pelo Teorema 2, para cada $r \geq r_0$, existe $u_r \in K_r$, solução de

$$\langle Au_r, v - u_r\rangle \geq 0, \;\; \forall v \in K_r \tag{12}$$

Em particular, tal desigualdade vale para $v = v_0$ e isto implica os elementos da sequência (u_r), para $r \geq r_0$ serem limitados. Caso contrário, pelo fato do operador A ser coercivo, teríamos

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\langle Au_r, u_r - v_0\rangle}{\|u_r\|} = +\infty,$$

o que contradiria (12) (com $v = v_0$).

Seja c um limitante de $(\|u_r\|)$, $r \geq r_0$. Se tomarmos $\bar{r} > \max\{r_0, c\}$, teremos $\|u_{\bar{r}}\| < \bar{r}$ e, portanto, pelo Lema 6, existe uma solução da desigualdade variacional (11) em todo o convexo K.

■

Uma condição sobre A que é mais fraca do que a anterior (coercividade) é a que chamaremos de condição **F**. Ela também garante que (10) é satisfeita para algum $r > 0$.

Definição 9 (Condição F) *Sejam U um espaço de Banach, U^* seu dual topológico e $K \subset U$ um conjunto convexo, fechado e não-vazio. Diremos que um operador $A : K \to U^*$ satisfaz a* ***condição*** **F** *se existem $v_0 \in K$ e $r > 0$, $\|v_0\| < r$, tais que para todo $v \in K$ com $\|v\| = r$ tenhamos*

$$\langle Av, v - v_0 \rangle > 0. \tag{13}$$

A afirmação anterior à Definição 9 pode, então, ser demonstrada como se segue: suponhamos que o operador A satisfaça a condição **F** e que exista uma solução u_r de (9). Se a norma de u_r fosse igual a r, teríamos, por (13),

$$\langle Au_r, u_r - v_0 \rangle > 0.$$

Mas, isto contradiria o fato de u_r ser solução de (9). Logo, como $u_r \in B_r(0)$, sua norma é tal que $\|u_r\| < r$ e, portanto, (10) é satisfeita.

Capítulo 3

Colocação do Problema

Neste capítulo descreveremos matematicamente o problema a ser tratado. Estaremos utilizando as referências [4] e [12]

Conforme pode ser visto nas Figuras 1 e 2, estaremos considerando um mancal composto de um rolamento cilíndrico ou esférico girando a uma certa velocidade angular (com a coordenada cartesiana y orientada na direção do eixo de rotação) e uma superfície rígida S. O rolamento é separado de S por um filme lubrificante, o qual é assumido ser um fluido viscoso, isotrópico e incompressível e que, devido à velocidade de rotação do rolamento, entra no mancal com velocidade U (suposta independente do tempo e conhecida) na direção da variável x, paralela à superfície rígida S. A geometria inicial da abertura entre o rolamento e a superfície S é dada por uma função suposta conhecida $h \geq h_0 > 0$ (h_0, uma constante). A geometria final desta abertura, quando o rolamento está funcionando em **regime estacionário**, é dada por uma função H, que deve ser encontrada e que depende da deformação da superfície do rolamento, a qual é dada por uma função h_1 (temos $H = h + h_1$).

A formulação do problema envolve a consideração de dois fenômenos: a cavitação e a deformação elástica. Na região em que não há cavitação, a pressão satisfaz a equação de Reynolds e esta equação torna-se não linear devido à deformação da superfície do rolamento. A esta formulação chamaremos de modelo de cavitação de Reynolds.

1 Modelo de cavitação de Reynolds

Dada uma região Ω em $\mathbb{R}^n$, $n = 1$ ou $n = 2$, devemos achar uma região $\Omega_+ \subset \Omega$ e uma função $p \geq 0$, correspondendo à pressão hidrodinâmica e

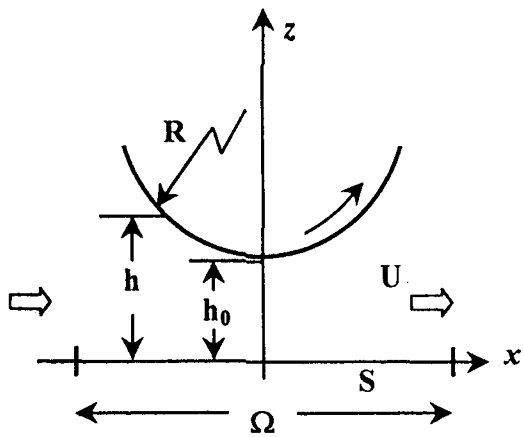

Figura 1: Geometria do Mancal Cilíndrico ($n = 1$)

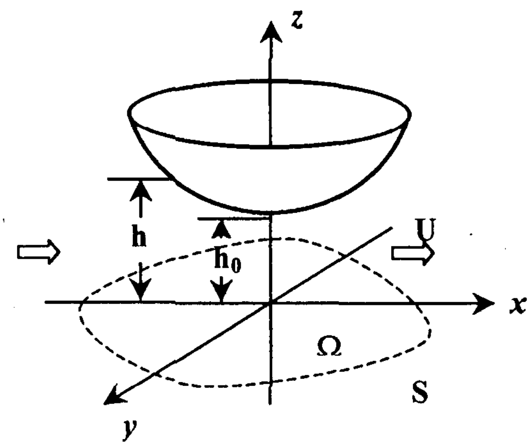

Figura 2: Geometria do Mancal Esférico ($n = 2$)

definida em Ω tais que, sendo $\Omega_n = \Omega - \Omega_+$, tenhamos

$$\begin{cases} \nabla \cdot (H^3(p)\nabla p) = 6\mu \dfrac{\partial U H(p)}{\partial x}, \text{ em } \Omega_+ \\ p = 0 \text{ q.t.p em } \Omega_n, \quad \Omega = \Omega_n \cup \Omega_+ \\ p|_{\partial\Omega} = 0 \\ 6\mu \dfrac{\partial U H(p)}{\partial x} \geq 0, \text{ em } \Omega \\ H(p) = h + h_1(p) \end{cases} \tag{1}$$

com

$$\begin{cases} h_1(p)(x) = \int_\Omega N(x,\xi)p(\xi)d\xi & \text{quando } n = 1, \\ h_1(p)(x,y) = \int_\Omega N(x,y,\xi,\eta)p(\xi,\eta)d\xi d\eta & \text{quando } n = 2, \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\begin{cases} N(x,\xi) = C_1 \ln \dfrac{|x_0 - \xi|}{|x - \xi|} & \text{quando } n = 1. \\ N(x,y,\xi,\eta) = C_2 \dfrac{1}{\sqrt{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}} & \text{quando } n = 2. \end{cases}$$

Na fórmula acima, x_0 é um ponto fixo dado e tal que $x_0 \notin \overline{\Omega}_+$. Observamos que o **contato é dito ao longo de uma linha** no caso do mancal cilíndrico, o que corresponde a $n = 1$, e é chamado de **contato pontual** no caso do mancal esférico, o que corresponde a $n = 2$.

Denotando por A o operador não-linear

$$Ap = -\nabla \cdot (H^3(p)\nabla p) + 6\mu \frac{\partial U h_1(p)}{\partial x} \tag{3}$$

e por f a função dada

$$f = -6\mu \frac{\partial U h}{\partial x}, \tag{4}$$

podemos reescrever o problema de lubrificação elastohidrodinâmica clássico da seguinte forma:

Encontre um campo de pressões p tal que

$$\begin{cases} Ap = f, \ \text{ em } \Omega_+ \\ p = 0 \ \text{ q.t.p. em } \Omega_n \\ p|_{\partial\Omega} = 0 \\ Ap - f \geq 0 \ \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{5}$$

Neste trabalho, buscaremos uma solução generalizada deste problema e, para isto, na próxima seção obteremos uma formulação variacional associada a ele. O Capítulo 4 será dedicado ao estudo de existência de solução para a formulação variacional. Lá, também discutiremos brevemente a questão da unicidade de soluções e o relacionamento entre uma solução generalizada e o problema original (5).

2 Formulação Variacional

Para uma formulação variacional adequada para o Problema (5), consideremos o espaço de Sobolev

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \ \mid \ v = 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ no sentido de traço } \} \tag{6}$$

e seu dual topológico V^*

$$V^* = (H_0^1(\Omega))^* = H^{-1}(\Omega). \tag{7}$$

Denotemos por $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ a dualidade em $V^* \times V$. Além disso, seja K um subconjunto fechado e convexo de V dado por

$$K = \{v \in V \mid v \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega\} \tag{8}$$

Desse modo, o operador A definido em (3) pode ser considerado como um operador de V em V^*.

$$\begin{aligned} A :& V \longrightarrow V^* \\ p \longmapsto& Ap = -\nabla \cdot (H^3(p)\nabla p) + 6\mu \frac{\partial U h_1(p)}{\partial x} \end{aligned}$$

Trabalhando formalmente, obteremos, agora, uma formulação variacional associada a (5). Seja $p \in K$ solução de (5), temos

$$\begin{aligned} \langle Ap - f, q - p \rangle &= \int_\Omega (Ap - f)(q - p)d\Omega \\ &= \int_{\Omega_+} (Ap - f)(q - p)d\Omega + \int_{\Omega_n} (Ap - f)(q - p)d\Omega \end{aligned}$$

pelo fato de p ser solução de (5), $Ap - f \geq 0$ e $q \in K$,

$$= \int_{\Omega_n} (Ap - f)q d\Omega \geq 0.$$

Ou seja, podemos associar ao Problema (5) a seguinte desigualdade variacional:

Encontrar $p \in K$ tal que

$$\langle Ap - f, q - p \rangle \geq 0, \;\; \forall q \in K \tag{9}$$

Capítulo 4

Solução Fraca do Problema de Lubrificação Elastohidrodinâmica

Vimos no capítulo anterior que podemos associar ao problema de cavitação de Reynolds a seguinte desigualdade variacional:

Encontrar $u \in K$ tal que

$$\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K, \tag{1}$$

com $K = \{v \in V \mid v \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega\}$,

$$V = H_0^1(\Omega)$$

$$Au = -\nabla \cdot (H^3(u)\nabla u) + 6\mu \frac{\partial U h_1(u)}{\partial x} \tag{2}$$

e

$$f = -6\mu \frac{\partial U h}{\partial x}.$$

A fim de utilizarmos os resultados obtidos no Capítulo 2 para obter um solução do Problema (1), introduziremos o operador

$$\tilde{A}u = Au - f$$

e reescreveremos a desigualdade variacional acima como

Encontrar $u \in K$ tal que

$$\langle \tilde{A}u, v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K. \tag{3}$$

Pelo que foi apresentado no Capítulo 2, para obtermos uma solução do Problema (3), basta provarmos, de acordo com a Proposição 8, que o operador $\tilde{A}$ é pseudomonótono, limitado e coercivo.

Observaremos, inicialmente, que se tivermos $f \in V^*$, dual topológico de V, e se o operador A definido em (2) for pseudomonótono, limitado e coercivo, o operador $\tilde{A}$ possuirá as mesmas propriedades.

Verifiquemos estas afirmações: suponhamos que A seja pseudomonótono e consideremos uma sequência $(u_n) \subset K$ que convirja na topologia fraca para $u \in K$ e tal que $\limsup\langle \tilde{A}u_n, u_n - u\rangle \leq 0$. Temos, para $v \in V$,

$$\begin{aligned}
\liminf\langle \tilde{A}u_n, u_n - v\rangle &= \liminf\langle Au_n - f, u_n - v\rangle \\
&\geq \liminf\langle Au_n, u_n - v\rangle + \liminf -\langle f, u_n - v\rangle \\
&= \liminf\langle Au_n, u_n - v\rangle - \limsup\langle f, u_n - v\rangle \\
&= \liminf\langle Au_n, u_n - v\rangle - \langle f, u - v\rangle
\end{aligned}$$

Como $\limsup\langle \tilde{A}u_n, u_n - u\rangle \leq 0$, temos $\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$. Logo, usando o fato de A ser pseudomonótono,

$$\liminf\langle \tilde{A}u_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle - \langle f, u - v\rangle = \langle \tilde{A}u, u - v\rangle.$$

Portanto, $\tilde{A}$ é pseudomonótono.

Além disso, se A for limitado e $f \in V^*$, temos

$$\frac{|\langle \tilde{A}u, v\rangle|}{||v||} \leq \frac{|\langle Au, v\rangle|}{||v||} + ||f|| \leq ||Au|| + ||f||$$

Ou seja, $\tilde{A}$ é limitado.

Finalmente, se $f \in V^*$ e A for coercivo, $\tilde{A}$ será coercivo pois

$$\lim_{||v||\to\infty} \frac{\langle \tilde{A}v, v - v_0\rangle}{||v||} = \lim_{||v||\to\infty} \left\{ \frac{\langle Av, v - v_0\rangle}{||v||} - \frac{\langle f, v - v_0\rangle}{||v||} \right\} = +\infty.$$

1 Solução fraca do problema de cavitação de Reynolds

Pelo que foi apresentado, para obter uma solução do Problema (3) será suficiente demonstrarmos que operador A definido abaixo é pseudomonótono, limitado e coercivo.

$$Ap = -\nabla \cdot (H^3(p)\nabla p) + 6\mu \frac{\partial U h_1(p)}{\partial x}, \tag{4}$$

sendo $H(p) = h + h_1(p)$ com

$$\begin{cases} h_1(p)(x) = \int_\Omega N(x,\xi)p(\xi)d\xi & \text{quando } n = 1, \\ h_1(p)(x,y) = \int_\Omega N(x,y,\xi,\eta)p(\xi,\eta)d\xi d\eta & \text{quando } n = 2, \end{cases} \tag{5}$$

e

$$\begin{cases} N(x,\xi) = C_1 \ln \dfrac{|x_0 - \xi|}{|x - \xi|} & \text{quando } n = 1, \\ N(x,y,\xi,\eta) = C_2 \dfrac{1}{\sqrt{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}} & \text{quando } n = 2. \end{cases} \tag{6}$$

Os lemas apresentados abaixo garantirão que, para o caso de contato pontual (mancal esférico, $n = 2$), tais propriedades se verificam.

Para o caso de contato ao longo de uma linha (mancal cilíndrico, $n = 1$), nem sempre foi possível detalhar todas as demonstrações apresentadas em [10] relativas às propriedades do operador A. Comentaremos oportunamente as dificuldades que foram encontradas neste caso. Para este último caso, obteremos apenas os resultados de que o operador A é limitado e hemicontínuo e que o operador $\tilde{A}$ satisfaz, em casos particulares, a condição **F** (v. Definição 9 do Capítulo 2).

Lema 1 *Para* h_1 *definido na equação (5),* $0 < \alpha < 1$, $q = \dfrac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)} > 2$, *existe uma constante* $M_K > 0$ *tal que*

$$||h_1(p)||_{I,\infty} \leq M_K ||p||_{I,q}, \ \forall p \in K \tag{7}$$

Prova: Para obter tal constante, utilizaremos o fato de $N(x,y,\cdot,\cdot)$ pertencer a $L^{2-\alpha}(\Omega)$, $\forall (x,y) \in \Omega$, quando $n = 2$ e $N(x,\cdot)$ pertencer a $L^{2-\alpha}(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$, quando $n = 1$ e de sua norma nestes espaços ser limitada independentemente de (x,y) e de x, conforme estivermos em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}$.

No caso de contato ao longo de uma linha, $N(x,\xi)$ na definição de h_1 é dado por

$$N(x,\xi) = C_1 \ln \left| \frac{x_0 - \xi}{x - \xi} \right|.$$

A seguir, obteremos um limitante para $\int_\Omega |N(x,\cdot)|^{2-\alpha} d\xi$ independente de $x \in \overline{\Omega} = [a,b]$. Com isso, teremos mostrado também que $N(x,\cdot) \in L^{\overline{q}}(\Omega)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, $\overline{q} = 2 - \alpha$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |N(x,\xi)|^{2-\alpha} d\xi &= |C_1|^{2-\alpha} \int_\Omega \left| \ln|x_0 - \xi| + \ln \frac{1}{|x-\xi|} \right|^{2-\alpha} d\xi \\ &\leq |C_1|^{2-\alpha} \int_\Omega \left(|\ln|x_0 - \xi|| + \left| \ln \frac{1}{|x-\xi|} \right| \right)^{2-\alpha} d\xi,\end{aligned}$$

para uma constante $C_\alpha = C_\alpha(\alpha) > 0$,

$$\int_\Omega |N(x,\xi)|^{2-\alpha} d\xi \leq |C_1|^{2-\alpha} C_\alpha \left[\int_\Omega \left(|\ln|x_0 - \xi||^{2-\alpha} d\xi + \int_\Omega \left| \ln \frac{1}{|x-\xi|} \right|^{2-\alpha} \right) d\xi \right].$$

Estimemos agora as duas últimas integrais acima. Seja $\xi - x_0 = \eta$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b |\ln|x_0 - \xi||^{2-\alpha} d\xi &= \int_{a-x_0}^{b-x_0} |\ln|\eta||^{2-\alpha} d\eta \\ &= \int_0^{x_0-a} |\ln \eta|^{2-\alpha} d\eta + \int_0^{b-x_0} |\ln \eta|^{2-\alpha} d\eta;\end{aligned}$$

fazendo $T = \max\{x_0 - a, b - x_0\}$, vem

$$\int_a^b |\ln|x_0 - \xi||^{2-\alpha} d\xi \leq 2 \int_0^T |\ln \eta|^{2-\alpha} d\eta = L_1(x_0, \alpha, \Omega).$$

Consideremos, agora, a outra integral. Seja $\eta = \xi - x$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left| \ln \frac{1}{|x-\xi|} \right|^{2-\alpha} d\xi &= \int_{a-x}^{b-x} \left| \ln \frac{1}{|\eta|} \right|^{2-\alpha} d\eta \\
&= \int_0^{x-a} \left| \ln \frac{1}{\eta} \right|^{2-\alpha} d\eta + \int_0^{b-x} \left| \ln \frac{1}{\eta} \right|^{2-\alpha} d\eta \\
&\leq 2 \int_0^{b-a} \left| \ln \frac{1}{\eta} \right|^{2-\alpha} d\eta.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{\eta \to 0} \eta^{\frac{1}{2}} \ln \dfrac{1}{\eta} = 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $0 < \eta < \epsilon$,

$$\left| \ln \frac{1}{\eta} \right| \leq \eta^{-\frac{1}{2}}$$

Portanto,

$$\int_a^b \left| \ln \frac{1}{|x-\xi|} \right|^{2-\alpha} \leq 2 \int_0^{\epsilon} \left| \eta^{-1+\frac{\alpha}{2}} \right|^{2-\alpha} d\eta + 2 \int_{\epsilon}^{b-a} \left| \ln \frac{1}{\eta} \right|^{2-\alpha} d\eta = L_2(\alpha, \Omega).$$

Desse modo,

$$\int_{\Omega} |N(x,\xi)|^{2-\alpha} d\Omega \leq |C_1|^{2-\alpha} C_\alpha (L_1 + L_2) = L_3^{2-\alpha}(x_0, \alpha, \Omega) < \infty.$$

Consideremos agora, o caso de contato pontual ($n = 2$). Temos

$$N(x, y, \xi, \eta) = C_2 \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}.$$

Verifiquemos que $N(x,y,\xi,\eta) \in L^{2-\alpha}(\Omega)$, $\forall (x,y) \in \overline{\Omega}$. Consideremos a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned}
r \cos\theta &= x - \xi \\
r \operatorname{sen}\theta &= y - \eta
\end{aligned}$$

e seja $R(x,y) = \sup_{(\xi,\eta) \in \partial\Omega} \|(x,y) - (\xi,\eta)\|_2$, com $\|\cdot\|_2$, a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Valem então:

$$R(x,y) = \max_{(\xi,\eta)\in\overline{\Omega}} \|(x,y)-(\xi,\eta)\|_2,$$

$$\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(r,\theta)}\right| = r.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |N(x,y,\xi,\eta)|^{2-\alpha} d\xi d\eta$$
$$\leq \begin{cases} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R(x,y)} C_2^{2-\alpha} \dfrac{r}{r^{2-\alpha}} dr = \dfrac{C_2^{2-\alpha}}{\alpha} \int_0^{2\pi} R^\alpha(x,y) d\theta & \text{se } (x,y) \in \text{int}\Omega, \\ \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R(x,y)} C_2^{2-\alpha} \dfrac{r}{r^{2-\alpha}} dr = \dfrac{C_2^{2-\alpha}}{\alpha} \int_0^{\pi} R^\alpha(x,y) d\theta & \text{se } (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Como estas últimas intergrais são finitas, obtemos o resultado desejado.

Agora, pela Proposição 8 do Capítulo 1, $p \in L^q(\Omega)$, q conforme definido no enunciado, quer estejamos em $\Omega \subset \mathbb{R}$ (pelo caso $mp > n$ e $m = 1$, $p = 2$, $n = 1$, $j = 0$) ou em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (pelo caso $mp = n$ e $m = 1$, $p = 2$, $n = 2, j = 0$). Logo, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{cases} |h_1(p)(x)| \leq \|N(x,\xi)\|_{L^{2-\alpha}(\Omega)} \|p\|_{L^q} & \text{se } n = 1, \\ |h_1(p)(x,y)| \leq \|N(x,y,\xi,\eta)\|_{L^{2-\alpha}(\Omega)} \|p\|_{L^q} & \text{se } n = 2, \\ q = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2-\alpha}} = \dfrac{2-\alpha}{1-\alpha} > 2. \end{cases} \quad (9)$$

Resta ainda, no caso pontual, obtermos um limitante de $\|N(x,y,\xi,\eta)\|_{L^{2-\alpha}}$ independente de (x,y). Para tanto, usaremos a continuidade de $R(x,y)$ em $\overline{\Omega}$. Para verificá-la, consideremos uma sequência $(x_n,y_n) \subset \overline{\Omega}$ convergindo para (x,y) e $(\xi,\eta) \in \overline{\Omega}$. Temos

$$\|(x_n,y_n)-(\xi,\eta)\| \leq \|(x_n,y_n)-(x,y)\| + \|(x,y)-(\xi,\eta)\|.$$

Portanto,

$$R(x_n, y_n) = \max_{(\xi,\eta)\in\overline{\Omega}} \|(x_n, y_n) - (\xi, \eta)\| \leq \|(x_n, y_n) - (x, y)\| + R(x, y).$$

Analogamente,

$$\|(x, y) - (\xi, \eta)\| \leq \|(x_n, y_n) - (x, y)\| + \|(x_n, y_n) - (\xi, \eta)\|,$$

ou seja,

$$R(x, y) - \|(x_n, y_n) - (x, y)\| \leq R(x_n, y_n).$$

Logo, temos

$$R(x, y) - \|(x_n, y_n) - (x, y)\| \leq R(x_n, y_n) \leq \|(x_n, y_n) - (x, y)\| + R(x, y)$$

e, portanto, $R(x, y)$ é contínua em $\overline{\Omega}$ pois

$$\lim_{n\to\infty} R(x_n, y_n) = R(x, y)$$

Se denotarmos $M_K = \left(\frac{2\Pi C_2}{\alpha} \max\{R^\alpha(x, y),\ (x, y) \in \overline{\Omega}\}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ para o caso pontual e $M_K = L_3$, para contato ao longo de uma linha, teremos

$$\|h_1(p)\|_{L,\infty} = \max_{\overline{\Omega}} |h_1(p)| \leq M_K \|p\|_{L,q}$$

■

Lema 2 *O operador A definido na equação (4) é um operador de $V(= H_0^1(\Omega))$ em V^* limitado.*

Prova: Temos, pelo Teorema de Green,

$$\langle Ap, q\rangle_{V\times V^*} = \int_\Omega \left[H^3(p)\nabla p \cdot \nabla q - 6\mu U h_1(p)\frac{\partial q}{\partial x}\right] d\Omega.$$

Denotemos

$$M_U = \max_{\overline{\Omega}} |U|,\ M_h = \max_{\overline{\Omega}} |h| \tag{10}$$

Então, em virtude de (7) e (10) temos

$$\max_{\overline{\Omega}} |H(p)| = \max_{\overline{\Omega}} |h + h_1(p)| \leq M_h + M_K \|p\|_{L^q}.$$

Temos também,

$$\begin{aligned} |\langle Ap, q\rangle| &\leq (M_h + M_K\|p\|_{L^q})^3 \int_\Omega |\nabla p \cdot \nabla q| d\Omega + 6\mu M_U M_K \|p\|_{L^q} \int_\Omega \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| d\Omega \\ &\leq (M_h + M_K\|p\|_{L^q})^3 \|p\|_{H^1} \|q\|_{H^1} + 6\mu M_U M_K \|p\|_{L^q} C_\Omega \|q\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\|Ap\|_{V^*} \leq (M_h + M_K\|p\|_{L^q})^3 \|p\|_{H^1} + 6\mu M_U M_K C_\Omega \|p\|_{L^q}.$$

Conforme a Proposição 8 do Capítulo 1, $H^1(\Omega)$ está imerso em $L^q(\Omega)$ quer estejamos em $\Omega \subset \mathbb{R}$ ou em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Então , $\exists C_0 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq C_0 \|u\|_{H^1}, \ \forall u \in H^1(\Omega) \tag{11}$$

Portanto,

$$\|Ap\|_{V^*} \leq (M_h + C_0 M_K \|p\|_{H^1})^3 \|p\|_{H^1} + 6\mu C_\Omega C_0 M_U M_K \|p\|_{H_1}.$$

Ou seja, A leva conjuntos limitados de K em conjuntos limitados de V^*. Logo, A é limitado.

■

Lema 3 *O operador A definido em (4) é coercivo (com $v_0 = 0 \in K$) no caso de contato pontual (mancal esférico, $n = 2$).*

Prova: Para o caso de contato pontual, temos $h_1(v) \geq 0, \ \forall v \in K$, portanto,

$H(v) \geq h_0, \ \forall v \in K$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
\langle Av, v\rangle &= \int_\Omega \left[H^3(v)|\nabla v|^2 - 6\mu U h_1(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] d\Omega \\
&= \int_\Omega \left[hH^2(v)|\nabla v|^2 + h_1(v)\left(H^2(v)|\nabla v|^2 - 6\mu U\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] d\Omega \\
&\geq h_0^3 C'\|v\|_{H^1}^2 + \int_\Omega h_1(v)|\nabla v|\left[h_0^2|\nabla v| - 6\mu M_U\right] d\Omega. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Acima, utilizamos a desigualdade de Poincaré

$$\exists \overline{C} > 0, \ \|v\|_{L^2}^2 \leq \overline{C}\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad (13)$$

que implica

$$\|v\|_{H^1}^2 \leq (1+\overline{C})\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega, \ C' = \frac{1}{1+\overline{C}}.$$

Sejam

$$\Omega_m = \left\{(x,y) \in \Omega; \ |\nabla v| \leq \frac{6\mu M_U}{h_0^2}\right\} \subset \Omega$$

e $\Omega_M = \Omega - \Omega_m$. O integrando na equação (12) é positivo em Ω_M e negativo em Ω_m. Então, usando

$$\begin{aligned}
\langle Av, v\rangle &\geq C' h_0^3\|v\|_{H^1}^2 - 6\mu M_U\int_{\Omega_m} h_1(v)|\nabla v| d\Omega_m \\
&\geq C' h_0^3\|v\|_{H^1}^2 - 6\mu M_U\frac{6\mu M_U}{h_0^2}\int_{\Omega_m} h_1(v) d\Omega_m \\
&\geq C' h_0^3\|v\|_{H^1}^2 - \left(\frac{6\mu M_U}{h_0}\right)^2 \text{meas}(\Omega_m) M_K\|v\|_{L^q} \\
&\geq C' h_0^3\|v\|_{H^1}^2 - \left(\frac{6\mu M_U}{h_0}\right)^2 C_0 M_K \text{meas}(\Omega)\|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} \to \infty \text{ quando } \|v\| \to \infty.$$

■

Observação: A grande dificuldade para repetir o argumento da demonstração anterior para o caso de contato ao longo de uma linha vem do fato de não termos, neste caso, um limitante inferior em Ω para $h_1(v)$ independente de $v \in K$ como ocorre no caso de contato pontual ($h_1(v) \geq 0, \ \ \forall v \in K$).

Isto pode ser verificado se considerarmos intervalos $J \subset I \subset \Omega = (a, b)$ com J estritamente contido em I e este contido em (x_0, b) e a sequência de funções $(v_n) \subset K$ com as seguintes propriedades: o suporte de cada v_n está contido no intervalo I e cada função v_n é constante e igual a n quando restrita ao intervalo J.

Seja $L = (c, d) \subset (a, x_0)$. Para todo $x \in L$ e $\xi \in I$, temos

$$\ln \frac{|x_0 - \xi|}{|x - \xi|} = \ln \frac{|x_0 - \xi|}{|x - x_0| + |x_0 - \xi|} < -\beta$$

onde $\beta > 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} h_1(v_n)(x) &= C_1 \int_\Omega \ln \frac{|x_0 - \xi|}{|x - \xi|} v_n(\xi) d\xi \\ &= C_1 \int_I \ln \frac{|x_0 - \xi|}{|x - \xi|} v_n(\xi) d\xi. \\ &\leq C_1 \int_J \ln \frac{|x_0 - \xi|}{|x - \xi|} v_n(\xi) d\xi \\ &\leq -C_1 \beta n \text{meas}(J). \end{aligned}$$

Como β é positivo, concluímos que não existe limitante inferior para h_1 em Ω independente de $v \in K$.

Se tivermos a garantia de existência de solução para o Problema (3) para casos em que K é limitado, a existência de solução para conjuntos K não limitados também estará garantida se o operador $\tilde{A}$ satisfizer a condição **F**. Veremos no lema abaixo que em alguns casos $\tilde{A}$ satisfaz tal condição.

Lema 4 *Se existir* $\epsilon \in (0,1)$ *tal que* $\dfrac{6\mu M_U M_K C_0}{C' h_0^4} meas(\Omega)^{\frac{1}{2}} < \dfrac{\epsilon(1-\epsilon)^3}{M_h + \epsilon h_0}$, *com* $M_h = \max_{\overline{\Omega}} |h|$ *e as outras constantes definidas como anteriormente, então o operador* $\tilde{A}$ *satisfaz a condição* **F** *(com* $v_0 = 0 \in K$*) no caso de contato ao longo de uma linha (mancal cilíndrico,* $n = 1$*).*

Prova: Tomemos $r = \dfrac{\epsilon h_0}{M_K C_0}$. Para todo $v \in K$ tal que $||v||_{H^1} = r$ temos, por (7) e (11),

$$|h_1(v)| \leq M_K \|v\|_{L^q} \leq M_K C_0 \|v\|_{H^1} = \epsilon h_0,$$

o que implica

$$H(v) = h + h_1(v) \geq h_0 - \epsilon h_0 = (1-\epsilon) h_0, \tag{14}$$

$$|H(v)| \leq M_h + \epsilon h_0. \tag{15}$$

Para tal ϵ, da condição expressa no enunciado, obtemos

$$\|v\|_{H^1} = r = \frac{\epsilon h_0}{M_K C_0} > \frac{6\mu M_U (M_h + \epsilon h_0)}{C'(1-\epsilon)^3 h_0^3} \text{meas}(\Omega)^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Com um argumento análogo ao apresentado no Lema 2, obtemos

$$\langle \tilde{A}v, v \rangle = \int_\Omega \left[H^3(v) |\nabla v|^2 - 6\mu U H(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] d\Omega.$$

Por (14), (16) e pela desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{A}v, v \rangle &\geq (1-\epsilon)^3 h_0^3 C' \|v\|_{H^1}^2 - \int_\Omega 6\mu M_U (M_h + \epsilon h_0) |\nabla v| d\Omega \\
&\geq (1-\epsilon)^3 h_0^3 C' \|v\|_{H^1}^2 - 6\mu M_U (M_h + \epsilon h_0) \|v\|_{H^1} \text{meas}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \\
&= (1-\epsilon)^3 h_0^3 C' \|v\|_{H^1} \left(\|v\|_{H^1} - \frac{6\mu M_U (M_h + \epsilon h_0) \text{meas}(\Omega)^{\frac{1}{2}}}{C'(1-\epsilon)^3 h_0^3} \right) > 0,
\end{aligned}$$

e A satisfaz a condição **F** com $v_0 = 0 \in K$.

■

Observação: note que a condição expressa no Lema 4 é em particular verdadeira para fluidos com viscosidade μ suficientemente baixa.

Lema 5 *No caso de contato pontual, para todo $u, v \in V$ tais que $\|u\|_{H^1}, \|v\|_{H^1} \leq \eta$, $\eta > 0$ uma constante arbitrária, existe uma constante $C > 0$, que depende de η, tal que*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq C' h_0^3 \|u - v\|_{H^1}^2 - C \|u - v\|_{L^q} \|u - v\|_{H^1} \tag{17}$$

com $q = \dfrac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)} > 2,\ 0 < \alpha < 1.$

Prova: Para contato pontual, temos

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \left[H^3(u)\nabla u \nabla(u-v) - H^3(v)\nabla v\nabla(u-v)\right] \\
&\quad + \left[6\mu\frac{\partial U h_1(u-v)}{\partial x}\right](u-v)d\Omega \\
&= \int_\Omega \Big[H^3(u)\nabla u\nabla(u-v) - H^3(v)\nabla v\nabla(u-v) \\
&\quad -6\mu U h_1(u-v)\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\Big] d\Omega \\
&= \int_\Omega \Big[H^3(u)\nabla(u-v)\nabla(u-v) + (H^3(u) - H^3(v))\nabla v\nabla(u-v) \\
&\quad - 6\mu U h_1(u-v)\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\Big] d\Omega,
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle \geq C' h_0^3 \|u-v\|^2_{H^1} &+ \int_\Omega (H(u) - H(v))\big[H^2(u) + H(u)H(v) \\
&+ H^2(v)\big]\nabla v\nabla(u-v) - 6\mu U h_1(u-v)\frac{\partial(u-v)}{\partial x}d\Omega
\end{aligned}$$

por (7), (10) e $\int 6\mu U h_1(u-v)\dfrac{\partial(u-v)}{\partial x}d\Omega \leq 6\mu M_U M_K \|u-v\|_{L^q}\int_\Omega \dfrac{\partial(u-v)}{\partial x}d\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\geq C' h_0^3\|u-v\|^2_{H^1} + \int_\Omega (H(u) - H(v))\big[H^2(u) + H(u)H(v) \\
&\quad + H^2(v)\big]\nabla v\nabla(u-v)d\Omega \\
&\quad - 6\mu M_U M_K \|u-v\|_{L^q}\int_\Omega \left|\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right| d\Omega.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle \geq C' h_0^3\|u-v\|^2_{H^1} &- M_K\|u-v\|_{L^q} 2\big[(M_h + M_K\|u\|_{L^q})^2 \\
&+ (M_h + M_K\|v\|_{L^q})^2\big]\|v\|_{H^1}\|u-v\|_{H^1} \\
&- 6\mu M_U M_K\|u-v\|_{L^q} C_\Omega \|u-v\|_{H^1} \qquad (18)
\end{aligned}$$

A última desigualde foi obtida utilizando Hölder, (7),

$$H(u) - H(v) = h + h_1(u) - h - h_1(v) = h_1(u-v),$$

o fato de $-H(u)H(v) \leq \dfrac{H^2(u)+H^2(v)}{2}$ implicar

$$(H^2(u) + H(u)H(v) + H^2(v)) \geq -\frac{3}{2}(H^2(u) + H^2(v))$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (H(u) - H(v))(H^2(u) + H(u)H(v) + H^2(v))\nabla v \nabla(u-v)d\Omega \\
&\qquad = \int_\Omega h_1(u-v)(H^2(u) + H(u)H(v) + H^2(v))\nabla v \nabla(u-v)d\Omega \\
&\qquad \geq -2M_K\|u-v\|_{L^q} \int_\Omega (H^2(u) + H^2(v))\nabla v \nabla(u-v)d\Omega
\end{aligned}$$

Como $\|u\|_{H^1}, \|u\|_{H^1} \leq \eta$, obtemos

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq C'h_0^3\|u-v\|_{H^1}^2 - C(\eta, M_U, M_K, M_h, \Omega)\|u-v\|_{H^1}\|u-v\|_{L^q}$$

■

O resultado do Lema 5 será utilizado na demonstração de que o operador A é pseudomonótono no caso de contato pontual. Lá utilizaremos o fato do termo negativo presente no lado direito de (17) convergir para zero quando u tende para v em L^q.

No caso de contato ao longo de uma linha ($n = 1$) pelo fato de não termos a garantia de que $H(u)$ seja limitado inferiormente por uma constante positiva, não obteremos o mesmo resultado. Por um argumento análogo ao utilizado no Lema 3, obteríamos apenas o seguinte resultado para $\|u\|_{H^1}, \|v\|_{H^1} \leq \eta$:

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle \geq\ & C'\alpha^3\|u-v\|_{H^1(\Omega_{H^+})}^2 - (M_h + M_K C_0\eta)^3\|u-v\|_{H^1(\Omega_{H^-})}^2 \\
& - C(\eta, M_U, M_K, M_h, \Omega)\|u-v\|_{H^1}\|u-v\|_{L^q}
\end{aligned}$$

com $\Omega_{H^+} = \{x \in \Omega;\ H(u) \geq \alpha,\ \alpha > 0\}$ e $\Omega_{H^-} = \{x \in \Omega;\ H(u) < 0\}$.

Como não podemos controlar o termo $-(M_h + M_K C_0 \eta)^3 \|u - v\|^2_{H^1(\Omega_{H-})}$ em função de $\|u - v\|_{L^q}$, não poderemos repetir o argumento que será utilizado na demonstração do Lema 8 para este caso.

Definição 6 *Sejam X um espaço de Banach, X^*, seu dual topológico e um operador $A : X \to X^*$. Dizemos que A é **hemicontínuo** se e somente se, a função real*

$$t \longmapsto \langle A(u + tv), w \rangle$$

é contínua em $[0, 1]$ para todo $u, v, w \in X$.

Lema 7 *A é hemicontínuo, ou seja, para $\forall\, u, v, w \in V$, $t > 0$,*

$$\lim_{t \to 0^+} \langle A(u + tv), w \rangle = \langle Au, w \rangle \tag{19}$$

Prova: Sabemos que

$$\langle A(u + tv), w \rangle = \int_\Omega \left[H^3(u + tv) \nabla(u + tv) \cdot \nabla w - 6\mu U h_1(u + tv) \frac{\partial w}{\partial x} \right] d\Omega.$$

Observemos inicialmente que para $t \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned} &|H^3(u + tv) \nabla(u + tv) \cdot \nabla w| \leq \\ &\qquad [M_h + M_K C_0(\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1})]^3 (|\nabla u \cdot \nabla w| + |\nabla v \cdot \nabla w|) = g_1 \end{aligned}$$

e

$$6\mu \left| U h_1(u + tv) \frac{\partial w}{\partial x} \right| \leq 6\mu M_U M_K C_0(\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}) |\nabla w| = g_2.$$

sendo as constantes conforme definidas anteriormente.

Como $u, v, w \in H^1_0(\Omega)$ e Ω tem medida finita, $g = (g_1 + g_2) \in L^1(\Omega)$. Além disso, para quase todo $x \in \Omega$ (se $n = 1$) ou para quase todo $(x, y) \in \Omega$ (se $n = 2$),

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to 0^+} \left[H^3(u + tv) \nabla(u + tv) \cdot \nabla w - 6\mu U h_1(u + tv) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ &\qquad\qquad = H^3(u) \nabla u \cdot \nabla w - 6\mu U h_1(u) \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando o limite (v. [2], p. 45), temos

$$\lim_{t \to 0^+} \langle A(u + tv), w \rangle = \int_\Omega \left[H^3(u) \nabla u \cdot \nabla w - 6\mu U h_1(u) \frac{\partial w}{\partial x} \right] d\Omega = \langle Au, w \rangle.$$

$\blacksquare$

Lema 8 *O operador A é pseudomonótono no caso de contato pontual (mancal esférico, $n = 2$).*

Prova: De acordo com a definição de operador pseudomonótono, precisamos provar que para toda sequência $(u_n) \subset K$ que converge na topologia fraca para $u \in K$ e tal que

$$\limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0,$$

temos

$$\liminf \langle Au_n, u_n - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle, \; \forall \, v \in V.$$

Observemos, inicialmente, que se $u_n \xrightarrow{\omega} u$ em $V = H_0^1(\Omega)$, (u_n) é limitada em V. Seja η tal que $\|u_n\|_{H^1} \leq \eta$ e $\|u\|_{H^1} < \eta$. Por (17), para contato pontual, temos

$$\langle Au_n, u_n - u \rangle \geq \langle Au, u_n - u \rangle - C\|u_n - u\|_{L^q}\|u_n - u\|_{H^1} \tag{20}$$

De acordo com a Proposição 8 do Capítulo 1, sabemos que H^1 está contido de forma densa e compacta em L^q. Portanto, $u_n \longrightarrow u$ em L^q.

De fato, como (u_n) é limitada e H^1 está contido de forma densa e compacta em L^q, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $v \in L^q$ tais que

$$u_{n_k} \longrightarrow v \text{ em } L^q.$$

Como $u_n \xrightarrow{\omega} u$ implica $u_{n_k} \xrightarrow{\omega} u$ em H^1 e pelo fato de H^1 estar contido de forma densa e compacta em L^q fazer com que $(L^q)^* \subset (H^1)^*$, temos $u = v$, ou seja, o único ponto de aderência da sequência (u_n) em L^q é u. Portanto,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^q.$$

Logo, a partir de (20), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq \limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle &\geq \liminf \langle Au_n, u_n - u \rangle \\ &\geq \liminf [\langle Au, u_n - u \rangle - C\|u_n - u\|_{L^q}\|u_n - u\|_{H^1}] = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0 \tag{21}$$

Para $\forall w \in V$, temos

$$\begin{aligned}
\langle Au_n - Aw, u_n - w\rangle &= \int_\Omega H^3(u_n)\nabla(u_n - w)\nabla(u_n - w) + \left[H^3(u_n) - H^3(w)\right]\nabla w\nabla(u_n - w) \\
&\quad - 6\mu U h_1(u_n - w)\frac{\partial(u_n - w)}{\partial x} d\Omega \\
&\geq \int_\Omega (H(u_n) - H(w))\left[H^2(u_n) + H(u_n)H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u_n - w) \\
&\quad - 6\mu U h_1(u_n - w)\frac{\partial(u_n - w)}{\partial x} d\Omega \\
&= \int_\Omega (h_1(u_n - u) + h_1(u - w))\left[H^2(u_n) + H(u_n)H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u_n - w) \\
&\quad - 6\mu U[h_1(u_n - u) + h_1(u - w)]\left(\frac{\partial(u_n - w)}{\partial x}\right) d\Omega \\
&= \left[\int_\Omega h_1(u_n - u)\left[H^2(u_n) + H(u_n)H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u_n - w)\right. \\
&\quad \left. -6\mu U h_1(u_n - u)\left(\frac{\partial(u_n - w)}{\partial x}\right) d\Omega\right] \\
&\quad + \int_\Omega h_1(u - w)\left[H^2(u_n) + H(u_n)H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u_n - u) d\Omega \\
&\quad + \int_\Omega h_1(u - w)\left[H^2(u_n) + H(u_n)H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u - w) d\Omega \\
&\quad - \int_\Omega 6\mu U h_1(u - w)\left(\frac{\partial(u - w)}{\partial x}\right) d\Omega + \int_\Omega -6\mu U h_1(u - w)\left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial x}\right) d\Omega \\
&= I_1^{(n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_\Omega h_1(u - w)\left[(H(u) + h_1(u_n - u))^2 + (H(u) + h_1(u_n - u))H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u_n - u) d\Omega \\
&+ \int_\Omega h_1(u - w)\left[(H(u) + h_1(u_n - u))^2 + (H(u) + h_1(u_n - u))H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u - w) d\Omega \\
&\quad - \int_\Omega 6\mu U h_1(u - w)\left(\frac{\partial(u - w)}{\partial x}\right) d\Omega + I_5^{(n)} \\
&\quad = I_1^{(n)} + I_5^{(n)} + \int_\Omega h_1(u - w)\left[H^2(u) + H(u)H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u_n - u) d\Omega \\
&\qquad + \left[\int_\Omega h_1(u - w)\left[H^2(u) + H(u)H(w) + H^2(w)\right]\nabla w\nabla(u - w)\right. \\
&\qquad \left. - 6\mu U h_1(u - w)\left(\frac{\partial(u - w)}{\partial x}\right) d\Omega\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_\Omega h_1(u-w)\left[2H(u)h_1(u_n-u)+h_1^2(u_n-u)+h_1(u_n-u)H(w)\right]\nabla w\nabla(u_n-u)d\Omega\\
&+\int_\Omega h_1(u-w)\left[2H(u)h_1(u_n-u)+h_1^2(u_n-u)+h_1(u_n-u)H(w)\right]\nabla w\nabla(u-w)d\Omega\\
=\ & I_1^{(n)}+I_5^{(n)}+I_3^{(n)}+I_2^{(n)}\\
&+\int_\Omega h_1(u-w)\left[2H(u)h_1(u_n-u)+h_1^2(u_n-u)+h_1(u_n-u)H(w)\right]\nabla w\nabla(u_n-w)d\Omega\\
=\ & I_1^{(n)}+I_2^{(n)}+I_3^{(n)}+I_4^{(n)}+I_5^{(n)}.
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
I_1^{(n)} &= \int_\Omega h_1(u_n-u)\left[(H^2(u_n)+H(u_n)H(w)+H^2(w))\nabla w\nabla(u_n-w)-6\mu U\frac{\partial(u_n-w)}{\partial x}\right]d\Omega\\
I_2^{(n)} &= \int_\Omega \left[h_1(u-w)(H^2(u)+H(u)H(w)+H^2(w))\nabla w\nabla(u-w)-6\mu U h_1(u-w)\frac{\partial(u-w)}{\partial x}\right]d\Omega\\
I_3^{(n)} &= \int_\Omega h_1(u-w)(H^2(u)+H(u)H(w)+H^2(w))\nabla w\nabla(u_n-u)d\Omega\\
I_4^{(n)} &= \int_\Omega h_1(u-w)h_1(u_n-u)\left[2H(u)+h_1(u_n-u)+H(w)\right]\nabla w\cdot\nabla(u_n-w)d\Omega\\
I_5^{(n)} &= \int_\Omega -6\mu U h_1(u-w)\frac{\partial(u_n-u)}{\partial x}d\Omega
\end{aligned}
$$

Como por (7), $\max_{\overline{\Omega}}|h_1(u_n-u)|\le M_K\|u_n-u\|_{L^q}$ e como $u_n\to u$ em L^q, temos $I_1^{(n)}\to 0$ e $I_4^{(n)}\to 0$ devido a limitação dos demais termos envolvidos em suas definições.
Temos também, devido ao fato de $u_n\xrightarrow{\omega} u$ em H^1,

$$
\begin{aligned}
I_3^{(n)} &= \langle -\nabla(\cdots),u_n-u\rangle\longrightarrow 0\\
I_5^{(n)} &= \langle 6\mu\frac{\partial(Uh_1(u-w))}{\partial x},u_n-u\rangle\to 0.
\end{aligned}
$$

Logo, de modo análogo ao utilizado na obtenção de (18),

$$
\liminf\langle Au_n-Aw,u_n-w\rangle\ge\liminf I_2^{(n)}\ge -C(\eta,M_U,M_h,M_K,\Omega)\|u-w\|_{L^q}\|u-w\|_{H^1}. \tag{22}
$$

A partir de (21) e (22), temos

$$\begin{aligned}\liminf\langle Au_n, u-w\rangle &= \liminf\langle Au_n, u_n - w\rangle \\ &\geq \langle Aw, u-w\rangle - C\|u-w\|_{L^q}\|u-w\|_{H^1}.\end{aligned} \tag{23}$$

Para $v \in V$, seja $w = u + \theta(v-u)$, com θ escolhido entre 0 e 1 e tal que $\|w\| \leq \eta$ (tal escolha é sempre possível, pois $\|u\|$ é estritamente menor do que η). Desse modo, substituindo w em (23),

$$\liminf\langle Au_n, \theta(u-v)\rangle \geq \langle A(u+\theta(v-u)), \theta(u-v)\rangle - C\theta^2\|u-v\|_{L^q}\|u-v\|_{H^1}.$$

Dividindo os dois lados por θ e fazendo $\theta \to 0$, obteremos, usando também (19), o resultado desejado:

$$\liminf\langle Au_n, u-v\rangle \geq \langle Au, u-v\rangle, \quad \forall v \in V.$$

■

2 Relacionamento com o Problema Original

Precisamos, agora, determinar em que sentido uma solução do Problema variacional (3) é também solução do Problema original definido em (5) no Capítulo 3. A discussão apresentada a seguir é válida tanto para o contato ao longo de uma linha (mancal cilíndrico, $n = 1$) como para o contato pontual (mancal esférico, $n = 2$).

Proposição 9 *Suponha que exista uma solução $p \in K = \{v \in V = H_0^1(\Omega) \mid v \geq 0 \quad q.t.p \text{ em } \quad \Omega\}$ para o Problema (3). Então, p é uma solução do Problema (5), Capítulo 3 no sentido de distribuições; ou seja, $p \geq 0$ em Ω no sentido de $H^1(\Omega)$, $Ap - f = 0$ no sentido de distribuições em Ω_1, $p = 0$ formalmente em Ω_0 e $p > 0$ em Ω_1 no sentido de $H^1(\Omega)$ $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0)$.*

Prova: Denotemos por $\Omega_1 = \{z \in \Omega;\ p(z) > 0 \text{ no sentido de } H^1(\Omega)\}$ e $\Omega_0 = \Omega - \Omega_1$ e consideremos $z_0 \in \Omega_1$.

Como $p(z_0) > 0$ no sentido de $H^1(\Omega)$, $\exists\, B_\rho(z_0)$ e $\varphi \in H_0^{1,\infty}(B_\rho(z_0))$ tal que $\varphi \geq 0$, $\varphi(z_0) > 0$ e $p - \varphi \geq 0$ em $B_\rho(z_0)$ no sentido de $H^1(\Omega)$.

Pelo fato de $\varphi(z_0) > 0$ e $\varphi \in H_0^{1,\infty}(B_\rho(z_0))$, existe $0 < \delta < \rho$ tal que $m = \inf_{z \in B_\delta(z_0)} \varphi(z) > 0$. Portanto, para toda $\zeta \in C_0^\infty(B_\delta(z_0))$, podemos encontrar um $\varepsilon > 0$ tal que

$$p + \varepsilon\zeta \geq 0 \text{ em } B_\delta(z_0) \text{ no sentido de } H^1(\Omega). \tag{24}$$

Para tanto, basta escolhermos $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}\frac{m}{M}$$

com $M > 0$ e $M \geq |\inf_{z \in B_\delta(z_0)} \zeta(z)|$.

De fato, como $p - \varphi \geq 0$ em $B_\rho(z_0)$ no sentido de $H^1(\Omega)$, existe uma sequência $(u_n) \subset H^{1,\infty}(\Omega)$, $u_n \geq 0$ em $B_\rho(z_0)$ e $u_n \longrightarrow p - \varphi$ em $H^1(\Omega)$.

Tomando $v_n = u_n + \varphi + \varepsilon\zeta$, temos

$$v_n \in H^{1,\infty}(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \longrightarrow p + \varepsilon\zeta \text{ em } H^1(\Omega)$$

Para provar que $p + \varepsilon\zeta \geq 0$ em $B_\delta(z_0)$ no sentido de $H^1(\Omega)$, resta mostrar que $v_n \geq 0$ em $B_\delta(z_0)$. Para tanto, como $u_n \geq 0$ em $B_\rho(z_0)$, basta garantirmos que $\varphi + \varepsilon\zeta \geq 0$ em $B_\delta(z_0)$. Seja $z \in B_\delta(z_0)$, se $\zeta(z) \geq 0$, não há o que demonstrar; se $\zeta(z) < 0$, temos

$$\varphi(z) + \varepsilon\zeta(z) \geq m - \varepsilon M \geq m - \frac{1}{2}\frac{m}{M}M \geq 0$$

Desse modo, pela Proposição 13 do Capítulo 1, $q = p + \varepsilon\zeta \in K$ uma vez que temos $q \geq 0$ q.t.p. em $B_\delta(z_0)$ e $q = p \geq 0$ q.t.p. em $\Omega - B_\delta(z_0)$. Substituindo q na desigualdade variacional e dividindo por ε, obtemos:

$$\langle Ap - f, \zeta \rangle \geq 0, \ \forall \zeta \in C_0^\infty(B_\delta(z_0))$$

como tal desigualdade vale para $-\zeta$, temos

$$\langle Ap - f, \zeta \rangle = 0, \text{ em } C_0^\infty(B_\delta(z_0)).$$

Seja β_z, $z \in \Omega_1$ uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta de Ω_1 formada pelas bolas $B_\delta(z)$, $z \in \Omega_1$. Consideremos $\gamma \in C_0^\infty(\Omega_1)$ e sejam $\alpha_z = \beta_z\gamma$, $z \in \Omega_1$.
Por construção, $\alpha_z \in C_0^\infty(B_\delta(w(z)))$, para algum $w \in \Omega_1$. Logo,

$$\langle Ap - f, \alpha_z \rangle = 0, \ \forall z \in \Omega_1$$

Como o suporte de γ é um compacto contido em Ω_1, temos

$$\gamma = \sum_{z \in \Omega_1} \alpha_z = \sum_{1}^{r} \alpha_{z_r}, \ z_r \in \Omega_1 \ \text{ e } \ r \ \text{ um número natural.}$$

Portanto,

$$\langle Ap - f, \gamma \rangle = \langle Ap - f, \sum_{1}^{r} \alpha_{z_r} \rangle = \sum_{1}^{r} \langle Ap - f, \alpha_{z_r} \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle Ap - f, \gamma \rangle = 0, \ \ \forall \gamma \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

e temos, formalmente,

$$p = 0 \ \text{ em } \Omega_0$$

■

3 Unicidade

Nesta seção discutiremos brevemente em que condições poderíamos ter unicidade de solução do Problema variacional (3).

No caso de contato pontual, ficou estabelecida a existência de solução para o Problema (3). Pelo Lema 6, sabemos que, dada uma solução $u_1 \in K$ do Problema (3), qualquer outra solução dele tem norma em V limitada por $\|u_1\|_{H^1} + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ arbitrário. Se tomarmos $\eta = \|u_1\|_{H^1} + \varepsilon$ e aplicarmos (11) em (17), obtemos para todos $u, v \in K$ que satisfaçam $\|u\|_{H^1}, \|v\|_{H^1} \leq \eta$,

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq (C' h_0^3 - CC_0) \|u - v\|_{H^1}^2. \tag{25}$$

A constante C é função de η. Se tivermos uma estimativa a priori da norma de alguma solução do Problema (3) e ela for tal que, para algum η como definido no parágrafo anterior, tenhamos $\alpha = C' h_0^3 - CC_0 > 0$, poderemos garantir a unicidade de solução para o Problema (3).

De fato, suponhamos $\alpha > 0$. Sejam $u_1, u_2 \in K$ soluções do Problema (3), temos

$$\langle \tilde{A}u_1, v - u_1 \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K,$$
$$\langle \tilde{A}u_2, v - u_2 \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

Tomemos $v = u_2 (v = u_1)$ na primeira desigualdade acima (respectivamente na segunda) e somemos. Temos

$$\langle \tilde{A}u_1 - \tilde{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0.$$

Portanto, por (25) e $\alpha > 0$, $u_1 = u_2$.

Apesar de termos obtido para o caso de contato ao longo de uma linha a desigualdade

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq C'\alpha^3 \|u-v\|^2_{H^1(\Omega_{H^+})} - C(\eta, M_U, M_K, M_h, \Omega)\|u-v\|_{H^1} \|u-v\|_{L^q},$$

não foi possível desenvolvê-la de modo análogo ao caso de contato pontual para obtermos uma desigualdade como em (25). Por isso, não discutiremos unicidade no caso do mancal cilíndrico.

Observação: Em muitos casos, a espessura mínima do filme na ausência de deformação elástica, h_0, é grande o suficiente para garantir $\alpha > 0$. Quando $\alpha \leq 0$, nada podemos afirmar a respeito da unicidade.

Bibliografia

[1] R. A. ADAMS, "Sobolev Spaces", Academic Press, 1975.

[2] R. G. BARTLE, "The Elements of Integration and Lebesgue Measure", John Wiley & Sons, 1995.

[3] G. K. BATCHELOR, "An introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, 1967.

[4] J. DURANY E C. VASQUEZ, "Mathematical Analysis of an Elastohydrodynamic Lubrication Problem with Cavitation", *Applicable Analysis*, **53**, 135-142, 1994.

[5] D. KINDERLEHRER E G. STAMPACCHIA, "An Introduction to Variational Inequalities and their Applications", Academic Press, 1980.

[6] R. S. KUBRUSLY, "Introdução ao Tratamento Variacional de Problemas de Fronteira Livre", IX Escola de Matemática Aplicada - LNCC–CNPq, 1993.

[7] J. L. LIONS,"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod, 1969

[8] L. A. MEDEIROS E P. H. RIVERA, "Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais", Textos de Métodos Matemáticos, **9**, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1975.

[9] J. T. ODEN E N. KIKUCHI, "Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media", *Int. J. Engng. Sci.*, **18**(10), 1173-1284, 1980.

[10] J. T. ODEN E S. R. WU, "Existence of solutions to the Reynolds equation of elastohydrodynamic lubrication", *Int. J. Engng. Sci.*, **23**(2), 207-215, 1985.

[11] E. ROFMAN. "Desigualdades Variacionales - Existencia y Aproximación de Soluciones" in *Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, **6**, Universidad Nacional de Rosário, 1977.

[12] S. R. WU E J. T. ODEN, "A note on some mathematical studies on elastohydrodynamic lubrication", *Int. J. Engng. Sci.*, **25**(6), 681-690, 1987.

[13] E. ZEIDLER, "Nonlinear Functional Analysis and its Applications", vol II/B e III, Springer Verlag, 1990 e 1985