

ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE DIVERSOS

TIPOS DE DERIVADA

ELIANA MARIA DO SACRAMENTO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

Campinas, março de 1979.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A DEUS

A MEUS PAIS

...

AGRADEÇO:

Ao prof. Ubiratan D'Ambrósio pela proposta do presente trabalho e orientação na elaboração do mesmo.

Aos meus pais, pelo incentivo e carinho, que muito me animaram; aos meus amigos que com apoio e dedicação me auxiliaram em muitos momentos, e aos professores amigos cujos ensinamentos muito me estimularam.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, que com o apoio financeiro tornou possível a realização deste trabalho.

Gostaria de agradecer a Deus, mas ainda que eu falasse a linguagem dos anjos e dos homens, ainda que eu tivesse o dom de profetizar e conhecesse todos os mistérios e toda a Ciência, ainda que tivesse a fé de maneira tal, que transporthasse os montes, ainda assim não conseguiria traduzir em palavras meus agradecimentos a Ele...

ÍNDICE

CAPÍTULO I - Introdução	ii
CAPÍTULO II- Algumas generalizações da noção de derivada	1
CAPÍTULO III- Relações entre derivada assintótica e as defini- das anteriormente.....	36
CAPÍTULO IV- Comentários finais.....	67
BIBLIOGRAFIA	70

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A teoria de derivação foi formalizada por Newton e Leibniz e logo começou a preocupação sobre que tipos de função admitiria tal conceito. Nesta época pensava-se que as funções contínuas sempre admitiam derivadas e que as funções deriváveis apresentavam derivadas de ordem superior. A partir do início do presente século tem-se perguntado se existe alguma categoria de função que apresenta derivada sempre ou ao menos em conjuntos bem determinados. O problema foi tomado por Ampère que em 1806 tentou, sem o sucesso esperado estabelecer diferenciabilidade para funções arbitrárias.

Durante o século XIX a Análise desenvolveu-se consideravelmente, mas parece que os matemáticos fugiam do problema da diferenciabilidade das funções. O mais importante resultado depois de muito tempo, foi devido a Weierstrass^[4] ; ele pôs fim às tentativas de estabelecer diferenciabilidade de funções arbitrárias, construindo por volta de 1861, uma função contínua sem derivada em nenhum ponto. Bolzano também obteve uma tal função em 1830, mas impossibilitado que estava de publicar, não foi de pronto conhecido seu intento. Em [11] temos o exemplo de B.L. van der Waerden, baseado no fato simples de que uma sequência infinita de inteiros só é convergente se seus termos se repetem a partir de um certo índice n .

Bem, a partir daí, funções contínuas sem derivada passaram

a ser rotina, que não era muito agradável aos analistas como podemos sentir numa carta que Ch. Hermite escreve à T.L. Stieljes:

"Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas des dérivées."

Mais tarde Lebesgue melhora bem a situação, quando demonstra que "toda função monótona possui derivada quase sempre".

Modificando um pouco a definição de derivada, tornando-a um pouco mais fraca, podemos melhorar os resultados conseguidos, como por exemplo, permitir que funções com "pontos de bico" admitam derivadas em tais pontos, ou ainda, derivar funções que são descontínuas em um ou mais pontos.

Por volta de 1915, Khintchine [5], discuti vários tipos de generalização de derivada, como: derivada simétrica, derivada média de Borel, derivada assintótica, derivada segunda de Schwarz, derivada generalizada, citando teoremas que as relacionam entre si e com a derivada usual. No mesmo estilo de trabalho, temos os artigos de Borel[1], e mais recentemente, Maisano[8], S. Valenti[9], citam tais generalizações, sendo que em [8], Maisano estuda uma generalização da derivada simétrica, a derivada pseudo simétrica já mencionada por De La Vallée Poussin em *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble. Classes de Baire* - Paris, Gauthier-Villars 1950.

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas generalizações do conceito de derivada e relações entre os mesmos. No caso da derivada simétrica, pseudo simétrica e média de Borel, foi feito um apanhado geral das propriedades, relacionando-as com a derivada comum e teoremas fundamentais do cálculo. Já no caso da derivada assintóti-

ca são apresentados vários teoremas que a relacionam com a derivada média e a usual, de modo que:

No segundo capítulo introduziremos a definição de derivada simétrica, pseudo simétrica, procurando dar suas principais propriedades e mostrando que o teorema de Rolle não vale necessariamente para ambas e que se uma função mensurável admite uma das duas derivadas, então ela admite derivada no sentido comum quase sempre. A seguir definimos a derivada média de Borel, citando rapidamente a derivada segunda de Schwarz, discutindo um exemplo mostrando que podemos ter duas funções com derivada média sem que o produto das mesmas o tenha. Finalmente apresentamos a derivada assintótica, dando uma série de resultados que relacionam esta derivada com a derivada média e a usual, demonstrando também que o teorema de Rolle vale para esta derivada.

Procuramos ainda, finalizando a dissertação, apresentar outros resultados sobre o assunto, bem como outros artigos a respeito do mesmo.

A fim de facilitar a leitura, vamos agora dar algumas das definições e resultados utilizados neste trabalho:

NÚMEROS DERIVADOS:

Quando uma função $f(x)$ não tem derivada e $x=x_0$ e nem as derivadas laterais, existem sempre os correspondentes limites de oscilação:

$$f^+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f^-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h}$$

$$f_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h}$$

onde $f^+(x_0)$ denota derivada superior à direita, $f_+(x_0)$ derivada inferior à direita, $f^-(x_0)$ derivada superior à esquerda e $f_-(x_0)$ derivada inferior à esquerda.

Chamamos estes limites de "os quatros números derivados".

CONJUNTO PERFEITO:

Diremos que um conjunto é perfeito se ele é fechado e denso em si mesmo.

DENSIDADE:

Seja $I=(a,b)$. Considere para x que pertence a I , o valor:

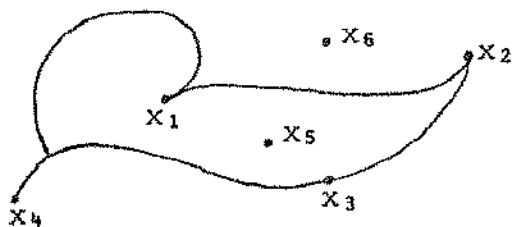
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap I|}{2\epsilon}, \text{ o que chamaremos "densidade de } x$$

em I ". O limite anterior pode ser reescrito assim:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m(I \cap (x-\epsilon, x+\epsilon))}{m((x-\epsilon, x+\epsilon))}$$

onde m denota a medida de Lebesgue. Chamaremos "densidade exterior" quando trocarmos m por m^* que denotará medida exterior.

Como ilustração, consideremos no plano o conjunto:



neste caso temos:

$$\text{dens}(B, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m(B \cap A_\epsilon(x))}{m(A_\epsilon(x))}$$

onde $A_\epsilon(x)$ denota a bola aberta centro x e raio ϵ , e temos assim:

$$\text{dens}(B, x_1) = 1$$

$$\text{dens}(B, x_4) = 0$$

$$\text{dens}(B, x_2) = 0$$

$$\text{dens}(B, x_5) = 1$$

$$\text{dens}(B, x_3) = \frac{1}{2}$$

$$\text{dens}(B, x_6) = 0$$

PONTO DE DENSIDADE:

Diremos que x é um ponto de densidade de A se

$$\text{dens}(A, x) = 1$$

PONTO DE BICO:

Diremos que x_0 é um ponto de bico de f se existirem finitas as derivadas laterais de f em x_0 , isto é, se

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < +\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h} < +\infty$$

Serão importantes no desenvolvimento deste trabalho alguns teoremas clássicos cujos resultados enunciaremos a seguir:

TEOREMA DE GRACE YOUNG:

Se $f(x)$ é uma função mensurável em E e se f satisfaz em E as seguintes desigualdades:

$f^+(x) \leq 0$ e $f^-(x) \leq 0$, então $f(x)$ tem uma derivada finita quase sempre em E . (veja [10]).

TEOREMA DE EGOROFF:

Se $f_n(x)$ é uma sequência de funções mensuráveis que convergem para f de valores reais, quase sempre em E de medida finita,

então dado $\eta > 0$, existe $A \subset E$, com $mA < \eta$ tal que $f_n(x)$ converge para f uniformemente em $E-A$.

CAPÍTULO II

ALGUMAS GENERALIZAÇÕES DA NOÇÃO DE DERIVADA.

Neste capítulo introduziremos o conceito de derivada simétrica, pseudo simétrica e a derivada média de Borel, citando rapidamente a derivada segunda de Schwartz. Procuraremos fazer um apanhado geral das principais propriedades do cálculo, relacionando estes conceitos com o de derivada comum. Aliás sempre que dissermos derivada comum de $f(x)$ em a , por exemplo, estamos falando da derivada usual,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \text{ que notaremos: } f'(a).$$

As funções consideradas serão de variável real, da reta na reta.

A derivada simétrica de $f(x)$ no ponto a será definida como:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \text{ desde que este limite exista.}$$

Notaremos tal derivada por $f'_s(a)$.

Se considerarmos $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a-h)-f(a+h)}{2h}$,

que seriam derivada simétrica à direita e à esquerda respectivamente, notamos que tais limites são iguais, donde podemos concluir que a existência da derivada simétrica à direita ou à esquerda implica na existência da derivada simétrica no ponto considerado.

Seja $f(x)=|x|$

Sabemos que $f'(0)$ não existe, embora f seja contínua na origem.

Calculemos $f'_s(0)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-h}{2h} = 0 \quad \text{portanto } f'_s(0)=0.$$

Observemos que 0 é um ponto de bico (veja na página vi) onde não existe derivada comum; notemos ainda que existem finitos, embora diferentes, a derivada comum à direita e à esquerda de f em zero.

$$\text{Seja agora } f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x=1 \\ -x+2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

O ponto $x=1$ é de descontinuidade, portanto não existe $f'(1)$. Por-

$$\text{outro lado } f'_s(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1+h)+2-(1-h)}{2h} = 0, \text{ ou}$$

seja, existe derivada simétrica no ponto $x=1$, embora a função seja descontínua neste ponto.

$$\text{Consideremos agora } f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

A função é descontínua na origem, portanto não existe derivada comum neste ponto. Percebemos também que a natureza da descontinuidade é diferente da do exemplo anterior e neste caso não existe derivada simétrica em zero pois

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} = \frac{0+1}{2h} = +\infty.$$

Se f é derivável em a no sentido comum, então existe derivada à direita e à esquerda no mesmo ponto e são iguais, ou seja,

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = f'(a)$$

Consideremos a semisoma de $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$, daí temos:

$$\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'_s(a)$$

portanto $f'_s(a) = \frac{1}{2} [f'_+(a) + f'_-(a)]$ ou seja,

Se f é derivável no sentido comum em a , então f admite derivada simétrica em a e ambas coincidem.

Neste caso as regras elementares de derivação e resultados conhecidos para derivada comum subsistem para derivada simétrica. Mais geralmente, se f é derivável no sentido comum em um intervalo ou conjunto, f também é derivável no sentido simétrico no mesmo conjunto ou intervalo considerado.

Como já vimos, existem funções que mesmo descontínuas em certos pontos, admitem derivada simétrica nos pontos em questão. Na verdade a existência da derivada simétrica de f em a não implica necessariamente que f seja contínua em a . Por outro lado, no caso de funções contínuas vale o seguinte :

Para a existência em a da derivada simétrica de uma função contínua, é necessário e suficiente que existam as derivadas no sentido comum à esquerda e à direita de a da função f , ainda mais, o valor de $f'_s(a)$ é a semisoma de $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$.

Com efeito,

Se existe a derivada simétrica de f em a , então existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)-f(a)+f(a)}{2h}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}$$

Se provarmos que estes dois últimos limites são finitos, teremos o resultado desejado. Ora, se um destes limites for infinito, a semi-soma:

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} \right] \text{ não tem sentido,}$$

o que nega a existência de $f'_s(a)$, portanto tais limites são finitos, como queríamos.

Sabemos que a continuidade de f não é suficiente para garantir a existência da derivada comum e os famosos pontos de bico são exemplos disto. Pelo que vimos, no caso da derivada simétrica, tais pontos admitem derivada.

As regras de derivação valem para derivada simétrica, mesmo no caso em que não existe a derivada comum, ou seja,

$$(f+g)'_s(x) = f'_s(x) + g'_s(x)$$

$$(fg)'_s(x) = f'_s(x)g(x) + g'_s(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_s(x) = \frac{f'_s(x)g(x) - f(x)g'_s(x)}{g(x)}$$

As demonstrações são análogas ao caso da derivada comum.

Observação: Se considerarmos uma função par, isto é, $f(-x)=f(x)$, e calcularmos a derivada simétrica na origem, temos:

$$f'_s(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} = 0$$

ou seja, a derivada simétrica de uma função par vale sempre zero na origem, sendo ela contínua ou não.

Vejamos qual o comportamento de uma função f se ela é contínua e admite derivada positiva em todo ponto de um intervalo considerado. Seja f tal função, x_1, x_2 dois pontos quaisquer de um intervalo considerado, digamos $x_1 < x_2$, suponhamos $f(x_1) = f(x_2)$ tomemos x_3 que pertence a (x_1, x_2) tal que $f(x_2) = f(x_1) \neq f(x_3)$ (observe que x_3 existe, pois caso contrário, f seria constante e $f'(x) = 0$ para qualquer x do intervalo.) então temos $f(x_1) > f(x_3)$ ou $f(x_3) > f(x_2)$ em ambos os casos, mediante um cálculo simples, chegamos a uma contradição com o fato da derivada simétrica ser positiva. Suponhamos então que $f(x_1) > f(x_2)$; consideremos a reta

$$y = \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)] \quad (1)$$

como f é contínua, existe entre x_1 e x_2 um ponto c tal que a curva $y = f(x)$ passa abaixo da reta (1) no intervalo (c, x_2) e em (x_1, c) acima da mesma reta, sendo que em c as duas linhas coincidem; tomemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}$$

este limite é negativo, donde a derivada simétrica de f em c é negativa, o que contraria a hipótese, então $f(x_1) < f(x_2)$, donde podemos concluir:

Uma função contínua é necessariamente crescente em um intervalo onde sua derivada simétrica é positiva. Um raciocínio análogo nos dá um resultado parecido para f decrescente.

Analisemos agora uma função cuja derivada simétrica é nula em todo ponto do intervalo (a,b) .

Sejam c e d dois pontos de (a,b) , digamos $f(c) \neq f(d)$, coloquemos para fixar idéias, $c < d$ e $f(c) < f(d)$

seja a função $\psi(x) = f(x) - \varepsilon(x-c)$ onde $0 < \varepsilon < \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$ (1)

considere $\psi(d) = f(d) - \varepsilon(d-c)$

$$\psi(d) > f(d) - \left[\frac{f(d)-f(c)}{d-c} \right] \cdot (d-c) \quad \text{por (1)}$$

$$\psi(d) > f(c) = \psi(c) \quad \text{portanto } \psi(d) > \psi(c) \quad (2)$$

então ψ é crescente.

Por outro lado

$$\psi(x) = f(x) - \varepsilon(x-c)$$

$$\psi'_s(x) = f'_s(x) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x+h-c) - \varepsilon(x-h-c)}{2h}$$

$$\psi'_s(x) = f'_s(x) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon x + \varepsilon h - \varepsilon c - \varepsilon x + \varepsilon h + \varepsilon c}{2h}$$

$$\psi'_s(x) = f'_s(x) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon h}{2h}$$

$$\psi'_s(x) = f'_s(x) - \varepsilon \quad \text{como } f'_s(x) = 0 \text{ para qualquer}$$

x que pertence a (a,b) , temos:

$$\psi'_s(x) = -\varepsilon \quad \text{para qualquer } x \text{ que pertence a } (a,b),$$

ou seja

$$\psi'_s(x) < 0 \quad \text{para todo } x \text{ que pertence a } (a,b) \text{ e pelo}$$

resultado anterior $\psi(x)$ é decrescente o que contraria (2).

Então podemos enunciar:

Se f é uma função contínua cuja derivada simétrica é nula em todo ponto de um intervalo (a,b) , então f é constante no mesmo intervalo. Duas funções contínuas

cujas derivadas simétricas (supostas finitas) coincidem em todo ponto de um intervalo, não diferem senão por uma constante.

Para o caso da derivada comum vale o conhecido teorema do matemático francês Michel Rolle (1652-1719).

Seja f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Se $f(x_1) = f(x_2)$ então existe pelo menos um ponto s de (a, b) tal que $f'(s) = 0$.

Consideremos agora,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 2x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

temos $f(0) = f(1) = 0$, f é contínua em $[a, b]$ e existe derivada simétrica para qualquer x que pertence $(0, 1) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ e $f'_s(x)$ é positiva entre 0 e $\frac{1}{2}$, e negativa entre $\frac{1}{2}$ e 1.

Vejamos o que acontece com $f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f'_-\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{-2\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} + h\right) - \left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{h} \right] = 0$$

daí $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2} - h\right)}{h} \right] = 1$$

então $f'_s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ embora não exista $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, estamos nas condições do teorema de Rolle para derivada simétrica, e no entanto não existe a que pertence $[0, 1]$ tal que $f'_s(a) = 0$, pois

$$f'_s(x) = 1 > 0 \quad \text{para } x \text{ que pertence } \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'_s(x) = -4x+2 \quad \text{para } x \text{ que pertence } \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f'_s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Tal exemplo mostra que o teorema de Rolle não vale necessariamente para derivada simétrica. Podemos concluir também que a derivada simétrica existente em todo ponto do intervalo considerado, não precisa necessariamente passar por todo ponto intermediário entre dois de seus valores, como acontece no caso da derivada comum. Por outro lado, como consequência disto fica claro que o teorema da média, sendo uma generalização do teorema de Rolle, pode não valer necessariamente no caso da derivada simétrica.

Vamos agora nos ocupar de funções que têm derivada simétrica quase sempre num intervalo ou conjunto considerado. Sob a condição de esquecer os conjuntos de medida nula a noção de derivada simétrica não generaliza a noção de derivada comum, ou seja, a existência de uma derivada simétrica quase sempre num intervalo ou conjunto, não acarreta a existência da derivada comum quase sempre no intervalo ou conjunto considerado.

Conforme Khintchine, (ver [5]), por este motivo torna-se inútil empreender um estudo especial sobre este tipo de derivada. Para ver isto nos ocupemos do seguinte teorema:

Seja $f(x)$ uma função mensurável. Então ela admite derivada única e finita $f'(x)$ quase sempre, onde

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} < \infty \quad (1)$$

De fato,

Seja E o conjunto de valores x onde (1) é válida e onde não existe $f'(x)$, ou seja,

$$E = \{ x; \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} < +\infty \text{ e não existe } f'(x) \}$$

Suponhamos por absurdo que $m_e(E) > 0$.

Para todo n que pertence a $\mathbb{N}$ seja

$$E_n = \{ x \text{ que pertence a } E; \text{ para } 0 < h < \frac{1}{n} \text{ temos } f(x+h)-f(x-h) < 2hn \} \quad (2)$$

ou seja,

$$E_1 = \{ x \text{ que pertence a } E; \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} < 1; 0 < h < 1 \}$$

$$E_2 = \{ x \text{ que pertence a } E; \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} < 2; 0 < h < \frac{1}{2} \}$$

$$E_3 = \{ x \text{ que pertence a } E; \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} < 3; 0 < h < \frac{1}{3} \}$$

$\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

$$E_n = \{ x \text{ que pertence a } E; \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} < n; 0 < h < \frac{1}{n} \}$$

daí temos que $\lim E_n = E$ e então $m_e(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m_e(E_n)$

como $m_e(E) > 0$, deve existir n_0 tal que $m_e(E_{n_0}) > 0$ (3)

seja $\theta(x) = f(x) - n_0 x$

consideremos para x que pertence a E_{n_0} , $0 < h < \frac{1}{n_0}$;

$$\theta(x+h) - \theta(x-h) = f(x+h) - n_0(x+h) - f(x-h) + n_0(x-h) = f(x+h) - f(x-h) - 2n_0 h$$

lembrando que para $0 < h < \frac{1}{n_0}$ temos $f(x+h) - f(x-h) < 2hn_0$ segue que

$$\theta(x+h) - \theta(x-h) < 0 \quad (4)$$

seja y um ponto de densidade exterior do conjunto E_{n_0}

afirmamos que

$$\theta^+(y) < 0 \quad \text{e} \quad \theta_+(y) < 0 \quad (5)$$

com efeito:

sendo y ponto de densidade exterior de E_{n_0} , existe $k \leq \frac{1}{n_0}$ tal que para todo y' onde $y < y' < y + k \leq y + \frac{1}{n_0}$ temos

$$m_e [E_{n_0} \cap (y, y')] > \frac{3}{4} (y' - y) \quad (6)$$

vamos mostrar que para y' da relação (6) temos :

$$\theta(y) < \theta(y') \quad (7)$$

para ver isto, suponhamos que

$$\theta(y) \geq \theta(y') \quad (8)$$

seja $A = \{ x \text{ que pertence a } (y, y'); \theta(x) \geq \theta(y) \}$

e

$$B = \{ x \text{ que pertence a } (y, y'); \theta(x) < \theta(y) \} \quad (9)$$

temos por (8) que para todo x que pertence a B

$$\theta(x) > \theta(y) \geq \theta(y') \quad (10)$$

seja agora $\bar{A} = \{ \frac{y+x}{2}; x \text{ pertence a } A \}$

e

$$\bar{B} = \{ \frac{x+y'}{2}; y' \text{ pertence a } B \}$$

pela mensurabilidade de $f(x)$ e portanto de $\theta(x)$, temos que A e B são mensuráveis. A medida de um deles deve ser maior ou igual que

$$\frac{y' - y}{2} \quad \text{isto é,}$$

$$m(A) \geq \frac{y' - y}{2} \quad \text{ou} \quad m(B) \geq \frac{y' - y}{2} \quad \text{e por conseguinte,}$$

$$m(\bar{A}) \geq \frac{y' - y}{4} \quad \text{ou} \quad m(\bar{B}) \geq \frac{y' - y}{4}$$

por (6) $\bar{A}$ ou $\bar{B}$ admite pontos em comum com E_{n_0} .

Suponhamos para fixar idéias que $\bar{A} \cap E_{n_0} = x_0$.

O ponto $x_0 + (x_0 - y)$ pertence a A e por (8) temos:

$$\theta [x_0 + (x_0 - y)] \geq \theta(y) = \theta [x_0 - (x_0 - y)]$$

$$\theta [x_0 + (x_0 - y)] \geq \theta [x_0 - (x_0 - y)]$$

$$\theta [x_0 + (x_0 - y)] - \theta [x_0 - (x_0 - y)] \geq 0 \quad \text{o que contradiz (4)}$$

portanto (8) é falso e vale (7), isto é,

$$\theta(y) < \theta(y')$$

Por outro lado,

$$D\theta^+(x) = \lim_{(y-y') \rightarrow 0^+} \frac{\theta(y) - \theta(y')}{y - y'}$$

como $\theta(y) < \theta(y')$ então temos:

$$D\theta^+(y) < 0.$$

Do mesmo modo temos que

$$D\theta_+(y) = \lim_{(y-y') \rightarrow 0^+} \frac{\theta(y) - \theta(y')}{y - y'} < 0$$

Estas relações são válidas para cada ponto de densidade exterior de $E_{n_0} \subset E$. Por um teorema de Grace Young (veja teo. 0.1), temos

que para cada y que pertence a $E_{n_0} \subset E$ e $D\theta^+(y) < 0$ e $D\theta_+(y) < 0$,

temos que existe quase sempre $\theta'(y)$ e por conseguinte $f'(y)$,

ou seja, para cada y que pertence a $E_n \subset E$ existe $f'(y)$ quase sempre,

o que contraria a definição de E . Portanto $m_e(E) = 0$ como queríamos.

DERIVADA PSEUDO SIMÉTRICA

Vamos generalizar a noção de derivada simétrica, introduzindo o conceito de derivada pseudo simétrica, assim:

Seja $f(x)$ e $k(x)$ duas funções definidas em (a,b) e $k(x)$ positiva em todo ponto do dado intervalo. Diremos que $f(x)$ tem derivada pseudo simétrica em x , relativamente a $k(x)$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+k(x)h) - f(x-h)}{(k(x)+1)h} \text{ existe.}$$

Notaremos tal derivada por $f'_k(x)$.

Se em $f'_k(x)$ fizermos $k(x)=1$ (função constante igual a um) então $f'_k(x)=f'_s(x)$, isto é, a derivada pseudo simétrica coincide com a derivada simétrica, definida anteriormente, valendo todo comentário que fizemos antes. Por outro lado, se $f(x)$ é derivável no sentido comum, então ela admite derivada pseudo simétrica relativamente a função $k(x)$ e as duas coincidem em cada ponto considerado. Vejamos:

$$f'_k(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+k(x)h) - f(x-h)}{(k(x)+1)h}$$

como existe $f'(x)$ apliquemos a regra de L'Hospital, obtendo:

$$f'_k(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(x+k(x)h) \cdot k(x) + f'(x-h)}{k(x)+1} =$$

$$\frac{f'(x)k(x) + f'(x)}{k(x)+1} = \frac{f'(x)(k(x)+1)}{k(x)+1} = f'(x), \text{ que como}$$

sabemos existe, então podemos escrever:

Se f é derivável no sentido comum em (a,b) , então ela admite derivada pseudo simétrica relativamente a uma

dada função $k(x)$ positiva, e ambas coincidem em todo ponto do intervalo considerado.

Quando $f'_k(x)$ coincide com $f'(x)$ as regras de derivação vale as demonstrações seguem no mesmo estilo daquelas feitas para derivada comum.

Consideremos agora $f(x)$ contínua em (a,b) e admitamos a existência da derivada pseudo simétrica relativamente a $k(x)$, positiva e limitada superiormente em (a,b) e tal que $f'_k(x)$ é positiva para todo x de (a,b) . Verifiquemos que $f(x)$ é crescente:

Seja x_1, x_2 dois pontos do intervalo (a,b) , digamos $x_1 < x_2$ e suponhamos que $f(x_1) \geq f(x_2)$ (1)

Se tivermos $f(x) = f(x)$, como a função $f(x)$ não é constante em (x_1, x_2) , é possível determinar um ponto x_3 interno a (x_1, x_2) tal que

$$f(x_3) \neq f(x_1) = f(x_2)$$

donde devemos ter

$$f(x_1) > f(x_3) \text{ ou } f(x_3) > f(x_2)$$

portanto se vale (1) é possível determinar dois pontos x' e x'' do intervalo (a,b) , digamos $x' < x''$, para os quais temos:

$$f(x') < f(x'') \quad (2)$$

seja $s = \frac{1}{2} [f(x') + f(x'')]$

a função $F(x) = f(x) - s$ é contínua em (a,b) dotada de derivada pseudo simétrica relativamente a função $k(x)$, positiva, sendo

$$F'_k(x) = f'_k(x) \text{ e então}$$

$$F(x') > 0 > F(x'')$$

Existem pontos x interno ao intervalo (x', x'') para os quais $F(x)$ assume valores positivos. Seja c o extremo superior de tais pontos, c é interno a (x', x'') e ainda mais, $F(c)=0$. Além disso a função $F(x)$ assume em todo ponto do intervalo (c, x'') valores não positivos, enquanto que, nos pontos que precedem c , tendo c como ponto de acumulação, ela assume valores positivos. Por outro lado, para infinitos valores positivos de h , tendo zero como ponto de acumulação temos

$$F(c+k(\epsilon)h) - F(c-h) < 0$$

e daí

$$F'_k(c) = f'_k(c) \leq 0$$

donde temos uma contradição da hipótese, portanto:

Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo (a, b) admitindo em todo ponto derivada pseudo simétrica relativamente à função $k(x)$, ($k(x)$ positiva e limitada superiormente em (a, b)) sendo esta positiva em todo intervalo, então $f(x)$ é crescente em (a, b) . Vale um resultado análogo para o caso de ser $f'_k(x)$ negativa, sendo daí a função decrescente.

Vamos demonstrar agora que se $f(x)$ é uma função contínua em (a, b) admitindo derivada pseudo simétrica relativamente a função $k(x)$, nula em todo ponto do intervalo, é constante em (a, b) .

Para isto suponhamos que existem dois pontos x', x'' do intervalo (a, b) para os quais $f(x') \neq f(x'')$; seja para fixar idéias, $x' < x''$ e $f(x') < f(x'')$.

consideremos a função

$$F(x) = f(x) - \lambda(x - x')$$

onde λ é tal que

$$0 < \lambda < \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \quad (1)$$

$F(x)$ é contínua em (a, b) admitindo derivada pseudo simétrica relativamente a função $k(x)$ em todo ponto do intervalo (a, b) .

Façamos,

$$F(x'') - F(x') =$$

$$f(x'') - f(x') - \lambda(x'' - x') - f(x') + \lambda(x' - x') =$$

$$f(x'') - f(x') - \lambda(x'' - x') \quad \text{donde}$$

$$F(x'') - F(x') > f(x'') - f(x') - \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \cdot [x'' - x']$$

e então $F(x'') - F(x') > 0$ ou seja,

$$F(x'') > F(x').$$

Calculemos $F'_k(x)$

$$F'_k(x) = f'_k(x) - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(x + k(x)h - x') - \lambda(x - h - x')}{(k(x) + 1)h} =$$

$$f'_k(x) - \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\lambda x + \lambda k(x)h - \lambda(x') - \lambda(x) + \lambda h + \lambda x' \right] \frac{1}{(k(x) + 1)h} =$$

$$f'_k(x) - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(k(x) + 1)h}{(k(x) + 1)h}$$

portanto

$$F'_k(x) = f'_k(x) - \lambda \quad \text{como} \quad f'_k(x) = 0, \text{ temos:}$$

$$F'_k(x) = -\lambda \quad (3)$$

por (3) $F'_k(x)$ é negativa e daí pelo resultado anterior temos que $F(x)$ é decrescente, o que contraria (2), donde temos o que queríamos. Podemos escrever então:

Se $f(x)$ é uma função contínua em (a,b) , admitindo derivada pseudo simétrica relativamente à função $k(x)$, nula em todo ponto do intervalo, então ela é constante em (a,b) . Ainda mais, se duas funções contínuas admitem em (a,b) derivada pseudo simétrica relativamente a $k(x)$, iguais em todo intervalo, então elas não diferem senão por uma constante.

Seja $f(x)$ uma função mensurável em (a,b) , $k(x)$ contínua, positiva e tal que $k'(x)$ é limitada superiormente em (a,b) e $k'(x) \geq 0$. Sob estas condições vale o teorema seguinte, ver [8]

Se $f(x)$ admite derivada pseudo simétrica relativamente a função $k(x)$ quase sempre em (a,b) , então a derivada simétrica de $f(x)$ existe quase sempre em (a,b) e consequentemente $f(x)$ admite derivada comum quase sempre em (a,b) . Neste caso as três derivadas coincidem.

Para a demonstração consideremos primeiramente o caso em que $k(x)$ é tal que

$$1 \leq k(x) < +\infty$$

Seja agora

$$E' = \{ x \text{ que pertence a } (a,b) ; \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = +\infty \}$$

se provarmos que $m(E') = 0$ então $f'_s(x)$ existe quase sempre em (a,b) . Suponhamos porém, que $m(E') > 0$ e definamos

$$E'' = \{ x \text{ que pertence a } E' ; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + k(x)h) - f(x-h)}{(k(x)+1)h} = +\infty \}$$

ou seja, E'' é o conjunto dos x que pertence a E' tal que existe

$f'_k(x)$. É claro que $E'' \subset E'$ e como ambos são mensuráveis e $m(E' - E'') = 0$ temos que $m(E') = m(E'')$ e daí $m(E'') > 0$.

Para cada inteiro n , consideremos o conjunto:

$$E''_n = \{ x \text{ que pertence a } E'' ; \frac{f(x+k(x)h) - f(x-h)}{k(x)+1} < nh \text{ onde } 0 < h < \frac{1}{n} \}$$

ou seja,

$$E''_1 = \{ x \text{ que pertence a } E'' ; \frac{f(x+k(x)h) - f(x-h)}{k(x)+1} < h \text{ onde } 0 < h < 1 \}$$

$$E''_2 = \{ x \text{ que pertence a } E'' ; \frac{f(x+k(x)h) - f(x-h)}{k(x)+1} < h^2 \text{ onde } 0 < h < \frac{1}{2} \}$$

...

$$E''_n = \{ x \text{ que pertence a } E'' ; \frac{f(x+k(x)h) - f(x-h)}{k(x)+1} < nh \text{ onde } 0 < h < \frac{1}{n} \}$$

então $\lim_{n \rightarrow \infty} E''_n = E''$ e $m(E'') = \sum_n m(E''_n)$

portanto existe N inteiro tal que $m(E''_N) > 0$. Chamemos agora E_N ao conjunto:

$E_N = \{ x \text{ que pertence a } E''_N ; \text{ densidade de } x=1 \}$ isto é, os pontos de E_N são os pontos de densidade de E''_N .

Novamente $E''_N \subset E_N$, $m(E_N - E''_N) = 0$ daí $m(E_N) = m(E''_N)$ pois ambos são mensuráveis. Seja $F(x) = f(x) - Nx$

para x que pertence a E_N , temos:

$$F(x+k(x)h) - F(x-h) =$$

$$f(x+k(x)h) - f(x-h) - N(x+k(x)h) + N(x-h) =$$

$$f(x+k(x)h) - f(x-h) - N(x) + N(k(x)h) + N(x) - N(h) =$$

$$f(x+k(x)h)-f(x-h)-Nh(k(x)+1) <$$

$$(k(x)+1)hN-Nh(k(x)+1)=0 \quad \text{para } 0 < h < \frac{1}{N}$$

portanto

$$F(x+k(x)h)-F(x-h) < 0 \quad \text{para } 0 < h < \frac{1}{N} \quad (2)$$

Escolhamos um ponto arbitrário $\bar{x}$ que pertence a E_N , então podemos encontrar $\Gamma > 0$ tal que para todo x' satisfazendo

$$\bar{x} < x' < \bar{x} + \Gamma, \text{ temos}$$

$$F(x') - F(\bar{x}) < 0$$

$$F(x') < F(\bar{x}) \quad \text{ou seja, } F \text{ é decrescente em } (\bar{x}, \bar{x} + \Gamma)$$

Seja agora M o extremo superior da função

$$\frac{Nk(x)+k'(x)}{N} \quad \text{isto é,}$$

$$\frac{Nk(x)+k'(x)}{N} \leq M \quad \text{para qualquer } x \text{ que pertence a } (a,b).$$

Então podemos encontrar, em correspondência ao ponto $\bar{x}$, $\Gamma > 0$,

$\Gamma < \frac{1}{N}$ tal que

$$m [E_N \cap (\bar{x}, x')] > \frac{2M+1}{2M+2} (x' - \bar{x}) \quad (3)$$

para todo x' onde

$$\bar{x} < x' < \bar{x} + \Gamma < \bar{x} + \frac{1}{N} \quad (4)$$

Fixemos x' satisfazendo (4) e consideremos em $(\bar{x}, x')$ dois conjuntos disjuntos A e B , sendo que um deles pode ser vazio, assim:

$$A = \{ x \text{ que pertence a } (\bar{x}, x') ; F(x) > F(x') \} \quad (5)$$

$$B = \{ x \text{ que pertence a } (\bar{x}, x') ; F(x) \leq F(x') \}$$

Sabemos que f é mensurável e então F é mensurável e daí temos a mensurabilidade de A e B e ainda podemos concluir que um dos dois

tem medida maior que $\frac{x' - \bar{x}}{2}$ isto é,

$$m(A) > \frac{x' - \bar{x}}{2} \quad \text{ou} \quad m(B) > \frac{x' - \bar{x}}{2} \quad (6)$$

Consideremos agora

$$G(t) = t + k(t) \cdot (t - \bar{x}) \quad \text{que admite derivada em } (x', \bar{x}) \text{ donde}$$

$$G'(t) = 1 + k(t) + k'(t) \cdot (t - \bar{x})$$

como $k(t) > 0$, $k'(t) \geq 0$ e $(t - \bar{x}) > 0$, temos que $G'(t)$ é limitada superiormente e inferiormente por um número positivo, donde $G(t)$ é crescente em $(\bar{x}, x')$ e então inversível neste intervalo. Consideremos

$$G(\bar{x}) = \bar{x} + k(\bar{x})(\bar{x} - \bar{x}) = \bar{x}$$

$$G(x') = x' + k(x') + k'(x)(x' - \bar{x})$$

como $k(x') \geq 0$ e $(x' - \bar{x}) > 0$ então $G(x') > x'$. Seja $t = \phi(x)$ a inversa de $G(t)$ que é derivável em (x, x') sendo esta limitada superior e inferiormente por um número positivo e seja (x_1, x_2) um intervalo qualquer contido em $(\bar{x}, x')$ e seja ainda,

$$t_1 = \phi(x_1)$$

$$t_2 = \phi(x_2)$$

Quando x percorre o intervalo (x_1, x_2) $t = \phi(x)$ descreve o intervalo (x_1, x_2) numa correspondência biunívoca que conserva a ordem. Além disso para um determinado η que pertence a (t_1, t_2) temos, aplicando o teorema da média para G :

$$x_2 - x_1 = G(t_2) - G(t_1) = (t_2 - t_1)G'(\eta)$$

como $G'(\eta) = 1 + k(\eta) + k'(\eta)(\eta - \bar{x})$

segue que

$$x_2 - x_1 = (t_2 - t_1) [1 + k(\eta) + k'(\eta)(\eta - \bar{x})]$$

Lembremos que $0 < \eta - \bar{x} < \frac{1}{N}$ daí

$$k(\eta) + k'(\eta)(\eta - \bar{x}) < k(\eta) + \frac{k'(\eta)}{N} =$$

$$\frac{Nk(\eta) + k'(\eta)}{N} < M \quad \text{então}$$

$$(x_2, x_1) \leq (t_2, t_1) (1+M) \quad \text{ou ainda}$$

$$(t_2 - t_1) \geq \frac{x_2 - x_1}{1+M}$$

Desta última relação resulta que dado $E \subset (\bar{x}, x')$ mensurável, temos

$\bar{E} = \{ t = \phi(x) ; x \text{ pertence a } E \}$ é mensurável e além disso

$$m(\bar{E}) \geq \frac{m(E)}{1+M}$$

Analogamente se verifica que a função

$$H(t) = t + \frac{t - \bar{x}}{k(t)} \quad \text{é derivável no intervalo } (\bar{x}, x'), \text{ cres-}$$

cente, limitada superior e inferiormente por uma constante positiva e

$$H'(t) = \frac{1 + k(t) + (x' - t)k'(t)}{(k(t))^2}$$

A sua inversa $t = \psi(x)$ é portanto derivável em $(\bar{x}, x')$ e crescente. Dado pois, $(x_1, x_2) \subset (\bar{x}, x')$ e colocando

$$t_1 = \psi(x_1)$$

$$t_2 = \psi(x_2)$$

temos para η bem escolhido

$$x_2 - x_1 = H(t_2) - H(t_1) = (t_2 - t_1)H'(\eta)$$

Por outro lado,

$$H'(\eta) = \frac{1 + k(\eta) + (x' - \eta)k'(\eta)}{(k(\eta))^2} \quad \text{e daí}$$

$$x_2 - x_1 = (t_2 - t_1) H'(\eta) =$$

$$t_2 - t_1 \left[\frac{1 + k(\eta) + (x' - \eta)k'(\eta)}{(k(\eta))^2} \right] =$$

$$t_2 - t_1 \left[\frac{1 + k(\eta) + (x' - \eta)k'(\eta)}{(k(\eta))^2} \right]$$

como $0 < x' - \eta < \frac{1}{N}$, $k(x) \geq 1$ temos

$$(x_2 - x_1) \leq (t_2 - t_1) \left[\frac{1 + N(k(\eta) + k'(\eta))}{N} \frac{1}{(k(\eta))^2} \right]$$

$$(x_2 - x_1) < (t_2 - t_1) (1 + M) \quad \text{pois}$$

$$\frac{N k(x) + k'(x)}{N} \leq M \quad \text{para qualquer } x \text{ que pertence a } (a, b).$$

E mais uma vez considerando $E \subset (\bar{x}, x')$ mensurável, temos que

$$\bar{E} = \{ t = \psi(x) ; x \text{ pertence a } E \} \quad \text{é mensurável, além disso}$$

$$m(\bar{E}) \geq \frac{m(E)}{1 + M} \quad (7)$$

Seja agora

$$\bar{A} = \{ t = \phi(x) ; x \text{ pertence a } A \}$$

$$\bar{B} = \{ t = \phi(x) ; x \text{ pertence a } B \}$$

$$\text{como } m(A) \geq \frac{x' - \bar{x}}{2} \quad \text{ou} \quad m(B) \geq \frac{x' - \bar{x}}{2} \quad \text{por (6), e}$$

$$m(\bar{A}) \geq \frac{m(A)}{1 + M} \quad \text{ou} \quad m(\bar{B}) \geq \frac{m(B)}{1 + M} \quad \text{por (7) temos:}$$

$$m(\bar{A}) \geq \frac{x' - \bar{x}}{2(M+1)} \quad \text{ou} \quad m(\bar{B}) \geq \frac{x' - \bar{x}}{2(M+1)} \quad (8)$$

Demonstraremos que o conjunto $\bar{B}$ não tem ponto de interseção com E_N e daí, da relação que tiramos em (2)

$$m(E_N \cap (\bar{x}, x')) > \frac{2M+1}{2M+2} (x' - \bar{x}) \quad \text{para qualquer } x' \text{ tal que:}$$

$$\bar{x} < x' < \bar{x} + \frac{1}{N}$$

temos:

$$m(\bar{B}) < \frac{x' - \bar{x}}{2(M+1)}$$

DE fato, se t_0 pertence a $(E_N \cap \bar{B})$, lembrando que

$$\bar{B} = \{ t = \psi(x) ; x \text{ pertence a } B \} \text{ e } \psi \text{ é inversa de } H,$$

temos que

$(t_0 + \frac{t_0 - x'}{k(t_0)})$ pertence a B , e como em B a função F é não decrescente, segue que:

$$F(t_0 + \frac{t_0 - x'}{k(t_0)}) \leq F(x') \quad (9)$$

como $k(t_0) \geq 1$ resulta que:

$$0 < \frac{x' - t_0}{k(t_0)} < \frac{1}{N}$$

por outro lado, t_0 pertence a E_N e levando em conta (2) temos:

$$F(t_0 + k(t_0) \frac{x' - t_0}{k(t_0)}) - F(t_0 - \frac{x' - t_0}{k(t_0)}) < 0$$

donde

$$F(x') < F(t_0) + \frac{t_0 - x'}{k(t_0)} \quad (10)$$

Observe que (9) e (10) são contraditórias, portanto

$$E_N \cap \bar{B} = \emptyset \quad \text{e} \quad m(\bar{B}) < \frac{x' - \bar{x}}{2(M+1)}$$

daí devemos ter

$$m(\bar{A}) > \frac{x' - \bar{x}}{2(M+1)} \quad \text{uma vez que uma das duas rela-}$$

ções deve acontecer, por (8).

Levando em conta (3) temos que

$$E_N \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

Dado t_0 que pertence a $E_N \cap \bar{A}$, t_0 pertence a E_N e t_0 per-

tence $\tilde{A}$,
 $\tilde{A} = \{ t = \phi(x) ; x \text{ pertence } \tilde{A} \}$ e assim

$(t_0 + k(t_0)) (t_0 - \bar{x})$ pertence $\tilde{A}$ e como F é decrescen
te em A ,

$$F(t_0 + k(t_0)) (t_0 - \bar{x}) > F(x') \quad (11)$$

Por outro lado, como t_0 pertence $\tilde{E}_N$ e

$$0 < t_0 - \bar{x} < \frac{1}{N} \quad \text{e levando em conta (2), temos:}$$

$$F(t_0 + k(t_0)) (t_0 - \bar{x}) - F(t_0 - (t_0 - \bar{x})) < 0 \quad \text{ou seja,}$$

$$F(t_0 + k(t_0)) (t_0 - \bar{x}) < F(\bar{x}) \quad (12)$$

de (11) e (12) tem-se que :

$$F(x') - F(\bar{x}) < 0 \quad \text{ou} \quad F(x') < F(\bar{x})$$

Procedendo de maneira análoga, demonstra-se que para todo x'
tal que

$$\bar{x} - \Gamma < x' < \bar{x} \quad \text{resulta:}$$

$$F(\bar{x}) - F(x') < 0 \quad \text{ou seja,}$$

$$F(\bar{x}) < F(x')$$

Portanto escolhendo x que pertence $\tilde{E}_N$, podemos determinar um
número $\Gamma > 0$ tal que para todo par (x', x'') satisfazendo,

$$\bar{x} - \Gamma < x' < \bar{x}$$

$$\bar{x} < x'' < \bar{x} + \Gamma$$

segue que :

$$F(\bar{x}) - F(x') < 0$$

$$F(x'') - F(\bar{x}) < 0 \quad \text{ou seja,}$$

$$F(x'') < F(\bar{x}) < F(x') \quad \text{daí}$$

$$F(x'') < F(x')$$

Em particular, para h tal que $0 < h < \Gamma$ temos que

$$F(\bar{x}+h) - F(\bar{x}-h) < 0$$

Recordemos que $F(x) = f(x) - Nx$, donde podemos tirar:

$$F(\bar{x}+h) - F(\bar{x}-h) = f(\bar{x}+h) - N(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h) + n(\bar{x}-h) < 0$$

ou seja,

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h) < 2Nh \quad \text{para } \bar{x} \text{ que pertence a } E_N.$$

Disto temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} < \infty \quad (13)$$

Por outro lado, se $\bar{x}$ pertence a E_N temos que $\bar{x}$ pertence a E' e então

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} = +\infty \quad (14)$$

De (13) e (14) temos a contradição de (1). Portanto o teorema fica demonstrado para $1 \leq k(x) < \infty$.

Para o caso em que $0 < k(x) < 1$, com todas as outras hipóteses, podemos repetir a demonstração feita, definindo em (a,b)

$$\frac{Nk(x) + k'(x)}{\mu^2 N}$$

onde μ = mínimo de $k(x)$ em (a,b) e considerando N o extremo superior da função acima.

Assim fica demonstrado que $m(E') = 0$ e daí f admite $f'_s(x)$ quase sempre em (a,b) . Neste caso, pelo teorema da pág. 8, temos que existe $f'(x)$ quase sempre em (a,b) , como queríamos. Ainda mais, as três derivadas coincidem, neste caso.

A DERIVADA MÉDIA DE BOREL

Para ilustrar alguns fenômenos físicos, Borel introduz uma generalização da derivada que tem um grande interesse matemático, veja [1] .

Diremos que a função $f(x)$ tem uma derivada média em x , se existe o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t} dt$$

Notaremos tal derivada por: $f'_B(x)$.

Podemos falar em derivada média à esquerda e à direita, se o limite acima existe para h tendendo à zero pela direita, assumindo valores positivos ou negativos, de um modo análogo ao que fazemos no caso de derivada comum.

Podemos ainda pensar em derivada média simétrica, a função $f(x)$ admite derivada média simétrica no ponto x se existe o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t} dt$$

Notaremos tal derivada por: $f'_{Bs}(x)$.

Este método de derivação tem analogia com o método de somar séries divergentes por médias aritméticas. Veja .

A derivada média possui a propriedade necessária à toda generalização:

Se f admite derivada comum em x_0 então f admite derivada média no mesmo ponto e elas coincidem.

Com efeito, se considerarmos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} dt$$

uma aplicação da regra de L'Hospital, nos dá:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_0+h)-f(x_0)] = f'(x_0) \quad \text{que existe,}$$

portanto $f'_B(x_0) = f'(x_0)$ como queríamos.

Uma demonstração análoga nos dá o mesmo resultado para derivada média simétrica.

Seja agora $h(x) = f(x) \pm g(x)$ tal que exista $f'_B(x)$ e $g'_B(x)$

$$h'_B(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{h(x+t)-h(x)}{t} dt =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{[f(x+t)-f(x)] \pm [g(x+t)-g(x)]}{t} dt$$

como $f'_B(x)$ e $g'_B(x)$ existem, temos que

$$h'_B(x) = f'_B(x) \pm g'_B(x)$$

Então a derivada média da soma (ou subtração) de duas ou mais funções é a soma (ou subtração) das mesmas. Contudo podemos

ter a existência de $f'_B(x_0)$ e $g'_B(x_0)$ sem que exista $(fg)'_B(x_0)$

Vejam os:

Seja n um inteiro, $n \geq 1$ e $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$ tal que n divide este

intervalo num número par de partes diferentes, digamos, A_i ,

de tal modo que:

$$\int_{A_i} x^{-3/4} dx = k \quad \text{onde} \quad k < \frac{1}{n} \quad (1)$$

Seja $f(x) = x^{1/4}$ de sinal contrário nos intervalos vizinhos da subdivisão. Na origem a função oscilaria em torno do zero, então façamos $f(0)=0$ e $f(x)$ fica definida em $[0,1]$.

Para h que pertence a $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$ temos:

$$\frac{1}{n} < h < \frac{1}{n-1} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{h} < n \quad (2)$$

$$e \quad \left| \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(t)-f(0)}{t} dt \right| =$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h \frac{t^{1/4}}{t} dt \right| =$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h t^{-3/4} dt \right| < \frac{1}{n^2} \cdot n \quad \text{por (1) e (2)}$$

Portanto,

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(t)-f(0)}{t} dt \right| = \frac{1}{n}$$

Lembremos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(t) - f(0)}{t} dt = f'_B(0)$$

no primeiro membro da igualdade anterior, ou seja, existe derivada média de $f(x) = x^{1/4}$ em $x=0$. Agora consideremos

$$(f(x))^2 = (x^{1/4})^2 = x^{1/2}.$$

Calculemos a derivada média da função $(f(x))^2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{(f(t))^2 - (f(0))^2}{t} dt =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{t^{1/2}}{t} dt =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h t^{-1/2} dt =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left. 2t^{1/2} \right|_0^h =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} 2\sqrt{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{h}}$$

Se tomarmos o limite quando $h \rightarrow 0$, verificamos que

$(f^2)'_B(0)$ não existe, o que demonstra o que queríamos.

A função $f(x)$ é descontínua, mas uma ligeira modificação a transforma numa função contínua, conservando as características que nos interessam.

Seja f uma função contínua cuja derivada média se anula em todo ponto de um intervalo. Quando isto acontece, existe uma sequência de pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ tal que:

$$x_i \rightarrow x_{i+1} \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$$

onde

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(x_i) - f(x)}{x_i - x} = 0$$

Com efeito, se tal não acontece o quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ seria tal que, para $h > 0$, suficientemente pequeno, teríamos:

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| > n \quad n > 0, \text{ fixo e daí a deriva}$$

da média de f em x não poderia se anular. Por outro lado, se para cada ponto x considerado existe uma série de números como dissemos acima, por um resultado demonstrado em [3], página 175-48, temos que f é constante no intervalo considerado, donde podemos escrever:

Se f é uma função contínua que admite derivada média nula em todo ponto de um intervalo, então f é constante em todo intervalo considerado.

podemos concluir também que:

Duas funções contínuas que possuam derivadas médias iguais em todo ponto de um intervalo, não diferem senão por uma constante.

O teorema de Rolle e o teorema da média valem para derivada média, pois se x é um ponto onde a função assume um máximo (ou mínimo) sua derivada média será nula neste ponto, e então a demonstração segue como no caso da derivada comum.

Vamos nos dedicar um pouco à derivada média simétrica através da teoria da derivada segunda de Schwartz.

Consideremos $F(x)$ uma função absolutamente contínua (isto é, $F'(x)$ existe quase sempre) em um dado intervalo; tomemos a derivada do quociente:

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)-2F(x)}{h^2} \text{ em relação a } h, \text{ ou seja}$$

$$\frac{d}{dh} \left[\frac{F(x+h)-F(x-h)-2F(x)}{h^2} \right] =$$

$$\frac{F'(x+h)-F'(x-h)}{h} - \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2},$$

onde $F'(x+h)$ e $F'(x-h)$ existem no mínimo quase sempre. Tomemos a integral de ambos os membros da igualdade, entre p e q , $0 < p < q$ então temos:

$$\int_p^q \frac{d}{dh} \left[\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \right] dh =$$

$$\int_p^q \frac{F'(x+h)-F'(x-h)}{h} dh - \int_p^q \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} dh$$

ou ainda,

$$\frac{F(x+q)+F(x-q)-2F(x)}{q} - \frac{F(x+p)+F(x-p)-2F(x)}{p} =$$

$$\int_p^q \frac{F'(x+h)-F'(x-h)}{h} dh - \int_p^q \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} dh$$

Tomemos agora o limite quando $p \rightarrow 0$ da igualdade, e então temos:

$$\frac{F(x+q)+F(x-q)-2F(x)}{q^2} =$$

$$\int_0^q \frac{F'(x+h)-F'(x-h)}{h} dh = \int_0^q \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} dh$$

onde

$$\int_0^q \text{significa} \quad \lim_{p \rightarrow 0} \int_p^q$$

Multipliquemos os dois membros por $\frac{1}{q}$ e façamos q tender a zero, então teremos:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{F(x+q)+F(x-q)-2F(x)}{q^2} =$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \int_0^q \frac{F'(x+h)-F'(x-h)}{h} dh = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \int_0^q \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} dh$$

O primeiro quociente do primeiro membro da igualdade é a derivada segunda de Schwartz que suporemos existente e denotaremos por $S(x)$. Por outro lado

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \int_0^q \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} dh =$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{F(x+q)+F(x-q)-2F(x)}{q^2} \quad (\text{aplicação do teorema da}$$

média para integrais).

O quociente acima é $S(x)$, portanto a igualdade se reduz à:

$$S(x) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \int_0^q \frac{F'(x+h) - F'(x-h)}{h} dh = S(x) \quad \text{ou ainda,}$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \int_0^q \frac{F'(x+h) - F'(x-h)}{2h} = S(x)$$

O primeiro membro da igualdade é exatamente a derivada média simétrica de F' , ou seja, $F''(x)$. Então podemos concluir que:

Uma função somável tem uma derivada simétrica em todo ponto onde sua integral indefinida tem uma derivada segunda de Schwartz, e os dois valores coincidem.

Nos ocuparemos agora de apresentar uma função contínua que possua derivada média em todo ponto de um conjunto de medida positiva e desprovida de derivada comum quase sempre nesse conjunto. Para obter tal função, seja $P \subset (0,1)$ um conjunto perfeito, não denso, ($\bar{P} \neq (0,1)$) de medida diferente de zero; sejam $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_n, \dots$ os intervalos vizinhos de P e denotemos também pelas mesmas letras os comprimentos destes intervalos. Seja a série convergente:

$$\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2} + \sqrt{\delta_3} + \dots + \sqrt{\delta_n} + \dots \quad (1)$$

É possível construir uma função contínua $f(x)$ se anulando em todo ponto de P e tal que os quatro números derivados sejam infinitos quase sempre em P , de tal modo que $f(x)$ não admita derivada comum em P , com exceção no máximo de um conjunto de medida nula.

Verifiquemos que $f(x)$ admite quase sempre em P , uma derivada média. Seja u_n o intervalo de comprimento

$$u_n = \delta_n + 2\sqrt{\delta_n} \text{ cujo centro de cada um coincida com}$$

o centro do intervalo.

A série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ sendo convergente em virtude da convergência de (1), nos diz que o conjunto limite dos intervalos u_n ($n=1,2,3,\dots$) é de medida nula. Seja x um ponto de P que não pertence a este conjunto, temos:

$$\int_x^{x+h} \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha-x} \right| d\alpha \leq \sum' \int_{\delta_n} \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha-x} \right| d\alpha$$

onde a soma do segundo membro se estende a todos os intervalos u_n que pertencem, seja total ou parcialmente ao intervalo $(x, x+h)$. Ora, para $|h|$ suficientemente pequeno, x fica fora dos intervalos u_n correspondentes a estes δ_n , então α faz parte de δ_n , e

$$|\alpha-x| > \sqrt{\delta_n}$$

por outro lado, $f(x)$ sendo contínua em a , para $|h|$ suficientemente pequeno, temos:

$$|f(\alpha)| < 1 \text{ para } |\alpha-x| < |h| \quad \text{então}$$

$$\int_{\delta_n} \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha-x} \right| d\alpha < \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n}} = \sqrt{\delta_n}$$

donde

$$\left| \int_x^{x+h} \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha-x} \right| d\alpha \right| < \Sigma' \sqrt{\delta_n}$$

onde a soma do segundo membro se estende aos mesmos valores ditos anteriormente. Seja $F(x)$ a função igual a zero em P e a $\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}$ em δ_n . A integral desta função tomada entre os extremos de δ_n é igual a $\sqrt{\delta_n}$ e a convergência da série (1) nos mostra que $F(x)$ é somável em $(0,1)$.

Consideremos $\phi(x)$ sua integral indefinida; quando $(x+h)$ pertence a $\tilde{P}$, temos:

$$|\phi(x+h) - \phi(x)| = \Sigma' \sqrt{\delta_n}$$

então também temos :

$$\left| \int_x^{x+h} \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha-x} \right| d\alpha \right| < |\phi(x+h') - \phi(x)|$$

onde $h'=h$ no caso onde $(x+h)$ pertence a $\tilde{P}$, caso contrário, $x+h'$ significa a extremidade mais afastada de x , do intervalo contíguo ao qual $(x+h)$ pertence. Por conseguinte,

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{f(\alpha)}{\alpha-x} d\alpha \right| < \left| \frac{\phi(x+h') - \phi(x)}{h} \right| =$$

$$\frac{h'}{h} \frac{\phi(x+h') - \phi(x)}{h'}$$

Suponhamos que a função $F(x)$ seja em x a derivada de sua integral definida (isto acontece quase sempre em P). Então temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h'}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h') - \phi(x)}{h'} = F(x) = 0$$

e por conseguinte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{f(\alpha)}{\alpha-x} d\alpha = 0 \quad \text{o que demonstra a afirmação.}$$

Enfim o método conhecido de condensação de singularidades nos dará uma função contínua cuja derivada média se anula quase sempre em $(0,1)$ e que é desprovida de derivada comum quase sempre no mesmo intervalo. Veja [4] para condensação de singularidades.

CAPÍTULO III

Relações entre derivada assintótica e as definidas anteriormente.

A noção de derivada assintótica nos dá, como veremos uma generalização da noção de derivada cujo campo de aplicação é mais vasto que o das generalizações conhecidas.

Existem teorias na Análise onde esta noção rende grandes trabalhos, tal é, por exemplo, a teoria de séries trigonométricas de Riemann. Dentro da teoria de integração que Arnaud Denjoy desenvolve, é inevitável a introdução de derivada assintótica.

Uma função mensurável $f(x)$ será dita *assintoticamente derivável no ponto x_0* quando existir um conjunto mensurável E e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \quad \text{é bem determinado.}$$

notaremos por $f'_a(x_0)$.

Exemplificando, tomemos a função de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

tomemos $E = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, para qualquer x_0

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})}{2\epsilon} = 1$$

portanto qualquer x_0 é um ponto de densidade de $\mathbb{R}-Q$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = 0$$

donde todo ponto da função dada tem derivada assintótica igual à zero.

Vamos nos dedicar à comparação da derivada média de Borel, vista no capítulo anterior e a derivada assintótica definida anteriormente.

Consideremos então $f(x)$ uma função mensurável que admite derivada assintótica nula em todo ponto de um conjunto E de medida positiva; veremos que nestas condições existe um conjunto perfeito P , de medida tão próxima da de E quanto se queira, $P \subset E$, tal que para qualquer x_0 que pertence à P

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Com efeito:

Seja x um ponto de E e $(x-\delta, x+\delta)$ um intervalo tendo x como centro e seja ε o menor dos números tal que para qualquer $h > 0$ $|h| < \delta$ a relação

$$|f(x) - f(x+h)| \leq \varepsilon |h|$$

é satisfeita pelos pontos que formam um conjunto cuja densidade média não é inferior a $\frac{3}{4}$; ε depende de x e de δ e como a derivada assintótica de $f(x)$ se anula em x , ε tende a zero com δ , ficando x fixo. Pelo teorema de Egoroff, podemos afirmar a existência de um conjunto P perfeito, $P \subset E$, de medida tão próxima quanto se queira da de E , tal que $\varepsilon \rightarrow 0$ com δ uniformemente em relação aos diferentes pontos de P . Este conjunto P satisfaz as condições enunciadas na proposição, vejamos:

Seja x_0 um ponto qualquer de P e $\Gamma > 0$ qualquer. Seja $\varepsilon < \Gamma$ para $\delta < k$, qualquer que seja o ponto x de P , tal que

$$|x - x_0| < k$$

afirmamos que

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \Gamma$$

que demonstra o que queremos. Verifiquemos tal afirmação.

Seja E_1 o conjunto dos pontos y do intervalo (x_0, x) para os quais:

$$|f(y) - f(x)| < \Gamma |y - x|$$

Seja E_2 o conjunto de pontos z do mesmo intervalo, para os quais,

$$|f(z) - f(x_0)| < \Gamma |z - x_0|$$

Da definição de ϵ e de k , a densidade de cada conjunto E_1 e E_2 em (x_0, x) é ao menos igual a $\frac{3}{4}$; estes dois conjuntos têm pontos em comum. Seja y_0 um destes pontos, temos:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(y_0)| + |f(y_0) - f(x_0)| <$$

$$\Gamma (|x - y_0| + |y_0 - x_0|) = \Gamma |x - x_0|$$

o que conclui a demonstração, daí podemos escrever:

Se $f(x)$ é uma função mensurável, que admite derivada assintótica nula em todo ponto de um conjunto E , de medida positiva, então existe um conjunto perfeito P , de medida tão próxima da de E , quanto se queira, tal que, para qualquer x_0 de P , temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Suponhamos agora que a derivada assintótica de uma função contínua $f(x)$ se anula em todo ponto de um conjunto mensurável E de medida não nula e que a derivada média $f'_B(x)$ exista quase sempre. Em virtude do que demonstramos anteriormente existe um conjunto perfeito $\bar{P} \subset E$ de medida tão próxima da de E quanto se queira e tal que x_0 é um ponto qualquer de $\bar{P}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{para qualquer } x \text{ de } \bar{P}.$$

Por hipótese a derivada média de $f(x)$ existe quase sempre em $\bar{P}$ e de acordo com o teorema de Egoroff existe um conjunto perfeito P , $P \subset \bar{P}$ de medida tão próxima da de $\bar{P}$ quanto se queira e tal que:

i) $f'_B(x)$ é limitada em P e

$$\text{ii) } \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt \rightarrow f'_B(x)$$

uniformemente em P , quando $h \rightarrow 0$.

Seja $|f'_B(x)| \leq M$, $M > 0$ em P , existe então um $H > 0$ tal que para $|h| < H$, temos:

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt \right| < 2M$$

x qualquer ponto de P .

Seja A um ponto de P e $\mathbb{I}(h)$ a parte de P "encaixada" em $(A, A+h)$. Designaremos por $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \dots$ os intervalos contíguos de $\mathbb{I}(h)$ com respeito ao intervalo $(A, A+h)$, teremos então:

$$\begin{aligned} \int_A^{A+h} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha &= \\ \int_{\mathbb{I}(h)} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha \end{aligned} \quad (1)$$

sob a condição que a integral $\int_{\mathbb{I}(h)}$ existe sendo definida como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[A+\varepsilon, A+h], \mathbb{T}(h)}$$

e que a série do segundo membro converge absolutamente. A existência da integral em questão é uma consequência do fato de que

$$\frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} \rightarrow 0 \quad \text{com } |\alpha - A|, \alpha \in \mathbb{T}(h).$$

Com efeito, uma simples aplicação do primeiro teorema da média nos dá:

$$\frac{1}{h} \int_{\mathbb{T}(h)} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha \rightarrow 0 \quad \text{para } h \rightarrow 0 \quad (2)$$

Sejam a_n, b_n as extremidades dos intervalos δ_n e seja, para fixar idéias,

$$|A - a_n| < |A - b_n|$$

Temos,

$$\int_{\delta_n} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha = \int_{\delta_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - A} d\alpha + \int_{\delta_n} \frac{f(a_n) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha$$

Mas, por um lado,

$$\left| \int_{\delta_n} \frac{f(a_n) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha \right| = |f(a_n) - f(A)| \left| \int_{\delta_n} \frac{d\alpha}{\alpha - A} \right| \leq$$

$$\left| \frac{f(a_n) - f(A)}{a_n - A} \right| \cdot \delta_n < \delta_n$$

para $|h|$ suficientemente pequeno, pois o primeiro fator tende a zero com h . Por outro lado;

$$\int_{\delta_n}^{\delta_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - A} d\alpha = \int_{\delta_n}^{\delta_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} \cdot \frac{\alpha - a_n}{\alpha - A} d\alpha$$

como $\frac{\alpha - a_n}{\alpha - A}$ é monótona em δ_n , apliquemos o teorema da média p/ integrais

e então temos:

$$\left| \int_{a_n + \varepsilon}^{b_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} \cdot \frac{\alpha - a_n}{\alpha - A} d\alpha \right| =$$

$$\frac{b_n - a_n}{b_n - A} \left| \int_{\xi}^{b_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} d\alpha \right| =$$

$$\frac{b_n - a_n}{b_n - A} \left| \int_{\xi}^{b_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} d\alpha \right| \leq$$

$$\frac{\delta_n}{|a_n - A|} \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} d\alpha \right| + \left| \int_{a_n}^{\xi} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} d\alpha \right| <$$

$$\frac{4M\delta_n^2}{|a_n - A|} = \frac{4M\delta_n}{|a_n - A|} \delta_n,$$

onde $|a_n - A| < |a_n + \varepsilon - A| < |\xi - A| < |b_n - A|$, ε arbitrariamente pequeno.

Suponhamos que A é tal que: para $|h|$ suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{4M\delta_n}{|a_n - A|} < 1 \quad (*)$$

então

$$\left| \int_{\delta_n} \frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - A} d\alpha \right| < \delta_n$$

e por consequência:

$$\left| \int_{\delta_n} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha \right| < 2\delta_n$$

donde decorre a convergência absoluta da série do segundo membro de (1); temos também:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha < 2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$$

então:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha = 0$$

Em virtude de (1) e (2), temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_A^{A+h} \frac{f(\alpha) - f(A)}{\alpha - A} d\alpha = 0$$

donde temos que a derivada média de $f(x)$ é nula em todo ponto de P onde vale a propriedade (*), ou seja, quase sempre em E , pois

$m(E)-m(P)$ é arbitrariamente pequena. Podemos concluir então, que

Se a derivada assintótica da função contínua $f(x)$ se anula em todo ponto de um conjunto E , de medida não nula e a derivada média de $f(x)$ existe quase sempre no mesmo conjunto, então $f'_B(x)$ é igual a zero quase sempre em E .

Vamos agora mostrar a existência de uma função contínua, admitindo derivada assintótica em um conjunto de medida positiva e desprovida de derivada média quase sempre no mesmo conjunto.

Primeiramente, construiremos o conjunto procurado:

Seja n_k o menor inteiro positivo tal que:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n_k} > 2^{k+1}$$

Façamos agora uma partição do intervalo $(0,1)$ em $2n_1$ partes iguais e designaremos os pontos da subdivisão por:

$$0, c_1, c_2, \dots, c_{2n_1-1}, 1$$

(respectivamente da esquerda para a direita).

Seja δ_i o intervalo de centro c_i e de comprimento $\frac{1}{8n_1}$, onde δ_i

designará também o comprimento do intervalo da mesma notação. Então teremos:

$$\sum_{i=1}^{2n_1-1} \delta_i < \frac{1}{4}$$

Os intervalos δ_i ($i=1,2,3,\dots,2n_1-1$) serão ditos "os intervalos do primeiro grupo". Em seguida fazemos uma nova partição em cada intervalo que separa dois δ_i vizinhos, dividindo cada um deles

em $2n_1$ partes iguais e designaremos os pontos da subdivisão por

$$c_{2n_1}, c_{2n_1+1}, c_{2n_1+2}, \dots$$

(respectivamente da esquerda para a direita). Assim em torno de cada um destes pontos será construído um intervalo de comprimento

$$\frac{1}{32n_1n_2}$$

tendo por centro o ponto dado e chamaremos tais intervalos de "intervalos do segundo grupo" e lhes notaremos respectivamente por

$$\delta_{2n_1}, \delta_{2n_1+1}, \delta_{2n_1+2}, \dots$$

A soma dos comprimentos dos intervalos do segundo grupo é menor que

$$\frac{1}{32n_1n_2} 2n_1 2n_2 = \frac{1}{8}$$

continuando este processo indefinidamente, para o comprimento dos intervalos do k -ésimo grupo encontraremos:

$$\frac{1}{2^{2k+1}n_1n_2\dots n_k}$$

de sorte que a soma de seus comprimentos será menor que

$$\frac{1}{2^{k+1}}$$

A soma total dos comprimentos dos intervalos de todos os grupos será por conseguinte, menor (ou no mínimo)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2}$$

Este conjunto perfeito nos servirá para definir a função procurada. Designaremos por P e teremos

$$m(P) > \frac{1}{2}$$

Consideremos a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{|x - c_i|} \quad (1)$$

esta série diverge para todo ponto x do conjunto P ; com efeito, quando começamos a k -ésima operação do processo descrito anteriormente, x está encaixado no intervalo que separa dois intervalos do $(k-1)$ -ésimo grupo. Para fixar idéias, vamos supor que esta é a extremidade direita do intervalo que está mais afastada de x . Na k -ésima operação, vamos dividir o intervalo que contém x em $2n_k$ partes de tal modo que ao menos n_k partes fiquem à direita de x estes são os intervalos do k -ésimo grupo que chamaremos:

$$\delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3}, \dots, \delta_{m+p} \quad (p \geq n_k)$$

(respectivamente da direita para esquerda)

As diferenças $(c_{m+1} - x)$, $(c_{m+i} - c_{m+i-1})$ $i=1, 2, 3, \dots, p$

são menores que

$$\frac{1}{2^k n_1 n_2 \dots n_k}$$

de outra parte, temos:

$$\delta_{m+i} = \frac{1}{2^{2k+1} n_1 n_2 \dots n_k} \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

então:

$$\sum_{i=1}^p \frac{\delta_{m+i}}{|x-c_{m+i}|} >$$

$$\frac{1}{2^{2k+1} n_1 n_2 \dots n_k} \left[2^k n_1 n_2 \dots n_k + \frac{2^k n_1 n_2 \dots n_k}{2} + \frac{2^k n_1 n_2 \dots n_k}{3} + \dots + \frac{2^k n_1 n_2 \dots n_k}{p} \right] =$$

$$\frac{1}{2^{k+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} \right] \geq \frac{1}{2^{k+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n_k} \right] > 1$$

pois $p \geq n_k$, da definição de n_k .

Ora, m é tão grande quanto se queira, e k também, então a série (1) diverge no ponto x , como queríamos.

Agora provaremos que existe uma série de números positivos

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_k, \dots$$

tal que $\Gamma_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$ e que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma_i \delta_i}{|x-c_i|}$$

diverge quase sempre em P .

Com efeito; seja em geral, p_k o menor inteiro positivo tal que:

$M(P) - m(E_k) < \frac{1}{2^k}$ onde E_k é o conjunto de pontos para os quais temos:

$$\sum_{i=p_1+p_2+\dots+p_{k-1}+1}^{i=p_1+p_2+\dots+p_k} \frac{\delta_i}{|x-c_i|} > 2^{k+1}$$

Vamos colocar

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = \dots = \Gamma_{p_1} = 1$$

$$\Gamma_{p_1+1} = \Gamma_{p_1+2} = \dots = \Gamma_{p_1+p_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma_{p_1+p_2+1} = \Gamma_{p_1+p_2+2} = \Gamma_{p_1+p_2+3} = \dots = \frac{1}{2^2}$$

⋮

$$\Gamma_{p_1+p_2+\dots+p_{k-1}+1} = \Gamma_{p_1+p_2+\dots+p_{k-1}+2} = \dots = \Gamma_{p_1+p_2+\dots+p_{k-1}+p_k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Para um ponto x que pertence a P e a E_k teremos então:

$$\sum_{i=p_1+p_2+\dots+p_{k-1}+1}^{p_1+p_2+\dots+p_k} \frac{\Gamma_i \delta_i}{|x-c_i|} > 1$$

e a série (2) é divergente para todo ponto P fazendo parte de uma infinidade de conjuntos E_k ($k=1,2,3,\dots$). Ora as medidas destes conjuntos são escolhidas de modo que esta condição seja satisfeita quase sempre em P , o que demonstra a afirmação.

Vamos agora definir a função contínua $f(x)$ pelas condições seguintes:

- 1) $f(x) = 0$ em P
- 2) $f(x) = \Gamma_n$ para $x = c_n$
- 3) $f(x)$ é linear nalguma das duas metades do intervalo δ_n .

Seja x um ponto interior de P para o qual a série (2) diverge. Esta série é a soma de duas séries, se relacionando respectivamente aos intervalos situados à direita e à esquerda de x , onde uma ao menos, é divergente. Para fixar idéias, suponhamos que a divergente seja aquela que é relativa ao intervalo contíguo situado à direita de x . Vamos mostrar que $f(x)$ não admite em x , uma derivada média à direita. De um modo mais preciso, nós provaremos que a integral

$$\int_0^h \frac{f(x+\alpha)}{\alpha} d\alpha \quad \text{não tem sentido quando } h > 0.$$

Vejamos:

Sejam a_n e b_n ($a_n < b_n$) as extremidades de δ_n , teremos :

$$\int_0^h \frac{f(x+\alpha)}{\alpha} d\alpha = \sum_n' \int_{a_n-x}^{b_n-x} \frac{f(x+\alpha)}{\alpha} d\alpha \quad (3)$$

onde a soma do segundo membro se estende aos intervalos contíguos

(ou partes de tais intervalos) compreendidos no intervalo $(x, x+h)$.
Os dois membros podendo se tornar infinito.

Ora,

$$\int_{a_n - x}^{b_n - x} \frac{f(x+a)}{a} da >$$

$$\frac{1}{b_n - x} \int_{a_n - x}^{b_n - x} f(x+a) da =$$

$$\frac{\Gamma_n \delta_n}{2(b_n - x)} = \frac{\Gamma_n \delta_n}{2(c_n - x)} - \frac{\Gamma_n \delta_n}{2(b_n - x)} \cdot \frac{\delta_n}{2(c_n - x)}$$

então se a série do segundo membro de (3) fosse convergente,
a série

$$\sum \frac{\Gamma_n \delta_n}{2(b_n - x)} \quad \text{também o seria, e em virtude da desigualdade:}$$

dade:

$$\frac{\delta_n}{2(c_n - x)} < 1 \quad \text{a série}$$

$$\sum \frac{\Gamma_n \delta_n}{2(c_n - x)} \quad \text{seria convergente, o que é contrário a hipótese; então o segundo membro de (3) é infinito, assim}$$

$f(x)$ é desprovida de derivada média em x . Ora quase todo ponto de P satisfaz as hipóteses feitas sobre x , de outra parte, como $f(x)$ se anula em todo ponto de P , sua derivada assintótica é nula em todo ponto de P , onde vale a propriedade (*), ou seja,

quase sempre em P , $f(x)$ tem derivada assintótica nula. Assim podemos dizer:

Existe uma função contínua assintoticamente derivável em todo ponto de um conjunto mensurável cuja medida não é nula e desprovida de derivada média no mesmo conjunto.

Como já dissemos no início deste capítulo, dentro da teoria de integração que Arnaud Denjoy desenvolve é inevitável a introdução de derivada assintótica. Com efeito, consideremos uma função contínua $F(x)$ igual a zero em todo ponto de um conjunto perfeito, não denso P de medida não nula, possuindo uma derivada comum em todo ponto pertencente a um intervalo contíguo de P e cujos quatro números derivados são infinitos quase sempre em P , (tal função como já foi dito antes é possível de ser construída). Seja $f(x)$ a função igual a zero em P e a $F'(x)$ fora de P . Diremos que $F(x)$ é igual à integral indefinida de $f(x)$ tomada no sentido de Denjoy. A função $F(x)$ será considerada como a função primitiva mais simples e natural de $f(x)$. Ora, esta não é uma função primitiva no sentido exato que conhecemos, pois ela não tem derivada comum num conjunto de medida positiva. Por outro lado, a derivada assintótica de $F(x)$ é evidentemente igual à $f(x)$ quase sempre. Temos então várias razões para escolher por integral indefinida da função mensurável $f(x)$ (função que como toda função mensurável, tem uma infinidade de funções primitivas no sentido comum), uma função que é assintoticamente derivável e por conseguinte, não faz parte das primitivas exatas

da função a integrar.

Preocupemo-nos agora, em relacionar a derivada assintótica com a derivada comum; assim suponhamos que a função mensurável $F(x)$ admita derivada assintótica, digamos $f(x)$ em todo ponto de um dado intervalo. Verifiquemos em que condições podemos afirmar a existência da derivada comum, i.é., quando $f(x)$ é a derivada comum de $F(x)$.

Consideremos primeiramente $F(x)$ uma função não decrescente no intervalo (a,b) . Suponhamos que a derivada assintótica de $F(x)$ em um certo ponto x deste intervalo é um valor k , ($k > 0$). Demonstraremos, sob tais condições que $F(x)$ admite em x uma derivada comum igual a k .

Com efeito, se $F(x)$ não tem derivada, digamos à direita igual a k , em x , então existe $\varepsilon < \frac{k}{2}$ e tal que:

$\delta > 0$, existe h tal que

$$0 < h < \frac{\delta}{2} ; \quad \left| \frac{F(x+h) - F(x) - k}{h} \right| > 2\varepsilon \quad (1)$$

Supondo estas condições satisfeitas, admitamos em primeiro lugar que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} < k$$

então dizemos que para um ponto qualquer do intervalo,

$$\left[x + (1 - \frac{k - \varepsilon}{k})h, x+h \right] \quad \text{teremos:}$$

$$\left| \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} - k \right| < \epsilon$$

Com efeito, sejam A e B os pontos representando em um sistema retangular as coordenadas $(x, F(x))$ e $(x+h, F(x+h))$. O coeficiente angular da reta AB é por hipótese menor que $k - 2\epsilon$, traçaremos as retas AC e AD de coeficientes angulares respectivamente iguais a $k - \epsilon$ e $k + \epsilon$, enfim pelo ponto B traçaremos uma paralela ao eixo dos x , e seja E o ponto onde esta reta encontra a reta AD.

O comprimento do segmento BE é ao menos igual a $h \frac{\epsilon}{k - \epsilon}$

$F(x)$ sendo por hipótese não decrescente, sua imagem entre as abscissas dos pontos E e B está situada abaixo de AD, oque demonstra nossa afirmação. Demonstra-se da mesma maneira que, quando

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} > k$$

temos:

$$\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} < k + \epsilon$$

para todo ponto ξ do intervalo $[x+h, x+(1 + \frac{\epsilon}{k+\epsilon})h]$

Vimos então que existe, em todo caso, um intervalo tão pequeno quanto δ_1 , tendo o ponto x por extremidade esquerda e contendo em seu interior um outro intervalo δ_2 , onde um ponto arbitrário ξ satisfaz à condição:

$$\left| \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} - k \right| > \epsilon$$

ainda mais, o produto dos comprimentos dos intervalos δ_2 e δ_1 , ultrapassa um número positivo que é independente do comprimento de δ_1 . Isso mostra que $F(x)$ não admite derivada assintótica igual a k no ponto x , o que contraria a hipótese, donde concluímos que:

Se f é uma função não decrescente admitindo derivada assintótica positiva em um ponto, então ela é derivável no sentido comum no mesmo ponto e os dois valores coincidem. A afirmação subsiste para função crescente e a derivada assintótica negativa.

Suponhamos agora que a função mensurável $f(x)$ seja em todo ponto de um intervalo a derivada assintótica de uma outra função mensurável $F(x)$. Nós diremos que $f(x)$ é "majorada" pela função $\psi(x)$ quando $\psi(x) > f(x)$ em todo de um intervalo considerado. Suponhamos que $f(x)$ é, no intervalo considerado, majorada por uma função $\psi(x)$ que, em todo ponto deste intervalo é a derivada comum de uma função contínua $\phi(x)$; a função $\psi(x) - f(x)$ será em todo ponto do intervalo considerada a derivada assintótica da função $\phi(x) - F(x)$. Aplicando o resultado anterior, temos que $\psi(x) - f(x)$ é a derivada comum de $\phi(x) - F(x)$ em todo ponto do intervalo considerado, então teremos:

$$F'(x) = f(x)$$

para todos valores considerados de x . A conclusão recíproca também é verdadeira, pois toda derivada exata de $f(x)$ é majorada pela derivada exata $f(x) + 1$. Nós somos então levados a concluir algo mais completo:

Para que uma função $f(x)$, que é em todo ponto de um certo

intervalo a derivada assintótica de uma função, seja em todo ponto do intervalo considerado a derivada comum da mesma função, é necessário e suficiente que $f(x)$ seja majorada por uma derivada exata, ou seja, por uma função que é, em todo ponto do intervalo considerado, a derivada comum de uma outra função.

Suponhamos agora que $f(x)$ admita derivada assintótica $f^{[1]}(x)$ quase sempre em $[a,b]$. Designaremos por E_m o conjunto dos x do intervalo $[a,b]$ tal que para todo intervalo contido em $[a,b]$ tendo uma extremidade no ponto x e comprimento menor ou igual a $\frac{1}{m}$, a densidade média neste intervalo de pontos t , que satisfazem a desigualdade:

$$|f(t) - f(x)| \leq m |t - x|$$

exceda o número $\frac{3}{4}$. Temos agora para todo m , $E_m \subset E_{m+1}$, e se negligenciarmos os conjuntos de medida nula, teremos:

$$[a,b] = \sum_{i=1}^{\infty} E_m$$

Existe então, para cada $\epsilon > 0$ um conjunto E_m que difere de $[a,b]$ por um conjunto de medida menor ou igual a $\frac{\epsilon}{2}$. O conjunto E_{m_0} é mensurável, e então podemos escolher $\eta \subset E_{m_0}$, coincidindo com o intervalo $[a,b]$ em um conjunto de medida menor ou igual a ϵ . Seja agora $x < y$ dois pontos do conjunto tal que

$$|x - y| \leq \frac{1}{m_0}$$

Estes dois pontos pertencem por conseguinte, ao conjunto E_{m_0} , podemos afirmar, levando em conta a definição de E_{m_0} , a existência de um ponto t no intervalo (x,y) satisfazendo as duas desigualdades:

$$|f(t)-f(x)| \leq m(t-x)$$

e

$$|f(t)-f(y)| \leq m(y-t)$$

donde temos:

$$|f(y)-f(x)| \leq m_0 |y-x| \quad \text{pois } x,y \in \mathbb{T} \quad \text{e} \quad (1)$$

$$|y-x| \leq \frac{1}{m_0}$$

Designemos agora por $\bar{f}(x)$ a função contínua em $[a,b]$ igual à $f(x)$ nos pontos de $\mathbb{T}$ e linear nos intervalos contíguos de $\mathbb{T}$. Em virtude de (1), a função $\bar{f}(x)$ assim definida é de variação limitada e absolutamente contínua (ela satisfaz a condição de Lipschitz) e difere de $f(x)$ por um conjunto de medida $\leq \varepsilon$. De outro modo, suponhamos que uma tal função $\bar{f}(x)$ de variação limitada existe. Seja x_0 um ponto tal que:

- 1) $\bar{f}'(x_0)$ existe
- 2) $f(x_0) = \bar{f}(x_0)$
- 3) x_0 é um ponto que satisfaz a condição (*) no conjunto $\{x; f(x) = \bar{f}(x)\}$

Também temos que $f^{[4]}(x_0)$ existe e que

$$f^{[4]}(x_0) = f'(x_0).$$

Ou seja, vimos que a medida do conjunto dos x_0 é tão

próxima da medida de $[a,b]$ quanto se queira. Então $f(x)$ é assintoticamente derivável, quase sempre em $[a,b]$, ou seja,

Para que uma função mensurável seja assintoticamente derivável quase sempre, em um certo intervalo, é necessário e suficiente que ela coincida com uma função contínua de variação limitada, (absolutamente contínua) em um conjunto de medida arbitrariamente pequena.

Nos ocuparemos agora da demonstração do teorema de Rolle para derivada assintótica:

Seja $f(x)$ uma função mensurável no intervalo $[0,1]$ assintoticamente derivável em todo ponto do intervalo considerado, e seja $f(0)=f(1)=0$. Então existe entre 0 e 1 um ponto c , onde a derivada assintótica de $f(x)$ é nula.

Indicaremos um processo de construção que conduzirá, sem ambiguidade, ao ponto procurado. Vejamos:

Podemos supor que em $[0,1]$ a função $f(x)$ seja não limitada, e se ela o for, que assuma seus valores extremos apenas nas extremidades do intervalo. Suporemos que as raízes da equação $f(x)=a$, qualquer que seja a , formam um conjunto de medida nula, ao menos no intervalo $[0,1]$. Designaremos por $M(x_1, x_2)$ o limite superior dos valores de $f(x)$ no intervalo $[x_1, x_2]$ e consideraremos $M(x_1, x_2)=+\infty$ no caso em

que a função $f(x)$ não for limitada neste intervalo. Sejam:

$$E(f < A) = \{ x; f(x) < A \}$$

$$E(f = A) = \{ x; f(x) = A \}$$

$$E(f > A) = \{ x; f(x) > A \}$$

onde A é fixado. Chamemos $m(x_1, x_2, A)$ a densidade média do conjunto $E(f > A)$ no intervalo $[x_1, x_2]$. Para x_1 e A fixos, a quantidade $m(x_1, x, A)$ define uma função contínua, salvo talvez para $x = x_1$. Seja $\mu(x_1, x_2, A)$ o limite superior da função $m(x_1, x, A)$ para x variando em $[x_1, x_2]$. Para qualquer que seja x_1, x_2 e A , temos:

$$0 \leq m(x_1, x_2, A) \leq 1$$

$$0 \leq \mu(x_1, x_2, A) \leq 1$$

Demonstraremos agora alguns lemas que auxiliaram na demonstração do teorema em questão.

LEMA I - Para x_1 e x_2 fixos, $\mu(x_1, x_2, A)$ é uma função contínua de A , salvo talvez, para o caso em $A = f(x_1)$.

Com efeito: Seja $\varepsilon > 0$ qualquer e $A \neq f(x_1)$. A função $f(x)$ admite por hipótese, derivada assintótica em x_1 , então existe $\delta > 0$ e $\xi \in [x_1, x_2]$ tal que:

Para todo $x_1 < x' < \xi$, a densidade média de $E(|f-A| < \delta)$ é inferior a ε no intervalo $[x_1, x']$. Por outro lado, como ξ é fixa, podemos tomar $\Gamma > 0$, tal que a medida do conjunto

$$(E(|f-A| < \Gamma)) < |x_1 - \xi| \cdot \varepsilon \quad \text{no intervalo } [x_1, x_2].$$

Seja ΔA um acréscimo qualquer de A , tal que

$$|\Delta A| < \delta \quad \text{e} \quad |\Delta A| < \Gamma$$

Seja η um ponto qualquer de $[x_1, x_2]$; suporemos primeiramente que $x_1 < \eta < \xi$. A densidade média de $E(|f-A| < |\Delta A|)$ no intervalo (x_1, η) é igual ou inferior à densidade média de $E(|f-A| < \delta)$, ou seja, a densidade média de $E(|f-A| < |\Delta A|) < \epsilon$. Por outro lado, a densidade média de $E(|f-A| < |\Delta A|)$ não pode ser menor que

$$|m(x_1, \eta, A+\Delta A) - m(x_1, \eta, A)| \quad (1)$$

Então

$$|m(x_1, \eta, A+\Delta A) - m(x_1, \eta, A)| < \epsilon$$

No caso em que $\xi < \eta < x_2$ a quantidade (1) não pode exceder a densidade média de $E(|f-A| < |\Delta A|)$ no intervalo $[x_1, \eta]$ e esta é ao menos igual à densidade média de $E(|f-A| < \Gamma)$ no mesmo intervalo, ou seja,

$$|m(x_1, \eta, A+\Delta A) - m(x_1, \eta, A)| \leq \text{densidade média de}$$

$$E(|f-A| < \Gamma) \text{ em } [x_1, \eta]$$

De outra parte, a densidade média de $E(|f-A| < \Gamma) < \epsilon$, pois a medida deste conjunto em $[x_1, \eta]$ é menor que $|x_1 - \xi| \epsilon$ e o comprimento deste intervalo é maior que $|x_1 - \xi|$.

Daí temos que:

$$|m(x_1, \eta, A+\Delta A) - m(x_1, \eta, A)| < \epsilon$$

donde concluímos que

$$|\mu(x_1, x_2, A+\Delta A) - \mu(x_1, x_2, A)| < \epsilon$$

para $|\Delta A|$ suficientemente pequeno, o que demonstra o lema.

LEMA II- Fixemos a, x_1, x_2 , então temos que
 $\mu(x_1, x_2, A) \rightarrow 0$ quando $A \rightarrow M(x_1, x_2)$
 salvo no caso em que $f(x_1) = M(x_1, x_2)$

Vejamos:

Seja $\varepsilon > 0$ e A_1 arbitrário tal que $f(x_1) < A_1 < M(x_1, x_2)$

A função $f(x)$ tem derivada assintótica em x_1 , então existe ξ entre x_1 e x_2 tal que $m(x_1, x, A_1) < \varepsilon$ $x_1 < x \leq \xi$

Por outro lado, ξ sendo fixo, podemos considerar $A_2 < M(x_1, x_2)$ tal que a medida do conjunto $E(f > A_2)$ em $[x_1, x_2]$ seja menor que $|x_1 - \xi| \cdot \varepsilon$.
 Seja x um ponto do intervalo $[x_1, x_2]$ e seja A um número tal que:

$$A_1 < A < M(x_1, x_2)$$

$$A_2 < A < M(x_1, x_2)$$

Se $x_1 < x < \xi$ temos

$$m(x_1, x, A) \leq m(x_1, x, A_1) < \varepsilon$$

e se $\xi < x < x_2$, segue que

$$m(x_1, x, A) \leq m(x_1, x, A_2) < \varepsilon \text{ pois } A_2 < M(x_1, x_2)$$

pois $A_2 < M(x_1, x_2)$.

Então qualquer que seja $x \in [x_1, x_2]$, temos:

$$m(x_1, x, A) < \varepsilon$$

donde

$$\mu(x_1, x, A) < \varepsilon \quad \text{desde que o valor } A \text{ seja sufi-}$$

cientemente próximo de $M(x_1, x_2)$, e o lema está assim demonstrado.

Consideremos agora $f^{[4]}(x)$ a derivada assintótica de $f(x)$ no ponto x . Se $f^{[4]}(x)=0$ temos o caso trivial, então suporemos $M(0,1)>0$; caso contrário mudaremos $f(x)$ por $-f(x)$.

Suporemos $f^{[4]}(x)>0$. Seja a um ponto tal que $f^{[4]}(a)\neq 0$, existe $b\neq a$ tal que $f(b)=f(a)$. Suporemos que um dos valores $f^{[4]}(0)$ ou $f^{[4]}(1)$ seja diferente de zero, digamos, $f^{[4]}(0)>0$, caso contrário mudaremos o intervalo $[0,1]$ pelo intervalo $[a,b]$ e a função $f(x)$ pela função $f(x)-f(a)$. Em virtude desta última hipótese, temos que:

$$\mu(0,1,0)=1$$

Por outro lado, temos que:

$\mu(0,1,A)\rightarrow 0$ quando $A\rightarrow M(0,1)$ pelo lema II, onde $\mu(0,1,A)$ é contínua para valores positivos de A , (lema I).

Seja agora A_1 o menor número positivo tal que

$$\mu(0,1,A_1)=\frac{1}{4} \quad (2)$$

como $f(0)=0$, para x suficientemente pequeno temos que:

$$m(0,x,A_1)<\frac{1}{4}$$

Também temos que $f(1)=0$, donde para h suficientemente pequeno, segue:

$$m(1-h,1,A_1)<\frac{1}{4}$$

Como consequência da definição de μ e por (2) temos também:

$$m(0,1-h,A_1)\leq \frac{1}{4}$$

E as duas desigualdades nos dão:

$$m(0,1,A_1)<\frac{1}{4} \quad (3)$$

A função contínua de x , $m(0,x,A_1)$ atinge seu máximo (que é $\frac{1}{4}$),

no interior de $[0,1]$. Seja x_1 o maior valor tal que:

$$m(0, x_1, A_1) = \frac{1}{4}$$

Vamos estudar a função $f(x)$ na vizinhança de x_1 .

A desigualdade $f(x_1) < A_1$ é impossível. Com efeito, procedendo do mesmo modo como chegamos a (3), temos que:

$$m(0, x_1, A_1) < \frac{1}{4} \quad \text{o que contraria a definição de } x_1.$$

Por outro lado, se tivermos a desigualdade $f(x_1) > A_1$, podemos tomar à direita de x_1 um ponto x tal que:

$$m(x_1, x, A_1) > \frac{1}{4}$$

como

$$m(0, x_1, A_1) = \frac{1}{4}$$

temos então que:

$$m(0, x, A_1) > \frac{1}{4}$$

que contraria (2), daí

temos necessariamente que $f(x_1) = A_1$.

Estudemos agora o valor de $f^{[1]}(x_1)$. Se $f^{[1]}(x_1) = 0$, o teorema estaria demonstrado. A hipótese $f^{[1]}(x_1) > 0$ não acontece e vemos isto do mesmo modo como vimos a impossibilidade de $f(x_1) > A_1$. Então nos resta estudar o caso em que $f^{[1]}(x_1) < A_1$, e agora no intervalo $[0, x_1]$ temos as seguintes condições:

- | | | |
|----|---------------------------------|---------------------|
| 1º | $f(0) = 0$ | $f(x_1) = A_1$ |
| 2º | $f^{[1]}(0) > 0$ | $f^{[1]}(x_1) < 0$ |
| 3º | $m(0, x, A_1) \leq \frac{1}{4}$ | para $x \leq x_1$. |

Podemos então escolher $a_i \in [0, x_1]$, determinados pelas seguintes condições:

- 1) $m(x, x_1, A_1) \geq \frac{3}{4}$
- 2) qualquer que seja $\epsilon > 0$, existe $\xi > 0$ tal que

$$a_1 - \varepsilon < \xi < a_1 \quad \text{e} \quad m(x_1, \xi, A_1) < \frac{3}{4}$$

temos então

$$f(a_1) \leq A_1 \quad \text{e} \quad m(a_1, x_1, A_1) = \frac{3}{4} \quad (4)$$

Vamos mostrar que:

$$x_1 - a_1 < \frac{1}{2} x_1$$

Suponhamos que $x_1 - a_1 \geq \frac{1}{2} x_1$, então a relação da medida do conjunto

$E(f > A_1) = \{x; f(x) > A_1\}$ no intervalo $[a_1, x_1]$ e o comprimento deste será:

$$m(a_1, x_1, A_1) \leq \frac{\text{medida } [E(f > A_1)] \text{ em relação a } [0, x_1]}{|a_1 - x_1|} =$$

$$\frac{\frac{1}{4} x_1}{|a_1 - x_1|} \leq \frac{\frac{1}{4} x_1}{\frac{1}{2} x_1} = \frac{1}{2}$$

ou seja $m(a_1, x_1, A_1) \leq \frac{1}{2}$ o que contraria (4). Tudo isto no intervalo $[a_1, x_1]$. De 1ª e 2ª temos que:

$$\mu(x_1, a_1, A_1) = 1$$

Pelos lemas I e II, $\mu(x_1, a_1, A)$ é uma função contínua de A quando $A > A_1$ e $\mu(x_1, a_1, A) \rightarrow 0$ quando $A \rightarrow M(x_1, a_1)$.

Existe então um número bem determinado $A_2 > A_1$, tal que:

$$\mu(x_1, a_1, A_2) = \frac{1}{4}$$

$$\mu(x_1, a_1, A) < \frac{1}{4} \quad \text{para } A > A_2.$$

Então temos que:

$$m(x_1, x, A_2) < \frac{1}{4} \quad \text{para } x \text{ suficientemente perto}$$

de x_1 .

Por outro lado, a relação $f(a_1) \leq A_1 < A_2$ nos dá que:

$$m(x_1, a_1, A_2) < \frac{1}{4}$$

ou seja, existem pontos x entre x_1 e a_1 satisfazendo a condição:

$$m(x_1, x, A_2) = \frac{1}{4}$$

Seja x_2 o ponto mais perto de a_1 , tal que

$$m(x_1, x_2, A_2) = \frac{1}{4}$$

Raciocinando de modo análogo ao caso anterior, temos que:

$$f(x_2) = A_2 \quad f^{[1]}(x_1) \geq 0.$$

Se x_2 estiver situado entre a_1 e x_1 , por 1) segue que:

$$m(x, x_1, A_1) \geq \frac{3}{4} \quad \text{onde } x_2 \leq x < x_1.$$

Podemos então enunciar os resultados estabelecidos no intervalo

$[x_1, x_2]$ da seguinte maneira:

- 1') $f(x_1) = A_1 \quad f(x_2) = A_2 > A_1$
- 2') $f^{[1]}(x_1) < 0 \quad f^{[1]}(x_2) > 0$
- 3') $m(x_1, x, A_1) \geq \frac{3}{4} \quad m(x_1, x, A_2) \geq \frac{1}{4} \quad \text{para } x_1 < x < x_2$
- 4') $|x_1 - x_2| < \frac{1}{2} |x_1 - 0|$

Continuando este processo indefinidamente, temos que: Todo intervalo (x_{n-1}, x_n) faz parte do intervalo (x_{n-2}, x_{n-1}) e satisfaz às seguintes propriedades:

- $1^{(n-1)} \quad f(x_{n-1}) = A_{n-1} \quad f(x_n) = A_n > A_{n-1}$
- $2^{(n-1)} \quad f^{[1]}(x_{n-1}) > 0 \quad f^{[1]}(x_n) < 0$

ou reciprocamente se n é par ou ímpar)

$$3^{(n-1)} \quad m(x_{n-1}, x, A_{n-1}) \geq \frac{3}{4} \quad m(x_{n-1}, x, A_n) \geq \frac{1}{4}$$

para $x_{n-1} < x < x_n$

$$4^{(n-1)} \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

Então os intervalos (x_{n-1}, x_n) , $n=1, 2, 3, \dots$, onde $x_0=0$, têm um único ponto em comum que designaremos por c .

Vamos demonstrar que $f^{[1]}(c)=0$, o que demonstra o teorema de Rolle. A propriedade $3^{(n-1)}$ nos dá a seguinte propriedade que designaremos por (5):

Qualquer que seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $N \in \mathbb{N}$ tão grande quanto necessário, existe um número positivo $n > N$ e um intervalo $[c, x]$ de comprimento inferior a ϵ , tal que a densidade média do conjunto

$$E\{A_n < f < A_{n+1}\} \text{ seja maior que } \frac{1}{2} \text{ em } [c, x].$$

Para n tendendo a infinito, A_n tende para um limite positivo, digamos α , então $f(c)=\alpha$, com efeito, mostraremos que $f(c) \neq \alpha$ conduz a uma contradição. Admitamos tal hipótese: A função $f(x)$ é assintoticamente derivável em c , a densidade do conjunto

$E(|f(x)-f(c)| > \epsilon)$ no intervalo que tem por extremidade c , é menor que $\frac{1}{4}$ para qualquer $\epsilon > 0$, quando o intervalo é suficientemente pequeno. Escolhendo ϵ de modo que α esteja fora do intervalo

$$[f(c)-\epsilon, f(c)+\epsilon] \text{ obtemos uma contradição de (5).}$$

Então $f(c)=\alpha$. Analisemos agora o valor de $f^{[1]}(c)$.

a) Se $f^{[1]}(c) > 0$, para um intervalo suficientemente pequeno $[c, d]$,

temos:

$m(c,d,\alpha) > \frac{1}{2}$ o que é impossível em vista de (5).

b) Se $f^{[1]}(c) < 0$ temos outra contradição, procedendo de modo análogo ao caso anterior. Portanto $f^{[1]}(c) = 0$ como queríamos.

CAPÍTULO IV

Comentários finais.

Khintchine ocupa-se de vários outros resultados sobre derivada assintótica, que infelizmente deixamos de estudar. Pretendemos porém, dedicar-nos posteriormente ao estudo de tais resultados, como por exemplo, "se f é uma função contínua admitindo derivada média quase sempre em E , conjunto de medida positiva, então f admite derivada assintótica quase sempre em E ", ou ainda, "se a função contínua $f(x)$ admite uma derivada média em todo ponto de um conjunto mensurável, ela admite também uma derivada assintótica quase sempre no mesmo conjunto, e os valores coincidem quase sempre no conjunto em questão". Outro resultado que chamou a atenção, foi que "uma condição necessária e suficiente para a diferenciabilidade assintótica de uma função mensurável quase sempre, em um intervalo, consiste em que este intervalo possa ser dividido em uma infinidade enumerável de conjuntos mensuráveis, cujo primeiro seja de medida nula e que $f(x)$ seja absolutamente contínua em cada um deles".

A seguir Khintchine dedica-se à discussão sobre uma generalização de derivada que se baseia na generalização da noção de convergência em medida.

Sejam f, F duas funções. Se para qualquer $\epsilon > 0$, a medida do conjunto

$$\left\{ x ; \left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right] > \epsilon \right\} \quad \text{tende à zero com } h,$$

diremos que $f(x)$ é uma derivada generalizada de $F(x)$.

O resultado mais interessante sobre tal noção que Khintchine demonstra, diz que "se a função $f(x)$ admite uma derivada assintótica quase sempre em um certo intervalo, ela admite também neste intervalo uma derivada generalizada e os valores coincidem, a menos de um conjunto de medida arbitrariamente pequena"; além disso, ele constrói uma função mensurável e uma contínua sem derivada generalizada.

Em dimensão superior, gostaria de citar o trabalho de Emma Guariglia : "Sulla differenziabilità asintotica", cujo resultado principal fornece para o caso de uma função numérica, mensurável de 2 variáveis, uma condição necessária e suficiente para a diferenciabilidade assintótica da mesma.

Cabe ainda colocar que, recentemente vários autores, como em particular:

P. de Lúcia : "Sulla differenziabilità delle funzioni",
(ainda em fase de redação)- Boll. UMI.

P. de Lúcia : "Sulla differenziabilità quasi ovunque di
una funzione misurabile"
Ric. di Mat., XIX(1970), 79-92.

B. Bongiorno : "Sulla differenziabilità quasi ovunque
delle funzioni di più variabili"
Rend. Circ. Mat. di Palermo, s. II, 20
(1971), 34-42.

B. Bongiorno : "Sulla differenziabilità delle funzioni

β -misurabili"

Atti Acc. Sci. Let. e Arti di Palermo.

s. IV, 32 (1973), 363-374.

U. Oliveri : "Sulla differenziabilità asintotica per le
funzioni di più variabili"

REnd. Circ. Mat. di Palermo, s. II, 20
(1971), 213-218.

F.I. Shmidov : "The structure of a mesurable function of
two variables"

Sib. Math. Journ., vol. 14, n.4 (1973),
588-598.

se ocupam de caracterizar a diferenciabilidade quase sempre e a
diferenciabilidade assintótica quase sempre.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Borel, Émile : Modèles Arithmétiques et Analytiques
de L'irréversibilité apparente.
Comptes Rendus de l'Ac. de Paris, t. 154, p. 1148-1150.
- [2] Denjoy, Arnaud : Sur la dérivation et son calcul in
verse.
Ann. de l'Éc. Norm. Sup., 1916.
- [3] Denjoy, Arnaud : Sur les nombres dérivés des fonctions
continues.
Journal des mathématiques, p. 105-240, 1915
- [4] Hobson, E. W. : The theory of functions of a real va-
riable and the theory of Fourier's Series.
Dover publications, INC- New York. V. II.
- [5] Khintchine, A. : Recherches sur la structure des fonc-
tions mesurables.
Fundamenta Mathematicae, t. 9, p. 214-279, 1927.
- [6] Khintchine, A. : Sur la dérivation asymptotique.
Comptes Rendus, t. 164, p. 142, 1917.
- [7] Khintchine, A. : Sur une extension de l'intégrale de
Denjoy.
Comptes Rendus, t. 162, p. 297, 1916.

- [8] Maisano, Francesco : Sopra una generalizzazione della derivata simmetrica.
Atti Accad. Sci. Sett. Arti, p. 372-378, 1971.
- [9] Valenti, Santi: Sur la Dérivation k-pseudo symétrique des fonctions numériques.
Fundamenta Mathematicae, LXXIV(1972) p. 147-152.
- [10] Young, G.C. : note de 13 de mars, 1916
Comptes Rendus de l'Ac. de Paris.
- [11] Nagy, Béla SZ: Introduction to real functions and orthogonal expansions.
Oxford University Press- 1965.