

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica
Departamento de Matemática

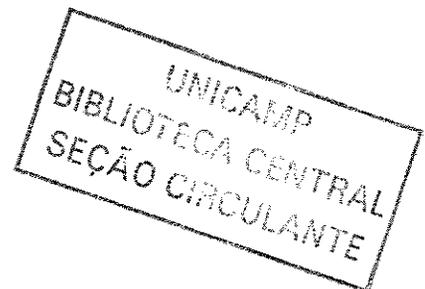
Geometria não-comutativa e o modelo de Connes-Lott

Dissertação de Mestrado

Aluno: **Rafael de Freitas Leão**

Orientador: **Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.**

Campinas, 9 de maio de 2003



Geometria não-comutativa e o modelo de Connes-Lott

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Rafael de Freitas Leão** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 9 de maio de 2003



Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
Orientador

Banca Examinadora

1. Prof. Dr. Alcibiades Rigas.
2. Prof. Dr. Alexandre Trovon.
3. Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção de Título de MESTRE em Matemática.

UNIDADE	BR
Nº CHAMADA	UNICAMP
	L476g
V	EX
TOMBO BC/	55400
PROC.	16.124103
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	27/10/8103
Nº CPD	

CM00188310-9

BIB ID 298318

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Leão, Rafael de Freitas

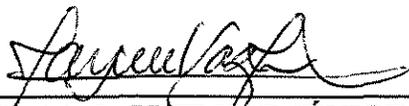
L476g Geometria não-comutativa e o modelo de Connes-Lott / Rafael de
Freitas Leão -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : Jayme Vaz Jr.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Física matemtica. 2. Geometria. 3. Teoria de campos. I. Vaz Jr.,
Jayme. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de maio de 2003 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). JAYME VAZ JÚNIOR



Prof (a). Dr (a). ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO

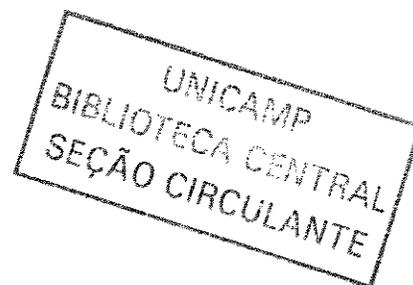


Prof (a). Dr (a). ALCIBIADES RIGAS



Resumo

Nesta dissertação estudamos uma forma de generalizar, algebricamente, alguns conceitos de geometria diferencial clássica (como por exemplo os conceitos de variedade e de fibrados vetoriais sobre variedades). Além disso, construímos para estas estruturas algébricas as ferramentas usuais do cálculo integro-diferencial. Estes conceitos são a base da geometria não-comutativa, que nos permite estudar alguns espaços excluídos do tratamento geométrico usual, como por exemplo o espaço com apenas dois pontos. Em particular usamos a geometria do espaço de dois pontos juntamente com a geometria usual do espaço-tempo para estudar uma versão geométrica do conhecido modelo padrão de partículas elementares (em particular o modelo de Weinberg-Salam). Um dos grandes ganhos obtidos com essa formulação geométrica é que o boson de Higgs aparece de uma forma natural dentro do modelo como parte de uma conexão nesse espaço mais geral.



Abstract

In this dissertation we studied how to generalize in an algebraic way some of the concepts of classical differential geometry (like the concepts of manifolds and vector bundles). Moreover, we developed the integral and differential calculus over these algebraic structures. These concepts are the basis of the noncommutative geometry, which enabled us to study from a geometrical point of view some spaces (like the two point space) that are excluded from usual treatments. In particular we used the geometry of the two point space with the usual space-time geometry in order to formulate a geometrical version of the standard model of elementary particles (in particular the Weinberg-Salam model). One of the great advantages of this geometric formulation is that the Higgs boson appears in a natural way as part of a connection in this more general space.

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação só foi possível graças ao apoio e a ajuda de muitas pessoas. Dentre elas gostaria de agradecer o meu orientador, Prof. Dr. Jayme Vaz Jr., pelos anos de atenção, deste o primeiro projeto de iniciação científica na graduação até a conclusão deste mestrado.

Agradeço também a Marcia Regina, pelo grande apoio e paciência durante a etapa em que esta dissertação foi escrita; sem ela o trabalho teria sido muito mais árduo e cansativo.

Finalmente gostaria de agradecer a todos os meus amigos, que me deram muitos conselhos e me ajudaram nas horas ruins.

Este trabalho recebeu o apoio financeiro da FAPESP através do processo 00/12482-0.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teoria de Gauge e o Modelo Padrão	4
2.1	Formulação Matemática	4
2.2	Formulação do Modelo Padrão	19
2.2.1	O modelo de Weinberg-Salam	24
2.2.2	Modelo Padrão	26
3	Geometria Não Comutativa	28
3.1	Espaços Topológicos	28
3.2	Fibrados Vetoriais	33
3.3	Cálculo Quantizado	38
3.4	Traço de Dixmier	43
3.5	K-Ciclos	48
3.5.1	Espaço de 2 Pontos	50
3.6	Resíduo de Wodzicki	54
3.6.1	Alguns Exemplos	62
3.6.2	Geometria Riemanniana	65
3.7	Funcional Ação	66
4	O Modelo de Connes-Lott	70
A	Módulos	82
B	Álgebras de Clifford	85

Capítulo 1

Introdução

ΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΟΥΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

A geometria nasceu no Egito Antigo como uma ferramenta para se fazer a divisão das terras as margens do rio Nilo após as cheias. Esta foi uma das primeiras vezes em que a matemática foi usada como uma ferramenta para descrever o mundo físico. Após estes primeiros desenvolvimentos com os Egípcios a geometria teve um grande crescimento na Grécia Antiga, onde pela primeira vez as suas motivações não eram pragmáticas, elas possuíam um forte caráter estético¹ (Platão e Tales).

Com o fim da era grega a geometria possuiu por um longo período de estagnação até o surgimento de Fermat e Descartes que desenvolveram os conceitos de geometria analítica. Estes desenvolvimentos abriram caminho para que Newton e seus contemporâneos dessem início a um período de grandes avanços. Os desenvolvimentos deste período foram feitos com uma grande motivação física, mais do que isso, podemos dizer que eles deram início as ciências naturais modernas. Uma das grandes contribuições de Newton foi o desenvolvimento das ferramentas necessárias para tratar a geometria de forma analítica, como por exemplo o cálculo integro-diferencial.

Estas novas ferramentas permitiram um estudo aprofundado de curvas e superfícies no \mathbb{R}^3 . E em 1827, com Gauss, o estudo de superfícies passou a se dar de forma intrínseca através do teorema egregium, mostrando que a curvatura total de uma superfície só depende da métrica intrínseca da mesma.

Fortemente motivado por estas idéias trabalho, em 1854, num célebre trabalho, Riemann lançou os fundamentos dos conceitos atualmente conhecidos como variedades. Estes conceitos vieram a ter um forte impacto sobre a física e a nossa visão de mundo, a partir deles foi possível concebermos um modelo de universo sem referências a estruturas externas (um dos grandes triunfos deste ponto de vista foi a formulação da relatividade geral).

¹Em alguns casos (Escola Pitagórica) as motivações chegavam a possuir um caráter místico.

A próxima grande revolução na história da geometria se deu com o *Erlanger Programm* de Felix Klein, propondo que o papel da geometria é estudar os grupos de similaridades dos objetos geométricos ao invés de estudar os objetos em si. Esta nova abordagem possibilitou, como quase todos os avanços matemáticos, a abertura de novos horizontes em física, como, por exemplo, o desenvolvimento das teorias de gauge usadas principalmente em física de partículas elementares (modelo de Weinberg-Salam e modelo padrão).

Todo o desenvolvimento da geometria do século XX foi fortemente influenciado pelo paradigma descrito nos trabalhos de Riemann e Klein, ditando o principal objetivo da geometria como sendo o estudo de variedades e de seus grupos de transformações. Os estudos de geometria deste século foram marcados por um grande desenvolvimento de ferramentas analíticas e algébricas para lidar com os problemas decorrentes deste paradigma.

Os conceitos algébricos empregados no estudo das variedades e de suas simetrias se mostraram mais do que meras ferramentas. Estes conceitos deram origem a uma forma totalmente nova de descrever entidades geométricas em termos de estruturas algébricas. Estas descrições possibilitaram generalizar muitos conceitos geométricos para uma classe maior de objetos, como por exemplo espaços discretos. Tais generalizações foram feitas principalmente por Connes dentro do que se chamou *geometria não-comutativa*.

Mais uma vez, desenvolvimentos aparentemente de matemática abstrata mostraram ter aplicações em física. As ferramentas de geometria não-comutativa nos fornecem uma forma de tratar o boson de Higgs de um modo geométrico, com elas podemos escrevê-lo como sendo um dos campos de gauge dentro de uma equação de Yang-Mills, de forma que o boson de Higgs deixa de ser um simples artifício *ad hoc* e passa a ter um significado geométrico.

Nesta dissertação iremos lidar com alguns dos conceitos geométricos mencionados acima, e com a suas aplicações em modelos físicos. Faremos agora um breve resumo do conteúdo da mesma.

Na primeira seção do capítulo 2 daremos uma breve descrição das ferramentas matemáticas empregadas no modelo de Weinberg-Salam e no modelo padrão de partículas elementares. Nesta seção descreveremos o que é uma variedade, e discutiremos como generalizar o conceito de campos vetoriais para tais objetos através do conceito de seções sobre um fibrado vetorial. Em seguida lidaremos com o problema de derivar seções, vendo que a solução do mesmo nos leva naturalmente à idéia de conexão. A conexão nos permitirá definir a curvatura, a qual estudaremos com um pouco mais de detalhes, pois a mesma está intimamente relacionada com conceitos físicos.

Mostraremos que estes conceitos, juntamente com o conceito de grupos de Lie, nos fornecem uma ferramenta poderosa para estudarmos a simetria das soluções de equações diferenciais (ordinárias e parciais). Nas seções subsequentes usaremos estas ferramentas para construir as chamadas teorias de Yang-Mills, que modelam sistemas físicos com simetrias internas. Em particular, usaremos esta formulação para descrever o modelo de Weinberg-Salam e o modelo de padrão de partículas elementares.

No capítulo 3 mostraremos como descrever variedades e fibrados vetoriais

em termos de álgebras comutativas e de módulos projetivos finitamente gerados sobre as mesmas. Fornecemos demonstrações elegantes para estes fatos, merecendo destaque o teorema de Serre-Swan, que estabelece a correspondência entre fibrados vetoriais e módulos projetivos finitamente gerados.

Motivados por estas descrições constituímos as ferramentas do cálculo integro-diferencial usual para álgebras quaisquer, usando para isso construções puramente abstratas. Dentro destas construções veremos como o operador de Dirac generaliza o conceito de diferencial, e como os conceitos de K-ciclo e de traço de Dixmier, também conhecido como super-traço, generalizam o conceito de integral.

Outro conceito muito importante tratado neste capítulo é o de resíduo de Wodzick que, juntamente com o teorema traço de Connes, nos permite recuperar a geometria Riemanniana clássica a partir das construções algébricas.

Todos estes resultados são usados no capítulo 4 para construirmos, explicitamente, um cenário geométrico para o modelo de Weinberg-Salam e para o modelo padrão de partículas elementares, realizando um dos principais objetivos desta dissertação.

Há ainda 2 apêndices, onde apresentamos alguns conceitos utilizados no capítulo 3, onde estudamos a geometria Riemanniana de um ponto de vista não-comutativo, que necessita de um certo embasamento de álgebras de Clifford e de módulos projetivos finitamente gerados.



Capítulo 2

Teoria de Gauge e o Modelo Padrão

Neste capítulo iremos apresentar as teorias de gauge do ponto de vista usual para depois generalizá-las com as ferramentas de geometria não-comutativa. Primeiramente faremos uma descrição das teoria de gauge de uma forma um pouco mais matemática, seguindo as linhas apresentados em [1]. Após a formulação matemática mostraremos como as teorias de gauge aparecem dentro do modelo padrão, em física de partículas. Nesta segunda parte, de um modo geral, usaremos mais as terminologias empregadas na física, como está feito em [5].

2.1 Formulação Matemática

A formulação matemática das teorias de gauge está baseada nos conceitos de fibrados e conexões sobre variedades.

Definição 1 *Seja M uma variedade, um fibrado sobre ela nada mais é do que uma outra variedade E juntamente com uma aplicação diferenciável sobrejetiva*

$$\pi : E \rightarrow M. \quad (2.1)$$

Em geral a variedade E é chamada de espaço total, M de espaço base e π de projeção. Muitas vezes usamos a palavra fibrado para nos referirmos ao conjunto (π, E, M) .

Dado um fibrado sobre a variedade M , faz sentido falarmos sobre as imagens inversas dos pontos de M pela projeção. Tais conjuntos, denotados por

$$E_x = \{p \in E : \pi(p) = x\}, \quad (2.2)$$

são chamados de fibra sobre o ponto x . Dessa forma o espaço total E pode ser visto como a união das fibras¹ sobre os pontos de M , $E = \cup_{x \in M} E_x$.

Um conceito naturalmente associado ao de fibrado é o conceito de seções do fibrado.

Definição 2 *Uma seção s sobre um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ é uma função*

$$s : M \rightarrow E, \quad (2.3)$$

tal que

$$\pi(s(x)) = x \quad \forall x \in M. \quad (2.4)$$

Vemos com isso que uma seção é uma função que para cada ponto $x \in M$ associa um elemento da fibra, E_x , deste mesmo ponto. O espaço das seções sobre um fibrado E será denotado por $\Gamma(E)$. O espaço das seções de um fibrado desempenhará um papel importante em geometria não-comutativa, como veremos no próximo capítulo.

O conceito de seção é importantíssimo para lidarmos com grandezas físicas, pois são as seções que representam o conceito de campo vetorial presente na maioria absoluta dos modelos físicos.

Um dos exemplos mais simples de fibrado ocorre quando todas as fibras são iguais, neste caso temos

$$E_x = \{x\} \times F, \quad (2.5)$$

para algum conjunto F . Para este tipo de fibrado o espaço total nada mais é do que o produto cartesiano $M \times F$. Fibrados dessa forma são chamados de fibrados triviais. Um outro conjunto de fibrados, um pouco mais genéricos do que os fibrados triviais, mas que ainda possuem uma estrutura relativamente simples, é o de fibrados localmente triviais.

Definição 3 *Um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ é dito localmente trivial com fibra padrão F , se para cada ponto $x \in M$ existir uma vizinhança U de x e um difeomorfismo*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad (2.6)$$

tal que a fibra sobre o ponto x , E_x , é levada em $\{x\} \times F$. A aplicação ϕ é chamada de *trivialização local do fibrado*.

Os fibrados vetoriais, essenciais em física teórica, nada mais são do que um caso particular de fibrados localmente triviais:

Definição 4 *Um fibrado vetorial de dimensão n é um fibrado localmente trivial, cuja fibra padrão é um espaço vetorial V de dimensão n .*

¹Notemos que não estamos supondo que as fibras sobre diferentes pontos possuam alguma relação entre si. Entretanto, como veremos mais adiante, nos casos de interesse as fibras possuem propriedades em comum.

Mas todo espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo a \mathbb{R}^n , basta escolhermos uma base. Deste modo podemos considerar a trivialização local como sendo dada por

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Em cada uma das fibras de um fibrado vetorial podemos realizar as operações usuais de espaços vetoriais (soma e multiplicação por escalares). Dessa forma podemos munir o espaço das seções de um fibrado vetorial com estas mesmas operações (basta considerá-las pontualmente em cada fibra). Além disso a multiplicação por escalares pode variar continuamente com o ponto, ou seja, podemos considerar uma função contínua da variedade M para o corpo em questão como sendo uma espécie de escalar. Com isso $\Gamma(E)$ se torna um módulo sobre as funções diferenciáveis da variedade, $C^\infty(M)$.

Para darmos um exemplo de fibrado vetorial lembremos que o espaço tangente a um ponto $x \in M$, $T_x(M)$, é um espaço vetorial de dimensão n , sendo n constante para todos os pontos de M . Podemos considerar $T_x(M)$ como sendo a fibra sobre o ponto x , de modo que o espaço total é

$$E = T(M) = \cup_{x \in M} T_x(M). \quad (2.8)$$

Este é o chamado fibrado tangente da variedade M . É interessante lembrarmos, da geometria diferencial usual, que se considerarmos uma base local de vetores para este fibrado, em geral os elementos da base variam diferencialmente com o ponto, de modo que não podemos identificar diretamente as fibras entre si. Temos que pensar que elas são o mesmo espaço vetorial mas que ele está sendo *colado* de formas diferentes em pontos diferentes. De um modo geral nós podemos obter fibrados vetoriais localmente triviais (sem serem triviais) a partir de um espaço vetorial arbitrário V especificando uma regra de colagem que varie conforme o ponto do espaço base. As seções do fibrado tangente são usualmente chamadas de campos vetoriais sobre M , e neste caso particular iremos denotar o espaço dos campos vetoriais (seções) por $\text{Vect}(M)$ ao invés de usarmos a notação dada acima.

Em muitos modelos físicos as variedades são usadas como uma descrição do espaço físico em questão, ou ainda do espaço de configurações ou espaço de fases de um certo sistema físico. É muito freqüente encontrarmos formulações envolvendo variedades nos modelos de espaço-tempo, nos quais o próprio espaço-tempo é visto como uma variedade. E independentemente de como estamos tratando o espaço físico, muitas das grandezas que aparecem têm um caráter vetorial, de forma que precisamos considerar uma maneira de lidarmos com vetores que variem de acordo com o ponto em questão. É neste momento que entra os conceitos acima discutidos. Nós consideramos um fibrado vetorial apropriado sobre M e tratamos os campos físicos como seções deste fibrado.

Um caso muito importante de fibrado vetorial ocorre quando o construímos a partir de um espaço vetorial V especificando as regras de colagem do mesmo em termos de um grupo G . Este tipo de construção recebe o nome de fibrado vetorial associado ao grupo G . A forma precisa de falarmos de fibrados vetoriais associados a um grupo G é falando no fibrado principal com relação a G .

Definição 5 Dados uma variedade M e G um grupo de Lie², um fibrado principal sobre M com grupo G consiste de uma variedade P juntamente com uma ação de G em P satisfazendo as seguintes condições:

- G age livremente³ em P pela direita: $(u, a) \in P \times G \rightarrow ua = R_a u \in P$;
- M é o espaço quociente de P pela relação de equivalência induzida pela ação de G , $M = P/G$, e a projeção canônica $\pi : P \rightarrow M$ é diferenciável⁴;
- P é localmente trivial, ou seja, todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança U tal que existe um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$. Além disso pedimos que o difeomorfismo ψ satisfaça a condição $\psi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ onde $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ satisfaz $\varphi(pa) = (\varphi(p))a$ para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ e $a \in G$.

Os fibrados principais como acima serão denotados por $P(M, G)$ para dar ênfase no espaço-base e no grupo.

Para entendermos um pouco melhor a estrutura de um fibrado principal, vamos olhar um pouco mais para as fibras do mesmo: como $M = P/G$ as fibras sobre um ponto $x \in M$ nada mais são do que uma classe de equivalência em P pela ação de G , e como a ação é livre, tais classes são isomorfas ao próprio grupo G enquanto variedades. Logo podemos entender um fibrado principal como sendo um fibrado localmente trivial, cujas fibras são isomorfas ao próprio grupo como variedades. Aqui, quando falamos que as fibras são isomorfas ao grupo enquanto conjunto, queremos deixar claro que as mesmas, de modo geral, não são tratadas como grupos, mas simplesmente como conjuntos.

Vejam agora como esta definição de fibrado principal nos leva às regras de colagem, denominadas funções de transição. Para isso consideremos uma cobertura aberta de M , U_α , tal que $\pi^{-1}(U_\alpha)$ está munido com um difeomorfismo para $U_\alpha \times G$, $u \mapsto (\pi(u), \varphi_\alpha(u))$, com $\varphi_\alpha(ua) = \varphi_\alpha(u)a$. Isto nada mais é do que uma trivialização local do fibrado, como visto na definição 5. Se nós tivermos $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ vale

$$\varphi_\beta(ua)[\varphi_\alpha(ua)]^{-1} = \varphi_\beta(u)[\varphi_\alpha(u)]^{-1}. \quad (2.9)$$

Isto nos mostra que $\varphi_\beta(u)[\varphi_\alpha(u)]^{-1}$ não depende do elemento de $u \in P$ mas sim do ponto no espaço base $\pi(u) \in M$.

Definição 6 As funções $\psi_{\beta\alpha}(\pi(u)) = \varphi_\beta[\varphi_\alpha(u)]^{-1}$ são chamadas de funções de transição de U_β para U_α .

²O fato de estarmos considerando um grupo de Lie é essencial, pois os grupos de Lie possuem uma estrutura diferenciável- eles além de serem grupos também são variedades, de modo que podemos falar em diferenciabilidade de funções do grupo para outra variedade e vice-versa.

³Dizemos que a ação de um grupo sobre uma variedade é livre se ela não possui pontos fixos.

⁴Como M é obtida como um quociente de P , π é obviamente sobrejetiva de modo que P é de fato um fibrado sobre M .

Podemos verificar facilmente que as funções de transição satisfazem

$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \quad (2.10)$$

conhecida como condição de co-ciclo.

Com esta definição podemos escrever

$$(\pi(u), \varphi_\beta(u)) = (\pi(u), \psi_{\beta\alpha}(\pi(u))\varphi_\alpha(u)) \quad (2.11)$$

Quando dizemos que as funções de transição são como uma regra de colagem, estamos nos referindo ao seguinte teorema

Teorema 1 *Sendo M uma variedade, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M e G um grupo de Lie, e dados mapas $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, para todas as intersecções $U_\alpha \cap U_\beta$ não-vazias, que satisfazem a relação 2.11, podemos construir um fibrado principal $P(M, G)$ cujas funções de transição são exatamente $\psi_{\beta\alpha}$.*

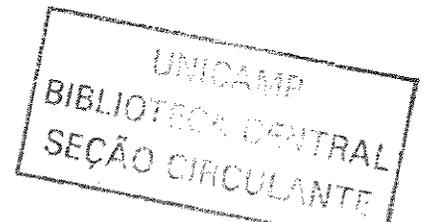
Para a demonstração ver [6]. \square

Consideremos um fibrado principal $P(M, G)$ e uma variedade⁵ F sobre a qual G age pela esquerda $(a, \xi) \in G \times F \rightarrow a\xi$. A partir destes dados queremos construir um fibrado associado a P com fibra padrão F . Para isso consideremos o produto cartesiano $P \times F$. Neste produto um elemento $a \in G$ age levando $(u, \xi) \in P \times F$ em $(ua, a^{-1}\xi)$. Agora podemos considerar o quociente de $P \times F$ por esta ação $E = P \times_G F$. O mapa $P \times F \rightarrow M$ que leva (u, ξ) em $\pi(u)$ induz um mapa de $E = P \times_G F$ para M , denotado por π_E . Podemos mostrar que é possível munirmos E de uma estrutura diferenciável tal que π_E seja um difeomorfismo e que E com esta estrutura é um fibrado sobre M com fibra padrão⁶ F . No caso de F ser um espaço vetorial dizemos que E é o fibrado vetorial associado a $P(M, G)$. Por outro lado $(u, \xi) \xrightarrow{a} (ua, a\xi)$ também define uma ação no produto cartesiano $P \times F$, e esta ação induz uma ação não trivial no espaço quociente E , que preserva as fibras, isto é, ela leva um elemento de uma fibra em outro elemento da mesma fibra. Este tipo de ação é bastante importante pois com ela podemos falar em transformações das fibras de E que pertencem ao grupo de simetria.

Estes conceitos são fundamentais para lidarmos com teorias de gauge. Grossoiramente, as teorias de gauge consistem em explorar as simetrias de um dado sistema físico. Nós sabemos, porém, que simetrias são descritas por grupos, e nos casos mais interessantes estes grupos são grupos de Lie. Desse modo as ferramentas descritas acima se tornam extremamente adaptadas para lidar com este tipo de situação. A variedade base descreve o espaço físico, o grupo G é tomado como sendo o grupo de simetria do sistema, e as equações são escritas em termos de seções de um fibrado vetorial associado ao fibrado principal $P(M, G)$. Mas para esrevermos equações que descrevem situações físicas precisamos saber como derivar seções de um fibrado.

⁵Nos casos mais importantes F é um espaço vetorial.

⁶Uma demonstração precisa desta afirmação pode ser encontrada em [6].



Antes de falarmos sobre isso é interessante fazermos uma pequena discussão sobre transformações em fibrados vetoriais.

Dado um espaço vetorial V as transformações lineares de V para ele mesmo são chamadas de endomorfismos, e o conjunto dos endomorfismos sobre V é denotado por $\text{End}(V)$, e possui uma estrutura natural de espaço vetorial. Além disso $\text{End}(V)$ pode ser transformado em uma álgebra, sendo o produto entre dois elementos dado pela composição entre ambos como operadores lineares.

Se $\{e_i\}$ é uma base de V , com $\{e^j\}$ sendo a base dual, podemos identificar elementos de $\text{End}(V)$ com elementos de $V \otimes V^*$ a partir da relação

$$(v \otimes \alpha)u = \alpha(u)v, \quad v \in V, \alpha \in V^*. \quad (2.12)$$

Na verdade não é muito difícil mostrarmos que esta identificação é um isomorfismo e podemos ver da definição acima que ela não depende da escolha da base. Então

$$\text{End}(V) \cong V \otimes V^* \quad (2.13)$$

de maneira canônica. A grande vantagem de encararmos os endomorfismos de um espaço V como sendo elementos de $V \otimes V^*$ é que esta última caracterização se generaliza de forma natural para fibrados vetoriais.

Sendo E um fibrado vetorial sobre M podemos construir o fibrado dual, E^* , simplesmente considerando o fibrado sobre M cujas fibras são os duais das fibras de E , em outras palavras

$$E_x^* = (E_x)^*. \quad (2.14)$$

Com isso podemos considerar o fibrado $E \otimes E^*$, denominado fibrado dos endomorfismos de E , e denotado por $\text{End}(E)$. As seções deste fibrado determinam transformações de E . De fato, a fibra de $\text{End}(E)$ sobre o ponto x , $\text{End}(E)_x$, nada mais é do que o conjunto de endomorfismos do espaço vetorial dado pela fibra de E no mesmo ponto, E_x . Dessa forma se T é uma seção de $\text{End}(E)$ e s é uma seção de E , T age em s pontualmente dando origem a uma nova seção Ts , isto é,

$$Ts(x) = T(x)s(x). \quad (2.15)$$

Com um pouco de trabalho podemos mostrar que todo mapa $C^\infty(M)$ linear no espaço das seções de E , $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, é um elemento de $\text{End}(E)$.

O conceito de fibrado dos endomorfismos é extremamente útil, pois com ele podemos definir o que é uma transformação de gauge.

Se E for um fibrado vetorial associado a um fibrado principal sobre M , sabemos que existe uma representação $\rho : G \rightarrow V$, sendo V a fibra típica de E . Sendo assim é natural nos perguntarmos se uma transformação linear em uma fibra $T : E_x \rightarrow E_x$ é da forma $T = \rho(g)$ para algum elemento g de G . Caso isto ocorra dizemos que a transformação T pertence a G . E, como já vimos, uma seção T de $\text{End}(E)$ avaliada em um ponto $x \in M$, $T(x)$, nada mais é do que uma transformação linear da fibra de E sobre x , E_x , logo podemos nos perguntar se $T(x)$ pertence a G . Caso isto ocorra para todos os pontos de M dizemos que T é uma transformação de gauge. Isto equivale a dizermos que uma transformação de

gauge é uma transformação que mora no grupo de simetrias do problema e que eventualmente possa depender diferenciavelmente do ponto em que é tomada.

Voltemos ao problema de derivar seções. Ele é resolvido pela introdução das conexões. Uma conexão ∇ em M associa a cada campo vetorial v em M uma função ∇_v que leva $\Gamma(E)$ em $\Gamma(E)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\nabla_v(\alpha s) &= \alpha \nabla_v s \\ \nabla_v(s + t) &= \nabla_v s + \nabla_v t \\ \nabla_v(fs) &= v(f)s + f \nabla_v s \\ \nabla_{v+w}s &= \nabla_v s + \nabla_w s \\ \nabla_{fv}s &= f \nabla_v s\end{aligned}\tag{2.16}$$

para todo $v, w \in \text{Vect}(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ e todos os escalares α .

Uma outra forma de pensarmos nas conexões é como sendo mapas

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \wedge^1(M)\tag{2.17}$$

onde $\wedge^1(M)$ denota o espaço das 1-formas sobre M , ou seja, o fibrado co-tangente. Para esta forma de expressarmos a conexão, as condições acima se tornam

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha s) &= \alpha \nabla s \\ \nabla(s + t) &= \nabla s + \nabla t \\ \nabla(fs) &= f \nabla s + s \otimes df\end{aligned}\tag{2.18}$$

as demais propriedades seguem diretamente das propriedades das formas diferenciais. Aqui d denota a diferencial usual de uma função.

Esta forma de olharmos para uma conexão, apesar de não ser tão usual quanto a primeira, é importantíssima, pois é a forma que se generaliza em geometria não-comutativa.

Para termos uma ideia melhor a respeito das conexões vamos considerar um sistema local de coordenadas $\{x_\mu\}$ em M , com $\{\partial_\mu\}$ sendo a respectiva base do fibrado tangente e com $\{e_i\}$ uma base local para seções do fibrado E . Sabemos que⁷ $\nabla_\mu e_i$ é uma nova seção de E , de modo que ela pode ser expressa em termos dos elementos da base $\{e_i\}$

$$\nabla_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i.\tag{2.19}$$

Desse modo temos elementos gerais

$$\nabla_v s = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i.\tag{2.20}$$

Os elementos $A_{\mu j}^i$ são as componentes da conexão, que em física são chamados de componentes do potencial vetor. A não é realmente um vetor, mas apesar disso a terminologia de potencial-vetor é bastante empregada, pois é exatamente A quem generaliza o potencial-vetor do eletromagnetismo. No fundo, nós podemos entender os elementos acima como sendo as componentes de uma 1-forma

⁷Estamos usando a abreviação $\nabla_{\partial_\mu} = \nabla_\mu$.

com valores nos endomorfismos do espaço das seções do fibrado $\text{End}(E)$. Mais precisamente se escrevermos⁸

$$A = A_{\mu i}^j e_i \otimes e^j \otimes dx^\mu \quad (2.21)$$

obtemos

$$A(v) = A_{\mu i}^j v^\mu (e_j \otimes e^i) \quad (2.22)$$

que é um elemento de $\text{End}(E)$. Logo ele age em seções

$$A(v)s = A_{\mu i}^j v^\mu s^i e_j, \quad (2.23)$$

de forma que a conexão pode ser escrita como

$$\nabla_v s = v(s^i) e_i + A(v)s \quad (2.24)$$

Muitas vezes é interessante nos referirmos a A sem fazermos referência a base $\{e_i\}$ do fibrado E , para isso definimos

$$A_\mu = A_{\mu j}^i e_i \otimes e^j, \quad (2.25)$$

de modo que A passa a ser escrito como

$$A = A_\mu dx^\mu. \quad (2.26)$$

De uma forma mais geral nós pensamos em A como sendo uma 1-forma com valores em $\text{End}(E)$, sem referência alguma a um sistema de coordenadas,

$$A = \sum_i T_i \otimes \omega_i, \quad (2.27)$$

onde T_i é uma seção de $\text{End}(E)$ e ω_i é uma 1-forma em M . Portanto para qualquer campo vetorial v em M podemos definir a seção $A(v)$ de $\text{End}(E)$ por

$$A(v) = \sum_i \omega_i(v) T_i. \quad (2.28)$$

É possível mostrarmos que se ∇^0 é uma conexão, então $\nabla = \nabla^0 + A$ definida por

$$\nabla_v s = \nabla_v^0 s + A(v)s, \quad (2.29)$$

é também uma conexão. É possível mostrarmos, também, que da-da uma conexão ∇^0 todas as demais podem ser escritas a partir de um potencial vetor adequado.

Mas como foi dito anteriormente iremos lidar com sistemas físicos munidos de simetrias. Desse modo é interessante estudarmos como as conexões se relacionam com as simetrias. Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo de Lie G . Consideremos um fibrado vetorial associado E . Lembremos que existe uma

⁸Estamos usando a notação de soma de Einstein.

ação de G sobre E que preserva as fibras. Neste caso podemos falar de transformações que pertencem ao grupo G , mais especificamente, seja $u : M \rightarrow G$ uma função contínua⁹ e seja $s \in \Gamma(E)$ uma seção de E , então a aplicação

$$s(x) \mapsto u(x)s(x) \quad (2.30)$$

nos define uma nova seção de E , usualmente denotada por us . Muitas vezes usamos a notação $us = \gamma(u)s$ para enfatizar a ação de u sobre s .

Definição 7 *As transformações da forma*

$$s \mapsto us, \quad (2.31)$$

para $u : M \rightarrow G$ contínua e $s \in \Gamma(E)$, são chamadas de transformações de gauge.

Agora podemos considerar uma conexão ∇ agindo em uma seção obtida a partir de uma transformação de gauge, isto é, dado $v \in \text{Vect}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ e u uma transformação de gauge, queremos saber como

$$\nabla_v(us) \quad (2.32)$$

se comporta.

Proposição 1 *Existe uma conexão ∇' tal que*

$$\nabla_v(us) = u(\nabla'_v s) \quad (2.33)$$

De fato não é difícil vermos que $\nabla' = u \circ \nabla_v \circ u^{-1}$ define uma conexão. A relação acima segue imediatamente deste fato. \square

Este fato motiva a seguinte

Definição 8 *Sendo ∇ uma conexão, definimos a transformação de gauge $\gamma(u)$ da mesma como sendo*

$$\gamma(u)(\nabla_v) = u \circ \nabla_v \circ u^{-1}, \quad \forall v \in \text{Vect}(M). \quad (2.34)$$

Usualmente omitimos o sinal de composição e escrevemos simplesmente $\gamma(u)\nabla_v = u\nabla_v u^{-1}$.

Esta definição nos garante que as equações físicas são invariantes se nós considerarmos transformações da forma $\psi \mapsto \gamma(u)\psi$ e $\nabla \mapsto \gamma(u)\nabla$, onde ψ é uma seção de um fibrado vetorial apropriado que descreve o sistema físico.

Quando estamos considerando um fibrado vetorial, E , associado a um fibrado principal $P(M, G)$, a ação de G sobre as fibras de E induz, através da aplicação exponencial, uma ação da álgebra de Lie do grupo G sobre as fibras de E . Dessa

⁹Como comentamos anteriormente, para falarmos na continuidade de funções deste tipo precisamos que G seja um grupo de Lie.

forma podemos considerar transformações de E que pertencem a álgebra de Lie do grupo G . Mas acabamos de ver que o potencial vetor de uma conexão pode ser escrito como uma 1-forma com valores em $\text{End}(E)$,

$$A = \sum_i T_i \otimes \omega_i. \quad (2.35)$$

Logo podemos considerar um potencial vetor A tal que o seus *coeficientes* T_i morem na álgebra de Lie do grupo G . Neste caso dizemos que a conexão determinada por A é uma conexão com coeficientes na álgebra de Lie de G . Este conceito é fundamental para a física, pois as equações de Yang-Mills, como veremos mais adiante, são escritas em termos de uma conexão com valores na álgebra de Lie.

Um conceito diretamente relacionado com o de conexão, e importantíssimo para as teorias de gauge, é o de curvatura. A curvatura F de uma conexão é definida como sendo um operador nas seções de E que depende de dois campos vetoriais v e w sobre M , a saber:

$$F(v, w)s = \nabla_v \nabla_w s - \nabla_w \nabla_v s - \nabla_{[v, w]} s, \quad (2.36)$$

onde $[v, w]$ denota o comutador entre v e w . Notemos que se estivermos considerando F como sendo a curvatura de ∇ , a curvatura da conexão transformada $\gamma(u)\nabla$ será dada pela relação $\gamma(u)(F(v, w))s = uF(v, w)u^{-1}s$.

Pensando na curvatura como um operador, sem fazer referência a seção na qual ela esta agindo, podemos escrever

$$F(v, w) = [\nabla_v, \nabla_w] - \nabla_{[v, w]}. \quad (2.37)$$

É fácil vermos que a curvatura é antisimétrica com relação aos campos vetoriais, isto é,

$$F(v, w) = -F(w, v). \quad (2.38)$$

Além disso podemos mostrar que a curvatura é linear com relação a $C^\infty(M)$

$$F(fv, w)s = F(v, fw)s = F(v, w)fs = fF(v, w)s. \quad (2.39)$$

Estas propriedades nos levam a crer que a curvatura é um tensor; ademais a propriedade dada por (2.38) nos diz que este tensor deve ser anti-simétrico, ou seja, uma forma diferencial. Para vermos como escrever a curvatura dessa forma, vamos considerar uma base coordenada do fibrado tangente $\{\partial_\mu\}$, de modo que $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Logo a curvatura envolvendo dois elementos da base é

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu) = [\nabla_\mu, \nabla_\nu], \quad (2.40)$$

e pelas propriedades lineares da curvatura podemos escrever para campos vetoriais gerais

$$F(v, w) = F(v^\mu \partial_\mu, w^\nu \partial_\nu) = v^\mu w^\nu F_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

A equação acima pode ser reescrita em termos do em termos do produto tenso-
rial,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu), \quad (2.42)$$

ou ainda,

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.43)$$

Com isso vemos que a curvatura é uma 2-forma com valores em $\text{End}(E)$.

Muitas das operações sobre formas diferenciais também estão definidas para formas com valores em $\text{End}(E)$. Duas operações muito importantes são o produto exterior e o isomorfismo de Hodge, que são definidas para formas com valores em $\text{End}(E)$ da seguinte maneira: dados duas formas com valores em $\text{End}(E)$, $T \otimes \alpha$ e $S \otimes \omega$, definimos

$$\begin{aligned} (T \otimes \alpha) \wedge (S \otimes \omega) &= TS \otimes \alpha \wedge \omega \\ \star(T \otimes \alpha) &= T \otimes \star\alpha \end{aligned} \quad (2.44)$$

A noção de curvatura tem, como veremos mais adiante, um papel crucial nas teorias de gauge. Dessa forma é interessante nós termos uma maneira de escrever a curvatura, que possibilite uma generalização natural dentro do ponto de vista de geometria não comutativa.

Lembremos que uma conexão ∇ sobre um fibrado E pode ser interpretada como sendo um mapa

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \wedge^1(TM), \quad (2.45)$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$\nabla(sf) = (\nabla s)a + s \otimes df, \quad s \in \Gamma(E), \quad f \in C^\infty(M). \quad (2.46)$$

A conexão nesta forma se estende de maneira única para um operador de grau 1 no espaço $\Gamma(E) \otimes \wedge^*(TM)$ a partir da relação

$$\nabla(s \otimes \omega) = (\nabla s) \wedge \omega + s \otimes d\omega, \quad (2.47)$$

para $s \in \Gamma(E)$ e $\omega \in \wedge^*(TM)$. Na equação acima devemos entender o produto exterior da seguinte forma: dados $s \in \Gamma(E)$ e $\omega, \alpha \in \wedge^*(TM)$ definimos

$$(s \otimes \omega) \wedge \alpha \stackrel{def}{=} s \otimes (\omega \wedge \alpha). \quad (2.48)$$

Definimos a contração por um vetor $x \in Vect(M)$ de uma k -forma diferencial $\omega \in \wedge^k(TM)$, como sendo a $(k-1)$ -forma dada por

$$i_x \omega(y_1, \dots, y_{k-1}) = \omega(x, y_1, \dots, y_{k-1}). \quad (2.49)$$

Estendemos esta definição para elementos gerais de $\wedge^*(TM)$ por linearidade. Com esta definição é fácil vermos que a contração satisfaz a regra de Leibniz graduada

$$i_x(\sigma \wedge \omega) = (i_x \sigma) \wedge \omega + (-1)^k \sigma \wedge (i_x \omega), \quad \sigma \in \wedge^k(TM), \quad \omega \in \wedge^*(TM). \quad (2.50)$$

Usando a definição acima para i_x , podemos definir a contração i_x para elementos de $\Gamma(E) \otimes \wedge^*(TM)$ por

$$i_x(s \otimes \omega) = s \otimes (i_x \omega). \quad (2.51)$$

A contração i_x pode ser usada para escrevermos a derivada de Lie na direção de x , \mathcal{L}_x , de formas diferenciais como sendo

$$\mathcal{L}_x = i_x \circ d + d \circ i_x. \quad (2.52)$$

Esta identidade nos motiva a definir a derivada covariante como sendo

$$\nabla_x = i_x \circ \nabla + \nabla \circ i_x. \quad (2.53)$$

No caso de $s \in \Gamma(E)$, temos que $\nabla s \in \Gamma(E) \otimes \wedge^1(TM)$, ou seja, ∇s é da forma $t \otimes \omega$, desse modo temos

$$(i_x \circ \nabla + \nabla \circ i_x)(s) = i_x(t \otimes \omega) + 0 = \omega(x)t, \quad (2.54)$$

uma vez que $i_x s = 0$ para $s \in \Gamma(E)$. Isto é, ∇_x como definido acima é um mapa

$$\nabla_x : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad (2.55)$$

que satisfaz as propriedades de derivada covariante. Vemos com isso que a generalização da derivada covariante dada pela equação 2.53 condiz com o conceito usual.

Agora vamos considerar um elemento da forma $s \otimes \omega$, com $s \in \Gamma(E)$ e $\omega \in \wedge^*(TM)$. Para este elemento temos

$$\begin{aligned} \nabla_x(s \otimes \omega) &= i_x(\nabla s \otimes \omega) + \nabla(i_x s \otimes \omega) \\ &= i_x((\nabla s) \wedge \omega + s \otimes d\omega) + \nabla(s \otimes i_x \omega) \\ &= i_x((\nabla s) \wedge \omega) + s \otimes i_x d\omega + (\nabla s) \wedge \omega + s \otimes di_x \omega \\ &= (i_x \nabla s) \wedge \omega - (\nabla s) \wedge i_x \omega + (\nabla s) \wedge i_x \omega + s \otimes (i_x d\omega + di_x \omega) \\ &= (i_x \nabla s) \wedge \omega + s \otimes \mathcal{L}_x \omega. \end{aligned} \quad (2.56)$$

A partir desta expressão, e da conhecida identidade $[\mathcal{L}_x, i_y] = i_{[x,y]}$, podemos obter a seguinte propriedade

$$\nabla_x(i_y \sigma) = i_y(\nabla_x \sigma) + i_{[x,y]} \sigma, \quad \sigma \in \Gamma(E) \otimes \wedge^*(TM). \quad (2.57)$$

Usando esta propriedade, e lembrando que $i_x z = 0$ para $z \in \Gamma(E)$, podemos fazer a seguinte conta

$$\begin{aligned} F(x, y)z &= \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z \\ &= \nabla_x \nabla_y z - i_{[x,y]} \nabla z - \nabla_x \nabla_y z \\ &= (\nabla_x i_y(\nabla z) - i_{[x,y]} \nabla z) - i_y \nabla(\nabla_x z) \\ &= (i_y \nabla_x \nabla z + i_{[x,y]} \nabla z - i_{[x,y]} \nabla z) - i_y \nabla(\nabla_x z) \\ &= i_y(\nabla_x \nabla z - \nabla \nabla_x z) \\ &= i_y(i_x \nabla \nabla z + \nabla(i_x \nabla z) - \nabla \nabla_x z) \\ &= i_y i_x \nabla^2 z. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Esta expressão nos possibilita escrever a curvatura como o quadrado da conexão

$$F = \nabla^2, \quad (2.59)$$

sendo que esta forma se generaliza de maneira natural dentro de geometria não comutativa.

Para completarmos a nossa discussão matemática sobre teorias de gauge vamos falar um pouco da formulação variacional da mesma. Lembremos que o espaço dos endomorfismos de um espaço vetorial V , $\text{End}(V)$, é canonicamente isomorfo a $V \otimes V^*$. Este isomorfismo nos fornece uma maneira natural de definirmos um funcional linear sobre $\text{End}(V)$,

$$\begin{aligned} \text{tr} : \text{End}(V) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v \otimes \alpha &\mapsto \alpha(v). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Em termos de uma base este mapa é o traço usual. Sendo $\{e_i\}$ uma base de V , $\{e^j\}$ a base dual, um elemento $T \in \text{End}(V)$ pode ser escrito como

$$T = T_j^i e_i \otimes e^j, \quad (2.61)$$

de modo que $\text{tr}(T)$ é dado por

$$\text{tr}(T) = \text{tr}(T_j^i e_i \otimes e^j) = T_j^i \text{tr}(e_i \otimes e^j) = T_j^i e^j(e_i) = \sum_i T_i^i. \quad (2.62)$$

Se, agora, considerarmos uma seção T de $\text{End}(E)$, podemos usar o traço acima para definirmos uma função, $\text{tr}(T)$, na variedade M . Para isto basta definirmos $\text{tr}(T)(x) = \text{tr}(T(x))$. Esta definição pode ser naturalmente estendida para formas com valores em $\text{End}(E)$, mas agora o resultado passa a ser uma forma ordinária. Se T é uma seção de $\text{End}(E)$ e ω uma forma diferencial, definimos

$$\text{tr}(T \otimes \omega) = \text{tr}(T)\omega \quad (2.63)$$

Estas são todas as ferramentas necessárias para definirmos a lagrangeana de Yang-Mills. Sendo ∇ uma conexão sobre E , e sendo F a 2-forma com valores em $\text{End}(E)$ da curvatura, definirmos a densidade de lagrangeana de Yang-Mills como sendo

$$\mathcal{L}_{YM}(\nabla) = \frac{1}{2} \text{tr}(F \wedge \star F). \quad (2.64)$$

Como $F \wedge \star F$ é uma n -forma com valores em $\text{End}(E)$, sendo n a dimensão de M , então a lagrangeana de Yang-Mills é uma n -forma usual, de modo que podemos integrá-la sobre M obtendo assim a ação de Yang-Mills

$$S_{YM}(\nabla) = \int_M \mathcal{L}_{YM}(\nabla) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge \star F) = \|F\|^2 \quad (2.65)$$

Mas nós sabemos que $\gamma(u)(F(v, w))s = (uF(v, w)u^{-1})s$, logo, da equação 2.43, podemos escrever

$$\gamma(u)F = (\gamma(u)F_{\mu\nu}) dx^\mu \otimes dx^\nu = (uF_{\mu\nu}u^{-1}) dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.66)$$

E como $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ vemos que a lagrangeana de Yang-Mills é invariante por transformações de gauge, ou seja,

$$\mathcal{L}_{YM}(\gamma(u)\nabla) = \mathcal{L}_{YM}(\nabla). \quad (2.67)$$

Para escrevermos as equações do movimento provenientes da Lagrangeana acima precisamos do conceito de derivada covariante exterior. Para isso consideremos uma conexão ∇ em um fibrado vetorial E . Então existe uma única conexão no fibrado dual E^* , denotada por ∇^* , tal que, para qualquer campo vetorial $v \in \text{Vect}(M)$ e qualquer seções $s \in \Gamma(E)$ e $\lambda \in \Gamma(E^*)$ temos

$$v(\lambda(s)) = (\nabla_v^* \lambda)(s) + \lambda(\nabla_v s). \quad (2.68)$$

Para obtermos esta conexão, basta defini-la por

$$(\nabla_v^* \lambda)(s) = v(\lambda(s)) - \lambda(\nabla_v s). \quad (2.69)$$

Não sendo difícil verificarmos que de fato esta definição produz uma conexão em E^* .

Agora se tivermos dois fibrados, E_1 com a conexão ∇^1 , e E_2 com a conexão ∇^2 , é fácil vermos que a expressão

$$(\nabla^1 \otimes \nabla^2)_v(s_1 \otimes s_2) = (\nabla_v^1 s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_v^2 s_2), \quad (2.70)$$

com $s_i \in \Gamma(E_i)$, define uma conexão no fibrado $E_1 \otimes E_2$. Como o fibrado dos endomorfismos de E , $\text{End}(E)$, pode ser pensado como sendo o fibrado $E \otimes E^*$, as duas construções acima nos permite definir, a partir de uma conexão ∇ sobre E , uma conexão em $\text{End}(E)$, $\nabla \otimes \nabla^*$, que por um abuso de linguagem será denotada simplesmente por ∇ . Mais explicitamente temos

$$\nabla_v(T)(s) = \nabla_v(Ts) - T(\nabla_v s). \quad (2.71)$$

Com uma conexão em $\text{End}(E)$ nós podemos definir a derivada covariante exterior, D_∇ , para formas com valores em $\text{End}(E)$. Primeiramente a definimos para seções $T \in \Gamma(\text{End}(E))$ como sendo a 1-forma com valores em $\text{End}(E)$ dada por

$$D_\nabla T(v) = \nabla_v T, \quad (2.72)$$

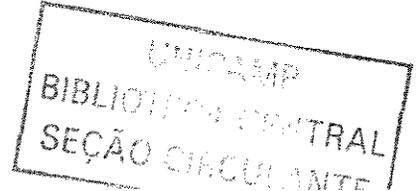
qualquer que seja $v \in \text{Vect}(M)$. Agora para um elemento da forma $T \otimes \omega$, com $T \in \Gamma(\text{End}(E))$ e $\omega \in \wedge^*(TM)$, definimos

$$D_\nabla(T \otimes \omega) = D_\nabla T \wedge \omega + T \otimes d\omega. \quad (2.73)$$

Com esta notação podemos enunciar

Proposição 2 *As equações do movimento provenientes da Lagrangeana de Yang-Mills podem ser escritas na forma*

$$D_\nabla(\star F) = 0. \quad (2.74)$$



Para um calculo explicito da equação acima veja [1]. \square

A equação $D_{\nabla}(\star F) = 0$ não inclui o chamado termo de fonte. Para incluí-lo devemos acrescentar a Lagrangiana de Yang-Mills um termo da forma $\int \text{tr}(A \wedge \star J)$, de modo a obtermos a equação

$$D_{\nabla}(\star F) = \star J, \quad (2.75)$$

que no caso do eletromagnetismo corresponde as equações não-homogêneas de Maxwell, sendo J o termo de corrente. Mas para recuperarmos todo o eletromagnetismo também precisamos das equações homogêneas. O que veremos a seguir é que estas equações são no fundo uma identidade satisfeita pela curvatura, chamada de identidade de Bianchi. Esta identidade é satisfeita independentemente de estarmos lidando com eletromagnetismo ou não.

Lembremos que a identidade de Jacobi nos diz que para quaisquer operadores lineares $X, Y, Z : V \rightarrow V$, sendo V um espaço vetorial, satisfazem

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (2.76)$$

sendo $[X, Y]$ o comutador entre os operadores X e Y , isto é,

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X. \quad (2.77)$$

Em particular, nós sabemos que a derivada covariante na direção de v , ∇_v , é um operador linear no espaço das seções $\Gamma(E)$ de um fibrado E . Desse modo a derivada covariante satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja, dados $u, v, w \in \text{Vect}(M)$, temos

$$[\nabla_u, [\nabla_v, \nabla_w]] + [\nabla_v, [\nabla_w, \nabla_u]] + [\nabla_w, [\nabla_u, \nabla_v]] = 0. \quad (2.78)$$

Para vermos como isto afeta a curvatura vamos tomar u, v e w como sendo campos coordenados $\partial_\mu, \partial_\nu$ e ∂_λ . Neste caso nós sabemos, equação 2.40, que $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$, logo podemos escrever

$$[\nabla_\mu, F_{\nu\lambda}] + [\nabla_\nu, F_{\lambda\mu}] + [\nabla_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0. \quad (2.79)$$

Esta é a chamada identidade de Bianchi para a curvatura. Mas esta forma da identidade de Bianchi não nos deixa ver sua relação com as equações homogêneas de Maxwell. O conceito de derivada covariante exterior nos fornece uma forma de escrevermos a identidade de Bianchi de um modo mais claro e elegante. Com efeito temos, lembrando que a curvatura F pode ser escrita como uma 2-forma com valores em $\text{End}(E)$, temos

Proposição 3 Usando a derivada covariante exterior D_{∇} , e considerando F como uma 2-forma com valores em $\text{End}(E)$, podemos escrever a identidade de Bianchi na forma

$$D_{\nabla}F = 0 \quad (2.80)$$

Para vermos que isto é verdade basta expandirmos $D_{\nabla}F$ em um sistema local de coordenadas. \square

2.2 Formulação do Modelo Padrão

Nesta seção veremos como as teorias de gauge aparecem nos modelos físicos e como elas são usadas para formular o modelo padrão das partículas elementares.

Vamos considerar um campo escalar complexo $\phi(x)$ no espaço-tempo na ausência de campos eletromagnéticos externos. Neste caso a densidade de Lagrangeana clássica é dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi). \quad (2.81)$$

Aqui V é uma função com valores reais, o potencial do sistema.

Esta Lagrangeana é evidentemente invariante se nós fizermos uma mudança de fase em ϕ , sendo α uma constante real,

$$\phi(x) \mapsto e^{-i\alpha} \phi(x), \quad (2.82)$$

ou seja,

$$\mathcal{L}_0(\phi(x), \partial^\mu \phi(x)) = \mathcal{L}(e^{-i\alpha} \phi(x), \partial^\mu e^{-i\alpha} \phi(x)). \quad (2.83)$$

Como a Lagrangeana fica invariante pela mudança de fase, as equações que governam a dinâmica deste campo também permanecem inalteradas.

Definição 9 *Uma transformação da forma $\phi \mapsto e^{-i\alpha} \phi$ é chamada de transformação de gauge global. Neste caso dizemos que o sistema possui invariância de gauge global.*

Mas nós podemos pensar em um tipo de transformação um pouco mais geral. Podemos considerar uma mudança de fase que varie conforme o ponto, de modo que o campo escalar se transforma da seguinte maneira

$$\phi(x) \mapsto e^{-i\alpha(x)} \phi(x), \quad (2.84)$$

onde $\alpha(x)$ é uma função com valores reais.

Definição 10 *Transformações da forma $\phi(x) \mapsto e^{-i\alpha(x)} \phi(x)$ são chamadas de transformações de gauge locais.*

Mas equações como a que define a densidade de Lagrangeana 2.83 possuem termos envolvendo derivadas, de modo que

$$\partial^\mu \phi(x) \mapsto \partial^\mu e^{-i\alpha(x)} \phi(x) = e^{-i\alpha(x)} \partial^\mu \phi(x) + \phi(x) \partial^\mu e^{-i\alpha(x)}, \quad (2.85)$$

depende claramente da função $\alpha(x)$. Desse modo a equação que define a densidade de Lagrangeana 2.83 não é invariante por transformações de gauge locais. Para que isso ocorra precisamos modificar a equação 2.83 de modo a levarmos em conta o termo mais proveniente da derivada. Para fazermos isso vamos definir um campo vetorial, com componentes $A^\mu(x)$, chamado de campo de gauge, que se transforma em relação as transformações locais de gauge por

$$A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha(x), \quad (2.86)$$

onde e é um número real. Usamos este campo para definirmos a derivada covariante do campo escalar por

$$D^\mu \phi(x) = \sum_\mu [\partial^\mu + ieA^\mu(x)] \phi(x). \quad (2.87)$$

Agora ao invés de escrevermos a densidade de Lagrangeana em termos das derivadas parciais $\partial^\mu \phi(x)$ usamos a derivada covariante, $\mathcal{L}(\phi(x), D^\mu \phi(x))$. Com isso a Lagrangeana passa a ser invariante por transformações locais de gauge.

Mas apesar de ser invariante por transformações locais de gauge, a lagrangeana dada por 2.83 não leva em conta a dinâmica dos campos A^μ . Para incluirmos o comportamento dinâmico destes campos precisamos acrescentar um termo envolvendo $\partial^\nu A^\mu$ quadraticamente a Lagrangeana 2.83. O único campo escalar invariante pela transformação de gauge dada acima e por transformações de Lorentz é proporcional a $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ onde

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.88)$$

Desse modo a densidade de lagrangeana de um sistema fechado invariante por transformações locais de gauge é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_0(\phi, D^\mu \phi). \quad (2.89)$$

O fator $\frac{1}{4}$ na equação acima é puramente convencional.

As equações de movimento obtidas a partir desta densidade de Lagrangeana nada mais são do que as equações de Maxwell. No chamado gauge de Lorentz, dada por $\partial_\mu A^\mu = 0$, as equações do movimento podem ser escritas como

$$\square^2 A^\mu = j^\mu \quad (2.90)$$

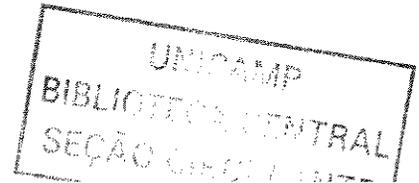
onde definimos

$$j^\mu = ie[\phi^* D^\mu \phi - (D^\mu \phi)^* \phi], \quad (2.91)$$

além desta equação também temos a equação proveniente de ϕ , mas que só pode ser calculada explicitamente quando for dada a forma do potencial V .

As construções acima para o eletromagnetismo nos dão um primeiro exemplo de teoria de Yang-Mills. Para fazermos estas construções nós usamos transformações de gauge da forma $e^{i\alpha(x)}$. Mas este tipo de exponencial nada mais é do que um número complexo unitário, o que é equivalente a dizermos que para qualquer função real $\alpha(x)$ temos $e^{i\alpha(x)} \in U(1)$, onde $U(1)$ denota o grupo dos complexos unitários, ou seja, as simetrias do eletromagnetismo são descritas pelo grupo $U(1)$. Neste caso, dentro do jargão físico, dizemos que o eletromagnetismo é uma teoria de Yang-Mills com grupo de simetria $U(1)$. De um modo geral, as teorias de Yang-Mills são generalizações das construções acima para os casos nos quais o grupo de simetria é mais geral do que $U(1)$.

As simetrias internas de sistemas mais complexos do que o eletromagnetismo, nos casos mais relevantes, são dadas por grupos de Lie. Nestes casos nós temos



Definição 11 Em um sistema com grupo de simetria G , definimos as funções de onda $\psi(x)$ que descrevem o sistema como sendo elementos do espaço de representação de uma representação de G . Muitas vezes os elementos deste espaço são chamados de multipletos associados a representação em uso.

É interessante notarmos que representações irredutíveis distintas de um mesmo grupo de simetria G podem corresponder a sistemas físicos distintos. Dessa forma as propriedades de um sistema físico, além de dependerem do grupo de simetria envolvido, dependem da representação que estamos tomando do grupo.

Definição 12 Dado um grupo de simetria G e uma representação irredutível do mesmo, uma transformação de gauge é uma transformação da forma $\psi(x) \rightarrow u\psi(x)$, com $u \in G$. No caso do elemento $u \in G$ não depender das coordenadas espaço-temporais dizemos que a transformação de gauge é uma transformação global, caso contrário dizemos que a transformação é local.

No caso de $u \in G$ ser uma transformação que não depende do espaço-tempo, ou seja, uma transformação global, nós temos que

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow u\psi(x), \\ \partial^\mu\psi(x) &\rightarrow u\partial^\mu\psi(x).\end{aligned}\tag{2.92}$$

Dessa forma a invariância global do sistema nos diz que a densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}_0(\psi(x), \partial^\mu\psi(x))$ deve obedecer

$$\mathcal{L}_0(u\psi(x), \partial^\mu u\psi(x)) = \mathcal{L}_0(\psi(x), \partial^\mu\psi(x)).\tag{2.93}$$

Mas se nós passarmos a considerar uma transformação local, dada por $u(x) \in G$, nós teremos

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow u(x)\psi(x), \\ \partial^\mu\psi(x) &\rightarrow u(x)\partial^\mu\psi(x) + [\partial^\mu u(x)]\psi(x).\end{aligned}\tag{2.94}$$

Com isso, $\partial^\mu\psi(x)$ deixa de se transformar como $\psi(x)$ de forma que $\mathcal{L}_0(\psi(x), \partial^\mu\psi(x))$ não é invariante por transformações locais de gauge. Para vermos como escrever uma densidade de Lagrangeana invariante por transformações de gauge locais iremos precisar falar um pouco mais em grupos de Lie. Para fins de melhor compreensão usaremos o jargão e o tratamento mais próximos da física.

Para os atuais propósitos um grupo de Lie pode ser visto como um grupo contínuo gerado por uma álgebra de Lie. Sendo a álgebra de Lie gerada por n geradores L_a que satisfazem as relações de comutação

$$[L_a, L_b] = iC_{ab}^c L_c.\tag{2.95}$$

As constantes C_{ab}^c são números reais chamados de constantes de estrutura, note que estamos supondo que $L_a^* = L_a$, isto é, estamos supondo que os geradores são

hermitianos. É sabido que as constantes de estrutura caracterizam de forma não ambígua a álgebra de Lie em questão. Usando esta construção podemos pensar em um elemento $u \in G$ como sendo dada por

$$u = e^{-i\omega^a L_a}, \quad (2.96)$$

onde ω^a são números reais arbitrários.

Da definição das constantes de estrutura fica claro que

$$C_{ab}^c = -C_{ba}^c. \quad (2.97)$$

Além disso a identidade de Jacobi nos fornece

$$C_{ab}^n C_{nc}^d + C_{bc}^m C_{na}^d + C_{ca}^m C_{nb}^d = 0. \quad (2.98)$$

Ao invés de darmos diretamente uma representação em termos de matrizes para G podemos encontrar uma representação matricial para os geradores da álgebra de Lie $\{L_a\}$ obtendo, através da exponencial¹⁰, uma representação matricial para G em uma vizinhança da identidade. Como os geradores adjuntos L_a^* satisfazem as mesmas relações de comutação que os geradores, sempre podemos encontrar uma representação de L_a por matrizes hermitianas. A representação de ordem mais baixa não degenerada é a chamada representação fundamental do grupo.

Dado um grupo qualquer G sempre existe uma representação irredutível do mesmo, nós podemos considerar a representação de dimensão n dada pelas matrizes

$$(L_a)_{ij} = -iC_{ai}^j. \quad (2.99)$$

Esta é a chamada representação adjunta de G . Com esta representação nós podemos transformar a álgebra de Lie de G em um espaço métrico definindo o seguinte produto interno¹¹ entre L_a e L_b :

$$g(L_a, L_b) = g_{ab} = \text{tr}(L_a L_b)_{rep.adj.} = C_{an}^m C_{bm}^n, \quad (2.100)$$

ou seja, nós consideramos a representação adjunta do elemento $L_a L_b$ e tomamos o traço do mesmo. Tendo um produto interno podemos definir o levantamento e abaixamento de índices,

$$C_{abc} = C_{ab}^m g_{mc}. \quad (2.101)$$

É fácil vermos a partir da identidade de Jacobi, que as constantes C_{abc} são totalmente antisimétricas nos índices a , b e c .

Com este tratamento de grupos de Lie nós temos uma forma simples de considerar transformações de gauge infinitesimais, isto é, transformações de gauge que diferem da identidade por um infinitésimo. Se considerarmos um elemento da álgebra de Lie $\omega = \omega^a L_a$, onde os coeficientes ω^a são números reais infinitesimais, podemos aproximar a série de Taylor da exponencial pelo seu

¹⁰Podemos definir a exponencial neste caso a partir da sua série de Taylor.

¹¹Nesta seção sempre iremos considerar representações de dimensão finita.

termo de primeira ordem, dessa forma uma transformação de gauge infinitesimal é dada por

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi + \delta\phi, & \delta\phi &= -i\omega\phi; \\ \phi^* &\rightarrow \phi^* + \delta\phi^*, & \delta\phi^* &= i\omega^t\phi^*.\end{aligned}\quad (2.102)$$

Este tipo de transformação é suficiente para escrevermos uma densidade de Lagrangeana invariante por transformações de gauge locais. Vamos considerar transformações locais da forma

$$\begin{aligned}\delta\psi(x) &= -i\omega(x)\psi(x), \\ \delta[\partial^\mu\psi(x)] &= -i\omega(x)\partial^\mu\psi(x) - i[\partial^\mu\omega(x)]\psi(x),\end{aligned}\quad (2.103)$$

onde $\omega(x) = \omega^a(x)L_a$ é um elemento da álgebra de Lie. Definimos a derivada covariante como sendo

$$D^\mu\psi(x) = [\partial^\mu + igA^\mu(x)]\psi(x), \quad (2.104)$$

onde os elementos $A^\mu = A^{a\mu}L_a$ são elementos da álgebra de Lie, e g é uma constante de acoplamento. Os campos $A^{a\mu}(x)$ são os chamados campos de Yang-Mills. Notemos que a transformação em $D^\mu\psi(x)$ é dada por

$$\delta(D^\mu\psi) \rightarrow -i\omega D^\mu\psi - ig \left\{ \delta A^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu\omega + i[\omega, A^\mu] \right\}. \quad (2.105)$$

Dessa forma para que $D^\mu\psi(x)$ transforme da mesma forma que ψ devemos ter

$$\delta A^\mu(x) = \frac{1}{g} \partial^\mu\omega(x) - i[\omega(x), A^\mu(x)]. \quad (2.106)$$

Com isso a densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}_0(\psi(x), D^\mu\psi(x))$ se torna invariante por transformações de gauge locais. Mas ainda nos resta acrescentar um termo a \mathcal{L}_0 que torne os campos $A^{a\mu}$ objetos dinâmicos. Este termo deve ser quadrático nas derivadas espaço-temporais de $A^{a\mu}$ e ser simultaneamente invariante por transformações de Lorentz e por transformações de gauge locais. O seguinte campo satisfaz estes requerimentos:

$$F^{a\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^{a\nu}(x) - \partial^\nu A^{a\mu}(x) - d C_{abc} A^{b\mu}(x) A^{c\nu}(x). \quad (2.107)$$

O elemento da álgebra de Lie correspondente $F^{\mu\nu} = F^{a\mu\nu}L_a$ pode ser escrito na forma

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + ig[A^\mu(x), A^\nu(x)]. \quad (2.108)$$

Com isso nós definimos a densidade de Lagrangeana invariante por transformações de gauge locais como sendo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_0(\psi, D^\mu\psi). \quad (2.109)$$

Esta é a chamada densidade de Lagrangeana de Yang-Mills.

2.2.1 O modelo de Weinberg-Salam

Como vimos na seção 2.2 o grupo de simetria do eletromagnetismo é o grupo dos números complexos unitários $U(1)$. A idéia básica do modelo de Weinberg-Salam é descrever de maneira unificada as interações fracas e eletromagnéticas em termos de uma teoria de Yang-Mills tendo $SU(2) \times U(1)$ como grupo de simetria (aqui $SU(2)$ denota o grupo das matrizes complexas 2×2 unitárias e com determinante 1).

Primeiramente vamos lembrar como a quiralidade é definida. Se o espaço que estamos usando para escrever as funções de onda possuir um operador com auto-valores ± 1 , podemos definir a quiralidade como sendo os auto-valores deste operador. Na prática nós usamos as matrizes de Dirac para definir este operador. Lembrando que as matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.110)$$

podemos escrever as matrizes de Dirac como sendo

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (2.111)$$

onde \mathbb{I} denota a matriz identidade 2×2 . Agora definimos a quiralidade como sendo os auto-valores de γ_5 : $+1$ correspondendo a quiralidade da mão direita e -1 correspondendo a quiralidade da mão esquerda. Em geral é costume escrevermos

$$\begin{aligned} \gamma_5 R &= R \\ \gamma_5 L &= -L, \end{aligned} \quad (2.112)$$

sendo as partes direita R (right) e esquerda L (left) dadas por

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \\ L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Estas relações nos fornecem as seguintes relações para os conjugados

$$\begin{aligned} \bar{R}\gamma_5 &= -\bar{R}, \\ \bar{L}\gamma_5 &= \bar{L}, \\ \bar{R} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma_5), \\ \bar{L} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + \gamma_5), \end{aligned} \quad (2.114)$$

onde definimos os conjugados por

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R^* \gamma_0 \\ \bar{L} &= L^* \gamma_0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Destas relações obtemos que

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &= \bar{L}R + \bar{R}L, \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \bar{L}\gamma^\mu L + \bar{R}\gamma^\mu R.\end{aligned}\tag{2.116}$$

Um exemplo importante é a teoria para o elétron e para o neutrino. Experimentalmente se verifica que a interação neutrino-elétron só se dá entre as componentes *left*, sendo a que componente *right* do elétron não se comporta como um dubleto. Mais especificamente nós temos que para o eletron vale

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad R = e_R.\tag{2.117}$$

O neutrino é assumido como não tendo massa de forma que a sua parte *right* ν_R não aparece. A teoria é assumida como sendo invariante por $SU(2)$, onde L se transforma como um dubleto e R como um singleto. É sabido da teoria usual de campos que o termo da Lagrangeana correspondente a massa mecânica é proporcional a $\bar{\psi}\psi = \bar{L}R + \bar{R}L$ o que nos representa um problema pois L e R são de naturezas diferentes. Uma forma de resolvermos isto é pela introdução de um campo de Higgs¹² na forma de dubleto

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix},\tag{2.118}$$

de modo que os termos de massa mecânica sejam proporcionais a

$$\mathcal{L}^{massa} \propto \bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^* L.\tag{2.119}$$

Em mais detalhes, se escrevermos

$$\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}^* = (\phi_- \quad \phi_0),\tag{2.120}$$

temos

$$\mathcal{L}^{massa} \propto (\bar{\nu}_L e_R)\phi_+ + (\bar{e}_R \nu_L)\phi_- + (\bar{e}e)\phi_0.\tag{2.121}$$

Os dois primeiros termos da equação acima podem ser eliminados por uma transformação de gauge, já o último termo é o responsável por dar massa para o elétron quando $\phi_0 \neq 0$. Na densidade de Lagrangeana não existe um termo de massa associado ao neutrino.

A densidade de Lagrangeana para o sistema elétron-neutrino é tomada como sendo

$$\mathcal{L}_0 = \bar{L}i\partial^\mu\gamma_\mu L + \bar{R}i\partial^\mu\gamma_\mu R + (\partial\phi)^* \cdot (\partial\phi) - V(\phi^*\phi) - \frac{m}{\rho_0}(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^* L),\tag{2.122}$$

onde o potencial tem a forma

$$V(\phi^*\phi) = \lambda(\phi^*\phi - \rho_0^2)^2,\tag{2.123}$$

¹²Também conhecido como boson de Higgs.

aqui ρ_0 e λ são parâmetros reais positivos e m é a massa física do elétron. Além disso estamos entendendo $\partial\phi$ como sendo o gradiente de ϕ .

O modelo de Weinberg-Salam é obtido quando nós transformamos a simetria global acima em uma simetria local, como descrito na seção anterior. Se considerarmos o campo de gauge associado com o gerador de $U(1)$, t_0 , como sendo W_0 e o respectivo tensor de campo

$$H^{\mu\nu} = \partial^\mu W_0^\nu - \partial^\nu W_0^\mu. \quad (2.124)$$

E considerando os campos de gauge associados com os geradores de $SU(2)$, t como sendo \mathbf{W}^μ , com tensor de campo

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu - g \mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu. \quad (2.125)$$

A densidade de Lagrangeana pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}) + \bar{L}i\gamma_\mu D^\mu L + \bar{R}i\gamma_\mu D^\mu \\ & + (D\phi)^*(D\phi) - V(\phi^*\phi) - \frac{m}{\rho_0}(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^* L), \end{aligned} \quad (2.126)$$

onde

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{t} + ig'W_0^\mu t_0. \quad (2.127)$$

O modelo de Weinberg-Salam, descrito acima, é um exemplo de sistema físico onde ocorre a quebra espontânea de simetria. Primeiramente

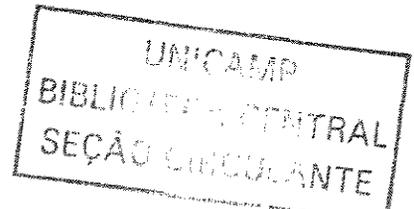
Definição 13 Dizemos que a simetria de um sistema é espontaneamente quebrada, se o estado de menor energia do sistema não for invariante pelas transformações da simetria.

Este tipo de fenômeno ocorre dentro das teorias de gauge sempre que o potencial V verificar a condição $V(0) \neq 0$. E como visto nos desenvolvimentos acima, o termo envolvendo o potencial na Lagrangeana de Yang-Mills depende diretamente do boson de Higgs, por isso dizemos que a quebra espontânea de simetria é provocada pelo mesmo. Este fenômeno se manifesta no aparecimento de massa para os campos de gauge, também chamados de mediadores da interação.

2.2.2 Modelo Padrão

O modelo de Weinberg-Salam nos fornece uma teoria de Yang-Mills para o par elétron-neutrino. Mas evidências experimentais sugerem a existência de outras partículas elementares. As evidências apontam para as três gerações de quarks e de leptons. Tanto as gerações de leptons como as de quarks serão indicadas por índices numéricos, $\alpha = \{1, 2, 3\}$. As três gerações de leptons, da qual o elétron e o neutrino eletrônico fazem parte, são dada por

$$\begin{aligned} l_{L\alpha} : & \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu'_L \\ \mu_L \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu''_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \\ l_{R\alpha} : & e_R & \mu_R & \tau_R \end{aligned} \quad (2.128)$$



Já as gerações de quarks serão denotadas por

$$\begin{aligned} q_{L\alpha} &: \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{c}_L \\ \tilde{s}_L \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{b}_L \end{pmatrix} \\ q_{R\alpha} &: u_R & c_R & t_R \\ q_{R\alpha} &: d_R & s_R & b_R \end{aligned} \quad (2.129)$$

Além das novas gerações de partículas elementares, os quarks possuem uma simetria, denominada simetria de cor, que é dada pelo grupo $SU(3)$. O modelo padrão é uma teoria de gauge que incorpora todas as gerações de partículas e que também leva em conta a simetria de cor dos quarks. Portanto o grupo de simetria de gauge passa a ser $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Para escrevermos uma densidade de Lagrangeana para este modelo nós precisamos fazer duas modificações na densidade de Lagrangeana do modelo de Weinberg-Salam 2.126. Primeiramente precisamos modificar as definições de L e R para incluirmos todos os quarks e Leptons:

$$\begin{aligned} L &= \{l_{L\alpha}, q_{L\alpha}\} \\ R &= \{l_{R\alpha}, q_{R\alpha}\} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Segundo, precisamos modificar os termos de massa da Lagrangeana de modo a podermos atribuir massas arbitrárias para cada partícula. Dessa forma a densidade de Lagrangeana, invariante por transformações de gauge locais, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \bar{L} i \gamma_\mu D^\mu L + \bar{R} i \gamma_\mu D^\mu R \\ &+ (D\phi)^*(D\phi) - V(\phi^* \phi) + \mathcal{L}_{massa}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

O termo de massa pode ser escrito como a soma das contribuições dos quarks e dos leptons, ou seja,

$$\mathcal{L}_{massa} = \mathcal{L}_{mass}^{quark} + \mathcal{L}_{mass}^{lept} \quad (2.132)$$

O termo de massa referente aos leptons é dado por:

$$\mathcal{L}_{mass}^{lept} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \bar{l}_{L\alpha} \frac{\phi}{\rho_0} m_{\alpha\beta} l_{R\beta}, \quad (2.133)$$

onde $m_{\alpha\beta}$ são matrizes complexas constantes arbitrárias, chamadas de matrizes de massa. Já para os quarks nós temos

$$\mathcal{L}_{mass}^{quark} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left(\bar{q}_{L\alpha} \frac{\phi}{\rho_0} M_{\alpha\beta} q_{R\beta} + \bar{q}_{L\alpha} \frac{\tilde{\phi}}{\rho_0} \tilde{M}_{\alpha\beta} \tilde{q}_{R\beta} \right). \quad (2.134)$$

Os detalhes técnicos deste modelo podem ser encontrados em [5].

Capítulo 3

Geometria Não Comutativa

Tanto as variedades como os fibrados sobre as mesmas admitem uma descrição algébrica, sendo que a álgebra envolvida nestas descrições é a álgebra das funções contínuas de M para um corpo¹, isto é, $C(M)$, que no caso de estarmos trabalhando com os complexos é uma álgebra comutativa munida de uma involução (a conjugação). Mas este tipo de caracterização continua fazendo sentido se considerarmos álgebras mais gerais, álgebras não-comutativas. A geometria não-comutativa surge neste ponto: muitos dos conceitos geométricos iniciais, vistos agora do ponto de vista algébrico, se generalizam, e passam a ser motivo de novos estudos.

Daremos início a este capítulo mostrando como caracterizar variedades e fibrados de forma algébrica, construindo em seguida as generalizações dos conceitos e das ferramentas da geometria diferencial.

Com as noções de geometria não-comutativa bem estabelecidas, iremos fazer uma discussão sobre o resíduo de Wodzicki, o teorema de Connes, e como estes fazem a ligação entre as construções de geometria não-comutativa e a geometria Riemanniana.

3.1 Espaços Topológicos

Nesta seção seguiremos a linha desenvolvida em [4]. Um espaço topológico Hausdorff e compacto X tem naturalmente associado a ele uma álgebra comutativa $C(X)$, das funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Esta álgebra possui uma involução, $f \mapsto f^*$, definida por

$$f^*(x) = \bar{f}(x), \quad \forall x \in X. \quad (3.1)$$

Além disso $C(X)$ é uma álgebra de Banach segundo a norma do supremo

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad (3.2)$$

¹Em geral, nas construções de geometria não-comutativa, o corpo é tomado como sendo o dos complexos.

e desse modo $C(X)$ é uma álgebra C^* .

Algumas das construções que faremos não precisam da hipótese de que a álgebra seja C^* , muitas vezes precisamos apenas que a álgebra seja de Banach. Por isso iremos fazer, sempre que possível, as construções para álgebras de Banach, especializando para álgebras C^* quando necessário. Além disso só iremos considerar álgebras com unidade.

Definição 14 *Um caracter sobre uma álgebra de Banach \mathcal{A} é um funcional linear sobrejetivo, que também é um homomorfismo algébrico entre \mathcal{A} e \mathbb{C} . O conjunto de todos os caracteres de \mathcal{A} será denotado por $M(\mathcal{A})$.*

Antes de prosseguirmos com a álgebra precisamos de algumas noções de topologia. Sendo X um conjunto e \mathcal{F} uma família de funções² $f : x \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir uma topologia em X , a chamada topologia fraca, como sendo a topologia cuja base é dada por $f^{-1}(U)$ onde $U \subset \mathbb{R}$ são conjuntos abertos quaisquer. Esta topologia recebe o nome de topologia fraca pois ela é a topologia mais fraca na qual as funções da família \mathcal{F} são contínuas.

Se estivermos considerando uma álgebra \mathcal{A} , o espaço dual da mesma, \mathcal{A}^* , é dado pelo conjunto de funcionais lineares $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Nós podemos considerar em \mathcal{A} a topologia fraca associada com a família de funcionais \mathcal{A}^* . Usualmente nos referimos a esta topologia por topologia fraca. É possível mostrarmos, ver por exemplo [11], que a topologia fraca é de fato mais fraca do que a topologia dada pela norma.

Agora se tomarmos $Y = \mathcal{A}^*$, o dual $Y^* = (\mathcal{A}^*)^*$, pode ser usada para definirmos a topologia fraca em \mathcal{A}^* . Porém podemos definir uma outra topologia, mais fraca, em \mathcal{A}^* , para isso basta considerarmos os funcionais lineares da forma $\xi_x : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{C}$ dados por $\xi_x(f) = f(x)$, ou seja, a avaliação no ponto $x \in X$, e considerarmos eles como os elementos da família de funções para definirmos a topologia. Esta é a topologia *fraca**.

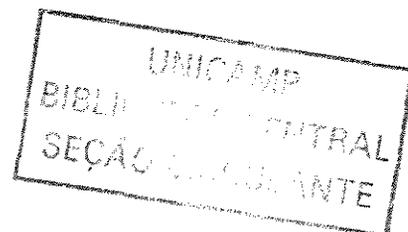
É possível mostrarmos, [11], que a bola unitária em \mathcal{A}^* , $\mathcal{A}_1^* = \{f \in \mathcal{A}^* : \|f\| \leq 1\}$, é um conjunto compacto na topologia fraca*.

Lembremos que se $a \in \mathcal{A}$ o espectro de a , $\text{sp}(a)$, é definido como o conjunto de números complexos λ tais que $a - \lambda\mathbb{1}$ não é inversível em \mathcal{A} . Dado um caracter $\mu \in M(\mathcal{A})$ temos que $\mu(a) \in \text{sp}(a)$; de fato se isto não fosse verdade existiria $b \in \mathcal{A}$ tal que $b(a - \mu(a)\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, de modo que $0 = \mu(a - \mu(a)\mathbb{1})$ seria inversível em \mathbb{C} . E nós sabemos que o raio espectral de um elemento $a \in \mathcal{A}$ é $\|a\|$, desse modo $|\mu(a)| \leq 1$. Além disso, como $\mu(a) = \mu(\mathbb{1})\mu(a)$ qualquer que seja $a \in \mathcal{A}$, segue que $\mu(\mathbb{1}) = \mu(\mathbb{1})^2$ e que $\mu(\mathbb{1}) \neq 0$, desse modo temos que $\|\mu\| = 1$.

Definição 15 *A topologia determinada em $M(\mathcal{A})$ pela topologia fraca* e pela inclusão $M(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{A}_1^*$ é chamada de Topologia de Gelfand.*

Proposição 4 *$M(\mathcal{A})$ com a topologia de Gelfand é um espaço localmente compacto.*

²Aqui também poderíamos considerar funções sobre os complexos para definir a topologia.



Vamos mostrar que $M(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ é um subconjunto fechado, na topologia $fraca^*$, do conjunto compacto \mathcal{A}_1^* . Logo $M(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ será compacto.

Diretamente pela construção da topologia $fraca^*$, se os pontos $a, b \in \mathcal{A}$ forem fixos, temos que a aplicação de $M(\mathcal{A})$ para os complexos, dada por $\mu \rightarrow \mu(a)\mu(b) - \mu(ab)$ é contínua. E obviamente esta aplicação é identicamente nula em $M(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, logo ela é identicamente nula no fecho $\overline{M(\mathcal{A}) \cup \{0\}}$. Mas este resultado é válido quaisquer que sejam os pontos $a, b \in M(\mathcal{A})$. Desse modo se $\mu \in \overline{M(\mathcal{A}) \cup \{0\}}$ temos que μ é identicamente nulo ou que $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$, isto é $\mu \in M(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, de onde concluímos que $M(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ é um conjunto fechado.

Além disso, como \mathcal{A} possui unidade o ponto $\{0\}$ é um ponto isolado, de modo que $M(\mathcal{A})$ é compacto. \square

Proposição 5 *Seja \mathcal{A} uma álgebra de Banach comutativa. Dado um elemento $\mu \in M(\mathcal{A})$, $\ker \mu$ é um ideal maximal. Analogamente todo ideal maximal pode ser escrito como o nucleo de algum elemento de $M(\mathcal{A})$.*

Suponhamos que J seja um ideal contendo propriamente $\ker \mu$, então existe $a \in J$ tal que $\mu(a)$ é inversível. Como μ é sobrejetivo podemos tomar um elemento $b \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(b)\mu(a) = 1$. Então $ba - \mathbb{1} \in \ker \mu \subset J$, e como J é um ideal, temos também que $ba \in J$, desse modo $\mathbb{1} \in J$, e J não é um ideal próprio, o que é um absurdo.

Por outro lado, dado um ideal maximal I , temos que o fecho de I também é um ideal, e nós sabemos que não existem ideais próprios densos em uma álgebra de Banach. Desse modo I deve ser fechado. Sendo I fechado, o quociente \mathcal{A}/I é uma álgebra de Banach comutativa sem ideais próprios, ou seja, um corpo. E um corpo é uma álgebra de divisão, ou seja, todo elemento não nulo é inversível.

Mas nós sabemos que se $\lambda \in \text{sp}(a)$ então $a - \lambda\mathbb{1}$ não é inversível, logo, sendo a álgebra de divisão, devemos ter $a - \lambda\mathbb{1} = 0$, isto é, em uma álgebra de Banach de divisão todo elemento é um múltiplo escalar da identidade.

Portanto, como \mathcal{A}/I , é uma álgebra de Banach de divisão, temos $\mathcal{A}/I \simeq \mathbb{C}$. Logo existe um único caracter μ , o mapa quociente, tal que $\ker \mu = I$. \square

Agora voltemos ao caso em que $\mathcal{A} = C(X)$, para algum espaço topológico compacto X . Dado um elemento $\mu \in M(C(X))$, já sabemos que $\ker \mu$ é um ideal maximal de $C(X)$. Nestas condições temos

Proposição 6 *Existe pelo menos um ponto $x \in X$ no qual todos os elementos de $\ker \mu$ se anulam.*

Suponhamos que isto não seja verdade. Então $\forall x \in X$ existe $f_x \in \ker \mu$ tal que $f_x(x) \neq 0$, mas como f é uma função contínua, existe uma vizinhança de x , U_x , tal que f_x não se anula em nem um ponto de U_x .

Como X é compacto, e como a coleção de abertos U_x é uma cobertura de X , podemos obter uma sub-cobertura finita, $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. E neste caso

$$f = f_{x_1} \overline{f_{x_1}} + \dots + f_{x_n} \overline{f_{x_n}} \quad (3.3)$$

seria um elemento inversível em $\ker \mu$, o que é um absurdo. \square

Lembremos que ξ_x são os funcionais dados pela avaliação no ponto $x \in X$. Pelo que vimos acima nós temos que $\ker \mu \subset \ker \xi_x$, mas ambos os kernels são ideais maximais, logo $\ker \mu = \ker \xi_x$. Tomemos $f \in C(X)$, então $f - \mu(f)\mathbb{1} \in \ker \mu = \ker \xi_x$, de onde obtemos

$$0 = \xi_x(f - \mu(f)\mathbb{1}) = \xi_x(f) - \mu(f). \quad (3.4)$$

Com isso acabamos de demonstrar

Teorema 2 *Os únicos caracteres de $M(C(X))$ são os funcionais ξ_x .*

Assim sendo, os elementos de $M(C(X))$ podem ser identificados com os pontos de X e vice-versa. De fato podemos mostrar que ambos os espaços são homeomorfos.

Com esta construção, nós vemos que é possível recuperarmos um espaço topológico inteiramente a partir da álgebra das funções contínuas sobre o mesmo. Mas para que a caracterização esteja completa, precisamos mostrar que só existe uma álgebra a partir da qual podemos recuperar o espaço topológico, de forma que a correspondência entre álgebras C^* comutativas e espaços topológicos seja um para um.

Definição 16 *Seja \mathcal{A} uma álgebra de Banach comutativa. A transformada de Gelfand do elemento $a \in \mathcal{A}$ é a função $\hat{a} : M(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$\hat{a}(\mu) = \mu(a). \quad (3.5)$$

Pela definição da topologia fraca a transformada de Gelfand \hat{a} é uma função contínua sobre $M(\mathcal{A})$. Logo a transformada de Gelfand leva elementos de \mathcal{A} para elementos de $C(M(\mathcal{A}))$, $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow C(M(\mathcal{A}))$.*

Neste momento precisamos passar a considerar álgebras C^* , pois agora iremos precisar de resultados envolvendo a involução e as suas relações com a norma. Se \mathcal{A} é uma álgebra C^* , sempre podemos escrever um elemento $a \in \mathcal{A}$ como uma combinação linear de elementos auto-adjuntos. Mais precisamente, $a = a_1 + ia_2$ com $a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*)$ e $a_2 = \frac{i}{2}(a^* - a)$. Escrevendo $a \in \mathcal{A}$ dessa forma fica claro que se $\mu \in M(\mathcal{A})$ vale

$$\mu(a^*) = \mu(a_1 - ia_2) = \mu(a_1) - i\mu(a_2) = \overline{\mu(a)}. \quad (3.6)$$

De forma alternativa podemos escrever

$$\hat{a}^*(\mu) = \overline{\hat{a}(\mu)}, \quad (3.7)$$

ou ainda

$$\hat{a}^* = \hat{a}^*. \quad (3.8)$$

Concluimos com isso que a transformada de Gelfand, $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow C(M(\mathcal{A}))$ é um $*$ -homomorfismo.

Além disso, temos o seguinte resultado

Proposição 7 Sendo \mathcal{A} uma álgebra C^* comutativa, tomemos λ como sendo um dos elementos do espectro de $a \in \mathcal{A}$. Então existe um caracter μ sobre \mathcal{A} tal que $\mu(a) = \lambda$.

Como ideais maximais e núcleos de caracteres são a mesma coisa, concluímos, utilizando o lema de Zorn, que o ideal $\mathcal{A}(a - \lambda\mathbb{1})$ está contido em algum ideal maximal, ou seja, existe um caracter μ tal que $\mathcal{A}(a - \lambda\mathbb{1}) \subset \ker \mu$, logo $a - \lambda\mathbb{1} \in \ker \mu$, de onde segue que $\mu(a) = \lambda$. \square

Lembremos que a norma em $M(C(\mathcal{A}))$ é dada por

$$\|\hat{a}\| = \sup_{\mu \in M(\mathcal{A})} |\hat{a}(\mu)|. \quad (3.9)$$

Mas acabamos de ver que se $\lambda \in \text{sp}(a)$ existe um elemento $\mu \in M(\mathcal{A})$ tal que $\mu(a) = \lambda$. Além disso se $\mu(a) = \lambda$ temos $\mu(a - \mu(a)\mathbb{1}) = 0$, logo $a - \lambda\mathbb{1}$ não pode ser inversível, isto é, $\lambda \in \text{sp}(a)$, ou seja,

$$\mu(a) = \lambda \iff \lambda \in \text{sp}(a). \quad (3.10)$$

De modo que podemos escrever a norma de um elemento $\hat{a} \in C(M(\mathcal{A}))$ na forma

$$\|\hat{a}\| = \sup_{\lambda \in \text{sp}(a)} |\lambda| = r(a), \quad (3.11)$$

onde $r(a)$ denota o raio espectral do elemento a . Só que em uma álgebra C^* vale

$$r(a) = \|a\|. \quad (3.12)$$

Dessa forma obtemos a importante relação

$$\|\hat{a}\| = \|a\|. \quad (3.13)$$

Acabamos de mostrar que a transformada de Gelfand, além de ser um *-homomorfismo, é uma isometria.

Um importante teorema de análise funcional, que só enunciaremos, mas cuja demonstração pode ser encontrada em [11], é o teorema de Stone-Weierstrass

Teorema 3 (Stone-Weierstrass) Seja B uma sub-álgebra de $C(X)$ com as propriedades

- B é fechada pela conjugação complexa (se $f \in B$ então $\bar{f} \in B$);
- B separa pontos, isto é, se $x, y \in X$ com $x \neq y$, então existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$;
- B é fechada como conjunto.

Então B é a própria álgebra $C(X)$.

Como a transformada de Gelfand, \mathcal{G} , é uma isometria e a álgebra \mathcal{A} é completa, temos que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é também completa, logo fechada. Por outro lado as avaliações nos pontos separam os pontos de $M(\mathcal{A})$. De fato, se um caracter se anular em todas os pontos ele deve ser identicamente nulo, o que não é possível. Mas a relação dada pela equação 3.8 nos garante que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é fechada com relação a conjugação complexa.

Vemos então que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ satisfaz as condições do teorema de Stone-Weierstrass, logo $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é a própria álgebra $C(M(\mathcal{A}))$, de modo que a transformada de Gelfand é uma bijeção. Todos estes resultados são o conteúdo do teorema de Gelfand-Naimark

Teorema 4 (Gelfand-Naimark) *Se \mathcal{A} é um álgebra C^* , então a transformada de Gelfand, \mathcal{G} , é um $*$ -isomorfismo isométrico.*

Este teorema nos garante que se duas álgebras possuem o mesmo espaço de caracteres, então elas devem ser isometricamente isomorfas, de forma que a caracterização de um espaço topológico a partir da sua álgebra de funções contínuas está bem definida.

Com isso terminamos a caracterização de espaços topológicos a partir de álgebras.

3.2 Fibrados Vetoriais

As construções algébricas envolvendo fibrados vetoriais são feitas de forma muito clara e organizada em [12]; por isso, nesta seção, estaremos seguindo de perto esta referência.

Para podermos comparar dois fibrados sobre um mesmo espaço-base precisamos do seguinte conceito:

Definição 17 *Sendo $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ dois fibrados vetoriais sobre M , um mapa de fibrados $f : E_1 \rightarrow E_2$ é uma aplicação contínua tal que $\pi_2 f = \pi_1$ e tal que $f|_{E_{1_x}} : E_{1_x} \rightarrow E_{2_x}$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais.*

Um outro conceito útil para compararmos fibrados é o de sub-fibrado:

Definição 18 *Um sub-fibrado vetorial E_1 de um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$, é um subconjunto $E_1 \subset E$ tal que $E_1 \cap E_x$ é um sub-espaço vetorial de E_x para cada $x \in M$ e tal que E_1 com a restrição de π seja também um fibrado vetorial sobre M .*

No capítulo 2 definimos uma seção como uma função de M em E . De uma forma mais geral temos

Definição 19 *Uma seção s sobre um subconjunto $A \subset M$ é um mapa contínuo $s : A \rightarrow E$ tal que $\pi(s(x)) = x$.*

Este tipo de seção é muitas vezes chamada de seção local sobre A . Quando s estiver definida em toda M dizemos que ela é uma seção global, dessa forma o conceito de seção apresentado no capítulo 2 é o de seção global.

Como todo fibrado vetorial é localmente trivial, vemos imediatamente que podemos definir seções locais s_i sobre um subconjunto aberto $U \subset M$ de uma trivialização local, de modo que $\{s_i(x)\}$ formam uma base para E_x qualquer que seja $x \in U$. Usualmente chamamos $\{s_i\}$ de uma base local para as seções em $x \in M$.

Se $f : E_1 \rightarrow E_2$ é um mapa entre fibrados, em geral não podemos afirmar que a imagem ou o núcleo de f sejam sub-fibrados dos fibrados correspondentes. Isto só ocorre em alguns casos particulares. E para descrevermos as situações em que isto ocorre iremos utilizar o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [12]:

Lema 1 *Sejam t_1, \dots, t_k seções locais de E sobre uma vizinhança U de x , tais que $t_1(x), \dots, t_k(x)$ sejam linearmente independentes. Então existe uma vizinhança V de x tal que $t_1(y), \dots, t_k(y)$ são linearmente independentes qualquer que seja $y \in V$.*

Agora podemos enunciar

Teorema 5 *Seja $f : E_1 \rightarrow E_2$ um mapa entre fibrados. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\text{im } f$ é um sub-fibrado de E_2 ;
2. $\text{ker } f$ é um sub-fibrado de E_1 ;
3. a dimensão das fibras de $\text{im } f$ é localmente constante;
4. a dimensão das fibras de $\text{ker } f$ é localmente constante.

Vemos claramente que 3 e 4 são equivalentes e que são implicações diretas de 1 ou de 2. Para vermos que 3 implica 1 tomemos $x \in M$ e escolhamos uma base local s_1, \dots, s_m de E_1 em x e t_1, \dots, t_n de E_2 em x . Renumerando se necessário podemos supor que $fs_1(x), \dots, fs_k(x)$ gera a fibra da imagem de f no ponto x ; mais uma vez renumerando se preciso podemos supor que $fs_1(x), \dots, fs_k(x), t_{k+1}, \dots, t_n$ são linearmente independentes. Logo pelo lema 1, e pela suposição de que a dimensão das fibras da imagem de f é localmente constante, concluímos que $fs_1, \dots, fs_k, t_{k+1}, \dots, t_n$ é uma base local para E_2 no ponto x , de modo que fs_1, \dots, fs_k é uma base local para a imagem de f . Vemos desse modo que a imagem de f possui uma estrutura de fibrado vetorial sobre M .

Para vermos que 3 implica em 2 tomemos $\{s_i\}$ base local como acima. Dessa forma podemos escrever fs_i , para $i > k$, em uma vizinhança de x como

$$fs_i(y) = \sum_{j=1}^k a_{ij} fs_j(y). \quad (3.14)$$

Para $i > k$ seja $r_i = s_i - \sum_{j=1}^k a_{ij}s_j$. Como as seções s_i são originalmente linearmente independentes, vemos que $\{s_1, \dots, s_k, r_{k+1}, \dots, r_n\}$ são linearmente independentes. Além disso r_{k+1}, \dots, r_n são seções locais, linearmente independentes, de $\ker f$. Como o número destas seções é exatamente a dimensão de $\ker f$, concluímos que $\{r_{k+1}, \dots, r_n\}$ é uma base local para $\ker f$, logo $\ker f$ é um sub-fibrado de E_1 . \square

Definição 20 Um produto interno em um fibrado vetorial E é um produto interno $(,)_x$ em cada fibra E_x que varie continuamente com relação a x .

É fácil mostrarmos que qualquer fibrado sobre uma variedade compacta³ admite um produto interno.

Definição 21 Se E_1 e E_2 são fibrados vetoriais sobre M , a soma direta de ambos é o fibrado $E = E_1 \oplus E_2$ cujas fibras são dadas por $E_x = E_{1x} \oplus E_{2x}$.

Teorema 6 Se M é uma variedade compacta⁴, qualquer sub-fibrado F de um fibrado vetorial E sobre M é um somando direto em alguma decomposição de E .

Escolhamos um produto interno em E , que sabemos existir. Tal produto interno define uma projeção $p_x : E_x \rightarrow F_x$ que varia continuamente com x . Dessa forma p é um mapa entre fibrados. Tomemos $G = \ker p$, e como $\text{im } p = F$ é um sub-fibrado de E temos que, pelo teorema 5, G é um sub-fibrado de E , e claramente temos $E = G \oplus F$. \square

Lembremos que um espaço Hausdorff compacto é automaticamente normal⁵. Como sempre iremos considerar espaços Hausdorff, e como nos casos de interesse estaremos lidando com espaços compactos, é natural falarmos em propriedades referentes a espaços normais.

Lema 2 Se M é um espaço normal. Seja U uma vizinhança de $x \in M$ e s uma seção de um fibrado vetorial E sobre U . Então existe uma seção t sobre E definida em todo o espaço M tal que t é igual a s em alguma vizinhança de x .

Sejam V, W vizinhanças de x tais que $\bar{V} \subset U$ e $\bar{W} \subset V$. Tomemos ω uma função⁶ sobre M com valores reais tal que $\omega|_{\bar{W}} = 1$, $\omega|_{M-V} = 0$. Agora basta definirmos $t(y) = \omega(y)s(y)$ se $y \in U$ e $t(y) = 0$ caso contrário. \square

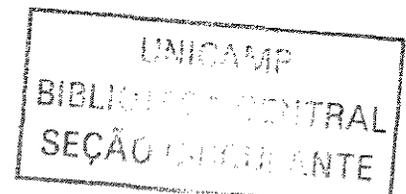
Corolário 1 Sendo X normal, para todo $x \in X$ podemos encontrar seções globais s_1, \dots, s_n que formam uma base local em para $\Gamma(E)$ em x .

³O resultado mais geral só exige que a variedade base seja paracompacta.

⁴Existe uma demonstração deste teorema para o caso de M ser uma variedade paracompacta, mas para os nossos propósitos precisamos apenas do resultado para o caso compacto.

⁵Um espaço topológico X Hausdorff é dito normal, se dados dois fechados disjuntos $A, B \subset X$ existe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f|_A = 1$ e $f|_B = 0$.

⁶A existência desta função é garantida pelo fato de M ser um espaço normal.



Seja $f : E_1 \rightarrow E_2$ um mapa entre fibrados. Podemos usar este mapa para construir um mapa entre os espaços de seções destes dois fibrados, $\Gamma(f) : \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$, dado por

$$(\Gamma(f)s)(x) = f(s(x)) \quad (3.15)$$

Corolário 2 *Seja M normal e $f, g : E_1 \rightarrow E_2$ mapas de fibrados. Então se $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ temos que $f = g$.*

De fato, tomemos $p \in E_1$ com $\pi_1(p) = x$. Então existe uma seção s em uma vizinhança de x com $s(x) = p$ (para isto basta considerarmos uma trivialização local). Mas pelo lema 2, existe uma seção global t que coincide com s em alguma vizinhança de x , de modo que $t(x) = p$. Mas agora podemos escrever $f(p) = f(t(x)) = (\Gamma(f)t)(x) = (\Gamma(g)t)(x) = g(p)$. E como esta igualdade vale para qualquer que seja $p \in E_1$ temos $f = g$. \square

Lema 3 *Sejam M normal e $s \in \Gamma(E)$. Se $s(x) = 0$ então existem elementos $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E)$ e funções $a_1, \dots, a_k \in C(M)$ tais que $a_i(x) = 0$ para $i = 1, \dots, k$ e $s = \sum a_i s_i$.*

Tomemos uma base local $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ no ponto x , (lema 1). Desse modo podemos escrever $s(y) = \sum b_i(y)s_i(y)$ para y suficientemente próximo de x . Notemos que as funções b_i só estão definidas em uma vizinhança de x . Escolhamos funções $a_i \in C(M)$, ou seja, funções sobre toda a variedade, que concordem com as funções b_i em uma vizinhança de x (a existência de tais funções é garantida pela aplicação do lema 2 ao fibrado $M \times \mathbb{K}$, onde \mathbb{K} é o corpo em questão). Sendo assim temos que

$$t = s - \sum a_i s_i, \quad (3.16)$$

se anula em uma vizinhança U do ponto x . Seja V também uma vizinhança de x tal que $\bar{V} \subset U$ e seja $a \in C(M)$ com a sendo zero em x e 1 em $M - V$. Desse modo podemos escrever $s = at + \sum a_i s_i$, com $a(x) = a_i(x) = 0$. \square

Corolário 3 *Seja I_x o ideal bilateral de $C(M)$ dado pelas funções $a \in C(M)$ tais que $a(x) = 0$. Então $\Gamma(E)/(I_x \Gamma(E)) \simeq E_x$, sendo o isomorfismo dado por $s \mapsto s(x)$.*

A demonstração do corolário 2 nos garante que a aplicação $s \mapsto s(x)$ é sobrejetiva. Por outro lado se $s_1(x) = s_2(x)$ definamos $t = s_1 - s_2$ é uma seção que se anula em x . Mas pelo lema 3, podemos escrever t como a soma de elementos do tipo as com $a \in I_x$ e $s \in \Gamma(E)$, ou seja, t é um elemento de $I_x \Gamma(E)$, logo no espaço quociente a classe de equivalência de t é zero. Concluimos com isso que além de ser sobrejetiva a aplicação também é injetiva. Agora fica óbvio que tal aplicação é um isomorfismo. \square

Teorema 7 *Seja M normal. Dado qualquer $C(x)$ -mapa $F : \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$ existe um único mapa entre fibrados $f : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $F = \Gamma(f)$.*

A unicidade segue imediatamente do corolário 2. Por outro lado F induz um mapa da forma

$$f_x : \Gamma(E_1)/(I_x\Gamma(E_1)) \simeq E_{1_x} \rightarrow E_{2_x} \simeq \Gamma(E_2)/(I_x\Gamma(E_2)). \quad (3.17)$$

Considerando este mapa para todos os pontos $x \in M$ obtemos um mapa $f : E_1 \rightarrow E_2$. Se $s \in \Gamma(E_1)$ obtemos⁷, usando o isomorfismo dado pelo corolário 3, $(fs)(x) = f_x[s] = [F(s)] = F(s)(x)$. É claro que f é um mapa linear em casa fibra, só falta mostrarmos que f é contínuo. Para isso, tomemos $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ uma base local em x . Se $p \in E$ e $\pi(p)$ está próximo de x podemos escrever $p = \sum a_i(p)s_i(\pi(p))$, onde as funções a_i são contínuas. Logo $f(p) = \sum a_i(p)f \circ s_i(\pi(p))$, mas $f \circ s_i = F(s_i)$ de modo que $f \circ s_i$ é uma seção contínua. Portanto $f(p)$ é contínua. \square

Corolário 4 *Se M normal, dois fibrados sobre M E_1 e E_2 são isomorfos se, e somente se, $\Gamma(E_1)$ e $\Gamma(E_2)$ forem isomorfos como $C(x)$ -módulos.*

Lema 4 *Seja M compacta e Hausdorff, e seja E um fibrado vetorial qualquer sobre M . Então existe um fibrado trivial⁸ $E_0 = M \times \mathbb{K}^n$ e um mapa sobrejetivo $f : E_0 \rightarrow E$, de forma que o fibrado E dado inicialmente é um somando direto de E_0 , isto é, $E = E_0 \oplus E_2$ para algum fibrado E_2 .*

Para cada ponto $x \in M$ escolhemos seções $s_{x,1}, \dots, s_{x,k_x}$ que formam uma base local em uma vizinhança U_x . Como M é compacta existe um número finito de vizinhanças U_1, \dots, U_n que cobrem M . Logo existe um número finito de seções s_1, \dots, s_n tais que $s_1(x), \dots, s_n(x)$ geram E_x qualquer que seja $x \in M$. Consideremos E_0 como sendo o fibrado trivial $M \times \mathbb{K}^n$, de modo que $\Gamma(E_0)$ é um $C(M)$ -módulo livre com n geradores e_1, \dots, e_n . Consideremos o mapa $F : \Gamma(E_0) \rightarrow \Gamma(E)$ dado por $e_i \mapsto s_i$. Pelo teorema 7, F dá origem a um mapa entre fibrados $f : E_0 \rightarrow E$, e como $f e_i(x) = s_i(x)$ temos que f é um mapa sobrejetivo. Agora como $f : E_0 \rightarrow E$ é um mapa entre fibrados, concluímos, pelo teorema 5, que $\ker f = E_2$ é um subfibrado de E_0 , de modo que podemos escrever $E_0 = E_1 \oplus E_2$, e claramente temos que $E \simeq E_1$. \square

Corolário 5 *Se M é compacta e Hausdorff, e E é um fibrado vetorial qualquer. Então $\Gamma(E)$ é um $C(M)$ -módulo finitamente gerado e projetivo.*

Pela demonstração do lema acima vemos que $\Gamma(E)$ é um submódulo de um módulo livre e finitamente gerado. \square

Neste ponto enunciaremos o teorema mais importante desta seção, o qual nos fornece a caracterização algébrica de fibrados vetoriais:

Teorema 8 *Seja M uma variedade Hausdorff e compacta. Então um $C(M)$ -módulo P é isomorfo a um módulo da forma $\Gamma(E)$ para algum fibrado E se, e somente se, P for finitamente gerado e projetivo.*

⁷Aqui estamos usando $[\cdot]$ para denotar a classe de equivalência de um elemento.

⁸Aqui \mathbb{K} pode ser o corpo dos reais ou o corpo dos complexos.

A volta deste teorema nada mais é do que o corolário 5. Suponhamos que P seja um módulo finitamente gerado e projetivo, então P é um somando direto de um $C(M)$ -módulo livre finitamente gerado F . Portanto existe um idempotente $g : F \rightarrow P$ com $P = \text{im } g$. Como F é finitamente gerado e livre, podemos escrever $F = \Gamma(E_0)$ para $E_0 = M \times \mathbb{K}^n$. Agora, pelo teorema 7, temos que $g = \Gamma(f)$, e como $g^2 = g$ obtemos que $f^2 = f$. Se pudermos mostrar que $E = \text{im } f$ é um sub-fibrado de E_0 , nós teremos, pelo teorema 6, que $E_0 = E_1 \oplus E_2$ onde $E_2 = \ker f$, e dessa forma $P \simeq \text{im } \Gamma(f) = \Gamma(E_1)$. Pelo teorema 5, para mostrarmos que $E_1 = \text{im } f$ é um sub-fibrado de E_0 , é suficiente mostrarmos que a dimensão das fibras E_{1_x} é localmente constante. Como $f^2 = f$ obtemos $\ker f = \text{im}(\mathbb{1} - f)$, e pela construção de f temos $E_{0_x} = E_{1_x} \oplus E_{2_x}$. Suponhamos que $\dim E_{1_x} = h$ e $\dim E_{2_x} = k$, então para pontos $y \in V$ de uma vizinhança V de x vale $\dim E_{1_y} \geq h$ e $\dim E_{2_y} \geq k$, mas

$$\dim E_{1_y} + \dim E_{2_y} = h + k \quad (3.18)$$

é constante. Portanto $\dim E_{1_x}$ é localmente constante. \square

Nestas duas ultimas seções mostramos que espaços topológicos são equivalentes a álgebras C^* comutativas, a álgebra das funções contínuas sobre o espaço dado. E mostramos também que os módulos finitamente gerados e projetivos são equivalentes ao módulo das seções de um fibrado vetorial conveniente.

Daqui em diante pensaremos apenas em álgebras, não mais necessariamente comutativas, e em módulos finitamente gerados e projetivos sobre as mesmas. Tais estruturas serão entendidas como generalizações das estruturas usuais de geometria diferencial.

3.3 Cálculo Quantizado

Para que as caracterizações algébricas feitas nas seções anteriores possam ser usadas como uma forma de generalizar os conceitos usuais de geometria, precisamos construir as ferramentas usuais da geometria em termos algébricos.

Definição 22 *Seja \mathcal{E} um bi-módulo sobre uma álgebra \mathcal{A} . Uma derivação em \mathcal{A} é aplicação linear $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ que satisfaz a regra de Leibniz*

$$D(ab) = (Da)b + a(Db) \quad (3.19)$$

A princípio, a noção de derivação sobre uma álgebra parece ser muito arbitrária e depender da escolha que fazemos do módulo \mathcal{E} . Porém existe um conceito de derivação que resolve o problema de caracterizar as possíveis derivações sobre uma álgebra.

Definição 23 *Uma derivação $d : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{A}$ com valores em um bi-módulo sobre \mathcal{A} , $\Omega^1 \mathcal{A}$, é dita universal se dado qualquer outro bi-módulo \mathcal{E} e outra derivação $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ existe um único morfismo entre bi-módulos $i_D : \Omega^1 \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $D = i_D \circ d$.*

Obviamente, se uma álgebra possuir uma derivação universal como acima, ela será única a menos de isomorfismo entre os bi-módulos. Resta apenas sabermos sobre quais circunstâncias uma álgebra admite uma derivação universal.

Teorema 9 *Dada uma álgebra \mathcal{A} , definamos $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ por $da = \mathbb{I} \otimes a - a \otimes \mathbb{I}$. Seja $\Omega^1 \mathcal{A}$ o sub-módulo de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ gerado pelos elementos da forma adb . Então d juntamente com $\Omega^1 \mathcal{A}$ formam uma derivação universal para \mathcal{A} .*

O mapa d satisfaz a regra de Leibniz

$$\begin{aligned} d(ab) &= \mathbb{I} \otimes (ab) - (ab) \otimes \mathbb{I} = a \otimes b - (ab) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes (ab) - a \otimes b \\ &= a(\mathbb{I} \otimes b - b \otimes \mathbb{I}) + (\mathbb{I} \otimes a - a \otimes \mathbb{I})b = a(db) + (da)b. \end{aligned} \quad (3.20)$$

E como d é linear vemos que $d : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{A}$ é realmente uma derivação para \mathcal{A} .

Agora dada uma outra derivação $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$, definamos $i_D : \Omega^1 \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ pela sua ação em tensores simples

$$i_D(a \otimes b) = aDb, \quad (3.21)$$

e estendamos i_D por linearidade para os demais elementos de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Dessa forma i_D é um morfismo entre módulos e $Da = i_D \circ da$ qualquer que seja $a \in \mathcal{A}$. Com isso estabelecemos a universalidade de $d : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{A}$. \square

Existe uma outra caracterização do bi-módulo $\Omega^1 \mathcal{A}$ além da usada acima. Podemos considerar o operador multiplicação $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que agindo em elementos é dado por $a \otimes b \mapsto ab$. Consideremos um elemento da forma adb , logo

$$\begin{aligned} m(adb) &= m(a \otimes b - ab \otimes \mathbb{I}) \\ &= m(a \otimes b) - m(ab \otimes \mathbb{I}) = ab - ab = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como definimos $\Omega^1 \mathcal{A}$ como sendo gerado pelos elementos da forma adb concluímos que $\Omega^1 \mathcal{A} \subset \ker m$.

Por outro lado se nós tivermos $\sum a_j \otimes b_j \in \ker m$ vale $\sum a_j b_j = 0 \in \mathcal{A}$ de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum a_j \otimes b_j &= \sum a_j \otimes b_j - \sum a_j b_j \otimes \mathbb{I} \\ &= \sum a_j (\mathbb{I} \otimes b_j - b_j \otimes \mathbb{I}) = \sum a_j db_j. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Logo temos que $\Omega^1 \mathcal{A} = \ker m$.

Definição 24 *Uma álgebra diferencial graduada (R^\bullet, δ) é uma álgebra associativa $R^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R^k$ cujo produto é graduado ($R^k R^l \subset R^{k+l}$), juntamente com uma diferencial δ , isto é, um mapa linear de grau 1, tal que $\delta^2 = 0$ é uma derivação graduada*

$$\delta(\omega_k \eta) = \delta \omega_k \eta + (-1)^k \omega_k \delta \eta \quad \omega_k \in R^k. \quad (3.24)$$

Nós queremos construir uma álgebra diferencial graduada $\Omega^* \mathcal{A} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k \mathcal{A}$, tal que $\Omega^0 \mathcal{A} = \mathcal{A}$ e $\Omega^1 \mathcal{A}$ seja como acima. Além disso queremos que $\Omega^* \mathcal{A}$ seja universal no seguinte sentido

Definição 25 Uma álgebra diferencial graduada $(\Omega^* \mathcal{A}, d)$ é dita universal se dada uma outra álgebra diferencial graduada (R^*, δ) , qualquer homomorfismo entre álgebras $\psi : \mathcal{A} \rightarrow R^0$ se estende para um homomorfismo de grau zero $\psi : \Omega^* \mathcal{A} \rightarrow R^*$ que relaciona as duas diferenciais, isto é, $\delta = \psi \circ d$.

Vamos denotar $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathbb{C}$ o quociente de \mathcal{A} pelos números complexos \mathbb{C} . Como estamos considerando álgebras unitárias sobre os complexos, os mesmos podem ser considerados com uma sub-álgebra de \mathcal{A} (basta identificarmos os números complexos com os elementos da forma $\lambda \mathbb{1}$ $\lambda \in \mathbb{C}$). Dessa forma este quociente elimina os escalares de dentro da álgebra.

Podemos dar a $\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$ uma estrutura de bi-módulo

$$\begin{aligned} a(a_0 \otimes \overline{a_1}) &= (aa_0) \otimes \overline{a_1} \\ (a_0 \otimes \overline{a_1})c &= a_0 \otimes \overline{a_1 c} - (a_0 a_1) \otimes \overline{c}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Com esta estrutura de bi-módulo para $\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$ o mapa $i : \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{A}$ dado por $a_0 \otimes \overline{a_1} \mapsto a_0 da_1$, que é bem definido pois $d\mathbb{1} = 0$, se torna um isomorfismo entre módulos. Dessa forma podemos indentificar $\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}} = \Omega^1 \mathcal{A}$.

Se definirmos $\Omega^2 \mathcal{A} = \Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$, pela identificação acima podemos escrever $\Omega^2 \mathcal{A} = (\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}) \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}) \simeq \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{A}}$. De um modo geral podemos definir $\Omega^n \mathcal{A} = \Omega^1 \mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \Omega^1 \mathcal{A}$ (n vezes), que pode ser identificado com $\Omega^n \mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes n}$. Estas duas formas de caracterizarmos $\Omega^n \mathcal{A}$ se relacionam pela identificação

$$a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \mapsto a_0 \otimes_{\mathcal{A}} da_1 \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} da_n. \quad (3.26)$$

Muitas vezes omitimos o produto tensorial e escrevemos

$$a_0 \otimes_{\mathcal{A}} da_1 \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} da_n = a_0 da_1 \cdots da_n \quad (3.27)$$

Definimos a diferencial $d : \Omega^n \mathcal{A} \rightarrow \Omega^{n+1} \mathcal{A}$ pela regra

$$d(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) = \mathbb{1} \otimes \overline{a_0} \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}, \quad (3.28)$$

ou seja,

$$d(a_0 da_1 \cdots da_n) = da_0 da_1 \cdots da_n. \quad (3.29)$$

Fica claro a partir desta definição, uma vez que $d\mathbb{1} = 0$, que $d^2 = 0$.

Para transformarmos $\Omega^* \mathcal{A}$ em um bi-módulo sobre \mathcal{A} definimos a estrutura de módulo à esquerda por

$$a(a_0 da_1 \cdots da_n) = (aa_0) da_1 \cdots da_n, \quad (3.30)$$

para obtermos a estrutura de módulo pela direita precisamos levar em conta a regra de Leibniz. Uma vez que $d(ab) = (da)b + a(db)$ obtemos que $(da)b =$

$d(ab) - a(db)$. Usando esta regra repetidas vezes obtemos para a estrutura de módulo a direita

$$\begin{aligned} (a_0 da_1 \cdots da_n)b &= (-1)^n a_0 a_1 da_2 \cdots da_n db \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_0 da_1 \cdots d(a_i a_{i+1}) \cdots da_n db \\ &+ a_0 da_1 \cdots da_{n-1} d(a_n b). \end{aligned} \quad (3.31)$$

E se definirmos a multiplicação entre dois elementos de $\Omega^* \mathcal{A}$ por

$$(a_0 da_1 \cdots da_n)(b_0 db_1 \cdots db_m) = (a_0 da_1 \cdots da_n b_0)(db_1 \cdots db_m), \quad (3.32)$$

$\Omega^* \mathcal{A}$ se torna uma álgebra diferencial graduada.

Se a álgebra \mathcal{A} tiver uma involução, podemos transformar $\Omega^* \mathcal{A}$ em uma álgebra involutiva definindo

$$(a_0 da_1 \cdots da_n)^* = (-da_n^*) \cdots (-da_1^*) a_0^*. \quad (3.33)$$

É possível verificarmos, usando as estruturas de módulo a direita, como vistas acima, que $((-da_n^*) \cdots (-da_1^*) a_0^*)^* = a_0 da_1 \cdots da_n$ e que $(da_1 \cdots da_n b)^* = b^* da_n^* \cdots da_1^*$ de forma que para quaisquer dois elementos $\omega, \eta \in \Omega^* \mathcal{A}$ vale $(\omega \eta)^* = \eta^* \omega^*$, como deveria ser.

Suponhamos que (R^*, δ) seja uma álgebra graduada diferencial tal que exista um homomorfismo algébrico $\psi : \mathcal{A} \rightarrow R^0$. Podemos estender este homomorfismo para $\psi : \Omega^* \mathcal{A} \rightarrow R^*$ por

$$\psi(a_0 da_1 \cdots da_n) = \psi(a_0) \delta(\psi(a_1)) \cdots \delta(\psi(a_n)). \quad (3.34)$$

Desse modo $\Omega^* \mathcal{A}$ é uma álgebra graduada diferencial universal.

Definição 26 *Seja \mathcal{E} um \mathcal{A} -módulo a direita. Consideremos o \mathcal{A} -módulo a direita $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$. Uma conexão em \mathcal{E} é um mapa linear*

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}, \quad (3.35)$$

que satisfaça

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da, \quad (3.36)$$

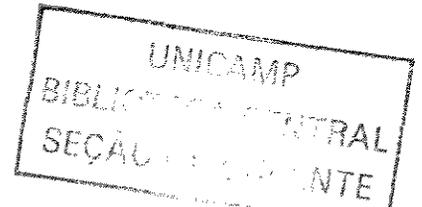
para $s \in \mathcal{E}$ e $a \in \mathcal{A}$.

Nós podemos estender a conexão para n -formas, $\nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^* \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^* \mathcal{A}$, pela regra

$$\nabla(s \otimes \omega) = \nabla(s) \otimes \omega + s \otimes d\omega, \quad (3.37)$$

para quaisquer $s \in \mathcal{E}$ e $\omega \in \Omega^* \mathcal{A}$.

Em alguns casos é possível falarmos de um produto interno para um módulo



Definição 27 Um pré- C^* -módulo a direita, \mathcal{E} , sobre uma C^* -álgebra \mathcal{A} é um módulo complexo a direita sobre \mathcal{A} juntamente com uma aplicação sesquilinear $(\cdot | \cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$, satisfazendo

$$\begin{aligned} (r | s + t) &= (r | s) + (r | t), \\ (r | sa) &= (r | s)a, \\ (r | s) &= (s | r)^*, \\ (s | s) &> 0, \quad s \neq 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Lembremos que em uma C^* -álgebra \mathcal{A} , dizemos que um elemento $a \in \mathcal{A}$ é positivo se $\text{sp}(a) \subset [0, \infty)$.

Quando lidamos com pré- C^* -módulos podemos falar na compatibilidade da conexão com a estrutura de produto interno. Para fazermos isto precisamos estender o produto interno de \mathcal{E} para $\mathcal{E} \otimes \Omega^* \mathcal{A}$. Para $s, t \in \mathcal{E}$ e para $\omega \in \Omega^* \mathcal{A}$ definimos

$$\begin{aligned} (s | t \otimes \omega) &= (s | t)\omega, \\ (s \otimes \omega | t) &= \omega^*(s | t). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Definição 28 Quando \mathcal{E} é um pré- C^* -módulo, uma conexão é dita compatível com a estrutura Hermitiana se $\forall s, t \in \mathcal{E}$ ela satisfizer

$$(\nabla s | t) + (s | \nabla t) = d(s | t). \tag{3.40}$$

As conexões compatíveis sempre existem, qualquer que seja o fibrado \mathcal{E} em questão. Primeiramente consideremos o fibrado livre $\mathcal{E} = \mathcal{A}^n$, podemos definir a derivação d nos elementos deste fibrado da seguinte forma

$$d \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 \\ \vdots \\ da_n \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Não é difícil vermos que d , definida desta forma, é uma conexão compatível com a estrutura Hermitiana dada por

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n s_j^* t_j. \tag{3.42}$$

Mas podemos ver no apêndice A que todo módulo projetivo finitamente gerado pode ser escrito na forma $p\mathcal{F}$, onde \mathcal{F} é um módulo livre finitamente gerado e $p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é um operador idempotente. Mas um módulo \mathcal{F} sobre \mathcal{A} , que é livre e finitamente gerado, é isomorfo a \mathcal{A}^n , onde n nada mais é do que o número de geradores de \mathcal{F} . Dessa forma podemos escrever todo módulo projetivo finitamente gerado como $p\mathcal{A}^n$, com $p : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n$ um operador idempotente. Notemos que a estrutura Hermitiana definida acima para \mathcal{A}^n induz uma estrutura Hermitiana em $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^n$. Além disso, em um módulo da forma $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^n$,

pd define uma conexão compatível com a estrutura Hermitiana induzida em \mathcal{E} . Logo sempre podemos definir pelo menos uma conexão compatível em $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^n$.

Agora notemos que se ∇_1 e ∇_2 são duas conexões sobre \mathcal{E} , então $\nabla_1 - \nabla_2$ é um mapa $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$ linear em \mathcal{A} , ou seja, se $a \in \mathcal{A}$ e $s \in \mathcal{E}$ temos $\alpha(sa) = (\alpha s)a$. Podemos mostrar que no caso de ∇_1 e ∇_2 serem compatíveis com a estrutura Hermitiana então $\alpha^* = -\alpha$, isto é, α é anti-auto-adjunto. Inversamente se ∇_0 for uma conexão compatível em \mathcal{E} e $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$ for um operador anti-auto-adjunto, então $\nabla = \nabla_0 + \alpha$ é uma outra conexão compatível em \mathcal{E} . Portanto, fixada uma conexão compatível ∇_0 , todas as demais conexões compatíveis podem ser escritas na forma $\nabla = \nabla_0 + \alpha$ com $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$ anti-auto-adjunto.

Em particular, se fizermos a identificação $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^n$, podemos pensar em α com sendo um elemento de $\mathcal{A}^{n \times n} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$ tal que

$$\alpha = \alpha p = p\alpha = p\alpha p. \quad (3.43)$$

De um modo geral identificamos $\mathcal{A}^{n \times n} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$ com $(\Omega^1 \mathcal{A})^{n \times n}$. Dessa forma, ao fixarmos $\nabla_0 = pd$ podemos escrever qualquer conexão compatível sobre \mathcal{E} na forma

$$\nabla = pd + \alpha. \quad (3.44)$$

Podemos usar estes resultados para obter uma fórmula explícita para a curvatura associada a uma conexão ∇ em $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^n$. Primeiramente notemos que podemos definir d para elementos de $(\Omega^1 \mathcal{A})^{n \times n}$ da seguinte forma: se $\omega = (\omega_{ij}) \in (\Omega^1 \mathcal{A})^{n \times n}$ definimos $d\omega = (d\omega_{ij})$, de modo que d em $(\Omega^1 \mathcal{A})^{n \times n}$ continua satisfazendo a regra de Leibniz. E se usarmos a identificação de $\mathcal{A}^{n \times n} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$ com $(\Omega^1 \mathcal{A})^{n \times n}$, obtemos as seguintes relações para um operador idempotente

$$\begin{aligned} p(dp)p &= 0, \\ p(dp)(dp) &= (dp)(dp)p, \\ (dp)p &= (1-p)(dp). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Escrevendo a curvatura θ na forma $\theta = \nabla^2$, podemos usar as equações 3.44 e 3.45 para obtermos a importante relação

$$\begin{aligned} \theta(s) &= pd(pds + \alpha s) + \alpha(pds + \alpha s) \\ &= pdpds + pd(\alpha s) + \alpha pds + \alpha^2 s \\ &= pdpds + p(d\alpha)s - p\alpha ds + \alpha pds + \alpha^2 s, \end{aligned} \quad (3.46)$$

e uma vez que $s = ps$ concluímos que

$$\theta(s) = (pdpdp + p(d\alpha)p + \alpha^2)(s). \quad (3.47)$$

3.4 Traço de Dixmier

Quando estamos lidando com grandezas que são operadores sobre um determinado espaço, como por exemplo a curvatura vista na primeira seção do capítulo

2, precisamos de um funcional do tipo traço para falarmos em integral. Como veremos adiante, iremos usar uma representação da álgebra \mathcal{A} em um espaço de Hilbert para fazer os cálculos. Dessa forma é importante se ter uma generalização conveniente do traço usual, em espaços de dimensão finita, para os casos em que o espaço de Hilbert não possui dimensão finita. Na prática, não podemos definir um funcional do tipo traço para todos os operadores lineares limitados sobre \mathcal{H} . Esta generalização é obtida pelo traço de Dixmier dentro de uma classe razoavelmente abrangente de operadores.

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert⁹ e $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores lineares limitados sobre \mathcal{H} . Dentro do espaço dos operadores lineares limitados de \mathcal{H} nós temos o sub-espaço dos operadores compactos, denotado por \mathcal{K} , sendo que

Definição 29 *Um operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ a sequência $\{Tx_n\}$ possui uma sub-sequência convergente.*

Seja $T \in \mathcal{K}$ um operador compacto, o operador dado por $|T| = (T^\dagger T)^{\frac{1}{2}}$, chamado de valor absoluto de T , é um operador auto-adjunto com auto-valores positivos, ou seja, é um operador positivo. Desse modo podemos escrever $|T|$ em termos de uma base de auto-estados, isto é, denotando os vetores de \mathcal{H} por $|v\rangle$ e os duais por $\langle v|$ podemos escrever

$$|T| = \sum_k s_k |u_k\rangle \langle u_k| \quad (3.48)$$

onde os vetores $|u_k\rangle$ são auto-vetores de $|T|$ com auto-valores s_k , ou seja, $|T|(|u_k\rangle) = s_k |u_k\rangle$. Em textos de física é comum escrevermos a equação acima com o produto tensorial subentendido

$$|T| = \sum_k s_k |u_k\rangle \langle u_k|, \quad (3.49)$$

notação que adotaremos.

É possível mostrarmos, ver [11], que sendo T um operador compacto, podemos escrevê-lo na forma

$$T = U |T|, \quad (3.50)$$

sendo U uma isometria parcial, ou seja, onde U não se anula ele é uma isometria. Esta é a chamada decomposição polar do operador T . Agora usando a equação 3.49, podemos escrever

$$T = U \sum_k s_k |u_k\rangle \langle u_k| = \sum_k s_k |v_k\rangle \langle u_k|, \quad (3.51)$$

com $|v_k\rangle = U |u_k\rangle$. Esta expressão é chamada de expansão canônica de T . Os coeficientes $s_k = s_k(T)$ são chamados de valores singulares de T . Reordenando se necessário, podemos supor que os valores singulares de T , $s_k(T)$, aparecem em ordem decrescente, ou seja, a sequência $\{s_k\}$ é monótona decrescente.

⁹Estamos supondo que os espaços de Hilbert são de dimensão infinita e separáveis, de modo que existe uma base ortonormal contável infinita.

Definição 30 Dentro do conjunto dos operadores compactos \mathcal{K} definimos as classes

$$\mathcal{L}^p = \{T \in \mathcal{K} : \sum_k s_k(T)^p \leq \infty\}. \quad (3.52)$$

A classe \mathcal{L}_1 é chamada de classe traço. Nas classes \mathcal{L}^p podemos definir uma norma por

$$\|T\|_p = \left(\sum_k s_k(T)^p \right)^{\frac{1}{p}} = (\text{Tr} |T|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.53)$$

Definimos as somas parciais dos valores singulares de T por

$$\sigma_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k. \quad (3.54)$$

Vemos claramente que na classe traço temos $\|T\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(T)$.

Lema 5 Cada σ_n obedece a desigualdade triangular, ou seja, $\sigma_n(A+B) \leq \sigma_n(A) + \sigma_n(B)$.

Para demonstração ver [4]. \square

Uma outra desigualdade que as funções σ_n satisfazem é dada por

Lema 6 Sendo $S, T \in \mathcal{K}$ operadores positivos, então

$$\sigma_{m+n}(S+T) \geq \sigma_m(S) + \sigma_n(T), \quad (3.55)$$

para quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

A demonstração deste lema também pode ser encontrada em [4]. \square

Como cada soma parcial $\sigma_n(T)$ é definida em termos dos valores singulares de T , que são positivos, fica fácil vermos que, usando o lema 5 acima, cada σ_n define uma norma em \mathcal{K} .

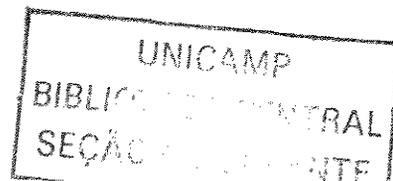
A princípio as somas parciais σ_n só estão definidas para valores inteiros de n , mas nós podemos estendê-las para todos os valores reais por linearidade. Sendo $n = [\lambda]$ a parte inteira de λ , e sendo $0 \leq t \leq 1$, podemos definir

$$\sigma_\lambda(T) = (1-t)\sigma_n(T) + t\sigma_{n+1}(T), \quad (3.56)$$

ou seja, ligamos os valores $\sigma_n(T)$ e $\sigma_{n+1}(T)$ por uma reta. E como as funções σ_n satisfazem a desigualdade triangular, é imediato verificarmos que as extensões σ_λ satisfazem a desigualdade triangular para cada λ .

Definição 31 O ideal de Dixmier de operadores compactos é definido por

$$\mathcal{L}^{1+} = \left\{ T \in \mathcal{K} : \|T\|_{1+} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \geq e} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda} < \infty \right\}. \quad (3.57)$$



O lema 5 nos garante que $\|\cdot\|_{1+}$ está bem definida como norma. Se tivermos $T \in \mathcal{L}^1$, $\sigma_\lambda(T)$ é limitada de modo que $\|T\|_{1+} \leq \infty$, ou seja, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{1+}$.

Para definirmos um funcional do tipo traço em \mathcal{L}_{1+} consideremos

Definição 32 A média de Cesaro da função $\sigma_\lambda(T)/\log \lambda$ é definida por

$$\tau_\lambda(T) = \frac{1}{\log \lambda} \int_3^\lambda \frac{\sigma_u(T)}{\log u} \frac{du}{u}. \quad (3.58)$$

Como as funções σ_u satisfazem a desigualdade triangular fica claro que a média de Cesaro acima satisfaz $\tau_\lambda(S+T) \leq \tau_\lambda(S) + \tau_\lambda(T)$.

A média de Cesaro possui as propriedades de um funcional do tipo traço com exceção da aditividade, isto é, $\tau_\lambda(S+T) \neq \tau_\lambda(S) + \tau_\lambda(T)$. Porém ela possui uma aditividade assintótica, mais precisamente temos

Lema 7 Se $S, T \in \mathcal{L}^{1+}$ são operadores positivos, então

$$\tau_\lambda(S+T) - \tau_\lambda(S) - \tau_\lambda(T) = O\left(\frac{\log \log \lambda}{\log \lambda}\right), \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.59)$$

ou seja, $\tau_\lambda(S+T) - \tau_\lambda(S) - \tau_\lambda(T) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Do lema 6, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau_\lambda(S) + \tau_\lambda(T) - \tau_\lambda(S+T) &= \frac{1}{\log \lambda} \int_3^\lambda \frac{\sigma_u(S) + \sigma_u(T) - \sigma_u(S+T)}{\log u} \frac{du}{u} \\ &\leq \frac{1}{\log \lambda} \int_3^\lambda \frac{\sigma_{2u}(S+T) - \sigma_u(S+T)}{\log u} \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{\log u} \int_6^{2\lambda} \left(\frac{\sigma_u(S+T)}{\log \frac{1}{2}u} - \frac{\sigma_u(S+T)}{\log u} \right) \frac{du}{u} \\ &\quad - \frac{1}{\log \lambda} \left(\int_3^\lambda - \int_6^{2\lambda} \right) \frac{\sigma_u(S+T)}{\log u} \frac{du}{u}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Agora das observações após a equação 3.56 e da definição 31 obtemos

$$\frac{\sigma_u(S+T)}{\log u} \leq \frac{\sigma_u(S) + \sigma_u(T)}{\log u} \leq \frac{\|S\|_{1+} + \|T\|_{1+}}{\log u}, \quad (3.61)$$

ou em outra forma

$$\sigma_u(S+T) \leq (\|S\|_{1+} + \|T\|_{1+}) \log u. \quad (3.62)$$

Esta desigualdade é usada para majorarmos as integrais da primeira desigualdade, o que nos fornece

$$\tau_\lambda(S) + \tau_\lambda(T) - \tau_\lambda(S+T) \leq (\|S\|_{1+} + \|T\|_{1+}) \log 2 \frac{2 + \log \log \lambda}{\log \lambda}. \quad (3.63)$$

Dessa desigualdade segue-se o lema. \square

Agora notemos que, se $T \in \mathcal{L}^{1+}$, vale

$$|\tau_\lambda(T)| \leq \frac{1}{\log \lambda} \|T\|_{1+} \int_3^\lambda \frac{1}{u} du = \frac{\log \frac{\lambda}{3}}{\log \lambda} \|T\|_{1+}, \quad (3.64)$$

dessa forma, a função que leva $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$ é limitada no intervalo $[3, \infty)$. Além disso é imediato vermos que ela é contínua em λ . Dessa forma temos que $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$ é uma função em $C_b[3, \infty)$, onde denotamos o conjunto das funções contínuas e limitadas sobre o intervalo $[3, \infty)$ por $C_b[3, \infty)$. Denotemos por $C_0[3, \infty)$ o conjunto das funções contínuas em $[3, \infty)$ que se anulam no infinito. Uma vez que $\tau_\lambda(S+T) - \tau_\lambda(S) - \tau_\lambda(T) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, concluímos que $\tau_\lambda(S+T) - \tau_\lambda(S) - \tau_\lambda(T) \in C_0[3, \infty)$. Estas observações nos levam a seguinte

Definição 33 Consideremos a álgebra quociente $B_\infty = C_b[3, \infty)/C_0[3, \infty)$, e seja $\tau(T) \in B_\infty$ a classe de equivalência da função $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$, para um operador positivo $T \in \mathcal{L}^{1+}$. Então τ é um funcional aditivo e positivo-homogêneo, isto é, $\tau(S+T) = \tau(S) + \tau(T)$ e $\tau(cT) = c\tau(T)$ para $c \geq 0$.

A definição acima é feita somente para os operadores positivos de \mathcal{L}^{1+} , mas existe um lema sobre álgebras e ideais, ver [4], que nos garante que \mathcal{L}^{1+} é gerado linearmente pelos seus elementos positivos, de forma que podemos estender a definição acima, por linearidade, para todos os elementos de \mathcal{L}^{1+} .

Com isso obtemos uma aplicação entre operadores de \mathcal{L}^{1+} e elementos da álgebra B_∞ . Para obtermos um funcional, ou seja, uma aplicação com valores em \mathbb{C} , precisamos tomar um funcional sobre B_∞ . Mais precisamente vamos considerar estados sobre B_∞ , isto é, funcionais $\omega : B_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\omega(\mathbb{I}) = 1$, onde $\mathbb{I} \in B_\infty$ é a identidade de B_∞ .

Definição 34 Para cada estado ω sobre B_∞ corresponde um traço de Dixmier

$$Tr_\omega T \stackrel{\text{def}}{=} \omega(\tau(T)). \quad (3.65)$$

Dentro de \mathcal{L}^{1+} existe uma classe especial de operadores,

Definição 35 Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}^{1+}$ é mensurável se a função $\tau_\lambda(T)$ converge quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}^{1+}$ é um operador mensurável, então $\tau_\lambda(T) \rightarrow \alpha$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, desse modo no quociente B_∞ a classe de equivalência da função $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$ é igual a classe de equivalência de $\alpha 1$, onde 1 denota a função constante igual a um. Não é difícil vermos que a classe de equivalência da função constante igual a 1 nada mais é do que a identidade de B_∞ . Dessa forma, se denotarmos por $[\tau_\lambda(T)] \in B_\infty$ a classe de equivalência da função $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$, obtemos

$$[\tau_\lambda(T)] = [\alpha 1] = \alpha[1] = \alpha \mathbb{I}. \quad (3.66)$$

Assim, se $T \in \mathcal{L}^{1+}$ é mensurável, obtemos que

$$\text{Tr}_\omega T = \omega([\tau_\lambda(T)]) = \omega(\alpha \mathbb{1}) = \alpha = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tau_\lambda(T), \quad (3.67)$$

independentemente do estado ω escolhido. Neste caso denotamos o traço de Dixmier por Tr^+ . Logo temos a importante relação

$$\text{Tr}^+ T = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tau_\lambda(T). \quad (3.68)$$

Um caso particular de operador mensurável ocorre quando o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_N(T)}{\log N} \quad (3.69)$$

existe. Neste caso pode-se calcular o limite da média de Cesaro, obtendo-se

$$\text{Tr}^+ T = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tau_\lambda(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \quad (3.70)$$

3.5 K-Ciclos

Os objetos que nos permitem fazer contas dentro da geometria não-comutativa são os chamados K-ciclos

Definição 36 Um K-ciclo (\mathcal{H}, D) para uma \star -álgebra \mathcal{A} é dado por uma \star -representação de \mathcal{A} dentro da álgebra de operadores limitados sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} , $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, juntamente com um operador (não limitado) auto-adjunto D em \mathcal{H} com resolvente compacto, tal que $[D, \rho(a)]$ é limitado qualquer que seja $a \in \mathcal{A}$.

Usualmente omitimos a escrita da representação ρ e escrevemos somente $[D, a]$.

Em muitos casos o espaço de Hilbert \mathcal{H} é um espaço \mathbb{Z}_2 -graduado, sendo o operador de graduação Γ , com $\Gamma^2 = \mathbb{1}$. Tal que \mathcal{A} age em \mathcal{H} por operadores pares, e D é um operador ímpar, isto é, para $a \in \mathcal{A}$ $\Gamma a = a \Gamma$ e $D \Gamma = -\Gamma D$. O operador D é normalmente chamado de operador de Dirac.

Lembremos que o traço de Dixmier está definido para uma subclasse de operadores de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, de modo que faz sentido a seguinte definição.

Definição 37 Um K-ciclo é dito n^+ somável se $|D|^{-n}$ pertence ao ideal de Dixmier \mathcal{L}^{1+} . A ordem de somabilidade de um K-ciclo pode ser vista como a dimensão do K-ciclo.

Mais adiante veremos que que a dimensão do K-ciclo, nos casos em que estamos considerando espaços geométricos usuais, está diretamente relacionada com a dimensão do espaço.

A existência de um K-ciclo nos permite considerar a álgebra das formas diferenciais universais $\Omega^* \mathcal{A}$ como uma sub-álgebra da álgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Proposição 8 Dado um K-ciclo (\mathcal{H}, D) sobre uma álgebra \mathcal{A} , a seguinte equação define uma \star -representação de $\Omega^\bullet \mathcal{A}$ em \mathcal{H}

$$\pi(a_0 da_1 \cdots da_n) = a_0 [D, a_1] \cdots [D, a_n]. \quad (3.71)$$

Como $\pi(da_1 da_2) = [D, a_1][D, a_2] = \pi(da_1)\pi(da_2)$ vemos claramente que π é um homomorfismo algébrico. E sendo D um operador auto-adjunto obtemos que $[D, a]^\star = -[D, a^\star]$, desse modo $\pi(a_0 da_1 \cdots da_n)^\star = \pi((a_0 da_1 \cdots da_n)^\star)$. \square

Considerando os elementos de $\Omega^\bullet \mathcal{A}$, através de um K-ciclo (\mathcal{H}, D) , como operadores em \mathcal{H} , podemos falar no traço de Dixmier dos mesmos.

Definição 38 Um K-ciclo n^+ somável sobre uma álgebra \mathcal{A} , (\mathcal{H}, D) , é dito tame se para todo $T \in \pi(\Omega^\bullet \mathcal{A})$ e para todo $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, a seguinte equação é válida

$$Tr^+(ST | D |^{-n}) = Tr^+(S | D |^{-n} T) \quad (3.72)$$

O traço de Dixmier é um candidato natural para definirmos um produto interno em $\pi(\Omega^\bullet \mathcal{A})$. Mas antes de fazermos isto é conveniente notarmos o seguinte: apesar de π ser um homomorfismo entre álgebras, se $\ker \pi \neq \{0\}$, π não será um homomorfismo entre álgebras diferenciais, isto é, π não preservará a diferencial; de fato, se $\pi(\omega) = 0$ e $\pi(d\omega) \neq 0$ temos claramente que $\pi(d\omega) \neq i[D, \pi(\omega)]$.

Uma forma de resolvermos este problema é através de um quociente. Para fazermos isto notemos que

$$J_0 = \ker \pi, \quad (3.73)$$

é um ideal bi-lateral graduado. A graduação de J_0 é naturalmente dada por $J_0 = \bigoplus_k J_0^k$ onde $J_0^k = \{\omega \in \Omega^k \mathcal{A} : \pi(\omega) = 0\}$. Mas J_0 não é um ideal diferencial, ou seja, em geral dJ_0 não está contido em J_0 . A forma correta de resolvermos isto é dada pela seguinte

Proposição 9 Sendo $J_0 = \ker \pi$ o ideal bi-lateral graduado de $\Omega^\bullet \mathcal{A}$, então $J = J_0 + dJ_0$ é um ideal bi-lateral graduado diferencial de $\Omega^\bullet \mathcal{A}$.

Como subconjunto de $\Omega^\bullet \mathcal{A}$, J possui claramente uma graduação, além disso, como $d^2 = 0$, $dJ \subset J$, dessa forma só precisamos mostrar que J é um ideal. Sendo ω um elemento de J podemos escrevê-lo na forma $\omega = \omega_1 + d\omega_2$ com $\omega_1 \in J_0 \cap \Omega^k \mathcal{A}$ e $\omega_2 \in J_0 \cap \Omega^{k-1} \mathcal{A}$ (o caso geral é obtido diretamente por linearidade). Seja $\alpha \in \Omega^l \mathcal{A}$, dessa forma obtemos

$$\begin{aligned} \omega\alpha &= \omega_1\alpha + (d\omega_2)\alpha = \omega_1\alpha + d(\omega_2\alpha) - (-1)^{k-1}\omega_2 d\alpha \\ &= (\omega_1\alpha + (-1)^k \omega_2 d\alpha) + d(\omega_2\alpha), \end{aligned} \quad (3.74)$$

como J_0 é um ideal vemos que $\omega_1\alpha + (-1)^k \omega_2 d\alpha$ e que $\omega_2\alpha$ são elementos de J_0 . Dessa forma $\omega\alpha \in J$ (o caso $\alpha\omega$ é totalmente análogo). \square

Agora, como J é um ideal diferencial, podemos introduzir a seguinte álgebra quociente

$$\Omega_D^\bullet \mathcal{A} = \pi(\Omega^\bullet \mathcal{A}) / \pi(J). \quad (3.75)$$

Neste ponto é natural considerarmos π como

$$\pi : \Omega^\bullet \mathcal{A} \rightarrow \Omega_D^\bullet, \quad (3.76)$$

e agora π é um homomorfismo diferencial entre álgebras.

É interessante notarmos que $\Omega_D^k \mathcal{A}$, qualquer que seja k , pode ser escrita na forma

$$\Omega_D^k \mathcal{A} = \pi(\Omega^k \mathcal{A}) / \pi(d(J_0 \cap \Omega^{k-1})) \quad (3.77)$$

Esta construção nos garante que expressões da forma

$$\sum_j a_{0j} [D, a_{1j}] \cdots [D, a_{kj}], \quad (3.78)$$

definem de maneira única e sem ambiguidades¹⁰ elementos de $\Omega_D^\bullet \mathcal{A}$. Isto nos permite usar o traço de Dixmier para definirmos um produto interno em $\Omega_D^\bullet \mathcal{A}$. Para isso lembremos que o traço de Dixmier é cíclico, assim em um K-ciclo *tame* vale

$$Tr^+(T | D |^{-n} S^\dagger) = Tr^+(S^\dagger T | D |^{-n}) = Tr^+(S^\dagger | D |^{-n} T), \quad (3.79)$$

dessa forma podemos definir um produto interno em $\pi(\Omega^k \mathcal{A})$ por

$$\langle S | T \rangle = Tr^+(S^\dagger T | D |^{-n}). \quad (3.80)$$

Denotemos por \mathcal{H}_k o espaço de Hilbert obtido através do complemento de $\pi(\Omega^k \mathcal{A})$ pelo produto interno definido acima. Sendo P o projetor ortogonal de \mathcal{H}_k no complemento ortogonal de $\pi(d(J_0 \cap \Omega^{k-1} \mathcal{A}))$, temos que o produto interno dado por

$$\langle P\omega_1 | \omega_2 \rangle = \langle P\omega_1 | P\omega_2 \rangle, \quad \omega_j \in \Omega_D^k, \quad (3.81)$$

só depende das classes de ω_j em Ω_D^k . Denotemos por \wedge^k o complemento de Ω_D^k por este produto interno. Claramente $\wedge^k = P\mathcal{H}_k$.

3.5.1 Espaço de 2 Pontos

Agora estamos aptos a considerar um exemplo bastante interessante. Vamos falar na geometria do espaço de dois pontos $X = \{1, 2\}$. Uma função neste espaço nada mais é do que um par de números complexos $f = (f_1, f_2)$. Dessa forma podemos identificar a álgebra das funções sobre este espaço, \mathcal{A} , com $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Para construirmos um K-ciclo para esta álgebra vamos considerar um espaço de Hilbert de dimensão finita. Mais precisamente vamos considerar $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N$. E tomemos a representação diagonal de \mathcal{A} sobre \mathcal{H} , isto é,

$$(f_1, f_2) \mapsto \begin{pmatrix} f_{1\mathbb{I}} & 0 \\ 0 & f_{2\mathbb{I}} \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

¹⁰Ou seja, não temos duas expressões diferentes definindo o mesmo elemento.

onde \mathbb{I} denota a identidade $N \times N$. Com esta representação a ação de \mathcal{A} em \mathcal{H} tem a forma

$$(f_1, f_2)(s_1, s_2) = (f_1 s_1, f_2 s_2), \quad (3.83)$$

para $(f_1, f_2) \in \mathcal{A}$ e $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}$

Um operador de Dirac pode ser definido pela seguinte matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m^* \\ m & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

onde m é uma matriz $N \times N$ não-nula com entradas complexas. Este espaço possui um operador de graduação naturalmente definido por

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

onde, novamente \mathbb{I} denota a identidade $N \times N$.

Dessa forma a representação de uma 1-forma do tipo db é dada por

$$\pi(db) = [D, b] = (b_1 - b_2) \begin{pmatrix} 0 & -m^* \\ m & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Logo uma 1-forma dada por adb pode ser representada por

$$\pi(adb) = a[D, b] = (b_1 - b_2) \begin{pmatrix} 0 & -a_1 m^* \\ a_2 m & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Da definição de $\Omega^1 \mathcal{A}$, como sendo gerado pelos elementos da forma adb , uma 1-forma arbitrária pode ser escrita como

$$\pi(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\phi_1 m^* \\ \phi_2 m & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

onde, ϕ_1 e ϕ_2 são números complexos. Definindo o idempotente $e = (1, 0) \in \mathcal{A}$, e sendo $1 = (1, 1)$ a identidade de \mathcal{A} , obtemos que

$$\begin{aligned} e de &= \begin{pmatrix} 0 & -m^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (1 - e) de &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Com isso vemos que a forma genérica dada por 3.88 pode ser escrita como sendo

$$\omega = \phi_1 e de + \phi_2 (1 - e) de, \quad (3.90)$$

de onde concluímos que o espaço das 1-formas, $\Omega^1 \mathcal{A}$, tem dimensão 2 sobre os complexos \mathbb{C} .

Vamos considerar o fibrado trivial sobre \mathcal{A} , ou seja, $\mathcal{E} = \mathcal{A}$. Neste caso uma conexão é dada por $\nabla = d + \alpha$ onde α é uma forma auto-adjunta. Mas uma forma auto-adjunta arbitrária pode ser escrita como

$$\alpha = -\bar{\phi} e de + \phi (1 - e) de, \quad (3.91)$$

sendo ϕ um número complexo arbitrário. Desse modo temos que

$$\pi(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\phi}m^* \\ \phi m & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Obviamente se quisermos escrevermos este fibrado como sendo $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^n$, basta tomarmos $p = \mathbb{I}$ e $n = 1$. Desse modo a expressão 3.47 para a curvatura simplifica em

$$\theta(s) = (d\alpha + \alpha^2)(s). \quad (3.93)$$

Dessa forma para podermos calcular $\pi(\theta)$ precisamos calcular $\pi(d\alpha)$. Para tal, notemos que $d\alpha$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(-\bar{\phi}ede + \phi(1-e)de) \\ &= -\bar{\phi}dede - \phi dede = -(\bar{\phi} + \phi)dede. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Dessa forma só falta calcular $\pi(dede)$ para obtermos $\pi(d\alpha)$. Mas $\pi(dede)$ é facilmente obtida a partir da definição de e ,

$$\pi(dede) = - \begin{pmatrix} m^*m & 0 \\ 0 & mm^* \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

logo temos que

$$\pi(d\alpha) = \begin{pmatrix} (\bar{\phi} + \phi)m^*m & 0 \\ 0 & (\bar{\phi} + \phi)mm^* \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

Agora usando a expressão 3.90, podemos calcular $\pi(\alpha^2)$,

$$\pi(\alpha^2) = \pi(\alpha)^2 = \begin{pmatrix} \bar{\phi}\phi m^*m & 0 \\ 0 & \bar{\phi}\phi mm^* \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Dessa forma temos

$$\pi(\theta) = \begin{pmatrix} (\bar{\phi} + \phi + \bar{\phi}\phi)m^*m & 0 \\ 0 & (\phi + \bar{\phi} + \bar{\phi}\phi)mm^* \end{pmatrix}. \quad (3.98)$$

Esta expressão pode ser simplificada um pouco,

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= \begin{pmatrix} (|\phi + 1|^2 - 1)m^*m & 0 \\ 0 & (|\phi + 1|^2 - 1)mm^* \end{pmatrix} \\ &= (|\phi + 1|^2 - 1)D^2 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Um exemplo de fibrado não trivial é dado pelo seguinte fibrado sobre \mathcal{A} : seja $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^2$ onde p é dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

sendo $1 = (1, 1)$ e $e = (1, 0)$ como acima. Uma conexão neste fibrado é dada por

$$\nabla = pd + \alpha, \quad (3.101)$$

sendo α uma matriz auto-adjunta 2×2 de 1-formas, que satisfaz a condição 3.43. Se escrevermos α na forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

a condição 3.43 pode ser expressa como

$$\begin{aligned} e\alpha_{21} &= \alpha_{21}, \\ e\alpha_{22} &= \alpha_{22} = \alpha_{22}e, \\ \alpha_{12}e &= \alpha_{12}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Além disso nós temos que α deve ser anti-auto-adjunto, ou seja, $\alpha^* = -\alpha$. Destas considerações obtemos que as componentes de α devem ser da forma

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\overline{\phi_1}ede + \phi_1(1-e)de, \\ \alpha_{21} &= \overline{\phi_2}ede, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21}^* = -\phi_2(1-e)de, \\ \alpha_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

De modo que α assume a forma

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

Para calcularmos a curvatura da conexão $\nabla = pd + \alpha$ iremos usar a expressão 3.47, que nos fornece

$$\begin{aligned} \theta &= pdpd + pd\alpha p + \alpha^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & edede \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\alpha_{11} & (d\alpha_{12})e \\ ed\alpha_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{11} + \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}\alpha_{11} & \alpha_{21}\alpha_{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Usando as expressões 3.104 para as componentes de α temos

$$\begin{aligned} d\alpha_{11} &= -(\phi_1 + \overline{\phi_1})dede \\ (d\alpha_{12})e &= \phi_2edede \\ ed\alpha_{21} &= \overline{\phi_2}edede \\ \alpha_{11}\alpha_{11} &= -|\phi_1|^2 dede \\ \alpha_{12}\alpha_{21} &= -|\phi_2|^2(1-e)dede \\ \alpha_{11}\alpha_{12} &= \overline{\phi_1}\phi_2edede \\ \alpha_{21}\alpha_{11} &= \overline{\phi_2}\phi_1edede \\ \alpha_{21}\alpha_{12} &= -|\phi_2|^2 edede \end{aligned} \quad (3.107)$$

Dessa forma a curvatura pode ser escrita como

$$\theta = \begin{pmatrix} (1 - |\phi_1 + 1|^2)dede - |\phi_2|^2(1 - e)dede & \phi_2(1 + \overline{\phi_1})edede \\ \overline{\phi_2}(1 + \phi_1)edede & (1 - |\phi_2|^2)edede \end{pmatrix}. \quad (3.108)$$

Se desejarmos encontrar a representação $\pi(\theta)$ podemos usar os resultados anteriores para $\pi(dede)$. Mas neste caso $\pi(\theta)$ será uma matriz. Sendo que agora cada uma das entradas $\pi(\theta)_{ij}$ é um elemento em \mathcal{LH} .

3.6 Resíduo de Wodzicki

O resíduo de Wodzicki, juntamente com o teorema traço de Connes, são as principais ferramentas para recuperarmos a geometria Riemanniana usual a partir das ferramentas de geometria não-comutativa. O teorema traço de Connes nos fornece uma relação entre o resíduo de Wodzicki e o traço de Dixmier e, como veremos adiante, esta relação nos possibilita escrever integrais sobre uma variedade M como sendo o traço de determinados operadores.

O resíduo de Wodzicki está definido para os chamados operadores pseudo-diferenciais. Então, vamos começar esta seção como uma pequena discussão sobre operadores pseudo-diferenciais.

Primeiramente vamos fixar a seguinte notação

$$\begin{aligned} D_{x_j} &= -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ D_x^\alpha &= D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \\ \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Com esta notação nós podemos escrever um operador diferencial P , de ordem m , agindo em uma função $u(x)$, na seguinte forma

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x), \quad (3.110)$$

onde os coeficientes $a(x)$ são funções. A este operador nós temos associado, naturalmente, o polinômio

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad (3.111)$$

onde entende-se ξ^α como sendo o polinômio $\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$. O polinômio $p(x, \xi)$ é chamado de *símbolo* do operador P .

Nós sabemos que a transformada de Fourier de $D_{x_j} u(x)$ é $\xi_j \hat{u}(\xi)$, onde $\hat{u}(\xi)$ denota a transformada de Fourier de $u(x)$. Dessa forma se o operador diferencial

P tiver coeficientes constantes, a sua transformada de Fourier pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\widehat{Pu}(\xi) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \\ &= p(\xi) \hat{u}(\xi),\end{aligned}\tag{3.112}$$

de modo que o operador diferencial P se torna, via transformada de Fourier, um operador algébrico, via multiplicação pelo polinômio $p(x, \xi)$. Entretanto, quando os coeficientes de P não são constantes, a transformada de Fourier não simplifica muito as coisas, pois em geral vamos obter uma equação envolvendo diferenciais na variável ξ , isto é, obtemos um outro operador diferencial. A grosso modo, a teoria dos operadores pseudo-diferenciais é uma forma de resolvermos este problema, pois ela nos possibilita tratar operadores diferenciais de forma algébrica.

Se a princípio considerarmos um operador com coeficientes constantes, de modo que a equação 3.112 seja válida, podemos usar o inverso da transformada de Fourier para escrevermos

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi.\tag{3.113}$$

Com isso nós podemos usar o símbolo, $p(x, \xi)$, e a equação 3.110, para escrevermos um operador genérico P na forma

$$\begin{aligned}Pu(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.\end{aligned}\tag{3.114}$$

Esta equação continua fazendo sentido mesmo no caso em que $p(x, \xi)$ não for um polinômio¹¹. Dada uma função qualquer $p(x, \xi)$ podemos definir um operador P agindo em uma função $u(x)$ pela expressão

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.\tag{3.115}$$

Um operador definido desta maneira é chamado de **pseudo-diferencial**. Note-mos que no caso em que $p(x, \xi)$ é um polinômio, recuperamos a noção usual de operador diferencial.

¹¹Rigorosamente precisamos considerar apenas funções de decaimento rápido para que a integral acima convirja.

Lembrando que a transformada de Fourier de uma função é dada por

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-iy \cdot \xi} u(y) dy, \quad (3.116)$$

podemos escrever a equação 3.115 na forma

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y) \cdot \xi} p(x, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (3.117)$$

Neste tipo de integral nós podemos definir um conjunto ainda maior de operadores. Ao invés de considerarmos funções da forma $p(x, \xi)$ podemos considerar função $a(x, y, \xi)$ e definirmos P agindo em $u(x)$ como sendo

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (3.118)$$

A função $a(x, y, \xi)$ é chamada de amplitude do operador P .

No caso de estarmos lidando com operadores diferenciais, quando $p(x, \xi)$ é um polinômio, nós temos bem definido o conceito de ordem do operador como sendo o grau do seu símbolo $p(x, \xi)$. Para podermos falar da ordem de um operador pseudo-diferencial precisamos definir a ordem para símbolos e amplitudes genéricos.

Definição 39 Uma função $p \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, é um **símbolo de ordem** d , denotado $p \in S^d(U)$, se dado qualquer compacto $K \subset U$, e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, existe uma constante $c_{K\alpha\beta}$ tal que

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq c_{K\alpha\beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{d-|\alpha|}{2}}, \quad (3.119)$$

para qualquer $x \in K$ e para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Similarmente, uma função $a \in C^\infty(U \times U \times \mathbb{R}^n)$ é uma **amplitude de ordem** d , denotada $a \in A^d(U)$, se para qualquer compacto $K \subset U$, e quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, existe uma constante $c_{K\alpha\beta\gamma}$ tal que

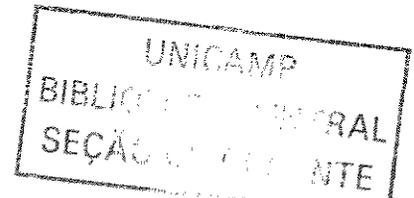
$$|D_x^\gamma D_y^\beta D_\xi^\alpha a(x, y, \xi)| \leq c_{K\alpha\beta\gamma} (1 + |\xi|^2)^{\frac{d-|\alpha|}{2}}, \quad (3.120)$$

para quaisquer $x, y \in K$ e qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Com a definição da ordem para símbolos e amplitudes podemos falar na ordem dos operadores.

Definição 40 Um operador pseudo-diferencial de ordem d é um operador P definido pela equação 3.115, com $p \in S^d(U)$, ou pela equação 3.118 com $a \in A^d(U)$. Escrevemos, respectivamente, $P = Op(p) \in A^d(U)$ e $P = Op(a) \in \Psi^d(U)$.

Definição 41 Se p é um símbolo tal que $p \in S^d(U)$ qualquer que seja $d \in \mathbb{R}$, dizemos que $p \in S^{-\infty}(U)$. Analogamente se tivermos uma amplitude a tal que $a \in A^d(U)$ qualquer que seja $d \in \mathbb{R}$ dizemos que $a \in A^{-\infty}(U)$. Em ambos os casos dizemos que o operador associado pertence a $\Psi^{-\infty}$.



Consideremos uma seqüência de símbolos $p_j \in S^{d_j}(U)$, onde $\{d_j\}$ é uma seqüência decrescente com $d_j \rightarrow -\infty$. Neste caso é possível encontrarmos um símbolo $p \in S^{d_0}(U)$ tal que

$$p - \sum_{j=0}^k p_j \in S^{d_k}(U) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.121)$$

O símbolo p é unicamente determinado a menos de um símbolo em $S^{-\infty}(U)$, isto é, se $p_1, p_2 \in S^{d_0}(U)$ são dois símbolos satisfazendo a propriedade acima, então $p_1 - p_2 \in S^{-\infty}(U)$. Em geral nós escrevemos

$$p \sim \sum_{j \geq 0} p_{d_j}, \quad (3.122)$$

e dizemos que $\sum_{j \geq 0} p_{d_j}$ é a expansão assintótica de p .

Um exemplo importante é dado pelos símbolos clássicos.

Definição 42 Consideremos uma expansão como na equação 3.122. Dizemos que p é um símbolo clássico se os índices d_j diferirem por um inteiro, $d_j - d_{j+1} \in \mathbb{N}$, e se cada p_j for uma função homogênea em ξ com grau d_j , isto é, $p_j(x, \lambda\xi) = \lambda^{d_j} p_j(x, \xi)$ qualquer que seja $\lambda > 0$. Neste caso é usual redefinirmos $d_j = d - j$, e escrevermos

$$p \sim \sum_{j \geq 0} p_{d-j}. \quad (3.123)$$

O termo líder na expansão acima, isto é, o termo com maior grau de homogeneidade em ξ , que nada mais é do que p_d , é chamado de **símbolo principal** de p .

Os símbolos dos operadores, e sobretudo os símbolos principais, serão a base para nós definirmos o resíduo de Wodzicki. Dessa forma é interessante termos uma expressão para calcularmos o símbolo de um operador P dado. Para isso notemos que, se P é dada em termos de um símbolo, vale

$$P(e^{ix \cdot \xi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \eta} p(x, \eta) \widehat{e^{ix \cdot \xi}}(\eta) d\eta. \quad (3.124)$$

Mas nós sabemos calcular a transformada de Fourier de $e^{ix \cdot \xi}$,

$$\begin{aligned} \widehat{e^{ix \cdot \xi}}(\eta) &= \int e^{-iy \cdot \eta} e^{iy \cdot \xi} dy \\ &= \int e^{-iy(\eta - \xi)} dy = (2\pi)^n \delta(\eta - \xi), \end{aligned} \quad (3.125)$$

onde $\delta(x)$ denota a função delta de Dirac. Dessa forma nós temos que

$$P(e^{ix \cdot \xi}) = \int e^{ix \cdot \eta} p(x, \eta) \delta(\eta - \xi) d\eta = e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi), \quad (3.126)$$

de onde obtemos a expressão

$$p(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} P(e^{ix \cdot \xi}). \quad (3.127)$$

Esta expressão para o símbolo do operador P não depende da forma explícita do mesmo, nós só precisamos saber como é a sua ação em $e^{ix \cdot \xi}$. Em particular, podemos usar esta expressão para calcular o símbolo de um operador P inicialmente definida em termos de uma amplitude, isto é, se P for definido por uma amplitude a temos

$$\begin{aligned} p(x, \xi) &= e^{-ix \cdot \xi} P(e^{ix \cdot \xi}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{-ix \cdot \xi} e^{(x-y) \cdot \eta} a(x, y, \eta) e^{iy \cdot \xi} dy d\eta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y) \cdot (\eta - \xi)} a(x, y, \eta) dy d\eta \end{aligned} \quad (3.128)$$

Com isso, além de obtermos uma expressão que nos possibilita calcular o símbolo de um operador P , mostramos que apesar de parecer mais geral, a definição de P em termos de uma amplitude, é totalmente equivalente a definição dada em termos de um símbolo.

Se na equação 3.127 nós substituirmos ξ por $t\xi$ e dividirmos toda a expressão por t^{-d} obtemos

$$t^{-d} e^{-itx \cdot \xi} P(e^{itx \cdot \xi}) = t^{-d} p(x, t\xi). \quad (3.129)$$

Mas se nós considerarmos uma expansão assintótica para p da forma

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} p_{d-j}(x, \xi), \quad (3.130)$$

vamos obter

$$t^{-d} p(x, t\xi) \sim t^{-d} \sum_{j \geq 0} p_{d-j}(x, t\xi). \quad (3.131)$$

Ainda mais, se estivermos lidando com símbolos clássicos, sabemos que p_{d-j} é homogêneo em ξ com grau $d - j$. Dessa forma, para símbolos clássicos, vale

$$t^{-d} \sum_{j \geq 0} p_{d-j}(x, t\xi) = \sum_{d-j} t^{-d} t^{d-j} p_{d-j}(x, \xi) = \sum_{j \geq 0} t^{-j} p_{d-j}(x, \xi), \quad (3.132)$$

logo podemos escrever

$$t^{-d} e^{-itx \cdot \xi} P(e^{itx \cdot \xi}) \sim \sum_{j \geq 0} t^{-j} p_{d-j}(x, \xi), \quad (3.133)$$

em outras palavras nós temos que

$$t^{-d} e^{-itx \cdot \xi} P(e^{itx \cdot \xi}) \sim p_d(x, \xi) + O(t^{-1}). \quad (3.134)$$

Com esta estimativa obtemos

Proposição 10 Sendo P um operador pseudo-diferencial de ordem $d > 0$ em U , o seu símbolo principal é dado por

$$p_d(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-d} e^{-it h(x)} P(e^{it h(x)}), \quad (3.135)$$

onde $h \in C^\infty(U)$ é tal que $dh(x) = \xi$.

Obtemos esta expressão a partir da série de Taylor de $h(x)$ em torno de x e da expressão 3.134. \square

Definição 43 Um operador pseudo-diferencial de ordem d , $P = Op(p) \in \Psi^d(U)$, é dito *elíptico* se existem funções contínuas estritamente positivas c e C em U tais que

$$|p(x, \xi)| \geq c(x) |\xi|^d, \quad (3.136)$$

para $|\xi| \geq C(x)$, $\forall x \in U$.

Agora, se considerarmos uma variedade M de dimensão n , podemos definir um operador pseudo-diferencial sobre M , definindo o símbolo deste operador através de um sistema local de coordenadas, ou seja, podemos considerar símbolos $p(x, \xi) \in S^d(M)$ com sendo localmente definidos por

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} p_{d-j}(x, \xi). \quad (3.137)$$

Na expansão acima, o termo de ordem $-n$, ou seja, $p_{-n}(x, \xi)$, depende do sistema de coordenadas usado. Porém, sendo uma função homogênea de ordem $-n$, ela possui algumas propriedades especiais, de modo que algumas grandezas definidas em termos de $p_{-n}(x, \xi)$ não dependem do sistema de coordenadas. Uma das grandezas que não depende do sistema de coordenadas escolhido é a densidade de resíduo. Mas antes de definirmos a densidade de resíduo, e o respectivo resíduo, precisamos de algumas notações.

Se estivermos considerando uma variedade orientada M de dimensão n , e se η for uma n -forma diferencial, definimos $|\eta|$ como sendo $\pm \eta$, de forma que $|\eta|$ sempre esteja positivamente orientada com relação a orientação de M .

Sendo $x \in M$ podemos considerar o espaço-cotangente a este ponto, T^*M . Sendo T^*M um espaço vetorial normado, no caso de M possuir uma métrica, podemos definir a co-esfera ao ponto x como sendo $\mathbb{S}^{n-1} = \{\xi \in T^*M : |\xi| = 1\}$. Além disso se M é orientada podemos definir uma orientação na co-esfera. Sendo \mathcal{R} o vetor que identifica um ponto em \mathbb{S}^{n-1} , e sendo η uma n -forma condizente com a orientação de M , a $(n-1)$ -forma

$$\sigma_\xi = i_{\mathcal{R}} \eta, \quad (3.138)$$

define uma orientação em \mathbb{S}^{n-1} . Com estas notações podemos fazer a seguinte definição

Definição 44 Dado um operador pseudo-diferencial clássico, A , existe uma densidade de resíduo, independente do sistema de coordenadas usado em M , denotada por $\text{wres}_x A$, cuja expressão em um sistema local de coordenadas é dada por

$$\text{wres}_x A = \left[\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x, \xi) \sigma_\xi \right] | dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n |. \quad (3.139)$$

Esta é a chamada densidade de resíduo de Wodzicki.

Integrando a densidade de resíduo sobre M , nós obtemos o resíduo de Wodzicki

$$\text{Wres } A = \int_M \text{wres}_x A. \quad (3.140)$$

Se nós definirmos a soma de dois operadores pseudo-diferenciais pontualmente, ou seja,

$$(P + Q)u(x) = Pu(x) + Qu(x), \quad (3.141)$$

vemos diretamente que o símbolo de $P + Q$ é a soma dos símbolos de P e de Q . Com isso concluímos que tanto a densidade de resíduo de Wodzicki como o resíduo de Wodzicki são aditivos. Dessa forma nós temos que

$$\text{Wres}(P + Q) = \text{Wres } P + \text{Wres } Q. \quad (3.142)$$

Para estudarmos mais algumas propriedades do resíduo de Wodzicki nós precisamos saber como compor símbolos. É um fato conhecido da teoria de operadores pseudo-diferenciais que

Proposição 11 Sejam P e Q dois operadores pseudo-diferenciais com símbolos, respectivamente, $p(x, \xi)$ e $q(x, \xi)$. Então o símbolo do operador $P \circ Q$, denotado por $p \circ q$, é dado por

$$\begin{aligned} (p \circ q)(x, \xi) &\sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha p(x, \xi) D_x^\alpha q(x, \xi) \\ &= \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(x, \xi) \partial_x^\alpha q(x, \xi) \end{aligned}, \quad (3.143)$$

uma vez que $D_j = -i\partial_j$.

Para demonstração veja [4]. \square

Agora vamos considerar o operador dado pelo comutador entre dois operadores A e B ,

$$C = [A, B]. \quad (3.144)$$

Usando a expressão para a composição de símbolos, e sendo $a(x, \xi)$ o símbolo de A e $b(x, \xi)$ o de B , podemos escrever para o símbolo $c(x, \xi)$ de C em uma vizinhança U de $x \in M$ como sendo

$$c(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \partial_x^\alpha b(x, \xi) - \partial_\xi^\alpha b(x, \xi) \partial_x^\alpha a(x, \xi)). \quad (3.145)$$

Nós podemos escrever o termo de ordem $-n$ na forma

$$c_{-n}(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial \xi_j} \right), \quad (3.146)$$

onde os termos p_j e q_j são combinações bilineares de a, b e de suas derivadas. Dessa forma obtemos que

$$\int_{|\xi|=1} \frac{\partial p_j}{\partial x_j} \sigma_\xi = \frac{\partial}{\partial x_j} P_j, \quad (3.147)$$

sendo que P_j é uma função suave com suporte compacto em U . Logo P_j se anula na fronteira de U e dessa forma obtemos que a integral de p_j em U é zero.

Por outro lado temos

Lema 8 *Seja $a_{-n}(\xi)$ uma função homogênea de ordem $-n$, temos que*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} a_{-n}(\xi) \sigma_\xi = 0 \quad (3.148)$$

se, e somente se, $a_{-n}(\xi)$ for uma soma de derivadas.

A demonstração deste lema é puramente técnica e será omitida. A mesma pode ser encontrada em [4]. \square

Dessa forma temos que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial q_j}{\partial \xi_j} \sigma_\xi = 0$. Logo

$$\text{wres}_x[A, B] = \left[\int_{|\xi|=1} c(x, \xi) \sigma \right] | dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n | = 0, \quad (3.149)$$

de onde segue o importante resultado

$$\text{Wres}[A, B] = 0. \quad (3.150)$$

Com isso concluímos que o resíduo de Wodzicki se comporta como um funcional do tipo traço na álgebra dos símbolos clássicos. Além disso podemos mostrar, [4], que este é o único funcional do tipo traço, a menos de constante multiplicativa, na álgebra dos símbolos clássicos. Com isso temos

Proposição 12 *O resíduo de Wodzicki, Wres , é o único funcional, a menos de constante multiplicativa, do tipo traço na álgebra dos símbolos clássicos.*

Um dos resultados fundamentais de geometria não-comutativa é o chamado teorema traço de Connes. Este teorema relaciona duas coisas aparentemente distintas: o resíduo de Wodzicki e o traço de Dixmier.

Antes de enunciarmos o teorema de Connes, notemos que um operador pseudo-diferencial sobre um fibrado vetorial E pode ser visto como um operador linear sobre o espaço de Hilbert das seções sobre este fibrado, $\Gamma(E)$.

Teorema 10 (Connes) *Seja H um operador pseudo-diferencial elíptico de ordem $-n$ sobre um fibrado vetorial complexo E sobre uma variedade Riemanniana compacta M . Então $H \in \mathcal{L}^{1+}$ e além disso H é mensurável e*

$$\mathrm{Tr}^+ H = \frac{1}{n(2\pi)^n} \mathrm{Wres} H. \quad (3.151)$$

3.6.1 Alguns Exemplos

Nesta seção iremos calcular o resíduo e o traço do Laplaciano em uma variedade n -dimensional compacta. Esperamos, com isso, deixar mais claro estes conceitos, e ao mesmo tempo ver explicitamente a relação entre o resíduo de Wodziki e o traço de Dixmier.

Em uma variedade M , a densidade Riemanniana é definida como sendo

$$\nu_g = |\det g^{ij}|^{\frac{1}{2}} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, \quad (3.152)$$

onde $\{u_i\}$ é uma base de positivamente orientada, g^{ij} são os coeficientes da métrica nesta base, e $\{v_i\}$ é a base dual. Como M é uma variedade compacta, sempre podemos normalizar esta densidade de modo a obtermos

$$\int_M \nu_g = 1. \quad (3.153)$$

Estas observações serão úteis mais a frente no cálculo do resíduo do Laplaciano.

Em um sistema de coordenadas locais o Laplaciano se escreve como

$$\Delta = g^{ij}(x) \partial_i \partial_j, \quad (3.154)$$

onde $g^{ij}(x)$ são os coeficientes da métrica no ponto $x \in M$. Logo o símbolo do Laplaciano é

$$p(x, \xi) = g^{ij}(x) \xi_i \xi_j. \quad (3.155)$$

De um modo geral, se considerarmos potências do Laplaciano, obtemos que o símbolo de Δ^k é dado por

$$p(x, \xi) = (g^{ij}(x) \xi_i \xi_j)^k. \quad (3.156)$$

Como o símbolo de Δ^k é um polinômio em ξ de grau $2k$, obviamente ele é homogêneo em ξ com grau $2k$. Com isso, nós concluímos que o símbolo principal de Δ^k nada mais é do que o próprio símbolo. Em particular temos que o termo de ordem $-n$ de Δ^k é dado por

$$p_{-n}(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq \frac{-n}{2} \\ (g^{ij} \xi_i \xi_j)^{-\frac{n}{2}} & \text{se } k = \frac{-n}{2} \end{cases} \quad (3.157)$$

Mas como (g^{ij}) é positiva definida, podemos encontrar uma mudança local de coordenadas, tal que

$$\begin{aligned} y &= \Psi(x), \\ \xi &= (d\Psi)^t(x) \eta \\ d\Psi(x) &= g(x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.158)$$

de modo que

$$\Delta \phi_l(x) = 4\pi^2 |l|^2 \phi_l(x). \quad (3.165)$$

Com isso vemos que os auto-valores do Laplaciano são da forma $4\pi^2 |l|^2$, ou seja, o espectro do Laplaciano é da forma

$$\text{sp } \Delta = \{4\pi^2 |l|^2 : l \in \mathbb{Z}^n\}. \quad (3.166)$$

A vantagem de escrevermos o espectro do Laplaciano desta forma, é que no conjunto acima já estamos levando em conta as multiplicidades dos auto-valores.

Conhecendo o espectro do Laplaciano, Δ , nós conhecemos também o espectro de qualquer potência do mesmo, ou seja,

$$\text{sp } \Delta^k = \{\lambda^k : \lambda \in \text{sp } \Delta\}. \quad (3.167)$$

Só o que nos resta fazer, para calcularmos o traço do Laplaciano, é estimar quanto vale

$$\frac{\sigma_n(\Delta^k)}{\log n}, \quad (3.168)$$

para valores de n suficientemente grandes.

Para isto, notemos que uma bola de raio suficientemente grande pode ser aproximada por cubos unitários disjuntos entre si. Neste caso, podemos identificar o número de pontos de \mathbb{Z}^n , $N - r$, pertencentes a bola $B[0, r]$, com o número de cubos usados para preencher esta bola. E considerando o raio da bola suficientemente grande, o número de cubos usados para preencher a bola é aproximadamente o volume da mesma. Disto obtemos a seguinte estimativa para N_r

$$N_r \sim \text{vol}\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}. \quad (3.169)$$

Sendo novamente Ω_n a área da esfera unitária S^{n-1} , a estimativa acima nos fornece

$$N_{r+dr} - N_r \sim \Omega_n r^{n-1} dr. \quad (3.170)$$

Para obtermos uma estimativa para 3.168 precisamos de uma estimativa para

$$\sigma_{N_R}(\Delta^k) = \sum_{1 \leq |l| \leq R} (4\pi^2 |l|^2)^k. \quad (3.171)$$

Notemos que para R suficientemente grande os auto-valores variam quase que continuamente. Logo podemos estimar a soma acima por uma integral, ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |l| \leq R} (4\pi^2 |l|^2)^k &\sim \int_1^R (4\pi^2 r^2)^k (N_{r+dr} - N_r) \\ &= (2\pi)^{2k} \Omega_n \int_1^R r^{n+2k-1} dr, \end{aligned} \quad (3.172)$$

assim

$$\sigma_{N_R}(\Delta^k) \sim (2\pi)^{2k} \Omega_n \int_1^R r^{n+2k-1} dr. \quad (3.173)$$

Por outro lado nós temos que o volume de uma bola de raio R é dado por

$$\text{vol}B[0, R] = \frac{\Omega_n}{n} R^n, \quad (3.174)$$

logo

$$\begin{aligned} N_R &\sim \frac{\Omega_n}{n} R^n. \\ \Rightarrow \log N_R &= \log \Omega_n R^n - \log n \\ &= \log \Omega_n \log R^n - \log n \\ &= n \log R + \log \Omega_n - \log n, \end{aligned} \quad (3.175)$$

e quando $R \rightarrow \infty$ temos que

$$\log N_R \sim n \log R. \quad (3.176)$$

Usando estas estimativas podemos escrever para 3.168

$$\frac{\sigma_{N_R}(\Delta^k)}{\log N_R} \sim \frac{(2\pi)^{2k} \Omega_n}{n \log R} \int_1^R r^{n+2k-1} dr. \quad (3.177)$$

Existem 3 possibilidades para esta integral

- se $k > \frac{-n}{2}$ a integral diverge.
- se $k < \frac{-n}{2}$ a integral é nula.
- se $k = \frac{-n}{2}$ a integral converge e é dada por

$$\frac{\Omega_n}{n(2\pi)^n} := \text{Tr}^+ \Delta^{\frac{-n}{2}}. \quad (3.178)$$

Com isso vemos que para $\Delta^{\frac{-n}{2}}$ temos

$$\text{Tr}^+ \Delta^{\frac{-n}{2}} = \frac{1}{n(2\pi)^n} \text{Wres} \Delta^{\frac{-n}{2}}, \quad (3.179)$$

de acordo com o teorema de Connes.

3.6.2 Geometria Riemanniana

Se M for uma variedade spin de dimensão n , e se E for o fibrado spinorial, podemos considerar o operador de Dirac, D , sobre $\Gamma(E)$, que é um operador pseudo-diferencial elíptico.

Neste caso D induz um operador auto-adjunto no espaço das seções de quadrado integráveis de E , ou seja, podemos entender D como sendo um operador linear auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \Gamma(E)$.

O conjunto $(\Gamma(E), D)$ é um K-ciclo para \mathcal{A} , onde $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ é a álgebra das funções suaves sobre M , agindo em $\Gamma(E)$ pela multiplicação em cada fibra. Uma aplicação direta do teorema de Connes nos fornece

Teorema 11 *Seja*

$$\mu(dx) = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (3.180)$$

a medida de volume canônica de uma variedade Riemanniana de dimensão n , M , munida de uma estrutura spin. E seja uma função $f \in C^\infty(M)$, então

$$C_n \int_M f(x) \mu(dx) = \text{Tr}^+(f | D |^{-n}), \quad (3.181)$$

onde a constante C_n é dada por

$$C_{2k} = \frac{(2\pi)^{-k}}{k!} \quad \text{ou} \quad C_{2k+1} = \frac{\pi^{-k-1}}{(2k+1)!!} \quad (3.182)$$

Este resultado é uma consequência quase imediata do teorema de Connes. Notemos que, como $f \in \mathcal{A}$ pode ser vista como um operador limitado (o operador multiplicação por $f(x)$) temos que $f | D |^{-n}$ é um operador pseudo-diferencial de ordem $-n$. O símbolo principal de $f | D |^{-n}$ é justamente $p_{-n}(x, \xi) = f(x) \|\xi\|^{-n}$, dessa forma, na co-esfera $\|\xi\| = 1$ este símbolo se reduz a matriz escalar $f(x)\mathbb{I}$ (de dimensão $2^{\frac{n}{2}} = \dim S_x$). Então, pelo teorema de Connes, obtemos que $\text{Tr}^+(f | D |^{-n}) = C_n \int_M f \mu$, com $C_n = 2^{\frac{n}{2}} \frac{\Omega_n}{n(2\pi)^n}$, que simplifica para os valores dados. O caso em que a dimensão da fibra S_x é ímpar é totalmente análogo. \square

Além disso nós temos

Proposição 14 *A distância geodésica entre dois pontos $p, q \in M$ é dada por*

$$d(p, q) = \sup\{|f(p) - f(q)| : f \in C^\infty(M), \|[D, f]\| \leq 1\}. \quad (3.183)$$

Estes dois resultados nos garantem que a partir das ferramentas de geometria não comutativa nós podemos recuperar os principais conceitos de geometria Riemanniana.

3.7 Funcional Ação

Para podermos escrever as teorias de Yang-Mills usando as ferramentas de geometria não comutativa, precisamos definir de forma algébrica um funcional ação análogo a 2.65.

Antes de falarmos no funcional de ação nós precisamos saber como descrever transformações de gauge dentro do ponto de vista de geometria não-comutativa.

Definição 45 *Seja \mathcal{E} um A -módulo, o grupo de automorfismos unitários de \mathcal{E} é*

$$\mathcal{U}(\mathcal{E}) = \{u \in \text{End}_A(\mathcal{E}) : uu^* = u^*u = \mathbb{I}\}. \quad (3.184)$$

Definimos a ação deste grupo no espaço das conexões compatíveis com a estrutura hermitiana, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, através da conjugação, isto é, definimos a ação $\gamma : \mathcal{U}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E})$ como sendo

$$\gamma_u(\nabla) = u\nabla u^*. \quad (3.185)$$

E como a curvatura é definida por $\theta = \nabla^2$, fica claro que

$$\gamma_u\theta = u\theta u^*. \quad (3.186)$$

Lembremos que uma conexão sobre um \mathcal{A} -módulo \mathcal{E} é definida como sendo um mapa

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}, \quad (3.187)$$

satisfazendo

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da. \quad (3.188)$$

Além disso podemos extendê-lo para $\nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^* \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^* \mathcal{A}$ exigindo

$$\nabla(s \otimes \omega) = (\nabla s) \otimes \omega + s \otimes d\omega, \quad (3.189)$$

qualquer que seja $s \in \mathcal{E}$ e $\omega \in \Omega^* \mathcal{A}$.

Mas se nós tivermos um K-ciclo (\mathcal{H}, D) sobre \mathcal{A} , podemos considerar a conexão como sendo um mapa

$$\nabla^D : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^* \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^*. \quad (3.190)$$

Se $\pi : \Omega^* \mathcal{A} \rightarrow \Omega_D^*$ basta considerarmos o mapa $\mathbb{I} \otimes_{\mathcal{A}} \pi$, também denotado por π , e tomar a composta $\pi \circ \nabla$, sendo ∇ a conexão definida em termos de $\Omega^* \mathcal{A}$.

Iremos denotar a conexão com valores em $\Omega_D^* \mathcal{A}$, como exposto acima, por ∇^D para enfatizar este fato. No caso de escrevermos simplesmente ∇ estaremos entendendo a conexão com valores em $\Omega^* \mathcal{A}$. Esta notação será útil para evitar confusão na hora de definirmos o funcional ação.

Dentro deste ponto de vista a curvatura θ^D pode ser vista como um elemento de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^*, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^*)$, em particular a restrição de θ^D pode ser vista como

$$\theta^D \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^2 \mathcal{A}). \quad (3.191)$$

Novamente estamos escrevendo θ^D para dizer que a curvatura toma valores em $\Omega_D^* \mathcal{A}$.

Para podermos falar em um funcional ação envolvendo θ^D precisamos definir um produto interno em $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^2 \mathcal{A})$.

Primeiramente vamos considerar o produto tensorial $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$. Nós podemos usar o produto interno de \mathcal{H} , $\langle \cdot | \cdot \rangle$, a estrutura hermitiana de \mathcal{E} , $(\cdot | \cdot)$ e o K-ciclo (\mathcal{H}, D) para definirmos o seguinte produto interno em $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$: para $s_1, s_2 \in \mathcal{E}$ e $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ temos

$$\langle s_1 \otimes \eta_1 | s_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \eta_1 | (s_1 | s_2) \eta_2 \rangle. \quad (3.192)$$

Com este produto interno $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$ pode ser transformado em um espaço de Hilbert. Agora podemos fazer a seguinte identificação

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^*) \sim \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}). \quad (3.193)$$

Em $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H})$ nós podemos considerar o operador $\mathbb{1} \otimes D$ e definir um produto interno como sendo

$$\langle T | S \rangle = \text{Tr}^+(T^* S | \mathbb{1} \otimes D |^{-n}). \quad (3.194)$$

Usando a identificação 3.193 para entendermos a curvatura como sendo $\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H})$ podemos definir o funcional de Yang-Mills para a conexão ∇ como sendo

$$YM(\nabla^D) = \langle \theta^D | \theta^D \rangle. \quad (3.195)$$

A definição acima envolve a conexão definida em termos de $\Omega_D^* \mathcal{A}$. Mas nós também poderíamos ter usado a noção anterior de conexão com valores em $\Omega^* \mathcal{A}$.

Vamos considerar uma conexão ∇ tal que $\pi(\nabla) = \nabla^D$. Neste caso podemos entender $\pi(\theta)$ como sendo um elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H})$, e neste caso faz sentido falarmos no chamado pré-funcional de Yang-Mills:

$$I(\nabla) = \langle \pi(\theta) | \pi(\theta) \rangle = \text{Tr}^+(\pi(\theta)^2 | \mathbb{1} \otimes D |^{-n}). \quad (3.196)$$

Mas sendo P o projetor ortogonal em Ω_D^* , como feito no final da seção 3.5, temos

$$\theta^D = P\pi(\theta). \quad (3.197)$$

Se nós escrevermos

$$\pi(\theta) = P\pi(\theta) + (1 - P)\pi(\theta), \quad (3.198)$$

e usarmos o fato de que P é um projetor ortogonal podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \pi(\theta) | \pi(\theta) \rangle &= \langle P\pi(\theta) | P\pi(\theta) \rangle + \langle (1 - P)\pi(\theta) | (1 - P)\pi(\theta) \rangle \\ &= \langle \theta^D | \theta^D \rangle + \langle (1 - P)\pi(\theta) | (1 - P)\pi(\theta) \rangle. \end{aligned} \quad (3.199)$$

Com isso obtemos a importante expressão:

$$YM(\nabla^D) = \inf\{I(\nabla) : \pi(\nabla) = \nabla^D\} \quad (3.200)$$

Evidentemente, a partir da construção do produto interno em $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H})$, nós temos que $YM(\gamma_u \nabla^D) = YM(\nabla^D)$ para $u \in \mathcal{U}(\mathcal{E})$, ou seja, a ação de Yang-Mills é invariante por transformações de gauge γ_u .

Em física, a ação de Yang-Mills descreve as auto-interações dos campos, mas nós também estamos interessados nas interações do campo com a matéria, que ocorre através de uma função de onda. Para descrevermos as interações do campo com a matéria precisamos acrescentar a chamada parte fermiônica a ação de Yang-Mills, obtendo assim uma densidade de Lagrangeana que leva em consideração as auto-interações do campo e as interações do mesmo com a matéria.

Iremos supor que as funções de onda descrevendo a matéria são elementos do espaço $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$. Sendo ∇ uma conexão em \mathcal{E} definimos o seguinte operador em $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$

$$D_{\nabla}(s \otimes \eta) = s \otimes D\eta + \pi(\nabla s)\eta, \quad (3.201)$$

para $s \in \mathcal{E}$ e $\eta \in \mathcal{H}$. Este operador é o análogo a derivada covariante exterior definida no capítulo 2. Usando este operador podemos definir a ação fermiônica para uma função de onda $\psi \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$ como sendo

$$I_F(\psi) = \langle \psi | D_{\nabla}\psi \rangle. \quad (3.202)$$

Lema 9 *A ação fermiônica é gauge invariante, isto é,*

$$\langle u\psi | D_{\gamma_u \nabla} u\psi \rangle = I_F(\psi) \quad (3.203)$$

Para isto é suficiente mostrarmos que $D_{\gamma_u \nabla} = uD_{\nabla}u^*$. Se tomarmos $s \otimes \omega \in u \text{ Dom } D_{\nabla}$ obtemos

$$\begin{aligned} uD_{\nabla}u^*(s \otimes \omega) &= uD_{\nabla}(s \otimes u^*\omega) \\ &= u(s \otimes Du^*\omega - i\pi(\nabla s)u^*\omega) \\ &= s \otimes uDu^*\omega - i\pi(u(\nabla s)u^*)\omega. \end{aligned} \quad (3.204)$$

E lembrando que

$$\begin{aligned} \nabla(su^*) &= (\nabla s)u^* + s \otimes du^*, \\ du^* &= i[D, u^*], \end{aligned} \quad (3.205)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} uDu^*(s \otimes \omega) &= s \otimes uDu^*\omega - i\pi(u(\nabla s)u^*)\omega \\ &= s \otimes uDu^*\omega - i\pi(u\nabla(su^*) - s \otimes udu^*)\omega \\ &= s \otimes (uDu^* + iudu^*)\omega - i\pi(\gamma_u \nabla s)\omega \\ &= s \otimes D\omega - i\pi(\gamma_u \nabla s)\omega, \end{aligned} \quad (3.206)$$

ou seja,

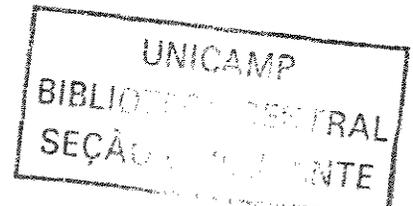
$$uD_{\nabla}u^* = D_{\gamma_u \nabla}. \quad (3.207)$$

□

Com isso a densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\psi) = YM(\nabla^D) + I_F(\psi), \quad (3.208)$$

é invariante por transformações de gauge.



Capítulo 4

O Modelo de Connes-Lott

Nesta seção usaremos as ferramentas desenvolvidas no capítulo anterior para estudar a geometria de um caso particular de espaço não-comutativo. Veremos que esta geometria pode ser usada para descrever o modelo de Weinberg-Salam de uma forma puramente geométrica, o que não ocorre quando usamos a geometria diferencial usual, uma vez que o boson de Higgs deve ser introduzido de forma *ad hoc*. Faremos também uma discussão sobre como generalizar o modelo de Weinberg-Salam de modo a tomar o modelo padrão completo.

Ao invés de considerarmos uma variedade Riemanniana iremos considerar o produto de uma variedade pelo espaço de dois pontos, de forma que o espaço pode ser visto como duas cópias de uma variedade.

Vamos tomar V como sendo uma variedade Riemanniana de dimensão 4 munida de uma estrutura $spin^c$. E vamos tomar \mathcal{A}_1 como sendo a álgebra das funções contínuas sobre V , \mathcal{H}_1 como sendo o espaço de Hilbert das seções quadrado integráveis do fibrado spinorial S , $\mathcal{H}_1 = \Gamma(S)$, e D_1 como sendo o operador de Dirac sobre estas seções. Notemos que neste fibrado nós temos um operador de paridade bem definido, a saber γ_5 . Com isso obtemos o chamado K-ciclo de Dirac

$$(\mathcal{H}_1, D_1, \gamma_5). \quad (4.1)$$

Sobre o espaço de dois pontos tomemos \mathcal{A}_2 como sendo $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, \mathcal{H}_2 como sendo $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N$ e D_2 como sendo o operador

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

para formar o K-ciclo

$$(\mathcal{A}_2, D_2). \quad (4.3)$$

O número N da definição do espaço \mathcal{H}_2 é dado pelo número de gerações de partículas que estamos considerando. No caso do modelo de Weinberg-Salam estamos considerando apenas uma geração de modo que N deve ser igual a 1. Porém iremos manter a notação com N arbitrário pensando em extensões do modelo.

Com estes dois K-ciclos nós podemos cdonstruir um terceiro K-ciclo: o produto entre os dois. Para isso tomamos a álgebra como sendo

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \quad (4.4)$$

e espaço de Hilbert como sendo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (4.5)$$

Mas para definirmos o operador de Dirac neste K-ciclo precisamos fazer uma modificação no produto tensorial, ou seja, definimos o operador de Dirac como sendo

$$D = D_1 \otimes \mathbb{I} + \gamma_5 \otimes D_2. \quad (4.6)$$

Lembrando que $\gamma_5 D_1 = -D_1 \gamma_5$ e que $\gamma_5^2 = \mathbb{I}$, esta definição nos fornece

$$D^2 = D_1^2 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes D_2^2, \quad (4.7)$$

o que garante que a dimensão do K-ciclo produto é a soma das dimensões dos K-ciclos iniciais, ou seja, se $(\mathcal{A}_1, D_1, \gamma_5)$ for p^+ somável e se (\mathcal{A}_2, D_2) for q^+ somável então (\mathcal{A}, D) será $(p+q)^+$ somável.

Como estamos considerando a variedade base como sendo o produto de V pelo espaço de dois pontos $X = \{a, b\}$, $Y = V \times X$, podemos entendê-la como sendo a união disjunta de duas cópias de V , ou seja, $Y = V_a \cup V_b$. A esta decomposição de Y podemos associar uma decomposição da álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_b$, onde interpretamos um elemento $(f_a, f_b) \in \mathcal{A}$ como sendo um par de funções, cada uma definida em uma cópia de V , isto é, entendemos f_a como sendo uma função na cópia V_a , e f_b como sendo uma função na cópia V_b . Além disso esta decomposição induz uma decomposição no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$ tal que a ação de \mathcal{A} se dá de forma diagonal em \mathcal{H} , ou seja, para $(f_a, f_b) \in \mathcal{A}$ temos

$$(f_a, f_b) \mapsto \begin{pmatrix} f_a & 0 \\ 0 & f_b \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (4.8)$$

Esta decomposição pode ser entendida da seguinte maneira: uma função $f \in \mathcal{A}$ é determinada pela sua restrição a V_a , f_a , e pela sua restrição a V_b , f_b , isto é, interpretamos f_a e f_b como sendo a restrição de f a V_a e a V_b .

Nesta decomposição, se denotarmos o operador de Dirac sobre as seções do fibrado spinorial de V por ∂_V , ao invés de D_1 , podemos escrever

$$D = \partial_V \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} + \gamma_5 \otimes \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_V \otimes \mathbb{I} & \gamma_5 \otimes M^* \\ \gamma_5 \otimes M & \partial_V \otimes \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Nós podemos usar estes fatos para calcular a diferencial de uma função $f = (f_a, f_b) \in \mathcal{A}$. Com as construções acima vemos que

$$[D, f] = \begin{pmatrix} i^{-1} \gamma(\mathbf{d}f_a) \otimes \mathbb{I} & (f_b - f_a) \gamma_5 \otimes M^* \\ (f_a - f_b) \gamma_5 \otimes M & i^{-1} \gamma(\mathbf{d}f_b) \otimes \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde d denota a diferencial usual de uma função e γ denota o operador multiplicação de Clifford no fibrado spinorial sobre V . E como nós temos que a diferencial de uma função é representada por $df = [D, f]$ concluímos que

$$df \mapsto \begin{pmatrix} i^{-1}\gamma(df_a) \otimes \mathbb{I} & (f_b - f_a)\gamma_5 \otimes M^* \\ (f_a - f_b)\gamma_5 \otimes M & i^{-1}\gamma(df_b) \otimes \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Com este cálculo vemos que a diferencial de uma função $f \in \mathcal{A}$ possui três partes:

- a diferencial usual df_a da restrição de f a V_a ;
- a diferencial usual df_b da restrição de f a V_b ;
- a diferença finita $\delta f = f(p_a) - f(p_b)$, onde p_a e p_b são pontos, respectivamente, de V_a e de V_b .

O cálculo acima para $\pi(df) = [D, f]$, para $f \in \mathcal{A}$ nos mostra que um elemento geral de α de $\Omega_D^1 = \pi(\Omega^1)$, sendo uma combinação linear de elementos da forma $\pi(df)$, pode ser escrito em termos de

- uma forma diferencial ordinária ω_a sobre V_a ;
- uma forma diferencial ordinária ω_b sobre V_b ;
- um par de funções complexas δ_a, δ_b em V .

Mais precisamente nós temos

$$\alpha = \begin{bmatrix} i^{-1}\gamma(\omega_a) \otimes \mathbb{I} & \delta_a \gamma_5 \otimes M^* \\ \delta_b \gamma_5 \otimes M & i^{-1}\gamma(\omega_b) \otimes \mathbb{I} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Se usarmos a ação de \mathcal{A} dada por 4.8 vemos que a estrutura de bi-módulo para os elementos de Ω_D^1 pode ser escrita como sendo

$$\begin{aligned} (f_a, f_b)(\omega_a, \omega_b, \delta_a, \delta_b) &= (f_a \omega_a, f_b \omega_b, f_a \delta_a, f_b \delta_b) \\ (\omega_a, \omega_b, \delta_a, \delta_b)(f_a, f_b) &= (f_a \omega_a, f_b \omega_b, f_b \delta_a, f_a \delta_b), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $(f_a, f_b) \in \mathcal{A}$ e $(\omega_a, \omega_b, \delta_a, \delta_b) \in \Omega_D^1$. Além disso a involução é dada por

$$(\omega_a, \omega_b, \delta_a, \delta_b)^* = (-\bar{\omega}_a, -\bar{\omega}_b, \bar{\delta}_a, \bar{\delta}_b). \quad (4.14)$$

Notemos que dentro desta estrutura de bi-módulo os termos δ_a e δ_b correspondem ao caso do espaço de dois pontos, ou seja, a passagem de V_a para V_b . Por outro lado os termos ω_a e ω_b correspondem as noções de geometria Riemanniana usual.

Com a notação acima, a diferencial de uma função $f \in \mathcal{A}$ pode ser escrita como

$$df = (df_a, df_b, f_b - f_a, f_a - f_b). \quad (4.15)$$

Esta notação é útil para entendermos melhor Ω_D^1 como um fibrado sobre V . O bi-módulo Ω_D^1 pode ser visto como a união de duas cópias do fibrado cotangente sobre V mais a união de um fibrado 2-dimensional trivial. Isto nos diz que Ω_D^1 pode ser tratado com um fibrado 10-dimensional sobre V . Em outras palavras, podemos fazer a seguinte identificação

$$\Omega_D^1 \simeq T^*(V) \oplus T^*(V) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}. \quad (4.16)$$

Um cálculo direto nos mostra que os elementos do sub-espaco $\pi(d(J_0 \cap \Omega^1))$ são da forma

$$T = \begin{bmatrix} \gamma(\xi_a) \otimes \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \gamma(\xi_b) \otimes \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

onde ξ_a e ξ_b nada mais são do que funções com valores nos escalares, de modo que $\gamma(\xi_a) = \xi_a$ e $\gamma(\xi_b) = \xi_b$.

De maneira totalmente similar à feita para calcular $\pi(df) = [D, f]$ podemos calcular $\pi(df dg)$, o que nos leva a concluir que um elemento geral de $\pi(\Omega^2)$ pode ser escrito como

$$T = \begin{bmatrix} \gamma(\alpha_a) \otimes \mathbb{I} - h_a \otimes M^*M & -\gamma_5 i^{-1} \gamma(\beta_a) \otimes M^* \\ -\gamma_5 i^{-1} \gamma(\beta_b) \otimes M & \gamma(\alpha_b) \otimes \mathbb{I} - h_b \otimes M M^* \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

aqui α_a e α_b são 2-formas (usuais) sobre V , β_a e β_b são 1-formas sobre V e h_a e h_b são funções sobre V .

A expressão acima nos leva a concluir que se M^*M não é um múltiplo escalar da identidade, os elementos de Ω_D^2 podem ser totalmente caracterizados por

- um par de 2-formas usuais α_a e α_b sobre V ;
- um par de 1-formas usuais β_a e β_b sobre V ;
- um par de funções escalares h_a e h_b sobre V .

A hipótese de que M^*M não é um múltiplo escalar da identidade é essencial, pois do contrário os termos envolvendo h_a e h_b seriam eliminados por $\pi(d(J_0 \cap \Omega^1))$.

Nós podemos usar a relação $d(adb) = dadb$ para calcular a diferencial de uma 1-forma ω , de forma análoga a usada para calcular a diferencial de uma função. Se nós olharmos esta 1-forma como um elemento em Ω_D^1 , ou seja, $\omega = (\omega_a, \omega_b, \delta_a, \delta_b)$, a sua diferencial, como um elemento de Ω_D^2 , será dada por uma sextupla $\alpha = (\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b, h_a, h_b)$ onde

$$\begin{aligned} \alpha_a &= d\omega_a; \\ \alpha_b &= d\omega_b; \\ \beta_a &= \omega_b - \omega_a - d\delta_a; \\ \beta_b &= \omega_a - \omega_b - d\delta_b; \\ h_a &= \delta_a + \delta_b; \\ h_b &= \delta_a + \delta_b. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora se considerarmos dois elementos $\omega, \omega' \in \Omega_D^1$ o produto dos dois $\omega\omega' \in \Omega_D^2$ será dada por

$$\begin{aligned}
\alpha_a &= \omega_a \wedge \omega'_a; \\
\alpha_b &= \omega_b \wedge \omega'_b; \\
\beta_a &= \delta_a \omega'_b - \delta'_a \omega_b; \\
\beta_b &= \delta_b \omega'_a - \delta'_b \omega_a; \\
h_a &= \delta_a \delta'_b; \\
h_b &= \delta_b \delta'_a.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Estas duas expressões para 2-formas serão de grande importância para o cálculo da curvatura de uma conexão para este modelo.

O conceito de produto interno dentro de Ω_D^* envolve o conceito de traço de Dixmier. Mas como estamos trabalhando com um K-ciclo produto é interessante relacionarmos o traço deste K-ciclo com os traços dos K-ciclos iniciais. Esta relação é dada pelo seguinte lema.

Lema 10 *Seja (\mathcal{H}_1, D_1) um K-ciclo p_1^+ -somável sobre uma álgebra \mathcal{A}_1 , e seja (\mathcal{H}_2, D_2) um K-ciclo p_2^+ -somável sobre uma álgebra \mathcal{A}_2 . Então o K-ciclo produto é $(p_1 + p_2)^+$ -somável. Além disso se $T_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$ temos a seguinte relação entre os traços*

$$\frac{\Gamma(\frac{p_1+p_2}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{p_1}{2} + 1)\Gamma(\frac{p_2}{2} + 1)} Tr^+((T_1 \otimes T_2) | D |^{-p}) = Tr^+(T_1 | D_1 |^{-p_1}) Tr^+(T_2 | D_2 |^{-p_2}). \tag{4.21}$$

Em particular, para o caso do produto entre o K-ciclo de Dirac e o K-ciclo sobre o espaço de dois pontos, temos

$$Tr^+((T_1 \otimes T_2) | D |^{-p}) = Tr^+(T_1 | D_1 |^{-p}) tr(T_2), \tag{4.22}$$

onde tr denota o traço usual de matrizes em dimensão finita.

Para uma discussão sobre a demonstração deste lema ver [2]. \square

Este lema nos possibilita definir o produto em Ω_D^* em termos de grandezas conhecidas. Para isso lembremos que pela definição vista na seção 3.5 devemos tomar o completamento ortogonal de $\pi(d(J_0 \cap \Omega^1))$ dentro de $\pi(\Omega^2)$ e considerar o produto interno $\langle T_1 | T_2 \rangle = Tr^+(T_1^* T_2 | D |^{-4})$. Para identificarmos o complemento ortogonal de $\pi(d(J_0 \cap \Omega^1))$ precisamos da seguinte definição:

Definição 46 *Um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é dito de Hilbert-Schmidt se e somente se $tr(T^*T) < \infty$, aqui tr denota o traço usual. O conjunto dos operadores de Hilbert-Schmidt é denotado por \mathcal{F}_2 . No caso de estarmos lidando com um espaço de Hilbert separável podemos tomar uma base ortonormal $\{\phi_n\}$, nestas condições, se $A, B \in \mathcal{F}_2$ então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | A^* B \phi_n \rangle, \tag{4.23}$$

é absolutamente convergente e define um produto interno, denotado por $(A, B)_2$. Este é o chamado produto interno de Hilbert-Schmidt.

Sendo $\lambda(M^*M)$ a projeção ortogonal, com relação ao produto interno de Hilbert-Schmidt, da matriz M^*M sobre as matrizes escalares $\lambda\mathbb{I}$, o complemento ortogonal de $\pi(d(J_0 \cap \Omega^1))$ dentro de $\pi(\Omega^2)$ pode ser identificado com o conjunto dos elementos da forma

$$T = \begin{bmatrix} \gamma(\alpha_a) \otimes \mathbb{I} - h_a \otimes (M^*M - \lambda(M^*M)) & -\gamma_5 i^{-1} \gamma(\beta_a) \otimes M^* \\ -\gamma_5 i^{-1} \gamma(\beta_b) \otimes M & \gamma(\alpha_b) \otimes \mathbb{I} - h_b \otimes (MM^* - \lambda(MM^*)) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

Com estes fatos obtemos

Lema 11 *Sendo $\lambda(M^*M)$ a projeção ortogonal, com relação ao produto interno de Hilbert-Schmidt, da matriz M^*M nas matrizes escalares $\lambda\mathbb{I}$, então a norma ao quadrado de um elemento $(\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b, h_a, h_b) \in \Omega_D^2$ é dada por*

$$\begin{aligned} & \int_V [\|\alpha_a\|^2 + N \|\alpha_b\|^2] d\nu + \text{tr}(M^*M) \int_V [\|\beta_a\|^2 + \|\beta_b\|^2] d\nu \\ & + \text{tr} \left[(M^*M - \lambda(M^*M))^2 \right] \times \int_V [\|h_a\|^2 + \|h_b\|^2] d\nu, \end{aligned} \quad (4.25)$$

lembrando que M é uma matriz $N \times N$.

Uma discussão um pouco mais detalhada sobre os argumentos que nos levam a este lema pode ser encontrada em [2]. \square

Para podermos falar no funcional de Yang-Mills precisamos de um fibrado, \mathcal{E} , sobre a álgebra \mathcal{A} , e também de uma conexão sobre \mathcal{E} . Iremos considerar um fibrado da forma

$$\mathcal{E} = f\mathcal{A}^2, \quad (4.26)$$

onde f é a matriz definida por

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

sendo $e = (1, 0) \in \mathcal{A}$.

Uma conexão arbitrária sobre este fibrado é dada pela expressão

$$\nabla = fd + \rho, \quad (4.28)$$

sendo ρ uma matriz 2×2 auto-adjunta com entradas em Ω_D^1 . Além disso ρ deve satisfazer as relações $\rho = f\rho = \rho f = f\rho f$. Usando estas propriedades de ρ concluímos que as suas entradas devem ser da forma

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= (\omega_a^{11}, \omega_b^{11}, \phi_1, \overline{\phi_1}); \\ \rho_{12} &= (\omega_a^{12}, 0, 0, \overline{\phi_2}); \\ \rho_{21} &= (\omega_a^{21}, 0, \phi_2, 0); \\ \rho_{22} &= (\omega_a^{22}, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Uma forma mais concisa de escrevermos a matriz ρ é agrupando as componentes do mesmo tipo em uma matriz, ou seja, todas as componentes ω^a em uma matriz, todas as componentes ω^b em outra, e assim por diante. Com esta notação podemos escrever ρ na forma

$$\rho = \left[\begin{bmatrix} \omega_a^{11} & \omega_a^{12} \\ \omega_a^{21} & \omega_a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_b^{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{\phi_1} & \overline{\phi_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]. \quad (4.30)$$

Nós ainda podemos usar uma notação mais concisa: se denotarmos

$$\begin{aligned} \omega_a &= \begin{bmatrix} \omega_a^{11} & \omega_a^{12} \\ \omega_a^{21} & \omega_a^{22} \end{bmatrix}; \\ \omega_b &= \begin{bmatrix} \omega_b^{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \phi &= \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

podemos escrever

$$\rho = [\omega_a; \omega_b; \phi; \phi^*]. \quad (4.32)$$

Para esta conexão a curvatura é dada pela expressão

$$\theta = f df df + f(d\rho)f + \rho^2, \quad (4.33)$$

que pode ser calculada a partir das expressões para o produto e para a diferencial de elementos de Ω_D^1 . Para fazermos isto notemos que

$$\begin{aligned} f df df &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & edede \end{bmatrix}, \\ f(d\rho)f &= \begin{bmatrix} d\rho_{11} & (d\rho_{12})e \\ e(d\rho_{21}) & e(d\rho_{22})e \end{bmatrix}, \\ \rho^2 &= \begin{bmatrix} \rho_{11}^2 + \rho_{12}\rho_{21} & \rho_{11}\rho_{12} + \rho_{12}\rho_{22} \\ \rho_{21}\rho_{11} + \rho_{22}\rho_{21} & \rho_{21}\rho_{12} + \rho_{22}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Iremos escrever a curvatura como uma matriz com entradas em Ω_D^2

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Além disso iremos escrever cada elemento da matriz de θ na forma

$$\theta_{ij} = (\alpha_a^{ij}, \alpha_b^{ij}, \beta_a^{ij}, \beta_b^{ij}, h_a^{ij}, h_b^{ij}). \quad (4.36)$$

Com estas notações e com as expressões 4.19, 4.20 e 4.34 iremos prosseguir no cálculo explícito dos elementos da curvatura.

Antes de mais nada notemos que

$$f df df = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & edede \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

sendo que um cálculo direto nos leva a seguinte expressão

$$edede = (0, 0, 0, 0, -1, 0). \quad (4.38)$$

Desta forma a contribuição de $fdfdf$ só se dá no termo h_a^{22} .

Primeiramente iremos calcular os termos da forma α_a^{ij} :

$$\begin{aligned} \alpha_a^{11} &= d\omega_a^{11} + \omega_a^{11} \wedge \omega_a^{11} + \omega_a^{12} \wedge \omega_a^{21}, \\ \alpha_a^{12} &= d\omega_a^{12} + \omega_a^{11} \wedge \omega_a^{12} + \omega_a^{12} \wedge \omega_a^{22}, \\ \alpha_a^{21} &= d\omega_a^{21} + \omega_a^{21} \wedge \omega_a^{11} + \omega_a^{22} \wedge \omega_a^{21}, \\ \alpha_a^{22} &= d\omega_a^{22} + \omega_a^{21} \wedge \omega_a^{12} + \omega_a^{22} \wedge \omega_a^{22}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Estes termos podem ser escritos de maneira simplificada como

$$\alpha = d\omega^a + \omega^a \wedge \omega^a. \quad (4.40)$$

Para os termos α_b^{ij} nós temos

$$\begin{aligned} \alpha_b^{11} &= d\omega_b^{11}; \\ \alpha_b^{12} &= 0; \\ \alpha_b^{21} &= 0; \\ \alpha_b^{22} &= 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

ou, equivalentemente, na notação matricial,

$$\alpha_b = \begin{bmatrix} d\omega_b^{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Para β_a^{ij} temos

$$\begin{aligned} \beta_a^{11} &= -d\phi_1 - (\omega_a^{11} - \omega_b^{11})(\phi_1 + 1) - \omega_a^{12}\phi_2, \\ \beta_a^{12} &= 0, \\ \beta_a^{21} &= -d\phi_2 - \omega_a^{21}(1 + \phi_1) - (\omega_a^{22} - \omega_b^{11})\phi_2, \\ \beta_a^{22} &= 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

que na forma matricial nos fornece

$$\beta_a = \begin{bmatrix} -d\phi_1 - (\omega_a^{11} - \omega_b^{11})(\phi_1 + 1) - \omega_a^{12}\phi_2 & 0 \\ -d\phi_2 - \omega_a^{21}(1 + \phi_1) - (\omega_a^{22} - \omega_b^{11})\phi_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Já para os termos β_b^{ij} nós temos

$$\begin{aligned} \beta_b^{11} &= -d\bar{\phi}_1 + (\omega_a^{11} - \omega_b^{11})(1 + \bar{\phi}) + \omega_a^{21}\bar{\phi}_2, \\ \beta_b^{12} &= -d\bar{\phi}_2 + \omega_a^{12}(1 + \bar{\phi}_1) + (\omega_a^{22} - \omega_b^{11})\bar{\phi}_2, \\ \beta_b^{21} &= 0, \\ \beta_b^{22} &= 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

ou ainda

$$\beta_b = \begin{bmatrix} -d\bar{\phi}_1 + (\omega_a^{11} - \omega_b^{11})(1 + \bar{\phi}) + \omega_a^{21}\bar{\phi}_2 & -d\bar{\phi}_2 + \omega_a^{12}(1 + \bar{\phi}_1) + (\omega_a^{22} - \omega_b^{11})\bar{\phi}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Agora só nos falta calcular os termos h_a^{ij} e h_b^{ij} . Para h_a^{ij} nós temos

$$\begin{aligned} h_a^{11} &= \phi_1 + \bar{\phi}_1 + \phi_1\bar{\phi}_1; \\ h_a^{12} &= \bar{\phi}_2(1 + \phi_1); \\ h_a^{21} &= \phi_2(1 + \bar{\phi}_1); \\ h_a^{22} &= -1, \end{aligned} \quad (4.47)$$

que na forma matricial fica

$$h_a = \begin{bmatrix} \phi_1 + \bar{\phi}_1 + \phi_1\bar{\phi}_1 & \bar{\phi}_2(1 + \phi_1) \\ \phi_2(1 + \bar{\phi}_1) & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

E, finalmente, temos

$$\begin{aligned} h_b^{11} &= \phi_1 + \bar{\phi}_1 + \phi_1\bar{\phi}_1 + \phi_2\bar{\phi}_2; \\ h_b^{12} &= 0; \\ h_b^{21} &= 0; \\ h_b^{22} &= 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

ou

$$h_b = \begin{bmatrix} \phi_1 + \bar{\phi}_1 + \phi_1\bar{\phi}_1 + \phi_2\bar{\phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Com isso, temos a curvatura θ totalmente determinada. Para calcularmos o funcional de Yang-Mills para este modelo, lembremos que o mesmo é dado por

$$YM(\nabla) = \langle \theta | \theta \rangle = \text{Tr}^+(\theta^* \theta | D |^{-4}). \quad (4.51)$$

Nós sabemos que θ é uma matriz 2×2 onde cada entrada é um elemento de Ω_D^2 . Dessa forma $\theta^* \theta$ será uma matriz 2×2 onde cada entrada é um elemento de Ω_D^* . Além disso, sabemos que os elementos de Ω_D^* podem ser escritos em termos de matrizes 2×2 onde as entradas são operadores sobre um espaço de Hilbert. Dessa forma podemos olhar para $\theta^* \theta$ como sendo uma matriz 4×4 onde cada entrada é um operador. Usando esta descrição de $\theta^* \theta$ e as propriedades do traço de K-ciclos produto, obtemos que o funcional de Yang-Mills para esta conexão é da forma

$$YM(\nabla) = I_0 + I_1 + I_2, \quad (4.52)$$

onde cada um dos termos I_j é dado em termos da integral sobre V de uma densidade de Lagrangeana. Mais precisamente, a densidade de Lagrangeana para o termo I_0 é dada por

$$\mathcal{L}_{I_0} = [(1 - |\phi_2|^2)^2 + 2(|\phi_1 + 1|^2 + |\phi_2|^2 - 1)^2] \text{tr}(M^* M - \lambda(M^* M)). \quad (4.53)$$

Nesta equação, e nas subsequentes, tr denota o traço usual de matrizes de dimensão finita.

A densidade de Lagrangeana para o termo I_1 é da forma

$$\mathcal{L}_{I_1} = 2 \left\| \overline{\nabla \begin{bmatrix} \phi_1 + 1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}} \wedge \nabla \begin{bmatrix} \phi_1 + 1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \right\|_R \text{tr}(M^*M), \quad (4.54)$$

aqui $\| \cdot \|_R$ denota a norma Riemanniana usual para formas. Além disso ∇ denota a derivada covariante de campos escalares, que é dada pelo seguinte operador

$$\nabla = d + \begin{bmatrix} \omega_a^{11} - \omega_b^{11} & \omega_a^{12} \\ \omega_a^{21} & \omega_a^{22} - \omega_b^{11} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

E para o termo I_2 obtemos que a densidade de Lagrangeana é da forma

$$\mathcal{L}_{I_2} = \left\| \overline{(d\omega_a + \omega_a \wedge \omega_a)} \wedge (d\omega_a + \omega_a \wedge \omega_a) \right\|_R N + \left\| \overline{d\omega_b} \wedge d\omega_b \right\|_R N. \quad (4.56)$$

Para terminarmos precisamos calcular a parte fermiônica da Lagrangeana

$$I_F(\psi) = \langle \psi | D_{\nabla} \psi \rangle. \quad (4.57)$$

Para efetuarmos esta conta lembremos que as funções de onda ψ são elementos do espaço $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$, que neste modelo pode ser escrito como

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H} = (f\mathcal{A}^2) \otimes_{\mathcal{A}} (\Gamma(S) \otimes (\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)), \quad (4.58)$$

que pode ser identificada com o espaço

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H} = (f\mathcal{A}^2) \otimes_{\mathcal{A}} ((\Gamma(S) \otimes \mathbb{C}^N) \oplus (\Gamma(S) \otimes \mathbb{C}^N)). \quad (4.59)$$

Isto nos permite escrever a função de onda na forma

$$\psi = \begin{bmatrix} e_L \\ \nu_L \\ e_R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

onde cada componente do vetor acima é um elemento de $\Gamma(S) \otimes \mathbb{C}^N$. Se escrevermos

$$\psi_L = \begin{bmatrix} e_L \\ \nu_L \end{bmatrix}, \quad \psi_R = \begin{bmatrix} e_R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

a função de onda pode ser escrita como

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Por razões físicas devemos ter que ψ_R é um elemento do tipo *right* e que ψ_L é um elemento do tipo *left*, em outras palavras, devemos ter as seguintes relações

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R, \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L. \quad (4.63)$$

Usando que as funções de onda ψ podem ser escritas na forma 4.60, a ação fermiônica se reduz à seguinte expressão

$$I_F(\psi) = \langle \psi | D\psi \rangle + \langle \psi | \rho\psi \rangle. \quad (4.64)$$

Esta expressão pode ser calculada diretamente, de onde obtemos que a ação fermiônica é da forma

$$I_F(\psi) = J_0 + J_1, \quad (4.65)$$

onde cada um dos termos acima é dado pela integral sobre V de uma densidade de Lagrangeana. Para o termo J_0 obtemos a seguinte densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{J_0} = \overline{e}_L \partial_V e_L + \overline{\nu}_L \partial_V \nu_L + \overline{e}_R \partial_V e_R + \overline{e}_L M^* \tau_R - \overline{e}_R M e_L. \quad (4.66)$$

Já o termo J_1 é dado pela densidade de Lagrangeana¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_1} = i & (\overline{e}_R \omega_a^{22} e_R + \overline{e}_L \omega_a^{11} e_L + \overline{\nu}_L \omega_b^{11} \nu_L + \overline{e}_L \omega_a^{12} e_R + \overline{e}_R \omega_a^{21} e_L) \\ & - \overline{e}_L \phi_1 M^* \nu_L - \overline{\nu}_L \phi_1 M e_L + \overline{\nu}_L \phi_2 M e_R - \overline{e}_R \phi_2 M^* \nu_L. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Dessa forma a densidade de Lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = YM(\nabla) + I_F(\psi) = I_0 + I_1 + I_2 + J_0 + J_1, \quad (4.68)$$

recupera a densidade de Lagrangeana do modelo padrão usual com a diferença de que o modelo proveniente de geometria não-comutativa envolve campos de gauge em $U(1)$ e $U(2)$ enquanto que o modelo de Weinberg-Salam envolve campos de gauge em $U(1)$ e $SU(2)$. Para recuperarmos o modelo de Weinberg-Salam usual precisamos introduzir uma condição a mais no modelo não-comutativo, a condição, introduzida *ad hoc*, é

$$\text{tr } \omega_a = \omega_b^{11}. \quad (4.69)$$

Até agora trabalhamos com a hipótese de que o grupo de gauge pode ser escrito em termos do grupo das unidades de \mathcal{A} , $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{u \in \mathcal{A} : u^*u = uu^* = 1\}$, eventualmente com alguma condição a mais, como por exemplo a condição 4.69. Porém este não é o caso quando estamos lidando com o grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, o grupo de simetria do modelo padrão completo. A descrição do modelo padrão em termos de geometria não-comutativa continua sendo feita através do produto entre um espaço discreto, F , e o espaço-tempo, porém devemos tomar um espaço discreto diferente do usado no modelo de Weinberg-Salam.

Para descrevermos o grupo de simetrias do modelo padrão iremos precisar de duas álgebras \mathcal{A} e \mathcal{B} . Iremos tomar

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbb{C} \oplus \mathbb{H}, \\ \mathcal{B} &= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{3 \times 3}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

¹Nesta equação estamos subentendendo que a ação das formas é dada pela multiplicação de Clifford. Por isso estamos escrevendo simplesmente ω no lugar de $\gamma(\omega)$.

O espaço discreto F será dado por um $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -módulo $(\mathcal{H}_F, D_F, \gamma_F)$. Analogamente ao caso do modelo de Weinberg-Salam, a álgebra induz uma decomposição de \mathcal{H}_F na forma

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}^3). \quad (4.71)$$

Nesta decomposição a álgebra \mathcal{B} age simplesmente pela multiplicação escalar em \mathcal{H}_0 e em \mathcal{H}_1 , e cada um destes espaços carrega uma \star -representação da álgebra \mathcal{A} .

Por outro lado, usando que um quaternion pode ser escrito na forma $q = \alpha + \beta j$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, uma \star -representação de \mathcal{A} é da forma

$$\pi(\lambda, q) = \lambda I_{n_+} \oplus \lambda^* I_{n_-} \oplus \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \otimes I_m. \quad (4.72)$$

Dessa forma uma \star -representação de \mathcal{A} é completamente caracterizada pela tripla de constantes (n_+, n_-, m) . Usando a decomposição 4.71, e o fato de que cada um dos espaços \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 carrega uma \star -representação de \mathcal{A} concluímos que o $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -módulo é completamente determinado pelas constantes (n_+^0, n_-^0, m^0) e (n_+^1, n_-^1, m^1) . Tais constantes estão relacionadas com o número de gerações, e de partículas, envolvidas no modelo.

Tendo o $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -módulo bem determinado, podemos definir um operador de Dirac D para ele. Neste modelo o operador D será o responsável pela massa dos fermions e pelos parâmetros de Kobayashi-Maskawa, [5]. Além disso podemos definir conexões sobre este módulo. Dessa forma, uma vez determinado o módulo, temos todas as ferramentas para analisar a sua geometria, como foi feito no caso do espaço de dois pontos.

Com o espaço de dois pontos determinado podemos construir o espaço do modelo padrão. Consideremos uma variedade $\text{spin}^{\mathbb{C}}$, V' de dimensão 4, juntamente com o K-ciclo de Dirac $(\Gamma(S), \partial_V, \gamma_5)$. As álgebras \mathcal{A} e \mathcal{B} serão tomadas na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= C^\infty(V) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{H}), \\ \mathcal{B} &= C^\infty(V) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{3 \times 3}), \end{aligned} \quad (4.73)$$

ou seja, analogamente ao modelo de Weinberg-Salam, estamos tomando o produto da álgebra para descrever o espaço discreto pela álgebra das funções suaves sobre a variedade V . O espaço de Hilbert será tomado como sendo

$$\mathcal{H} = \Gamma(S) \otimes (\mathcal{H}_0 \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}^{3 \times 3})). \quad (4.74)$$

Com a álgebra e o espaço de Hilbert bem definidos, procede-se no sentido de determinar quem são os espaços das formas Ω_D^1 e Ω_D^2 . Com estes espaços caracterizados podemos calcular a curvatura de uma conexão, recuperando a partir desta curvatura, do funcional de Yang-Mills e do funcional Fermiônico a Lagrangeana do modelo Padrão, como feito no modelo de Weinberg-Salam.

Para maiores detalhes desta construção, e dos cálculos correspondentes, remetemos o leitor as referências [2] e [3].

Apêndice A

Módulos

Neste apêndice iremos dar uma pequena introdução a módulos projetivos. Estaremos sempre supondo que os anéis são unitários, que denotaremos por \mathcal{A} e por \mathcal{B} .

Definição 47 *Seja \mathcal{E} um módulo sobre \mathcal{A} , dizemos que um conjunto, possivelmente infinito, de elementos $t_i \in \mathcal{E}$, $\{t_1, \dots, t_k, \dots\}$, gera o módulo \mathcal{E} se todo elemento $t \in \mathcal{E}$ puder ser escrito como $t = \sum_{i=1}^n a_i t_i$ com $a_i \in \mathcal{A}$.*

Se estamos lidando com geradores, podem ocorrer dois problemas que nem sempre admitem solução: a decomposição acima pode não ser única; e além disso podemos precisar de um número infinito de geradores para escrevermos todos os elementos do módulo \mathcal{E} . Mas em certos casos especiais, que são de grande interesse, estes problemas não ocorrem.

Definição 48 *Dizemos que um módulo \mathcal{E} é finitamente gerado se ele admite um conjunto finito de geradores.*

Definição 49 *Um \mathcal{A} -módulo a direita \mathcal{E} é dito livre se ele possuir elementos $t_i \in \mathcal{E}$ tais que $\{t_1, \dots, t_n\}$ forem uma base, no sentido de que todo elemento $t \in \mathcal{E}$ pode ser escrito de forma única como $t = a_1 t_1 + \dots + a_n t_n$ com $a_i \in \mathcal{A}$.*

É fácil vermos que um módulo livre é finitamente gerado se, e somente se, ele possuir uma base com um número finito de elementos. O módulo livre padrão com n geradores é dado por $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \oplus \dots \oplus \mathcal{A}$. Podemos pensar nos elementos deste módulo como sendo vetores colunas. Podemos considerar qualquer módulo livre finitamente gerado como sendo do tipo padrão para isso precisamos apenas identificar as bases, como é feito com espaços vetoriais reais e o \mathbb{R}^n .

Definição 50 *Dizemos que um \mathcal{A} -módulo a direita \mathcal{P} é projetivo se, dado qualquer \mathcal{A} -linear mapa sobrejetivo entre \mathcal{A} -módulos a direita, $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$, e qualquer \mathcal{A} -linear mapa $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ existe um \mathcal{A} -linear mapa $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $\eta \circ \psi = \phi$.*

Uma propriedade importante dos módulos livres é dada pelo lema

Lema 12 *Todo \mathcal{A} -módulo a direita livre \mathcal{F} é projetivo.*

Dados $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, seja $\{t_i\}$ uma base de \mathcal{F} , dessa forma para cada elemento da base t_i podemos escolher $s_{t_i} \in \mathcal{E}$ de forma que $\eta(s_{t_i}) = \phi(t_i)$. Isso é sempre possível pois η é sobrejetiva. Isto, mais a \mathcal{A} -linearidade, determina um mapa $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, dado por $\psi(t_i) = s_{t_i}$, que por construção satisfaz $\eta \circ \psi = \phi$. \square

Proposição 15 *Uma soma direta da forma $\oplus_j \mathcal{P}_j$ de \mathcal{A} -módulos a direita é projetiva se, e somente se, cada somando direto \mathcal{P}_i for projetivo.*

Iremos assumir que $\mathcal{P} = \oplus_j \mathcal{P}_j$ é projetivo e que os mapas $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\phi_i : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{G}$ são dados. Definindo $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ nas somas finitas $\sum_j s_j$ com $s_j \in \mathcal{P}_j$ por $\phi(\sum_j s_j) = \sum_j \phi_j(s_j)$. Como estamos assumindo que \mathcal{P} é projetivo, existe um mapa $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ com $\eta \circ \psi = \phi$, se escrevermos ψ_i para a restrição de ψ a \mathcal{P}_i obtemos $\eta \circ \psi_i = \phi_i$, de modo que cada \mathcal{P}_i é projetivo. Inversamente, se cada \mathcal{P}_i for projetivo, e dado $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$, basta considerarmos as restrições ϕ_j de ϕ a \mathcal{P}_j para obtermos os mapas $\psi_j : \mathcal{P}_j \rightarrow \mathcal{E}$ e definirmos ψ como foi definido ϕ acima. \square

Lembremos que uma seqüência de mapas

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad (\text{A.1})$$

é dita exata quando $\ker g = \text{im } f$.

Definição 51 *Dizemos que uma seqüência exata*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\rho} B \xrightarrow{\eta} C \rightarrow 0 \quad (\text{A.2})$$

cinde, quando existir um mapa $\sigma : C \rightarrow B$ tal que $\eta \circ \sigma = \text{id}_C$.

Observemos que no caso dos conjuntos A, B e C em uma seqüência como acima, possuírem alguma estrutura além da de conjunto, pedimos que os mapas presentes na seqüência respeitem esta estrutura. Os mapas passam a ser morfismos da estrutura correspondente. Como no caso iremos lidar com seqüências exatas entre módulos, os mapas serão morfismos entre módulos.

Proposição 16 *Um \mathcal{A} -módulo \mathcal{P} é projetivo se, e somente se, qualquer seqüência exata entre módulos*

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\eta} \mathcal{P} \rightarrow 0 \quad (\text{A.3})$$

cinde. Isto ocorre se, e somente se, \mathcal{P} for um somando direto de um módulo livre.

Se \mathcal{P} for projetivo existe um mapa $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\eta \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{P}}$. Isto segue diretamente da propriedade que define um módulo projetivo. Dessa forma a seqüência *cinde*.

Por outro lado se a sequência *cinde*, tomemos $\{x_j\}_{j \in J}$ um conjunto de geradores de \mathcal{P} , e consideremos \mathcal{F} como sendo o módulo livre com base $\{t_j\}_{j \in J}$, ou seja, o módulo livre com o mesmo número de geradores que \mathcal{P} . Definamos $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}$ por \mathcal{A} -linearidade e pela regra $\eta(t_j) = x_j$. Seja $\mathcal{K} = \ker \eta$, de forma que podemos escrever $\mathcal{F} \simeq \mathcal{P} \oplus \mathcal{K}$. Logo \mathcal{P} é o somando direto de um módulo livre, mas pela proposição 15, e pelo fato de todo módulo livre ser projetivo, concluímos que \mathcal{P} é projetivo. Notemos que por este argumento \mathcal{K} também é projetivo. \square

Teorema 12 *Um \mathcal{A} -módulo a direita \mathcal{P} é projetivo se, e somente se, ele é da forma $\mathcal{P} = \varepsilon\mathcal{F}$, onde \mathcal{F} é um módulo livre e ε é um idempotente como mapa \mathcal{A} -linear em \mathcal{F} .*

Consideremos a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{P} \rightarrow 0. \quad (\text{A.4})$$

com \mathcal{F} livre e \mathcal{P} projetivo. Sendo $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ um mapa que *cinde* a sequência, ou seja, $\eta\sigma = id_{\mathcal{P}}$. Com isso o mapa $\varepsilon = \sigma\eta$ satisfaz $\varepsilon^2 = \sigma\eta\sigma\eta = \sigma\eta = \varepsilon$, isto é, ε é um idempotente. Das propriedades de sequências exatas nós sabemos que η é sobrejetiva, de forma que $\eta(\mathcal{F}) = \mathcal{P}$ e pela construção de σ , concluímos que a mesma é injetiva, logo $\sigma(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{P}$. Dessa forma temos que $\mathcal{P} \simeq \varepsilon\mathcal{F}$.

É interessante notarmos que o mapa $id_{\mathcal{F}} - \varepsilon$ também é um idempotente, e $\mathcal{E} \simeq \ker \eta \simeq (id_{\mathcal{F}} - \varepsilon)\mathcal{F}$.

Inversamente se $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é um idempotente, podemos escrever $\mathcal{F} = \varepsilon\mathcal{F} \oplus (id_{\mathcal{F}} - \varepsilon)\mathcal{F}$, e como somando de módulo projetivo é projetivo concluímos que $\varepsilon\mathcal{F}$ é projetivo. \square

Apêndice B

Álgebras de Clifford

Neste apêndice iremos fazer um apanhado geral sobre álgebras de Clifford. Iremos omitir as demonstrações, que podem ser encontradas nas referências [7], [8], [9] e [10].

A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(E)$ determinada por um espaço vetorial real E equipado com uma forma bilinear q é a álgebra associativa gerada pelos elementos de E submetidos a seguinte relação¹

$$xy + yx = -2q(x, y). \quad (\text{B.1})$$

Notemos que a inclusão de E em $\mathcal{Cl}(E)$ é injetiva, dessa forma podemos considerar E como sendo um subconjunto de $\mathcal{Cl}(E)$.

As álgebras de Clifford possuem a importante propriedade:

Proposição 17 *Se B é uma álgebra real com identidade e $f : E \rightarrow B$ é um mapa linear que satisfaz $f(x)^2 = q(x, x)$, então f se estende para $\mathcal{Cl}(E)$ de forma que $\tilde{f} : \mathcal{Cl}(E) \rightarrow B$ é um morfismo entre álgebras e $\tilde{f}|_E = f$.*

Com isso nós vemos que o grupo das transformações ortogonais de E , $O(E, q)$, induz automorfismos da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(E)$. Em particular a transformação $x \mapsto -x$ da origem a um automorfismo involutivo de $\mathcal{Cl}(E)$, o qual denotaremos por $\hat{\cdot}$, e chamaremos de involução graduada.

Agora se nós tomarmos a álgebra oposta de B , isto é, o mesmo espaço vetorial E mas com a ordem do produto invertida, nós encontramos um anti-automorfismo involutivo de $\mathcal{Cl}(E)$, denotado por $\tilde{\cdot}$ e chamado de reversão. Podemos mostrar que para um elemento qualquer $a \in \mathcal{Cl}(E)$ vale

$$\tilde{\tilde{a}} = \hat{a}, \quad (\text{B.2})$$

isto nos possibilita definir a chamada involução de Clifford, dada por

$$\bar{a} = \hat{a} = \tilde{a}. \quad (\text{B.3})$$

¹Na literatura sobre álgebras de Clifford é bastante comum encontrarmos esta relação com o sinal oposto, isto é, $xy + yx = 2q(x, y)$.

Definimos o grupo multiplicativo das unidades $\mathcal{Cl}(E)^u$ como sendo o conjunto dos elementos inversíveis de $\mathcal{Cl}(E)$. É possível mostrarmos que $\mathcal{Cl}(E)^u$ é um grupo de Lie. Com isso faz sentido falarmos em representações de $\mathcal{Cl}(E)^u$. Em particular podemos construir a representação adjunta contorcida de $\mathcal{Cl}(E)^u$ (*twisted adjoint*) dentro da própria álgebra $\mathcal{Cl}(E)$

$$\varphi : \mathcal{Cl}(E)^u \rightarrow \mathcal{Cl}(E), \quad (\text{B.4})$$

definida por

$$\varphi(x)y = \hat{x}yx^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

Um importante subgrupo de $\mathcal{Cl}(E)^u$ é o chamado grupo de Clifford Γ definido como sendo o subconjunto de $\mathcal{Cl}(E)^u$ que preserva o espaço E , em outras palavras

$$\Gamma = \{x \in \mathcal{Cl}(E)^u : \varphi(x)y \in E \ \forall y \in E\}. \quad (\text{B.6})$$

Nós podemos usar a involução de Clifford para definirmos uma norma em $\mathcal{Cl}(E)$: $N : \mathcal{Cl}(E) \rightarrow \mathcal{Cl}(E)$ definida por

$$N(x) = x\bar{x}, \quad (\text{B.7})$$

esta é a chamada norma espinorial de $\mathcal{Cl}(E)$. No caso de $x \in E$ a norma espinorial é um escalar, mais precisamente temos que $N(x) = q(x, x)$, isto é, se $x \in E$ a norma espinorial se reduz a norma usual.

Agora vamos considerar o caso em que $E = \mathbb{R}^n$ e $q(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Neste caso iremos denotar a álgebra de Clifford de \mathbb{R}^n por \mathcal{Cl}_n e o subgrupo Γ por Γ_n . Para o caso de $E = \mathbb{R}^n$ temos a seguinte proposição

Proposição 18 1. O núcleo de $\varphi : \Gamma_n \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ é \mathbb{R}^* , o conjunto dos múltiplos não nulos da identidade;

2. A restrição de N a Γ_n é um homomorfismo de grupos de Γ_n em \mathbb{R} ;

3. $\varphi(\Gamma_n) \subset O(n)$, o grupo das transformações ortogonais de \mathbb{R}^n ;

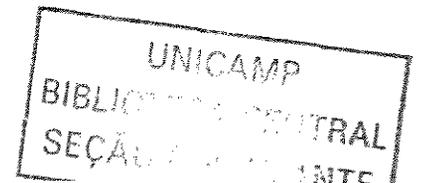
4. Denotemos por $\text{Pin}(n)$ o núcleo de $\varphi : \Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}^*$. A restrição de φ a $\text{Pin}(n)$ é uma aplicação sobrejetiva sobre $O(n)$ com núcleo $\{-1, 1\}$.

Notemos que $\text{Pin}(n)$ é um subgrupo fechado de $\mathcal{Cl}(E)^u$, dessa forma $\text{Pin}(n)$ carrega naturalmente uma estrutura de grupo de Lie.

O grupo $\text{Spin}(n)$ é, por definição, a imagem inversa de $SO(n)$ por φ . As definições de $\text{Pin}(n)$ e de $\text{Spin}(n)$ podem ser resumidas nas seguintes sequências exatas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Pin}(n) \xrightarrow{\varphi} O(n) \rightarrow 0; \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(n) \xrightarrow{\varphi} SO(n) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A importância do grupo Spin é dada pela seguinte proposição:



Proposição 19 Para $n \geq 2$, $\varphi : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ é um recobrimento duplo conexo. Para $n \geq 3$, este é o grupo de recobrimento universal de $\text{SO}(n)$.

Em muitas circunstâncias é útil considerarmos a álgebra de Clifford complexificada, $\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(E)$ sobre um espaço E . Podemos definir a álgebra Clifford complexificada como sendo a álgebra de Clifford do espaço vetorial complexificado $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ com a forma quadrática complexificada $q_{\mathbb{C}}$. Uma das vantagens de trabalharmos com a álgebra de Clifford complexificada é a sua classificação extremamente simples:

Proposição 20 A álgebra complexa $\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}^n$ é isomorfa a $\mathbb{C}^{2^k \times 2^k}$ para $n = 2k$, e é isomorfa a $\mathbb{C}^{2^k \times 2^k} \oplus \mathbb{C}^{2^k \times 2^k}$ para $n = 2k + 1$.

Também será útil o grupo $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ definido como sendo

$$\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) = (\text{SO}(n) \times U(1)) / \mathbb{Z}_2, \quad (\text{B.9})$$

onde a relação de equivalência é dada por: $(h, z) \sim (-h, -z)$. O homomorfismo φ se estende para $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ através de $\varphi^{\mathbb{C}}(x, \lambda) = (\varphi(x), \lambda^2)$, de forma que obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\varphi^{\mathbb{C}}} \text{SO}(n) \times U(1) \rightarrow 0. \quad (\text{B.10})$$

Consideremos um espaço vetorial real E de dimensão $2k$. Um espaço espinorial (complexo) associado a (E, q) nada mais é do que um $\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(E)$ -módulo. De um modo geral, dado um espaço (E, q) não existe um espaço espinorial canônico associado a E . Uma forma de obtermos um é escolhendo uma estrutura complexa² J em E . Dada uma estrutura complexa J em E podemos passar a ver E como um espaço vetorial complexo, para isso definimos a multiplicação por números complexos da seguinte forma

$$(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta Jx. \quad (\text{B.11})$$

Com esta definição E passa a ser visto como um espaço vetorial complexo de dimensão k . Por outro, lado podemos definir uma forma hermitiana a partir da forma quadrática inicial de E por

$$(u | v) = q(u, v) + iq(Ju, v). \quad (\text{B.12})$$

A partir destas construções nós definimos o espaço espinorial de Fock para (E, J) por

$$F(E, J) = \bigoplus_{r=0}^k \wedge_{\mathbb{C}}^r(E, J). \quad (\text{B.13})$$

Sendo $x \in E$ definimos a transformação $e(x) : F(E, J) \rightarrow F(E, J)$ por

$$e(x)s = x \wedge s. \quad (\text{B.14})$$

²Uma estrutura complexa sobre E é dada por uma isometria J tal que $J^2 = -id$.

A contração com relação a x , $i(x) : F(E, J) \rightarrow F(E, J)$, pode ser definida por

$$i(x)(s_1 \wedge \cdots \wedge s_t) = \sum_{j=1}^t (-1)^{j-1} (x | s_j) s_1 \wedge \cdots \wedge \hat{s}_j \wedge \cdots \wedge s_t, \quad (\text{B.15})$$

onde \hat{s}_j indica que o termo s_j não está presente naquele fator.

A partir destes dois mapas podemos definir um terceiro, $\gamma : F(E, J) \rightarrow F(E, J)$, por

$$\gamma(x) = e(x) - i(x). \quad (\text{B.16})$$

Não é difícil verificarmos que este mapa satisfaz a propriedade

$$\gamma(x)\gamma(y) + \gamma(y)\gamma(x) = -2q(x, y), \quad (\text{B.17})$$

dessa forma, pela propriedade dada na proposição 17, e por considerações a respeito da dimensão dos espaços, γ se estende para um isomorfismo de álgebras $\gamma : \mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(E) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} F(E, J)$.

Lembremos que das definições dos grupos Γ_n , $\text{Pin}(n)$ e $\text{Spin}(n)$ obtemos as seguintes inclusões

$$\text{Spin}(n) \subset \text{Pin}(n) \subset \mathcal{Cl}_n \subset \mathcal{C}\mathcal{Cl}_n. \quad (\text{B.18})$$

A representação spin (complexa) do grupo $\text{Spin}(n)$ é definida como sendo a restrição de γ a $\text{Spin}(n)$. Agora notemos que $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ é naturalmente imerso em \mathbb{C}_n por $(x, \lambda) \mapsto \lambda x$ para $x \in \text{Spin}(n)$ e $\lambda \in U(1)$. Dessa forma obtemos uma representação unitária para $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ em $F(E, J)$ pela restrição de γ .

Agora vamos considerar M como sendo uma variedade compacta sem fronteira. Vamos considerar fibrados vetoriais munidos de uma métrica $E \rightarrow M$. Como existe uma métrica em cada fibra E_x podemos considerar a álgebra de Clifford das fibras $\mathcal{Cl}(E_x)$ para formar o fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(E)$, cujas fibras são exatamente as álgebras $\mathcal{Cl}(E_x)$. É interessante notarmos que o espaço das seções de $\mathcal{Cl}(E)$ pode ser visto como uma álgebra, através da multiplicação em cada uma das fibras.

Quando estamos considerando fibrados vetoriais $E \rightarrow M$ com métrica, é possível mostrarmos que todo fibrado deste tipo pode ser escrito como um fibrado associado a um fibrado principal que tem $O(n)$ por grupo, ou seja, E é associado a $P(M, O(n))$. Por outro lado se for possível construirmos E como sendo associado a um fibrado principal que tem $SO(n)$ como grupo, $P(M, SO(n))$, dizemos que E é orientável. Isto é a mesma coisa que tomarmos as funções de transição de E , g_{ij} , em $SO(n)$.

Como acabamos de ver, existe um recobrimento $\text{Spin}(n) \xrightarrow{\varphi} SO(n)$. Neste ponto é natural nos perguntarmos se é possível definirmos as funções de transição de um fibrado orientável, E , em termos de $\text{Spin}(n)$, ou seja, será que existem funções h_{ij} em $\text{Spin}(n)$ tais que $\varphi(h_{ij}) = g_{ij}$. Se isto puder ser feito, o que nem sempre ocorre, nós obtemos um fibrado principal $P(M, \text{Spin}(n))$ juntamente com um recobrimento duplo $\mu : P(M, \text{Spin}(n)) \rightarrow P(M, SO(n))$, além disso E passa a ser escrito como fibrado associado de $P(M, \text{Spin}(n))$. Neste caso dizemos que o par $(P(M, \text{Spin}(n)), \mu)$ é uma estrutura-spin sobre M . Uma variedade M

é chamada de variedade-spin se o seu fibrado tangente for orientável e possuir uma estrutura spin.

Uma classe mais ampla de fibrados está relacionada com as estruturas - $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$. Uma estrutura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ sobre $E \rightarrow M$ é dada por um fibrado principal $P(M, \text{Spin}^{\mathbb{C}})$ tal que E pode ser escrito como um fibrado vetorial associado a este fibrado principal. Notemos que existe um homomorfismo entre $\phi : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \text{Spin}(n)$ dado por $\phi(h, \lambda) = \varphi(h)$, dessa forma toda variedade-spin pode ser vista como uma variedade-spin $^{\mathbb{C}}$, porém existem variedades que não são variedades-spin mas que são variedades-spin $^{\mathbb{C}}$.

Agora vamos considerar um fibrado $E \rightarrow M$ associado ao fibrado principal $P(M, \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n))$ e suponhamos que S seja um módulo complexo a esquerda sobre \mathcal{Cl}_n , com ρ sendo a ação a esquerda, pela multiplicação de Clifford, de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ sobre S . Neste caso podemos construir o fibrados espinorial complexo

$$S(E) = P(M, \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)) \times_{\rho} S. \quad (\text{B.19})$$

Lembremos que para uma variedade Riemanniana M , sempre é possível encontrarmos uma conexão Levi-Civita para o fibrado tangente TM . Consideremos o fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(M) = \mathcal{Cl}(TM)$, é possível mostrarmos que existe uma conexão canônica neste fibrado, também chamada de conexão Levi-Civita e denotada por ∇ , tal que, dado um campo de vetores qualquer v , temos

$$\nabla_v(c_1 c_2) = (\nabla_v c_1) c_2 + c_1 (\nabla_v c_2), \quad (\text{B.20})$$

quaisquer que sejam as seções $c_1, c_2 \in \Gamma(\mathcal{Cl}(M))$. Além disso se $S \rightarrow M$ for um fibrado espinorial sobre M existe uma conexão canônica sobre S , também denotada por ∇ , tal que

$$\nabla_v(\gamma(c)s) = \gamma(\nabla_v c)s + \gamma(c)\nabla_v s. \quad (\text{B.21})$$

Definição 52 *Seja $S \rightarrow M$ um fibrado espinorial sobre M , e seja $\nabla : \gamma(S) \rightarrow \Gamma(S \otimes TM)$ uma conexão canônica em S . Existe um morfismo de fibrados $m : S \otimes TM \rightarrow S$ dado pela restrição da multiplicação de Clifford a TM . O operador de Dirac é definido como sendo o mapa $D = m \circ \nabla : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$.*

Um importante resultado é dado pela seguinte

Proposição 21 *Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base local para TM e s uma seção suave de S . Escrevendo $\nabla_j = \nabla_{e_j}$ temos a relação*

$$Ds = \sum_{j=1}^n \gamma(e_j) \nabla_j s. \quad (\text{B.22})$$

Bibliografía

- [1] Baez, J.; Muniain, J. P. *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific 1994.
- [2] Connes, A. *Noncommutative Geometry*, Academic Press 1994.
- [3] Gracia-Bondía, J. M.; Vasilly, J. C. *Connes noncommutative differential geometry and the Standard Model*, Journal of Geometry and Physics 12(1993) 223-301.
- [4] Gracia-Bondía, J. M.; Vasilly, J. C.; Figueroa, H. *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhauser 2001.
- [5] Huang, K. *Quarks, Leptons & Gauge Fields*, World Scientific 1982.
- [6] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry vol.1* Interscience Publishers 1963.
- [7] Lawson, H. B.; Michelsohn, M. L. *Spin Geometry*, Princeton Univ. Press 1989.
- [8] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge 1997.
- [9] Murray, M. A. M.; Gilbert, J. E. *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge 1991.
- [10] Porteous, I. R. *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge 1995.
- [11] Reed, M.; Simon, R. *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press 1980.
- [12] Swan, R. *Vector Bundles and Projective Modules* Trans. Amer. Math. Soc. 105(1962), 264-277.