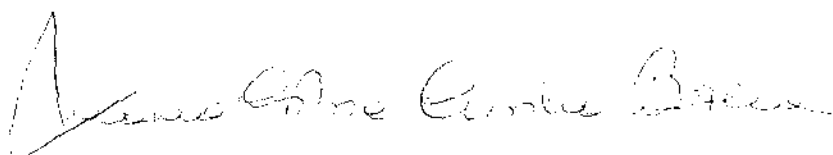


UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MISTO PARA EQUAÇÕES  
ELÍTICAS DE SEGUNDA ORDEM

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Dimas Leopoldo Silveira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 02 de Abril de 1987.



Prof. Dra. Maria Cristina Cunha Bezerra  
Orientador

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

1987

*"Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrair-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie."*

*Elementos de Euclides, III, 14.*

## ÍNDICE

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUÇÃO . . . . .                                                                  | i  |
| CAPÍTULO I - CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODOS DOS ELEMENTOS<br>FINITOS . . . . .         | 1  |
| 1.0. Introdução . . . . .                                                             | 1  |
| 1.1. Problema modelo - Formulações primais e duais . .                                | 3  |
| 1.2. Formulação primal-dual . . . . .                                                 | 6  |
| 1.3. Método Misto . . . . .                                                           | 8  |
| CAPÍTULO II - CONSTRUÇÃO DOS ESPAÇOS ELEMENTOS FINITOS . .                            | 11 |
| CAPÍTULO III - DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UMA TÉCNICA DE IMPLI-<br>MENTAÇÃO . . . . .     | 19 |
| CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO NUM PROBLEMA DE<br>ELETROMAGNETISMO . . . . . | 26 |
| 4.1. Descrição de um problema de eletromagnetismo . .                                 | 26 |
| 4.2. Estrutura do programa elementos finitos mistos .                                 | 30 |
| 4.3. Aplicação dos métodos mistos a problemas não li-<br>neares . . . . .             | 45 |

|              |                                        |    |
|--------------|----------------------------------------|----|
| CAPÍTULO     | V - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS . . . . . | 47 |
| APÊNDICE     | . . . . .                              | 52 |
| BIBLIOGRAFIA | . . . . .                              | 64 |

## AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Cristina Cunha Bezerra, pela dedicação, competência e disponibilidade expressas pela paciência, segurança e estímulo durante o acompanhamento de todo este trabalho.

Ao meu amigo e psicólogo, Antonio Carlos Silva Costa, pelo constante incentivo, amizade e consideração demonstrados nestes últimos quatro anos.

A Luciano Bezerra Viéira, pela sinceridade e coerência de suas atitudes.

A todos os professores do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC-UNICAMP que colaboraram, de alguma forma, para a concretização deste trabalho.

Ao colegas do Mestrado em Matemática Aplicada, pelo aprendizado que a convivência em grupo nos oferece.

Aos professores Gilberto Francisco Loibel, Paulo Ferreira da Silva Porto Júnior e Izette A.C. Loibel, do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, pelo incentivo demonstrado durante os anos de graduação em Matemática.

Ao Sr. Rodrigo Pereira de Faria e Sra. Maria Armanda Vieira Anjos Faria, pelo feliz período de convivência em São Carlos, bem como pelo contínuo apoio recebido, meus sinceros agradecimentos.

À Sra. Maria de Lourdes Soares da Silva que, abdicando de seus momentos de folga, pacientemente datilografou com esmero os originais deste trabalho.

Este trabalho foi realizado sob os auspícios da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processo nº 85/3156-0).

Aos meus pais

Eugenio e Thereza;

e às minhas irmãs,

Ana Otília, Maria Mônica e Maria Bernadete.

*"E tudo que a análise comum executa por meio de Equações com número finito de Termos, desde que possa ser feito, esse novo método sempre pode executar por meio de Equações Infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de Análise também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as Equações menos exatas; embora nós Mortais cujos Poderes de raciocínio estão restritos a Limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os Termos dessas Equações de modo a saber exatamente delas as Quantidades que queremos. . ."*

*Isaac Newton,  
De Analysi per aequationes numero  
terminorum infinitas, 1669.*

# NOTAÇÃO

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| $H(\text{div}; \Omega)$   | (página 4) |
| $\tilde{V}(f)$            | ( " 4)     |
| $\tau_h$                  | ( " 11)    |
| $W_h$                     | ( " 16)    |
| $\text{pol}_k(\xi, \eta)$ | ( " 13)    |
| $W_K$                     | ( " 16)    |
| $M_h$                     | ( " 17)    |
| $P_k(S)$                  | ( " 21)    |
| $\underline{P}_k(S)$      | ( " 21)    |
| $RT^k(S)$                 | ( " 21)    |
| $RT_{-1}^k(\tau_h)$       | ( " 21)    |
| $M_{-1}^k(\tau_h)$        | ( " 21)    |
| $RT_{\hat{O}}^k(\tau_h)$  | ( " 21)    |
| $C_h$                     | ( " 21)    |
| $C_h^{\partial}$          | ( " 21)    |
| $C_h^O$                   | ( " 21)    |
| $h_K$                     | ( " 21)    |
| $h_e$                     | ( " 21)    |

$\eta_K$

-(página 22)

$\eta_e$

( " 22)

$M_{-1}^k(C_h^O)$

( " 22)

## INTRODUÇÃO

Equações diferenciais elípticas são modelos matemáticos usados em diversos fenômenos físicos como, por exemplo, determinação do potencial eletrostático bem como equações de elasticidade. Em vista desta frequência é muito útil a exploração de métodos de resolução deste tipo de equações diferenciais. Dadas as restrições de fórmulas explícitas para soluções analíticas, ou mesmo a não existência de tais fórmulas, uma alternativa que tem sido considerada das mais eficientes é a utilização de métodos numéricos. Por sua vez, dos métodos numéricos utilizados destaca-se, por sua eficiência em diversos aspectos, os Métodos dos Elementos Finitos.

O objetivo desta dissertação é descrever, analisar e implementar um Método dos Elementos Finitos Misto, isto é, método em que se calcula simultaneamente aproximações de duas ou mais grandezas interrelacionadas, inerentes a certo sistema físico. Citamos, por exemplo, os problemas descritos por equações diferenciais parciais elípticas nos quais, mais do que a grandeza representada pela incógnita da equação, há interesse em conhecer explicitamente uma ou mais grandezas físicas diretamente associadas à primeira por uma relação matemática, que pode ser do tipo diferencial. Apresentamos no capítulo I alguns conceitos

matemáticos que aparecem no decorrer deste trabalho, bem como um problema modelo. Associados a este problema modelo destacamos as formulações primais, duais e primais-duais (de acordo com a terminologia adotada em [6]), sendo esta última de especial importância uma vez que o método misto se baseia nesta formulação. No capítulo II mostramos como são construídos os subespaços associados à formulação primal-dual do problema modelo apresentando alguns exemplos e a análise do erro das aproximações. No capítulo III descrevemos e analisamos uma técnica de implementação que se baseia no uso de multiplicadores de Lagrange para impor a continuidade entre os elementos. No capítulo IV implementamos o método misto de acordo com a técnica descrita no capítulo anterior e o aplicamos num problema de eletromagnetismo. Finalmente no capítulo V tecemos nossos comentários e conclusões sobre a aplicação da citada técnica de implementação dos Métodos dos Elementos Finitos, bem como outras técnicas apresentadas na literatura especializada.

## CAPÍTULO I

### CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### 1.0. INTRODUÇÃO

Apresentamos alguns conceitos matemáticos que são usados nesta dissertação.

Seja  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  e  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

Dado um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  com uma fronteira  $\Gamma$  Lipschitz contínua, o espaço  $\mathcal{D}(\Omega)$  consiste de todas as funções infinitamente diferenciáveis  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com suporte compacto. Para cada inteiro  $m \geq 0$ , o espaço de Sobolev  $H^m(\Omega)$  consiste daquelas funções  $v \in L^2(\Omega)$  para as quais todas as derivadas  $\partial^\alpha$  no sentido de distribuição (vide [11]), com  $|\alpha| \leq m$ , pertencem ao espaço  $L^2(\Omega)$ . Em outras palavras, para cada  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq m$ , existe uma função  $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)$  satisfazendo

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial^\alpha v \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \partial^\alpha \phi \, dx.$$

O espaço  $H^m(\Omega)$  munido da norma

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

é um espaço de Hilbert.

Também faremos uso da semi-norma

$$|v|_{m,\Omega} = \left[ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (1.2)$$

Para  $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in (H^m(\Omega))^n$ , consideremos a norma

$$\|\underline{q}\|_{m,\Omega} = \left[ \sum_{i=1}^n \|q_i\|_{m,\Omega}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

e a semi-norma

$$|\underline{q}|_{m,\Omega} = \left[ \sum_{i=1}^n |q_i|_{m,\Omega}^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (1.4)$$

O espaço  $H^1_0(\Omega)$  é caracterizado (vide [1]) como segue:

$$H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \text{ em } \Gamma\} . \quad (1.5)$$

Além disso,

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{v|_{\Gamma} ; v \in H^1(\Omega)\} . \quad (1.6)$$

### 1.1. PROBLEMA MODELO - FORMULAÇÕES PRIMAS E DUAIS

Salvo menção em contrário, todo estudo feito nessa dissertação refere-se ao problema modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

onde  $f$  é uma função de  $L^2(\Omega)$ .

O problema primal consiste em encontrar uma função  $u \in V = H_0^1(\Omega)$  tal que

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$$

com

(1.8)

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$$

ou equivalentemente tal que

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.9)$$

Embora o problema modelo (1.7) represente vários fenômenos físicos, como por exemplo a distribuição de temperatura numa barra

e o problema da membrana elástica, denominaremos a solução  $u$  do problema primal (1.8) de "deslocamento" e as componentes de  $\underline{v}$  de "tensões". Para a determinação das "tensões" através de um problema de minimização, introduzimos o espaço

$$H(\text{div}; \Omega) = \{ \underline{q} \in (L^2(\Omega))^n ; \text{div } \underline{q} \in L^2(\Omega) \} , \quad (1.10)$$

que é um espaço de Hilbert quando munido da norma

$$\| \underline{q} \|_{H(\text{div}; \Omega)} = [ \| \underline{q} \|_{0, \Omega}^2 + \| \text{div } \underline{q} \|_{0, \Omega}^2 ]^{\frac{1}{2}} . \quad (1.11)$$

Para  $f \in L^2(\Omega)$ , definimos o hiperplano afim

$$\underline{V}(f) = \{ \underline{q} \in H(\text{div}; \Omega) ; \text{div } \underline{q} + f = 0 \text{ em } \Omega \} . \quad (1.12)$$

Usando a  $\underline{V}(0)$ -eliticidade da forma bilinear

$$(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow \int_{\Omega} \underline{p} \cdot \underline{q} \, dx , \quad (1.13)$$

prova-se que existe uma única função  $\underline{p} \in \underline{V}(f)$  tal que

$$I(\underline{p}) = \inf_{\underline{q} \in \underline{V}(f)} I(\underline{q})$$

com

$$I(\underline{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \| \underline{q} \|^2 \, dx \quad (1.14)$$

ou equivalentemente tal que

$$\forall \underline{q} \in \underline{V}(0) , \int_{\Omega} \underline{p} \cdot \underline{q} \, dx = 0 . \quad (1.15)$$

Mostra-se [6] que  $\underline{p} = \nabla u$  onde  $u$  é solução do problema primal (1.8). Logo construímos um problema dual adequado. O funcional  $I(\underline{q})$  é denominado "funcional energia complementar" e o método dual, método de equilíbrio.

Dizemos que o "princípio da energia complementar" consiste em encontrar  $\underline{p} = \nabla u$  que minimiza o funcional  $I(\underline{q})$  sobre o hiperplano afim (1.12).

O uso do princípio da energia complementar para construção de discretizações elementos finitos de problemas elíticos foi introduzido por Fraeijis de Veubeke (vide [9]).

O método de equilíbrio consiste na construção inicial de uma subvariedade de dimensão finita  $\underline{V}_h(f) \in \underline{V}(f)$  e em encontrar  $\underline{p}_h \in \underline{V}_h(f)$  que minimiza o funcional energia complementar  $I(\underline{q})$  sobre  $\underline{V}_h(f)$ .

Para problemas elíticos de segunda ordem, a análise numérica do método de equilíbrio foi feita por J. M. Thomas (vide [24], [25]).

## 1.2. FORMULAÇÃO PRIMAL-DUAL

O método de equilíbrio consiste inicialmente na construção de uma subvariedade de dimensão finita  $\underline{V}_h(f) \subset \underline{V}(f)$ . Entretanto, a construção de  $\underline{V}_h(f)$  não é um problema simples uma vez que isto requer a busca de soluções explícitas da equação de equilíbrio

$$\operatorname{div} \underline{q} + f = 0 \quad (1.16)$$

em todo o domínio  $\Omega$ .

Para contornar esta dificuldade pode-se usar um princípio variacional mais geral que é conhecido na teoria da elasticidade como "princípio de Hellinger-Reissner", no qual a restrição (1.16) é removida com a introdução de um multiplicador de Lagrange. A seguir analisamos um método dos elementos finitos baseado neste princípio variacional.

Inicialmente queremos encontrar um espaço  $M$  de multiplicadores de Lagrange e uma função Lagrangiana  $\mathcal{L} : H(\operatorname{div}; \Omega) \times M \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que a incógnita  $\underline{p}$  seja obtida como o primeiro argumento do ponto sela  $(\underline{p}, \lambda)$  da Lagrangiana sobre o espaço  $H(\operatorname{div}; \Omega) \times M$ .

Analisando a definição de  $\underline{V}(f)$  (1.12), temos que  $\underline{V}(f)$  está associado ao espaço das funções  $\underline{q} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$  para as quais

$$\int_{\Omega} \mu (\operatorname{div} \underline{q} + f) dx = 0 \quad , \quad \forall \mu \in L^2(\Omega) \quad . \quad (1.17)$$

Definindo  $M = L^2(\Omega)$  e

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \mu) = I(\underline{q}) + \int_{\Omega} \mu (\operatorname{div} \underline{q} + f) dx \quad , \quad (1.18)$$

enunciamos o teorema:

TEOREMA (vide [19]). Seja  $f \in L^2(\Omega)$ .

Então o par  $(\underline{p}, \lambda)$  é o único ponto sela do funcional  $\mathcal{L}(\underline{q}, \mu)$  sobre o espaço  $H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ , isto é,  $(\underline{p}, \lambda)$  satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{q} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \quad , \quad \forall \mu \in L^2(\Omega) \\ \mathcal{L}(\underline{p}, \mu) \leq \mathcal{L}(\underline{p}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\underline{q}, \lambda) \end{array} \right. \quad (1.19)$$

$$\text{Além disso temos que } \underline{p} = \nabla u \text{ e } \lambda = u \quad (1.20)$$

onde  $u$  é a solução do problema modelo (1.7).

Logo  $u$  é o multiplicador de Lagrange associado à restrição (1.16) e o princípio enunciado acima é denominado "princípio Hellinger-Reissner" em elasticidade.

Como  $(\underline{p}, u) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$  é um ponto estacionário da Lagrangiana  $\mathcal{L}(\underline{q}, \mu)$ , verifica-se que  $(\underline{p}, u)$  pode ser caracterizado

como solução das seguintes equações:

$$\forall \underline{q} \in H(\text{div}; \Omega) , \quad \int_{\Omega} \underline{p} \cdot \underline{q} \, dx + \int_{\Omega} u \, \text{div} \, \underline{q} \, dx = 0 , \quad (1.21)$$

$$\forall \mu \in L^2(\Omega) , \quad \int_{\Omega} \mu (\text{div} \, \underline{p} + f) \, dx = 0 . \quad (1.22)$$

Observa-se que as equações variacionais acima expressam as condições necessária e suficiente para que as derivadas parciais da função Lagrangiana se anulem no ponto sela. Além disto, chamamos esta formulação de "primal-dual" e o correspondente problema variacional de "problema primal-dual". As idéias subjacentes às considerações acima encontram-se na Teoria de Dualidade. Para uma análise mais detalhada desta teoria citamos [8] e para aplicação da teoria da dualidade em problemas de elasticidade, verificar [10], [26] e [16].

### 1.3. MÉTODO MISTO

Podemos definir um método misto baseado na formulação primal-dual do problema modelo como segue:

Dados os espaços de dimensão finita  $W_h \subset H(\text{div}; \Omega)$  e  $M_h \subset L^2(\Omega)$ , encontrar um par  $(\underline{p}_h, u_h) \in W_h \times M_h$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{q}_h \in W_h, \quad \int_{\Omega} \underline{p}_h \underline{q}_h dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \underline{q}_h dx = 0 \\ \forall \mu_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} \mu_h (\operatorname{div} \underline{p}_h + f) dx = 0. \end{array} \right. \quad (1.23)$$

O problema (1.23) não possui, de modo geral, uma única solução. Para enunciarmos um teorema de existência e unicidade para o problema discretizado (1.23) definimos:

i) Condição de compatibilidade entre os espaços  $W_h$  e  $M_h$

$$\text{Se } \underline{q}_h \in W_h \text{ e } \forall \mu_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} \mu_h \operatorname{div} \underline{q}_h dx = 0$$

$$\text{então } \operatorname{div} \underline{q}_h = 0 \quad (1.24)$$

ii) Condição de Brezzi

Existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\forall \mu_h \in M_h, \quad \sup_{\underline{q}_h \in W_h} \frac{\int_{\Omega} \mu_h \operatorname{div} \underline{q}_h dx}{\|\underline{q}_h\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}} \geq \alpha \|\mu_h\|_{0, \Omega} \quad (1.25)$$

Enunciamos o teorema:

TEOREMA (vide [19]). Se as condições (1.24) e (1.25) se verificam então o problema discretizado (1.23) tem uma única solução  $(\underline{p}_h, u_h) \in W_h \times M_h$  e existe uma constante  $C = C(\alpha) > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|\underline{p} - \underline{p}_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} + \|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq C \left[ \inf_{\underline{q}_h \in W_h} \|\underline{p} - \underline{q}_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} + \right. \\ \left. + \inf_{v_h \in M_h} \|u - v_h\|_{0, \Omega} \right]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

A próxima etapa consiste na construção dos espaços  $W_h$  e  $M_h$  que satisfaçam as condições (1.24)-(1.25) e possuam boas propriedades de aproximação. É o que faremos no próximo capítulo.

## CAPÍTULO II

### CONSTRUÇÃO DOS ESPAÇOS ELEMENTOS FINITOS

Sejam  $\bar{\Omega}$  um polígono limitado do  $\mathbb{R}^2$  e  $\tau_h$  uma triangularização (vide [6]) de  $\bar{\Omega}$  composta de triângulos  $K$  cujos diâmetros (vide [6]) são menores ou iguais a  $h$ . Consideremos inicialmente a construção  $W_h \subset H(\text{div}; \Omega)$ .

Dado um triângulo  $K \in \tau_h$ , denotamos por  $\underline{n}_K$  o vetor normal exterior ao longo da fronteira  $\partial K$  de  $K$ . Seja  $\underline{v} \in (L^2(\Omega))^2$  uma função suficientemente suave em cada triângulo  $K \in \tau_h$ . Consideremos a fórmula de Green:

$$\forall \omega \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} [\underline{v} \omega \cdot \underline{q} + \omega \text{div } \underline{q}] dx = \int_{\Gamma} \omega \underline{q} \cdot \underline{n} d\gamma \quad (2.1)$$

onde a integral  $\int_{\Gamma}$  denota o par de dualidade entre os espaços  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  (vide [6]) e  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  (vide (1.6)).

Usando a fórmula de Green (2.1) em cada  $K \in \tau_h$ , prova-se que  $\underline{v} \in H(\text{div}; \Omega)$  se e somente se é válida a seguinte relação de reciprocidade para um par  $(K_1, K_2)$  de triângulos adjacentes:

$$\underline{v}|_{K_1} \cdot \underline{n}_{K_1} + \underline{v}|_{K_2} \cdot \underline{n}_{K_2} = 0 \quad \text{em } K' = K_1 \cap K_2 ,$$

onde  $\underline{v}|_{K_i}$  denota a restrição de  $\underline{v}$  a  $K_i$ ,  $i=1,2$ . (2.2)

Portanto, suponhamos que os elementos de  $W_h$  são suficientemente suaves em cada  $K \in \tau_h$  e além disso satisfaçam a relação de reciprocidade (2.2).

Para cada triângulo  $K \in \tau_h$  construiremos um espaço  $W_K$  de funções vetoriais  $\underline{v}$  suficientemente suaves tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \operatorname{div} \underline{v} \text{ é um polinômio de grau } \leq k ; \\ \text{(ii) a restrição de } \underline{v} \cdot \underline{n}_K \text{ em cada aresta de } K \text{ é um po} \\ \text{linômio de grau menor ou igual a } k. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

A construção do espaço  $W_K$  pode ser feita em duas etapas. Na primeira etapa introduz-se o espaço  $\hat{W}$  associado ao triângulo padrão  $\hat{K}$  no plano  $(\xi, \eta)$  cujos vértices são  $\hat{a}_1 = (1,0)$ ,  $\hat{a}_2 = (0,1)$  e  $\hat{a}_3 = (0,0)$ , e  $\underline{n}_{\hat{K}} = \hat{\underline{n}}$ . Consideremos os exemplos (vide [19]).

EXEMPLO 1. Seja  $k \geq 0$  um inteiro par. Definimos  $\hat{W}$  como sendo o espaço das funções  $\hat{\underline{v}}$  satisfazendo

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = \text{pol}_k(\xi, \eta) + \alpha_0 \xi^{k+1} + \alpha_1 \xi^k \eta + \dots + \alpha_{k/2} \xi^{k/2+1} \eta^{k/2} \\ \hat{v}_2 = \text{pol}_k(\xi, \eta) + \beta_0 \eta^{k+1} + \beta_1 \eta^k \xi + \dots + \beta_{k/2} \eta^{k/2+1} \xi^{k/2} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{com } \sum_{i=0}^{k/2} (-1)^i (\alpha_i - \beta_i) = 0. \quad (2.5)$$

Na expressão (2.4),  $\text{pol}_k(\xi, \eta)$  denota um polinômio de grau  $k$  nas variáveis  $\xi, \eta$ .

EXEMPLO 2. Seja  $k \geq 1$  um inteiro ímpar. Definimos  $\hat{W}$  como o espaço das funções  $\hat{v}$  satisfazendo

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = \text{pol}_k(\xi, \eta) + \alpha_0 \xi^{k+1} + \alpha_1 \xi^k \eta + \dots + \alpha_{(k+1)/2} \xi^{(k+1)/2} \eta^{(k+1)/2} \\ \hat{v}_2 = \text{pol}_k(\xi, \eta) + \beta_0 \eta^{k+1} + \beta_1 \eta^k \xi + \dots + \beta_{(k+1)/2} \eta^{(k+1)/2} \xi^{(k+1)/2} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{com } \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} (-1)^i \beta_i = 0. \quad (2.7)$$

Os exemplos apresentados acima satisfazem as condições i) e ii) de (2.3).

Os graus de liberdade de uma função  $\hat{v} \in \hat{W}$  podem ser

Os graus de liberdade de  $\hat{\underline{v}}$  são os valores de  $\hat{\underline{v}} \cdot \hat{\underline{\eta}}$  em dois pontos distintos de cada lado de  $\hat{K}$  e o momento de ordem zero de  $\hat{\underline{v}}$  (vide (2.8)).

Na segunda etapa considera-se um triângulo  $K$  no plano  $(x_1, x_2)$  cujos vértices são denotados por  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Logo existe uma única aplicação afim inversível

$$F: \hat{x} = (\xi, \eta) \rightarrow x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b, \quad B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \quad b \in \mathbb{R}^2, \quad (2.11)$$

tal que  $a_i = F(\hat{a}_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Seja  $J$  o determinante Jacobiano de  $F$ . A uma função escalar  $\hat{\varphi}$  definida em  $\hat{K}$  associamos a função  $\varphi$  definida em  $K$  por

$$\varphi = \hat{\varphi} \circ F^{-1} \quad (\hat{\varphi} = \varphi \circ F). \quad (2.12)$$

Por outro lado, a cada função vetorial  $\hat{\underline{v}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ , definida em  $\hat{K}$ , associamos a função  $\underline{v}$  definida em  $K$  por

$$\underline{v} = \left(\frac{1}{J} B\hat{\underline{v}}\right) \circ F^{-1} \quad (\hat{\underline{v}} = (JB^{-1}\underline{v}) \circ F). \quad (2.13)$$

A escolha da transformação contravariante (2.13) está baseada no seguinte resultado:

LEMA (vide [19]). Para qualquer função vetorial  $\hat{\underline{v}}$  (por exemplo

$\hat{\underline{v}} \in (H^1(\hat{K}))^2$  temos:

$$\forall \hat{\varphi} \in L^2(\hat{K}) \quad , \quad \int_{\hat{K}} \hat{\varphi} \operatorname{div} \hat{\underline{v}} \, d\hat{x} = \int_K \varphi \operatorname{div} \underline{v} \, dx \quad ,$$

$$\forall \hat{\varphi} \in L^2(\partial\hat{K}) \quad , \quad \int_{\partial\hat{K}} \hat{\varphi} \hat{\underline{v}} \cdot \hat{\underline{n}} \, d\hat{s} = \int_{\partial K} \varphi \underline{v} \cdot \underline{n}_K \, ds \quad .$$

Assim a transformação (2.13) preserva num certo sentido o divergente e a componente normal de funções vetoriais. Portanto, ao triângulo  $K$  associamos o espaço

$$W_K = \{ \underline{v} \in H(\operatorname{div}; K) \quad ; \quad \hat{\underline{v}} \in \hat{W} \} . \quad (2.14)$$

Pelo lema acima, o espaço  $W_K$  satisfaz (2.3).

Finalmente definimos

$$W_h = \{ \underline{v}_h \in H(\operatorname{div}; \Omega) \quad ; \quad \forall K \in \tau_h \quad , \quad \underline{v}_h|_K \in W_K \} . \quad (2.15)$$

Como foi observado anteriormente, uma função  $\underline{v}_h \in W_h$  deve satisfazer a relação de reciprocidade (2.2). Portanto, os graus de liberdade de uma função  $\underline{v}_h \in W_h$  são determinados por:

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) os valores de } \underline{v}_h \cdot \underline{n}_K \text{ em } (k+1) \text{ pontos distintos de ca-} \\ \text{da aresta dos elementos de } \tau_h ; \\ \text{b) os momentos de ordem } \leq (k-1) \text{ de } \underline{v}_h \text{ sobre cada } K \in \tau_h. \end{array} \right.$$

Construído o subespaço  $W_h$ , resta construir  $M_h \in L^2(\Omega)$ . Como para cada  $\underline{v}_h \in W_h$  e cada  $K \in \tau_h$ ,  $\text{div } \underline{v}_h|_K$  é um polinômio de grau  $\leq k$ , uma escolha natural para o espaço  $M_h$  é

$$M_h = \{u_h \in L^2(\Omega) ; \forall K \in \tau_h, u_h|_K \in P_k\}, \quad (2.16)$$

onde  $P_k$  denota o espaço dos polinômios de grau  $\leq k$  nas variáveis  $x_1$  e  $x_2$ . Ressaltamos que uma função  $u_h \in M_h$  não satisfaz qualquer restrição de continuidade nas fronteiras comuns dos elementos de  $\tau_h$ .

Os espaços  $W_h \subset H(\text{div}; \Omega)$  e  $M_h \subset L^2(\Omega)$  apresentados neste capítulo são denominados espaços Raviart-Thomas, uma vez que tais espaços foram descritos inicialmente em [19].

Mostra-se que os espaços  $W_h$  e  $M_h$  verificam a condição (1.24). Para mostrar que os espaços  $W_h$  e  $M_h$  verificam a condição de Brezzi (1.25), vide [19]: Lema 4, Lema 5 e Teorema 4.

Enunciamos o principal resultado sobre o erro na aproximação pelo método misto:

TEOREMA (vide [18]). Consideremos os espaços  $W_h$  e  $M_h$  definidos em (2.15) e (2.16) respectivamente.

Suponhamos que existe um ângulo  $\theta_0$  independente do parâmetro  $h$  tal que

$$\theta_K \geq \theta_0, \quad K \in \tau_h, \quad (2.17)$$

onde  $\theta_K$  é o menor ângulo do triângulo  $K$ .

Além disso, suponhamos que a solução  $u$  do problema modelo (1.7) é suficientemente suave ( $u \in H^{k+2}(\Omega)$  com  $\Delta u \in H^{k+1}(\Omega)$ ). Então o problema aproximado (1.23) tem uma única solução  $(p_h, u_h) \in W_h \times M_h$  e existe uma constante  $C > 0$  independente de  $h$  tal que

$$\|p - p_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} + \|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq Ch^{k+1}. \quad (2.18)$$

No próximo capítulo apresentaremos e analisaremos uma técnica de implementação de um método misto que se baseia no uso de multiplicadores de Lagrange para impor a continuidade entre os elementos.

### CAPÍTULO III

#### DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UMA TÉCNICA DE IMPLEMENTAÇÃO

Na discretização de problemas elípticos pelo método misto (1.23) obtemos um sistema da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} A\sigma + Bu = f_1 \\ B^T \sigma = f_2 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde  $\sigma$  é o campo de "tensões" e  $u$  o "deslocamento" nos termos da Elasticidade. A escolha de um método numérico para resolver (3.1) é restrita ao fato que frequentemente o sistema (3.1) é indefinido. Entretanto, para alguns métodos mistos amplamente usados este problema é contornado por uma técnica de implementação pela qual obtemos um sistema positivo definido (vide [9]). Esta técnica consiste em eliminar restrições na continuidade dos espaços elementos finitos e introduzir multiplicadores de Lagrange definidos nas arestas interiores dos elementos. Denotando por  $\bar{\lambda}$  os multiplicadores de Lagrange, o sistema resultante apresentará a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} \bar{\sigma} + \tilde{B} \bar{u} + C \bar{\lambda} = f_1 \\ \tilde{B}^T \bar{\sigma} = f_2 \\ C^T \bar{\sigma} = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

A vantagem do sistema (3.2) é que a matriz correspondente ao operador  $\tilde{A}$  é diagonal por blocos e portanto facilmente invertível a nível de cada elemento. Logo, da primeira equação de (3.2), temos

$$\bar{\sigma} = \tilde{A}^{-1} (f_1 - \tilde{B} \bar{u} - C \bar{\lambda}) \quad (3.3)$$

que aproxima o campo de tensões em função das outras variáveis. Substituindo-se (3.3) na segunda e terceira equações de (3.2), obtemos o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \bar{u} + \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} C \bar{\lambda} = \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} f_1 - f_2 \\ C^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \bar{u} + C^T \tilde{A}^{-1} C \bar{\lambda} = C^T \tilde{A}^{-1} f_1 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

que é um sistema linear simétrico e positivo definido. Portanto, podemos resolver (3.4) e recuperar o campo de tensões de (3.3) simplesmente através de um "post-process" elemento a elemento.

Consideremos o problema modelo (1.7).

Para introduzir multiplicadores de Lagrange nas arestas interiores dos elementos de uma triangularização  $\tau_h$  de  $\Omega$ , com esta triangularização apresentando as mesmas características descritas no capítulo anterior, utilizaremos as seguintes notações:

Sejam  $k \geq 0$  inteiro,  $n \geq 1$  e  $S \subset \mathbb{R}^2$

$P_k(S)$  : espaço dos polinômios de grau  $\leq k$  em  $S$ ,

$$\underline{P}_k(S) = P_k(S) \times P_k(S) ,$$

$$RT^k(S) = \{ \underline{f} \mid \underline{f}(x) = \underline{p}(x) + xq(x), \underline{p} \in \underline{P}_k(S), q \in P_k(S) \},$$

$$RT_{-1}^k(\tau_h) = \{ \underline{t} \mid \underline{t} \in (L^2(\Omega))^2, \underline{t}|_K \in RT^k(K), K \in \tau_h \} ,$$

$$M_{-1}^k(\tau_h) = \{ v \mid v \in L^2(\Omega), v|_K \in P_k(K), K \in \tau_h \} = M_h ,$$

$$RT_0^k(\tau_h) = \left\{ \underline{t} \mid \underline{t} \in RT_{-1}^k(\tau_h), \text{ a componente normal de } \underline{t} \text{ é } \right. \\ \left. \text{contínua ao longo das fronteiras comuns} \right\}$$

Logo,

$$RT_0^k(\tau_h) = RT_{-1}^k \cap H(\text{div}; \Omega) = W_h \quad (\text{vide 2.15}).$$

Sejam  $C_h$  os lados dos triângulos de  $\tau_h$ ,  $C_h^\partial = \{e \in C_h \mid e \subset \partial\Omega\}$  e  $C_h^o = C_h - C_h^\partial$ , isto é,  $C_h^o$  é o conjunto das arestas interiores dos elementos de  $\tau_h$ .

Para  $K \in \tau_h$ ,  $e \in C_h$ , denotamos por  $h_K$  e  $h_e$  os respectivos diâmetros (vide [6]).

Seja  $\underline{n}_K$  o vetor normal unitário exterior a  $K$  e  $\underline{n}_e$  um dos vetores unitários normais a  $e$ .

O espaço dos multiplicadores de Lagrange que usaremos é denotado por  $M_{-1}^k(C_h^0)$  e é formado pelas funções definidas em  $C_h$  que são polinômios de grau  $\leq k$  em cada  $e \in C_h^0$  e que se anulam em  $C_h^\partial$ .

Mostra-se (vide [1]) que  $\underline{r} \in RT^k(K)$  então  $\underline{r} \cdot \underline{n}_e \in P_k(e)$ .

Enunciamos o seguinte resultado:

LEMA. (vide [1]). Se  $\underline{r} \in RT_{-1}^k(\tau_h)$ , então  $\underline{r} \in RT_0^k(\tau_h)$  se e somente se

$$\sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \underline{r} \cdot \underline{n}_K \, \mu de = 0, \quad \forall \mu \in M_{-1}^k(C_h^0). \quad (3.5)$$

O Lema acima quer dizer que podemos caracterizar o espaço  $RT_0^k(\tau_h)$  como sendo o espaço das funções  $\underline{r} \in RT_{-1}^k(\tau_h)$  satisfazendo (3.5). Portanto, temos a seguinte formulação para o método misto (vide [1]):

$$\text{Encontrar } (\underline{\sigma}_h, \underline{u}_h, \lambda_h) \in RT_{-1}^k(\tau_h) \times M_{-1}^k(\tau_h) \times M_{-1}^k(C_h^0)$$

tal que

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \int_{\Omega} \bar{\sigma}_h \cdot \tau \, dx - \sum_K \left\{ \int_K \bar{u}_h \operatorname{div} \tau \, dx - \int_{\partial K} \lambda_h \tau \cdot \eta_K \, de \right\} = 0, \quad \forall \tau \in RT_{-1}^k(\tau_h); \\
(b) \quad & \sum_K \int_K v \operatorname{div} \bar{\sigma}_h \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in M_{-1}^k(\tau_h); \\
(c) \quad & \sum_K \int_{\partial K} \mu \bar{\sigma}_h \cdot \eta_K \, de = 0, \quad \forall \mu \in M_{-1}^k(C_h^0). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

TEOREMA (vide [1]). O problema (3.6) tem uma única solução  $(\bar{\sigma}_h, \bar{u}_h, \lambda_h)$ , com  $\bar{\sigma}_h = \sigma_h$  e  $\bar{u}_h = u_h$ , sendo  $(\sigma_h, u_h)$  a única solução de (1.23).

Observa-se que o problema (3.6) apresenta a forma (3.2), sendo a matriz  $\tilde{A}$ , correspondente a

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma}_h \cdot \tau \, dx,$$

diagonal por blocos.

Verifica-se que a matriz do sistema (3.4) é simétrica e além disso temos o seguinte resultado:

TEOREMA. A matriz do sistema (3.4) é positiva definida.

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $[u \ \lambda]^T \in \mathbb{R}^{m+n}$  um vetor não nulo tal que  $m$  é o número de elementos de  $\tau_h$  e  $n$  é o número de arestas interiores de  $\tau_h$ . Temos:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B} & \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} C \\ C^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B} & C^T \tilde{A}^{-1} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B}u + \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} C\lambda \\ C^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B}u + C^T \tilde{A}^{-1} C\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$= \langle \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B}u, u \rangle + \langle \tilde{B}^T \tilde{A}^{-1} C\lambda, u \rangle + \langle C^T \tilde{A}^{-1} \tilde{B}u, \lambda \rangle + \langle C^T \tilde{A}^{-1} C\lambda, \lambda \rangle =$$

$$= \langle \tilde{A}^{-1} \tilde{B}u, \tilde{B}u \rangle + \langle \tilde{A}^{-1} C\lambda, \tilde{B}u \rangle + \langle \tilde{A}^{-1} \tilde{B}u, C\lambda \rangle + \langle \tilde{A}^{-1} C\lambda, C\lambda \rangle =$$

$$= \langle \tilde{A}^{-1/2} \tilde{B}u, \tilde{A}^{-1/2} \tilde{B}u \rangle + 2 \langle \tilde{A}^{-1/2} C\lambda, \tilde{A}^{-1/2} \tilde{B}u \rangle + \langle \tilde{A}^{-1/2} C\lambda, \tilde{A}^{-1/2} C\lambda \rangle =$$

$$= \langle \tilde{A}^{-1/2} \tilde{B}u + \tilde{A}^{-1/2} C\lambda, \tilde{A}^{-1/2} \tilde{B}u + \tilde{A}^{-1/2} C\lambda \rangle > 0.$$

Se  $\tilde{B}u + C\lambda = 0$  segue que, tomando funções  $\tau$  convenientes na primeira equação de (3.6),  $u = 0$  e  $\lambda = 0$ , o que é um absurdo. Logo  $\tilde{B}u + C\lambda \neq 0$ .

Portanto a matriz do sistema (3.4) é positiva definida.

c.q.d.

Convém observar que na demonstração do teorema acima levamos em consideração os seguintes fatos: como a matriz  $\tilde{A}$  é positiva definida e simétrica, então sua inversa  $\tilde{A}^{-1}$  também é positiva definida e simétrica; mostra-se que existe uma única matriz  $B$  positiva definida e simétrica tal que  $\tilde{B}^2 = \tilde{A}^{-1}$  e neste caso, dizemos que  $\tilde{B}$  é a "raiz quadrada" de  $\tilde{A}^{-1}$  denotada por  $\tilde{B} = \tilde{A}^{-1/2}$ .

## CAPÍTULO IV

### IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO NUM PROBLEMA DE ELETROMAGNETISMO

#### 4.1. DESCRIÇÃO DE UM PROBLEMA DE ELETROMAGNETISMO

Consideremos o seguinte problema (vide [4]):

Dado um condutor retangular cujos lados medem  $2a$  e  $2b$ , respectivamente, com centro na origem do plano  $(x,y)$ , como é visto na figura 1, o potencial  $A$  em todos os pontos da região  $\Omega$  determinada pelo retângulo, satisfaz a equação de Poisson

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu\mu_0 J \quad \text{em } \Omega \\ A = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.1)$$

sendo  $J$  a densidade uniforme de corrente e  $\mu\mu_0$  a permeabilidade. Além disso, suponhamos que a permeabilidade do condutor é muito maior que a permeabilidade do meio adjacente.

Dadas as dificuldades de encontrar soluções analíticas

usando série de Fourier, como é usual em problemas desta natureza, ou outras ferramentas matemáticas, uma alternativa é a utilização de métodos numéricos no cálculo de soluções aproximadas. Dentre estes, destacamos o método dos elementos finitos. Ressaltamos, dentre as vantagens deste método, a flexibilidade na geometria do condutor e também sua utilização quando condições de contorno são do tipo Dirichlet (como em (4.1)), Neumann e mistas. Nesta linha empregamos a formulação primal associada a (4.1).

Entretanto, a determinação do campo magnético  $\underline{H}$  é frequentemente mais importante que o potencial  $A$  para efeito de aplicações práticas. Como o campo magnético  $\underline{H}$  está relacionado com o potencial  $A$  pela relação

$$\underline{H} = - \underline{\nabla} A \quad (4.2)$$

a aplicação do método misto nos parece recomendável e, de acordo com a argumentação dos capítulos anteriores, esta técnica apresenta algumas vantagens. Detalhamos a seguir a implementação de um método misto no cálculo de soluções aproximadas para (4.1) e (4.2).

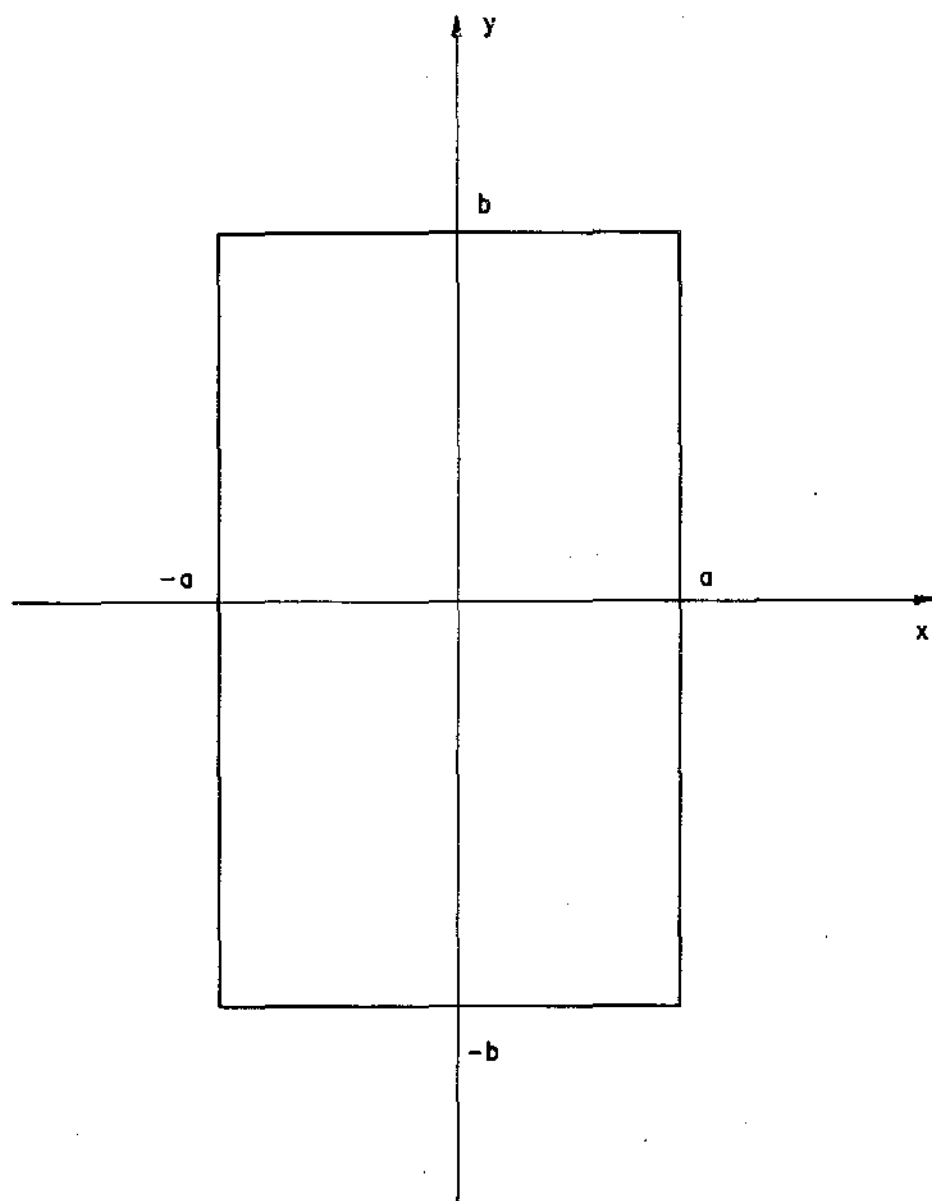


FIGURA 1

Suponhamos, por simplicidade, que o condutor ocupa a região  $\Omega' = [0,1] \times [0,1]$  como é visto na figura 2.

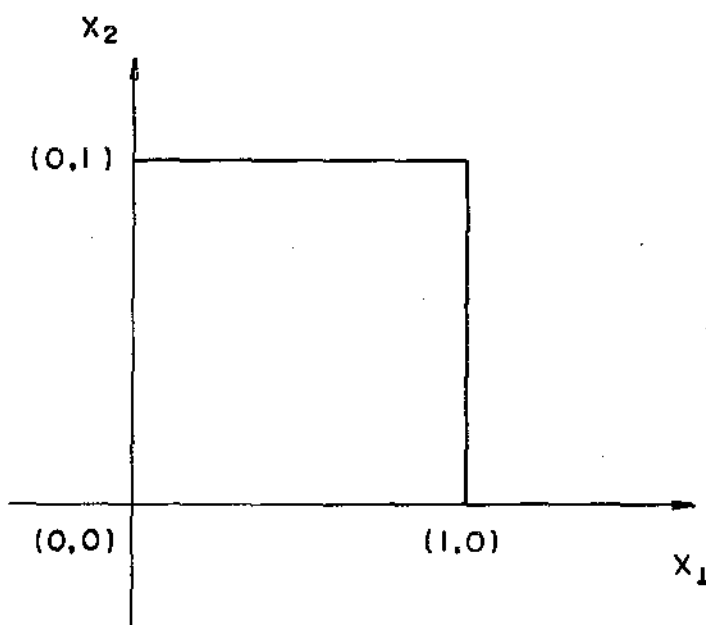


FIGURA 2

De acordo com a formulação (3.6), o sistema a ser resolvido apresenta a forma (3.2). Podemos então considerar a resolução do sistema (3.4). Para isso, na seção "Estrutura do programa elementos finitos", descrevemos como são obtidas as matrizes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $C$

e como é montado o sistema (3.4). Em seguida, conhecida a solução de (3.4), mostramos como recuperar (3.3).

#### 4.2. ESTRUTURA DO PROGRAMA ELEMENTOS FINITOS MISTOS

Para o programa que apresentamos nesta dissertação adotamos uma estrutura modular, ou seja, as principais operações do método misto são efetuados em subrotinas separadamente. A figura 3 mostra a organização do programa e a ordem de execução das subrotinas. A ordem de chamada das subrotinas é controlada por um programa principal sendo que a função de cada uma delas é descrita no fim desta seção.

Na construção do programa elementos finitos destacamos:

(i) Alguns usuários estarão interessados na utilização do programa como um "pacote", não lhes interessando as diversas etapas da aplicação do método misto. Neste caso a estrutura de entrada e saída de dados constituem elemento importante no processo. Na nossa implementação os dados de entrada são inseridos num arquivo específico e utilizados à medida que o programa principal é executado.

Na bibliografia especializada observamos que em algumas implementações a entrada de dados se dá por uma subrotina específica. Quanto aos dados de saída, estes são armazenados num determinado arquivo à medida que as subrotinas são executadas.

(ii) Como na segunda equação de (3.6) aparece a expressão

$$\int_{\Omega} f v dx \quad ,$$

devemos levar em consideração a eficiência de algoritmos utilizados em integração numérica.

(iii) Deve-se considerar a esparsidade das matrizes que aparecem na implementação do método misto pois isto acarretará numa economia de memória e tempo de processamento.

(iv) O tempo dispendido na solução do sistema de equações (3.4) representa uma grande parcela do tempo total de processamento. Logo, a escolha de um método adequado para a solução de sistemas lineares é de grande importância para a eficiência do programa.

#### RELAÇÃO DAS VARIÁVEIS E DIMENSÕES.

|                  |                                                    |
|------------------|----------------------------------------------------|
| NELEM            | número de elementos                                |
| KELEM            | 4X número de elementos                             |
| LELEM            | número de arestas interiores                       |
| MELEM            | número de elementos + número de arestas interiores |
| AM(NELEM, 4, 4)  | Matriz do operador $\tilde{A}$                     |
| BM(NELEM, 4, 1)  | Matriz do operador $\tilde{B}$                     |
| CM(KELEM, LELEM) | Matriz do operador $C$                             |

|                     |                                                                                 |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| FM (MELEM)          | Vetor força .                                                                   |
| AIN (NELEM, 4, 4)   | Matriz do operador $\tilde{A}^{-1}$ .                                           |
| SIST (MELEM, MELEM) | Matriz do sistema (3.4).                                                        |
| XDISP (MELEM)       | Vetor solução do sistema (3.4).                                                 |
| RECOV (NELEM, 4, 1) | Matriz solução de (3.3).                                                        |
| CC (3), DD (3)      | Coordenadas cartesianas dos vértices de um elemento.                            |
| ID (NELEM, 3)       | Matriz que relaciona as coordenadas locais e globais das arestas dos elementos. |
| IFPRE (MELEM)       | Vetor que assinala quando uma variável do sistema (3.4) é prescrita ou não.     |
| FIXED (NELEM)       | Vetor que armazena o valor de uma variável prescrita dos sistema (3.4).         |
| KL, JL              | Variáveis associadas aos elementos da triangularização.                         |

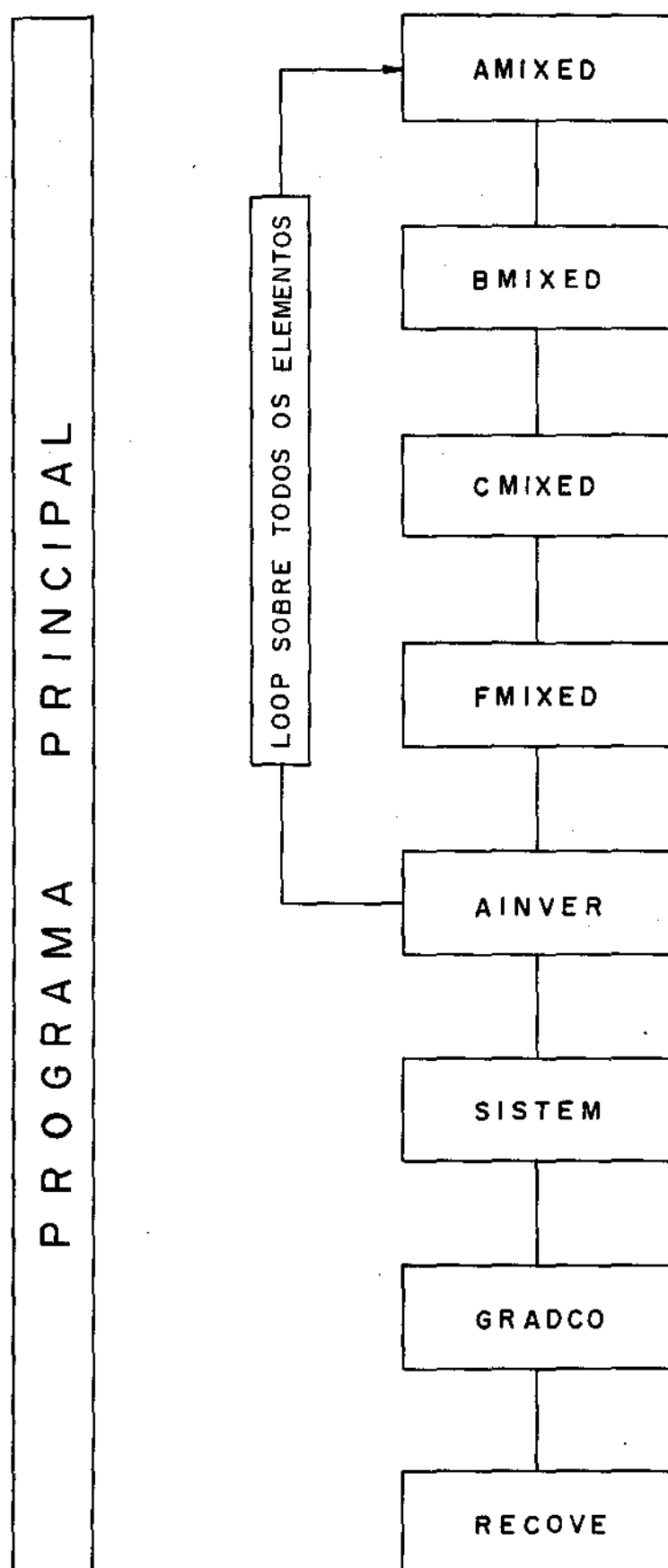


FIGURA 3

ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA

## DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS

### Subrotina AMIXED

Constrói a matriz  $AM(NELEM,4,4)$  que é diagonal por blocos e está associada ao operador  $\tilde{A}$  (vide (3.2) e (3.6)a).

Parâmetros: AM, CC, DD, KL, NELEM.

### Subrotina BMIXED

Constrói a matriz  $BM(NELEM,4,1)$  que está associada ao operador  $\tilde{B}$  (vide (3.2) e (3.6)a).

Parâmetros: BM, CC, DD, KL, NELEM.

### Subrotina CMIXED

Constrói a matriz  $CM(KELEM,LELEM)$  que é uma matriz esparsa apresentando uma determinada estrutura de banda e está associada ao operador C (vide (3.2) e (3.6)a).

Parâmetros: CM, CC, DD, ID, NELEM, LELEM, KELEM, JL, ML.

### Subrotina FMIXED

Constrói o vetor  $FM(NELEM)$  que representa o carregamento das forças nos elementos (vide (3.6)b).

Parâmetros: FM, CC, DD, KL, NELEM.

### Subrotina AINVER

Inverte cada bloco da matriz AM, determinando a matriz AIN(NELEM,4,4) que está associada ao operador  $\tilde{A}^{-1}$ .

Parâmetros: AM, AIN, KL, NELEM.

### Subrotina SISTEM

Constrói a matriz SIST(MELEM,MELEM) associada ao sistema (3.4).

Parâmetros: AIN, BM, CM, SIST, NELEM, LELEM, KELEM, MELEM.

### Subrotina GRADCO

Visto que a matriz SIST é simétrica, positiva definida e esparsa utilizamos o Método dos Gradientes Conjugados (vide [13],[15]) para obtenção da solução XM(MELEM) do sistema (3.4).

Parâmetros: SIST, FM, XM, IFPRE.

### Subrotina RECOVE

Recupera o "campo de tensões" (3.3) construindo a matriz RECOV(NELEM,4,1).

Parâmetros: AIN, BM, CM, XM.

### EXEMPLO:

Para ilustrar como o programa elementos finitos mistos pode ser aplicado para resolver o problema (4.1), suponhamos que

o domínio  $\Omega' = [0,1] \times [0,1]$  seja triangularizado como na figura 4. Em seguida, estabelecemos uma numeração para os elementos (triângulos na figura 4); assim, 6 refere-se ao elemento nº 6 de acordo com a numeração. Feito isso, consideramos uma numeração para as arestas interiores, isto é, aquelas arestas que não estão na fronteira. Por exemplo, o número 6 refere-se à aresta interior nº 6. Logo, para a triangularização da figura 4,

$$\text{NELEM} = 18$$

$$\text{LELEM} = 21 .$$

Os dados de entrada são inseridos num arquivo específico (FOR20.DAT) e a ordem de entrada dos mesmos é controlada pelo programa principal (MASTER).

Os vértices dos elementos são percorridos no sentido anti-horário e suas coordenadas cartesianas denotadas por  $\text{CC}(J)$  e  $\text{DD}(J)$  com  $J = 1,2,3$ . Para o elemento 6, temos:

|                             |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|
| $\text{CC}(1) = 0.33333333$ | $\text{DD}(1) = 1.0$          |
| $\text{CC}(2) = 0.0$        | $\text{DD}(2) = 1.0$          |
| $\text{CC}(3) = 0.0$        | $\text{DD}(3) = 0.66666666 .$ |

O vetor  $\text{ID}(\text{NELEM},3)$ , que relaciona as coordenadas locais e globais das arestas dos elementos, deve ser tal que as arestas

são numerados localmente no sentido anti-horário e às arestas da da fronteira é atribuído o valor 0 (zero). Assim,

|             |             |              |
|-------------|-------------|--------------|
| ID(3,1) = 2 | ID(3,2) = 7 | ID(3,3) = 3  |
| ID(4,1) = 4 | ID(4,2) = 0 | ID(4,3) = 3. |

O vetor IFPRE assume os valores 0 ou 1, sendo que os elementos possuindo pelo menos uma aresta na fronteira do domínio são prescritos e seus valores armazenados em FIXED, como é mostrado abaixo:

|              |                  |
|--------------|------------------|
| IFPRE(2) = 1 | FIXED(2) = 0.0   |
| IFPRE(3) = 0 | FIXED(3) = 0.0 . |

Apresentamos listagens dos arquivos FOR20.DAT (dados de entrada) e FOR21.DAT (dados de saída) para o exemplo que estamos considerando.

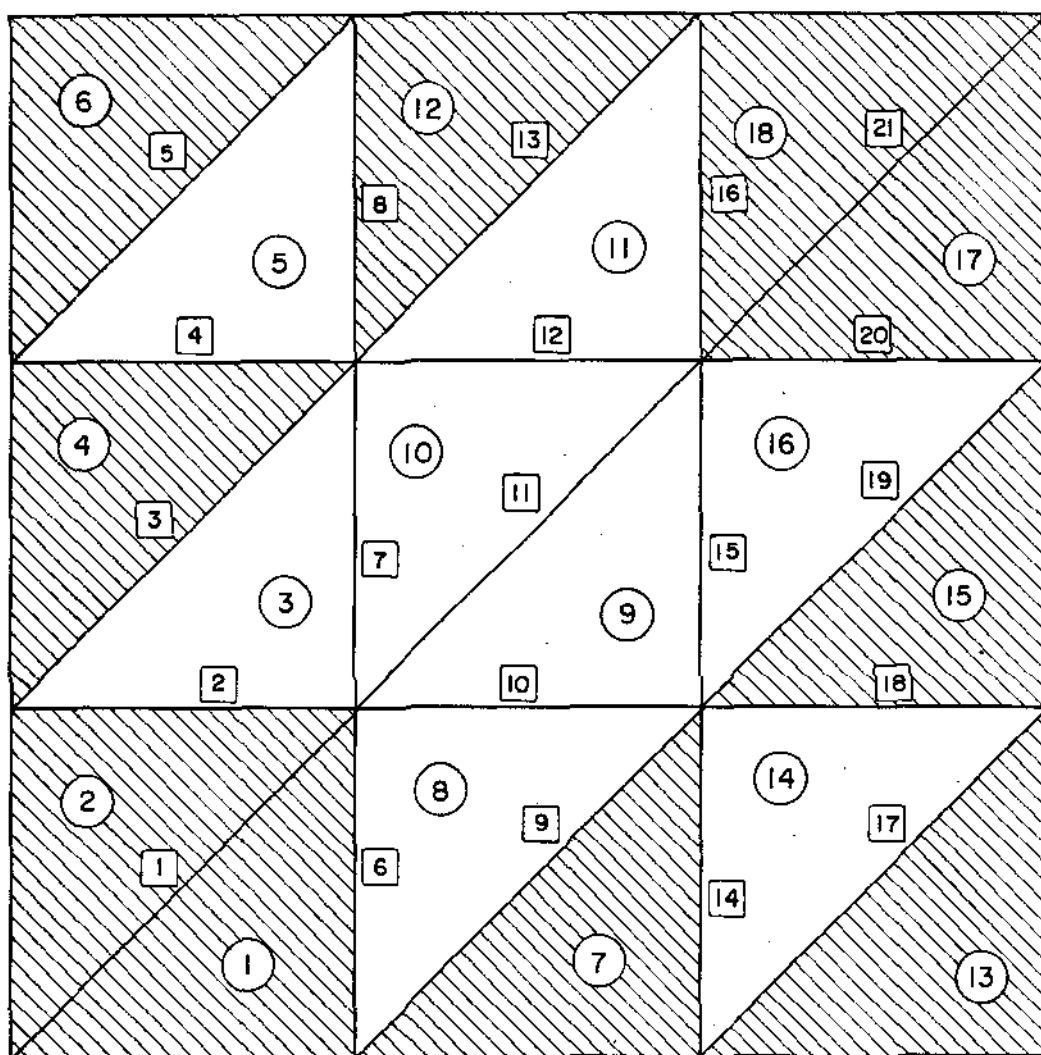


FIGURA 4

TY FOR20.DAT

0.0,0.0,0.3333333,0.0,0.3333333,0.3333333  
 0,6,1  
 0.3333333,0.3333333,0.0,0.3333333,0.0,0.0  
 2,0,1  
 0.0,0.3333333,0.3333333,0.3333333,0.3333333,0.6666666  
 2,7,3  
 0.3333333,0.6666666,0.0,0.6666666,0.0,0.3333333  
 4,0,3  
 0.0,0.6666666,0.3333333,0.6666666,0.3333333,1.0  
 4,8,5  
 0.3333333,1.0,0.0,1.0,0.0,0.6666666  
 0,0,5  
 0.3333333,0.0,0.6666666,0.0,0.6666666,0.3333333  
 0,14,9  
 0.6666666,0.3333333,0.3333333,0.3333333,0.3333333,0.0  
 10,6,9  
 0.3333333,0.3333333,0.6666666,0.3333333,0.6666666,0.6666666  
 10,15,11  
 0.6666666,0.6666666,0.3333333,0.6666666,0.3333333,0.3333333  
 12,7,11  
 0.3333333,0.6666666,0.6666666,0.6666666,0.6666666,1.0  
 12,16,13  
 0.6666666,1.0,0.3333333,1.0,0.3333333,0.6666666  
 0,8,13  
 0.6666666,0.0,1.0,0.0,1.0,0.3333333  
 0,0,17  
 1.0,0.3333333,0.6666666,0.3333333,0.6666666,0.0  
 18,14,17  
 0.6666666,0.3333333,1.0,0.3333333,1.0,0.6666666  
 18,0,19  
 1.0,0.6666666,0.6666666,0.6666666,0.6666666,0.3333333  
 20,15,19  
 0.6666666,0.6666666,1.0,0.6666666,1.0,1.0  
 20,0,21  
 1.0,1.0,0.6666666,1.0,0.6666666,0.6666666  
 0,16,21  
 1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,1  
 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0

TY FOR21.DAT

## ELEMENTO SOLUCAO DO PROBLEMA

|    |               |
|----|---------------|
| 1  | 0.0000000E+00 |
| 2  | 0.0000000E+00 |
| 3  | 0.2514854E-01 |
| 4  | 0.0000000E+00 |
| 5  | 0.2057610E-01 |
| 6  | 0.0000000E+00 |
| 7  | 0.0000000E+00 |
| 8  | 0.2514860E-01 |
| 9  | 0.2972078E-01 |
| 10 | 0.2972080E-01 |
| 11 | 0.2514833E-01 |
| 12 | 0.0000000E+00 |
| 13 | 0.0000000E+00 |
| 14 | 0.2057609E-01 |
| 15 | 0.0000000E+00 |
| 16 | 0.2514833E-01 |
| 17 | 0.0000000E+00 |
| 18 | 0.0000000E+00 |

ELEMENTO 1

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

ELEMENTO 2

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

ELEMENTO 3

-0.9053498 -1.810700 4.074073 4.074074

ELEMENTO 4

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

41

ELEMENTO 5

-0.7407402 -2.592592 3.333335 3.333332

ELEMENTO 6

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

ELEMENTO 7

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

ELEMENTO 8

-1.810700 -0.9053495 4.074076 4.074072

ELEMENTO 9

-2.674896 -2.139918 4.814814 4.814816

ELEMENTO 10

-2.139918 -2.674898 4.814815 4.814815

ELEMENTO 11

-2.263376 -3.168724 4.074077 4.074072

ELEMENTO 12

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

ELEMENTO 13

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

ELEMENTO 14

-2.592592 -0.7407401 3.333333 3.333334

ELEMENTO 15

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

42

ELEMENTO 16

-3.168724 -2.263375 4.074072 4.074077

ELEMENTO 17

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

ELEMENTO 18

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

Seja  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  e consideremos uma triangularização do domínio formada por 50 elementos. Dada a simetria do problema (4.1), obtivemos alguns resultados que estão descritos abaixo e na figura 5, utilizando o "Programa elementos finitos mistos" apresentado neste capítulo.

#### Equipotenciais

- 1) 0.6143000 E-2
- 2) 0.5355000 E-2
- 3) 0.4492750 E-2
- 4) 0.3912500 E-2
- 5) 0.2617500 E-2
- 6) 0.8197350 E-3

Convém ressaltar que nos resultados obtidos acima para o problema (4.1), todos os valores numéricos devem ser multiplicados por  $\mu \mu_0 J$  que é um dado do problema.

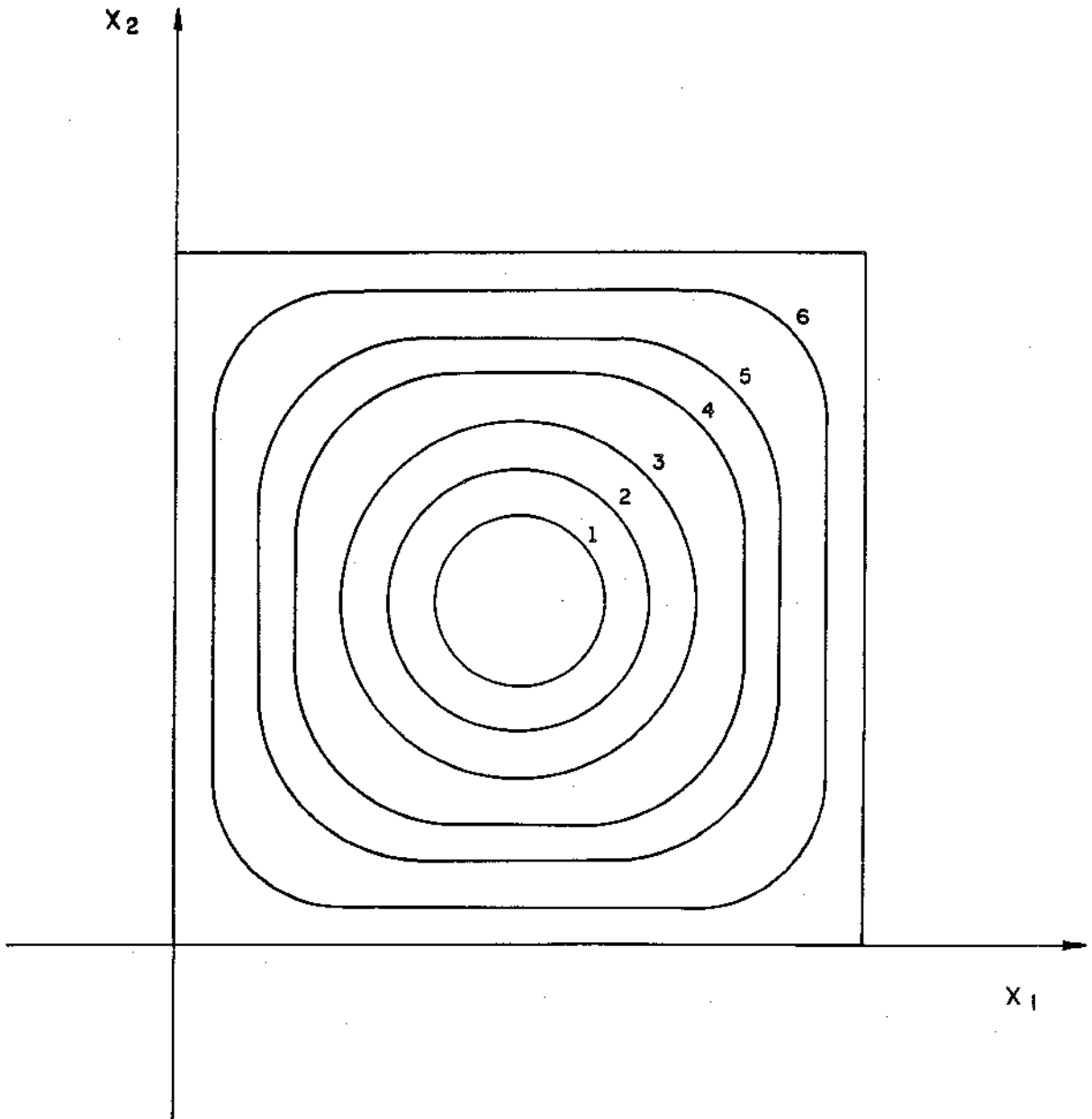


FIGURA 5

### 4.3. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS MISTOS A PROBLEMAS NÃO LINEARES

Na seção 4.1 apresentamos um problema elítico de 2ª ordem linear. De modo geral, o problema (4.1) aparece sob a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (4.3)$$

onde  $A$  satisfaz determinadas condições de fronteira e  $v$  é uma função denominada "relutividade". Analisando mais detalhadamente a função "relutividade"  $v$ , duas situações podem ocorrer:

- (i) Sendo  $v = v(x,y)$ , isto é,  $v$  é uma função da posição, temos um problema linear cuja formulação variacional é do tipo da formulação mista descrita em [1]. Nesta situação se enquadram alguns modelos de problemas em eletromagnetismo, de acordo com a literatura especializada;
- (ii) Para  $v = v(x,y,A)$ , temos um problema não linear. Para aplicarmos o método misto, devemos considerar uma formulação mista apropriada que leve em consideração a não linearidade do problema. Na literatura especializada encontram-se vários problemas de eletromagnetismo que se enquadram nesta situação (vide, por exemplo, [5] e [22]). Além dos problemas em

eletromagnetismo, os métodos mistos tem sido aplicados na solução numérica de inúmeros problemas não lineares, (vide [6] : equações de von Karmann, planos elastoplásticos, problemas não lineares do tipo monótono, dentre outros, bem como Zago (vide [28])). Dado o crescente emprego dos métodos mistos para solução numérica de problemas deste tipo, justifica-se um estudo mais aprofundado destes métodos, tanto sob o ponto de vista matemático como sob o aspecto computacio - nal.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Tem sido demonstrado em aplicações práticas, que uma maneira eficiente para resolver numericamente problemas de valor de contorno, em equações diferenciais parciais, consiste na aplicação do método dos elementos finitos. Para problemas elíticos, tal método baseia-se num princípio variacional conhecido na teoria da elasticidade como princípio da energia potencial. Nesta abordagem temos os métodos de deslocamento que são a base para a obtenção de resultados numéricos em problemas de engenharia.

Outros princípios variacionais têm sido usados, nos últimos anos, na construção de soluções aproximadas pelo método dos elementos finitos, para problemas de valor de contorno elíticos. Citamos, por exemplo, os métodos de equilíbrio que estão associados ao princípio da energia complementar e os métodos mistos, que estão relacionados com o princípio de Hellinger-Reissner. Os métodos mistos têm demonstrado uma precisão superior aos métodos de deslocamento quando aplicados a uma triangularização semelhante. Entretanto, estes métodos apresentam problemas de mal condicionamento devido a termos nulos na diagonal da matriz do sistema (3.1); outra desvantagem do método misto é o elevado custo computacional, dado o crescente número de variáveis necessárias à

determinação de soluções aproximadas.

De fato, na avaliação da memória utilizada na solução do problema (4.1) usando o método misto e a técnica descrita no capítulo III (justificada matematicamente por D. N. Arnold e F. Brezzi [1]), obtemos os seguintes resultados:

| Número de elementos (N) | Método de deslocamento | Método misto | Técnica do capítulo III |
|-------------------------|------------------------|--------------|-------------------------|
| 18                      | 22,666N                | 162,666N     | 379,366N                |
| 32                      | 27,000N                | 157,560N     | 389,750N                |
| 50                      | 32,880N                | 154,560N     | 395,980N                |
| 128                     | 54,500N                | 151,000N     | 397,625N                |
| 200                     | 79,320N                | 147,090N     | 376,760N                |

Observando os dados acima, podemos considerar um comportamento linear da memória usada no método misto e na técnica descrita no capítulo III, com relação ao número de elementos da triangularização do domínio. Assim, sendo  $M$  a memória,  $N$  o número de elementos e ajustando os dados da tabela por quadrados mínimos, temos:

i) Técnica descrita no capítulo III

$$M = 379,031N + 623,977$$

## ii) Método Misto

$$M = 154,081N + 384,248$$

Os dados descritos acima estão representados graficamente na figura 6.

Numa análise destes dados podemos concluir que o custo diferencial (diferença de memória entre a técnica descrita no capítulo III e o método misto) se amplia quando aumentamos o número de elementos. Podemos então sugerir algumas alternativas:

1. Sendo a matriz do sistema (3.1) associado ao método misto não singular é recomendável usar os espaços de Raviart-Thomas sem a necessidade da técnica do capítulo III. O método misto se justificaria pelo ganho na precisão dos resultados com relação ao método de deslocamento. A melhoria na precisão tem sido verificada em problemas práticos conforme Zienkiewicz, Vilotte e Toyoshima [27].
2. Para sistemas indeterminados existem outras técnicas de implementação que contornam esta dificuldade e apresentam custos (em termos de memória) inferior inclusive ao método misto. Por exemplo, o método iterativo global apresentado por Zienkiewicz, Vilotte e Toyoshima [27]) tem custo equivalente ao método de deslocamento (tradicional método dos elemento finitos). Convém

observar que embora vários exemplos tenham sido apresentados, não é de nosso conhecimento uma justificativa matemática da convergência desta técnica [27].

3. Finalmente quando os multiplicadores de Lagrange introduzidos na técnica do capítulo III apresentarem significado físico relevante, justifica-se a sua utilização apesar do elevado custo de memória relativamente às outras técnicas. De fato, desta maneira calculamos  $\sigma$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  (vide (3.3) e (3.4)), onde os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  admitem freqüentemente uma interpretação física, como por exemplo, um campo de deslocamento (vide [9]).

Seria importante uma comparação do tempo de execução dos programas associados aos métodos em estudo. Entretanto, como o sistema DEC-10 trabalha em tempo compartilhado, não é possível tal comparação.

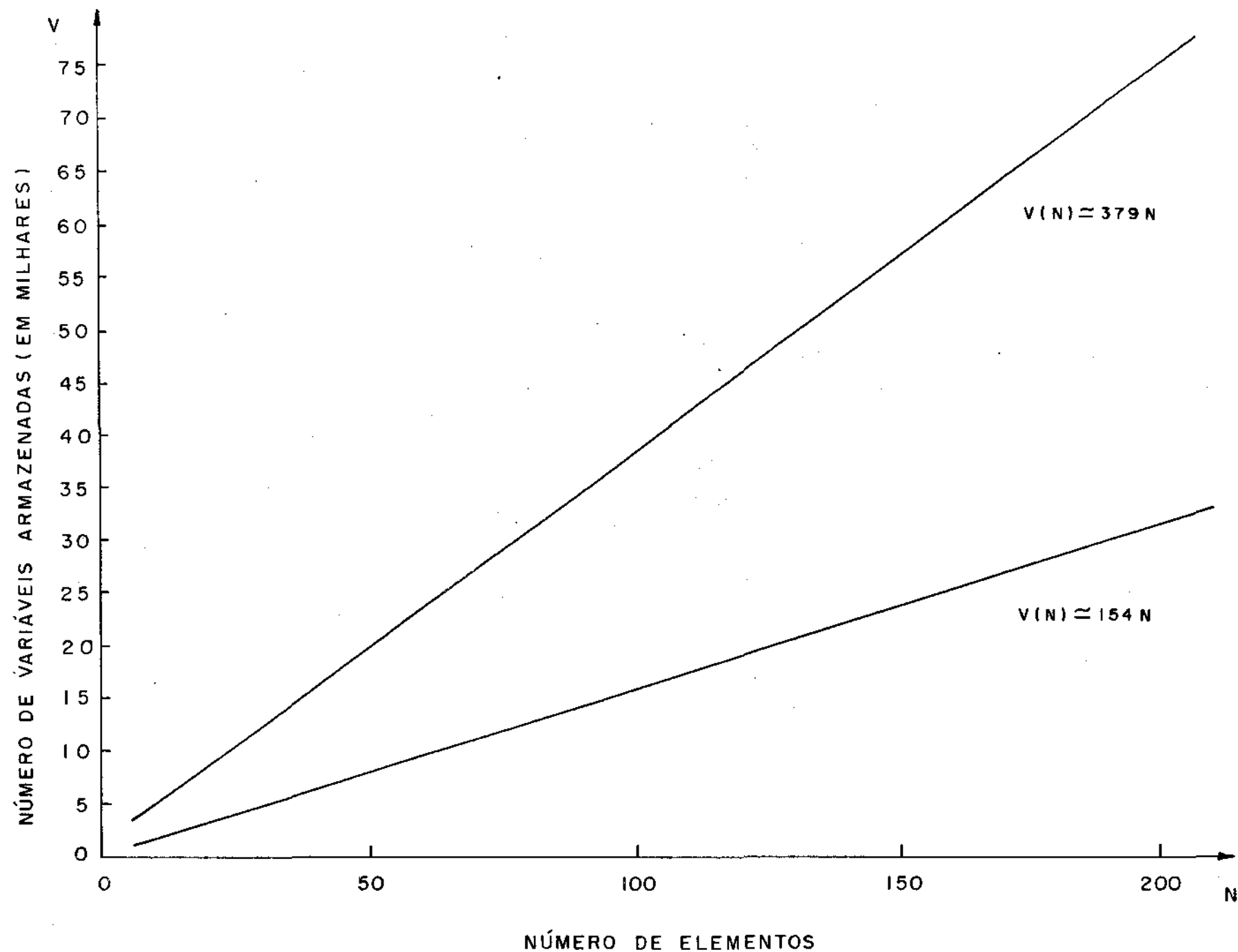


FIGURA 6

## APÊNDICE

Apresentamos a listagem de um programa em FORTRAN IV que implementa um método misto aplicado ao problema (4.1), possuindo a estrutura (vide figura 3) descrita no capítulo IV, nas próximas páginas.



DIMENSION AM(18,4,4),CC(3),DO(3)

DIMENSION AM(18,4,1)

DOUBLE PRECISION

DIMENSION CM(72,21)

DIMENSION IP(18,4,4)

DIMENSION IPREV(39),FIXED(39),XVIDP(39)

DIMENSION RECOV(17,4,1)

INTEGER IP(18,3)

DIMENSION IPREV(39,39)

NELEMA=18

KELMA=72

DOLEMA=21

ALLEMA=39

2. RANDOM MATRICES AM(NELMA,4,4), A(FIXED,4,1), CM(KELMA,DOLEMA),  
IP(NELMA).

DO 30 I=1,NELEMA

FM(I)=0.0

DO 20 J=1,4

AM(I,J,1)=0.0

DO 10 K=1,4

AM(I,J,K)=0.0

CONTINUE

CONTINUE

CONTINUE

DO 50 I=1,KELMA

DO 40 J=1,DOLEMA

CM(I,J)=0.0

CONTINUE

CONTINUE

JL=1

DO 100 KL=1,NELEMA

READ(20,90) CC(1),DO(1),TC(2),DO(2),CC(3),DO(3)

FORALL(IG)

CALL CHIAO(CM,CC,DO,KL,NELEMA)

CALL CHIAO(FM,CC,DO,KL,NELEMA)

READ(20,70) IP(KL,1),IP(KL,2),IP(KL,3)

FORALL(IG)

CALL CHIAO(CM,CC,DO,IP,NELEMA,NELEMA,KELMA,JL,KL)

JL=JL+4

CALL CHIAO(FM,CC,DO,IP,NELEMA)

CALL CHIAO(CM,CC,DO,KL,NELEMA)

CONTINUE

CALL S\_RICH(AFM,FM,CM,S-ST,NELMA,DOLEMA,NELEMA,KELMA)

READ(20,100) (IPREV(I),I=1,NELEMA)

FORALL(IG)

READ(20,110) (FIXED(I),I=1,NELEMA)

FORALL(IG)

DO 170 J=NELEMA+1,NELEMA

IPREV(J)=0

FIXED(J)=0.0

FM(J)=0.0

CONTINUE

CALL CHIAO(CM,CC,DO,IP,NELEMA,IPREV)

CALL RECOV(17,CM,DO,IP,RECOV,XVIDP,NELEMA,KELMA,DOLEMA)

STOP

END

```

SUBROUTINE APIXED(AN,CC,DD,KL,NELC4)
DIMENSION A4(4,4), CC(3), DD(3)

```

```

A MATRIZ A1(4,4) É FORMADA POR BLOCOS 4x4 NA
DIAGONAL PRINCIPAL

```

```

DET=ABS((CC(3)-CC(2))*(DD(1)-DD(2))+(DD(3)-DD(2))*(CC(1)-CC(2)))
AREA=(LOG((CC(2)-CC(1))*(DD(3)-DD(2))))/2.
A=CC(3)-CC(2)
B=CC(1)-CC(2)
E=CC(2)
C=DD(3)-DD(2)
D=DD(1)-DD(2)
F=DD(2)
A1(KL,1,1)=AREA
A1(KL,1,2)=0.0
A1(KL,1,3)=EXP((D/2.+E)+(A-B-E)/2.+(-A+B/2.)/3.)
A1(KL,1,4)=0.0
A1(KL,2,1)=A1(KL,1,2)
A1(KL,2,2)=AREA
A1(KL,2,3)=0.0
A1(KL,2,4)=EXP((D/2.+F)+(C-D-F)/2.+(-C+D/2.)/3.)
A1(KL,3,1)=A1(KL,1,3)
A1(KL,3,2)=A1(KL,2,3)
A1(KL,3,3)=(-(3+E)-(F*B)/3.+4*B)/1.+(4*A+B,3+2*C*B-2*B*B+B+1)/3.
A1(KL,3,4)=A1(KL,3,3)+(-(D+B)+A+B+2*A*B-2*B*B-B*B)/2.
A1(KL,4,1)=A1(KL,1,4)
A1(KL,4,2)=A1(KL,2,4)
A1(KL,4,3)=A1(KL,3,3)
A1(KL,4,4)=EXP(A1(KL,3,3))
A1(KL,3,4)=A1(KL,4,3)
A1(KL,4,1)=0.0
A1(KL,4,2)=A1(KL,1,2)
A1(KL,4,3)=A1(KL,2,3)
A1(KL,4,4)=(-(C*C)-(D+B)/3.+C*B)/2.+(C*C+B+B-2*C*B-2*C*B+B+D)/3.
A1(KL,4,4)=A1(KL,4,4)+(-(D+B)+C+B+2*A*B-2*B*B-B*B)/2.
A1(KL,4,4)=A1(KL,4,4)+(-(B*B)/3.+D*B+B*B)
A1(KL,4,4)=EXP(A1(KL,4,4))
RETURN
END

```



UNICAMP

SUBROUTINE BAIXA(B4,CC,DD,AL,NELC4)

DIMENSION B4(NELC4,4,1),CC(3),DD(3)

\* MATRIZ B4(NELC4,4,1) E FORMADA POR BLOCOS 4X1.

AKL4=(ABS(CC(2)-CC(1))\*(DD(3)-DD(2)))/2.

B4(AL,1,1)=0.0

B4(AL,2,1)=0.0

B4(AL,3,1)=-(AKL4)

B4(AL,4,1)=-(AKL4)

RETURN

END

SUBROUTINE CMIXED(CM,CC,DD,IO,HELEM,LELEM,KELEM,JL,KL)

10 DIMENSION CM(KELEM,LELEM),CC(3),DD(3)

INTEGER IP(KELEM,3)

0.10 IP=1,3

IF (IO(KE,3).EQ.0) GO TO 100

L=IO(KE,3)

IF (L.EQ.1) GO TO 10

IF (L.EQ.2) GO TO 20

IF (L.EQ.3) GO TO 30

VAR=0.0

VAR=(CC(2)-CC(1))\*(CC(2)-CC(1))+(DD(2)-DD(1))\*(DD(2)-DD(1))

VAR=SQRT(VAR)

A=(DD(2)-DD(1))/VAR

B=(CC(2)-CC(1))/VAR

CM(JL,L)=A\*(CC(2)-CC(1))

CM(JL+1,L)=B\*(CC(2)-CC(1))

CM(JL+2,L)=A\*(CC(2)-CC(1)+DD(2)-DD(1))/2.

CM(JL+3,L)=B\*(DD(2)-DD(1))

GO TO 100

VAR=0.0

VAR=(CC(3)-CC(2))\*(CC(3)-CC(2))+(DD(3)-DD(2))\*(DD(3)-DD(2))

VAR=SQRT(VAR)

A=(DD(3)-DD(2))/VAR

B=(CC(3)-CC(2))/VAR

CM(JL,L)=A\*(DD(3)-DD(2))

CM(JL+1,L)=B\*(DD(3)-DD(2))

CM(JL+2,L)=A\*(DD(3)-DD(2)+CC(3)-CC(2))/2.

CM(JL+3,L)=B\*(CC(3)-CC(2)+DD(3)-DD(2))/2.

GO TO 100

VAR=0.0

VAR=(CC(1)-CC(3))\*(CC(1)-CC(3))+(DD(1)-DD(3))\*(DD(1)-DD(3))

VAR=SQRT(VAR)

A=(DD(1)-DD(3))/VAR

B=(CC(1)-CC(3))/VAR

CM(JL,L)=A\*(CC(1)-CC(3))

CM(JL+1,L)=B\*(CC(1)-CC(3))

CM(JL+2,L)=A\*(CC(1)-CC(3)+DD(1)-DD(3))/2.

CM(JL+3,L)=B\*(DD(1)-DD(3)+CC(1)-CC(3))/2.

CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE FMIXED(FM,CC,DD,KL,NELM)

DIMENSION FM(NELM),CC(3),DD(3)

A=CC(3)-CC(2)

B=CC(1)-CC(2)

E=CC(2)

C=DD(3)-DD(2)

D=DD(1)-DD(2)

F=DD(2)

VAR=0.0

DET=ABS(A\*D-C\*B)

A+C= (A+B)/2.

FM(KL)= (-(B\*B)-(D\*D)/3.+C\*C)/2.+ (A\*A+B\*B-2\*A\*B-2\*A\*C+B\*D)/3.

FM(KL)=FM(KL)+(-(D\*D)+A\*A+2\*A\*B-2\*B\*D-C\*C)/2.+((D\*D)/3.+D\*C+B\*B)

FM(KL)=-2.0\*FM(KL)\*DET

VAR=FM(KL)

FM(KL)=(-(C\*C)-(D\*D)/3.+2\*D)/2.+ (C\*C+D\*D-2.\*C\*D-2.\*C\*B+D\*B)/3.

FM(KL)=FM(KL)+(-(D\*D)+C\*C+2.\*C\*B-2.\*D\*B-B\*B)/2.+((D\*D)/3.+D\*C+B\*B)

FM(KL)=FM(KL)\*DET\*(-2.0)

VAR=VAR+FM(KL)

FM(KL)=2.0\*DET\*((B/2.+E)+(2.-B-B)/2.+(-A+B/2.)/3.)

VAR=VAR+FM(KL)

FM(KL)=2.0\*DET\*((D/2.+F)+(C-D-F)/2.+(-C+D/2.)/3.)

VAR=VAR+FM(KL)

FM(KL)=VAR

FM(KL)=-FM(KL)

RETURN

END



```
SUBROUTINE AIRVER(AM,AIR,KL,NELAM)
  DIMENSION AM(NELAM,4,4)
  DIMENSION AIR(NELAM,4,4)
  DET1=(AM(1,1,1)+AM(1,2,2)+AM(1,3,3)+AM(1,4,4))
  DET1=DET1-(AM(KL,1,1)*AM(KL,2,2)+AM(KL,2,3)+AM(KL,3,3))
  DET1=DET1+(AM(KL,1,3)+AM(KL,1,3)+AM(KL,2,3)+AM(KL,2,4))
  DET1=DET1-(AM(KL,1,3)+AM(KL,1,3)+AM(KL,2,3)+AM(KL,4,4))
  AIR(KL,1,1)=(AM(KL,2,2)+AM(KL,3,3)+AM(KL,1,3))
  AIR(KL,1,1)=AIR(KL,1,1)-AM(KL,2,3)+AM(KL,2,3)+AM(KL,3,3))
  AIR(KL,1,1)=AIR(KL,1,1)/DET1
  AIR(KL,2,1)=0.0
  AIR(KL,1,2)=0.0
  AIR(KL,3,1)=(AM(KL,1,3)+AM(KL,2,4)+AM(KL,2,4))
  AIR(KL,3,1)=AIR(KL,3,1)-(AM(KL,1,3)+AM(KL,2,2)+AM(KL,3,3))
  AIR(KL,3,1)=AIR(KL,3,1)/DET1
  AIR(KL,1,3)=AIR(KL,3,1)
  AIR(KL,3,1)=0.0
  AIR(KL,1,3)=0.0
  AIR(KL,2,2)=(AM(KL,1,1)+AM(KL,3,3)+AM(KL,4,4))
  AIR(KL,2,2)=AIR(KL,2,2)-(AM(KL,1,3)+AM(KL,1,3)+AM(KL,4,4))
  AIR(KL,2,2)=AIR(KL,2,2)/DET1
  AIR(KL,3,2)=0.0
  AIR(KL,2,3)=0.0
  AIR(KL,4,2)=(AM(KL,1,3)+AM(KL,1,3)+AM(KL,2,3))
  AIR(KL,4,2)=AIR(KL,4,2)-(AM(KL,1,1)+AM(KL,2,4)+AM(KL,3,3))
  AIR(KL,4,2)=AIR(KL,4,2)/DET1
  AIR(KL,2,4)=AIR(KL,4,2)
  AIR(KL,3,3)=(AM(KL,1,1)+AM(KL,2,2)+AM(KL,4,4))
  AIR(KL,3,3)=AIR(KL,3,3)-(AM(KL,1,1)+AM(KL,2,4)+AM(KL,4,4))
  AIR(KL,3,3)=AIR(KL,3,3)/DET1
  AIR(KL,4,3)=0.0
  AIR(KL,3,4)=0.0
  AIR(KL,4,4)=(AM(KL,1,1)+AM(KL,2,2)+AM(KL,3,3))
  AIR(KL,4,4)=AIR(KL,4,4)-(AM(KL,2,2)+AM(KL,1,3)+AM(KL,1,3))
  AIR(KL,4,4)=AIR(KL,4,4)/DET1
  RETURN
END
```

```

SUBROUTINE SISTEM(AIN,BY,CM,SIST,NELEM,LELEM,MELEM,KELEM)
DIMENSION AIN(NELEM,4,4),BN(MELEM,4,1),C4(KELEM,LELEM)
DIMENSION SIST(NELEM,NELEM)
DIMENSION AUX(18,4,1),BNT(18,1,4),AUX1(18,1,4),AUX2(72,21)
IJL=1
DO 2 KL=1,NELEM

```

```

C
C
C  CONSTRUCAO DO PRIMEIRO BLOCO

```

```

DO 5 I=1,4
VAR=0.0
DO 3 J=1,4
VAR=VAR+AIN(KL,I,J)*BN(KJ,J,1)
CONTINUE
AUX(KL,I,1)=VAR
CONTINUE
VAR=0.0
DO 10 I=1,4
BN(KL,I,1)=BN(KL,I,1)
VAR=VAR+BN(KL,I,1)*AUX(KL,I,1)
CONTINUE
SIST(KL,KL)=VAR

```

```

C
C
C  CONSTRUCAO DO SEGUNDO BLOCO

```

```

DO 30 I=1,4
VAR=0.0
DO 20 J=1,4
VAR=VAR+BN(KL,I,J)*AIN(KL,J,I)
CONTINUE
AUX1(KL,I,1)=VAR
CONTINUE
DO 50 I=1,LELEM
VAR=0.0
VAR=VAR+AUX1(KL,I,1)*CM(IJL,I)
VAR=VAR+AUX1(KL,I,2)*CM(IJL+1,I)
VAR=VAR+AUX1(KL,I,3)*CM(IJL+2,I)
VAR=VAR+AUX1(KL,I,4)*CM(IJL+3,I)
SIST(KL,I+LEEM,KL)=VAR
SIST(I+NELEM,KL)=VAR
CONTINUE

```

```

C
C
C  CONSTRUCAO DO TERCEIRO BLOCO

```

```

DO 70 I=1,LELEM
VAR=0.0
VAR=VAR+AIN(KL,I,1)*CM(IJL,I)
VAR=VAR+AIN(KL,I,2)*CM(IJL+1,I)
VAR=VAR+AIN(KL,I,3)*CM(IJL+2,I)
VAR=VAR+AIN(KL,I,4)*CM(IJL+3,I)
AUX2(KL,I)=VAR
VAR=0.0
VAR=VAR+AIN(KL,2,1)*CM(IJL,I)
VAR=VAR+AIN(KL,2,2)*CM(IJL+1,I)
VAR=VAR+AIN(KL,2,3)*CM(IJL+2,I)
VAR=VAR+AIN(KL,2,4)*CM(IJL+3,I)
AUX2(KL+1,I)=VAR
VAR=0.0
VAR=VAR+AIN(KL,3,1)*CM(IJL,I)
VAR=VAR+AIN(KL,3,2)*CM(IJL+1,I)

```



```
VAR=VAR+AIN(KL,3,3)*CM(IJL+2,I)
VAR=VAR+AIN(KL,3,4)*CM(IJL+3,I)
AUX2(KL+2,I)=VAR
VAR=0.0
VAR=VAR+AIN(KL,4,1)*CM(IJL,I)
VAR=VAR+AIN(KL,4,2)*CM(IJL+1,I)
VAR=VAR+AIN(KL,4,3)*CM(IJL+2,I)
VAR=VAR+AIN(KL,4,4)*CM(IJL+3,I)
AUX2(KL+3,I)=VAR
CONTINUE
DO 590 I=1,LEDEM
DO 580 J=1,LEDEM
VAR=0.0
DO 575 K=1,REDEM
VAR=VAR+CF(K,I)*AUX2(K,J)
575 CONTINUE
SIST(1+REDEM,J+REDEM)=VAR
580 CONTINUE
590 CONTINUE
IJL=IJL+4
2 CONTINUE
RETURN
END
```



```
SUBROUTINE GRADCO(SIST,F,XDISP,IFPRE)
DIMENSION SIST(39,39),FM(39),XDISP(39)
DIMENSION F(29),FM(29),FM(29),IFPR.(39)
DIMENSION AM(29,29)
TOL=0.0001
JELM=29
MELM=39
```

ESTA SUBROTINA RESOLVE O SISTEMA AX=B PELA ALGORTMO DOS GRADIENTES CONJUGADOS.

REFERENCAS AS LINHAS E COLUNAS PRESCRITAS

```
KLI=0
DO 200 KL=1,MELM
IF(IFPRE(KL).EQ.1) GO TO 200
KLJ=0
KLI=KLI+1
FM(KLI)=FM(KL)
DO 100 J=1,MELM
IF(IFPRE(J).EQ.1) GO TO 100
KLJ=KLJ+1
AM(KLI,KLJ)=SIST(KL,J)
CONTINUE
CONTINUE
ESTAGIO INICIAL F=0
ENTRADA DO CHOICE INICIAL
```

```
DO 5 I=1,JELM
XDISP(I)=0.0
CONTINUE
K=0
DO 20 I=1,JELM
VAR=0.0
DO 10 J=1,JELM
VAR=VAR+AM(I,J)*XDISP(J)
CONTINUE
RM(I)=FM(I)-VAR
FM(I)=FM(I)
CONTINUE
TYPE 26,K
FORMAT(G)
K=1
```

PASSOS REQUERIDOS...

```
DO 40 I=1,JELM
VAR=0.0
DO 30 J=1,JELM
VAR=VAR+AM(I,J)*FM(J)
CONTINUE
RM(I)=VAR
CONTINUE
VAR1=0.0
VAR2=0.0
TYPE 27,K
FORMAT(G)
DO 50 I=1,JELM
VAR1=VAR1+(RM(I)**2)
```



VAR2=VAR2+(P4(I)\*UM(I))

CONTINUE

ALPHA=VAR1/VAR2

DO 60 I=1, JELM

ADISP(I)=ADISP(I)+(ALPHA\*PM(I))

KM(I)=PM(I)-(ALPHA\*UM(I))

60 CONTINUE

VAR4=0.0

DO 70 I=1, JELM

VAR4=VAR4+(KM(I)\*KM(I))

70 CONTINUE

BETA=VAR3/VAR4

DO 80 I=1, JELM

PM(I)=KM(I)+(BETA\*PM(I))

80 CONTINUE

DETERMINACAO DA TERCEIRA 2 DE PM(I) E b(I).

TESTE DE CONVERGENCIA

VAR4=0.0

VAR5=0.0

DO 90 I=1, JELM

VAR4=VAR4+(PM(I)\*PM(I))

VAR5=VAR5+(FM(I)\*FM(I))

90 CONTINUE

AN1=SQR(VAR4)

AN2=SQR(VAR5)

AN3=AN1/AN2

FIP= 92, AN3

92 FUR=PI(6)

K=K+1

IF(AN3-CT.TOL) GO TO 100

RETFJR

END

| Line | Code | Address | Value |
|------|------|---------|-------|
| 000  | 0000 | 0000    | 0000  |
| 001  | 0001 | 0001    | 0001  |
| 002  | 0002 | 0002    | 0002  |
| 003  | 0003 | 0003    | 0003  |
| 004  | 0004 | 0004    | 0004  |
| 005  | 0005 | 0005    | 0005  |
| 006  | 0006 | 0006    | 0006  |
| 007  | 0007 | 0007    | 0007  |
| 008  | 0008 | 0008    | 0008  |
| 009  | 0009 | 0009    | 0009  |
| 010  | 0010 | 0010    | 0010  |
| 011  | 0011 | 0011    | 0011  |
| 012  | 0012 | 0012    | 0012  |
| 013  | 0013 | 0013    | 0013  |
| 014  | 0014 | 0014    | 0014  |
| 015  | 0015 | 0015    | 0015  |
| 016  | 0016 | 0016    | 0016  |
| 017  | 0017 | 0017    | 0017  |
| 018  | 0018 | 0018    | 0018  |
| 019  | 0019 | 0019    | 0019  |
| 020  | 0020 | 0020    | 0020  |
| 021  | 0021 | 0021    | 0021  |
| 022  | 0022 | 0022    | 0022  |
| 023  | 0023 | 0023    | 0023  |
| 024  | 0024 | 0024    | 0024  |
| 025  | 0025 | 0025    | 0025  |
| 026  | 0026 | 0026    | 0026  |
| 027  | 0027 | 0027    | 0027  |
| 028  | 0028 | 0028    | 0028  |
| 029  | 0029 | 0029    | 0029  |
| 030  | 0030 | 0030    | 0030  |
| 031  | 0031 | 0031    | 0031  |
| 032  | 0032 | 0032    | 0032  |
| 033  | 0033 | 0033    | 0033  |
| 034  | 0034 | 0034    | 0034  |
| 035  | 0035 | 0035    | 0035  |
| 036  | 0036 | 0036    | 0036  |
| 037  | 0037 | 0037    | 0037  |
| 038  | 0038 | 0038    | 0038  |
| 039  | 0039 | 0039    | 0039  |
| 040  | 0040 | 0040    | 0040  |
| 041  | 0041 | 0041    | 0041  |
| 042  | 0042 | 0042    | 0042  |
| 043  | 0043 | 0043    | 0043  |
| 044  | 0044 | 0044    | 0044  |
| 045  | 0045 | 0045    | 0045  |
| 046  | 0046 | 0046    | 0046  |
| 047  | 0047 | 0047    | 0047  |
| 048  | 0048 | 0048    | 0048  |
| 049  | 0049 | 0049    | 0049  |
| 050  | 0050 | 0050    | 0050  |
| 051  | 0051 | 0051    | 0051  |
| 052  | 0052 | 0052    | 0052  |
| 053  | 0053 | 0053    | 0053  |
| 054  | 0054 | 0054    | 0054  |
| 055  | 0055 | 0055    | 0055  |
| 056  | 0056 | 0056    | 0056  |
| 057  | 0057 | 0057    | 0057  |
| 058  | 0058 | 0058    | 0058  |
| 059  | 0059 | 0059    | 0059  |
| 060  | 0060 | 0060    | 0060  |
| 061  | 0061 | 0061    | 0061  |
| 062  | 0062 | 0062    | 0062  |
| 063  | 0063 | 0063    | 0063  |
| 064  | 0064 | 0064    | 0064  |
| 065  | 0065 | 0065    | 0065  |
| 066  | 0066 | 0066    | 0066  |
| 067  | 0067 | 0067    | 0067  |
| 068  | 0068 | 0068    | 0068  |
| 069  | 0069 | 0069    | 0069  |
| 070  | 0070 | 0070    | 0070  |
| 071  | 0071 | 0071    | 0071  |
| 072  | 0072 | 0072    | 0072  |
| 073  | 0073 | 0073    | 0073  |
| 074  | 0074 | 0074    | 0074  |
| 075  | 0075 | 0075    | 0075  |
| 076  | 0076 | 0076    | 0076  |
| 077  | 0077 | 0077    | 0077  |
| 078  | 0078 | 0078    | 0078  |
| 079  | 0079 | 0079    | 0079  |
| 080  | 0080 | 0080    | 0080  |
| 081  | 0081 | 0081    | 0081  |
| 082  | 0082 | 0082    | 0082  |
| 083  | 0083 | 0083    | 0083  |
| 084  | 0084 | 0084    | 0084  |
| 085  | 0085 | 0085    | 0085  |
| 086  | 0086 | 0086    | 0086  |
| 087  | 0087 | 0087    | 0087  |

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ARNOLD, D.N.; BREZZI, F. : A mixed an nonconforming finite element method: implementation, postprocessing and error estimates, in RAIRO Modélisation mathématique et Analyse Numérique, vol. 19, 7-32, 1985.
- [2] BABUŠKA, I. : The finite element method with Lagrangian multipliers, Numer. Math. 20, 179-192, 1973.
- [3] BEZERRA, M.C.C. : Método elemento finito e pós-processamento: implementação em microcomputadores in Anais do VII CNMAC, 210-214, 1984.
- [4] BINNS, K.J.; LAWRENSON, P.J. : *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*, Pergamon, Braunschweig, 1973.
- [5] CHARI, M.V.K.; SILVESTER, P. : Analysis of turbo alternator magnetic fields by finite elements, in Trans. Inst. Elec. Eletr. Engrs. PAS-90 (454), 1971.
- [6] CIARLET, P.G. : *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

- [7] DOUGLAS, J.; DUPONT, T.; WHEELER, M.F. : An  $L^\infty$  estimate and a superconvergence result for a Galerkin method for elliptic equations based on tensor products of piecewise polynomials, *RAIRO Analyse Numérique* R-2, 61-66, 1974.
- [8] EKELAND, I.; TÉMAM, R. : *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*, Dunod, Paris, 1974.
- [9] FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. : Displacement and equilibrium models in the finite element method, in *Stress Analysis* (O.C. Zienkiewicz & G.S. Holister, Editors), pp. 145-197, Wiley, New York, 1965.
- [10] FRÉMOND, M. : Utilization de la dualité en élasticité. Compléments sur les énergies de Reissner. Equilibre d'une dalle élastique reposant sur une structure stratifiée, *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, Supplément au No. 294, 54-66, 1972.
- [11] GEYMONAT, G. : Introduction to Naive Distribution Theory in *Mathematical and Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Trieste, 1973.

- [12] HINTON, E.; OWEN, D.R.J. : *Finite Element Programming*, Addison-Wesley, 1984.
- [13] JENNINGS, A. : *Matrix Computation for Engineers and Scientists*, John-Wiley, 1977.
- [14] KREYSIG, E. : *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley, New York, 1978.
- [15] LUENBERGER, D.G. : *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1984.
- [16] ODEN, J.T.; REDDY, J.N. : *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976.
- [17] PRENTER, P.M. : *Splines and Variational Methods*, Wiley, New York, 1975.
- [18] RAVIART, P.A. : On some applications of mixed finite element methods, in *Colloque Franco-Brésilien de Méthodes Numériques de l'Ingénieur*, Rio de Janeiro, 1976.
- [19] RAVIART, P.A.; THOMAS, J.M. : A mixed finite element method for second order elliptic problems, in

*Mathematical Aspects of the Finite Element Method*,  
Lecture Notes in Mathematics 606, Springer-Verlag,  
Berlin, 1977.

- [20] RUAS, V. : *Uma introdução à teoria matemática dos métodos de elementos finitos mistos*, Monografia em Ciência da Computação da PUC/RJ, 3/85, Rio de Janeiro, 1985.
- [21] SILVEIRA, D.L. : *Introdução ao método dos elementos finitos*, Monografia de Qualificação em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, Campinas, 1985.
- [22] SILVESTER, P.; CHARI, M.V.K. : Finite element solution of saturable magnetic field problems, in Trans. Inst. Elec. Electr. Engrs. PAS-89 (1642), 1970.
- [23] STEWART, G.W. : *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press, New York, 1971.
- [24] THOMAS, J.M. : *Méthode des éléments finis équilibres*, in Journées Eléments Finis 1975, Université de Rennes, 1975.
- [25] THOMAS, J.M. : *Sur l'Analyse Numérique des Méthodes*

*d'Eléments Finis Hybrides et Mixtes*, Doctoral Thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1977.

- [26] WASHIZU, K. : *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon, Oxford, 1968.
- [27] ZIENKIEWICZ, O.C.; VILOTTE, J.P.; TOYOSHIMA, S. : Iterative method for constrained and mixed approximation. An inexpensive improvement of finite element performance, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51, 3-29, 1985.
- [28] ZAGO, J.V. : Numerical Simulation of the Weissenberg effect, *Matemática Aplicada e Computacional*, Vol. 3, pp. 3-22, 1984.