

SOBRE TEORIA DE BIFURCAÇÃO E
ALGUMAS APLICAÇÕES .

MARY LILIAN LOURENÇO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.

Este Trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Fundação de Amparo e Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

Campinas, junho de 1979.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A meus pais,

José e Aparecida.

AGRADECIMENTOS

Quero registrar aqui o meu sincero agradecimento ao Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira pela proposta do presente trabalho e pela sua orientação na elaboração do mesmo.

Agradeço ainda ao Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes - que me iniciou nos estudos de Equações Diferenciais.

Minha gratidão aos meus pais e a todos aqueles que me ajudaram, direta ou indiretamente, agora ou há algum tempo.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro e pela confiança em mim depositada.

Mary Lillian Lourenço .

INDICE

Notações	i
Introdução	iii
CAPITULO I - Preliminares	1
CAPITULO II - A redução de Lyapunov-Schmidt	15
CAPITULO III - Uma condição necessária para bifurcação ..	19
CAPITULO IV - Bifurcação de um autovalor simples	22
CAPITULO V - Bifurcação ao longo de um autovetor não-de gerado.....	32
CAPITULO VI - Problemas Variacionais	43
CAPITULO VII - Bifurcação de soluções periódicas	73
Apêndice	100
Bibliografia	104

NOTAÇÕES

- \square - indica final de uma demonstração.
- [A.-] - se refere as definições e teoremas do apêndice.
- $\mathcal{D}(L)$ - indica o domínio do operador L.
- $\| \cdot \|$ - indica a norma de um elemento em um espaço de Banach.
- $N(L)$ - indica o núcleo do operador L.
- $\text{Im}(L)$ - indica a imagem do operador L.
- $\dim N(L)$ - indica a dimensão do subespaço $N(L)$.
- Id - indica aplicação identidade definida em espaços de Banach.
- $D_i F$ - denota a i-ésima derivada parcial de F.
- $\dot{x}(t)$ - denota a derivada da função x em relação a variável t.
- C^∞ - indica a classe das funções que são infinitamente diferenciáveis.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - indica o produto interno de dois elementos pertencentes a um espaço de Hilbert.
- A^\perp - indica o complemento ortogonal do conjunto A.
- $\sigma(S)$ - denota o espectro de um operador S.
- $x \perp y$ - indica que x é ortogonal a y.
- $x_n \rightarrow x$ - indica que a sequência x_n , $n \in \mathbb{N}$, converge para x.
- \bar{S} - indica o fecho de S.
- $L_2([-\pi, \pi])$ - indica o espaço das funções reais definidas em $[-\pi, \pi]$ de quadrado integrável no sentido de Lebesgue.
- $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ - indica o espaço das transformações lineares e contínuas.

- IR - indica o conjunto dos números reais.
- \mathbb{R}_+ - indica o conjunto dos números reais positivos.
- \mathbb{Z}_+ - indica o conjunto dos números inteiros não-negativos
- IN - indica o conjunto dos números naturais.

ooooo
ooo

INTRODUÇÃO

A Teoria de Bifurcação para equações diferenciais ordinárias teve origem com Poincaré que se preocupava em encontrar soluções periódicas que aparecem em geral na mecânica celeste. A teoria tem sido desenvolvida e aplicada por vários autores, mas sempre voltada para o estudo de soluções periódicas de Equações Diferenciais.

Recentemente alguma atenção tem sido dirigida para esta teoria devido a sua fundamental importancia em problemas surgidos na Teoria da Turbulência, no estudo de movimentos periódicos e outros.

O objetivo deste trabalho é estudar alguns resultados da Teoria de Bifurcação seguidos de uma aplicação à bifurcação de soluções de equações diferenciais. É conveniente observar - que as provas dos teoremas são recentes e redigidas de tal forma que é necessário somente o conhecimento de cálculo em espaços de Banach, isto significa que nenhum pré-requisito em Teoria de Grau ou Genus é requerido.

Nós nos preocupamos em estudar as soluções (não-triviais) $u(\lambda)$ de uma equação do tipo $F(u, \mu) = 0$ onde F é um operador e μ é um parâmetro (vetorial ou escalar), as quais tendem a zero quando μ tende para algum valor particular μ_0 chamado ponto de bifurcação.

Sejam X e Y espaços de Banach e $F: Y \times \mathbb{R} \rightarrow X$ uma aplicação C^∞ tal que

$$F(0, \mu) = 0,$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$. Seja

$$S = \{(u, \mu) \in Y \times \mathbb{R} : F(u, \mu) = 0 \text{ e } u \neq 0\} .$$

Um ponto μ_0 pertencente a \mathbb{R} é um ponto de bifurcação para o problema:

$$(I) \quad F(u, \mu) = 0, \text{ com } (u, \mu) \in Y \times \mathbb{R}$$

se $(0, \mu_0)$ pertence ao fecho de S em $Y \times \mathbb{R}$.

Consideraremos a bifurcação em $\mu_0 = 0$. Para ver isto, expandiremos F como série de Taylor em u , isto é,

$$F(u, \mu) = D_1 F(0, \mu)u + H(u, \mu)$$

onde $\|H(u, \mu)\| / \|u\|$ tende a zero, quando $\|u\|$ tende a zero.

Agora a equação (I) é equivalente a:

$$(II) \quad Lu + C(\lambda)u + R(u, \lambda) = 0, \text{ com } (u, \lambda) \in Y \times \mathbb{R}$$

onde $L = D_1 F(0, \mu_0)$; $\lambda = \mu - \mu_0$; $R(u, \lambda) = H(u, \lambda + \mu_0)$ e

$$C(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1} [D_1 F(0, \lambda + \mu_0) - D_1 F(0, \mu_0)] & \text{se } \lambda \neq 0, \\ D_2 D_1 F(0, \mu_0) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

Portanto μ_0 é um ponto de bifurcação para o problema (I) se e só se $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação para o problema (II). Da remos nossos resultados em termos do problema (II).

Faremos algumas hipóteses no capítulo que valem para todos os capítulos subsequentes. Ainda neste capítulo motivaremos o estudo da Teoria de Bifurcação através de ilustrativos e-

xemplos .

O capítulo II contém a Redução de Lyapunov-Schmidt para o problema II. A idéia básica deste método é tomar o problema em algum espaço de Banach e reduzir para um problema equivalente em um espaço de de dimensão menor. No caso, reduziremos o problema do espaço espaço de Banach X para o espaço $N(L)$ (núcleo do operador L) .

O capítulo III contém uma condição necessária para $\lambda = 0$ ser ponto de bifurcação e através de um exemplo mostraremos que esta condição é necessária mas não é suficiente.

Os próximos três capítulos contém respectivamente os três principais resultados deste trabalho.

Introduziremos também no capítulo VI a noção de bifurcação assintótica e discutimos alguns resultados desta bifurcação.

No capítulo VII consideraremos o problema de bifurcação de soluções 2π -periódicas da equação diferencial

$$(III) \quad \ddot{x}(t) + \mu x(t) + f(t, x(t)) + g(t, \dot{x}(t)) = 0$$

onde f e g são funções C^∞ tais que

$$f(t, 0) = D_2 f(t, 0) = g(t, 0) = D_2 g(t, 0) = 0$$

e

$$f(t+2\pi, s) = f(t, s) ; g(t+2\pi, s) = g(t, s) ,$$

para todo t, s pertencentes a \mathbb{R} .

Usaremos o teorema 4.1 para provar que $\mu = 0$ é ponto de bifurcação . Para determinar se $\mu = n^2$ é ponto de bifurcação ou não, quando n pertence a \mathbb{Z} , faremos hipóteses sobre f e g . Por

exemplo, se $g \equiv 0$ então o teorema 6.2 implicará que o conjunto de todos os pontos de bifurcação para o problema (III) é exatamente $\{n^2: n \in \mathbb{Z}\}$. Se $g \not\equiv 0$, então o teorema 6.2 não pode ser aplicado e usaremos o teorema 5.1. Daremos dois resultados onde aplicamos o teorema 5.1 e encontramos um caso simples quando a equação (III) é autônoma e o teorema 5.1 não pode ser aplicado. Agora, se g é uma função par reformularemos o problema (III) e deduziremos que o conjunto dos pontos de bifurcação de (III) é $\{n^2: n \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado, se g é uma função ímpar e $g(s) \neq 0$ para $s \neq 0$, os três teoremas não podem ser aplicados e mostraremos que $\mu = 0$ é o único ponto de bifurcação de (III).

Para maior facilidade na compreensão deste trabalho optamos pela inclusão de um apêndice, contendo algumas definições e enunciados de teoremas fundamentais, utilizados no desenvolvimento desta dissertação.

Convém ressaltar que quando falamos da derivada de um o perador é no sentido de Fréchet .

ooooo
ooo

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Seja X um espaço real de Banach com a norma $\| \cdot \|$.

Durante todo o trabalho estaremos supondo as seguintes hipóteses:

H_1 - $L: \mathcal{D}(L) \subset X \rightarrow X$ designará um operador linear fechado [vide A.1] onde $X = N(L) \oplus \text{Im}(L)$ é a soma topológica do núcleo com a imagem de L ; assim a projeção $P: X \rightarrow X$ de X sobre $N(L)$ associada com a soma direta é contínua. Além disso, o domínio $\mathcal{D}(L)$, com a norma do gráfico,

$$\|x\|_1 = (\|x\|^2 + \|Lx\|^2)^{1/2}$$

é um espaço real de Banach, o qual denotaremos por X_1 ; isto decorre imediatamente do fato de L ser um operador linear fechado.

Notemos que $X_1 = N(L) \oplus (\text{Im}(L) \cap X_1)$ e $P: X \rightarrow X_1$ é contínua.

Denotaremos por Z o espaço de Banach $\text{Im}(L) \cap X_1$ com a norma $\| \cdot \|_1$.

Seja $B(X_1, X)$ o espaço real de Banach de todos os operadores lineares limitados de X_1 em X . O operador L indicado acima é um elemento de $B(X_1, X)$;

H_2 - $C: \mathbb{R} \rightarrow B(X_1, X)$ é uma aplicação C^∞ ;

H_3 - $R: X_1 \times \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma aplicação C^∞ tal que

$$R(0, \lambda) = D_1 R(0, \lambda) = 0,$$

para todo elemento λ de \mathbb{R} .

Consideraremos a equação II, dada na introdução,

$$F(x, \lambda) = Lx + \lambda C(\lambda) + R(x, \lambda) = 0,$$

para $(x, \lambda) \in X_1 \times \mathbb{R}$ e o conjunto $S = \{(x, \lambda) \in X_1 \times \mathbb{R} : F(x, \lambda) = 0 \text{ e } x \neq 0\}$.

1.1. - DEFINIÇÃO: Dizemos que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para o problema (II) se $(0, 0)$ pertence ao fecho de S em $X_1 \times \mathbb{R}$.

Daremos a seguir uma série de exemplos de bifurcação de soluções de equações não-lineares.

Analisaremos as soluções da equação

$$(1.1.2) \quad F(\lambda, u) = 0$$

onde F é uma transformação não-linear de $X \times \mathbb{R}$ em X , tal que $F(\lambda, 0) = 0$, para todo elemento λ de \mathbb{R} .

Uma solução de (1.1.2) é um par ordenado (λ, u) onde u pode depender parametricamente de λ . É óbvio que $u = 0$ é solução de (1.1.2) e é conhecida como solução básica.

O nosso interesse é estudar a bifurcação da solução básica, isto é, encontrar soluções não-básicas que estão arbitrariamente próximas da solução básica, quando o parâmetro λ tende ao ponto de bifurcação.

Suporemos uma forma particular de (1.1.2):

$$(1.1.3) \quad Au - \lambda u = 0, \text{ com } A0 = 0$$

onde A é um operador não-linear de X em X .

Diremos que o operador A é linearizável em u se existe um operador T_u tal que

$$A(u+h) - Au = T_u h + R_u h, \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_u\|}{\|h\|} = 0.$$

O operador T_u , linear em h , é a derivada de Fréchet de A em u e pode ser também denotada por $A'(u)$.

1.2- EXEMPLOS

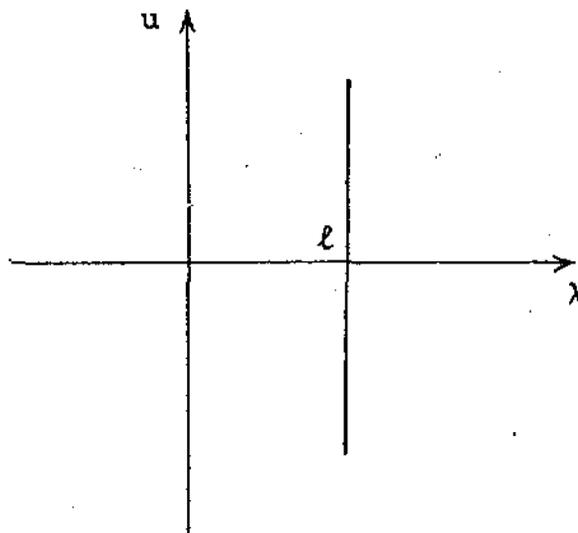
1.2.1 Consideraremos $X = \mathbb{R}$ e examinaremos os seguintes casos:

(a) Para o operador linear da forma ℓu temos que:

$$\ell u = \lambda u$$

e o único autovalor é $\lambda = \ell$.

O diagrama de bifurcação, isto é, o gráfico da solução da equação (1.1.3) em função do parâmetro é o seguinte :



Assim, o conjunto S é o gráfico acima, com exceção do ponto $(\ell, 0)$.

Agora, o ponto $\lambda = \ell$ é ponto de bifurcação. De fato: qualquer vizinhança aberta de $(\ell, 0)$ intercepta o conjunto S então $(\ell, 0)$ pertence a \bar{S} .

(b) Consideraremos o operador não-linear

$$Au = \ell u + cu^2, \text{ com } c \neq 0.$$

Assim,

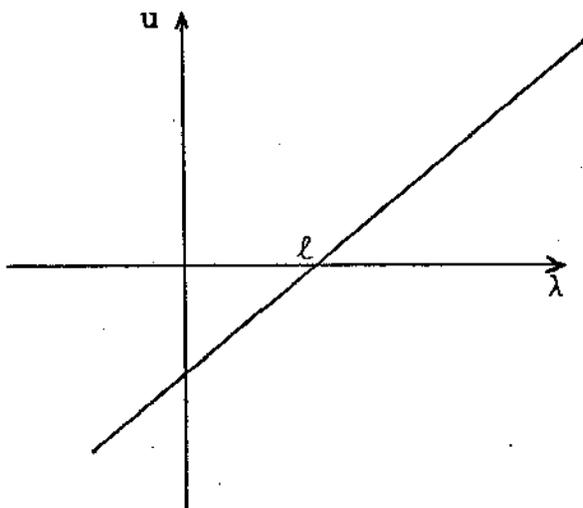
(b.1) $\ell u + cu^2 = \lambda u$

e admite a solução básica, $u = 0$.

Para $\lambda \neq \ell$, temos a solução

$$u = (\lambda - \ell) / c.$$

O diagrama de bifurcação é o seguinte:



Cada ponto deste gráfico, com exceção do ponto $(\ell, 0)$, é um elemento do conjunto S , e o único ponto de bifurcação da equação (b.1) é em $\lambda = \ell$.

(c) Seja agora,

$$Au = \ell u + cu^3, \text{ com } c \neq 0.$$

Assim, temos que $u = 0$ é uma solução de:

$$\lambda u = \ell u + cu^3$$

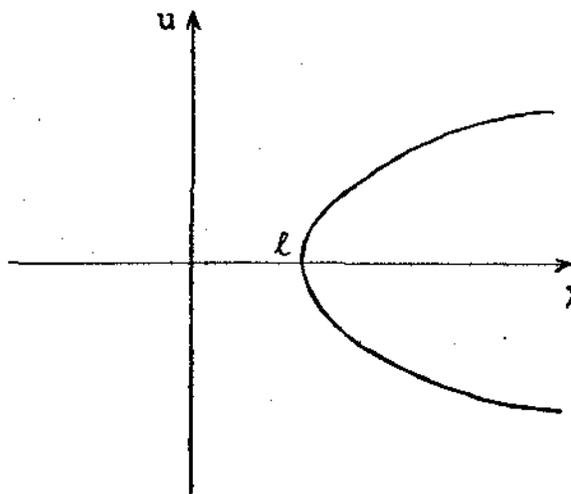
para todo λ pertencente a \mathbb{R} .

Se $c > 0$, então

$$u = \pm \sqrt{(\lambda - \ell)/c}.$$

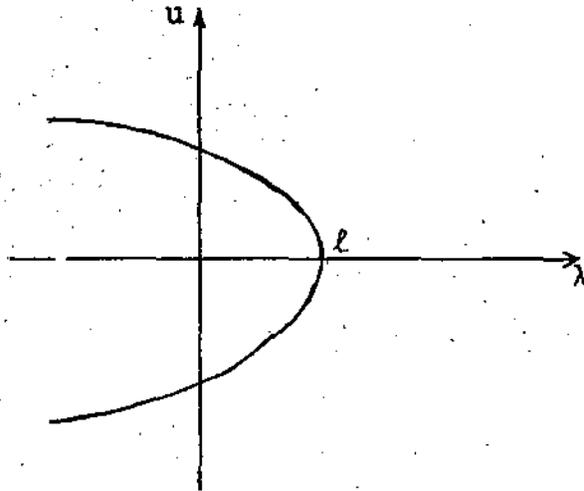
Encontramos duas soluções reais não-nulas para $\lambda > \ell$ bifurcando da solução básica.

O diagrama de bifurcação é o seguinte:



Os pontos da parábola, com exceção do ponto $(\ell, 0)$, pertencem ao conjunto S , e o único ponto de bifurcação é $\lambda = \ell$.

Se $c < 0$, temos duas soluções reais não-nulas para $\lambda < \ell$ bifurcando-se da solução básica.



(d) Seja $Au = \begin{cases} u & \text{se } |u| < 1, \\ (u^2+1)/2 & \text{se } u \geq 1, \\ -(u^2+1)/2 & \text{se } u \leq -1. \end{cases}$

As seguintes situações devem ser analisadas :

(i) Para $|u| < 1$ temos que:

$$u - \lambda u = 0,$$

donde se conclui que $\lambda = 1$.

(ii) Para $u \geq 1$ temos que:

$$(u^2+1)/2 - \lambda u = 0.$$

Assim,

$$u = (2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 - 1)}) / 2$$

e tem solução real para $\lambda > 1$.

(iii) Para $u < -1$ temos que:

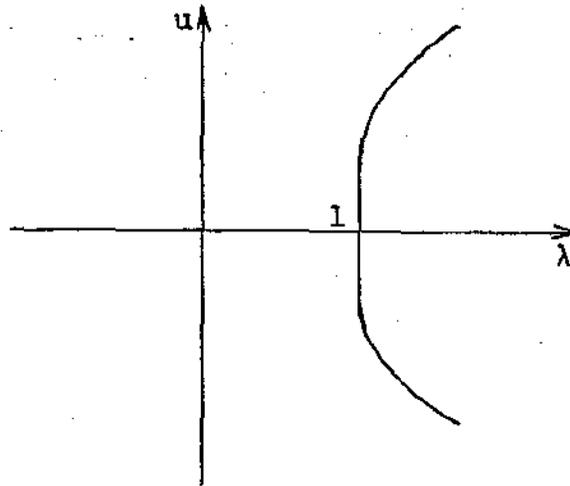
$$-(u^2 + 1)/2 - \lambda u = 0,$$

donde extraímos

$$u = (-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 - 1)}) / 2$$

que tem solução real para $\lambda > 1$.

O diagrama de bifurcação é o seguinte:



Os pontos do gráfico acima, com exceção do ponto $(1, 0)$, são elementos do conjunto S , e o único ponto de bifurcação é $\lambda = 1$.

Apesar do problema ser não-linear o ramo apresenta-se em torno do ponto $(1, 0)$ como linear.

1.2.2 Seja agora $X = \mathbb{R}^2$.

Consideraremos um operador não-linear da forma

$$Au = Lu + Cu$$

$$\begin{aligned} \text{onde } Lu &= \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 u_1 \\ \beta_2 u_2 \end{pmatrix}, \text{ com } \beta_1 > \beta_2 > 0 \end{aligned}$$

e C é homogênea de grau 3, isto é,

$$C(\alpha u) = \alpha^3 C(u).$$

A linearização de A em torno de $u = 0$ é L . O operador L tem autovalores β_1 e β_2 com respectivos autovalores

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

O operador C está definido por :

$$Cu = \begin{pmatrix} \gamma_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) \\ \gamma_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix}, \text{ com } \gamma_1 > \gamma_2 > 0.$$

De $Au - \lambda u = 0$ tiramos

$$\begin{pmatrix} \beta_1 u_1 \\ \beta_2 u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) \\ \gamma_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente ,

$$\begin{aligned}\beta_1 u_1 + \gamma_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) &= \lambda u_1 \\ \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) &= \lambda u_2.\end{aligned}$$

Calcularemos a solução do problema não-linear quando $u_2 = 0$ e $u_1 \neq 0$. Assim

$$\beta_1 u_1 + \gamma_1 u_1^3 = \lambda u_1$$

e

$$u_1 = \pm \sqrt{(\lambda - \beta_1)/\gamma_1}.$$

Assim existe bifurcação da solução básica à direita de $\lambda = \beta_1$ e o ramo de bifurcação é uma parábola no plano (u_1, λ) . Quando $u_2 \neq 0$ e $u_1 = 0$ encontramos

$$u_2 = \pm \sqrt{(\lambda - \beta_2)/\gamma_2}.$$

A bifurcação da solução básica está à direita de $\lambda = \beta_2$; o ramo é uma parábola no plano (u_2, λ) .

Com $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$, temos

$$\beta_1 u_1 + \gamma_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) = \lambda u_1 \quad \text{e} \quad \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) = \lambda u_2,$$

donde concluímos que :

$$u_1^2 + u_2^2 = (\lambda - \beta_1)/\gamma_1 \quad \text{e} \quad u_1^2 + u_2^2 = (\lambda - \beta_2)/\gamma_2$$

respectivamente.

Assim,

$$\frac{\lambda - \beta_1}{\gamma_1} = \frac{\lambda - \beta_2}{\gamma_2},$$

$$\lambda = \frac{\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

e

$$u_1^2 + u_2^2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Seja agora $\lambda^* = \frac{\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}$. Como $\beta_2 > \beta_1$ temos que:

$$\lambda^* > \frac{\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} = \beta_2$$

e

$$u_1^2 + u_2^2 > 0.$$

Assim para $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$ a solução é um círculo,

e as parábolas são equidistantes do eixo λ . De fato:

para $\lambda = \frac{\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}$ temos

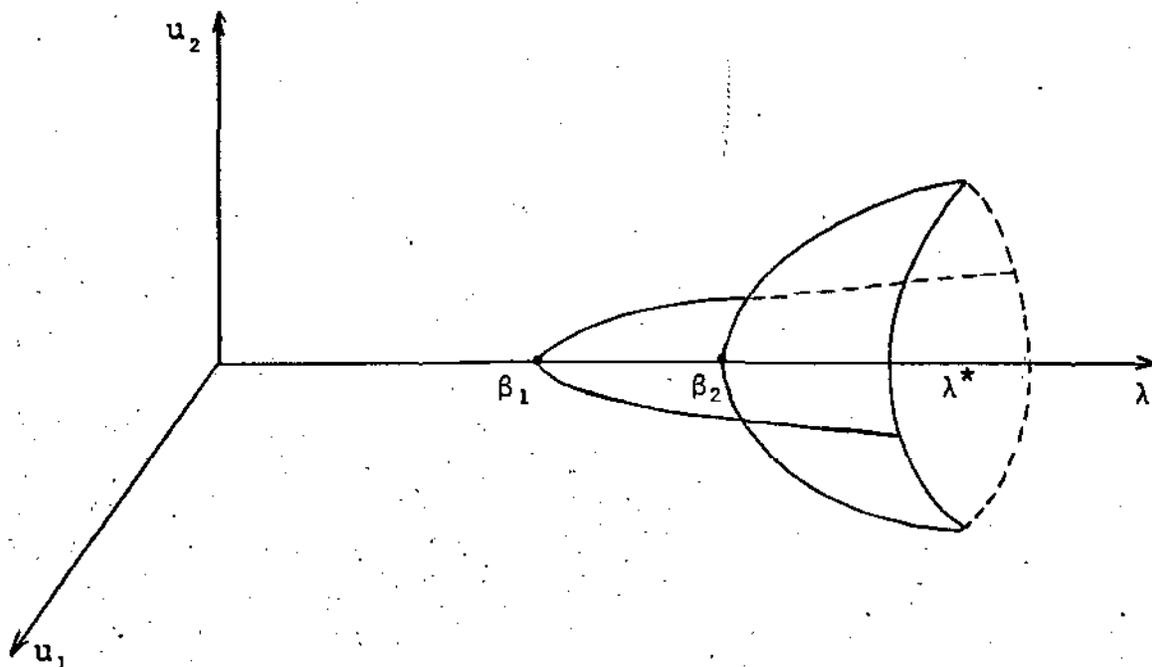
$$u_1 = \pm \sqrt{(\beta_2 - \beta_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

e

$$u_2 = \pm \sqrt{(\beta_2 - \beta_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)}.$$

A distância do ponto $(\lambda^*, 0)$ ao ponto $(\lambda^*, \sqrt{(\beta_2 - \beta_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)})$ é $\sqrt{(\beta_2 - \beta_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)}$ e o seu quadrado é $(\beta_2 - \beta_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)$. Portanto o círculo intercepta as parábolas.

O diagrama de bifurcação é o seguinte:



Os pontos do gráfico acima, com exceção dos pontos $(0, \beta_1, 0)$ e $(0, \beta_2, 0)$, pertencem ao conjunto S . Os pontos de bifurcação são $\lambda_1 = \beta_1$ e $\lambda_2 = \beta_2$.

O círculo é considerado uma bifurcação secundária do problema acima, isto é, uma solução que surge da bifurcação da solução básica através de uma perturbação do parâmetro λ em torno de $\lambda_0 = 0$.

1.2.3 - Consideraremos o operador do exemplo 1.2.2 com

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta.$$

Ou melhor,

$$Au = Lu + Cu$$

onde
$$Lu = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C(\alpha u) = \alpha^3 C(u)$$

com

$$C(u) = \begin{pmatrix} \gamma_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) \\ \gamma_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix} \quad \gamma_1 > \gamma_2 > 0.$$

Da equação (1.1.3) temos:

$$\begin{aligned} \beta u_1 + \gamma_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) &= \lambda u_1 \\ \beta u_2 + \gamma_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) &= \lambda u_2. \end{aligned}$$

A linearização de A em $u = 0$ é L, o qual tem β como autovvalor de multiplicidade dois.

Encontraremos as soluções do problema .

Se $u_2 = 0$ e $u_1 \neq 0$ temos que:

$$\beta u_1 + \gamma_1 u_1^3 = \lambda u_1$$

ou ainda

$$u_1 = \pm \sqrt{(\lambda - \beta) / \gamma_1}.$$

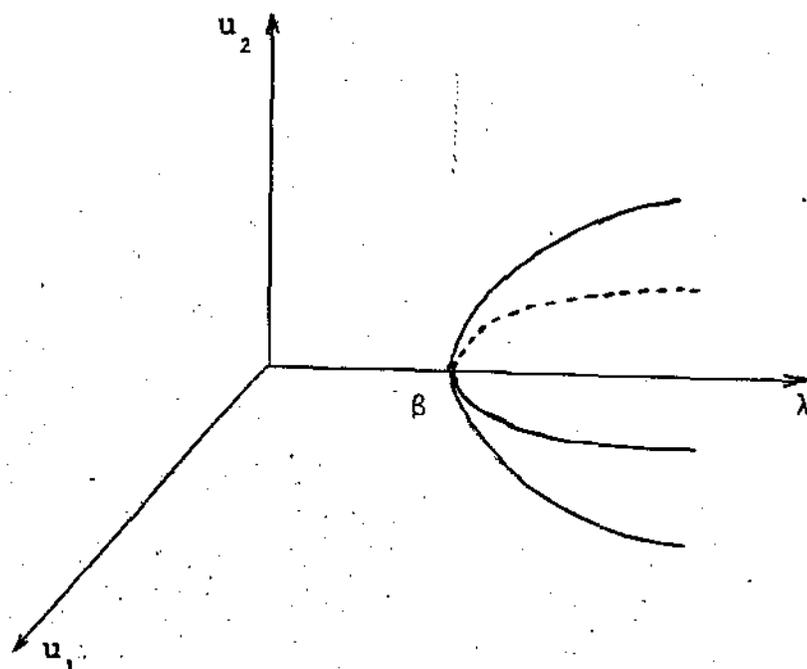
Então a bifurcação da solução básica está à direita de $\lambda = \beta$.

Se $u_1 = 0$ e $u_2 \neq 0$ temos:

$$u_2 = \pm \sqrt{(\lambda - \beta) / \gamma_2}.$$

A bifurcação da solução básica está à direita de $\lambda = \beta$.

O diagrama de bifurcação é o seguinte:



Os pontos do gráfico acima, com exceção do ponto $(0, \beta, 0)$, pertencem ao conjunto S . O ponto de bifurcação é $\lambda = \beta$.

Se $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$ temos:

$$\beta u_1 + \gamma_1 u_1 (u_1^2 + u_2^2) = \lambda u_1$$

e

$$\beta u_2 + \gamma_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) = \lambda u_2$$

Ou melhor

$$u_1^2 + u_2^2 = (\lambda - \beta) / \gamma_1 \quad \text{e} \quad u_1^2 + u_2^2 = (\lambda - \beta) / \gamma_2$$

respectivamente.

Assim,

$$\frac{\lambda - \beta}{\gamma_1} = \frac{\lambda - \beta}{\gamma_2}$$

e finalmente $\lambda = \beta$.

Portanto ,

$$u_1^2 + u_2^2 = 0$$

que é equivalente dizer que $u_1 = u_2 = 0$. Neste caso não temos a bifurcação secundária.

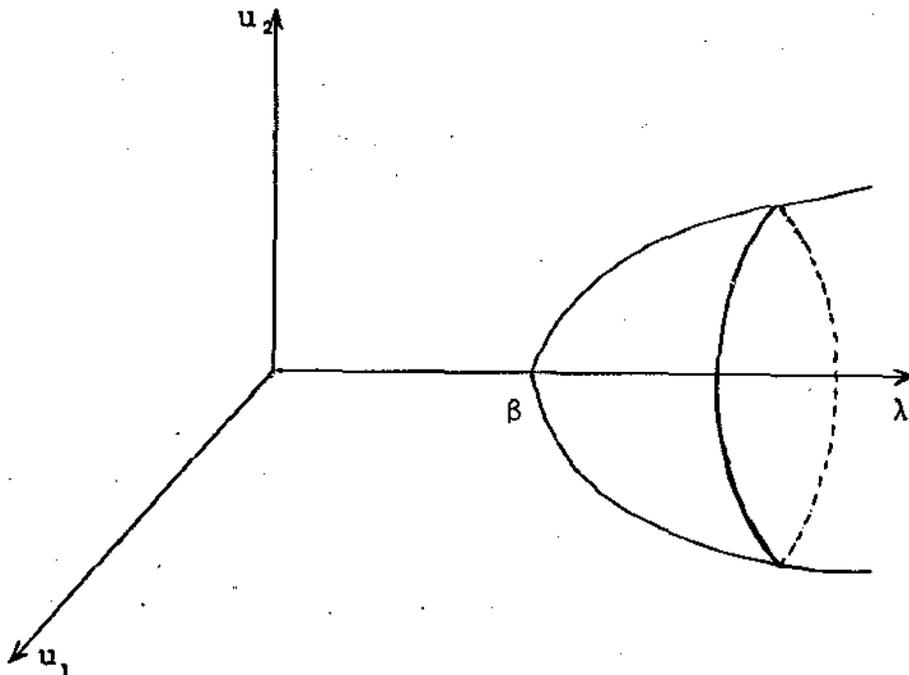
1.2.4 Consideraremos o exemplo 1.2.2 com $\beta = \beta_1 = \beta_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma > 0$.

O problema se reduz a

$$u_1^2 + u_2^2 = (\lambda - \beta) / \gamma.$$

Neste caso $\lambda = \beta$ é um ponto de bifurcação da equação e o conjunto de soluções da equação acima é uma superfície e de um parabolóide de revolução ao redor do eixo λ .

O diagrama de bifurcação é o seguinte:



CAPÍTULO II

A REDUÇÃO DE LYAPUNOV-SCHMIDT

Usaremos a decomposição $X = N(L) \oplus \text{Im}(L)$ para trocarmos a equação (II) por

$$F(x, \lambda) = Lx + \lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0, \text{ com } (x, \lambda) \in N(L) \times \mathbb{R}.$$

Seja $Q: X \rightarrow X$ dada por $Q = \text{Id} - P$ onde Id denota a aplicação identidade em X . Assim Q é a projeção de X sobre a imagem de L . Então,

$$F(x, \lambda) = Lx + \lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0 \text{ é equivalente a}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda PC(\lambda)[Px + Qx] + PR(Px + Qx, \lambda) \\ 0 = LQx + \lambda QC(\lambda)[Px + Qx] + QR(Px + Qx, \lambda) \end{cases}$$

De fato; se

$$Lx + \lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0, \text{ para } (x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$$

então

$$\begin{cases} P(0) = PL(\text{Idx}) + \lambda PC(\lambda)[\text{Idx}] + PR(\text{Idx}, \lambda) \\ Q(0) = QL(\text{Idx}) + \lambda QC(\lambda)[\text{Idx}] + QR(\text{Idx}, \lambda) \end{cases}$$

Como $x = \text{Idx} = Px + Qx$ temos que:

$$\begin{cases} 0 = PL(Px + Qx) + \lambda PC(\lambda)[Px + Qx] + PR(Px + Qx, \lambda) \\ 0 = QL(Px + Qx) + \lambda QC(\lambda)[Px + Qx] + QR(Px + Qx, \lambda) \end{cases}$$

Sendo que $L(Px + Qx) \in \text{Im}(L)$ e P é a projeção de X sobre $N(L)$ concluímos que $PL(Px + Qx) = 0$.

Assim,

$$QL(Px + Qx) = LQx.$$

Portanto,

$$\begin{cases} 0 = \lambda PC(\lambda) [Px + Qx] + PR(Px + Qx, \lambda) \\ 0 = LQx + \lambda QC(\lambda) [Px + Qx] + QR(Px + Qx, \lambda). \end{cases}$$

Se $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ satisfaz

$$\begin{cases} 0 = \lambda PC(\lambda) [Px + Qx] + PR(Px + Qx, \lambda) \\ 0 = LQx + \lambda QC(\lambda) [Px + Qx] + QR(Px + Qx, \lambda) \end{cases}$$

então como $Q = Id - P$ vem:

$$\begin{cases} 0 = \lambda PC(\lambda) [Px + Qx] + PR(Px + Qx, \lambda) \\ 0 = L(Id-P)x + \lambda (Id-P)C(\lambda) [Px+Qx] + (Id-P) R(Px+Qx, \lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda PC(\lambda) [Px + Qx] + PR(Px + Qx, \lambda) \\ 0 = LQx + \lambda C(\lambda) [Px+Qx] + R(Px+Qx, \lambda) - \lambda PC(\lambda) [Px+Qx] - PR(Px+Qx, \lambda) \end{cases}$$

Assim,

$$LQx + \lambda C(\lambda) [Px + Qx] + R(Px + Qx, \lambda) = 0$$

ou melhor

$$Lx + \lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0, \text{ para } (x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$$

Agora, chamando $Px = v$ e $Qx = w$ temos que:

encontrar $(x, \lambda) \in S$ é equivalente encontrar $(v, w, \lambda) \in N(L) \times Z \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 0 = \lambda PC(\lambda) [v + w] + PR(v + w, \lambda) \\ 0 = Lw + \lambda QC(\lambda) [v + w] + QR(v + w, \lambda) \end{cases}$$

e $(v,w) \neq 0$.

Seja $f: N(L) \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Im}(L)$ definida por

$$f(v,w,\lambda) = Lw + \lambda QC(\lambda)[v + w] + QR(v + w, \lambda).$$

Então f é C^∞ , $f(0,0,0) = 0$ e $D_2 f(0,0,0): Z \rightarrow \text{Im}(L)$ é dada por

$$D_2 f(0,0,0)h = \left(\frac{\partial Lw}{\partial w} \right)_{w=0} + \left(QD_1 R(w,0) \right)_{w=0},$$

donde concluímos que:

$$D_2 f(0,0,0) = L.$$

A hipótese H_1 assegura que $L: Z \rightarrow \text{Im}(L)$ é um homeomorfismo linear; logo $D_2 f(0,0,0)$ é um homeomorfismo linear e pelo teorema da função implícita temos que existem uma vizinhança U de $(0,0)$ em $N(L) \times \mathbb{R}$ e uma aplicação C^∞ $g: U \rightarrow Z$ tais que

$$g(0,0) = 0$$

e

$$f(v, g(v, \lambda), \lambda) = 0$$

para todo $(v, \lambda) \in U$. Assim, existe uma vizinhança de $(0,0,0)$ em $N(L) \times Z \times \mathbb{R}$ tal que, cada zero da f nesta vizinhança pertence ao gráfico da g .

Desde que $f(0,0,\lambda) = 0$ para todo elemento λ de \mathbb{R} , então $g(0,\lambda) = 0$, para todo elemento λ de \mathbb{R} .

Encontrar $(x,\lambda) \in S$ é equivalente encontrar $(v,\lambda) \in N(L) \times \mathbb{R}$ tal que

$$(2.1) \quad \lambda PC(\lambda)[v + g(v,\lambda)] + PR(v + g(v,\lambda), \lambda) = 0.$$

A equação (2.1) é chamada " equação de bifurcação " associada a (II) . Este método é conhecido como o método de Lyapunov-Schmidt.

oooo
ooo

CAPÍTULO III

UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA BIFURCAÇÃO

A redução dada no capítulo II revela uma condição necessária para bifurcação.

3.1 - TEOREMA Suponhamos que $N(L) = \{0\}$. Então $\lambda = 0$ não é um ponto de bifurcação para a equação

$$(II) \quad F(x, \lambda) = Lx + \lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0,$$

para $(x, \lambda) \in N(L) \times \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO:

O gráfico da função g , $G(g) \subset N(L) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, é

$$G(g) = \{(0, g(0, \lambda), \lambda) : (0, \lambda) \in U\}$$

onde $U \subset N(L) \times \mathbb{R}$ é uma vizinhança aberta de $(0, 0)$.

Vimos que $g(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$G(g) = \{(0, 0, \lambda) : (0, \lambda) \in U\}.$$

Se p está suficientemente próximo de $(0, 0, 0)$ em $N(L) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ e p é zero de f , então é óbvio que $p \in G(g)$, isto significa que $p = (0, 0, \lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se (x, λ) é solução de (II), então (Px, Qx, λ) é zero de f . Assim, para cada solução (x, λ) suficientemente próxima de $(0, 0)$ temos que (Px, Qx, λ) é zero de f e está suficientemente próximo de $(0, 0, 0)$. Assim, (Px, Qx, λ) é elemento de $G(g)$, donde,

$$(Px, Qx, \lambda) = (0, 0, \lambda).$$

Segue que $x = 0$.

Desde que P e Q são aplicações contínuas de X_1 sobre X_1 , cada solução da equação (II) que está suficientemente próxima de $(0, 0)$ é da forma $(0, \lambda)$. Como U e S não se interceptam e $(0, \lambda)$ pertence a U , temos que $(0, 0)$ não pertence a \bar{S} . \square

3.2 - OBSERVAÇÃO:

Se zero é um ponto de bifurcação de (II), temos que $\dim N(L) > 0$. Esta condição é necessária mas não é suficiente, como mostra o seguinte exemplo:

Sejam $X = X_1 = \mathbb{R}^2$, $L \equiv 0$, $C(\lambda) = \text{Id}$ para todo elemento λ de \mathbb{R} e $R(x, y, \lambda) = (y^3, -x^3)$ para $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$.

Então a equação (II) se escreve da seguinte maneira :

$$\lambda(x, y) + (y^3, x^3) = (0, 0).$$

ou melhor

$$\begin{aligned} \lambda x + y^3 &= 0 \\ \lambda y - x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Se x for diferente de zero, isto implica que $\lambda = -y^3/x$.

Assim,

$$-y^4/x - x^3 = 0$$

donde segue que,

$$x = y = 0,$$

o que é absurdo, pois $x \neq 0$. Sendo

$$S = \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, \lambda) = 0 \text{ e } x \neq 0, y \neq 0\}$$

temos que $S = \emptyset$. Portanto, $\dim N(L) = 2$ e não existe ponto de bifurcação.



CAPÍTULO IV

BIFURCAÇÃO DE UM AUTOVALOR SIMPLES

Nesta secção consideraremos o caso simples onde a dimensão de $N(L)$ é igual a um.

Para dar continuidade ao nosso trabalho precisamos dos lemas dados abaixo.

Sejam $v_0 \in N(L) \setminus \{0\}$ e $r(\alpha, \lambda) = g(\alpha v_0, \lambda)$. Então r está definido sobre uma vizinhança aberta V de $(0,0)$ em \mathbb{R}^2 .

4.1 - LEMA: Para cada λ próximo de zero, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} r(\alpha, \lambda) = t(\lambda)$ existe, e a correspondência $\lambda \rightarrow t(\lambda)$ é uma função continuamente diferenciável com $t(0) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Sabemos do capítulo III que $g: U \rightarrow Z$ é uma função C^∞ e que $g(0, \lambda) = 0$, para todo λ .

Aqui

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} r(\alpha, \lambda) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} [g(\alpha v_0, \lambda) - g(0, \lambda)] \\ &= D_1 g(0, \lambda) v_0. \end{aligned}$$

Colocando $t(\lambda) = D_1 g(0, \lambda) v_0$, segue que t é continuamente diferenciável. Resta provar que $t(0) = 0$.

Para todo λ suficientemente próximo de zero, $[L + \lambda Q C(\lambda)]: Z \rightarrow \text{Im}(L)$ é um homeomorfismo linear. Da definição da g temos que:

$$\alpha^{-1} r(\alpha, \lambda) = -[L + \lambda Q C(\lambda)]^{-1} \{ \lambda Q C(\lambda) v_0 + \alpha^{-1} Q R(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda) \}$$

para $\alpha \neq 0$. De fato:

$$f(v, w, \lambda) = Lw + \lambda QC(\lambda)[v+w] + QR(v+w, \lambda)$$

e na vizinhança U de (0,0) temos $f(v, g(v, \lambda), \lambda) = 0$.

$$\begin{aligned} f(v, g(v, \lambda), \lambda) &= Lg(v, \lambda) + \lambda QC(\lambda)[v+g(v, \lambda)] + QR(v+g(v, \lambda), \lambda) = 0 \\ &= Lg(v, \lambda) + \lambda QC(\lambda)v + \lambda QC(\lambda)[g(v, \lambda)] + QR(v+g(v, \lambda), \lambda) = 0 \\ &= [L + \lambda QC(\lambda)]\{g(v, \lambda)\} + QR(v+g(v, \lambda), \lambda) + QC(\lambda)[v] = 0, \end{aligned}$$

$$[L + \lambda QC(\lambda)]\{g(v, \lambda)\} = -QR(v+g(v, \lambda), \lambda) - \lambda QC(\lambda)[v],$$

$$g(v, \lambda) = -[L + \lambda QC(\lambda)]^{-1}\{QR(v+g(v, \lambda), \lambda) + \lambda QC(\lambda)v\},$$

$$g(\alpha v_0, \lambda) = -[L + \lambda QC(\lambda)]^{-1}\{QR(\alpha v_0 + r(\alpha v_0, \lambda), \lambda) + \lambda QC(\lambda)[\alpha v_0]\},$$

$$\alpha^{-1}g(\alpha v_0, \lambda) = -[L + \lambda QC(\lambda)]^{-1}\{\alpha^{-1}QR(\alpha v_0 + r(\alpha v_0, \lambda), \lambda) + \lambda QC(\lambda)v_0\}$$

e

$$\alpha^{-1}r(\alpha, \lambda) = \alpha^{-1}g(\alpha v_0, \lambda).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1}r(\alpha, \lambda) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -[L + \lambda QC(\lambda)]^{-1}\{\alpha^{-1}QR(\alpha v_0 + r(\alpha v_0, \lambda), \lambda)\} \\ &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} -[L + \lambda QC(\lambda)]^{-1}\{\lambda QC(\lambda)v_0\}. \end{aligned}$$

Através de um cálculo direto tiramos que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1}r(\alpha, \lambda) = -[L + \lambda QC(\lambda)]^{-1}\lambda QC(\lambda)v_0.$$

Portanto,

$$t(\lambda) = -[L + \lambda QC(\lambda)]^{-1}\lambda QC(\lambda)v_0,$$

para todo λ suficientemente próximo de zero e $t(0) = 0$. \square

4.2 - LEMA: Seja $h:V \rightarrow N(L)$ definida por

$$h(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \lambda PC(\lambda)[v_0 + \alpha^{-1}r(\alpha, \lambda)] + \alpha^{-1}PR(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda) & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \lambda PC(\lambda)[v_0 + t(\lambda)] & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

Então h e $D_2 h$ são contínuas na vizinhança de $(0, 0)$

$$\text{e } D_2 h(0, 0) = PC(0)v_0.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Os possíveis pontos de descontinuidade de h são da forma $(0, \lambda)$ para todo λ na vizinhança do zero em \mathbb{R} .

Como

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} h(\alpha, \lambda) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda PC(\lambda)[v_0 + \alpha^{-1}r(\alpha, \lambda)] + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{PR(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda)}{\alpha} \\ &= \lambda PC(\lambda)[v_0 + t(\lambda)] \\ &= h(0, \lambda). \end{aligned}$$

Concluimos que h é contínua em $(0, \lambda)$.

Para $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} D_2 h(\alpha, \lambda) &= PC(\lambda)[v_0 + \alpha^{-1}r(\alpha, \lambda)] + \lambda PDC(\lambda)[v_0 + \alpha^{-1}r(\alpha, \lambda)] \cdot \alpha^{-1} D_2 r(\alpha, \lambda) \\ &\quad + PD_1 R(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda) D_2 r(\alpha, \lambda) + PD_2 R(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$,

$$D_2 h(\alpha, \lambda) = PC(\lambda)[v_0 + t(\lambda)] + \lambda PDC(\lambda)[v_0 + t(\lambda)] t'(\lambda).$$

Assim os possíveis pontos de descontinuidade de $D_2 h$ são da forma $(0, \lambda)$ para todo λ na vizinhança do zero.

Temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} D_2 r(\alpha, \lambda) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} D_2 g(\alpha v_0, \lambda) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} [D_2 g(\alpha v_0, \lambda) - D_2 g(0, \lambda)] \\ &= D_1 D_2 g(0, \lambda) v_0 \\ &= t'(\lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} D_2 h(\alpha, \lambda) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ PC(\lambda) [v_0 + \alpha^{-1} r(\alpha, \lambda)] \} \\ &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ \lambda PDC(\lambda) [v_0 + \alpha^{-1} r(\alpha, \lambda)] \alpha^{-1} D_2 r(\alpha, \lambda) \} \\ &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ \alpha^{-1} PD_1 R(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda) D_2 r(\alpha, \lambda) \} \\ &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ \alpha^{-1} PD_2 R(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda) \} \\ &= PC(\lambda) [v_0 + t(\lambda)] + \lambda PDC(\lambda) [v_0 + t(\lambda)] t'(\lambda). \end{aligned}$$

Portanto, $D_2 h(\alpha, \lambda)$ é contínua sobre U e

$$\begin{aligned} D_2 h(\alpha, \lambda) &= PC(0) [v_0 + t(0)] \\ &= PC(0) v_0. \quad \square \end{aligned}$$

4.3 - TEOREMA: Suponhamos que $N(L) = \{\beta v_0 : \beta \in \mathbb{R} \text{ e } v_0 \neq 0\}$ e que $PC(0)v_0 \neq 0$. Então $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação da equação:

$$F(x, \lambda) = Lx + \lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0,$$

para $(x, \lambda) \in N(L) \times \mathbb{R}$, isto é, existe uma constante $\sigma > 0$ e aplicações contínuas $p: (-\sigma, \sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ e $q: (-\sigma, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$p(0) = 0, \quad q(0) = 0$$

e

$$(\alpha v_0 + \alpha p(\alpha), q(\alpha)) \in S,$$

para $0 < |\alpha| < \sigma$.

DEMONSTRAÇÃO:

Existe uma vizinhança V de $(0,0)$ em \mathbb{R}^2 tal que $(\alpha v_0, \lambda) \in U$ (onde U é o domínio da função g) para todo (v_0, λ) pertencente a V .

Seja $r:V \rightarrow Z$ definida por $r(\alpha, \lambda) = g(\alpha v_0, \lambda)$. Então, pelo lema 4.1, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} r(\alpha, \lambda) \equiv t(\lambda)$ existe, para todo λ , $t = t(\lambda)$ é continuamente diferenciável e $t(0) = 0$.

Seja $h:V \rightarrow N(L)$ definida por

$$h(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \lambda PC(\lambda) [v_0 + \alpha^{-1} r(\alpha, \lambda)] + \alpha^{-1} PR(\alpha v_0 + r(\alpha, \lambda), \lambda) & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \lambda PC(\lambda) [v_0 + t(\lambda)] & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

Então pelo lema 4.2 h é contínua, $D_2 h$ é contínua e $D_2 h(0,0) = PC(0)v_0$. Notemos que $h(0,0) = 0$ e $N(L)$ é o espaço gerado por $PC(0)v_0$. Pelo teorema da função implícita temos que existem $\sigma > 0$ e uma aplicação contínua $q:(-\sigma, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$q(0) = 0 \text{ e } h(\alpha, q(\alpha)) = 0,$$

para todo α com $|\alpha| < \sigma$.

Para $\alpha \neq 0$, temos:

$$h(\alpha, q(\alpha)) = q(\alpha) PC(q(\alpha)) [v_0 + \alpha^{-1} r(\alpha, q(\alpha))] + PR[\alpha v_0 + r(\alpha, q(\alpha)), q(\alpha)]$$

Sabemos da equação (2.1) que encontrar $(x, \lambda) \in S$ é equivalente a encontrar $(v, \lambda) \in N(L) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda PC(\lambda) [v + g(v, \lambda)] + PR(v + g(v, \lambda), \lambda) = 0$$

e $v \neq 0$. Assim,

$q(\alpha)PC(q(\alpha)) [v_0 + \alpha^{-1}g(\alpha v_0, q(\alpha))] + \alpha^{-1}PR(\alpha v_0 + g(\alpha v_0 + g(\alpha v_0, q(\alpha)), q(\alpha)) = 0$
 colocando $p(\alpha) = \alpha^{-1}g(\alpha v_0, q(\alpha))$, pelo lema 4.1 concluímos que
 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} p(\alpha) = 0$. Daí,

$$(\alpha v_0 + \alpha p(\alpha), q(\alpha)) \in S,$$

para $0 < |\alpha| < \sigma$. \square

4.4 - OBSERVAÇÃO:

A condição $PC(0)v_0 \neq 0$ é chamada condição de transversalidade. A condição de transversalidade não é necessária para bifurcação como mostram os seguintes exemplos:

(a) Consideraremos $X = \mathbb{R}$, $L \equiv 0$, $C(\lambda) \equiv 0$,
 para todo elemento λ de \mathbb{R} e $R(x, \lambda) = x^2$ para todo elemento λ de \mathbb{R} .

Segue da equação (II) que $x^2 = 0$ e $S = \emptyset$.

Neste caso $N(L) = \mathbb{R}$, a condição de transversalidade não é válida e não existe ponto de bifurcação..

(b) Consideraremos $X = \mathbb{R}$, $L \equiv 0$, $C(\lambda) \equiv 0$ para todo elemento λ de \mathbb{R} e $R(x, \lambda) = \lambda x^2$.

Segue da equação (II) que $\lambda x^2 = 0$. Sendo

$$S = \{(x, \lambda) : F(x, \lambda) = 0 \text{ e } x \neq 0\}$$

temos que $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação.

4.5 - OBSERVAÇÃO: Um estudo mais refinado [ver C.1] pode revelar que cada elemento de S suficientemente próximo de $(0, 0)$ em $X_1 \times \mathbb{R}$ está sob a curva $\alpha \rightarrow (\alpha v_0 + p(\alpha), q(\alpha))$

para $|\alpha| < \sigma$.

Para $|\alpha| < \sigma$, seja $\alpha \rightarrow (u(\alpha), q(\alpha)) \in X_1 \times \mathbb{R}$ uma curva C^∞ , solução da equação (II) bifurcando-se em $\lambda = 0$, isto é, $u(0) = 0$ e $q(0) = 0$. Sendo que:

$$q(\alpha) = \alpha q'(0) + \frac{\alpha^2}{2!} q''(0) + \frac{\alpha^3}{3!} q'''(0) + \dots$$

$$u(\alpha) = \alpha u'(0) + \frac{\alpha^2}{2!} u''(0) + \frac{\alpha^3}{3!} u'''(0) + \dots$$

o comportamento deste ramos de soluções podem ser determinados calculando os coeficientes $u'(0)$, $u''(0)$, ... e $q'(0)$, $q''(0)$, ...

Colocaremos $h(\alpha) = F(u(\alpha), q(\alpha))$. Então $h(\alpha) \equiv 0$, para todo $|\alpha| < \sigma$. Consideraremos as equações $h'(0) = 0$, $h''(0) = 0$, $h'''(0) = 0$, etc.

$$h(\alpha) = Lu(\alpha) + q(\alpha)C(q(\alpha)) [u(\alpha)] + R(u(\alpha), q(\alpha)) \equiv 0,$$

para $|\alpha| < \sigma$.

$$h'(\alpha) = Lu'(\alpha) + q'(\alpha)C(q(\alpha)) [u(\alpha)] + q(\alpha)C'(q(\alpha)) [u'(\alpha)] \\ + D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) + D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) = 0,$$

$$h'(0) = Lu'(0) + q'(0)C(q(0)) [u(0)] + q(0)C'(q(0)) [u'(0)] \\ + D_1 R(u(0), q(0)) u'(0) + D_2 R(u(0), q(0)) q'(0) = 0,$$

atavés de um cálculo direto tiramos que:

$$h'(0) = Lu'(0) = 0.$$

Assim, $u'(0) \in N(L)$. Se $u'(0) = 0$ temos que $u(\alpha) \equiv 0$.

Vamos supor que $u'(0) \in N(L) \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
 h''(\alpha) &= Lu''(\alpha) + q''(\alpha)C(q(\alpha)) [u(\alpha)] + q'(\alpha)C(q(\alpha)) [u'(\alpha)] \\
 &+ q'(\alpha)C(q(\alpha)) [u'(\alpha)] + q(\alpha)C(q(\alpha)) [u''(\alpha)] \\
 &+ D_1^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'^2(\alpha) + D_2 D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) q'(\alpha) \\
 &+ D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) u''(\alpha) + D_1 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) u'(\alpha) \\
 &+ D_2^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'^2(\alpha) + D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q''(\alpha).
 \end{aligned}$$

E através de um cálculo direto tiramos que:

$$(4.5.1) \quad h''(0) = Lu''(0) + 2q'(0)C(0)u'(0) + D_1^2 R(0,0)u'^2(0) = 0$$

e então

$$Ph''(0) = PLu''(0) + 2q'(0)PC(0)u'(0) + PD_1^2 R(0,0)u'^2(0) = 0,$$

$$2q'(0)PC(0)u'(0) + PD_1^2 R(0,0)u'^2(0) = 0.$$

A condição de transversalidade assegura que esta equação determina $q'(0)$.

Se $q'(0) = 0$, então

$$\begin{aligned}
 h'''(\alpha) &= Lu'''(\alpha) + q'''(\alpha)C(q(\alpha)) [u(\alpha)] + q''(\alpha)C(q(\alpha)) [u'(\alpha)] \\
 &+ q''(\alpha)C(q(\alpha)) [u'(\alpha)] + q'(\alpha)C(q(\alpha)) [u''(\alpha)] \\
 &+ q''(\alpha)C(q(\alpha)) [u'''(\alpha)] + q'(\alpha)C(q(\alpha)) [u''(\alpha)] \\
 &+ q'(\alpha)C(q(\alpha)) [u''(\alpha)] + q(\alpha)C(q(\alpha)) [u'''(\alpha)] \\
 &+ D_1^3 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) + D_2 D_1^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'^2(\alpha) q'(\alpha) \\
 &+ 2D_1^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) u''(\alpha) + D_1 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'^2(\alpha) q'(\alpha) \\
 &+ D_2^2 D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) q'^2(\alpha) + D_2 D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) q''(\alpha) \\
 &+ D_2 D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) q'(\alpha) + D_1^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'^2(\alpha) u''(\alpha) \\
 &+ D_2 D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) q'(\alpha) u''(\alpha) + D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u''^2(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +D_1 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) u'''(\alpha) + D_1^2 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) u'^2(\alpha) \\
 & + D_1^2 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) u'^2(\alpha) + D_2 D_1 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'^2(\alpha) u'(\alpha) \\
 & + D_1 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q''(\alpha) u'(\alpha) + D_1 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) u''(\alpha) \\
 & + D_2^3 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'^3(\alpha) + 2D_2^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) q''(\alpha) \\
 & + D_1 D_2^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) u'(\alpha) + D_1 D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) u'(\alpha) q''(\alpha) \\
 & + D_2^2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'(\alpha) q''(\alpha) + D_2 R(u(\alpha), q(\alpha)) q'''(\alpha) .
 \end{aligned}$$

Através de um cálculo direto tiramos que:

$$h''(0) = Lu'''(0) + 3q''(0)C(0)u'(0) + D_1^3 R(0,0)u'^3(0) + 3D_1^2 R(0,0)u'(0)u''(0) = 0$$

e

$$P(0) = PLu''(0) + 3q''(0)PC(0)u'(0) + PD_1^3 R(0,0)u'^3(0) + 3PD_1^2 R(0,0)u'(0)u''(0) .$$

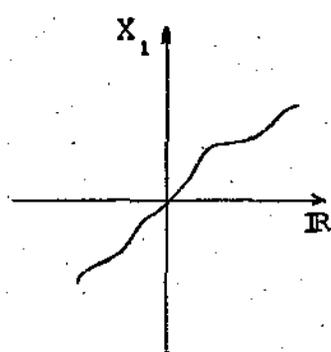
Então,

$$3q''(0)PC(0)u'(0) + PD_1^3 R(0,0)u'^3(0) + 3PD_1^2 R(0,0)u'(0)u''(0) = 0 .$$

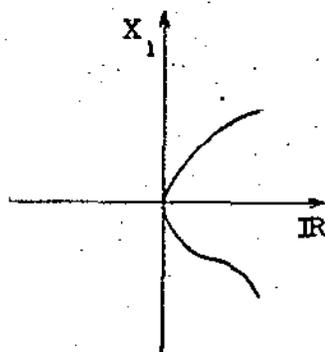
A condição de transversalidade assegura que esta equação determina $q''(0)$, uma vez que $u''(0)$ foi obtida como solução da equação (4.5.1).

Se $q^i(0) = 0$ para $i \leq s-1$ e $q^s(0) \neq 0$, então a bifurcação é :

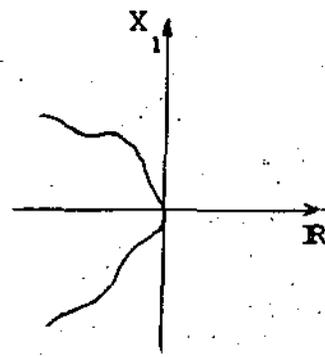
- transcítica se s é ímpar
- supercrítica se s é par e $q^s(0) > 0$
- subcrítica se s é par e $q^s(0) < 0$.



Bifurcação
Transcrítica



Bifurcação
Supercrítica



Bifurcação
Subcrítica

Podemos ter $q^S(0) = 0$ para todo elemento i de \mathbb{N} , como mostra o seguinte exemplo:

$X = X_1 = \mathbb{R}$, $L \equiv 0$, $C(\lambda) = \text{Id}$ para todo elemento λ de \mathbb{R}
 e $R(x, \lambda) = \begin{cases} -x \exp(-x^2) \text{sen} x^{-1} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Então se $\alpha \neq 0$ temos que:

$$F(\alpha, q(\alpha)) = \alpha q(\alpha) - \alpha \exp(-\alpha^2) \text{sen } \alpha^{-1} = 0.$$

e $\alpha \rightarrow (\alpha, q(\alpha))$ é um ramo da solução não-trivial onde

$$q(\alpha) = \begin{cases} \exp(-\alpha^2) \text{sen } \alpha^{-1} & \text{se } \alpha \neq 0, \\ 0 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Em particular, se considerarmos a equação(II) linear ($R \equiv 0$) teremos $q^i(0) = 0$ para todo elemento i de \mathbb{N} .

CAPÍTULO V

BIFURCAÇÃO AO LONGO DE UM AUTORAIO NÃO-DEGENERADO

Neste capítulo não restringiremos a dimensão de $N(L)$. No entanto, podemos encontrar uma solução da equação homogênea em $N(L)$.

Expressando R como série de Taylor na variável x , temos:

$$R(x, \lambda) = R(0, \lambda) + D_1 R(0, \lambda)x + \frac{1}{2!} D_1^2 R(0, \lambda)x^2 + \frac{1}{3!} D_1^3 R(0, \lambda)x^3 + \dots,$$

$$R(x, \lambda) = \sum_{k=2}^s \frac{1}{k!} D_1^k R(0, \lambda)x^k + H(x, \lambda)$$

onde $D_1^k R(0, \lambda): X_1^k \rightarrow X$ é k -linear e simétrica e

$$\|H(x, \lambda)\| / \|x\|_1^s \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|x\|_1 \rightarrow 0$$

Sejam $N_k: N(L) \rightarrow X$ definida por

$$N_k(x) = \frac{1}{k!} D_1^k R(0, 0)x^k$$

e

$M_k: N(L) \rightarrow N(L)$ definida por

$$M_k = PC(0) + PN_k$$

5.1 - TEOREMA: Suponhamos que existe $s \geq 2$ tal que:

- 1- $N_k \equiv 0$ para todo $k \leq s-1$,
- 2- Existe $z_0 \in N(L) \setminus \{0\}$ tal que $M_s(z_0) = 0$,
- 3- $DM_s(z_0): N(L) \rightarrow N(L)$ é homeomorfismo linear.

Então $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação da equação (II).

Isto é, existe uma constante $\sigma > 0$ e uma aplicação contínua $p: (-\sigma, \sigma) \rightarrow X_1$ tal que:

$$p(0) = 0 \text{ e } (\alpha z_0 + \alpha p(\alpha), \alpha^{s-1}) \in S,$$

para $0 < |\alpha| < \sigma$.

Para demonstrar este teorema, precisamos dos seguintes resultados:

Sejam $z \in N(L) \setminus \{0\}$ e $q(z, \alpha) = g(\alpha z, \alpha^{s-1})$. Então q está definida sobre uma vizinhança aberta de $(z, 0)$ em $N(L) \times \mathbb{R}$.

5.2 - LEMA: Sob as hipóteses do teorema 5.1 temos que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha) = 0 \text{ e } \lim_{\alpha \rightarrow 0} D_1 g(\alpha z, \alpha^{s-1}) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Provaremos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha) = 0$ por indução.

Para $s = 2$, o resultado segue do lema(4.1)

Suponhamos que $s > 2$ e que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} q(z, \alpha) = 0$,

para todo $k < s-1$.

Então pela definição da função g , isto é,

$$f(\alpha z, g(\alpha z, \alpha^{s-1}), \alpha^{s-1}) = 0,$$

para $(z, \alpha) \in U \subset N(L) \times \mathbb{R}$, temos que:

$$Lg(\alpha z, \alpha^{s-1}) + \alpha^{s-1} QC(\alpha^{s-1}) [\alpha z + g(\alpha z, \alpha^{s-1})] + QR[(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1})] = 0,$$

e

$$-Lq(z, \alpha) = \alpha^{s-1} QC(\alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)] + QR[\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1}],$$

$$-L\alpha^{-(k+1)} q(z, \alpha) = \alpha^{s-(k+2)} QC(\alpha^{s-1}) [z + q(z, \alpha)] + \alpha^{-(k+1)} QR[\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1}]$$

Sendo que $k \leq s-1$, o primeiro termo à direita da igualdade tende a zero, quando α tende a zero.

Desenvolvendo em série de Taylor o segundo termo da igualdade acima, vemos que o seu primeiro termo não-nulo é da forma:

$$\frac{\alpha^{-(k+1)}}{2!} [QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) \cdot (\alpha z + q(z, \alpha))^2]$$

para $\alpha \neq 0$.

Temos por hipótese que $D_1^2 R(0, 0) \equiv 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{-(k+1)}}{2!} [QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) (\alpha z + q(z, \alpha))^2] &= \frac{\alpha^{-(k+1)}}{2!} \{ \alpha^2 Q [D_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) - D_1^2 R(0, 0)] z^2 \\ &\quad + 2\alpha^{k+1} QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) [z\alpha^{-k} q(z, \alpha)] \\ &\quad + \alpha^{2k} QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) (\alpha^k q(z, \alpha))^2 \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{-(k+1)}}{2!} [QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) (\alpha z + q(z, \alpha))^2] &= \frac{1}{2!} QD_2 D_1^2 R(0, 0) [\alpha^{s-1} \alpha^2 \alpha^{-k+1} z^2] \\ &\quad + QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) z\alpha^{-k} q(z, \alpha) \\ &\quad + \frac{\alpha^{k-1}}{2!} QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha^{-k} q(z, \alpha)]^2 \end{aligned}$$

Quando α tende a zero, $D_1^2 R(0, \alpha^{s-1})$ é limitada e pela hipótese da indução $\alpha^{-k} q(z, \alpha)$ tende a zero. Daí

$$\alpha^{-(k+1)} [QD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) (\alpha z + q(z, \alpha))^2] \rightarrow 0.$$

E de maneira similar vê-se que as demais derivadas $D_1^i R(0, \alpha^{s-1})$, envolvidas na série de Taylor, tendem a zero quando α tende a zero, para $i \leq s-1$. Finalmente, consideraremos o resto, que tem a seguinte propriedade:

$$(5.2.1) \quad \|H(x, \lambda)\| / \|x\|_1^{s-1} \rightarrow 0,$$

quando $\|x\|_1 \rightarrow 0$.

Desde que,

$$\begin{aligned} \|\alpha^{-(k+1)} QH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1})\| &\leq |\alpha|^{-(k+1)} \|\alpha z + q(z, \alpha)\|^{s-1} \|\alpha z \\ &+ q(z, \alpha)\|^{1-s} \|QH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1})\| \end{aligned}$$

e

$$|\alpha|^{-(k+1)} \|\alpha z + q(z, \alpha)\|_1^{s-1} = |\alpha|^{-(k+2)} \|z + \alpha^{-1}q(z, \alpha)\|^{s-1},$$

quando α tende a zero temos que $\alpha^{-1}q(z, \alpha)$ tende a zero. Assim,

$|\alpha|^{-(k+1)} \|\alpha z + q(z, \alpha)\|_1^{s-1}$ é limitada para $k < s-1$ e por (5.2.1)

deduzimos que:

$$\|QH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1})\| \cdot \|\alpha z + q(z, \alpha)\|^{1-s} \rightarrow 0,$$

quando $\alpha \rightarrow 0$.

Finalmente, $-L\alpha^{-(k+1)}q(z, \alpha) \rightarrow 0$, quando $\alpha \rightarrow 0$; isto prova a primeira asserção do lema.

Como g é C^∞ temos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} D_1 g(\alpha z, \alpha^{s-1}) = D_1 g(0, 0)$, assim do lema (4.1) segue-se que $D_1 g(0, 0) = t(0) = 0$. \square

5.3 - LEMA: Sejam $B = \{z \in N(L) : \|z\| < \|z_0\| + 1\}$ e

$h: B \times (-v, v) \rightarrow N(L)$ definida por:

$$h(z, \alpha) = \begin{cases} PC(\alpha^{s-1}) [z + \alpha^{-1}q(z, \alpha)] + \alpha^{-s} PR(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1}) & \text{se } \alpha \neq 0, \\ M_s(z) & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

onde $q: B \times (-v, v) \rightarrow Z$ é definida por:

$$q(z, \alpha) = g(\alpha z, \alpha^{s-1}).$$

Então h e $D_1 h$ são contínuas sobre uma vizinhança aberta de $(z_0, 0)$ em $N(L) \times \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $z \in B$. Provaremos primeiramente que h é contínua em $(z, 0)$.

Pelo lema (4.1) temos que $\alpha^{-1}q(z, \alpha)$ tende a zero quando α tende a zero.

$$PC(\alpha^{s-1}) [z + \alpha^{-1}q(z, \alpha)] \rightarrow PC(0)z,$$

quando $\alpha \rightarrow 0$.

Se $s \geq 2$, o primeiro termo da série de Taylor para

$$\frac{\alpha^{-s}}{2!} PR(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1}) \text{ é } \frac{\alpha^{-s}}{2!} PD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^2$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{-s}}{2!} PD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^2 &= \frac{\alpha^{-s}}{2!} \{ \alpha^2 [PD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) - PD_1^2 R(0, 0)] z^2 \\ &\quad - 2\alpha^s PD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) z \alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha) \\ &\quad + \alpha^{2(s-1)} PD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha)]^2 \}. \end{aligned}$$

Através de um cálculo direto tiramos que:

$$\frac{\alpha^{-s}}{2!} PD_1^2 R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^2 \rightarrow 0,$$

quando $\alpha \rightarrow 0$.

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{-s}}{3!} PD_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^3 &= \frac{\alpha^{-s}}{3!} \{ \alpha^3 P [D_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) - D_1^3 R(0, 0)] z^3 \\ &\quad + 3PD_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) \alpha^2 z^2 q(z, \alpha) \\ &\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} PD_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) \alpha z q^2(z, \alpha) \\ &\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} PD_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) q^3(z, \alpha) \} \\ &= \frac{\alpha^{-s}}{3!} \{ \alpha^3 PD_2 D_1^3 R(0, 0) \alpha^{s-1} z^3 \\ &\quad + 3\alpha^{s+1} PD_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) z^2 (\alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha)) \\ &\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} [\alpha^{2s-1} PD_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) z (\alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha))^2] \\ &\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha^{s(s-1)} PD_1^3 R(0, \alpha) [(\alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha))^3] \}. \end{aligned}$$

Quando α tende a zero, $D_1^3 R(0, \alpha^{s-1})$ é limitada e $\alpha^{-(s-1)} q(z, \alpha)$ tende a zero. Assim,

$$\frac{\alpha^{-s}}{3!} PD_1^3 R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^3 \rightarrow 0.$$

Usando o binômio de Newton para as demais derivadas da série de Taylor, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha^{-s} PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)] &= \alpha^{-s} \{ PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) \alpha^s z^s \\ &\quad + s PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) \alpha^{s-1} z^{s-1} q(z, \alpha) \\ &\quad + s(s-1) PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) \alpha^{s-2} z^{s-2} q^2(z, \alpha) + \\ &\quad + \dots + \dots + PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) q^s(z, \alpha) \}. \end{aligned}$$

As derivadas até ordem $s-1$, de maneira similar tendem a zero quando α tende a zero. Considerando a s -ésima derivada temos:

$$\begin{aligned} \alpha^{-s} PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)] &= \alpha^{-s} \{ \alpha^s PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) z^s + \dots + \dots + \\ &\quad \dots + PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) q^s(z, \alpha) \}. \\ &= PD_1^s R(0, \alpha^{s-1}) z^s + \dots + \dots \end{aligned}$$

$$= + \dots + PD_1^S R(0, \alpha^{S-1}) q^S(z, \alpha).$$

Quando α tende a zero, $D_1^S R(0, \alpha^{S-1})$ é limitada e

$$\alpha^{-S} PD_1^S R(0, \alpha^{S-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)] \rightarrow PD_1^S R(0, 0) z^S.$$

Finalmente, consideremos o resto H da série de Taylor, sendo que :

$$(5.3.1) \quad \|H(x, \lambda)\| / \|x\|_1^S \rightarrow 0;$$

quando $\|x\|_1 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \|\alpha^{-S} PH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S-1})\|_1 &\leq |\alpha|^{-S} \|\alpha z + \\ &+ q(z, \alpha)\|_1^S \|PH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S-1})\|_1 \\ &+ q(z, \alpha)\|_1^{-S}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} |\alpha|^{-S} \|\alpha(z + \alpha^{-1} q(z, \alpha))\|_1^S &= |\alpha|^{-S} |\alpha|^S \|z + \alpha^{-1} q(z, \alpha)\|_1^S \\ &= \|z + \alpha^{-1} q(z, \alpha)\|_1^S \end{aligned}$$

e quando α tende a zero $\|z + \alpha^{-1} q(z, \alpha)\|_1^S$ é limitada e por

(5.3.1).

$$\|PH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S-1})\|_1 \cdot \|z + q(z, \alpha)\|_1^{-S} \rightarrow 0,$$

então

$$\alpha^{-S} \|PH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S-1})\|_1 \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} h(z, \alpha) = PC(0)z + PD_1^S R(0, 0)z^S$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} h(z, \alpha) = M_S(z)$$

donde concluimos que h é contínua.

Provaremos agora que $D_1 h$ é contínua em $(z, 0)$. Usando a série de Taylor para a aplicação R , a aplicação h pode ser escrita, para $\alpha \neq 0$, como

$$h(z, \alpha) = PC(\alpha^{S-1}) [z + \alpha^{-1}q(z, \alpha)] + \sum_{k=2}^S \frac{\alpha^{-k}}{k!} PD_1^k R(0, \alpha^{S-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^k + \alpha^{-S} PH(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S-1})$$

onde $\|H(x, \lambda)\| / \|x\|_1^S \rightarrow 0$ quando $\|x\|_1 \rightarrow 0$.

Dai,

$$D_1 h(z, \alpha)v = PC(\alpha^{S-1}) [v + D_1 g(\alpha z, \alpha^{S-1})v] + \sum_{k=2}^S \frac{\alpha^{-k}}{k!} PD_1^k R(0, \alpha^{S-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^{k-1} [\alpha v + \alpha D_1 g(\alpha z, \alpha^{S-1})v] + \alpha^{-S} PD_1 H(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S-1}) [\alpha v + D_1 g(\alpha z, \alpha^{S-1})v].$$

Como por hipótese $N_k \equiv \frac{1}{k!} D_1^k R(0, 0) \equiv 0$, para $k \leq s-1$, temos que:

$$D_1 h(z, \alpha)v = PC(\alpha^{S-1}) [v + D_1 g(\alpha z, \alpha^{S-1})v] + \frac{\alpha^{-S}}{S!} PD_1 R(0, \alpha^{S-1}) [\alpha z + q(z, \alpha)]^{S-1} [\alpha v + \alpha D_1 g(\alpha z, \alpha^{S-1})v] + \alpha^{-S} PD_1 H(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S-1}) [\alpha v + D_1 g(\alpha z, \alpha^{S-1})v].$$

Através de um cálculo direto tiramos que:

$$D_1 h(z, \alpha)v \rightarrow PC(0)v + PD_1^S R(0, 0) z^S v,$$

quando α tende a zero.

Portanto;

$$D_1 h(z, \alpha)v \rightarrow D_1 M_S(z)v,$$

quando α tende a zero e $D_1 h$ é contínua. \square

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.1 :

Consideremos a equação

$$(5.1.1) PC(\alpha^{S^{-1}}) [z + \alpha^{-S} g(\alpha z, \alpha^{S^{-1}})] + \alpha^{-S} PR(\alpha z + g(\alpha z, \alpha^{S^{-1}}), \alpha^{S^{-1}}) = 0.$$

Se (z, α) é solução da equação acima com $z \neq 0$, então $(\alpha z, \alpha^{S^{-1}})$ é solução da equação de bifurcação (2.1).

Vamos encontrar uma solução da equação acima na vizinhança de $(z_0, 0)$, usando o teorema da função implícita.

Seja $B = \{z \in N(L) : \|z\| \leq \|z_0\| + 1\}$. Então existe uma constante $\nu > 0$ tal que $\{(\alpha z, \alpha^{S^{-1}}) : |\alpha| < \nu \text{ e } z \in B\}$ está contido no domínio da função g .

Seja $h: B \times (-\nu, \nu) \rightarrow N(L)$ definida por:

$$h(z, \alpha) = \begin{cases} PC(\alpha^{S^{-1}}) [z + \alpha^{-1} q(z, \alpha)] + \alpha^{-S} PR(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{S^{-1}}) & \text{se } \alpha \neq 0, \\ M_S(z) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

onde $q: B \times (-\nu, \nu) \rightarrow Z$ é definida por

$$q(z, \alpha) = g(\alpha z, \alpha^{S^{-1}}).$$

Segue do lema 5.3 que h e $D_1 h$ são contínuas na vizinhança de $(z_0, 0)$.

Dos itens 2 e 3 da hipótese, concluímos que:

$h(z_0, 0) = 0$ e $D_1 h(z_0, 0): N(L) \rightarrow N(L)$ é um homeomorfismo linear.

Pelo teorema da função implícita, existem uma constante

$\sigma > 0$ e uma aplicação contínua $\phi: (-\sigma, \sigma) \rightarrow N(L)$ tal que $\phi(0) = 0$ e $h(z_0 + \phi(\alpha), \alpha) = 0$, para todo $|\alpha| < \sigma$. Ou ainda

$$PC(\alpha^{s-1}) [z_0 + \phi(\alpha) + \alpha^{-1}q(z_0 + \phi(\alpha), \alpha)] + \alpha^{-s}PR(\alpha z_0 + \alpha \phi(\alpha) + q(z_0 + \phi(\alpha), \alpha), \alpha^{s-1}) = 0,$$

para $|\alpha| < \sigma$.

Colocando

$$p(\alpha) = \phi(\alpha) + \alpha^{-1}q(z_0 + \phi(\alpha), \alpha)$$

então,

$$PC(\alpha^{s-1}) [z_0 + p(\alpha)] + \alpha^{-s}PR(\alpha z_0 + \alpha p(\alpha), \alpha^{s-1}) = 0$$

e

$$(z_0 + p(\alpha), \alpha^{s-1}) \in S,$$

para $0 < |\alpha| < \sigma$. \square

5.4 - OBSERVAÇÃO:

A solução z_0 da equação (5.1.1) é chamada de *autoraio*.

Um autoraio tal que $DM_S(z_0): N(L) \rightarrow N(L)$ é homeomorfismo linear, chamamos de *não-degenerado*.

5.5 - OBSERVAÇÃO:

No caso onde s é ímpar, consideremos a mudança de variáveis $v = \alpha z$ e $\lambda = -\alpha^{s-1}$. Isto nos conduz ao seguinte resultado:

$$\hat{M}_k = -PC(0) + PN_k$$

e

5.6 - TEOREMA: Suponhamos válidas as hipóteses do teorema 5.1, trocando M_S por \hat{M}_S . Então $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação e

$$(\alpha z_0 + p(\alpha), -\alpha^{s-1}) \in S,$$

para $0 < |\alpha| < \sigma$.

DEMONSTRAÇÃO:

Análoga a demonstração do teorema 5.1.

Note que se s é par, este resultado está contido no teorema 5.1, desde que

$$M_S(z) = 0 \leftrightarrow \hat{M}_S(-z) = 0. \quad \square$$



CAPÍTULO VI

PROBLEMAS VARIACIONAIS

Estaremos considerando neste capítulo as seguintes hipóteses adicionais:

- X é um espaço de Hilbert e os operadores C e R são independentes de λ .

Portanto, a equação (II) pode ser escrita como

$$Lx + \lambda Cx + Rx = 0, \text{ para } (x, \lambda) \in X_1 \times \mathbb{R}.$$

Suporemos que $L+R$ é o gradiente de um funcional, isto é, existe uma função diferenciável $f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f'(u)v = \langle Lu+Ru, v \rangle$$

para $u, v \in X_1$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em X .

6.1 - LEMA: Sob as hipóteses acima, $L+R: X_1 \rightarrow X$ é um gradiente se, e somente se,

$$\langle Lv, w \rangle = \langle Lw, v \rangle \text{ e } \langle R'(u)v, w \rangle = \langle R'(u)w, v \rangle,$$

para todo $u, v, w \in X_1$. Isto é, se e somente se, L e $R'(u)$ são simétricas sobre X_1 , para todo $u \in X_1$.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que $f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$f'(u)v = \langle Lu+Ru, v \rangle,$$

para todo $u, v \in X_1$. Então,

$$f''(u)vw = \langle Lu + R'(u)w, v \rangle$$

para todo $u, v, w \in X_1$. Desde que, $f''(u): X_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica temos que:

$$\langle Lw + R'(u)w, v \rangle = \langle Lv + R'(u)v, w \rangle$$

para todo $u, v, w \in X_1$.

Colocando $u = 0$ e sendo $R'(0) \equiv 0$ temos que:

$$\langle Lw, v \rangle = \langle Lv, w \rangle.$$

Portanto, L é simétrica sobre X_1 .

Agora,

$$\langle Lw + R'(u)w, v \rangle = \langle Lv + R'(u)v, w \rangle,$$

$$\langle Lw, v \rangle + \langle R'(u)w, v \rangle = \langle Lv, w \rangle + \langle R'(u)v, w \rangle,$$

$$\langle R'(u)w, v \rangle = \langle R'(u)v, w \rangle ;$$

donde concluimos que $R'(u)$ é simétrica para todo $u \in X_1$.

Recíprocamente, suponhamos que L e $R'(u)$ são simétricos sobre X_1 , para todo $u \in X_1$.

Seja $f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(u) = \int_0^1 \langle L(tu) + R(t, u), u \rangle dt .$$

Donde,

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_0^1 \langle L(tu), u \rangle dt + \int_0^1 \langle R(tu), u \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle tL(u), u \rangle dt + \int_0^1 \langle R(tu), u \rangle dt \\ &= \int_0^1 t \langle Lu, u \rangle dt + \int_0^1 \langle R(tu), u \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle + \int_0^1 \langle R(tu), u \rangle dt . \end{aligned}$$

Derivando a função f temos que:

$$f'(u)v = \frac{1}{2} \langle Lv, u \rangle + \frac{1}{2} \langle Lu, v \rangle + \int_0^1 (\langle R'(tu), v \rangle + \langle R(tu), v \rangle) dt.$$

Por hipótese L é simétrica ; daí

$$\begin{aligned} f'(u)v &= \langle Lu, v \rangle + \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle R(tu), tv \rangle dt \\ &= \langle Lu, v \rangle + \langle Ru, v \rangle \\ &= \langle Lu+Ru, v \rangle, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in X_1$. \square

6.2 - OBSERVAÇÃO:

Suporemos no próximo teorema que $C \in B(X_1, X)$ é o gradiente de um funcional convexo. Isto é equivalente dizer que C é simétrica e não-negativa sobre X_1 .

6.3 - TEOREMA: Seja $L+R$ um gradiente e seja C o gradiente de um funcional convexo. Suponhamos que $0 < \dim N(L) < \infty$, $C(N(L)) \subset N(L)$ e que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle Cv, v \rangle > \alpha \|v\|^2,$$

para todo $v \in N(L)$. Então $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação da equação (II).

- Para demonstrar o teorema precisamos do seguinte lema:

6.4 - LEMA: Sob as hipóteses do teorema 6.3, $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(v, \lambda) = \begin{cases} \lambda + \frac{\langle R(v+g(v, \lambda)), v \rangle}{\langle Cv, v \rangle} & \text{se } v \neq 0, \\ \lambda & \text{se } v = 0 \end{cases}$$

e $D_2 h$ são contínuas numa vizinhança de $(0, 0)$ em $N(L) \times \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $(0, \lambda) \in U$. Provaremos que h é contínua em $(0, \lambda)$.

Para isto, é suficiente mostrar que:

$$\|R(v+g(v, \lambda))\| / \|v\| \rightarrow 0,$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$, pois

$$\frac{|\langle R(v+g(v, \lambda)), v \rangle|}{|\langle Cv, v \rangle|} \leq \frac{\| \langle R(v+g(v, \lambda)) \rangle \| \cdot \|v\|}{|\langle Cv, v \rangle|} \quad [\text{Vide A.12}]$$

e da hipótese temos que:

$$\frac{\|R(v+g(v,\lambda))\|_1 \cdot \|v\|_1}{|\langle Cv, v \rangle|} < \frac{\|R(v+g(v,\lambda))\|_1 \cdot \|v\|_1}{\alpha \|v\|_1^2} = \frac{\|R(v,\lambda)\|_1}{\alpha \|v\|_1}$$

então,

$$\frac{|\langle R(v+g(v,\lambda)), v \rangle|}{|\langle Cv, v \rangle|} < \frac{\|R(v+g(v,\lambda))\|_1}{\alpha \|v\|_1}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &= \{ \|v\|^2 + \|Lv\|^2 \}^{1/2} \\ &= \|v\|, \text{ pois } v \in N(L). \end{aligned}$$

Desde que,

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|R(v+g(v,\lambda)) - R(0)\|_1}{\|v+g(v,\lambda)\|_1} &= \|D_1 R(0)(v+g(v,\lambda))\|_1, \\ &= 0 \end{aligned}$$

é suficiente provar que $\|v+g(v,\lambda)\|_1 / \|v\|$ é limitada quando $\|v\| \rightarrow 0$. Agora,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|v+g(v,\lambda) - g(0,\lambda)\|_1}{\|v\|} \leq \lim_{\|v\| \rightarrow 0} 1 + \frac{\|g(v,\lambda) - g(0,\lambda)\|_1}{\|v\|}$$

assim

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|v+g(v,\lambda) - g(0,\lambda)\|_1}{\|v\|} \leq 1 + D_1 g(0,\lambda)v.$$

Sendo $D_1 g(0,\lambda)$ limitada, então $\|v+g(v,\lambda)\|_1 / \|v\|$ é limitada quando $\|v\|$ tende a zero.

Portanto,

$$\frac{\|R(v+g(v,\lambda))\|}{\|v\|} = \frac{\|R(v+g(v,\lambda))\|}{\|v+g(v,\lambda)\|} \cdot \frac{\|v+g(v,\lambda)\|}{\|v\|} \rightarrow 0,$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$.

Provaremos agora que $D_2 h(v,\lambda)$ é contínua em $(0,\lambda) \in U$.

Sendo

$$D_2 h(v,\lambda) = \begin{cases} 1 + \frac{\langle DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda), v \rangle}{\langle Cv, v \rangle} & \text{se } v \neq 0, \\ 1 & \text{se } v = 0, \end{cases}$$

basta provar que :

$$\frac{\langle DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda), v \rangle}{\langle Cv, v \rangle} \rightarrow 0,$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$.

Como

$$\frac{|\langle DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda) \rangle|}{|\langle Cv, v \rangle|} \leq \frac{\|DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda)\| \cdot \|v\|}{|\langle Cv, v \rangle|},$$

[vide A.12], e da hipótese temos que:

$$\frac{\|DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda)\| \cdot \|v\|}{|\langle Cv, v \rangle|} \leq \frac{\|DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda)\| \cdot \|v\|}{\alpha \|v\|^2}$$

então

$$\frac{|\langle DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda) v \rangle|}{|\langle Cv, v \rangle|} \leq \frac{\|DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda)\|}{\alpha \|v\|}.$$

Agora é suficiente provar que :

$$\frac{\|DR(v+g(v,\lambda)) D_2 g(v,\lambda)\|}{\|v\|} \rightarrow 0,$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$. Desde que $DR(0) = 0$, basta provar que $\|D_2 g(v, \lambda)\| / \|v\|$ é limitada quando $\|v\|$ tende a zero.

Como

$$\frac{\|D_2 g(v, \lambda)\|}{\|v\|} = \frac{\|D_2 g(v, \lambda) - D_2 g(0, \lambda)\|}{\|v\|},$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$ temos que:

$$\frac{\|D_2 g(v, \lambda) - D_2 g(0, \lambda)\|}{\|v\|} \rightarrow \|D_1 D_2 g(0, \lambda)v\|$$

e sendo $\|D_1 D_2 g(0, \lambda)\|$ limitada, então $\|D_2 g(v, \lambda)\| / \|v\|$ é limitada. Daí segue que $D_2 h$ é contínua em $(0, \lambda) \in U$. \square

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 6.1:

Sejam $C(z) \in C(Z)$ e $w \in N(L)$. Desde que $z \in \text{Im}L \cap X_1$, então existe $x \in \mathcal{D}(L)$ tal que:

$$L(x) = z.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle C(z), w \rangle &= \langle z, C(w) \rangle, \\ &= \langle Lx, C(w) \rangle, \\ &= \langle x, LC(w) \rangle. \end{aligned}$$

Como $C(w) \in N(L)$, pois $C(N(L)) \subset N(L)$, segue que:

$$LC(w) = 0$$

e

$$\langle C(z), w \rangle = 0,$$

para todo $w \in N(L)$. Portanto,

$$C(z) \in N(L)^\perp \quad \text{e} \quad C(z) \subset N(L)^\perp$$

Como C e R independem de λ , a equação (2.1) se escreve da seguinte maneira:

$$\lambda PC[v+g(v,\lambda)] + PR(v+g(v,\lambda),\lambda) = 0.$$

Como $g(v,\lambda) \in Z$ então $C(g(v,\lambda)) \in N(L)^\perp$ e $PC(g(v,\lambda))=0$.

Assim

$$(6.3.1) \quad \lambda PCv + PR[v+g(v,\lambda)] = 0.$$

E para qualquer solução de (2.1) temos que:

$$\lambda \langle Cv, v \rangle + \langle R(v+g(v,\lambda)), v \rangle = 0.$$

Seja $h:U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(v,\lambda) = \begin{cases} \lambda + \frac{\langle R(v+g(v,\lambda)), v \rangle}{\langle Cv, v \rangle} & \text{se } v \neq 0, \\ \lambda & \text{se } v = 0. \end{cases}$$

Então, pelo lema 6.4 concluímos que h e $D_2 h$ são contínuas numa vizinhança de $(0,0)$ em $N(L) \times \mathbb{R}$.

Desde que $h(0,0) = 0$ e $D_2 h(0,0) = Id$, segue do teorema da função implícita que existem uma vizinhança aberta V de zero em $N(L)$ e uma aplicação contínua $\psi:V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\psi(0) = 0 \quad \text{e} \quad h(v,\psi(v)) = 0,$$

para todo $v \in V$.

ψ é diferenciável em V , exceto possivelmente no ponto zero. Podemos escolher V suficientemente pequeno tal que $(v, \psi(v))$ pertence a U para todo elemento v de V .

Para resolver a equação de bifurcação (6.3.1), precisamos encontrar um elemento v de $V \setminus \{0\}$ tal que

$$(6.3.2) \quad \psi(v)P_C v + PR(v+g(v, \psi(v))) = 0.$$

Seja $\phi: V \rightarrow Z$ definida por

$$\phi(v) = g(v, \psi(v)).$$

Sejam $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta: V \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\alpha(v) = f(v+\phi(v)) \quad \text{e} \quad \beta(v) = \langle C(v+\phi(v)), v+\phi(v) \rangle,$$

ou seja,

$$\beta(v) = \langle C v, v \rangle + \langle C \phi(v), \phi(v) \rangle,$$

para todo elemento v de V , pois

$$\begin{aligned} \beta(v) &= \langle C v + C \phi(v), v + \phi(v) \rangle, \\ &= \langle C v, v \rangle + \langle C v, \phi(v) \rangle + \langle C \phi(v), v \rangle + \langle C \phi(v), \phi(v) \rangle. \end{aligned}$$

Como $\phi(v)$ é um elemento de Z , $C(\phi(v))$ pertence a $C(Z)$ e $C(Z)$ está contido em $N(L)^\perp$, segue-se que

$$\langle v, C \phi(v) \rangle = 0.$$

Por outro lado,

$$\langle v, C \phi(v) \rangle = \langle C v, \phi(v) \rangle,$$

donde se conclui a afirmação.

Tentaremos minimizar α relativamente a $\beta(v) = \epsilon$, isto é, mostraremos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, este mínimo é alcançado em

$$M(\epsilon) = \{v \in V ; \beta(v) = \epsilon\}.$$

É claro que, zero não pertence a $M(\epsilon)$ e $\beta(v) > \alpha \|v\|^2$ para todo $v \in V$.

Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, vemos que $M(\epsilon)$ está contido em $W \setminus \{0\}$, onde W é uma vizinhança aberta de zero em $N(L)$ tal que $\bar{W} \subset V$.

Como $\dim N(L)$ é finita e β contínua sobre V , concluímos que $M(\epsilon)$ é compacto. Sendo $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, existe $v_0 \in M(\epsilon)$ tal que $\alpha(v_0) < \alpha(v)$, para todo $v \in M(\epsilon)$.

Desde que, ψ é diferenciável sobre $V \setminus \{0\}$, temos que α e β são diferenciáveis em uma vizinhança de $M(\epsilon)$.

Para ϵ positivo e suficientemente pequeno, temos que:

$$\beta'(v)v \neq 0,$$

para todo elemento v de $M(\epsilon)$.

De fato, através de um cálculo direto tiramos que:

$$\beta'(v)v = 2 \langle Cv, v \rangle + 2 \langle C\phi(v), \phi'(v)v \rangle.$$

Quando $\|v\|^2$ tende a zero temos que:

$$\frac{\langle C\phi(v), \phi'(v)v \rangle}{\|v\|^2} \rightarrow 0,$$

e este resultado será mostrado a seguir no lema 6.5.

Assim;

$$\frac{1}{2} \beta'(v)v \geq \alpha \|v\|^2 + o(\|v\|^2).$$

Pelo teorema de Lagrange [vide A.13] temos que: existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha'(v_0)w = \frac{1}{2}\xi\beta'(v_0)w,$$

para todo elemento w de $N(L)$. Isto é,

$$(6.3.3) \quad f'(v_0 + \phi(v_0)) [w + \phi'(v_0)w] = \xi \langle C(v_0 + \phi(v_0)), w + \phi'(v_0)w \rangle,$$

para todo elemento w de $N(L)$.

Por outro lado, o funcional f é o gradiente de $L+R$ e o primeiro membro de (6.3.3) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$(6.3.4) \quad \langle L(v_0 + \phi(v_0)) + R(v_0 + \phi(v_0)), w + \phi'(v_0)w \rangle,$$

para todo elemento w de $N(L)$.

Como L é linear e v pertence a $N(L)$ resulta que:

$$L(v_0 + \phi(v_0)) = L(\phi(v_0))$$

e daí a expressão (6.3.4) se escreve como

$$(6.3.5) \quad \langle L(\phi(v_0)) + R(v_0 + \phi(v_0)), w + \phi'(v_0)w \rangle,$$

para todo elemento w de $N(L)$.

Agora,

$$R(v_0 + \phi(v_0)) = P[R(v_0 + \phi(v_0))] + Q[R(v_0 + \phi(v_0))]$$

e

$$\langle v, w \rangle = 0,$$

para todo elemento v de $\text{Im}(L)$.

Segue-se que (6.3.5) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(6.3.6) \quad \langle R(v_0 + \phi(v_0)), w \rangle + \langle L\phi(v_0) + QR(v_0 + \phi(v_0)), \phi'(v_0)w \rangle.$$

O segundo membro de (6.3.3) pode ser escrito como

$$(6.3.7) \quad \xi \langle Cv_0, w \rangle + \xi \langle C\phi(v_0), \phi'(v_0)w \rangle.$$

De fato,

$$\begin{aligned} C(v_0 + \phi(v_0)), w + \phi'(v_0)w &= \xi \langle Cv_0, w \rangle + \xi \langle C\phi(v_0), w \rangle \\ &\quad + \xi \langle Cv_0, \phi'(v_0)w \rangle + \xi \langle C\phi(v_0), \phi'(v_0)w \rangle \end{aligned}$$

e $C(\phi(v_0)) \in N(L)^\perp$, $C(v_0) \in N(L)^\perp$, $\phi'(v_0)w \in \text{Im}(L)$.

Da expressão (6.3.6) e (6.3.7) temos que:

$$(6.3.8) \quad \begin{aligned} &\langle R(v_0 + \phi(v_0)), w \rangle + \langle L\phi(v_0) + QR(v_0 + \phi(v_0)), \phi'(v_0)w \rangle \\ &= \xi \langle Cv_0, w \rangle + \xi \langle Cv_0, \phi'(v_0)w \rangle, \end{aligned}$$

para todo elemento w de $N(L)$.

Agora da definição de g (e ϕ) temos que :

$$(6.3.9) \quad L(\phi(v_0)) + QR(v_0 + \phi(v_0)) + \psi(v_0)QC[v_0 + \phi(v_0)] = 0,$$

para todo $(v, \psi(v))$ pertence a U onde U é uma vizinhança aberta de $(0,0)$ em $N(L) \times \mathbb{R}$.

Como $Cv_0 \in N(L)$ e $C\phi(v_0) \in N(L)$ temos que:

$$QC(v_0) = 0 \quad \text{e} \quad QC\phi(v_0) = C\phi(v_0).$$

E (6.3.9) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$L\phi(v_0) + QR(v_0 + \phi(v_0)) = -\psi(v_0)C\phi(v_0).$$

Assim,

$$(6.3.10) \quad \langle L\phi(v_0) + QR(v_0 + \phi(v_0)), \phi'(v_0)w \rangle = -\psi(v_0) \langle C\phi(v_0), \phi'(v_0)w \rangle$$

para todo elemento w de $N(L)$.

Agora da definição da aplicação ψ temos que:

$$h(v, \psi(v)) = 0,$$

para todo elemento v de V , onde V é uma vizinhança aberta de zero em $N(L)$. Mas,

$$h(v_0, \psi(v_0)) = \frac{\langle R(v_0 + \psi(v_0)), v_0 \rangle}{\langle Cv_0, v_0 \rangle} + \psi(v_0) = 0.$$

Assim,

$$(6.3.11) \quad \langle R(v_0 + \psi(v_0)), v_0 \rangle = -\psi(v_0) \langle Cv_0, v_0 \rangle.$$

Considerando $w = v_0$ em (6.3.9) temos que:

$$\begin{aligned} & \langle R(v_0 + \phi(v_0)), v_0 \rangle + \langle L\phi(v_0) + QR(v_0 + \phi(v_0)), \phi'(v_0)v_0 \rangle \\ & = \xi \langle Cv_0, v_0 \rangle + \xi \langle C\phi(v_0), \phi'(v_0)v_0 \rangle. \end{aligned}$$

De (6.3.10) e (6.3.11) segue que:

$$-\psi(w) \langle Cv_0, v_0 \rangle - \psi(v_0) \langle C\phi(v_0), \phi'(v_0)v_0 \rangle = \xi \langle Cv_0, v_0 \rangle + \xi \langle C\phi(v_0), \phi'(v_0)v_0 \rangle .$$

Desde que,

$$\langle Cv_0, v_0 \rangle + \langle C\phi(v_0), \phi'(v_0)v_0 \rangle = \frac{1}{2} \beta'(v_0)v_0 \neq 0 ,$$

segue que

$$\xi = -\psi(v_0) .$$

Portanto (6.3.7) e (6.3.9) mostram que:

$$\langle R(v_0 + \phi(v_0)), w \rangle = -\psi(v_0) \langle Cv_0, w \rangle ,$$

para todo elemento w de $N(L)$.

Assim demonstramos que v satisfaz a equação de bifurcação (6.3.2) e $(v_0, \psi(v_0))$ satisfaz (2.1).

Para completarmos a demonstração, precisamos mostrar que v_0 tende a zero quando ϵ tende a zero. Mas isto segue do fato que:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \beta(v_0) \\ &= \langle Cv_0, v_0 \rangle + \langle C\phi(v_0), \phi(v_0) \rangle \geq \alpha \|v_0\|^2 . \quad \square \end{aligned}$$

6.5 - LEMA: Sob as hipóteses do teorema 6.3 ,

$$\langle C\phi(v), \phi'(v) \rangle / \|v\|^2 \rightarrow 0 ,$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$. $\phi'(v): N(L) \rightarrow Z$ denota a derivada da aplicação $\phi: V \rightarrow Z$ dada por

$$\phi(v) = g(v, \psi(v)).$$

DEMONSTRAÇÃO:

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz [vide A.12] temos:

$$\frac{|\langle C\phi(v), \phi'(v)v \rangle|}{\|v\|^2} < \frac{\|C\phi(v)\| \cdot \|\phi'(v)v\|}{\|v\|^2}.$$

Como $C \in B(X_1, X)$ temos que:

$$\frac{\|C\phi(v)\| \cdot \|\phi'(v)v\|}{\|v\|^2} \leq \frac{\|C\| \cdot \|\phi(v)\| \cdot \|\phi'(v)v\|}{\|v\|^2} \leq \frac{K\|\phi(v)\| \cdot \|\phi'(v)v\|}{\|v\|^2}$$

onde K é uma constante. Daí,

$$\frac{\|\langle C\phi(v), \phi'(v)v \rangle\|}{\|v\|^2} < \frac{K\|\phi(v)\| \cdot \|\phi'(v)v\|}{\|v\|^2}.$$

Assim, é suficiente provar que:

$$\frac{\|\phi(v)\| \cdot \|\phi'(v)v\|}{\|v\|^2} \rightarrow 0$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$.

Então,

$$\frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|} = \frac{\|g(v, \psi(v))\|}{\|v\|} \leq \frac{\|D_1 g(\theta(\lambda)v, \lambda)\|}{\|v\|} \cdot \|v\|, \text{ com } 0 < \theta < 1.$$

Como $g \in C^\infty$ e $D_1 g(0,0) = 0$ segue que:

$$\frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|} \rightarrow 0,$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$.

Para completarmos a demonstração, precisamos provar que:

$\|\phi'(v)\|_1$ é limitada, quando $\|v\|$ tende a zero.

Agora, para $w \in N(L)$ e $v \in V$ com $v \neq 0$ temos que:

$$\phi'(v)w = D_1 g(v, \psi(v))w + D_2 g(v, \psi(v))\psi'(v)w .$$

Como $D_1 g(v, \psi(v))$ e $D_2 g(v, \psi(v))$ tendem a zero quando $\|v\|$ tende a zero, é suficiente provar que $\psi'(v)w$ é limitada quando $\|v\|$ tende a zero.

Mas, pela definição de ψ ,

$$h(v, \psi(v)) = 0 ,$$

para todo elemento v de U . Assim,

$$(6.5.1) \quad D_1 h(v, \psi(v))w + D_2 h(v, \psi(v))\psi'(v)w = 0 ,$$

para todo elemento w de $N(L)$.

Pelo lema 6.4 temos que :

$$D_2 h(v, \psi(v)) \rightarrow \text{Id} ,$$

quando v tende a zero, onde Id é aplicação identidade de $N(L)$ em $N(L)$.

Agora provaremos que $D_1 h(v, \psi(v))$ é limitada quando $\|v\|$ tende a zero.

Sendo,

$$D_1 h(v, \psi(v))w = \frac{\langle DR(v+\phi(v)) [\underline{w+\phi'(v)w}], v \rangle + \langle R(v+\phi(v)), w \rangle}{\langle Cv, v \rangle} - \frac{2\langle R(v+\phi(v)), v \rangle \langle Cv, w \rangle}{\langle Cv, v \rangle^2} .$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz fornece que:

$$|D_1 h(v, \psi(v))| \leq \frac{\|DR(v+\phi(v)) [w+\phi'(v)w]\| \|v\| + \|R(v+\phi(v))\| \|w\|}{|\langle Cv, v \rangle|} + \frac{2 \|R(v+\phi(v))\| \|v\| \|C\| \|v\| \|w\|}{|\langle Cv, v \rangle|^2}.$$

Da hipótese temos que:

$$|D_1 h(v, \psi(v))| \leq \frac{\|DR(v+\phi(v)) [w+\phi'(v)w]\| \|v\| + \|R(v+\phi(v))\| \|w\|}{\alpha^2 \|v\|^2} + \frac{2 \|R(v+\phi(v))\| \|v\| \|C\| \|v\| \|w\|}{\alpha \|v\|^4}.$$

Como $DR(0) = 0$ e conseqüentemente $\|R(v)\| / \|v\|^2$ é limitado quando $\|v\|$ tende a zero.

Para provar que:

$$\frac{\|R(v+\phi(v))\| \|w\|}{\|v\|^2} \rightarrow 0,$$

quando $\|v\| \rightarrow 0$, é suficiente provar que $\frac{\|v+\phi(v)\|}{\|v\|^2}$ é limitado quando $\|v\| \rightarrow 0$.

Temos que:

$$\frac{\|R(v+\phi(v))\| \|w\|}{\|v\|^2} = \frac{\|R(v+\phi(v))\| \|v+\phi(v)\|^2 \|w\|}{\|v+\phi(v)\|^2 \|v\|^2},$$

como

$$\frac{\|v+\phi(v)\|}{\|v\|} < \frac{\|v\| + \|\phi(v)\|}{\|v\|} = 1 + \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|},$$

segue que:

$\frac{\|v+\phi(v)\|}{\|v\|}$ é limitado, quando $\|v\|$ tende a zero.

Agora, sendo D uma aplicação contínua temos que:

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{DR(v+\phi(v)) [w+\phi'(v)w]}{\alpha \|v\|^2} = D \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{R(v+\phi(v)) [w+\phi'(v)w]}{\|v\|^2} \\ = 0.$$

Assim concluímos que $D_h(v, \psi(v))$ é limitada, quando $\|v\|$ tende a zero e por conseguinte $\|\phi'(v)\|$ é limitada. \square

6.6 - OBSERVAÇÃO:

Notemos que a conclusão do teorema 6.3 não contém a afirmação de que existem curvas contínuas de soluções não-triviais bifurcando-se da solução básica, como ocorre nos teoremas 4.3 e 5.1. E tal afirmação não é possível, como mostra o seguinte exemplo dado por Böhme [ver B.2].

Seja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que

$$\phi(t + 2\pi, s) = \phi(t, s + 2\pi) = \phi(t, s) ,$$

para todo t, s pertencentes a \mathbb{R} .

Suporemos que

$$\int_0^{2\pi} \phi(t, s) ds = 0 ,$$

para todo t pertencente a \mathbb{R} .

Se $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\phi(t, s) = \int_0^{2\pi} \phi(t, r) dr ,$$

para todo t, s pertencentes a \mathbb{R} , então ϕ é C^∞ e

$$\phi(t+2\pi, s) = \phi(t, s+2\pi) = \phi(t, s) ,$$

para todo t, s pertencentes a \mathbb{R} .

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \phi(\rho^{-1}, \theta) \exp -\rho^{-2} & \text{se } \rho > 0, \\ 0 & \text{se } \rho = 0 \end{cases}$$

onde (ρ, θ) são coordenadas polares de (x,y) pertencentes a \mathbb{R}^2 .

Seja $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o gradiente de f . Consideremos a equação

(II) onde $X = X_1 = \mathbb{R}^2$, $L \equiv 0$ e $C \equiv \text{Id}$, isto é,

$$\text{grad } f(x,y) + \lambda(x,y) = 0.$$

Colocando

$$F(\rho, \theta) = \begin{cases} \phi(\rho^{-1}, \theta) \exp -\rho^{-2} & \text{se } \rho > 0, \\ 0 & \text{se } \rho = 0 \end{cases}$$

temos que (II) é equivalente a

$$(6.6.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{y}{\rho} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} + \lambda \rho \sin \theta = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{x}{\rho} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} + \lambda \rho \cos \theta = 0, \end{cases}$$

para $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Assim, se $(x,y,\lambda) \in S$ temos que (ρ, θ) , com $\rho > 0$, é so lução de (6.6.1). Consequentemente

$$\frac{\partial F(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{\rho} & -\lambda \rho \cos \theta \\ \frac{y}{\rho} & -\lambda \rho \sin \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{x}{\rho} & \frac{-\sin \theta}{\rho} \\ \frac{y}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-x\lambda \sin \theta + y\lambda \cos \theta}{x \cos \theta + y \sin \theta} \\ &= \frac{-\lambda \rho \cos \theta \sin \theta + \lambda \rho \sin \theta \cos \theta}{\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta} = 0 \end{aligned}$$

Da definição da função F , temos que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\rho^{-1}, \theta) \exp -\rho^{-2} = 0.$$

ou melhor

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\rho^{-1}, \theta) = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\rho^{-1}, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\theta \phi(\rho^{-1}, r) dr = 0$$

e finalmente

$$\phi(\rho^{-1}, \theta) = 0.$$

Suporemos agora que existem $\sigma > 0$ e aplicações contínuas

$$\gamma: (-\sigma, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \mu: (-\sigma, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que

$$\gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mu(0) = 0$$

e $(\gamma(\alpha), \mu(\alpha))$ é solução de (II) para todo α pertencente a $(-\sigma, \sigma)$.

Seja $(r(\alpha), \psi(\alpha))$ as coordenadas polares do ponto $\gamma(\alpha)$ pertencente a \mathbb{R}^2 . Suporemos que existe α_0 pertencente a $(-\sigma, \sigma)$ tal que $r(\alpha_0) > 0$. Então $\phi(r(\alpha_0)^{-1}, \psi(\alpha_0)) = 0$.

Seja K o conjunto das componentes que anulam ϕ . Então $(r(\alpha_0)^{-1}, \psi(\alpha_0))$ pertencem a K .

Como K é limitado e γ e μ são contínuas temos que:

$$(\tau(\alpha)^{-1}, \psi(\alpha)) \in K,$$

para todo $\alpha \in (-\sigma, \sigma)$. Isto contradiz $r(0) = 0$ e assim concluímos que $\gamma(\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in (-\sigma, \sigma)$.

Para $\rho > 0$ podemos escolher $\theta(\rho) \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\phi(\rho^{-1}, \theta(\rho)) = 0.$$

Seja $\gamma(\rho) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos $(\rho, \theta(\rho))$ as coordenadas polares de $\gamma(\rho)$. Então $(\gamma(\rho), \lambda)$ é solução de (II) se $(\rho, \theta(\rho))$ é solução de (6.6.1).

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} \cos \theta + \lambda \rho \cos \theta = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} \sin \theta + \lambda \rho \sin \theta = 0$$

sendo que $\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta(\rho)) = 0$, pois $\phi(\rho^{-1}, \theta(\rho)) = 0$.

Portanto $(\gamma(\rho), \lambda)$ é uma solução de (II) se

$$\lambda(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta(\rho)).$$

Logo $\lambda(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0$. Assim concluímos que $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação de (II).

6.7 - DEFINIÇÃO: Seja $G: Y \times \mathbb{R} \rightarrow X$ uma aplicação C^∞ , onde X e Y são espaços de Banach. Um ponto $\mu_0 \in \mathbb{R}$, é chamado ponto de bifurcação assintótico para o problema,

$$(6.7.1) \quad G(u, \mu) = 0,$$

$(u, \mu) \in Y \times \mathbb{R}$ se existe uma sequência, $\{(u_n, \mu_n)\}$, de soluções de (6.7.1) tal que $\|u_n\|$ converge para o infinito e μ_n converge para μ_0 quando n converge para o infinito:

6.8 - DEFINIÇÃO: Dizemos que a aplicação $G: Y \times \mathbb{R} \rightarrow X$ é assintoticamente linear para cada $\mu \in \mathbb{R}$, quando existe uma aplicação linear limitada $D_1 G(\infty, \mu): Y \rightarrow X$ tal que

$$\|G(u, \mu) - D_1 G(\infty, \mu)u\| / \|u\| \rightarrow 0,$$

quando $\|u\| \rightarrow \infty$.

Agora, podemos reduzir o problema de bifurcação assintótica para o problema da forma (II). Para isto definimos uma aplicação $F: Y \times \mathbb{R} \rightarrow X$ por

$$(6.8.1) \quad F(u, \mu) = \begin{cases} \|u\|^2 G(u/\|u\|^2, \mu) & \text{se } u \neq 0, \\ 0 & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

Quando u tende a zero, $\|u\|^2$ tende a zero e $G(u/\|u\|^2, \mu)$ é limitada. Isto implica que F é uma aplicação contínua.

Como

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|F(u, \mu) - F(0, \mu)\|}{\|u\|} = \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \|G(u/\|u\|^2, \mu)\| \cdot \|u\|.$$

Seja agora $u = \frac{x}{\|x\|^2}$. Isto dá

$$\begin{aligned} \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \|G(u/\|u\|^2, \mu)\| \cdot \|u\| &= \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|G(x, \mu)\|}{\|x\|} \\ &= D_1 G(\infty, \mu). \end{aligned}$$

Assim,

$$D_1 F(0, \mu) = D_1 G(\infty, \mu) ,$$

para todo μ pertencente a \mathbb{R} .

É claro que μ_0 pertencente a \mathbb{R} é ponto de bifurcação assintótico de (6.7.1) se, e somente se, μ_0 é ponto de bifurcação de (II), onde G e F estão definidas por (6.8.1) .

6.9 - OBSERVAÇÃO:

O problema de bifurcação assintótica para problemas variacionais, pode ser discutido usando teorema 6.3 .Suporemos que X é um espaço de Hilbert real e consideraremos o problema ,

$$(6.9.1) \quad Lx + \lambda x + T(x) = 0 ,$$

para $(x, \lambda) \in X_1 \times \mathbb{R}$, $T: X_1 \rightarrow X$ é uma aplicação C^∞ , tal que $DT(x)$ tende a zero ,quando x tende a infinito.

Suporemos que $L+T$ é uma aplicação simétrica sobre X_1 e que T é o gradiente do seguinte funcional ,

$$h(u) = \int_0^1 \langle T'(tu), u \rangle dt ,$$

para u pertencente a X_1 .

De fato;

$$\begin{aligned} h'(u)v &= \int_0^1 (\langle T'(tu)tv, u \rangle + \langle T(tu), u \rangle) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle T(tu), tv \rangle dt \end{aligned}$$

$$= \langle T(u), v \rangle .$$

Afirmamos que quando $\|x\|$ tende a infinito, $\|Tx\| / \|x\|$ e $\|h(x)\| / \|x\|^2$ tendem a zero. De fato, $DT(x)$ tende a zero quando $\|x\|$ tende a infinito, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe M tal que $\|DT(y)\| < \varepsilon$ sempre que $\|y\| > M$.

Considere x_0 , um ponto qualquer de X , com $\|x_0\| = K$.

Pela desigualdade do valor médio temos que:

$$(6.9.2) \quad \|T(x) - T(x_0)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|DT(x + t(x-x_0))\| \cdot \|x-x_0\| .$$

Para qualquer $x \in B_K(0)$, onde $B_K(0)$ é uma bola aberta de centro zero e raio K , temos que:

$$\|T(x) - T(x_0)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|DT(x + t(x-x_0))\| \cdot 2K$$

Como K pode ser considerado tão grande quanto se queira, tomemos $K > M$ e assim

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon K .$$

Seja $c \in \mathbb{R}_+^*$. Temos que:

$$\|T(x) - T\left(\frac{cx}{\|x\|}\right)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|DT\left(\frac{cx}{\|x\|} + t\left(x - \frac{cx}{\|x\|}\right)\right)\| \cdot \left\|x - \frac{cx}{\|x\|}\right\|$$

Agora seguem as seguintes desigualdades:

$$\|T(x)\| - \left\|T\left(\frac{cx}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T(x) - T\left(\frac{cx}{\|x\|}\right)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|DT\left(\frac{cx}{\|x\|} + t\left(x - \frac{cx}{\|x\|}\right)\right)\| \cdot \left\|x - \frac{cx}{\|x\|}\right\|$$

$$(6.9.3) \quad \|T(x)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|DT\left(\frac{cx}{\|x\|} + t\left(x - \frac{cx}{\|x\|}\right)\right)\| \cdot \left\|x + \frac{cx}{\|x\|}\right\| + \left\|T\left(\frac{cx}{\|x\|}\right)\right\| .$$

Dividindo a equação (6.9.3) por $\|x\|$ temos que :

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{0 < t < 1} \left\| DT\left(\frac{cx}{\|x\|} + t(x - \frac{cx}{\|x\|})\right) \right\| \left(\frac{\|x\|}{\|x\|} + \frac{c}{\|x\|} \right) + \frac{\|T(\frac{cx}{\|x\|})\|}{\|x\|}$$

Daí segue que para $\|x\| > M$

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon + \frac{c\varepsilon}{\|x\|} + \frac{\|T(\frac{cx}{\|x\|})\|}{\|x\|}$$

Mas $\frac{cx}{\|x\|}$ tem norma igual a c e sendo c arbitrário, podemos tomar $c > M$ e como

$$\|T(\frac{cx}{\|x\|})\| - \|T(x_0)\| \leq \|T(\frac{cx}{\|x\|}) - T(x_0)\|$$

da equação (6.9.2) concluimos que:

$$\|T(\frac{cx}{\|x\|})\| < \varepsilon + \|T(x_0)\|$$

Assim,

$$\frac{\|T(\frac{cx}{\|x\|})\|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon}{\|x\|} + \frac{\|T(x_0)\|}{\|x\|}$$

Agora, para $\|x\| > M$ temos que:

$$\frac{\varepsilon}{\|x\|} < \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon_1$$

Como $\|T(x_0)\| = \kappa$ (κ uma constante real) então

$$\frac{\|T(x_0)\|}{\|x\|} < \frac{\kappa}{M} = \varepsilon_2$$

Assim,

$$\frac{\|T(\frac{cx}{\|x\|})\|}{\|x\|} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

donde concluimos que :

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon_1 + c\varepsilon_2 + \varepsilon_2 = \varepsilon'.$$

Analogamente, demonstra-se que $\frac{\|h(x)\|}{\|x\|^2}$ tende a zero - quando a $\|x\| \rightarrow \infty$.

Em particular, notamos que:

$$G(x, \lambda) = Lx + \lambda x + T(x)$$

é assintoticamente linear e que $D_1 G(\infty, \lambda) = L + \lambda I$.

6.10 - TEOREMA: Seja $L+T$ um gradiente. Suponhamos que, $DT(x) \rightarrow 0$, quando $\|x\|_1 \rightarrow \infty$ e que $0 < \dim N(L) < \infty$. Então $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação assintótico para a equação :

$$(6.10.1) \quad Lx + \lambda x + Tx = 0,$$

com $(x, \lambda) \in X_1 \times \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle + \|u\|_1^4 h\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) & \text{se } u \neq 0, \\ 0 & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

Então $f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável. De fato, f é diferenciável, como soma de funções diferenciáveis, com exceção do ponto $u = 0$. Mas

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{f(u)}{\|u\|_1} = \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\langle Lu, u \rangle}{\|u\|_1} + \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \|u\|_1^3 h\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right).$$

Como $Lu \rightarrow 0$, quando $\|u\|_1 \rightarrow 0$ e $u/\|u\|_1$ é limitado então

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\langle Lu, u \rangle}{\|u\|_1} = 0$$

Seja agora $x = \frac{u}{\|u\|_1}$. Isto dá:

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \|u\|_1^3 h\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) = \lim_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|_1} h(x).$$

Pela observação (6.9) temos que $h(x)/\|x\|_1^2 \rightarrow 0$, quando $\|x\|_1 \rightarrow \infty$. Como $1/\|x\|_1$ é limitado quando $\|x\|_1 \rightarrow \infty$, então

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \|u\|_1^3 h\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) = 0.$$

Isto permite concluir que:

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{f(u)}{\|u\|_1} = 0$$

e f é diferenciável no ponto $u = 0$, com $f'(0) \equiv 0$.

Agora mostraremos que $f': X_1 \rightarrow \mathcal{L}(X_1, \mathbb{R})$ é contínua e diferenciável em todos os pontos u pertencentes a X_1 , concluindo assim o resultado desejado.

A diferencial da função f no ponto u se escreve da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f'(u)v &= \frac{1}{2} \langle Lv, u \rangle + \frac{1}{2} \langle Lu, v \rangle + 2 \|u\|_1^2 [\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle] h\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) \\ &+ \|u\|_1^4 h'\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) \cdot \left[\frac{v \|u\|_1^2 - u [\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle]}{\|u\|_1^4} \right]. \end{aligned}$$

Pela simetria da aplicação L , pela definição de h , pela

linearidade da aplicação $h'(\frac{u}{\|u\|_1^2})$ e pelas propriedades do produto interno temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} f'(u)v &= \langle Lu, v \rangle + 4 \cdot \|u\|_1^2 \langle u, v \rangle h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) + h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) [v \|u\|_1^2 - 2u \langle u, v \rangle] \\ &= \langle Lu + 4 \|u\|_1^2 h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) u, v \rangle + \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), v \cdot \|u\|_1^2 - 2u \langle u, v \rangle \rangle \\ &= \langle Lu + 4 \|u\|_1^2 h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) u, v \rangle + \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), v \|u\|_1^2 \rangle - \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), 2u \langle u, v \rangle \rangle \\ &= \langle Lu + 4 \|u\|_1^2 h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) u, v \rangle + \|u\|_1^2 \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), v \rangle - 2 \langle u, v \rangle \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), u \rangle \\ &= \langle Lu + 4 \|u\|_1^2 h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) u, v \rangle + \|u\|_1^2 \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), v \rangle - 2 \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), u \rangle \langle u, v \rangle \\ &= \langle Lu + 4 \|u\|_1^2 h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) u + \|u\|_1^2 T(\frac{u}{\|u\|_1^2}) - 2 \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), u \rangle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$f'(u)v = \langle Lu + Au, v \rangle,$$

para todo u e v pertencente a X_1 , onde $A: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função - definida por

$$A(u) = \begin{cases} 4 \|u\|_1^2 h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) + \|u\|_1^2 T(\frac{u}{\|u\|_1^2}) - 2 \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), u \rangle u & \text{se } u \neq 0, \\ 0 & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

Assim, é suficiente provar que A é contínua e diferenciável. A é uma função contínua como soma de funções contínuas, exceto no ponto $u = 0$. Agora, basta mostrar que:

$$\lim_{u \rightarrow 0} A(u) = 0.$$

Agora,

$$\lim_{u \rightarrow 0} A(u) = \lim_{u \rightarrow 0} (4 \|u\|_1^2 h'(\frac{u}{\|u\|_1^2}) + \|u\|_1^2 T(\frac{u}{\|u\|_1^2}) - 2 \langle T(\frac{u}{\|u\|_1^2}), u \rangle u).$$

Seja agora $x = \frac{u}{\|u\|_1^2}$. Isto dá

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} A\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \left(\frac{4h(x)}{\|x\|_1^2} \frac{x}{\|x\|_1} + \frac{T(x)}{\|x\|_1^2} - 2 \langle Tx, \frac{x}{\|x\|_1} \rangle \frac{x}{\|x\|_1} \right)$$

Pela observação (6.9) temos que quando $\|x\|_1 \rightarrow \infty$, $\frac{h(x)}{\|x\|_1^2} \rightarrow 0$ e $\frac{T(x)}{\|x\|_1^2} \rightarrow 0$. Como $\frac{x}{\|x\|_1}$ é limitado quando $\|x\|_1 \rightarrow \infty$, concluímos que:

$$\lim_{u \rightarrow 0} A(u) = 0.$$

A é também diferenciável em todos os pontos, com exceção do ponto zero. Mas

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{A(u)}{\|u\|_1} = \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \|u\|_1 h\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) + \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \|u\|_1 T\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) - 2 \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\langle T\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right)u, u \rangle}{\|u\|_1}$$

Novamente, consideremos $x = \frac{u}{\|u\|_1}$. Isto dá:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{A\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)}{\|x\|_1} = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{\|x\|_1^2} \frac{x}{\|x\|_1} + \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{T(x)}{\|x\|_1^2} - 2 \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle T(x), \frac{x}{\|x\|_1} \rangle \frac{x}{\|x\|_1}}{\|x\|_1}$$

Dai,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{A(u)}{\|u\|_1} = 0.$$

Assim concluímos que $DA(0) = 0$ e A diferenciável em todos os pontos. Isto implica que f é duplamente diferenciável.

Pelo teorema de Schwarz [vide A.15] $f''(u): X_1 \rightarrow \mathcal{L}(X_1, \mathbb{R})$ é uma aplicação bilinear simétrica. E assim pelo lema 6.1, L+A é o gradiente da aplicação f.

Agora, segue do teorema 6.3 que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para a equação

$$(6.10.2) \quad Lx + \lambda x + A(x) = 0,$$

para $(x, \lambda) \in X_1 \times \mathbb{R}$.

Seja (u_n, λ_n) uma seqüência de soluções não-triviais de (6.10.2) tal que $\|u_n\|_1$ e λ_n convergem para zero, quando n tende a infinito. Assim,

$$Lu_n + \lambda_n u_n + Au_n = 0,$$

para todo $(u_n, \lambda_n) \in X_1 \times \mathbb{R}$.

Seja agora $x_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_1}$. Isto dá:

$$L\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right) + \lambda_n \frac{x_n}{\|x_n\|_1} + A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right) = 0.$$

Daí,

$$L\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right) + \lambda_n \frac{x_n}{\|x_n\|_1} + 4 \|x_n\|_1^{-2} h(x_n) \frac{x_n}{\|x_n\|_1} + \|x_n\|_1^{-2} T(x_n) - 2 \langle T x_n, \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \rangle \frac{x_n}{\|x_n\|_1} = 0$$

e

$$L(x_n) + \lambda_n x_n + 4 \|x_n\|_1^{-2} h(x_n) x_n - 2 \|x_n\|_1^{-2} \langle T(x_n), x_n \rangle x_n + T(x_n) = 0.$$

Considerando $\mu_n = 4 \|x_n\|_1^{-2} h(x_n) - 2 \|x_n\|_1^{-2} \langle T(x_n), x_n \rangle$

temos que :

$$L(x_n) + (\mu_n + \lambda_n) x_n + T(x_n) = 0,$$

para todo elemento n de \mathbb{N} .

Como $\|u_n\|_1$ tende a zero, quando n tende a infinito, temos que $\|x_n\|_1$ tende a infinito e conseqüentemente $\|\mu_n\|_1$ tende a zero. Assim, quando n tende a infinito, $(\lambda_n + \mu_n) \rightarrow 0$ e $\|u_n\|_1 \rightarrow \infty$.

Portanto $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação assintótico de (6.10.1). □

CAPÍTULO VII

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções C^∞ , tais que

$$f(t,0) = D_2 f(t,0) = g(t,0) = D_2 g(t,0) = 0$$

e

$$f(t+2\pi, s) = f(t, s) ; g(t+2\pi, s) = g(t, s)$$

para todo elemento t, s de \mathbb{R} .

Encontraremos soluções da equação diferencial

$$(7.0.1) \quad \ddot{x}(t) + \mu x(t) + f(t, x(t)) + g(t, \dot{x}(t)) = 0 ,$$

para t pertencente a \mathbb{R} , as quais satisfazem as condições:

$$(7.0.2) \quad x(-\pi) = x(\pi) \quad \text{e} \quad \dot{x}(-\pi) = \dot{x}(\pi) .$$

É óbvio que $x \equiv 0$ é solução de (7.0.1) e (7.0.2), para cada μ pertencente a \mathbb{R} .

Denotaremos por H o espaço de Hilbert de todas funções reais que são 2π -periódicas e pertencem a $L^2[[-\pi, \pi]]$, isto é,

$$H = \{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin kt : \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty \}$$

e

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t) dt ,$$

para u e v pertencentes a H .

Assim,

$$\|u\| \equiv (\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2)^{1/2}$$

Seja

$$D(S) = \{u \in H : \sum_{k=0}^{\infty} k^4 a_k^2 < \infty \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} k^4 b_k^2 < \infty\}.$$

Os elementos de $D(S)$ são funções continuamente diferenciáveis, tais que $u(t+2\pi) = u(t)$ para todo elemento t de \mathbb{R} .

Se $u \in D(S)$ então $\ddot{u} \in H$. Agora para $u \in D(S)$, considere mos $Su = \ddot{u}$. Afirmamos que $S: D(S) \subset H \rightarrow H$ é um operador auto-adjunto [vide A.9]. De fato,

$$\begin{aligned} \langle Su, v \rangle &= \langle -\ddot{u}, v \rangle \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{u}(t) v(t) dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes temos que:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{u}(t) v(t) dt &= \frac{-1}{2\pi} [v(\pi) \dot{u}(\pi) - v(-\pi) \dot{u}(-\pi) - u(\pi) \dot{v}(\pi) + u(-\pi) \dot{v}(-\pi)] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \langle u(t), \ddot{v}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Como v e u são funções 2π -periódicas temos que:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{u}(t) v(t) dt &= \frac{-1}{2\pi} \langle u(t), \ddot{v}(t) \rangle \\ &\equiv \langle u, Sv \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle Su, v \rangle = \langle u, Sv \rangle.$$

$D(S)$ com a norma do gráfico

$$\|u\|_1 = \{\|u\|^2 + \|u''\|^2\}^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert, o qual denotaremos por H_1 .

Podemos notar que:

$$\|u\|_1 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (1+k^4) a_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (1+k^4) b_k^2 \right\}^{1/2},$$

e existe uma constante $\kappa > 0$ tal que

$$(7.0.3) \quad \max |u(t)| + \max |\dot{u}(t)| < \kappa \|u\|_1,$$

para todo $u \in H_1$.

Afirmamos que:

- 1- O espectro de $S, \sigma(S)$, [vide A.5] é $\{n^2: n \in \mathbb{N}\}$.
- 2- $\dim N(S) = 1$
- 3- $\dim N(S - n^2 I) = 2$, para todo n pertencente $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

De fato,

$$1- \quad \sigma(S) = \{\mu: Su + \mu u = 0, u \in H_1\}$$

Assim, se $\mu \in \sigma(S)$ temos que:

$$(7.0.4) \quad -\ddot{u} + \mu u = 0.$$

Uma solução da equação diferencial (7.0.4) é da forma $u(t) = \exp mt$, com $m \in \mathbb{N}$.

Portanto $\mu = m^2$ e $\sigma(S) = \{m^2: m \in \mathbb{N}\}$.

2- Sabemos que:

$$N(S) = \{u \in H_1: S(u) = 0\}$$

$$= \{u \in H_1: \ddot{u} = 0\}.$$

Dai,

$$N(S) = \{at + b : t \in \mathbb{R} \text{ e } a, b \text{ são constantes reais}\}$$

Assim, $\dim N(L) = 1$.

3-
$$N(S - n^2 Id) = \{u \in H : (S - n^2 Id)u = 0\}$$
$$= \{u \in H : -\ddot{u} - n^2 u = 0\}.$$

Resolvendo a equação diferencial

$$-\ddot{u} - n^2 u = 0,$$

temos que $u(t) = \exp kt$ é solução, com $k = \pm in$.

Assim, as soluções da equação acima se escrevem como combinação linear das funções $\sin nt$ e $\cos nt$ e

$$N(S - n^2 I) = \{u \in H : u(t) = a \cos nt + b \sin nt, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}\}$$

Portanto, $\dim N(S - n^2 I) = 2$.

Como S é auto-adjunto em H ,

$$\text{Im}(S + \mu Id) = N(S + \mu Id)^\perp$$

para todo elemento μ de \mathbb{R} . De fato, se $u \in \text{Im}(S + \mu Id)$ então existe $w \in H$, tal que $u = (S + \mu Id)w$. Seja $v \in N(S + \mu Id)$. Temos que:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle Sw + \mu w, v \rangle \\ &= \langle Sw, v \rangle + \mu \langle w, v \rangle \\ &= \langle w, Sv \rangle + \mu \langle w, v \rangle \\ &= \langle w, \ddot{v} \rangle + \mu \langle w, v \rangle \\ &= -\mu \langle w, v \rangle + \mu \langle w, v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, u é ortogonal a todo v pertencente a $N(S + \mu Id)$.

Isto implica que:

$$\text{Im}(S + \mu Id) \subset N(S + \mu Id)^\perp.$$

Por outro lado, se $z \in N(S + \mu Id)^\perp \subset H_1$, isto implica que $z = x + y$ com $x \in N(S + \mu Id)$ e $y \in \text{Im}(S + \mu Id)$. Agora, para todo w pertencente a $N(S + \mu Id)$ temos que:

$$\langle x + y, w \rangle = 0.$$

Assim,

$$\langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle = 0,$$

para todo $w \in N(S + \mu Id)$. Como $y \in \text{Im}(S + \mu Id)$ temos que existe $r \in H_1$ tal que $y = (S + \mu Id)r$. Assim,

$$\langle y, w \rangle = \langle (S + \mu Id)r, w \rangle.$$

Como S é auto-adjunto temos que:

$$\begin{aligned} \langle (S + \mu Id)r, w \rangle &= \langle Sr, w \rangle + \mu \langle r, w \rangle \\ &= \langle r, w \rangle + \mu \langle r, w \rangle \\ &= \langle r, (S + \mu Id)w \rangle. \end{aligned}$$

Sendo que $w \in N(S + \mu Id)$ temos que:

$$(S + \mu Id)w = 0,$$

isto implica que

$$\langle y, w \rangle = 0.$$

Assim,

$$\langle x, w \rangle = 0,$$

para todo $w \in N(S + \mu Id)$. Donde se conclui que $x = 0$.

Portanto, $z = y \in \text{Im}(S + \mu Id)$.

Para $u \in H$, consideremos

$$R(u(t)) = f(t, u(t)) + g(t, \dot{u}(t)),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. R é uma aplicação C^∞ , como soma de aplicações C^∞ , e temos que:

$$\frac{\|R(u)\|}{\|u\|_1} \rightarrow 0,$$

quando $\|u\|_1 \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\|R(u)\|}{\|u\|_1} &= \frac{\|f(t, u(t)) + g(t, \dot{u}(t))\|}{\|u\|_1} \\ &\leq \frac{\|f(t, u(t))\|}{\|u\|_1} + \frac{\|g(t, \dot{u}(t))\|}{\|u\|_1} \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|R(u)\|}{\|u\|_1} \leq \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, u(t))\|}{\|u\|_1} + \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, \dot{u}(t))\|}{\|u\|_1}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, u(t))\|}{\|u\|_1} &= \|D_2 f(t, 0)\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, u(t))\|}{\|u\|_1} \leq \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, u(t))\|}{\max |u(t)| + \max |\dot{u}(t)|} \quad ; \text{por (7.0.3)}$$

Daí,

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|g(t, u(t))\|_1}{\max |u(t)| + \max |\dot{u}(t)|} \leq \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|g(t, u(t))\|_1}{\|u(t)\|_1} = D_2 g(t, 0) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|R(u)\|}{\|u\|_1} \leq 0.$$

Estudar a bifurcação das soluções da equação

$$\ddot{x}(t) + \mu x(t) + f(t, x(t)) + g(t, \dot{x}(t)) = 0,$$

para todo t pertencente a \mathbb{R} , as quais satisfazem as condições

$$x(-\pi) = x(\pi) \quad \text{e} \quad \dot{x}(-\pi) = \dot{x}(\pi),$$

é equivalente estudar a bifurcação das soluções do seguinte problema,

$$(7.0.5) \quad -Su + \mu u + R(u) = 0,$$

com $(u, \mu) \in H_1 \times \mathbb{R}$.

Considerando $L = -S + \mu_0 \text{Id}$, $\lambda = \mu - \mu_0$ e $C = \text{Id}$, as hipóteses do capítulo I continuam válidas.

7.1 - TEOREMA: Todos os pontos de bifurcação da equação

$$-Su + \mu u + R(u) = 0,$$

com $(u, \mu) \in H_1 \times \mathbb{R}$, pertencem ao espectro de S .

DEMONSTRAÇÃO:

$$\sigma(S) = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Seja μ_0 um ponto de bifurcação de (7.0.5). Então existe uma sequência (μ_n, u_n) convergindo para $(\mu_0, 0)$ com u_n

diferente de zero e

$$-Su_n + \mu_n u_n + R(u_n) = 0,$$

Assim,

$$\begin{aligned} -Su_n + \mu_0 u_n &= \mu_n u_n + \mu_0 u_n - R(u_n) \\ &= u_n(\mu_0 - \mu_n) - R(u_n). \end{aligned}$$

Dividindo por $(- \|u_n\|_1)$ temos que:

$$(7.7.1) \quad S \frac{u_n}{\|u_n\|_1} - \mu_0 \frac{u_n}{\|u_n\|_1} = \frac{u_n}{\|u_n\|_1} (\mu_n - \mu_0) + \frac{R(u_n)}{\|u_n\|_1}.$$

Agora, considerando $z_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_1}$ e substituindo em (7.1.1) temos que:

$$Sz_n - \mu_0 z_n = z_n (\mu_n - \mu_0) + \frac{R(u_n)}{\|u_n\|_1}$$

Seja $f_n = Sz_n - \mu_0 z_n$. Então

$$f_n = z_n (\mu_n - \mu_0) + \frac{R(u_n)}{\|u_n\|_1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n (\mu_n - \mu_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(u_n)}{\|u_n\|_1}.$$

Assim ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0.$$

Agora suporemos que $(S - \mu_0 \text{Id})$ tem inversa limitada. Daí,

$$(S - \mu_0 \text{Id}) z_n = f_n$$

implica que

$$z_n = (S - \mu_0 \text{Id})^{-1} f_n$$

e

$$\|z_n\|_1 = \|(S - \mu_0 \text{Id})^{-1} f_n\|_1$$

Por outro lado,

$$\|(S - \mu_0 \text{Id})^{-1} f_n\| < \|S - \mu_0 \text{Id}\|^{-1} \|f_n\|$$

então

$$\|z_n\| < \|S - \mu_0 \text{Id}\|^{-1} \|f_n\|$$

Como $\|z_n\| = 1$, temos que

$$1 < \|S - \mu_0 \text{Id}\|^{-1} \|f_n\|$$

Absurdo, pois $\|f_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, $(S - \mu_0 \text{Id})$ não é inversível, isto é, existe $v \in H_1$ tal que

$$(S - \mu_0 \text{Id})v = 0$$

ou melhor, $\mu_0 \in \sigma(S)$.

7.2 - OBSERVAÇÃO:

O teorema nos diz que todos os pontos de bifurcação do problema não-linear são encontrados no espectro do problema linearizado. A recíproca do teorema não é verdadeira, como mostra o seguinte exemplo:

Seja $u \in \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$, e $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador não linear tal que

$$Au = \begin{pmatrix} u_1 + u_2^3 \\ u_2 - u_1^3 \end{pmatrix}$$

Então, substituindo na equação $Au - \lambda u = 0$ temos que

$$\begin{pmatrix} u_1 + u_2^3 \\ u_2 - u_1^3 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Através de um cálculo imediato temos que

$$u_1^4 + u_2^4 = 0,$$

com $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Daí,

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Assim, a única solução de $Au - \lambda u = 0$ é a solução nula e não existe ponto de bifurcação.

A derivada do operador A no ponto $(u_1, u_2) = (0, 0)$, se escreve da seguinte maneira:

$$A'(0)v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Daí, a derivada é o operador identidade e o problema linearizado tem 1 como autovalor, com multiplicidade 2.

7.3 - TEOREMA: 0 ponto $\mu = 0$ é ponto de bifurcação da equação

$$-Su + \mu u + R(u) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Como $\dim N(S) = 1$ e $C = \text{Id}$, o resultado segue imediatamente do teorema 4.1. \square

7.4 - OBSERVAÇÃO:

Como $\dim N(S) = 1$, o zero é um autovalor simples e $\dim N(S - n^2 \text{Id}) = 2$ os demais autovalores tem multiplicidade 2. Daí, todos os autovalores em $\sigma(S) \setminus \{0\}$ tem multi-

plicidade dois . Portanto, não podemos usar o teorema 4.1 para assegurar que eles são pontos de bifurcação.

No que segue , mostraremos sob certas condições, que $\lambda = 0$ é o único ponto de bifurcação da equação (7.0.5).

Por outro lado, se o teorema 6.3 pode ser aplicado, então os pontos de $\sigma(S)$ são pontos de bifurcação da equação (7.0.5)

Consideremos a primeira possibilidade.

7.5 - LEMA: O problema (7.0.5) é variacional se, e somente se, $g \equiv 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Como S é auto-adjunto sobre H_1 , então S é simétrico - sobre H_1 . Assim o problema (7.0.5) é variacional se, somente se, $R'(u)$ for simétrico sobre H_1 , para todo elemento u pertencente a H_1 .

Agora provaremos que $R'(u)$ é simétrico se e só se $g \equiv 0$.

$R'(u)$ é simétrico sobre H_1 , para todo elemento u de H_1

$$\Leftrightarrow \langle R'(u)v, w \rangle = \langle R'(u)w, v \rangle, \quad \forall u, v, w \in H_1$$

$$\Leftrightarrow \langle D_2 f(t, u(t))v, w \rangle + \langle D_2 g(t, \dot{u}(t))\dot{v}, w \rangle$$

$$= \langle D_2 f(t, u(t))w + D_2 g(t, \dot{u}(t))\dot{w}, v \rangle, \quad \forall u, v, w \in H_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_2 g(t, \dot{u}(t))\dot{v}w dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_2 f(t, u(t))vw dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_2 g(t, \dot{u}(t))\dot{v}w dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_2 f(t, u(t))vw dt$$

$$\forall u, v, w \in H_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_2 g(t, \dot{u}(t)) [\dot{v}(t)w(t) - \dot{w}(t)v(t)] dt = 0, \quad \forall u, v, w \in H_1$$

Agora resta provar que se

$$(7.5.1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_2 g(t, \dot{u}(t)) [\dot{v}(t)w(t) - \dot{w}(t)v(t)] dt = 0, \forall u, v, w \in H_1$$

então $g \equiv 0$.

Colocando $v \equiv 1$, a equação (7.5.1) se escreve como

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_2 g(t, \dot{u}(t)) \dot{w}(t) dt = 0, \forall u, v, w \in H_1.$$

Resolvendo a integral acima por partes temos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} w(t) D_1 D_2 g(t, \dot{u}(t)) dt = 0, \forall u, w \in H_1.$$

Ou melhor,

$$\langle w(t), D_1 D_2 g(t, \dot{u}(t)) \rangle = 0,$$

para todo u, w pertencente a H_1 . Isto implica que

$$D_1 D_2 g(t, \dot{u}(t)) = 0,$$

para todo u pertencente a H_1 . Daí,

$$D_2 g(t, \dot{u}(t)) = C(u),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $C(u)$ é uma constante dependendo possivelmente de u .

Como u é uma função periódica e continuamente diferenciável, então existe t_0 pertencente a \mathbb{R} tal que $\dot{u}(t_0) = 0$.

Desde que,

$$\begin{aligned} D_2 g(t_0, \dot{u}(t_0)) &= D_2 g(t_0, 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto implica que $C(u) = 0$, para todo u pertencente a H_1 .

Assim,

$$D_2 g(t,s) = 0,$$

para todo t,s pertencentes a \mathbb{R} , e como $g(t,0) = 0$, para todo elemento t de \mathbb{R} , isto implica que $g \equiv 0$. \square

7.6 - TEOREMA: Se $g \equiv 0$ então o conjunto de todos os pontos de bifurcação da equação (7.0.5) é um subconjunto de

$$\sigma(S) = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Sendo $g \equiv 0$, a equação (7.0.5) é variacional. Então pelo teorema 6.3 $\mu = 0$ é ponto de bifurcação.

Agora pelo teorema 7.1 todos os pontos de bifurcação pertencem ao espectro de S . \square

7.7 - OBSERVAÇÃO:

Se $g \neq 0$, voltemos para o teorema 5.1. Para isto, vamos escrever f e g como série de Taylor na segunda variável. Sejam $s,r > 2$ tais que

$$D_2^i f(t,0) \equiv 0, \text{ para } i \leq s-1 \text{ e } \alpha(t) \equiv \frac{1}{s!} D_2^s f(t,0) \neq 0$$

e

$$D_2^i g(t,0) \equiv 0, \text{ para } i \leq r-1 \text{ e } \beta(t) \equiv \frac{1}{r!} D_2^r g(t,0) \neq 0.$$

Então

$$f(t,p) = \alpha(t)p^s + w_s(t,p)$$

$$g(t,p) = \beta(t)p^r + \theta_r(t,p)$$

onde $w_s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\theta_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções C^∞ tais que

$$w_s(t,p)p^{-s} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \theta_r(t,p)p^{-r} \rightarrow 0$$

uniformemente em t , quando $p \rightarrow 0$.

Como as funções f e g são 2π -periódicas temos que

$$\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t) \quad \text{e} \quad \beta(t + 2\pi) = \beta(t),$$

$$w_s(t + 2\pi, s) = w_s(t, s) \quad \text{e} \quad \theta_r(t + 2\pi, s) = \theta_r(t, s),$$

para todo t, s pertencentes a \mathbb{R} .

7.8 -TEOREMA: *Suponhamos que $2 \leq s \leq r$ e s é par. Seja α uma função ímpar tal que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \sin^{s+1} nt \, dt \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{\alpha}(t) \sin^{s+1} nt \, dt \neq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\mu = n^2$ é ponto de bifurcação da equação (7.0.5).

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $L = -S + n^2 \text{Id}$ e $\lambda = \mu - n^2$. Mostraremos que as hipóteses do teorema 5.1 são válidas. Seja $P: H \rightarrow N(L)$ dada por:

$$Pu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin nt \, dt \cdot \sin nt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos nt \, dt \cdot \cos nt.$$

É claro que P é uma projeção.

Agora, encontrar $z_0 \in N(L) \setminus \{0\}$ tal que $z_0 + PN_S(z_0) = 0$ é equivalente a encontrar $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que

$$(7.8.1) \quad \begin{cases} a + h(a, b) = 0 \\ b + k(a, b) = 0 \end{cases}$$

onde

$$h(a,b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \{a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt\}^s \operatorname{sen} nt dt$$

e

$$k(a,b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \{a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt\}^s \operatorname{cos} nt dt.$$

De fato, seja $z \in N(L)$. Como $L = -S + n^2 \operatorname{Id}$ temos que

$$N(L) = N(-S + n^2 \operatorname{Id}).$$

Vimos anteriormente que um elemento de $N(-S + n^2 \operatorname{Id})$ se escreve como combinação linear das funções $\operatorname{sen} nt$ e $\operatorname{cos} nt$.

Então existem a e b pertencentes a \mathbb{R} tais que

$$z = a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt.$$

Sendo,

$$N_S(z) = \frac{1}{s!} D_2^S f(t,0) z^S + D_2^S g(t,0) z^S$$

e

$$D_2^S g(t,0) z^S = 0, \text{ pois } s < r$$

temos que

$$\begin{aligned} N_S(z_0) &= \frac{1}{s!} D_2^S f(t,0) z^S \\ &= \alpha(t) z^S. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} PN_S(z) &= P(\alpha(t) z^S) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) z^S \operatorname{sen} nt dt \cdot \operatorname{sen} nt + \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) z^S \operatorname{cos} nt dt \cdot \operatorname{cos} nt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^S \operatorname{sen} nt dt \cdot \operatorname{sen} nt \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^S \operatorname{cos} nt dt \cdot \operatorname{cos} nt \end{aligned}$$

Portanto,

$$z + PN_s(z) = 0 \iff \begin{cases} a + \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) [a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt]^s \operatorname{sen} nt dt = 0 \\ b + \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) [a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt]^s \operatorname{cos} nt dt = 0 \end{cases} e$$

Assim, para aplicarmos o teorema 5.1, precisamos encontrar $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que

$$\begin{cases} a_0 + h(a_0, b_0) = 0 \\ b_0 + k(a_0, b_0) = 0 \end{cases}$$

e $\Delta(a_0, b_0) \neq 0$ onde

$$\Delta(a_0, b_0) \equiv \det \begin{bmatrix} 1 + D_1 h(a_0, b_0) & D_2 h(a_0, b_0) \\ D_1 k(a_0, b_0) & 1 + D_2 k(a_0, b_0) \end{bmatrix}$$

Agora de (7.8.1) temos que $k(a, 0) = 0$, para todo elemento a de \mathbb{R} . Então $(a_0, 0)$ satisfaz (7.7.1) se

$$a_0 = -h(a_0, 0),$$

isto é,

$$(7.8.2) \quad a_0 = \left[\frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s+1} nt dt \right]^{1/(1-s)}$$

Afirmamos que h e k são homogêneas de grau s [vide A.10]

De fato,

$$\begin{aligned} h(p(a,b)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) [p a \operatorname{sen} nt + p b \operatorname{cos} nt]^s \operatorname{sen} nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} p^s \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) [a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt]^s \operatorname{sen} nt dt \end{aligned}$$

$$= p^s h(a,b).$$

E analogamente para a função k.

Pela Relação de Euler [vide A.14] temos que:

$$s h(a,b) = a D_1 h(a,b) + b D_2 h(a,b)$$

$$s k(a,b) = a D_1 k(a,b) + b D_2 k(a,b).$$

Daí,

$$\begin{aligned} D_1 h(a_0, 0) &= a_0^{-s} h(a_0, 0) \\ &= \frac{a_0^{-s}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) a_0 \operatorname{sen}^{s+1} nt dt \\ &= \frac{a_0^{-s-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) a_0 \operatorname{sen}^{s+1} nt dt \end{aligned}$$

e da equação (7.8.2) temos que:

$$D_1 h(a_0, 0) = -s$$

e

$$D_1 k(a_0, 0) = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Delta(a_0, 0) &= \det \begin{bmatrix} 1 + D_1 h(a_0, 0) & D_2 h(a_0, 0) \\ D_1 k(a_0, 0) & 1 + D_2 k(a_0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 - s & D_2 h(a_0, 0) \\ 0 & 1 + D_2 k(a_0, 0) \end{bmatrix} \\ &= (1 - s)(1 + D_2 k(a_0, 0)). \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o teorema 5.1 se $1 + D_2 k(a_0, 0) \neq 0$.

Mas, notemos que:

$$\begin{aligned} D_2 k(a, b) &= \frac{s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^{s-1} \operatorname{cos}^2 nt \, dt \\ &= \frac{s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^{s-1} (1 - \operatorname{sen}^2 nt) \, dt \\ &= \frac{s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^{s-1} \, dt \\ &\quad - \frac{s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^{s-1} \operatorname{sen}^2 nt \, dt. \end{aligned}$$

Como

$$D_1 h(a, b) = \frac{s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^{s-1} \operatorname{sen}^2 nt \, dt$$

temos que:

$$D_2 k(a, b) = \frac{s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^{s-1} \, dt - D_1 h(a, b)$$

e consequentemente,

$$D_2 k(a_0, 0) = \frac{a_0^{s-1} s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s-1} nt \, dt + s.$$

Assim,

$$\Delta(a_0, 0) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{a_0^{s-1} s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s-1} nt \, dt + s = 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 + s = \frac{-s a_0^{s-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s-1} nt \, dt$$

$$\Leftrightarrow (1 + s) a_0^{1-s} = \frac{-s}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s-1} nt \, dt$$

$$\Leftrightarrow (1 + s) \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s+1} nt \, dt = s \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s-1} nt \, dt$$

Integrando por partes temos que:

$$(s + 1) \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s+1} nt \, dt = s \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s-1} nt \, dt - \frac{1}{(s+1)n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \operatorname{sen}^{s+1} nt \, dt$$

Portanto,

$$\Delta(a_0, 0) = 0 \iff \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{\alpha}(t) \operatorname{sen}^{s+1} nt \, dt = 0.$$

Agora, por hipótese $\int_{-\pi}^{\pi} \ddot{\alpha}(t) \operatorname{sen}^{s+1} nt \, dt \neq 0$ então

$\Delta(a_0, 0) \neq 0$ e conseqüentemente podemos aplicar o teorema 5.1.

Logo $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação ou melhor $\mu = n^2$ é ponto de bifurcação de (7.0.5). \square

Existe um resultado complementar, que é o seguinte:

7.9 - TEOREMA: Suponhamos que $2 \leq r < s$ e que r é par. Seja β uma função par tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \operatorname{sen}^r nt \cdot \cos nt \, dt \neq 0,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Então $\mu = n^2$ é ponto de bifurcação da equação (7.0.5).

DEMONSTRAÇÃO:

Esta prova será análoga ao teorema 7.8 e por este motivo omitiremos os detalhes feitos anteriormente

Encontrar $z_0 \in N(L)$ tal que $z_0 + PN_r(z_0) = 0$ é equivalente a encontrar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(7.9.1) \quad \begin{cases} b + \tilde{h}(a,b) = 0 \\ -a + \tilde{k}(a,b) = 0 \end{cases}$$

onde

$$\tilde{h}(a,b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^r \operatorname{sen} nt \, dt$$

$$\tilde{k}(a,b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) (a \operatorname{sen} nt + b \operatorname{cos} nt)^r \operatorname{cos} nt \, dt .$$

Agora, $h(a,0) = 0$ para todo a pertencente a \mathbb{R} e assim $(a_0, 0)$ é solução de (7.9.1) se

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) a_0^r \operatorname{sen}^r nt \cdot \operatorname{cos} nt \, dt \\ &= \frac{a_0^r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \operatorname{sen}^r nt \cdot \operatorname{cos} nt \, dt \end{aligned}$$

ou ainda

$$a_0 = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \operatorname{sen}^r nt \cdot \operatorname{cos} nt \, dt \right]^{1/(1-r)} .$$

Para aplicarmos o teorema 5.1 precisamos provar:

$$\tilde{\Delta}(a_0, 0) \neq 0$$

onde

$$\tilde{\Delta}(a_0, 0) = \det \begin{bmatrix} D_1 \tilde{h}(a_0, 0) & -1 + D_1 \tilde{k}(a_0, 0) \\ 1 + D_2 \tilde{h}(a_0, 0) & D_2 \tilde{k}(a_0, 0) \end{bmatrix}$$

Como \tilde{h} e \tilde{k} são homogêneas de grau r temos pela Relação de Euler [vide A.14] que

$$r \tilde{h}(a,b) = a D_1 \tilde{h}(a,b) + b D_2 \tilde{h}(a,b) .$$

$$r \tilde{k}(a,b) = a D_1 \tilde{k}(a,b) + b D_2 \tilde{k}(a,b) .$$

Assim,

$$r \tilde{h}(a_0, 0) = a_0 D_1 \tilde{h}(a_0, 0)$$

$$r \tilde{k}(a_0, 0) = a_0 D_1 \tilde{k}(a_0, 0) .$$

Então concluímos que

$$D_1 \tilde{h}(a_0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad D_1 \tilde{k}(a_0, 0) = r .$$

Agora,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(a_0, 0) &= \det \begin{bmatrix} 0 & -1 + r \\ 1 + D_2 \tilde{h}(a_0, 0) & D_2 \tilde{k}(a_0, 0) \end{bmatrix} \\ &= (1-r) (1 + D_2 \tilde{h}(a_0, 0)) \end{aligned}$$

Portanto, precisamos mostrar que:

$$(1-r) (1 + D_2 \tilde{h}(a_0, 0)) \neq 0 .$$

Ora, como

$$D_2 \tilde{h}(a_0, 0) = \frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) a_0^{r-1} \text{sen}^r nt . \text{cos} nt \, dt ,$$

segue-se que

$$1 + D_2 \tilde{h}(a_0, 0) = 1 + \frac{r a_0^{r-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \text{sen}^r nt . \text{cos} nt \, dt$$

$$= 1 + r.$$

Então concluímos que $\bar{\Delta}(a_0, 0) \neq 0$. Pelo teorema 5.1 - $\lambda = 0$ é ponto de bifurcação de (7.0.5), ou ainda, $\mu = n^2$ é ponto de bifurcação de (7.0.5). \square

7.10. - OBSERVAÇÃO:

É claro que as hipóteses dos teoremas 7.8 e 7.9 podem ser válidas para algum n pertencente a \mathbb{N} e não para outros. No entanto, é fácil analisar casos nos quais elas falham para todo n pertencente a \mathbb{N} , como mostra o seguinte exemplo:

Para $2 < s < r$, constante,

$$h(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \text{ é par,} \\ C \cdot a(a^2 + b^2)^{\frac{s-1}{2}} & \text{se } s \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$k(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \text{ é par} \\ C \cdot b(a^2 + b^2)^{\frac{s-1}{2}} & \text{se } s \text{ é ímpar} \end{cases}$$

onde C é uma constante dependendo somente de a e s .

Assim, se s é par, encontrar $z \neq 0$ que satisfaça $z + P_N(z) = 0$ é equivalente a encontrar $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tais que

$$\begin{cases} a + h(a,b) = 0 \\ b + k(a,b) = 0. \end{cases}$$

Daí,

$$a = 0 \quad e \quad b = 0.$$

Portanto, $z + PN_s(z)$ não tem solução em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se s é par.

Se s é ímpar temos que:

$$a + c a(a^2 + b^2)^{\frac{s-1}{2}} = 0$$

$$b + c b(a^2 + b^2)^{\frac{s-1}{2}} = 0,$$

Isto implica que:

$$\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{s-1}} = a^2 + b^2.$$

Portanto, a solução em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é um círculo.

7.11 - TEOREMA: Suponhamos que

$$f(-t, s) = f(t, s) \quad e \quad g(-t, -s) = g(t, s),$$

para todo t, s pertencentes a \mathbb{R} . Então o conjunto de todos os pontos de bifurcação da equação (7.0.5) é

$$\sigma(S) = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $J = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt : \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty\}$. Então J é um subespaço fechado de H . Seja $J_1 = J \cap H_1$. Notemos que $S(J_1) \subset J$. Denotaremos $S|_{H_1}$ por T . Assim,

$$\sigma(T) = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Afirmamos que $\dim N(T - k^2 Id) = 1$, para todo k pertencente a \mathbb{N} . De fato,

$$\begin{aligned} N(T - k^2 Id) &= \{v \in J : (T - k^2 Id)v = 0\} \\ &= \{v \in J : \ddot{v} - k^2 v = 0\}. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação diferencial,

$$\ddot{v} - k^2 v = 0$$

temos que as soluções se escrevem como combinação linear das funções $\sin kt$ e $\cos kt$. Como $\sin kt$ não pertence a J_1 , temos que as soluções se escrevem como combinação linear da função $\cos kt$. Portanto, $\dim N(T - k^2 Id) = 1$.

Nossas hipóteses implicam que $R(J_1) \subset J$ e podemos considerar o problema,

$$(7.11.1) \quad -Tu + \mu u + R(u) = 0,$$

para $(u, v) \in J_1 \times \mathbb{R}$, onde $R = R|_{J_1}$.

Pelo teorema 4.1 temos que cada autovalor de T é um ponto de bifurcação da equação (7.11.1) e, conseqüentemente, da equação (7.0.5). \square

7.12 - TEOREMA: Suponhamos que f e g são funções independentes de t , $sg(s)$ não muda de sinal para $s \in \mathbb{R}$ e que o zero é um zero isolado de g . Então $\mu = 0$ é o ponto de bifurcação da equação (7.0.5).

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que (x, μ) é uma solução da equação (7.0.5)

Daí segue-se que

$$(7.12.1) \quad \ddot{x}(t) + \mu \dot{x}(t) + f(x(t)) + g(\dot{x}(t)) = 0 .$$

Então

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2(t) + \frac{\mu}{2} x(t)^2 + F(x(t)) \right\} = -g(\dot{x}(t)) \dot{x}(t) ,$$

para todo t pertencente \mathbb{R} , onde $F(x(t)) = \int_0^x f(r) dr$.

$$\text{Definimos } E(t) = \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 + \frac{\mu}{2} x(t)^2 + F(x(t)).$$

Assim,

$$\frac{dE(t)}{dt} = -g(\dot{x}(t)) \dot{x}(t) .$$

Agora segue-se da hipótese que $\frac{dE(t)}{dt}$ não muda de sinal, Isto significa que $E(t)$ é monótona. Como x é periódica, concluímos que $E(t)$ é constante e $\frac{dE(t)}{dt} = 0$.

Daí,

$$g(\dot{x}(t)) \dot{x}(t) = 0 ,$$

Isto implica que $g(\dot{x}(t)) = 0$ sempre que $\dot{x}(t)$ for diferente de zero. Sendo x periódica, existe t pertencente a \mathbb{R} tal que $\dot{x}(t_0) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} g(\dot{x}(t_0)) &= g(0) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Como o zero é um zero isolado de g temos que não existe $\dot{x}(t)$ diferente de zero pertencente a uma vizinhança

do zero em \mathbb{R} que anule g . Sendo \dot{x} uma função contínua e $g(\dot{x}(t)) = 0$, para todo $\dot{x}(t) \neq 0$, podemos concluir que $\dot{x}(t) \equiv 0$, para todo t pertencente a \mathbb{R} e conseqüentemente $x(t)$ é uma constante, a qual denotaremos por c . Substituindo na equação (7.12.1) temos que:

$$\mu c + f(c) = 0,$$

ou ainda

$$\mu = \frac{f(c)}{c}.$$

Se c converge para zero, isto implica que

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} \mu &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{f(c)}{c} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{f(c) - f(0)}{c} \\ &= Df(0)c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, o único ponto de bifurcação da equação (7.0.5) é $\mu = 0$. \square

7.13 - OBSERVAÇÃO:

Notemos o forte contraste entre os teoremas 7.11 e 7.12.

Se $g(s) = s^k$ e f é independente de t , o conjunto de todos os pontos de bifurcação da equação (7.0.5) é

$$\{n^2: n \in \mathbb{N}\} \quad \text{se } k \text{ é par}$$

e

$$\{0\}, \quad \text{se } k \text{ é ímpar.}$$

De fato, se k é par então $g(s) = g(-s)$ e $f(-t,s) = f(t,s)$ e, pelo teorema 7.11, temos que o conjunto de todos os pontos de bifurcação é $\{n^2: n \in \mathbb{N}\}$. Se k é ímpar, $g(s) = s^{k+1}$ e assim $g(s)$ não muda de sinal. Pelo teorema 7.12 o único ponto de bifurcação de (7.0.5) é o zero.

ooooo
ooo

APÊNDICE

Este apêndice contém certos conceitos e teoremas fundamentais usados na dissertação.

- A.1 - DEFINIÇÃO: Seja X um espaço real de Banach. Seja $T: X \rightarrow X$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto de todos os pontos no espaço produto $X \times X$, da forma (x, Tx) com $x \in \mathcal{D}(T)$. O operador T é fechado se o gráfico é fechado no espaço produto $X \times X$, ou equivalentemente: o operador T é fechado se $x_n \in \mathcal{D}(T)$, $x_n \rightarrow x$, $T(x_n) \rightarrow y$ implica que $x \in \mathcal{D}(T)$ e $Tx = y$. [D.1]
- A.2 - DEFINIÇÃO: Sejam x, y pertencentes a um espaço de Hilbert. Dizemos que x, y são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. [S.1]
- A.3 - DEFINIÇÃO: Um vetor x pertencente a X , X espaço de Hilbert, é ortogonal a um conjunto não-vazio $S \subset X$ se é ortogonal a todos elementos de S . [S.1]
- A.4 - DEFINIÇÃO: Complemento ortogonal de S , denotado por S^\perp , é o conjunto de todos os vetores ortogonais a S . [S.1]
- A.5 - DEFINIÇÃO: Seja X um espaço de Banach. Seja $S: X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto de todos os autovalores de S é chamado espectro de S , denotado por $\sigma(S)$. [S.1]
- A.6 - DEFINIÇÃO: Seja N um espaço linear normado. O espaço dos operadores lineares contínuos de N sobre \mathbb{R} , é chamado o espaço conjugado de N , denotado por N^* . [S.1]

A.7 - DEFINIÇÃO: Seja T um operador linear sobre N . Seja

$T^*: N^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$[T^*(f)](x) = f(T(x)) ,$$

onde f pertence a N^* e T^* é chamado o conjugado de T . [S.1]

A.8 - TEOREMA :Seja H um espaço de Hilbert . Seja f um funcional pertencente a H^* . Então existe um único vetor y em H tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle ,$$

para cada x pertencente a H . [S.1]

Sejam y pertencente a H e f_y o funcional correspondente pertencente a H^* . Assim, temos que

$$\begin{aligned} (T^*f_y)x &= f_y(Tx) \\ &= \langle Tx, y \rangle . \end{aligned}$$

Agora consideremos as aplicações:

$$y \rightarrow f_y \rightarrow T^*f_y = f_z \rightarrow z .$$

Seja agora $z = T^*y$. Assim

$$\begin{aligned} (T^*f_y)x &= f_z(x) \\ &= \langle x, z \rangle \\ &= \langle x, T^*y \rangle . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle ,$$

para todo x, y pertencentes a H . [S.1]

A.9 - DEFINIÇÃO: Um operador $T: H \rightarrow H$ é auto-adjunto se $T^* = T$.

[S.1]

A.10 - DEFINIÇÃO: Seja f uma função definida em X , X é um espaço de Banach. Dizemos que f é homogênea de grau m se existe um inteiro positivo m tal que $f(tx) = t^m f(x)$, para todo t pertencente a \mathbb{R} e diferente de zero e para todo x pertencente a X . [L.1]

A.11 - TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA: Sejam X, Y, Z espaços de Banach. Sejam (x_0, y_0) pertencente a $X \times Y$ e T uma aplicação contínua de uma vizinhança A de (x_0, y_0) em Z tal que $D_2 T$ existe e é contínua em A . Suponhamos que $T(x_0, y_0) = 0$ e $D_2 T(x_0, y_0)$ é um homeomorfismo linear de Y em Z . Então existe uma vizinhança aberta U de x_0 e existe uma vizinhança V de y_0 tais que

- (i) Existe uma única função contínua $f: U \rightarrow V$ tal que $T(x, f(x)) = 0$, para todo x pertencente a U .
- (ii) Se $x \in U$ e $y \in V$, $T(x, y) = 0$ então $f(x) = y$.
- (iii) Se $T \in C^1(A)$ então $f \in C^1(U)$ e a derivada de f é dada por

$$Df(x) = -[D_2 T(x, f(x))]^{-1} \cdot D_1 T(x, f(x)) .$$

- (iv) Se $T \in C^n(A)$ então $f \in C^n(U)$. [W.1]

A.12 - DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ: Se x, y são dois vetores pertencentes a H , H espaço de Hilbert, então

$$|(x, y)| < \|x\| \cdot \|y\| . \quad [S.1]$$

A.13 - TEOREMA DE EULER-LAGRANGE: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e S o subconjunto de U de todos x pertencentes a U tais que $f(x) = 0$ e $\text{grad } f(x) \neq 0$.

Sejam $P \in S$ e $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponhamos que P é um ponto de máximo de g , isto é, $g(P) > g(x)$ para todo s pertencente a S . Então existe μ pertencente a \mathbb{R} tal que

$$\text{grad } g(P) = \mu \text{grad } f(P) . \quad [L.1]$$

A.14 - RELAÇÃO DE EULER: Seja f uma função diferenciável sobre \mathbb{R}^n . Suporemos que f é homogênea de grau m . Então

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x) . \quad [L.1]$$

A.15 - TEOREMA DE SCHWARZ: Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^2 ($U \subset \mathbb{R}^n$ aberto). Para cada $x \in U$, a segunda derivada $f''(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação bilinear. [L.2]



BIBLIOGRAFIA

- [B.1] BERGER, M.S — " Bifurcation theory and the type numbers of Marston Morse"— Proc. Nat. Acad. Sc., 69(1972) 1737-1738.
- [B.2] BÖHME, R. — " Die Lösung der Verzweigungsgleichungen für nichtlinear Eigenwertprobleme"— Math. Z., 127 (1972), 105-106.
- [C.1] CRANDALL, M. ; RABINOWITZ, P.H. — " Bifurcation from simple eigenvalues " — J.Funcional Anal., 8(1971), 321-340.
- [D.1] DUNFORD, N. ; SCHWARTZ, J.T. — *Linear Operators*, Interscience Publishers, Inc (1957) .
- [K.1] KELLER, J.B. ; ANTMAN, S. — *Non-linear eigenvalue problems* W.A.Benjamin, (1969) .
- [L.1] LANG, S. — *Analysis I*, Addison-Wesley Publishing Company, (1968) .
- [L.2] LIMA, E.L. — *Análise no espaço \mathbb{R}^n* , Ed.Univ.Brasília , (1970) .
- [S.1] SIMMONS, G.F.— *Introduction to Topology and Modern Analysis* , Mc Graw-Hill Book Company, (1963) .
- [S.2] STAKGOLD, I. — " Branching of solutions of non-linear equations," — SIAM Review, 13 (1971), 289-332 .
- [S.3] STUART , C.A. — " Three Fundamental Theorems on Bifurcation " — Département de Mathématiques Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suíça (1977)

- [W.1] WESTREICH, D. — "Banach space bifurcation theory " —
Transactions of the American Mathematical Society
171 (1972), 135-156 .
- [W.2] WESTREICH, D. — "Bifurcation at eigenvalues of odd multi
plicity " — Proc. Amer. Math. Soc. ,41 (1973) ,
609-614 .

ooooo
ooo