ESPAÇOS REFLEXIVOS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS

Júlio César Terruel

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

ESPAÇOS REFLEXIVOS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. JÚLIO CESAR TERRUEL e aprovado pela Comissão Julgadora.

J. Mujica

Prof. Dr. JORGE MUJICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/1985

AGRADECIMENTOS

O professor *Mujica*, meu orientador, guiou-me no estudo de funções holomorfas de várias variáveis, funções holomorfas em espaços de Banach, espaços vetoriais topológicos e apresentou-me o artigo base da dissertação ([1]), auxiliando-me pacientemente em minhas dificuldades durante todo o transcorrer da preparação da mesma.

Gostaria também de agradecer ao grupo de estudo de Análise Funcional, que pacientemente assistiu a trechos de minha dissertação, quando ainda em preparação, sob a forma de seminários.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A presente dissertação é o desenvolvimento do artigo de Alencar, Aron e Dineen ([1]), onde eles encontram um espaço reflexivo de funções holomorfas munido com a topologia portadora de Nachbin.

O domínio de tais funções holomorfas será qualquer aberto equilibrado de um espaço de Tsirel'son e o capítulo I trata do desenvolvimento de tais espaços e suas propriedades, bem como, de seu dual; sendo baseado no artigo de Tsirel'son ([20]).

O capítulo II trata de espaços de polinômios e produtos tensoriais topológicos sendo baseado nos livros de Greub ([5]), Grothendieck ([6]), Schaefer ([18]) e na tese de Ryan ([17]); e serve como preparação ao capítulo III onde, baseados na tese de Ryan ([17]) enunciamos condições necessárias e suficientes para a reflexividade de um espaço de polinômios η-homogêneos contínuos; e depois baseados no artigo de Alencar, Aron e Dineen ([1]) mostramos que o espaço de polinômios com domínio num espaço de Tsirel'son satisfaz a estas condições.

No capítulo IV estudamos decomposições de Schauder e suas relações com semi-reflexividade baseados no artigo de Cook ([2]); e este capítulo serve como preparação ao capítulo V onde estudamos condições suficientes para a reflexividade de um espaço de funções holomorfas com a topologia de Nachbin e mostramos que o espaço das funções definidas e holomorfas num espaço de Tsirel'son satisfaz a estas condições. No capítulo V nós nos baseamos no artigo ([3]) e livro ([4]) de Dineen.

CAPÍTULO I

Espaços de Tsirel'son.

Definição 1-1

Um espaço normado E é dito finitamente universal se e xiste $C>1$ tal que para cada espaço normado G de dimen são finita existe um subespaço $F \subset X$ da mesma dimensão e um operador linear inversível $T: G \to F$ tal que:

$$||T||.||T^{-1}|| < C$$

Lema 1-2

Suponhamos que exista $C>1$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ exis te um subespaço $F \subset E$ de dimensão N e um operador linear inversível $T: \ell_\infty^N \to F$, tal que $||T||.||T^{-1}|| < C$. Então E é finitamente universal. Como conseqüência o espaço ℓ_∞ é finitamente universal.

Prova

De fato, se G é um espaço normado de dimensão finita, en tão como $S(0,1) \subset G'$ é totalmente limitada (pois é compac ta) conseguimos N funcionais lineares $g ,\dots,g_n \in S(0,1)$ ta is que: $S(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(g_i,1/2)$.

Se $\chi \varepsilon G$ existe um funcional $g \varepsilon S(0,1)$ tal que $g(\chi) = \|\chi\|$. Logo existe i com $1 \leq i \leq N$, tal que $\|g - g_i\| < 1/2$, o que implica: $|g(\chi)| < |g_i(\chi)| + \|\chi\|/2$.- Assim $\|\chi\| < |g_i(\chi)| + \|\chi\|/2 \rightarrow \|\chi\| < 2|g_i(\chi)|$.

Então definindo $U : G \rightarrow \ell_\infty^N$ por: $U\chi = (g_1(\chi), \ldots, g_n \chi)$, temos que: $\|U\chi\|_\infty \leq \|\chi\| \leq 2\|U\chi\|_\infty$ para todo $\chi \varepsilon G$, donde $\|U\| \leq 1$ e $\|U^{-1}\| \leq -2$. Assim supondo que existem $C > 1$, e $T : \ell_\infty^N \rightarrow F$ com $\|T\| . \|T^{-1}\| < C$, segue que existe $2C > 1$ e $ToU : G < ToU(G)$ com: $\|ToU\| . \|(ToU)^{-1}\| < 2C$.

Lema 1-3

Se E é finitamente universal e $f : E \rightarrow F$ é um isomorfismo topológico, então F também é finitamente universal.

Prova:

Dado G de dimensão finita existe $T : G \rightarrow E$ com $\|T\| . \|T^{-1}\| < C$. Assim $foT : G \rightarrow F$ e satisfaz $\|foT\| . \|(foT)^{-1}\| \leq \|f\| . \|f^{-1}\| . C$.

Definição 1-4

Um espaço vetorial normado é uniformemente convexo se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\chi\| = \|y\| = 1$ e $\|\chi - y\| > \varepsilon \rightarrow \|\chi + y\| < 2 - \delta$.

Exemplos: os espaços ℓ_1 e ℓ_∞ não são uniformemente convexos pois para o ℓ_1 tomemos $\chi = e_1$, $y = e_2$ e para o ℓ_∞ tomemos $\chi = e_1 + e_2$, $y = e_1 - e_2$. Os espaços ℓ_p, $1 < p < \infty$

são uniformemente convexos ([10], §26, 7 (12)).

Lema 1-5

Um espaço normado é uniformemente convexo se, e só se, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$, tal que: $||x||\leq 1$, $||y||\leq 1$ e $||x-y||>\varepsilon \rightarrow ||x+y||<2-\delta$

Prova:

Seja E um espaço uniformemente convexo. Então dado $\varepsilon>0$ existe $\theta>0$ tal que $||x||=||y||=1$ e $||x-y||>\varepsilon/2 \rightarrow ||x+y||<2-\theta$. Sejam agora x e $y \in E$ com $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$ e $||x-y|| > \varepsilon$:

1. Se $||x|| < 1 - \varepsilon/4$ ou $||y|| < 1 - \varepsilon/4$, então $||x+y|| < 2 - \varepsilon/4$.
2. Se $||x|| < 1 - \theta/4$ ou $||y|| < 1 - \theta/4$, então $||x+y|| < 2 - \theta/4$.
3. Se $||x||$ e $||y|| \geq 1 - \varepsilon/4$ e $1 - \theta/4$, então $||x-\hat{x}|| \leq \theta/4$ e $||y-\hat{y}|| \leq \theta/4$, onde $\hat{x} = x/||x||$ e $\hat{y} = y/||y||$. Segue que $||x+y|| \leq ||\hat{x}+\hat{y}|| + \theta/2$.

Por outro lado $||\hat{x}-x|| \leq \varepsilon/4$ e $||\hat{y}-y|| \leq \varepsilon/4$, donde $||\hat{x}-\hat{y}|| > ||x-y|| - \varepsilon/2 > \varepsilon/2$. Assim $||\hat{x}+\hat{y}|| < 2 - \theta$ e segue que $||x+y|| < 2 - \theta/2$.

Então basta tomar $\delta = \min\{\varepsilon/4, \varepsilon/4\}$.

Proposição 1-6

Um espaço uniformemente convexo não pode ser finitamente universal.

Prova

Suponhamos que E é finitamente universal com uma constante C e é também uniformemente convexo. Existe $\theta \in (0,1)$ tal que $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$ e $||(x-y)/2|| > 1/C \rightarrow$ - $||(x+y)/2|| < \theta$.

Dado um operador inversível $T: \ell_\infty^N \rightarrow FCE$; mostraremos que $||T||.||T^{-1}|| > \min(C, \theta^{2-N})$ (isto nos levará a uma contradição se escolhermos N suficientemente grande e T tal que $||T||.||T^{-1}|| < C$). Para $N = 1$ temos $||T||.||T^{-1}|| \geq 1 > \theta$. Para outros valores de N usaremos a prova de indução. Suponhamos que $T: \ell_\infty^N \rightarrow F C E$ é inversível. Assumamos que ℓ_∞^{N-1} está imerso em ℓ_∞^N de modo natural e consideremos a restrição U de T a ℓ_∞^{N-1}; assim é suficiente mostrar que $||U|| \leq \theta ||T||$ (pois temos que $||T||.||T^{-1}|| > \theta^{-1} ||U||.||U^{-1}|| > \theta^{-1} \min(C, \theta^{3-N}) \geq \min(C, \theta^{2-N})$, pela hipótese de indução). Isto é fácil de se fazer pois se $Z \in \ell_\infty^{N-1}$ e $||Z|| \leq 1$ podemos escrever $Z = (x+y)/2$ com $x,y \in \ell_\infty^N$, $||x|| = ||y|| = ||(x-y)/2|| = 1$ (basta fazer $x = z + e_N$, $y = Z - e_N$,

onde e_N é o n-ésimo vetor da base canônica de ℓ_∞^N). Assim temos que:

$$\frac{U(Z)}{||T||} = \frac{a+b}{2} \text{ onde } a = \frac{T(x)}{||T||} \quad b = \frac{T(y)}{||T||}$$

Como $||a|| \leq 1$, $||b|| \leq 1$ se por absurdo $||U(Z)|| > \theta ||T||$ teremos $||(a+b)/2|| > \theta$ donde $||(a-b)/2|| < 1/C$, e as

sim: $\left\|\frac{T(x-y)}{2\|T\|}\right\| < \frac{1}{C} \rightarrow \left\|T\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\| < \|T\|.\frac{1}{C} < \frac{C}{\|T^{-1}\|}.\frac{1}{C} = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$
Logo $\|T^{-1}\|.\left\|T\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\| < 1 \rightarrow \left\|T^{-1}\circ T\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\| < 1$
$\rightarrow \|(x-y)/2\| < 1$, que é uma contradição e completa a prova.

Será conveniente falar dos elementos do espaço ℓ_∞ (e de outros espaços de seqüências) como funções definidas em N. O operador de multiplicação pontual pela função característica $1_{[n+1,\infty]}$ será denotado por P_n.

Definição 1-7

Uma coleção $(x_1,\ldots,x_N)$ de elementos do espaço ℓ_∞ tem suporte disjunto crescente se para i,j arbitrários satisfazendo $1 \leq i < j \leq N$ e supp $x_i \neq \emptyset$, supp $x_j \neq \emptyset$, temos que supsupp x_i < mínsupp x_j, onde: supp $x = \{n \in N : x(n) \neq 0\}$.

É claro que nesse caso os x_i têm suporte finito exceto, talvez, o último não nulo. Existem i e n tais que $x_i = P_n(x_1+\ldots+x_n)$.

Definição 1-8

Um subconjunto $A \subset \ell_\infty$ tem a propriedade 1 (respectivamente 2,3,4,4a) se satisfaz à condição correspondente:

1. $A \subset B_1(\ell_\infty)$. Cada vetor $e_j \in A$ ($e_j(n)=1$ se $n=j$ e 0 se $n \neq j$).

2. Para todos $x \in A$ e $y \in \ell_\infty$ com $|y| \leq |x|$ tem-se $y \in A$ (o módulo e a desigualdade são tomados pontualmente).

3. Se $(x_1, \ldots, x_N)$ é uma coleção de elementos de A (de ordem arbitrária N) com suporte disjunto crescente, então:

$1/2 P_N(x_1 + \ldots + x_N) \in A.$

4. Para todo $x \in A$ existe $n \in N$, tal que:

$2P_n(x) \in A$

4.a. Para todos $x \in A$ e $q \in N$ existe $n \in N$, tal que $2^q P_n(x) \in A$.

Lema 1-9

Se A tem a propriedade 1 (respectivamente 2) então a envoltória convexa fechada de também tem a propriedade 1 (respectivamente 2).

Prova

Para a propriedade 1 o lema é óbvio. Sejam então $y \in \ell_\infty$ e $x = \Sigma\lambda_i x_i$ com $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $x_i \in A$, $\Sigma\lambda_i = 1$ e $|y| \leq |x|$. Logo $|y| \leq \Sigma\lambda_i |x_i|$ e assim existe $\alpha \in [0,1]$, tal que $|y| = \Sigma\lambda_i(\alpha|x_i|)$. Mas como $y = |y|\text{sign}y$ (a função sign, o módulo e o produto são tomados pontualmente) segue que $y = \Sigma\lambda_i(\alpha|x_i|\text{sign}y)$ onde $\alpha|x_i|\text{sign}y \in A$ pela propriedade

2 e assim temos que $y \in M$ (a envoltória convexa de A). Agora se $x \in \overline{M}$ e $|y| \leq |x|$ temos $|y| = \alpha|x|$ com $\alpha \in [0,1]$. Logo, $y = \alpha|x|\text{signy}$. Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in I}$, rede em A com $x_\lambda \to x$. Temos que $\alpha|x_\lambda|\text{signy} \in A$ (pela propriedade 2) e ainda $\alpha\text{signy}|x_\lambda| \to y$ (para a topologia pontual é óvio, para o da norma basta ver que $||\alpha\text{signy}|x_\lambda| - \alpha\text{signy}|x||| \leq ||\alpha\text{signy}||.||x_\lambda - x||$; e para a topologia fraca basta ver que os fechos fraco e da norma de um convexo coincidem.

Lema 1-10

Se A tem as propriedades 1, 2 e 3 então seu fecho pontual também tem estas propriedades.

Prova

Sejam $x_1,\ldots,x_N \in \overline{A}$ com suporte disjunto crescente e seja W uma vizinhança de $1/2P_N(x_1+\ldots+x_N)$. Como a soma é contínua existem vizinhanças $V_1,\ldots V_N$ de $1/2P_N(x_1)$, ..., $1/2P_N(x_N0$ respectivamente, tais que $V_1 + \ldots + V_N \subset W$. - Logo, existem $U_1,\ldots,U_N$ vizinhanças de $x_1,\ldots,x_N$ respectivamente com $1/2P_N(U_i) \subset V_i$ (pois P_N é pontualmente contínua). Assim existem $y_1,\ldots,y_N$ pertencentes a $U_1 \cap A$, ..., $U_N \cap A$, respectivamente; e ainda podemos supor que cada y_i tem o suporte contido no suporte de x_i em vista da propriedade 2 e das seminormas que geram a topologia pontual. Assim temos que:

$y = 1/2P_N(y_1+...+y_N)$ ε W A e segue que

$1/2P_N(x_1+...+x_N)$ ε $\bar{A}$.

Lema 1-11

a. A tem a propriedade 4 se, e só se, A tem a propriedade 4.a.

b. Se A tem as propriedades 1 e 4 então A C Co.

Prova

Para q = 1, temos a propriedade 4. Se 4.a. vale para q = k-1, temos que existe n_o ε N tal que $2^{k-1}Pn_o(x)$ ε A. Mas pela propriedade 4 existe n_1 tal que $2Pn_1(2^{k-1}Pn_o(x))$ ε A, donde $2^kPn(x)$ ε A se tomarmos n = máx(n_o,n_1).

Sejam x ε A e $\varepsilon > 0$. Seja q ε N tal que $2^{-q} < \varepsilon$. Existe n tal que $2^qPn(x)$ ε A C $B_1(\ell_\infty)$ $\rightarrow$ $||2^qPn(x)|| \leq 1$ $\rightarrow$ $||Pn(x)|| < \varepsilon$. Assim x ε Co.

Lema 1-12

ℓ_∞ é metrizável com a topologia pontual.

Prova

A topologia pontual é gerada pela seqüência de seminormas $pn(x) = |x(n)|$, n ε N e se $x \neq 0$ $\rightarrow$ existe n ε N com

$x(n) \neq 0$ donde $pn(x) \neq 0$. Assim segue o resultado.

Proposição 1-13

Existe um conjunto fracamente compacto $K \subset Co$ que tem as propriedades 1 a 4.

Prova

Seja A o menor conjunto tendo as propriedades 1 a 3. Em outras palavras $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, onde $A_1 = \{\alpha e_j : j \geq 1, |\alpha| \leq 1\}$ e $A_{n+1} = A_n \cup B_n$ onde B_n é o conjunto dos elementos $1/2P_N(x_1+\ldots x_N)$ para $(x_1,\ldots,x_N)$ uma coleção arbitrária de elementos de A_n com suporte disjunto crescente. Seja K o fecho de A em ℓ_∞ na topologia da convergência pontual; K tem as propriedades 1 a 3 e mostraremos que também tem a propriedade 4. Seja $x \in K$, suponhamos que o suporte de x é infinito, pois caso contrário a prova seria trivial. Escolhamos $x^{(S)}$ x pontualmente (ℓ_∞ é metrizável com a topologia pontual). Eventualmente a função $x^{(S)}$ não se anula no ponto $k_o = \min \operatorname{supp} x$ e também em algum outro ponto, pois ocorre o mesmo com x. Desse modo $x^{(S)} \notin A_1$ e temos por recorrência que $x^{(S)}$ pertence a algum B_n, isto é, $x^{(S)} = 1/2P_{Ns}(x_1^{(S)}+\ldots+x_{Ns}^{(S)})$, onde $(x_1^{(S)},\ldots,x_{NS}^{(S)})$ é uma coleção de elementos de A com suporte disjunto crescente. É essencial que $Ns \leq k_o$; pois $x^{(S)}(k_o) \neq 0$. Podemos supor, desse modo, que Ns não depende de S, Ns = N; passando a subseqüências, se neces sário (pois Ns é num conjunto finito e s num conjunto e numerável infinito, donde um dos valores deve se repetir infinitas vezes). Também podemos supor, passando a subseqüências se necessário, que cada uma das N seqüências $(x_i^{(S)})s$ converge pontualmente a algum x_i ε K (temos que ou $\sup_s$ máx supp $x_1^{(S)} = \infty$, donde podemos assumir que - máx supp $x_1^{(S)} \to \infty$, donde $1/2P_N(x_1^{(S)}) \to x$ (pontualmente) e como podemos trocar $x_1^{(S)}$ por $P_N(x_1^{(S)})$ ε A, temos que $x_1^{(S)} \to 2x$ e que $x_k^{(S)} \to 0$ para $2 \leq k \leq N$. Ou então temos que $\sup_s$ máx supp $x_1^{(S)} < \infty$, donde podemos assumir que máx supp $x_1^{(S)} = r$, e assim $1/2P_N(x_1^{(S)}) \to x - Pr(x)$. Basta prosseguir para $x_2,\ldots,x_N$).

Se tomarmos o limite encontraremos que $x = 1/2P_N(x_1+\ldots+x_N)$. A coleção $(x_1,\ldots,x_N)$ tem suporte disjunto crescente como limite de uma seqüência de coleções que tem esta propriedade. Então existem i e n tais que $x_i = P_N(x_1+\ldots+x_N)$, e assim temos que:
$2P_{\text{máx}(n,N)}(x) = P_n o P_N(2x) = P_n o P_N(x_1+\ldots+x_N) = P_N(x_i)$ que pertence a K pela propriedade Z.

Os dois temas a seguir mostrarão que em uma bola de Co as topologias fraca e pontual coincidem e que K é compacto na topologia pontual. Como K está contido na bola unitária de Co segue que K é fracamente compacto.

Lema 1-14

Em uma bola de Co as topologias fraca e pontual coincidem.

Prova

É suficiente mostrar que toda seqüência que converge pontualmente em uma bola de Co converge fracamente. Seja então $x_i \to x$ pontualmente em uma bola de Co. Logo existe $\delta > 0$ tal que $||x_i||_\infty \leq \delta$ e $||x||_\infty \leq \delta$. Assim $|x_i(n)| \leq \delta$ e $|x(n)| \leq \delta$ para todos $i, n \in N$. Seja $\phi \in C_o'$ e $(\phi_n)_n \in \ell_1$ seu correspondente segundo o isomorfismo canônico entre C_o' e ℓ_1.

Temos que:

$$\phi(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n . x_i(n), \text{ o que implica}$$

$$\lim_i \phi(x_i) = \lim_i \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n . x_i(n).$$

Mas $|\phi_n x_i(n)| \leq \delta . |\phi_n|$ com $\sum_{n=1}^{\infty} \delta |\phi_n| < \infty$. Logo, pelo critério de Weierstrass a série $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n x_i(n)$ converge absoluta e uniformemente donde podemos fazer:

$$\lim_i \phi(x_i) = \lim_i \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n x_i(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_i \phi_n x_i(n) = \phi(x).$$

Assim $f_i \to f$ fracamente e vem que a topologia fraca é menos fina que a pontual. Como sabemos que é mais fina vem a igualdade.

Corolário 1-15

Seja A um convexo limitado de Co. Então o fecho de A é o mesmo para a topologia da norma, a topologia fraca e a topologia pontual.

Prova

Em um espaço de Banach os fechos fraco e da norma de um conjunto convexo coincidem ([18], corolário 2, pág. 65). E como em uma bola de Co as topologias fraca e pontual coincidem, vem o resultado.

Lema 1-16

K é compacto na topologia pontual.

Prova

K é pontualmente fechado em $B_1(\ell_\infty)$; assim basta mostrar que $B_1(\ell_\infty)$ é pontualmente compacto. Mas $B_1(\ell_\infty) = \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$, com a topologia produto, o qual é compacto pelo teorema de Tychonoff.

Proposição 1-17

Suponhamos que K C Co é fracamente compacto e tem as propriedades 1 a 4. Então sua envoltória convexa fechada V é um conjunto absolutamente convexo fracamente compacto e tem as propriedades 1 a 4.

Prova

Sabemos que a envoltória convexa fechada de um conjunto fracamente compacto em um espaço de Banach é fracamente compacta ([18], 11.4, pág. 189 e 3.4, pág. 132). K é equilibrado pela propriedade 2 e daí a envoltória convexa M de K é convexa e equilibrada, daí o fecho $V = \overline{M}$ é convexo e equilibrado.

Em vista de lemas anteriores, temos que mostrar apenas que M tem a propriedade 3 e V tem a propriedade 4.

Suponhamos que $(x_1, \ldots x_N)$ tem suportes disjuntos crescentes e cada x_i é uma combinação convexa de elementos de K; $x_i = \alpha_i^{(1)} x_i^{(1)} + \ldots + \alpha_i^{(n)} x_i^{(n)}$, $x_i^{(S)} \in K$ (como é um número finito de elementos, podemos supor que n é o mesmo para todos). Como K tem a propriedade 2, podemos supor que $x_i(k) = 0 \rightarrow x_i^{(S)}(k) = 0$ (trocando $x^{(S)}$ por $x_i^{(S)} - x_i^{(S)}(k)\ _k$, se necessário); então para cada coleção de índices $S_1, \ldots, S_N$ em $[1,N]$ a coleção $(x_1^{(S_1)}, \ldots, x_N^{(S_N)})$ tem suporte disjunto crescente e assim $1/2P_N(x_1^{(S_1)} + \ldots + x_N^{(S_N)}) \in K$.

Mas $x_1 + \ldots + x_N$ pode ser escrito como uma combinação convexa de elementos da forma $x_1^{(S_1)} + \ldots + x_N^{(S_N)}$ (lema 1-18), donde segue que $1/2P_N(x_1 + \ldots + x_N)$ pode ser escrito como uma combinação convexa de e lementos de forma $1/2P_N(x_1^{(S)}+\ldots x_N^{(S_N)}$, por linearidade de P_N; e como esses elementos pertencem a K, vem que $1/2P_N(x_1+\ldots x_N) \in M$ que tem então a propriedade 3.

Agora mostraremos que V tem a propriedade 4. Coloquemos $D_n = \{x \in K\colon 4P_n(x) \in K\}$. $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência ascendente de conjuntos fracamente fechados cuja união é igual a K (lema 1-19). Seja $x_o \in V$. É sabido ([16], teorema 3.28, pág. 76) que existe uma medida de probabilidade μ em K (fracamente Borel regular) tal que para cada funcional linear contínuo f em Co temos $f(x_o) = \int_K f d\mu$. Como $\mu(D_n) \to 1$, existe n_o tal que $\mu(D_{no}) \geq 3/4$; então temos que $2P_{no}(x_o) \in V$ pois caso contrário existiria um funcional linear contínuo f tal que $f(x_o) > 1$ e $|f(x)| \leq 1$ para todo x satisfazendo $2P_{no}(x) \in V$ ([16]), teorema 3.7, pág. 60) e isto resultaria na seguinte contradição:

$1 < \int_{D_{no}} f d\mu + \int_{K\, D_{no}} f d\mu \leq \frac{1}{2}\mu(D_{no}) + 2\mu(K\, D_{no}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
(pois $x \in D_{no} \to 4P_{no}(x) \in K \to 2P_{no}(2x) \in V \to |f(2x)| \leq 1 \to |f(x)| \leq 1/2$. E $x \in K \to P_{no}(x) \in K \to P_{no}(x) \in V \to 2P_{no}(x/2) \in V \to |f(x/2)| \leq 1 \to |f(x) \leq 2$).

Assim devemos ter que $2P_{no}(x_o) \in V$, donde V tem a propriedade 4 e a proporição fica demonstrada.

Lema 1-18

Na notação da proposição anterior temos que $x_1+\ldots+x_N$ pode ser escrito como uma combinação convexa de elementos da forma: $x_1^{(S1)} + \dots + x_N^{(SN)}$.

Prova

Façamos por indução sobre N. Para N = 1 temos que $x_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_1^{(j)} x_1^{(j)}$. Suponhamos que vale para N=k e provemos para N = k+1.

$x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{M} \lambda_\ell . [x_1^{S1\ell} + \dots + x_k^{Sk\ell}] + x_{k+1}$ pela hipótese de indução. Chamemos:

$$y_\ell = x_1^{S1\ell} + \dots + x_k^{Sk\ell}.$$

Assim, $x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{M} \lambda_\ell y_\ell + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k+1}^{(j)} x_{k+1}^{(j)} = \sum_{\ell=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} \lambda_\ell . \alpha_{k+1}^{(j)} (y_\ell + x_{k+1}^{(j)})$ que é a combinação convexa requerida.

Lema 1-19

Na notação da proposição anterior $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência ascendente de conjuntos fracamente fechados cuja união é igual a K.

Prova

$x \in D_n \to x \in K$ e $4P_n(x) \in K \to x \in K$ e $4P_{n+1}(x) \in K \to x \in D_{n+1}$. Logo $D_n \subset D_{n+1}$ para todo $n \in N$.

Se $x_\lambda \in D_n$ e $x_\lambda \to x$ fracamente temos que $x_\lambda \in K$, $4P_n(x_\lambda) \in K$ donde $x \in K$ (fracamente fechado) e como P_n é fracamente contínua (pois $P_n = I - \sum_{j=1}^{n} e_j \Pi_j$), vem que:

$4\ P_n(x) = 4P_n(\text{lim fraco } x_\lambda) = \text{lim fraco } 4P_n(x_\lambda) \in K$; logo $x \in D_n$ e segue que D_n é fracamente fechado.

Temos que $D_n \subset K$ para todo n e se $x \in K$ pela propriedade 4.a. dado $q=2$ existe $n \in N$ tal que $2^2 P_n(x) \in K$, donde $x \in D_n$.

Definição 1-20

Um sistema de blocos com respeito a uma base $(e_j)_j$ é uma seqüência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ da forma:

$x_i = \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \lambda_j e_j$. Se $||x_i|| = 1$ para cada i o sistema é dito normalizado.

Proposição 1-21

Suponhamos que um conjunto fracamente compacto e absolutamente convexo $V \subset Co$ tem as propriedades 1 a 4. Seja X o subespaço vetorial gerado por V munido com a norma - na qual V é a bola unitária fechada. Então X é um espaço de Banach reflexivo; a seqüência de vetores unitários $(e_j)_1^{\infty}$ é uma base incondicional em X, e o sistema de funções conjugados $(e_j^*)_1^{\infty}$ é uma base incondicional no dual X'. Se $(x_i)_1^{\infty}$ é um sistema de blocos normalizado com respeito à base $(e_j)_1^{\infty}$, então:

$||P_N(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_N x_N)||x < 2 \max\limits_{1\ i\ N} |\lambda_i|$,
para N e $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ arbitrários.

Prova

Em [8], proposições 5 e 6, pág. 207 vemos que existe o espaço normado $(X, ||\ \ ||x)$ e que o mesmo é Banach.

Para mostrar que $(e_j)_1^\infty$ é uma base em X, temos que verificar que para todo $x \in X$, $||P_n x||x \to 0$, e isto segue de 4.a. Pela propriedade 2 a base é incondicional, pois dado $\varepsilon > 0$, existe n_o tal que $||P_n x||x \leq \varepsilon$ para $n \geq n_o$; ou $P_n x \in \varepsilon V$ para $n \geq n_o$. Assim se F C N é finito e F $\{1,\ldots,n_o\}$ temos que $(x - \sum_{i \in F} \pi_i(x) e_i) \in \varepsilon V$ (pela propriedade 2) e vem que a família $(\pi_i(x) e_i)_1^\infty$ é somável a x.

Se $(x_i)_i$ é um sistema de blocos normalizado, então para cada N a coleção $(x_1, \ldots, x_N)$ tem suporte disjunto crescente e a propriedade 3 implica que $1/2 P_N(x_1 + \ldots + x_N) \in V$, e como: $\left|\frac{P_N(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_N x_N)}{2 \max|\lambda_i|}\right| \leq \left|\frac{1}{2} P_N(x_1 + \ldots + x_N)\right|$ pontualmente, a propriedade 2 implica que: $\frac{P_N(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_N x_N)}{2 \max|\lambda_i|} \in V$

donde $||P_N(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_N x_N||x \leq 2 \max|\lambda_i|$.

Mostraremos agora que $(e_j^*)_1^\infty$ (onde e_j^* é a j-ésima projeção) é uma base em X'. Temos apenas -

que mostrar que para todo $f \in X'$ temos $||P_n^*f|| \to 0$ (onde P_n^* é a conjugada de P_n ou $P_n^*f = foP_n$ ou ainda $P_n^*f = f - \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$). Suponhamos que não, isto é, para todo n $||P_n^*f|| > \varepsilon$ (passando a subseqüências, se necessário); escolhamos um x_1 com suporte finito, $||x_1|| = 1$ e $f(x_1) > \varepsilon$ (como $P_o^*f = foP_o = f$ tem norma $> \varepsilon$, existe x_1 de norma um com $|f(x_1)| > \varepsilon \to f(x_1.\mathrm{sign}f(x_1)) > \varepsilon$ e como $x_1 - P_n(x_1) \to x_1$ podemos supor que x_1 tem suporte finito). Depois escolhemos x_2 que está à direita de x_1 ($\sup\mathrm{supp}x_1 < \min\mathrm{supp}x_2$) e tem as mesmas propriedades (escolhemos x_2 para $P^*\mathrm{máx}\,\mathrm{supp}x_1+1(f) = foP\mathrm{máx}\,\mathrm{supp}x_1+1$). Continuando o processo obtemos um sistema de blocos normalizado $(x_i)_i$ tal que $f(x_i) > \varepsilon$ para todo i. Claramente P_N não afeta $x_{N+1},\ldots,x_{2N}$ e desse modo $||x_{N+1}+\ldots+x_{2N}|| \leq 2$ (pela propriedade 3) apesar de que $f(x_{N+1}+\ldots+x_{2N}) > N.\varepsilon$. Isto contradiz o fato de ser f contínua. Para ver que a base é incondicional, seja $f \in X'$ com $f = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n)e_n^*$. Dado $\varepsilon > 0$ existe n_o tal que $||f - \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*|| < \varepsilon$ se $n \geq n_o$. Seja F finito com F $\{1,\ldots,n_o\}$. Temos que:

$$||f - \sum_{i\in F} f(e_i)e_i^*|| = \sup_{x\in V} |foP_F(x)|, \text{ onde:}$$

$P_F(x) = x - \sum_{i\in F} e_i^*(x)e_i$. Logo $P_F(x) = P_{no}$ o $P_F(x) \to P_F(V) \subset P_{no}(V)$ (pela propriedade 2). Assim $||foP_F|| \leq ||foP_{no}|| < \varepsilon$. Segue que a base de X' é incondicional.

Falta ainda mostrar que X é reflexivo, isto é, que V é compacto na topologia fraca $\sigma(X,X')$. Mostraremos que as topologias $\sigma(X,X')$ e $\sigma(Co,Co')$ coinci dem em V. Como $\|\ \|_{Co} \leq \|\ \|_X$ em X temos que $\sigma(Co,Co')$ $\leq \sigma(X,X')$ em X. Agora, para cada $f \in X'$ a restrição f/V é contínua na topologia $\sigma(Co,Co')$ pois f/V é o limite uniforme de uma seqüência f_n/V, $f_n \in Co'$; por exemplo: $f_n = f(e_1)e_1^* + \dots + f(e_n)e_n^* = f - P_n^*f$ (o limite é uniforme em V, pois $(e_i^*)_1^\infty$ é base de X' e V é a bola unitária de X).

Teorema 1-22

Existe um espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita no qual cada subespaço de dimensão infinita é finitamente universal.

Prova

Vamos mostrar que cada subespaço de dimensão infinita Y do espaço X da proposição anterior é finitamente universal. Se $(x_i)_i$ é um sistema de blocos normalizado com respeito à base $(e_j)_j$ em X, então o subespaço $X_o \subset X$ gerado por este sistema é finitamente universal, pois para cada N e $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ arbitrários, temos que:

$$\max_{1\leq i\leq N} |\lambda_i| \leq \|\lambda_1 x_{N+1} + \dots + \lambda_N x_{2N}\| \leq 2 \max_{1\leq i\leq N} |\lambda_i|$$

(pois $\|\lambda_i x_{N+1}\| \leq \|\lambda_1 x_{N+1} + \dots + \lambda_N x_{2N}\|$ pela propriedade 2). Desse modo é suficiente escolher $(x_i)_i$ tal que X_o é topologicamente isomorfo a algum subespaço $X_1 \subset Y$.

Para esse fim escolhamos $y_1 \in Y$, $||y_1|| > 1+1/4$. Existe natural n_1 tal que $||P_{n1}(y_1)|| < 2^{-1-1}$ donde escolhemos $x_1 = y_1 - P_{n1}(y_1)$. Depois escolhemos $y_2 \in Y$, $||y_2|| > 1 + 1/4$ tal que mín supp$y_2 > n_1$; assim existe natural n_2 tal que $||P_{n2}(y_2)|| < 2^{-2-1}$ donde escolhemos $x_2 = y_2 - P_{n2}(y_2)$. Assim obtemos um sistema de blocos $(x_i)_i$ e uma seqüência de vetores em Y $(y_i)_i$ que são |.i. e tais que $||y_i - x_i|| < 2^{-i-1}$. Aplicando o lema seguinte, concluímos que existe um isomorfismo $S:X_o \to X_1$ tal que $Sx_i = y_i$; onde $X_1 = [y_i:i\varepsilon N]$ e $X_o = [x_i:i\varepsilon N] = [\hat{x}_i:i\varepsilon N]$, onde $\hat{x}_i = x_i/||x_i||$.

Lema 1-23

Para os x_i e y_i como construídos na demonstração do teorema anterior existe um isomorfismo topológico $S:X_o \to X_1$ tal que $Sx_i = y_i$ onde $X_o = [x_i:i\varepsilon N]$ e $X_1 = [y_i:i\varepsilon N]$.

Prova

Pela condição imposta sobre a norma de y_i vem que $x_i \neq 0$ e assim $(x_i)_i$ é um sistema de blocos donde segue que os x_i são |.i. Os y_i embora nãoformem um sistema de blocos são também |.i. pois se $i<j$ temos que y_j se anula em mín suppy_i. Assim podemos definir um operador linear inversível $S:X_o \to X_1$ colocando $Sx_i = y_i$ para cada $i\varepsilon N$.

Falta mostrar que S é bicontínuo. Pa

ra esse fim sejam $a_n \in X_o$ e $a_n \to 0$. Temos que $a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} x_i$, onde $(\lambda_{ni})_i$ é uma seqüência quase nula para todo n. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in N$ tal que $n \geq n_o$ implica $||a_n|| < \varepsilon$ donde $||\lambda_{ni} x_i|| < \varepsilon$ para $n \geq n_o$ e i natural (propriedade 2). Como temos:

$||x_i|| \geq ||y_i|| - ||x_i - y_i|| \geq 1 + 1/4 - 1/4 = 1$ segue que $|\lambda_{ni}| < \varepsilon$ para $n \geq n_o$ e i natural. Assim,

$||Sa_n|| \leq ||Sa_n - a_n|| + ||a_n|| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_{ni}| . ||x_i - y_i|| +$
$+ ||a_n||$

$\to ||Sa_n|| \leq \varepsilon . 1/2 + \varepsilon < 2\varepsilon$ se $n \geq n_o$. Logo S é contínuo. Para a continuidade de S^{-1} basta proceder de modo análogo.

Corolário 1-24

Existe um espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita que não contém subespaço algum que seja topologicamente isomorfo a ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ ou Co; e conseqüentemente - ℓ_∞.

Prova

Pode ser o espaço X da proposição anterior. Como ℓ_1 e Co são Banach não reflexivos não podem ter cópias imersas num espaço de Banach reflexivo. Como X não contém cópia de Co não pode conter cópia de ℓ_∞ pois esta conteria uma cópia de Co. A gora os espaços ℓ_p, $1 < p < \infty$ - são uniformemente convexos ([10], §26, 7.(12)], logo não

podem ter cópias finitamente universais e por conseguin
te não podem ser imersos em X.

CAPÍTULO II

Polinômios e Produtos Tensoriais Topológicos

Definição 2-1

Sejam E um espaço vetorial, $n \in N$ e $\phi: E^n \to G$ uma aplicação n-linear, onde G é outro espaço vetorial. O par (G,ϕ) é dito um n-ésimo produto tensorial do espaço vetorial E se as seguintes condições são verificadas:

1 - $[\mathrm{Im}\ \phi] = G$

2 - Se H é um espaço vetorial arbitrário e $h: E^n \to H$ é uma aplicação n-linear então existe uma aplicação linear $f: G \to H$ tal que: $h = f o \phi$

Denotaremos $G = \otimes^n E$ e $\phi(x_1, \ldots x_n) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$.

Lema 2-2

$x_1 \otimes \ldots \otimes (\lambda x_i + y_i) \otimes \ldots \otimes x_n = \lambda (x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes x_n) +$

$x_1 \otimes \ldots \otimes y_i \otimes \ldots \otimes x_n$ onde $x_j \in E$, $1 \leq j \leq n$, $y_i \in E$ e λ pertence ao corpo de escalares.

Prova

Basta aplicar a n-linearidade da função ϕ.

Lema 2-3

Se $x_1, \ldots x_n \in E \quad \{0\}$ então $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \neq 0$.

Prova

Se $x_1, \ldots, x_n \in E \quad \{0\}$ existem funcionais lineares $f_i \in E^*$, $1 \leq i \leq n$ tais que $f_i(x_i) \neq 0$. Temos que:

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto f_1(a_1). \ldots . f_n(a_n)$$

é uma aplicação n-linear de E^n no corpo de escalares. Desse modo a definição de produto tensorial nos diz que existe $h: \otimes^n E \to$ corpo linear e tal que:

$$h(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = f_1(a_1) \ldots f_n(a_n)$$

donde segue que:

$$h(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f_1(x_1). \ldots .f_n(x_n) \neq 0$$

e temos finalmente que $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \neq 0$.

Teorema 2-4

Dado um espaço vetorial E e $n \in N$ existe um produto tensorial $\otimes^n E$ e é único, a menos de isomorfismos.

Prova

Veja [5], 1.20 pág. 27 e 1.6, 1.7, pág. 9.

Teorema 2-5

Seja E um espaço vetorial e $(\otimes^n E, \phi)$ o n-ésimo produto - tensorial de E. Então existe um isomorfismo algébrico - $\psi: (\otimes^n E)^* \to \mathcal{L}a(^n E)$ definido por $\psi(f) = f o \phi$.

Prova

A definição de produto tensorial nos dá que ψ é sobrejetora.

ψ é linear, pois temos que:

$\psi(f+\lambda g) = (f+\lambda g) o \phi = f o \phi + \lambda g o \phi = \psi(f) + \lambda . \psi(g)$.

Se $\psi(f) = 0$ então $f o \phi = 0$ donde $f=0$ pois $\phi(E^n)$ gera $\otimes^n E$; e assim ψ é injetora.

Definição 2-6

$h^n E$ é o subespaço de $\otimes^n E$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes \ldots \otimes x$ (n vezes) que denotaremos por $x^{(n)}$. $h^n E$ é chamado o n-ésimo produto homogêneo de E. Seja $x_n : E \to h^n E$ definida por $x_n(x) = x^{(n)}$.

Corolário 2-7

Existe um isomorfismo algébrico $\Omega:(h^nE)^* \to Pa(^nE)$ definido por $\Omega(f) = fo\chi_n$.

Prova

Ω é linear pois $\Omega(f+\lambda g) = (f+\lambda g)o\chi_n = fo\chi_n + \lambda go\ _n = \Omega(f) + \lambda\Omega(g)$.

Ω é injetora, pois $\Omega(f) = 0 \to fo\chi_n = 0 \to f = 0$, pois χ_n (E) gera h^nE.

Finalmente seja $P \in Pa(^nE)$. Existe $A \in \mathcal{L}a(^nE)$ tal que $P = AoIn$ onde $I_n:E\to E^n$ é definida por $I_n(x) = (x,\ldots,x)$ (n vezes). Pelo teorema anterior existe $f \in (\otimes^nE)^*$ tal que $A = fo\phi$. Definamos $g = f/h^nE$, assim $g \in (h^nE)^*$ e ainda: $\Omega(g) = go\chi_n = fo\chi_n = fo\phi oI_n = AoI_n = P$; e assim segue que Ω é sobrejetora.

Lema 2-8

Se p é uma seminorma no espaço vetorial complexo E, e p é o funcional de Minkowski de U C E, então a seminorma em h^nE dada por:

$\mu \mapsto p^{(n)}(\mu) = \inf\{\sum_i[p(x_i)]^n : \mu = \sum_i x_i^{(n)}\}$ é o funcional de Minkowski de $\Gamma(U^{(n)})$ onde $U^{(n)} = \{x^{(n)}: x\in U\}$. Temos também que:

$p^{(n)}(x^{(n)}) = [p(x)]^n$ para todo $x \varepsilon E$.

Doravante $h_\pi^n E$ denotará o espaço $h^n E$ munido com a seminorma $p^{(n)}$ sempre que E é munido com a seminorma p.

Prova

É imediato que $p^{(n)}$ é uma seminorma em $h^n E$. Sejam $M_o = \{\mu \varepsilon h^n E : p^{(n)}(\mu) < 1\}$ e $M_1 = \{\mu \varepsilon h^n : p^{(n)}(\mu) \leqq 1\}$. Se $\mu \varepsilon \Gamma(U^{(n)})$ temos que $\mu = \Sigma \lambda_i x_i^{(n)}$ com $x_i \varepsilon U$ e $\Sigma|\lambda_i| \leq 1$. Então $\mu = \Sigma \bar{x}_i^{(n)}$ onde $\bar{x}_i = \sqrt[n]{\lambda_i}\, x_i$ ($\sqrt[n]{\lambda_i}$ denota uma raiz n-ésima qualquer de λ_i) e assim temos que:
$p^{(n)}(\mu) \leqq \Sigma[p(\bar{x}_i)]^n = \Sigma|\lambda_i|[p(x_i)]^n \leqq 1$; assim $\mu \varepsilon M_1$ e temos $\Gamma(U^{(n)}) \subset M_1$. Se $\mu \varepsilon M_o$ então $\mu = \Sigma x_i^{(n)}$ com $\Sigma[p(x_i)]^n < 1$. Assim existem reais $\varepsilon_i > 0$ tais que $\Sigma[p(x_i) + \varepsilon_i]^n < 1$. Coloquemos $\bar{x}_i = x_i/[p(x_i) + \varepsilon_i]$; então $\bar{x}_i \varepsilon U$ e assim $\mu = \Sigma[p(x_i) + \varepsilon_i]^n . \bar{x}_i^{(n)} \varepsilon \Gamma(U^{(n)})$ e temos que $M_o \subset \Gamma(U^{(n)})$. Então $M_o \subset \Gamma(U^{(n)}) \subset M_1$ o que nos garante que $p^{(n)}$ é o funcional de Minkowski de $\Gamma(U^{(n)})$.

Seja $x_o \varepsilon E$. Existe uma forma linear $f \varepsilon E^*$ tal que $f(x_o) = p(x_o)$ e $|f(x)| \leqq p(x)$ para todo $x \varepsilon E$ (basta usar o Teorema de Hahn-Banach). Temos que f define um polinômio n-homogêneo P em E do seguinte modo $P(x) = [f(x)]^n$. Esse polinômio determina um funcional linear $g \varepsilon (h^n E)^*$, tal que $P = g o \chi_n$. Se $\mu \varepsilon h^n E$ é escrito como $\mu = \Sigma x_i^{(n)}$, temos que:
$|g(\mu)| \leqq \Sigma|g(x_i^{(n)})| = \Sigma|P(x_i)| = \Sigma|f(x_i)|^n \leqq \Sigma[p(x_i)]^n$ e

assim $|g(\mu)| \leq p^{(n)}(\mu)$ para todo $\mu \in h^nE$ donde: $[p(x_o)]^n = [f(x_o)]^n = P(x_o) = g(x_o^{(n)}) \leq p^{(n)}(x_o^{(n)})$. Como $x_o^{(n)}$ é uma representação para si próprio temos que - $p^{(n)}(x_o^{(n)}) \leq [p(x_o)]^n$ donde segue a igualdade.

Proposição 2-9

Existe um isomorfismo topológico $\overline{\Omega}: (h_\pi^nE)' \to P(^nE)$ definido por $\overline{\Omega}(f) = f o \chi_n$.

Prova

Como $\overline{\Omega} = \Omega/(h^nE)'$ onde $\Omega: (h^nE)^* \to Pa(^nE)$ dado por $\Omega(f) = fo\chi_n$ é um isomorfismo algébrico temos que verificar que:

1 - $\Omega((h_\pi^nE)') \subset P(^nE)$.

Ora, como $\chi_n(x) = x^{(n)}$ e temos que $p^{(n)}(x^{(n)}) = [p(x)]^n$ segue a continuidade de χ_n e também a de $\Omega(f)$ para f contínuo.

2 - $\overline{\Omega}$ é sobre $P(^nE)$.

Ora, se $P \in P(^nE) \subset Pa(^nE)$ sabemos que existe $f \in (h^nE)^*$ tal que $\Omega(f) = P$. Mas dado $\varepsilon > 0$ arbitrário existe V_o, vizinhança do zero em E tal que $|P(x)| < \varepsilon$ se $x \in V_o$. Como $\Gamma(V_o^{(n)})$ é vizinhança do zero em h_π^nE e $|f(x)| < \varepsilon$ se $x \in \Gamma V_o^{(n)}$ (pois temos $x_i \in V_o$ e $\Sigma|\lambda_i| \leqq 1 \to |f(\Sigma\lambda_i x_i^{(n)})| = |\Sigma\lambda_i f(x_i^{(n)})| = |\Sigma\lambda_i P(x_i)| \leq \Sigma|\lambda_i|.$ $.|P(x_i)| < \varepsilon$) mostramos que f é contínua e assim $\overline{\Omega}$ é sobre.

3 - $\overline{\Omega}$ é contínua.

Temos que $||\overline{\Omega}(f)|| = ||fo\chi_n|| \leq ||f||.||\chi_n||$. Assim $\overline{\Omega}$ é contínua.

4 - $\overline{\Omega}^{-1}$ é contínua.

Segue do teorema da aplicação aberta.

Corolário 2-10

Existe um isomorfismo topolígoco $\hat{\Omega}$: $(\hat{h}^n_\pi E)' \to P(^nE)$ definido por $\hat{\Omega}(f) = fo\chi_n$; onde $\hat{h}^n_\pi E$ é o completamento de $h^n_\pi E$.

Prova

Basta ver que $(\hat{h}^n_\pi E)'$ e $(h^n_\pi E)'$ são topologicamente isomorfos via restrição. Ora, toda aplicação linear contínua em $h^n_\pi E$ é uniformemente contínua e assim pode ser extendida de modo único a seu fecho (adaptar [12], proposição - 8, pág. 156, para o caso em que M é pseudo-métrico).

Lema 2-11

Se $(E,||.||)$ é um espaço vetorial normado então $||.||^{(n)}$ é uma norma de $h^n_\pi E$.

Prova

Como $||.||^{(n)}$ é uma seminorma basta mostrar que a topolo gia que ela define é Hausdorff. Definindo em $\otimes^n E$ a seminorma $\otimes^n||.||$ de modo análogo temos que $\otimes^n||.|| \leq ||.||^{(n)}$ donde basta mostrar que $\otimes^n||.||$ gera uma topologia separada. Para N=2 basta ver [18], pág. 93. Para N≥2 basta usar o isomorfismo (algébrico) canônico entre $\otimes^n E$ e - $(\otimes^{n-1}E)\otimes E$ (definindo produto tensorial entre espaços diferentes) e a iseminorma correspondente a $||.||$ em $(\otimes^{n-1}E)\otimes E$ que é menor ou igual a $\otimes^n||.||$ (via isomorfismo). Usando o caso de dois espaços e indução chegamos ao resultado.

Proposição 2-12

Seja E um espaço de Banach. As condições 1 e 2 abaixo são equivalentes e implicam a condição 3 abaixo:

1 - E tem a propriedade de aproximação, ou seja, a identidade de E pertence ao fecho de $E'\otimes E$ em Lc(E,E).

2 - Todo $\mu \in E'\otimes E$ cuja imagem canônica em L(E,E) é nula tem traço nulo, onde traço $\in (E'\otimes E)'$ é dado por traço $(f\otimes x) = f(x)$.

3 - Para todo espaço de Banach F, a aplicação linear canônica de $E\hat{\otimes}F$ em $B(E',F')$ é biunívoca.

Prova

A condição 1 significa que todas as formas lineares contínuas em Lc(E,E) (onde C indica a topologia da convergência compacta) que se anulam em $E'\otimes E$ se anulam na iden tidade $I \in Lc(E,E)$. Porém em virtude da proposição 22 de [6], o dual de $Lc(E,E)$ pode ser identificado com um espaço quociente de $E\hat{\otimes}E'$, e dizer que um $\mu \in E\hat{\otimes}E'$ define uma forma linear que se anula em $E'\otimes E$ (respectivamente - em I) significa que μ define um endomorfismo de E nulo (respectivamente que o traço de μ é nulo); donde segue a equivalência de 1 e 2.

Seja $\mu \in F\hat{\otimes}F$ tal que a aplichção $\tilde{\mu}$ de E' em F definida por μ é nula e provemos que μ é nulo, isto é, que $\langle\mu,A\rangle = 0$ para todo $A \in B(E,F)$ (podemos supor $A \in (E\hat{\otimes}F)'$). Designaremos por ${}^tA$ a aplicação linear de F em E' definida por A, e temos $\langle\mu,A\rangle = Tr.v$ (traço de v), onde $v = (I\otimes{}^tA)$. $(\mu) \in E\hat{\otimes}E'$ sendo que $I\otimes{}^tA$ é interpretado como um elemento de $L(E\hat{\otimes}F, E\hat{\otimes}E')$ de modo canônico. Em virtude da condição 2 é suficiente mostrar que o elemento $\tilde{v} \in L(E,E)$ definido por V é nulo. Mas $\tilde{V} = {}^t\tilde{\mu}oA$ (onde A é considerado como uma aplicação de E em F') donde resulta $\tilde{v}=0$. Assim 2 implica 3.

Corolário 2-13

Se E é um espaço de Banach com a propriedade de aproximação então a aplicação canônica T de $\hat{\otimes}^n_\pi E$ em $\mathcal{L}({}^nE')$ é injetora.

Prova

Por indução. Sejam: A: $\hat{\otimes}^n_\pi E \to E\hat{\otimes}_\pi(\hat{\otimes}^{n-1}_\pi E)$, B: $E\hat{\otimes}_\pi(\hat{\otimes}^{n-1}_\pi E) \to \mathcal{L}(E';\hat{\otimes}^{n-1}_\pi E)$, C: $\mathcal{L}(\hat{\otimes}^{n-1}_\pi E) \to \mathcal{L}(E';\mathcal{L}^{n-1}(E'))$ e D: $\mathcal{L}(E',\mathcal{L}^{n-1}(E')) \to \mathcal{L}(^nE')$ aplicações canônicas. Temos que A e D são sempre injetoras, enquanto B é injetora pela demonstração - da proposição anterior e C é injetora pela hipótese de indução. Como T = DoCoBoA temos o resultado.

Corolário 2-14

Se E é um espaço de Banach com a propriedade de aproximação então a aplicação canônica U de $\hat{h}^n_\pi E$ em $P(^nE')$ é injetora.

Prova

Como $h^n_\pi E \subset \hat{\otimes}^n_\pi E$ completo podemos supor que $\hat{h}^n_\pi E \subset \hat{\otimes}^n_\pi E$ e assim U se torna a restrição de T, seguida do isomorfismo' canônico entre $\mathcal{L}^S(^nE')$ e $P(^nE')$.

CAPÍTULO III

Reflexividade do Espaço de Polinômios N-Homogêneos Contínuos num Espaço de Banach

Definição 3-1

Seja E um espaço de Banach reflexivo e $B_1(E)$ sua bola unitária fechada. Definimos a topologia σ_n em E como o pré-imagem sob a aplicação $\chi_n : E \to \hat{\otimes}^n_\pi E$ (como definida no capítulo anterior) da topologia fraca $(\hat{\otimes}^n_\pi E, P(^nE))$.

Observação 3-2

Para n=1 obtemos a topologia fraca $\sigma(E,E')$. Para $n>1$, σ_n não é necessariamente uma topologia localmente convexa, pois χ_n não é linear. Como a topologia fraca em $\hat{\otimes}^n_\pi E$ é a topologia menos fina que torna as aplicações $\Omega^{-1}(P): \hat{\otimes}^n_\pi E \to C$ contínuas com $P \in P(^nE)$, temos que σ_n pode ser descrita como a menos fina que torna as aplicações $P:E\to C$ contínuas com $P \in P(^nE)$. Assim σ_n é menos fina que a topologia da norma em E para cada n (pois os $P \in P(^nE)$ são contínuas na norma). Por outro lado, como para cada $f \in E'$, f^n (definido por $f^n(x) = [f(x)]^n$) é um polinômio n-homogêneo contínuo em E, σ_n é mais fina que σ_1 (a topologia fraca em E) para cada n.

Proposição 3-3

Seja E um espaço de Banach reflexivo com a propriedade - da aproximação e $n \in N$. Então as seguintes asserções são equivalentes:

1 - $(P(^nE), \tau_b)$ é reflexivo.

2 - $B_1(E)$ é compacto na topologia σ_n.

3 - Cada polinômio n-homogêneo contínuo em E é $\sigma(E,E')$ - contínuo em $B_1(E)$.

4 - Cada polinômio n-homogêneo contínuo em E tem um ponto que lhe dá a norma em $B_1(E)$; isto é, para cada $P \in P(^nE)$ existe $x \in B_1(E)$ tal que $||P|| = |P(x)|$.

Prova

$1 \rightarrow 2$. Como $(P(^nE),\tau_b)$ é isomorfo a $(\hat{\otimes}^n_\pi E)'$, se $(P(^nE),\tau_b)$ é reflexivo, então a bola unitária de $\hat{\otimes}^n_\pi E$, $B_1(\hat{\otimes}^n_\pi E)$ é fracamente compacta. Se mostrarmos que $\chi_n(B_1E)$ é fracamente fechada em $\hat{\otimes}^n_\pi E$ então será fracamente compacta (pois está contida em $B_1(\hat{\otimes}^n_\pi E)$), e seguirá da definição da topo logia σ_n que $B_1(E)$ é σ_n - compacto $(\chi_n^{-1}(\chi_n(B_1E) = B_1E$, - pois $y \varepsilon \chi_n^{-1}\chi_n(B_1E) \to \chi_n(y) \varepsilon \chi_n(B_1E) \subset B_1(\hat{\otimes}_\pi^n E) \to ||y^{(n)}||^{(n)} \leq 1 \to ||y|| \leq 1 \to y \varepsilon B_1(E))$.

Para ver que $\chi_n(B_1E)$ é fracamente fechada em $\hat{\otimes}_\pi^n E$, seja $(x_i^{(n)})_{i\varepsilon I}$ uma rede em $\chi_n(B_1E)$ que converge fracamente a algum elemento Z de $\hat{\otimes}_\pi^n E$ (e conseqüentemente de $B_1(\hat{\otimes}_\pi^n E)$ - fracamente compacto). Como $B_1(E)$ é fracamente compacto podemos supor, passando a subrede, se necessário, que $x_i \to x \varepsilon B_1(E)$ fracamente. Assim temos que $\hat{\Omega}^{-1}(f^n)(x_i^{(n)}) \to \hat{\Omega}^{-1}(f^n)(x^{(n)})$ para todo $f \varepsilon E'$ pois $\hat{\Omega}^{-1}(f^n)(x_i^{(n)}) = f^n(x_i) = [f(x_i)]^n \to [f(x)]^n = f^n(x) = \hat{\Omega}^{-1}(f^n)(x^{(n)})$. Segue que um limite da rede $(x_i^{(n)})_{i\varepsilon I}$ é $x^{(n)}$ na topologia $T_{E'}$, que é a menos fina que torna as aplicações $\hat{\Omega}^{-1}(f^n)$ - contínuas. Como essas aplicações são funcionais lineares contínuas, temos que $_{E'} \leq \sigma(\hat{\otimes}_\pi^n E, P(^nE))$ a topologia fraca de $\hat{\otimes}_\pi^n E$. Assim temos que $x_i^{(n)} \to Z$ segundo $_{E'}$. Pelo lema seguinte $_{E'}$ é separada e assim $Z = \chi^{(n)} \varepsilon \chi_n(B_1E)$ que é então fracamente fechado.

$2 \to 3$. σ_n é mais fina que $\sigma(E,E')$ que é separada. Assim se $B_1(E)$ é σ_n - compacto, as topologias σ_n e $\sigma(E,E')$ coincidem em $B_1(E)$ (uma aplicação contínua de um espaço - compacto em um espaço Hausdorff é fechada). Pela definição de σ_n, cada $P \varepsilon P(^nE)$ é σ_n - contínuo. Desse modo cada $P \varepsilon P(^nE)$ é $\sigma(E,E')$ - contínuo em $B_1(E)$.

$3 \to 4$. Existe seqüência $(y_n)_n$ em $B_1(E)$ tal que $|P(y_n)|$

$\to \|P\|$. Como E é reflexivo temos que toda seqüência em $B_1(E)$ admite subseqüência convergente ([19], teorema - 4.41-B, pág. 209) $(y_{ni})_{i\varepsilon N}$ com $y_{ni} \to y \varepsilon B_1(E)$ fracamente. Logo pela continuidade fraca de P em $B_1(E)$ temos - que $|P(y_{ni})| \to |P(y)|$. Assim $\|P\| = |P(y)|$.

$4 \to 1$. A bola unitária fechada de $\hat{\otimes}^n_\pi E$ é $\overline{\Gamma}\chi_n(B_1E)$. Desse modo seja $P \varepsilon P(^nE)$ e seja $Z \varepsilon \Gamma\chi_n(B_1E)$. Dado $\varepsilon > 0$, pode-se escrever $z = \sum_{i=1}^{k} \chi_i^{(n)}$ onde $\Sigma\|x_i\|^n < 1+\varepsilon$. Logo, temos:

$|\Omega^{-1}(P)(Z)| = |\sum_{i=1}^{k} \Omega^{-1}(P)(x_i^{(n)})| = |\sum_{i=1}^{k} P(x_i)| \leq \|P\| \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^n \leq$ $\leq \|P\|(1+\varepsilon)$. Assim fazendo $\varepsilon \to 0$ vem que $|\hat{\Omega}^{-1}(P)(Z)| \leq$ $\|P\|$ para todo $Z \varepsilon \Gamma\chi_n(B_1E)$, logo vale em $\overline{\Gamma}\chi_n(B_1E)$, o que implica $\|\hat{\Omega}^{-1}(P)\| \leq \|P\|$. Mas $|\hat{\Omega}^{-1}(P)(x^{(n)}| = \|P\|$ $= |P(x)|$ para algum $x \varepsilon B_1(E)$ e segue que $\|\hat{\Omega}^{-1}(P)\| =$ $\hat{\Omega}^{-1}(P)(x^{(n)})|$. Logo cada funcional linear contínuo em $\hat{\otimes}^n_\pi E$ tem um ponto que lhe dá a norma e assim $\hat{\otimes}^n_\pi E$ é reflexivo pelo critério de James. Segue que o espaço $(P(^nE), \tau_b) \cong (\hat{\otimes}^n_\pi E)'$ é reflexivo.

Lema 3-4

A topologia $\mathbb{T}_E$, definida na demonstração da proposição anterior é separada.

Prova

Seja a aplicação canônica $T: \hat{\otimes}^n_\pi E \to P(^nE')$ que satisfaz -

$T(x^{(n)})(f) = [f(x)]^n$. Pelo corolário 2-14, temos que T é injetora. Assim a topologia $\mathcal{T}_{E'}$ nos dá uma topologia t em $T(\hat{\otimes}^n_\pi E)$ que é a imagem de $\mathcal{T}_{E'}$ via T e que é separada se e somente se $\mathcal{T}_{E'}$ o é.

Como $\mathcal{T}_{E'}$ é gerada pela família de seminormas $\{p_f : f \in E'\}$ onde $p_f(\mu) = |\Omega^{-1}(f^n)(\mu)|$ temos que t é gerada pelas seminormas q_f; $f \in E'$ definidas por $q_f = p_f \circ T^{-1}$ ou $q_f(P) = |P(f)|$ para $P \in T(\hat{\otimes}^n_\pi E)$, pois T pode ser dada por $B \circ \Omega^{-1'} \circ J$ onde J é a imersão canônica de $\hat{\otimes}^n_\pi E$ em $(\hat{\otimes}^n_\pi E)''$, $\Omega : (\hat{\otimes}^n E)' \to P(^nE)$ é dada por $\Omega(f) = f \circ \chi_n$ e $B : P(^nE)' \to P(^nE')$ é dada por $B(\phi)(f) = \phi(f^n)$.

As seminormas q_f podem ser vistas como restrições das seminormas $\overline{q}_f$ definidas em $P(^nE')$ que geram a topologia da convergência pontual que é separada. Desse modo, segue o resultado.

Lema 3-5

Seja E um espaço de Banach reflexivo. Temos que $P(^mE)$ é reflexivo para todo m natural se, e somente se, P é fracamente seqüencialmente contínuo na origem, para todo $P \in P(^mE)$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Prova

Seja m natural, $P \in P(^mE)$ e suponhamos que $(\chi_n)_n$ é uma seqüência em E com $x_n \to x$ fracamente. Seja A a forma m-linear simétrica contínua associada com P. Então:

$$P(x_n) - P(x) = P(x+x_n-x) - P(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} A(x)^j (x_n-x)^{m-j},$$ para todo n.

Para cada $j\,(0 \leq j \leq m-1)$ a aplicação

$$y \in E \longmapsto \binom{m}{j} A(x)^j (y)^{m-j}$$

é um polinômio m-j-homogêneo contínuo em E. Como $x_n - x \to 0$ fracamente temos que (por hipótese): $\binom{m}{j} A(x)^j (x_n-x)^{m-j} \to 0$ para todo $j<m$.

Assim $P(x_n) - P(x) \to 0$. Agora escolhamos uma seqüência $(y_n)_n$ em $B_1(E)$ tal que: $|P(y_n)| \to \|P\|$. Como E é reflexivo, $B_1(E)$ é fracamente seqüencialmente compacto - ([19]), teorema 4.41-B, pág. 209) e assim podemos encontrar uma subseqüência de $(y_n)_n$, $(y_{nj})_j$ e $y \in B_1(E)$, tais que $y_{nj} \to y$ fracamente.

Como P é fracamente seqüencialmente contínuo $P(y_{nj}) \to P(y)$ e assim temos que:

$|P(y)| = \lim_{j\to\infty} |P(y_{nj})| = \|P\|$. Desse modo segue o resultado pela proposição anterior.

Teorema 3-6

$P(^mE)$ é um espaço reflexivo para cada $m \in \mathbb{N}$ quando E=X, o espaço de Tsirel'son como definido na proposição 1-21.

Prova

Suponhamos que não. Então pelo lema anterior existem um inteiro positivo m e um polinômio $P \in P(^mE)$ que não é fracamente seqüencialmente contínuo na origem. Isto é, existe $(x_n)_n$ seqüência em E com $x_n \to 0$ fracamente e $P(x_n) \not\to 0$. Podemos supor, tomando subseqüências, se necessário, que $||x_n|| > \varepsilon$ (pois $x_n \not\to 0$, na norma sendo P contínuo). Logo para todo $f \in E'$ $|f(\hat{x}_n)| = ||x_n||^{-1}|f(x_n)| < \varepsilon^{-1}.|f(x_n)| \to 0$ onde $\hat{x}_n = x_n/||x_n||$. Como $(x_n)_n$ é fracamente limitado é limitado pelo princípio da limitação uniforme. Assim $||x_n|| \leq M$ para todo n. Logo $|P(\hat{x}_n)| = ||x_n||^{-m}.|P(x_n)| \geq M^{-m}|P(x_n)|$ donde $P(\hat{x}_n) \not\to 0$. Então podemos supor, tomando subseqüências, se necessário, que $|P(\hat{x}_n)| > \delta$ para todo n. Assim concluímos que existe $\delta > o$ e uma seqüência $(y_n)_n$ em E tais que:

1 - $||y_n|| = 1$ para todo n.
2 - $y_n \to 0$ fracamente.
3 - $|P(y_n)| > \delta$ para todo n.

Escolhamos n_o tal que $|P(q^{no}x_1)| \geq \delta/2$ (onde q^{no} é a projeção natural sobre as n primeiras coordenadas e assim n_o deve existir pela continuidade de P e pelo fato de que $q^n x_1 \to x_1$ na norma). Depois escolhamos N_1 tal que: $||q^{no}x_j|| \leq 1/2^o$ para $j \geq N_1$ (pois $q^{no} = \sum_{i=1}^{no} e_i \Pi_i$ é fraca mente contínua e $x_Y \to 0$ fracamente). Continuando o processo podemos escolher seqüências estritamente crescentes de inteiros positivos $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(N_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que:

1 - $|P(q^{nj}x_{Nj})| \geq \delta/2$ para todo j.

2 - $||q^{nj}x_{Nk}|| \leq 1/2^j$ para todo k>j.

Segundo o lema 3-8 a seguir podemos encontrar para cada inteiro positivo ℓ, $(\lambda_j)_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}}$, tais que:

3 - $|\lambda_j| \leq 1$ para todo j.

4 - $|P(\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{nj}(x_{Nj}))| \geq \frac{\delta}{2} (\sqrt{2})^{\ell}$

Temos que:

$$||\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{nj}(x_{Nj})|| \leq ||\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q_{nj-1}^{nj}(x_{Nj})|| + $$
$$+ ||\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{nj-1}(x_{Nj})||,$$

onde $q_n = I - q^n$ e $q_n^m = q^m - q^n$ para m>n.

A seqüência $(\lambda_j\ q_{nj-1}^{nj}(x_{Nj}))_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}}$ consiste de vetores com suportes disjuntos crescentes. Para $2^{\ell}+1 \leq j \leq 2^{\ell+1}$, temos que $n_{j-1} \geq j-1 \geq 2^{\ell}$ e assim $q^{2^{\ell}}(\lambda_j\ q_{nj-1}^{nj}(x_{Nj})) = 0$.

Por uma propriedade dos espaços de Tsirel'son (proposi sição 1-21) temos que:

$$\left|\left|\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q_{nj-1}^{nj}(x_{Nj})\right|\right| \leq 2.$$

Por 2 $\left|\left|\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{nj-1}(x_{Nj})\right|\right| \leq \sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{2^{j-1}} \leq 1.$

Assim $\left|\left|\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{nj}(x_{Nj})\right|\right| \leq 3$ e isto implica em:

5 - $\left|P\left(\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{nj}(x_{Nj})\right|\right. \leq ||P||.3^m$

Assim por 4 vem:

6 - $\frac{\delta}{2}(\sqrt{2})^{\ell} \leq ||P||.3^m.$

Como ℓ pode ser escolhido arbitrariamente grande 6 nos leva a uma contradição. Isto conclui a demonstração.

Lema 3-7

Para todo polinômio $A_o+a_1 2+\ldots+a_n Z^n$ de uma variável complexa temos que:

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 \leq \sup_{|2|\leq 1} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j Z^j\right|^2.$$

Prova

Seja $P(2) = a_o + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$. Temos que:

$\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 - |P(Z)|^2 = 2\mathrm{Re}Q(2)$, onde $Q(2) = b_1 2 + \ldots b_n Z^n$, - se $|Z| = 1$. Se por absurdo:

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 > \sup_{|2| \leq 1} |P(Z)|^2,$$

temos que $\mathrm{Re}Q(2) > 0$ em $\partial B_1(C)$ (o bordo da bola unitária). Tomando $C = \frac{\sup|Q(Z)|^2}{\inf \mathrm{Re}Q}$ onde o supremo e o ínfimo são tomados em $\partial B_1(C)$ temos que as funções C e Q são analíticos em $B_1(C)$ não tem zeros nem plos em $\partial B_1(C)$ e satisfazem à condição $|Q(2)-C| < C$ em $\partial B_1(C)$. Desse modo o teorema de Rouché nos dá que Q não tem raízes em - $B_1(C)$ o que é absurdo, pois 0 é raiz de Q. Daí segue o resultado.

Lema 3-8

Seja E um espaço de Banach, $P \in P(^mE)$ e $x_j \in E$ com $|P(x_j)| \geq \delta/2$. Para cada inteiro positovo n, podemos encontrar λ_j, $1 \leq j \leq n$ tais que $|\lambda_j| \leq 1$ para todo j e $|P(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j)| \geq \delta/2.\sqrt{n}$.

Prova

Para n=1 escolhemos $\lambda_1 = 1$. Suponhamos que vale para n=k e provemos para n=k+1:

$$|P(\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j x_j)|^2 = |P(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j + \lambda_{k+1}x_{k+1})|^2 =$$

$= |\sum_{i=0}^{m} A(a)^i(\lambda_{k+1}x_{k+1})^{m-i}|^2$ onde A é a forma m-linear simétrica contínua associada com P e $a = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j$.

Usando o lema anterior conseguimos um λ_{k+1} com $|\lambda_{k+1}| \leq 1$ e tal que $|P(\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j x_j)|^2 \geq |\sum_{i=0}^{m} A(a)^i(x_{k+1})^{m-i}|^2$, donde:

$$|P(\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j x_j)|^2 \geq |A(a)^m|^2 + |A(x_{k+1})^m|^2 \geq (\delta/2)^2.k+(\delta/2)^2$$

pela hipótese de indução; donde segue o resultado.

CAPÍTULO IV

Decomposições de Schauder e Espaços Semi-Reflexivos

Neste capítulo E denotará um espaço localmente convexo.

Definição 4-1

Uma decomposição de Schauder de E é uma seqüência de projeções contínuas $(P_k)_k$ de E em E junto com suas imagens $(E_k)_k$ que satisfazem às seguintes condições:

1 - São ortogonais, isto é, $P_k o P_i = 0$ se $k \neq i$.

2 - Para todo $x \in E$ tem-se $x = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)$, onde a série converge na topologia de E.

Quando E tem uma decomposição Schauder é denotada por (E_k, P_k). Observemos que as aplicações P_k são necessariamente projeções; isto é, $P_k o P_k = P_k$.

Definição 4-2

Uma decomposição de Schauder (E_k, P_k) de E é dita ser:

1 - Equi-Schauder, se as aplicações $R_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ são eqüi contínuas.

2 - Contrátil, se (F_k, P'_k) é uma decomposição de Schauder de E'_β; onde P'_k é o adjunto de P_k, F_k é a imagem de P'_k e β é a topologia forte.

3 - Completa para limitados, se para cada seqüência $(x_k)_k$ em E, com $x_k \in E_k$, e tal que o conjunto $\{\sum_{k=1}^{n} x_k, \ n = 1,2,\ldots\}$ é limitado tem-se que $\sum_k x_k$ é convergente em E.

Exemplos 4-3

Uma base de Schauder $(e_k)_k$ de um espaço E dá origem a uma decomposição de Schauder (E_k, P_k) de E, onde $E_k = [e_k]$ e $P_k(x) = x_k e_k$ para $x = \sum_k x_k e_k$. Assim para cada p, $1 \leq p < \infty$ temos que $([e_n], V_n)$ formam uma decomposição de Schauder de ℓ_p e também de Co, onde e_n é a função característica de $\{n\} \subset \mathbb{N}$ e $V_n(x) = x(n).e_n$ para $x \in \ell_p$ ou Co. Essas decomposições são equi-Schauder devido à proporição 4-5 a seguir; são contráteis, exceto para ℓ_1; e são completas para limitadas, exceto para Co.

Definição 4-4

Um tonel em E é um conjunto absolutamente convexo, fechado e absorvente. E é tonelado se todo tonel em E é uma vizinhança do zero.

Todo espaço de Banach, e mais geralmente todo espaço de Fréchet, é tonelado ([18], 7.1, pág. 60). E é tonelado se, e só se para F loc convexo, todo subconj. pont. limitado de E' é eqüicontínuo ([18], teorema 4.2, pág. 83, 5.3 págs. 142 e 143 e corolário 4.1, pág. 83).

Proposição 4-5

Num espaço tonelado E toda decomposição de Schauder é equi-Schauder.

Prova

Para cada $x \in E$ o conjunto $\{R_n(x) : n \in N\}$ é limitado, pois a seqüência $(R_n(x))_n$ converge para x em E. Desse modo o conjunto $\{R_n : n \in N\}$ é pont.-limitado e logo eqüicontínuo ([18], teorema 4.2, pág. 83).

Lema 4-6

Seja (E_n, P_n) uma decomposição de Schauder do espaço E e suponhamos que cada E_n é semi-reflexivo. Então, dado $\phi \in E''$ existe uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ tal que $x_n \in E_n$ e $(P''_n\phi)(f) = f(x_n)$ para cada $n \in N$ e $f \in E'$.

Prova

Sejam $f, g \in E'$ e suponhamos que $f/P_n(E) = g/P_n(E)$ para algum n fixo. Se $x \in E$, então $(P'_nf)(x) = f(P_nx) = g(P_nx) = (P'_ng)(x)$. Assim $P'_n(f) = P'_n(g)$. Conseqüentemente se $\phi \in E''$ temos que $(P''_n\phi)(f) = \phi(P'_nf) = \phi(P'_ng) = (P''_n\phi)(g)$.- Isto é, existe $\psi \in E''_n$ tal que para cada $f \in E'$ e $h = f/E_n$ temos que $(P''_n\phi)(f) = \psi(h)$. Assim por semi-reflexividade de E_n existe um $x_n \in E_n$ tal que:
$(P''_n\phi)(f) = \psi(h) = h(x_n) = f(x_n)$.

Teorema 4-7

Suponhamos que E tem uma decomposição de Schauder (E_n, P_n) que é contrátil e completa para limitados. Então E é semi-reflexivo se, e somente se, cada E_n é semi-reflexivo.

Prova

Sejam E_n semi-reflexivos para todo $n \in N$ e seja $\psi \in E''$. Pelo lema anterior existe seqüência $(x_n)_n \subset E$, como $x_n \in E_n$ e $P''_n(\phi)(f) = f(x_n)$ para todo $f \in E'$ e $n \in N$. Seja $B = \{\sum_{k=1}^{n} x_k : n \in N\}$. Se $f \in E'$, então:

$f(\sum_{k=1}^{n} x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} (P_k''\phi)(f) = \sum_{k=1}^{n} \phi(P_k'f) = \phi(\sum_{k=1}^{n} P_k'f)$ $\to \phi(f)$, pois a decomposição é contrátil, e assim temos que B é fracamente limitado donde limitado ([18], 3.3, pág. 132). Pela hipótese de ser completa para limitados temos que existe $x \in E$ tal que $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Assim, se $f \in E'$, temos que:

$$\phi(f) = \phi(\sum_{k=1}^{\infty} P_k'(f)) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi o P_k'(f) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k''(\phi)(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \equiv f(x),$$

donde se conclui que E é semi-reflexivo.

Reciprocamente, se E é semi-reflexivo, temos que os subespaços $E_n = (I-P_n)^{-1}(0)$ sendo fechados são semi-reflexivos ([18], 5.5, $a \leftrightarrow d$).

CAPÍTULO V

Reflexividade do Espaço de Funções Holomorfas

Nessa capítulo E denotará um espaço de Banach complexo.

Definição 5-1

Seja $H(U)$ o espaço das funções definidas e holomorfas no aberto U de E. Dizemos que uma seminorma p definida em $H(U)$ é portada pelo compato K de U, se para cada aberto V, $K \subset V \subset U$, existe $C(V) > 0$ tal que:
$p(f) \leq C(V).||f||_V$ para todo $f \in H(U)$; onde $||f||_V = \sup_{x\in V}|f(x)|$. A topologia τw em $H(U)$ é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas portadas por compactos de U.

Proposição 5-2

Seja U um aberto de E. Então $(H(U),\tau w)$ induz em $P(^nE)$ a topologia da norma. De fato, $P(^nE)$ é um subespaço complementado de $(H(U),\tau w)$.

Prova

Seja q uma seminorma em H(U) portada por um compacto K de U. Como E é normado existe uma bola aberta com centro na origem V $\supset$ K. Para o aberto de U, V $\cap$ U, existe C(V $\cap$ U) > 0, tal que:

$q(f) \leq C(V \cap U).||f||_{V\cap U}$ para todo f ε H(U).

Isto implica que:

$q(P) \leq C(V \cap U).||P||_{V\cap U} \leq C(V \cap U).||P||_V \leq C(V \cap U).$ - $(\text{raio } v)^n.||P||$ para todo P ε $P(^nE)$. Assim a topologia da norma é mais fina que a induzida por τ_w.

Agora fixemos a ε U. Afirmamos que a aplicação: Tn: $(H(U),\tau_w) \to (P(^nE),||.||)$ definida por $T_n(f) = 1/n!\ \hat{d}^n f(a)$ é contínua. De fato, se r>0 é suficientemente pequeno, então pelas desigualdades de Cauchy: $||1/n!\ \hat{d}^n f(a)|| \leq r^{-n}||f||_{B(a;r)}$ para todo f ε H(U); donde segue que a seminorma $p(f) = ||1/n!\ \hat{d}^n f(a)||$ é portada pelo compacto K = {a}. Assim T_n é contínua. Como $T_n/P(^nE)$ é a identidade segue que a topologia da norma é menos fina que a induzida por τ_w.

Lema 5-3

Seja U um aberto equilibrado de E. Seja p uma seminorma contínua em $(H(U),\tau_w)$. Então existe ρ>1 tal que:

$\tilde{p}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n.p(1/n!\ \hat{d}^n f(0))$ é também uma seminorma contí nua em $(H(U),{}^{\tau}w)$.

Prova

Seja p uma seminorma τw-contínua que é portada pelo compacto equilibrado K de U. Escolhamos $\rho>1$ pelo que ρK é um compacto de U. Seja V um aberto balanceado de U que contém ρK. Existe $\alpha>1$ e W, uma vizinhança equilibrada de K, tais que $\rho K \subset \alpha\rho W \subset V \subset U$. Seja $C(W) > 0$ tal que $p(f) \leq C(W):||f||w$ para cada f em H(U). Se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}$ H(U) então:

$$\tilde{p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n . p\left(\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} C(W) . \rho^n \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_W$$

$$= C(W) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n . \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{\alpha\rho w} \leq C(W) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \|f\|_{\alpha\rho w} \leq$$

$\leq C.||f||v$. Assim $\tilde{p}$ é portada por ρK e assim é τw-contínua. Isto completa a prova.

Corolário 5-4

Seja U um aberto equilibrado de E. Então a topologia τw em H(U) é gerada pelas seminormas τw-contínuas tais que: $p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1/n!\ \hat{d}^n f(0))$.

Prova

Seja p uma seminorma τw-contínua. Pelo lema anterior a seminorma $\tilde{p}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1/n!\ \hat{d}^n f(0))$ é τw-contínua; e satisfaz $\tilde{p}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(1/n!\ \hat{d}^n f(0))$. Como $f = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!\ \hat{d}^n f(0)$ vem que $p(f) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(1/n!\ \hat{d}^n f(0)) = \tilde{p}(f)$ donde segue o resultado.

Corolário 5-5

Seja U um aberto equilibrado de E. Seja B um limitado de $(H(U),\tau w)$. Seja $(\alpha_n)_n$ uma seqüência de números positivos tais que $\limsup \sqrt[n]{\alpha_n} \leq 1$. Então o conjunto:

$\{\alpha_n/n!\ \hat{d}^n f(0) : n \in \mathbb{N},\ f \in B\}$ é também τw-limitado.

Prova

Pelo lema 5-3 dada uma seminorma contínua p em $(H(U),\tau w)$ existem $\rho>1$ e $c>0$ tais que:

$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n . p(1/n!\ \hat{d}^n f(0)) \leq C$ para todo $f \in B$.

Daí: $p(\alpha_n/n!\ \hat{d}^n f(0)) \leq C.(\sqrt[n]{\alpha_n}/\rho)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f \in B$ donde segue o resultado.

Teorema 5-6

Seja U um aberto equilibrado de E. Então $(P(^nE),P_n)$ é uma decomposição equi-Schauder contrátil de $(H(U),\tau w)$ onde $P_n(f) = 1/n!\ \hat{d}^n f(o)$.

Prova

Como as seminormas τw-contínuas que satisfazem a condição: $p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1/n!\ \hat{d}^n f(0))$ para todo $f \in H(U)$ geram a topologia τw em $H(U)$ é imediato que $(P(^nE), P_n)$ é uma decomposição equi-Schauder para $(H(U), \tau w)$.

Agora seja $T \in (H(U), \tau w)'$; então: - $T(f) = \sum_{n=0}^{\infty} ToP_n(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (P_n' T)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(f)$, e assim $T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ pontualmente e ainda:

$$T(f) = \sum_{n=0}^{\infty} ToP_n oP_n(f) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(1/n!\ \hat{d}^n f(0)).$$

Temos que $f \longmapsto |T(f)|$ é uma seminorma fracamente contínua, logo τw-contínua em $H(U)$ e assim $f \longmapsto \tilde{T}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} |T_n(1/n!\ \hat{d}^n f(0)|$ também é uma seminorma τw-contínua.

Se B é um subconjunto limitado de $(H(U), \tau w)$ segue que $\{n^2/n!\ \hat{d}^n f(0): f \in B,\ n = 0,1,\ldots\}$ é τw-limitado em $H(U)$. Desse modo temos que: $|T_n(1/n!\hat{d}^n f(0))| < M/n^2$ para todo $f \in B$. Assim $\sup_{f \in B} |T(f) - \sum_{j=0}^{n} T_j(1/j!\ \hat{d}^j f(0)| \to 0$ com $n \to \infty$, o que mostra que $T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ segundo a topologia dual forte.

Definição 5-7

Seja U um aberto equilibrado de E e τ uma topologia em $H(U)$ tal que $(H(U), \tau)$ é localmente convexo. Dizemos que

$(H(U),\tau)$ é completo para séries de Taylor se, sempre que $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios n-homogêneos contínuos em E e $\sum_{n=0}^{\infty} p(P_n) < \infty$ para toda seminorma τ-contínua p em H(U) tem-se: $\sum_{n=0}^{\infty} P_n \in H(U)$.

Proposição 5-8

Seja U um aberto equilibrado de E. Então $(H(U),\tau w)$ é completo para séries de Taylor.

Prova

Como $\tau w \geq \tau_p$, a topologia da convergência pontual, basta mostrar que U é τ_p-completo para séries de Taylor. Mas τ_p é definida pelas seminormas p_x, onde $p_x(f) = |f(x)|$, com $x \in U$. Assim, supondo que $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios n-homogêneos contínuos satisfazendo $\sum_{n=0}^{\infty} p(P_n) < \infty$ para toda seminorma p que é τ_p-contínua temos que $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)| < \infty$ para todo $x \in U$. Assim temos definida uma função $f: U \to C$, limite pontual da série $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$. Se $a \in U$ e $b \in E$ temos que existem $\Gamma_1 > 1$ e $\Gamma_2 > 0$ tais que $\Gamma_1 a + \Gamma_2 b \in U$. Se Z_1 e Z_2 são dois complexos tais que $aZ_1 + bZ_2 \in U$ podemos fazer o desenvolvimento:

$$f(Z_1 a + Z_2 b) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(Z_1 a + Z_2 b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A_n(a^{n-i}, b^i) Z_1^{n-1}.$$

$Z_2^i = \sum_{\alpha} cZ^{\alpha}$ onde: $Z = (Z_1, Z_2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_i = n-i$, $\alpha_2 = i$, $C_\alpha = \binom{n}{i} A_n(a^{n-i}, b^i)$ e A_n é a forma n-linear contínua simétrica associada com P_n. Como $\sum_{\alpha} C_\alpha (\Gamma_1, \Gamma_2)^{\alpha}$ tem termos limitados (pois um dos seus rearranjos converge) vem pelo lema de Abel ([14], §6, proposição 1) que a série converge normalmente em D (0,0), onde $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$. - Logo aplicando o corolário do lema de Abel vem que a soma $\sum_{\alpha} C_\alpha Z^\alpha$ é holomorfa em D (0,0). Então fixando $Z_1 = 1$ temos que $f(a+Z_2 b)$ é uma função holomorfa de Z_2 para $|Z_2| < \Gamma_2$ e segue que f é G-holomorfo. Temos ainda que $\hat{d}^m f(0) = m!\, P_m \in P(^mE)$ para todo m inteiro e que U sendo equilibrado é conexo por caminhos, logo conexo. Desse modo estamos nas condições do teorema 2.28 de [4], pág. 67 que nos garante que $f \in H(U)$ e conclui a demonstração.

Teorema 5-9

Seja U um aberto equilibrado de E. Então $(H(U), \tau w)$ é semi-reflexivo se, e somente se, cada $P(^nE)$ é reflexivo.

Prova

Temos que $(H(U), \tau w)$ é completo para séries de Taylor; mas esta propriedade é equivalente ao fato da decomposição - Schauder de H(U), $(P(^nE),\ 1/n!\ \hat{d}^n.(0))$ ser completa para limitados, pois a topologia τw é gerada pelas seminormas τw-contínuas que satisfazem a condição: $p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1/n!\ \hat{d}^n f(0))$. Temos também que essa decomposição é contrátil, donde vem o resultado pelo teorema 4-7.

Corolário 5-10

Seja U um aberto equilibrado de E. Então $(H(U),\tau w)$ é reflexivo se, e somente se, $(H(U),\tau w)$ é tonelado e cada $P(^nE)$ é reflexivo.

Prova

Se $(H(U),\tau w)$ é reflexivo temos que é tonelado e semi-reflexivo ([18], pág. 144). Pelo teorema anterior vem que cada $P(^nE)$ é semi-reflexivo, logo reflexivo ([18], §5.6, corolário 2, pág. 145).

Reciprocamente, se cada $P(^nE)$ é reflexivo, o corolário anterior nos dá que $(H(U),\tau w)$ é semi-reflexivo. Como $(H(U),\tau w)$ é tonelado por hipótese segue a sua reflexividade ([18], pág. 144).

Teorema 5-11

Seja X o espaço de Tsire'son (prop. 1-21). Então $(H(U),\tau w)$ é reflexivo para cada aberto equilibrado U de X.

Prova

Pelo teorema 3.48 de [4], pág. 188 temos que $(H(U),\tau w)$ é tonelado se U é um aberto equilibrado de um espaço de Banach com base de Schauder incondicional. Pelo teorema

3-6 cada $P(^nX)$ é reflexivo. Assim basta aplicar o corolário 5-10.

REFERÊNCIAS

1. R. Alencar, R.M. Aron e S. Dineen. A Reflexive Space of Holomorphic Functions in Infinitely Many Variables, Proc. Amer. Math. Soc. 90(1984), 407-411.

2. T.A. Cook. Schauder decompositions and semi-reflexive spaces. Math. Ann. 182(1969), 232-235.

3. S. Dineen. Holomorphic Functions on Locally Convex Topological Vector Spaces. I, Locally Convex Topologies on H(U), Ann. Inst. Fourier (Grenable) 23(1973), 19-54.

4. S. Dineen. Complex Analysis in Locally Convex Spaces, North-Holland Math. Studies.

5. W.H. Greub. Multilinear Algebra, Springer-Verlag.

6. A. Grothendieck. Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucleaires, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 16(1955).

7. R.B. Holmes. Geometric Functional Analysis, Springer-Verlag.

8. J. Horvath. Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley Publishing Company.

9. J.L. Kelley e I. Namioka. Linear Topological Spaces, Springer-Verlag.

10. G. Köthe. Topological Vector Spaces I, Springer--Verlag.

11. G. Köthe. Topological Vector Spaces II, Springer--Velag.

12. E.L. Lima. Elementos de Topologia Geral, Ao Livro Técnico S/A.

13. J. Mujica. Gérmenes Holomorfos y Funciones Holomorfos en Espacios de Fréchet, Publicaciones del Departamento de Teoria de Funciones, Universidad de Santiago de Compostela.

14. L. Nachbin. Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties, North-Holland - Math. Studies.

15. L. Nachbin. Topologia dos Espaços de Aplicações Holomorfas, IMPA, 6º Colóquio Brasileiro de Matemática.

16. W. Rudin. Functional Analysis, McGraw-Hill, Book Company.

17. R. Ryan. Aplications of Topological Tensor Products to Infinite Dimensional Holomorphy, Thesis, Trinity College, Dublin, 1980.

18. H.H. Schaefer. Topological Vector Spaces, Springer-Verlag.

19. A.E. Taylor. Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons, Inc.

20. B.S. Tsirel'son. Not Every Banach Space Contains an Imbedding of ℓ_p or Co, Func. Anal. Appl. 8(1974), 138-141.