SOBRE MÉTODOS PARA DETERMINAR RAIZES DE EQUAÇÕES

Joana Benedita de Oliveira Quandt

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida pela Sra. Joana Benedita de Oliveira Quandt e aprovada pela Comissão Julgadora.

Orientador:
Prof. Dr. José Mario Martínez

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

dezembro /1983

AGRADEÇO,

Ao Prof. Dr. Mário Martínez, por sua atenção e eficiente orientação.

Aos professores e colegas da Pós - Graduação em Matemática Aplicada da UNICAMP, pelo excelente relacionamento.

À Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós - Graduação da U.F.SC., especialmente à Profa. Doloris Ruth Simões de Almeida e ao Bel. Lothar Backes, pelo incentivo e assistência.

À CAPES - PICD, pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

RESUMO

Neste trabalho trataremos do problema de determinar zeros reais simples de uma função, por meio de alguns métodos especiais, quase todos derivados do método de Newton.

Isso será feito em duas etapas: na primeira faremos uma análise teórica dos métodos; na segunda faremos a comparação desses métodos do ponto de vista computacional, de raio de convergência e de tempo de computação, usando as mesmas estimativas para cada uma das funções analisadas.

Durante todo o trabalho denotaremos por α uma raiz simples genérica da equação $f(x)=0$, e, por f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$,...., as derivadas de f, sendo, às vezes, a própria f identificada por $f^{(0)}$.

Mesmo quando não for mencionado, estaremos supondo a existência, numa vizinhança de α, de tantas derivadas de f quanto necessárias, e que $f'(\alpha) \neq 0$.

CAPÍTULO I

ORDEM DE CONVERGÊNCIA E OUTRAS DEFINIÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e teoremas básicos que serão usados posteriormente.

DEFINIÇÃO 1.1. Seja $(x_i)_{i \geq 0}$ uma sequência convergindo para α , e para cada $i \geq 0$, $e_i = x_i - \alpha$.

Se existem um número real p, e uma constante não-nula C tal que

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^p} = \lim_{i \to +\infty} \frac{|e_{i+1}|}{|e_i|^p} = C \quad ,$$

então p é chamado de ordem da sequência $(x_i)_{i \geq 0}$ e C é chamada de constante de erro assintótico da sequência $(x_i)_{i \geq 0}$.

DEFINIÇÃO 1.2. Consideremos a equação $f(x) = 0$ e seja α uma raiz dessa equação.

Definimos um método iterativo $\emptyset$, como sendo um método de obtenção de um valor aproximado de α , passo a passo, onde o valor x_i obtido no i-ésimo passo depende unicamente de i e do valor de x_{i-1} obtido no passo anterior, sendo x_o um valor inicial dado conforme o problema em questão.

Então $x_i = \emptyset(x_{i-1})$ define uma sequência de aproximações sucessivas $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, que sob certas condições, converge para a solução α .

Cada passo desse processo é chamado de iteração.

TEOREMA 1.1. Sejam $\emptyset$ um método iterativo e $(x_i)_{i \geq 0}$ uma sequência tal que $x_{i+1} = \emptyset(x_i)$ e $(x_i)_{i \geq 0} \to \alpha$.

Seja $e_i = x_i - \alpha$, $\forall i \geq 0$.

Suponhamos que $\emptyset^{(p)}$ seja contínua numa vizinhança de α .

Então $(x_i)_{i \geq 0}$ é de ordem p se e somente se:

i) $\emptyset(\alpha) = \alpha$;

ii) $\emptyset^{(j)}(\alpha) = 0$ se $j = 1,2,\ldots,p-1$;

iii) $\emptyset^{(p)}(\alpha) \neq 0$.

Nessas condições, se $i \to +\infty$, então $\dfrac{e_{i+1}}{e_i^p} \to \dfrac{\emptyset^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $\emptyset$ é contínua numa vizinhança de α, então,

$$\alpha = \lim_{i \to +\infty} x_{i+1} = \lim_{i \to +\infty} \emptyset(x_i) = \emptyset(\lim_{i \to +\infty} x_i) = \emptyset(\alpha) \qquad (1.1.1)$$

Desenvolvendo $\emptyset$ em Série de Taylor em torno de α, e usando 1.1.1 temos

$$x_{i+1} = \emptyset(x_i) = \alpha + \emptyset'(\alpha)e_i + \ldots + \frac{\emptyset^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!} e_i^{p-1} + \frac{\emptyset^{(p)}(\xi_i)}{p!} e_i^p ,$$

com ξ_i entre x_i e α .

Então $(x_i)_{i \geq 0}$ é de ordem p se e somente se:

$$\emptyset'(\alpha) = \dots = \emptyset^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \emptyset^{(p)}(\alpha) \neq 0 .$$

Como ξ_i está entre x_i e α e $x_i \to \alpha$ temos que $\lim\limits_{i \to +\infty} \dfrac{e_{i+1}}{e_i^p} =$ $= \dfrac{\emptyset^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

OBSERVAÇÃO 1.1. Nas condições do teorema acima se diz que $\emptyset$ é de ordem p, e, por um abuso de linguagem, chamaremos $\emptyset$ de função iterativa de ordem p.

DEFINIÇÃO 1.3. Chamaremos de sequência básica de métodos iterativos, a uma sequência infinita de métodos iterativos, cujo p-ésimo elemento da sequência seja de ordem p.

OBSERVAÇÃO 1.2. O conceito de sequência básica é definido somente para métodos iterativos de ordem inteira.

TEOREMA 1.2. Sejam $\emptyset_1$ e $\emptyset_2$ duas funções iterativas de ordem p.

Então existe uma função U limitada em α, com $U(\alpha) \neq 0$, tal que

$$\emptyset_2(x) - \emptyset_1(x) = U(x)\, u^{p_1}(x) \ , \quad u = \frac{f}{f'}$$

sendo

i) $p_1 = p$ se $\emptyset_1^{(p)}(\alpha) \neq \emptyset_2^{(p)}(\alpha)$.

ii) $p_1 > p$ se $\emptyset_1^{(p)}(\alpha) = \emptyset_2^{(p)}(\alpha)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como ϕ_1 e ϕ_2 são de ordem p, pelo teorema 1.1 temos que $\phi_1^{(p)}(\alpha) \neq 0$ e $\phi_2^{(p)}(\alpha) \neq 0$.

Se $i = 1,2$, sejam $V_i(x) = \dfrac{\phi_i(x) - \alpha}{(x-\alpha)^p}$ se $x \neq \alpha$, e $V_i(\alpha) = \dfrac{\phi_i^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

Assim, se $i = 1,2$, temos

$$\phi_i(x) - \alpha = V_i(x)(x-\alpha)^p , \tag{1.2.1}$$

onde cada V_i é uma função contínua de x e $V_i(\alpha) \neq 0$.

Seja $\lambda(x) = \dfrac{f(x)}{x-\alpha}$ se $x \neq \alpha$ e $\lambda(\alpha) = f'(\alpha)$.

Então $f(x) = \lambda(x)(x-\alpha)$, onde λ é uma função contínua e $\lambda(\alpha) \neq 0$.

Como $u = \dfrac{f}{f'}$, temos $u(x) = \dfrac{\lambda(x)}{f'(x)}(x-\alpha)$, ou, de outra forma,

$$u(x) = \rho(x)(x-\alpha) , \tag{1.2.2}$$

onde $\rho(x) = \dfrac{\lambda(x)}{f'(x)}$ e $\rho(\alpha) = 1$.

Por 1.2.1 e 1.2.2 temos

$$\phi_i(x) - \alpha = w_i(x)u^p(x) , \quad i = 1,2 ,$$

onde

$$w_i(x) = \frac{V_i(x)}{\rho^p(x)} . \tag{1.2.3}$$

Então cada w_i é contínua e $w_i(\alpha) = \dfrac{\phi_i^{(p)}(\alpha)}{p!} \neq 0$.

Consideremos inicialmente,

i) $\phi_1^{(p)}(\alpha) \neq \phi_2^{(p)}(\alpha)$.

Por 1.2.3 , $\phi_2(x) - \phi_1(x) = [w_2(x) - w_1(x)] \cdot u^p(x)$.

Defina $U(x) = w_2(x) - w_1(x)$.

Então $U(\alpha) = \frac{1}{p!} [\phi_2^{(p)}(\alpha) - \phi_1^{(p)}(\alpha)] \neq 0$.

Portanto, se $\phi_1^{(p)}(\alpha) \neq \phi_2^{(p)}(\alpha)$, então $\phi_2(x) = \phi_1(x) + U(x)u^p(x)$, com $U(\alpha) \neq 0$.

ii) Consideremos agora $\phi_1^{(p)}(\alpha) = \phi_2^{(p)}(\alpha)$.

A menos que $\phi_1 = \phi_2$, existe um inteiro $p_1 > p$ tal que $\phi_1^{(p_1)}(\alpha) \neq \phi_2^{(p_1)}(\alpha)$, e a demonstração pode ser refeita, com p_1 em lugar de p .

DEFINIÇÃO 1.4. Sejam ϕ um método iterativo de ordem p e $(x_i)_{i \geq 0}$ uma sequência tal que $x_{i+1} = \phi(x_i)$ e $x_i \to \alpha$.

Seja T o tempo de trabalho computacional necessário para realizarmos uma iteração.

Chamamos de índice de eficiência de ϕ o quociente

$$IE = \frac{\ln p}{T} .$$

CAPÍTULO II

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL E SUA RELAÇÃO COM O CÁLCULO DE RAÍZES

Como posteriormente estudaremos alguns métodos iterativos gerados por interpolação inversa, neste capítulo veremos: o conceito de Interpolação Polinomial de Hermite; os teoremas de Existência e Unicidade e do Resto do Polinômio Interpolador de Hermite; o conceito de Interpolação Inversa; a relação entre cálculo de raízes e interpolação; e, finalmente, um teorema que estabelece as condições em que podemos assegurar a convergência de um método gerado por interpolação inversa.

2.1. INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE HERMITE

Sejam $f : [a,b] \to R$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ elementos distintos em $[a,b]$.

Sejam $j = 0,1,\ldots,n$ e $k_j = 0,1,\ldots,\gamma_j-1$ com $\gamma_j \geq 1$.

Seja $N = \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_n - 1$.

Suponhamos que, para todo j, f tenha γ_j-1 derivadas no ponto x_j.

Consideremos o problema de determinarmos um polinômio q de grau N, tal que para todo x_j tenhamos:

$$q^{(k_j)}(x_j) = f^{(k_j)}(x_j), \quad k_j = 0,1,\ldots,\gamma_j-1 .$$

Esse polinômio q é denominado Polinômio Interpolador de

Hermite para a função f, nos pontos $x_o, x_1, \ldots, x_n$.

TEOREMA 2.1. (Teorema da Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador).

Existe um único polinômio satisfazendo as condições estabelecidas em 2.1.

DEMONSTRAÇÃO: Queremos determinar

$$q(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k , \quad a_k \in R , \qquad N = \left(\sum_{j=0}^{n} \gamma_j \right) - 1 ,$$

tal que em todo ponto x_j satisfaça $q^{(k_j)}(x_j) = f^{(k_j)}(x_j)$, $k_j = 0,1,\ldots,\gamma_j-1$.

Para cada x_j essa condição nos fornece γ_j equações lineares, a saber:

$$\begin{aligned}
a_N\, x_j^N + a_{N-1}\, x_j^{N-1} + \ldots + a_1\, x_j + a_o &= f(x_j) \\
Na_N\, x_j^{N-1} + (N-1)(a_{N-1} x_j^{N-2} + \ldots + a_1 &= f'(x_j) \\
&\vdots \\
N(N-1)\ldots(N-\gamma_j+2) a_N\, x_j^{N-\gamma_j+1} + \ldots + a_{\gamma_j-1} &= f^{(\gamma_j-1)}(x_j) ,
\end{aligned}$$

e temos então um sistema de $N+1$ equações lineares a $N+1$ incógnitas.

Uma solução para esse problema existe e é única, se a matriz dos coeficientes do sistema for não-singular.

Escrevendo isso na forma $Ay = b$, onde A é a matriz dos coeficientes do sistema, $y = (a_N, a_{N-1}, \ldots, a_o)^T$ e

$$b = (f(x_o), f'(x_o), \ldots, f^{(\gamma_o-1)}(x_o); \ldots; f(x_n), f'(x_n), \ldots, f^{(\gamma_n-1)}(x_n))^T,$$

é suficiente provarmos que o sistema $Ay = 0$ tem somente a solução trivial, pois isso acontece se, e somente se, A for não-singular.

Seja $r(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k t^k$ e $y_1 = (b_N, b_{N-1}, \ldots, b_1, b_o)^T$, e suponhamos que $Ay_1 = 0$, ou seja, que $r^{(k_j)}(x_j) = 0$, com $k_j = 0,1,\ldots, \gamma_j-1$.

Isso significa que x_j é uma raiz de r, e tem multiplicidade γ_j.

Então $r(t) = \alpha(t-x_o)^{\gamma_o}(t-x_1)^{\gamma_1} \ldots (t-x_n)^{\gamma_n}$, $\alpha \in R$.

Suponhamos $\alpha \neq 0$.

Nesse caso r tem grau $\gamma_o + \gamma_1 + \ldots + \gamma_n = N+1$, o que é absurdo, pois r deve ter grau N.

Então $\alpha = 0$ e r é o polinômio nulo, e, assim, o sistema tem somente a solução trivial.

Portanto, A é não-singular, e podemos concluir que o Polinômio Interpolador de Hermite existe e é único.

Demonstraremos agora alguns resultados que serão usados na demonstração do próximo teorema.

DEFINIÇÃO 2.1. Seja $f:[a,b] \to R$; um zero α de f é de multiplicidade k se $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, com $g(\alpha) \neq 0$ e g limitada numa vizinhança de α.

LEMA 2.1. Seja $f:[a,b] \to R$, $f \in C^2[a,b]$.

Então todo zero de f de multiplicidade $K > 1$, é um zero de multiplicidade $k-1$ da derivada de f.

DEMONSTRAÇÃO: Seja α um zero de f de multiplicidade k.

Então $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$ com $g(\alpha) \neq 0$ e g limitada em α.

Daí segue-se que $f'(x) = (x-\alpha)^{k-1} h(x)$, onde

$$h(x) = k\, g(x) + (x-\alpha)\, g'(x) .$$

Como $f \in C^2[a,b]$, então f' é limitada em $[a,b]$, e, portanto, g' tem de ser limitada em α.

Então h é limitada em α e como $h(\alpha) = k\, g(\alpha) \neq 0$, temos que α é um zero de f' de multiplicidade $k-1$.

LEMA 2.2. Seja $f:[a,b] \to R$, $f \in C^2[a,b]$.

i) Se f tem n zeros em $[a,b]$, então a derivada de f tem pelo menos $n-1$ zeros em $[a,b]$.

ii) Se f tem n zeros em $[a,b]$ e k desses zeros tem multiplicidade maior do que 1, então a derivada de f tem pelo menos $n-1+k$ zeros em $[a,b]$.

DEMONSTRAÇÃO: i) Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$ os zeros de f em $[a,b]$ e $I_1 = [r_1, r_2]$, $I_2 = [r_2, r_3], \ldots,$ $I_{n-1} = [r_{n-1}, r_n]$.

Como $f(r_1) = f(r_2) = \ldots = f(r_n) = 0$, podemos aplicar o Teorema de Rolle a cada I_j; temos então que para $\forall j = 1, \ldots$ $\ldots n-1$, $\exists\, c_j \in (r_j, r_{j-1})\ /\ f'(c_j) = 0$.

Portanto f' tem pelo menos $n-1$ zeros em $[a,b]$.

ii) Segue diretamente da parte (i) e do Lema 2.1.

O próximo teorema nos fornece uma estimativa do erro na interpolação polinomial.

TEOREMA 2.2. (Teorema do Resto do Polinômio Interpolador de Hermite).

Sejam $f : [a,b] \to R$, $f \in C^{N+1}[a,b]$ e $x_o, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos em $[a,b]$.

Seja q o polinômio interpolador de Hermite de f nos pontos $x_o, x_1, \ldots, x_n$ satisfazendo

$$q^{(k_j)}(x_j) = f^{(k_j)}(x_j) \; ,$$

$j = 0,1,\ldots,n$ e $k_j = 0,1,\ldots,\gamma_j - 1$ com $\gamma_j \geq 1$; $N + 1 = \sum_{j=o}^{n} \gamma_j$

Seja t um ponto qualquer em $[m,M]$, onde $m = \min\{x_o, x_1, \ldots$ $\ldots x_n\}$ e $M = \text{máx}\{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$.

Então

$$f(t) - q(t) = \frac{f^{(N+1)}(\xi(t))}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)^{\gamma_j} ,$$

$\xi(t)$ no intervalor $[m,M]$.

DEMONSTRAÇÃO: Fixemos $t \in [m,M]$ e consideremos a função

$$w(s) = f(s)-q(s)-((s-x_o)^{\gamma_o}(s-x_1)^{\gamma_1}\dots(s-x_n)^{\gamma_n}) \cdot \frac{f(t)-q(t)}{(t-x_o)^{\gamma_o}(t-x_1)^{\gamma_1}\dots(t-x_n)^{\gamma_n}} .$$

w tem um zero em $s = t$, e zeros de multiplicidade γ_j em $s = x_j$, $j = 0,1,\dots,n$.

Para cada i , $i = 0,1,\dots,N+1$, denotemos por v_i o número de zeros de $w^{(i)}$ em $[m,M]$.

Seja $s(p,q) = 1$ se $q > p$
 0 se $q \leq p$.

Então:

$$v_o = n+2$$

$$v_1 = v_o-1 + s(0,\gamma_o-1) + s(0,\gamma_1-1)+\dots+ s(0,\gamma_n-1)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1-1 + s(1,\gamma_o-1) + s(1,\gamma_1-1) + \dots + s(1,\gamma_n - 1) \\ &= n + s(0,\gamma_o-1) + s(1,\gamma_o-1) + s(0,\gamma_1-1) + \\ &\quad s(1,\gamma_1-1) +\dots+ s(0,\gamma_n-1) + s(1,\gamma_n-1) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$v_{N+1} = n+1-N + [s(0,\gamma_o-1) + s(1,\gamma_o-1) + \ldots + s(N,\gamma_o-1)] +$$

$$\vdots$$

$$+ [s(0,\gamma_n-1) + s(1,\gamma_n-1) + \ldots + s(N,\gamma_n-1)] \ .$$

Mas $s(0,\gamma_i-1) + s(1,\gamma_i-1)+\ldots+s(N,\gamma_i-1) = \gamma_i-1$.

Daí segue-se que $v_{N+1} = 1$.

Portanto, $w^{(N+1)}$ tem ao menos um zero em $[m,M]$, digamos em $s = \xi$, e como ξ depende de t , denotaremos a raiz de $w^{(N+1)}$ por $\xi(t)$.

Diferenciando $N+1$ vezes a função w , e fazendo $s = \xi(t)$, temos:

$$w^{(N+1)}(\xi(t)) = f^{(N+1)}(\xi(t)) - (N+1)! \frac{f(t) - q(t)}{(t-x_o)^{\gamma_o} \ldots (t-x_n)^{\gamma_n}} = 0.$$

Portanto,

$$f(t) - q(t) = \frac{f^{(N+1)}(\xi(t))}{(N+1)!} (t-x_o)^{\gamma_o} \ldots (t-x_n)^{\gamma_n} \ .$$

Agora, demonstraremos o Teorema da Função Inversa e, a seguir, veremos o conceito de interpolação inversa.

TEOREMA 2.3. (Teorema da Função Inversa).

Sejam $f : J = (a,b) \to R$, $f^{(N+1)}$ contínua em J e $f'(x) \neq 0$

para todo x em J.

Então f tem uma inversa F em $K = f(J)$ e $F^{(N+1)}$ existe e é contínua em K.

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito, dados $x_1 < x_2$ em (a,b), pelo Teorema do Valor Médio temos:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$$

com $x_1 < c < x_2$.

Daí, vem:

i) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in J$, então $f(x_1) < f(x_2)$, e, assim, f é crescente em J.

ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in J$, então $f(x_2) < f(x_1)$, e assim, f é decrescente em J.

Portanto, f é monótona em J.

Sendo f contínua e monótona em J, então existe a função inversa $F : f(J) \to J$.

Seja $K = f(J)$; como f é contínua, então, K também é um intervalo aberto; além disso, F é contínua em K, pois F também é monótona, e $F(K) = J$ é um intervalo.

F é derivável em K, pois:

Seja $y_1 \in K$, $y_1 = f(x_1)$; como F é contínua em K,

$$\lim_{y \to y_1} F(y) = F(y_1) = x_1 .$$

Além disso, se $y \in K - \{y_1\}$, então $F(y) \neq x_1$.

Logo,

$$\lim_{y \to y_1} \frac{F(y)-F(y_1)}{y-y_1} = \lim_{y \to y_1} \frac{F(y)-x_1}{f(F(y))-f(x_1)} =$$

$$= \lim_{y \to y_1} \left[\frac{f(F(y))-f(x_1)}{F(y)-x_1}\right]^{-1} = \frac{1}{f'(x_1)} =$$

$$= [f'(F(y_1))]^{-1} .$$

Portanto $F'(y_1)$ existe e é igual a $[f'(F(y_1))]^{-1}$.

Provaremos agora que $F^{(N+1)}$ existe e é contínua.

Vimos que $f'(y) = [f'(F(y))]^{-1}$, $\forall y \in K$; podemos escrever $F' = I \circ f' \circ F$, onde $I(t) = t^{-1}$, $I : f'(J) \to R$; notemos que a expressão tem sentido, pois, como $0 \notin f'(J)$, a aplicação I está bem definida nesse intervalo.

Como $f \in C^1$, então I, f' e F são contínuas, e como $F' = I \circ f' \circ F$, então, F' é contínua, e, portanto $F \in C^1$.

Suponhamos, agora, $f \in C^2$. Então I, f e $f' \in C^1$, logo $F' \in C^1$, implicando $F \in C^2$.

E assim sucessivamente, até $f \in C^{N+1}$.

2.2. INTERPOLAÇÃO INVERSA

Sejam $f : J = (a,b) \to R$ e $x_o, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ elementos distintos em J.

Sejam $j = 0,1,\ldots,n$ e $k_j = 0,1,\ldots,\gamma_j-1$, com $\gamma_j \geq 1$, e $N = (\sum_{j=0}^{n} \gamma_j) - 1$.

Suponhamos $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in J$, e $f^{(N+1)}$ contínua em J.

Então, pelo teorema 2.3, f tem uma inversa F definida em $K = f(J)$, $F^{(N+1)}$ existe e é contínua em K.

O problema de interpolação para F consiste em determinarmos um polinômio Q de grau N, que satisfaça

$$Q^{(k_j)}(y_j) = F^{(k_j)}(y_j) ,$$

$y_j = f(x_j)$, $j = 0,1,\ldots,n$, $k_j = 0,1,\ldots,\gamma_j-1$, $\gamma_j \geq 1$.

Pelo teorema 2.1, podemos afirmar que existe um único polinômio de grau N, nas condições requeridas acima.

Usando o teorema 2.2, obtemos uma estimativa do erro envolvido:

$$F(t) = Q(t) + \frac{F^{(N+1)}[\theta(t)]}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} (t-y_j)^{\gamma_j} , \qquad (2.2.1)$$

com $\theta(t)$ no intervalo determinado por $y_o, y_1, \ldots, y_n$.

2.3. RELAÇÃO ENTRE INTERPOLAÇÃO E CÁLCULO DE RAÍZES

Se $x_o, x_1, \ldots, x_n$ são aproximações de uma raiz α de f, para determinarmos x_{n+1}, podemos calcular as raízes do polinômio que interpola f nos pontos $x_o, x_1, \ldots, x_n$, e, tomarmos uma delas como sendo x_{n+1}; o processo é então repetido para os pon tos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, e assim por diante.

Porém, isso apresenta muitos inconvenientes, pois, nem sempre as raizes assim obtidas são boas aproximações para as raizes de f, e, para que isso ocorresse, seria necessário estabelecermos outras condições; além disso, uma equação polinomial deve ser resolvida em cada iteração, e, dentre todas as raízes do polinômio, uma deve ser escolhida como x_{n+1}.

Essas dificuldades podem ser evitadas interpolando F, a inversa de f, nos pontos $y_j = f(x_j)$, $j = 0,1,\ldots,n$, e avaliando Q, o polinômio interpolador de F, no ponto $y = 0$, o que determina x_{n+1} de modo único.

Então $x_{n+1} = Q(0)$, e repetimos esse procedimento usando os pontos $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n+1})$, e assim por diante.

O próximo teorema nos fornece resultados concernentes à convergência de um método iterativo gerado por interpolação inversa.

TEOREMA 2.4. Suponhamos válidas todas as condições e conclusões de 2.2, porém, sendo $J = \{x / |x-\alpha|\} < \Gamma$, e α uma raiz de f.

Suponhamos ainda que $F^{(N+1)}(y) \neq 0$, $\forall y \in K$.

Para $j \geq n+1$, definamos a sequência (x_j) por $x_{n+1} = Q(0)$, como foi visto acima, em 2.3, e repetimos o procedimento usando os pontos $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, e assim por diante.

Suponhamos ainda que $\dfrac{|F^{(N+1)}(y)|}{(N+1)!} \leq \lambda_1$, $|F'(y)| \geq \lambda_2$, para todo $y \in k$.

Sejam $M = \dfrac{\lambda_1}{(\lambda_2)^{N+1}}$ e suponha $L = M\,\Gamma^N < 1$.

Então $x_j \in J$, $\forall j \geq 0$ e $(e_j)_{j \geq 0} \to 0$, onde $e_j = x_j - \alpha$.

Antes de demonstrarmos o teorema, observemos que, como Q sempre deve ter grau N, então, para $\forall j = 0,1,\ldots,n$, devemos ter, $\gamma_j = \gamma_{j+k(n+1)}$, $k = 1,2,\ldots$, ou seja, tomados $n+1$ pontos consecutivos da sequência, a soma dos γ_j a eles relativos, deve sempre ser $N+1$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.4 :

Por 2.2.1 temos que

$$F(t) = Q(t) + \frac{F^{(N+1)}[\theta\ (t)]}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} (t-y_j)^{\gamma_j} .$$

Se $t = 0$, $F(0) = Q(0) + \dfrac{F^{(N+1)}[\theta\ (0)]}{(N+1)!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (-y_j)^{\gamma_j}$.

Como $F(0) = \alpha$ e $Q(0) = x_{n+1}$, temos

$$x_{n+1} - \alpha = - \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!} F^{(N+1)}(\theta\ ) \prod_{j=0}^{n} (y_j)^{\gamma_j} ,$$

sendo $\theta = \theta_i(0)$.

Se $e_j = x_j - \alpha$, temos

$$e_{n+1} = -\frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!} F^{(N+1)}(\theta) \prod_{j=0}^{n} (y_j)^{\gamma_j} . \qquad (2.4.1)$$

Como $y_j = f(x_j)$, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$y_j = f'(\eta_j)(x_j-\alpha) = f'(\eta_j)e_j ,$$

com η_j entre x_j e α .

Usando a fórmula da derivada de f, vem:

$$y_j = \frac{1}{F'(\rho_j)} e_j \quad \text{onde} \quad \rho_j = f(\eta_j) .$$

Substituindo em (2.4.1), temos

$$e_{n+1} = \frac{-(-1)^{N+1}}{(N+1)!} \frac{F^{(N+1)}(\theta)}{\prod_{j=0}^{n} [F'(\rho_j)]^{\gamma_j}} \prod_{j=0}^{n} (e_j)^{\gamma_j}$$

ou ainda,

$$e_{n+1} = M_n \prod_{j=0}^{n} e_j^{\gamma_j} , \qquad (2.4.2)$$

onde

$$M_n = \frac{-(-1)^{N+1} F^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)! \prod_{j=0}^{n} [F'(\rho_j)]^{\gamma_j}} \qquad (2.4.3)$$

Se $e_o, e_1, \ldots, e_n$ são não-nulos, como $F^{(N+1)}$ não se anula em K, então, para todo $j \geq 0$, e_j é não-nulo.

Pela definição de J, $\max\{|e_o|, |e_1|, \ldots, |e_n|\} < \Gamma$, e, como $x_o, x_1, \ldots, x_n \in J$, então

$$\frac{|F^{(N+1)}(y_j)|}{(N+1)!} \leq \lambda_1 \quad \text{e} \quad |F'(y_j)| \geq \lambda_2 \, ,$$

$j = 0, 1, \ldots, n$.

Daí conclui-se que $|M_j| \leq M$.

Por indução, mostraremos que $|e_j| < \Gamma$, $\forall j \geq 0$.

Seja $j = n+1$.

$$|e_{n+1}| = |M_n| \prod_{j=0}^{n} |e_j|^{\gamma_j} \leq M \prod_{j=0}^{n} |e_j|^{\gamma_j} < M\,\Gamma^{N+1} = M\,\Gamma^N\,\Gamma = L\Gamma < 1 \, .$$

Suponha que $|e_j| < \Gamma$, se $j = 0, 1, \ldots, n-k+1$.

Então, se $j = 0, 1, \ldots, n+k-1$, $x_j \in J$ e

$$\frac{|F^{(N+1)}(y_j)|}{(N+1)!} \leq \lambda_1 \quad \text{e} \quad |F'(y_j)| \geq \lambda_2 \, ,$$

e, portanto, $|M_j| \leq M$.

Daí temos que

$$|e_{n+k}| = |M_{n+k-1}| \prod_{j=k-1}^{n+k-1} |e_j|^{\gamma_j} \leq M \prod_{j=k-1}^{n+k-1} |e_j|^{\gamma_j} < M\,\Gamma^{N+1} < \Gamma \, .$$

Portanto, $x_j \in J$, $\forall j \geq 0$.

Mostraremos agora que $(e_j)_{j \geq 0} \to 0$.

Como $x_j \in J$, $\forall j \geq 0$, então, por 2.4.3, $|M_j| \leq M$, $\forall j \geq 0$.

Por indução, mostraremos que $|e_{j+1}| < L|e_j|$, $\forall j \geq n+1$.

$$|e_{n+1}| = |M_j| \prod_{j=0}^{n} |e_j|^{\gamma_j} \leq M \prod_{j=0}^{n} |e_j|^{\gamma_j} =$$

$$= M\,|e_n|\,|e_n|^{\gamma_n - 1} \prod_{j=0}^{n-1} |e_j|^{\gamma_j} < M\,|e_n|\,\Gamma^N = L\,|e_n|\,.$$

Suponhamos que $|e_{n+k-1}| < L|e_{n+k-2}|$, e provemos que $|e_{n+k}| < L|e_{n+k-1}|$.

Com efeito,

$$|e_{n+k}| = |M_{n+k-1}| \prod_{j=k-1}^{n+k-1} |e_j|^{\gamma_j} =$$

$$= |M_{n+k-1}|\,|e_{n+k-1}|\,|e_{n+k-1}|^{\gamma_{n+k-2}} \prod_{j=k-1}^{n+k-2} |e_j|^{\gamma_j} <$$

$$< |M_{n+k-1}|\,|e_{n+k-1}|\,\Gamma^N \leq M|e_{n+k-1}|\,\Gamma^N = L|e_{n+k-1}|\,.$$

Portanto, $\forall j \geq n+1$, $|e_{j+1}| < L|e_j|$, $L < 1$.

Repetindo a aplicação dessa igualdade $j+1$ vezes, obtemos $|e_{j+1}| < L^{j+1}\,|e_o|$, $j = 0,1,2,\ldots$

Como $L < 1$, se $j \to +\infty$, então $|e_j| \to 0$.

CAPÍTULO III

A SEQUÊNCIA BÁSICA E_s E O MÉTODO DE JARRATT

Como já vimos no capítulo I, dois métodos iterativos de ordem p podem diferir somente por termos proporcionais a u^{p_1}, com $p_1 \geq p$.

Assim, certas propriedades de um método, como ordem de convergência e constante de erro assintótico, podem ser deduzidas por comparação com elementos de uma sequência básica.

Estudaremos uma sequência básica, a sequência E_s, cuja simplicidade de estrutura facilita seu uso como sequência comparativa.

A seguir, veremos um método de 4ª ordem, o de Jarratt, cuja ordem de convergência é deduzida por comparação com um elemento da sequência básica E_s.

3.1 DEFINIÇÃO DA SEQUÊNCIA BÁSICA E_s

Sejam $f : (a,b) \to R$, α um zero de f tal que $f'(\alpha) \neq 0$, e $f^{(s)}$ contínua numa vizinhança de α.

Então, pelo teorema 2.3, f tem uma inversa F e $F^{(s)}$ é contínua numa vizinhança de zero.

Seja Q o polinômio interpolador para F, Q de grau $s-1$ e tal que no ponto $y = f(x)$ tenhamos $Q(y) = F(y)$, $Q^{(j)}(y) = F^{(j)}(y)$ se $j = 1,2,\ldots,s-1$.

Então, por 2.2.1, temos

$$F(t) = Q(t) + \frac{F^{(s)}(\theta(t))}{s!}(t-y)^s \qquad (3.1.1)$$

onde $Q(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{F^{(j)}(y)}{j!}(t-y)^j$ e $\theta(t)$ está no intervalo determinado por y e t.

Então, para esse x fixo, definimos: $E_s(x) = Q(0)$.

Assim, $E_s(x) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^j}{j!} F^{(j)}(y)\, y^j$, $y = f(x)$.

Notemos que, quando escrevemos E_s, estamos nos referindo ao s-ésimo elemento da sequência $(E_s)_{s \geq 2}$.

Escrevendo E_s em termos de potências de $u = \frac{f}{f'}$, temos

$$E_s(x) = x - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \frac{F^{(j)}(y)}{[F'(y)]^j} u^j(x).$$

Na prática F não é conhecida e por isso devemos expressar E_s em termos de f e suas derivadas; se fizermos

$$Y_j(x) = \left.\frac{(-1)^{j-1} F^{(j)}(y)}{j!\ [F'(y)]^j}\right|_{y = f(x)}, \qquad (3.1.2)$$

temos $E_s(x) = x - \sum_{j=1}^{s-1} Y_j(x)\, u^j(x)$.

A j-ésima derivada da função inversa F é dada por: [[8], apêndice B]

$$F^{(j)}(y) = (f'(x))^{-j} \, \Sigma (-1)^r \, (j+r-1) \prod_{i=2}^{j} \frac{(A_i(x))^{\beta_i}}{\beta_i!}$$

onde $y = f(x)$ e $A_j(x) = \dfrac{f^{(j)}(x)}{j! \; f'(x)}$, $r = \sum_{i=2}^{j} \beta_i$, e com a soma tomada sobre todos os $\beta_i \geq 0$ que satisfazem $\sum_{i=2}^{j} (i-1)\beta_i = j-1$.

A partir dessa expressão temos

$$Y_j(x) = \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \, \Sigma (-1)^r \, (j+r-1) \prod_{i=2}^{j} \frac{(A_i(x))^{\beta_i}}{\beta_i!} \; .$$

Daí calculamos:

$$\begin{aligned} E_2 &= x - u \\ E_3 &= E_2 - A_2 \, u^2 \\ E_4 &= E_3 - (2 \, A_2^2 - A_3) u^3 \\ E_5 &= E_4 - (5 \, A_2^2 - 5 \, A_2 A_3 + A_4) u^4 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

3.2. DEDUÇÃO DA ORDEM DE CONVERGÊNCIA DE E_s

Suponhamos que $F^{(s)}$ não se anule em uma vizinhança de zero.

Por 3.1.1 temos que

$$\alpha = F(0) = Q(0) + \frac{F^{(s)}(\theta(0))}{s!} (-y)^s \quad ,$$

com $\theta(0)$ no intervalo determinado por 0 e y.

Como $Q(0) = E_s(x)$, temos:

$$\alpha = E_s(x) + (-1)^s F^{(s)}(\theta) f^{(s)}(x)$$

onde $\theta = \theta(0)$.

Escrevendo isso em termos de u temos:

$$\alpha = E_s(x) + \frac{(-1)^s F^{(s)}(\theta)}{s!\ [F'(y)]^s} u^s(x) \tag{3.2.1}$$

Então

$$\frac{E_s(x) - \alpha}{(x-\alpha)^s} = \frac{(-1)^{s-1} F^{(s)}(\theta)}{s!\ [F'(y)]^s} \left(\frac{u(x)}{x-\alpha}\right)^s .$$

Como $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{u(x)}{x-\alpha} = 1$, temos que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{E_s(x) - \alpha}{(x-\alpha)^s} = \frac{(-1)^{s-1} F^{(s)}(0)}{s!\ [F'(0)]^s} .$$

Por 3.1.2, $\dfrac{(-1)^{s-1} F^{(s)}(0)}{s!\ [F'(0)]^s} = Y_s(\alpha) \neq 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{E_s(x)-\alpha}{(x-\alpha)^s} = Y_s(\alpha) \neq 0$.

Fazendo $x = x_i$, $x_{i+1} = E_s$, $e_i = x_i - \alpha$, temos:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{E_s(x)-\alpha}{(x-\alpha)^s} = \lim_{x\to\alpha} \frac{e_{i+1}}{e_i^s} = Y_s(\alpha) \neq 0 \qquad (3.2.2)$$

Assim, provamos que E_s é de ordem s, e $Y_s(\alpha)$ é a sua constante de erro assintótico.

Temos então uma sequência $(E_s)_{s \geq 2}$, tal que o s-ésimo elemento é de ordem s, e, portanto, por definição, essa sequência é uma sequência básica.

OBSERVAÇÃO 3.1. De agora em diante, quando nos referirmos a uma função iterativa $\emptyset$ de ordem p, estaremos supondo satisfeitas as hipóteses do teorema 1.1.

LEMA 3.1. Seja $\emptyset$ uma função iterativa de ordem p com constante de erro assintótico C.

Sejam $G(x) = \dfrac{\emptyset(x)-E_p(x)}{(x-\alpha)^p}$, $x \neq \alpha$ e $H(x) = \dfrac{\emptyset(x)-E_p(x)}{u^p(x)}$, $x \neq \alpha$.

Então:

i) $C = Y_p(\alpha) + \lim\limits_{x\to\alpha} G(x)$

ii) $C = Y_p(\alpha) + \lim\limits_{x\to\alpha} H(x)$.

DEMONSTRAÇÃO: Vimos em 3.2 que E_p é de ordem p, e que $Y_p(\alpha)$ é a sua constante de erro assintótico.

Como $\emptyset$ também é de ordem p, então, pelo teorema 1.1, temos:

$$\phi(\alpha) = \alpha \quad \text{e} \quad E_p(\alpha) = \alpha$$

$$\phi^{(j)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad E_p^{(j)}(\alpha) = 0\,, \quad \text{se} \quad j = 1,\ldots,p-1$$

$$\phi^{(p)}(\alpha) = C \neq 0 \quad \text{e} \quad E_p^{(p)}(\alpha) = Y_p(\alpha) \neq 0\,.$$

Agora, aplicando a Regra de L'Hospital p-vezes, temos:

$$\lim_{x\to\alpha} G(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{\phi(x)-E_p(x)}{(x-\alpha)^p} = \frac{\phi^{(p)}(\alpha)-E_p^{(p)}(\alpha)}{p!} = C - Y_p(\alpha)\,.$$

Portanto, $C = \lim_{x\to\alpha} G(x) + Y_p(\alpha)$.

ii) $H(x) = G(x)\left(\frac{x-\alpha}{u(x)}\right)^p$, e como $\lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{u(x)} = 1$, então:

$$\lim_{x\to\alpha} H(x) = \lim_{x\to\alpha} G(x)\left(\frac{x-\alpha}{u(x)}\right)^p = \lim_{x\to\alpha} G(x) = C - Y_p(\alpha)\,.$$

Portanto, $\lim_{x\to\alpha} H(x) = C - Y_p(\alpha)$.

OBSERVAÇÃO 3.2. Se f e g são duas funções tais que $\frac{f}{g} \to C \neq 0$, quando $x \to \alpha$, então escreveremos $f = O(g)$.

O próximo teorema nos permite calcular a ordem e a constante de erro assintótico de um método iterativo, por comparação com um elemento da sequência básica E_s .

TEOREMA 3.1. Seja ϕ uma função iterativa.

ϕ é de ordem p se e somente se: $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{\phi(x)-E_{p+1}(x)}{u^p(x)}\right]$ exis te e é não-nulo.

Nestas condições, $\lim_{x \to \alpha} \left[\dfrac{\emptyset(x) - E_{p+1}(x)}{u^p(x)}\right] = C$, onde C é a constante de erro assintótico de $\emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: De 3.2.1 temos:

$$\alpha = E_{p+1}(x) + \frac{(-1)^{p+1} F^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!\ (F'(y))^{p+1}} u^{p+1}(x) .$$

Então :

$$\frac{\emptyset(x) - \alpha}{(x-\alpha)^p} = \frac{\emptyset(x) - E_{p+1}(x) + O(u^{p+1}(x))}{u^p(x)} \left(\frac{u(x)}{x-\alpha}\right)^p =$$

$$= \frac{\emptyset(x) - E_{p+1}(x)}{u^p(x)} \left(\frac{u(x)}{x-\alpha}\right)^p + \left(\frac{u(x)}{x-\alpha}\right)^p O(u(x)) .$$

Como $\lim_{x \to \alpha} \frac{u(x)}{x-\alpha} = 1$ e $\lim_{x \to \alpha} O(u(x)) = 0$, então

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\emptyset(x) - E_{p+1}(x)}{u^p(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{\emptyset(x) - \alpha}{(x-\alpha)^p} .$$

Dessa igualdade, vem:

($\Rightarrow$) Se $\emptyset$ é de ordem p , então o limite do lado direito da igualdade existe e é igual a uma constante $C \neq 0$, que é a constante de erro assintótico de $\emptyset$.

Portanto, se $\emptyset$ é de ordem p , então $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\emptyset(x) - E_{p+1}(x)}{u^p(x)} =$
$= C \neq 0$, sendo C a constante de erro assintótico de $\emptyset$.

($\Leftarrow$) Se $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\emptyset(x) - E_{p+1}(x)}{(x-\alpha)^p}$ existe e é não-nulo, então, pela igualdade acima, $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\emptyset(x)-\alpha}{(x-\alpha)^p}$ existe e é não-nulo, ou seja, $\emptyset$ é de ordem p .

3.3. MÉTODO DE P. JARRATT, DE 4ª ORDEM

Fórmula:

$$\emptyset(x_i) = x_{i+1} = x_i - \frac{5}{8}\,u(x_i) - \frac{\frac{3}{8}\,f(x_i)\ f'(x_i)}{f'^2[x_i - \frac{2}{3}\,u(x_i)]}$$

3.3.1. DEDUÇÃO DO MÉTODO

Essa dedução se deu a partir de investigações das propriedades de métodos da forma

$$\emptyset(x) = x - a_1 w_1(x) - a_2 w_2(x) - \frac{a_3\ w_2^2(x)}{u(x)} \qquad (3.3.1.a)$$

com $w_1 = u$, $u = \dfrac{f}{f'}$ e $w_2 = \dfrac{f}{f' + \beta w_1}$, onde β , a_1, a_2 , a_3 são parâmetros sobre os quais imporemos condições para obtermos a ordem de convergência desejada.

A idéia é expandir $\emptyset$ em uma série de potências de u , e usar a sequência básica E_s como sequência de comparação.

Precisamos expandir w_2 e $\frac{w_2^2}{u}$, e, como

$$w_2(x) = \frac{f(x)}{f'(x) + \beta u(x)} ,$$

faremos inicialmente a expansão de $\frac{1}{f'}$.

Seja $g = \frac{1}{f'}$.

Então:

i) $g' = \frac{-f''}{(f')^2}$.

ii) $g'' = \frac{2(f'')^2}{(f')^3} - \frac{f^{(3)}}{(f')^2}$.

iii) $g(3) = \frac{f\,f''\,f^{(3)}}{(f')^3} - \frac{f^{(4)}}{(f')^2} - \frac{6(f'')^3}{(f')^4}$.

iv) $g^{(4)} = \frac{24(f'')^4}{(f')^5} - \frac{36(f'')^2 f^{(3)}}{(f')^4} + \frac{6(f^{(3)})^2 + 8f''\,f^{(4)}}{(f')^3} - \frac{f^{(5)}}{(f')^2}$.

Daí, vem que:

$$\frac{1}{f'(x + \beta u(x))} = g(x + \beta u(x)) = g(x) + g'(x)\,\beta\,u(x) +$$

$$+ \frac{g''(x)}{2!}\,\beta^2\,u^2(x) + \frac{g^{(3)}(x)}{3!}\,\beta^3\,u^3(x) +$$

$$+ \frac{g^{(4)}(x)}{4!}\,\beta^4\,u^4(x) + \frac{g^{(5)}(\tau)}{5!}\,\beta^5\,u^5(x) ,$$

com τ entre x e $\beta\, u(x)$.

Como $w_2(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x+\beta u(x))}$ temos:

$$w_2 = \frac{f}{f'} - \frac{f''}{f'}\frac{f}{f'}\beta u + \left[\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \frac{f}{f'} - \frac{1}{2}\frac{f^{(3)}}{f'}\frac{f}{f'}\right]\beta^2 u^2 +$$

$$\left[\frac{f''}{f'}\frac{f^{(3)}}{f'}\frac{f}{f'} - \frac{1}{6}\frac{f^{(4)}}{f'}\frac{f}{f'} - \left(\frac{f''}{f'}\right)^3 \frac{f}{f'}\right]\beta^3 u^3 +$$

$$\left[6\left(\frac{f^{(3)}}{f'}\right)^2 \frac{f}{f'} + 8\frac{f''}{f'}\frac{f^{(4)}}{f'} - \frac{f}{f'} - 36\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \frac{f^{(3)}}{f'}\frac{f}{f'} +\right.$$

$$\left.24\left(\frac{f''}{f'}\right)^4 \frac{f}{f'} - \frac{f^{(5)}}{f'}\frac{f}{f'}\right]\beta^4 u^4 + \frac{g^{(5)}(\tau)}{5!} f\, \beta^5 u^5 .$$

Fazendo $A_j(x) = \dfrac{f^{(j)}(x)}{j!f'(x)}$, segue que

$$w_2 = u - 2A_2\, \beta u^2 + (4A_2^2 - 3A_3)\beta^2 u^3 +$$

$$(12A_2A_3 - 4A_4 - 8A_2^3)\beta^3 u^4 + (216A_3^2 + 384A_2A_4 -$$

$$864A_2^2A_3 + 384A_2^4)\beta^4 u^5 + \frac{g^{(5)}(\tau)}{5!} f\, \beta^5 u^5 ,$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} w_2 = {} & u - 2A_2\, \beta u^2 + (4A_2^2 - 3A_3)\beta^2 u^3 + \\ & (12A_2A_3 - 4A_4 + 8A_2^3)\beta^3 u^4 + O(u^5) \end{aligned} \qquad (3.3.1.b)$$

Faremos agora o desenvolvimento de w_2^2 ,

$$w_2^2(x) = \frac{f^2(x)}{f'^2(x+\beta u(x))} ,$$

em série de potências de u .

Seja $h = \dfrac{1}{(f')^2}$.

Então:

i') $h' = \dfrac{-2\,f''}{(f')^3}$

i'i') $h'' = \dfrac{g(f'')^2}{(f')^4} - \dfrac{2\,f^{(3)}}{(f')^3}$

i'i'i') $h^{(3)} = \dfrac{18 f''\, f^{(3)}}{(f')^4} - \dfrac{24(f'')^3}{(f')^5} - 2\,\dfrac{f^{(4)}}{(f')^3}$.

Daí, segue que:

$$\frac{1}{f'^2(x+\beta\, u(x))} = h(x+\beta u(x)) =$$

$$= h(x) + h'(x)\,\beta\, u(x) + \frac{h''(x)}{2!}\,\beta^2\, u^2(x) +$$

$$+ h^{(3)}(x)\cdot\beta^3\, u^3(x) + h^{(4)}(\eta)\,\beta^4\, u^4(x) ,$$

com η entre x e $\beta\, u(x)$.

Assim,

$$w_2^2(x) = \left(\frac{f}{f'}\right)^2 + 4\left(\frac{f''}{2'\ f'}\right)\left(\frac{f}{f'}\right)^2 \beta\, u \ +$$

$$+ \left[12\left(\frac{f''}{2!\ f!}\right)^2 \left(\frac{f}{f'}\right)^2 - 6\left(\frac{f^{(3)}}{3!\ f'}\right)\left(\frac{f}{f'}\right)^2\right]\beta^2\, u^2 \ +$$

$$+ \left[36\left(\frac{f''}{2!\ f'}\right)\left(\frac{f^{(3)}}{3!\ f'}\right)\left(\frac{f}{f'}\right)^2 - 32\left(\frac{f''}{2\ f'}\right)^3 \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \ -\right.$$

$$\left. - 8\left(\frac{f^{(4)}}{4!\ f'}\right)\left(\frac{f}{f'}\right)^2\right]\beta^3\, u^3 + \frac{h^{(4)}(\eta)}{4!}\,\beta^4\, u^4 \quad ,$$

ou ainda,

$$w_2^2 = u^2 - 4A_2\,\beta u^3 + (12A_2^2 - 6A_3)\ \beta^2\, u^4$$

$$+ \ (36A_2A_3 - 32A_2^3 - 8A_4)\,\beta^3\, u^5 + \frac{h^{(4)}(\eta)}{4!}\,\beta^4\, u^4\, f^2 \ .$$

Então

$$\frac{w_2^2}{u} = u - 4A_2\,\beta u + 6(2A_2^2 - A_3)\ \beta^2\, u^3$$

$$+ \ 4(9A_2A_3 - 2A_4 - 8A_2^3)\,\beta^3\, u^4 + O(u^5) \qquad (3.3.1\text{.c})$$

Levando-se as expressões dadas por 3.3.1.b e 3.3.1.c na expressão de $\emptyset$, dada por 3.3.1.a , temos:

$$\emptyset(x) = x - (a_1 - a_2 - a_3)u + 2(a_2 + 2a_3)A_2\,\beta u^2 \ -$$

$$- \ [4(a_2 - 3a_3)A_2^2 - 3(a_2 + 2a_3)A_3]\,\beta^2\, u^3 \ -$$

$$- 4[3(a_2 - 3a_3)A_2A_3 - (a_2 + 2a_3)A_4 - 2(a_2 + 4a_3)A_2^3]\beta^3\, u^4 + O(u^5).$$

Comparando com E_5, visto em 3.1.3, temos:

$$\begin{aligned}\emptyset(x)-E_5(x) = {} & [1-(a_1+a_2+a_3)]u + [1+2\beta(a_2+2a_3)]A_2\,u^2 + \\ & + \{[2-4\beta^2(a_2+3a_3)A_2^2] - [1-3\beta^2(a_2+2a_3)]A_3\}\,u^3 - \\ & - \{[5+12\beta^3(a_2+a_3)A_2A_3 - 1 + 4\beta^3(a_2+2a_3)]A_4 - \\ & - [5+8\beta^3(a_2+4a_3)A_2^3\}\,u^4 + O(u^5)\ . \qquad (3.3.1.d)\end{aligned}$$

Pelo teorema 3.1, $\emptyset$ será de ordem 4 se, para funções arbitrárias f, os coeficientes de u, u^2 e u^3 se anularem.

Daí, temos:

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3 &= 1 \\ a_2+2a_3 &= -\frac{1}{2\beta} \\ a_2+3a_3 &= \frac{1}{2\beta^2} \\ a_2+2a_3 &= \frac{1}{3\beta^2} \end{aligned} \qquad (3.3.1.e)$$

Resolvendo o sistema, temos que: $\beta = -\frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{5}{8}$, $a_2 = 0$ e $a_3 = \frac{3}{8}$.

Levando-se esses valores em 3.3.1.a, temos a seguinte fórmula iterativa:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{5}{8}\,u(x_i) - \frac{\frac{3}{8}f(x_i)\ \ f'(x_i)}{f'^2[x_i - \frac{2}{3}\,u(x_i)]}$$

Pelo teorema 3.1, a constante C do erro assintótico do método é dada pelo limite, quando $x \to \alpha$, do coeficiente de u^4 na expressão 3.3.1.d .

Então,

$$C = \frac{1}{9} A_4(\alpha) - A_2(\alpha) A_3(\alpha) + \frac{13}{9} A_2^3(\alpha) .$$

CAPÍTULO IV

MÉTODO DE NEWTON E DERIVADOS

O método de Newton para computar zeros simples de funções foi modificado de várias formas, com o objetivo de melhorar a ordem de convergência.

Neste capítulo estudaremos o método de Newton, e alguns métodos dele derivados, a saber: três métodos de Neta, e os de Ostrowsky e de King.

Em todos eles o subpasso inicial de uma iteração é dado pelo método de Newton, e nos métodos de Neta de ordem 14 e 16 o último subpasso é gerado por interpolação inversa.

4.1. A IDÉIA DO MÉTODO DE NEWTON

Sejam $f : R \to R$, $a \in R$ tal que $f'(a) \neq 0$. O polinômio interpolador linear p tal que $p(a) = f(a)$ e $p'(a) = f'(a)$ é dado por $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Igualando a zero e resolvendo para x temos

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad (4.1.1)$$

Essa expressão nos dá uma aproximação para uma raiz de f numa vizinhança de a.

Se chamarmos de x_o a aproximação inicial e tomarmos $x_o = a$, então $x_1 = x$ será a segunda aproximação, e, em geral,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ,$$

obtendo então uma sequência $(x_i)_{i \geq 0}$.

Consideremos os seguintes problemas:

i) Das propriedades dessa sequência podemos concluir que existe uma raiz de f numa vizinhança de nossas aproximações?

ii) A sequência converge para a raiz de f ? Se assim o for, quão boa é a aproximação obtida?

Para podemós responder essas questões, precisamos inicialmente do seguinte teorema:

TEOREMA 4.1. Consideremos uma sequência de intervalos fechados J_n tais que

$$J_{n+1} \subset J_n , \quad n = 0,1,2...$$

$(|J_n|)_{n \geq 0} \to 0$, ou seja, se $J_n = [a_n , b_n]$, então $(|b_n - a_n|) \to 0$.

Nessas condições, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} J_n \neq \emptyset$ e consiste de um único ponto.

TEOREMA 4.2. (Kantarovich). Sejam $f : R \to R$ e $x_o \in R$ tal que $f(x_o) . f'(x_o) \neq 0$.

Sejam $h_o = - \dfrac{f(x_o)}{f'(x_o)}$ e $J_0 = [x_o, x_o + 2h_o]$; suponhamos que f'' seja contínua em J_o e que

$$2|h_o|M \leq |f'(x_o)| \qquad (4.2.1)$$

sendo $M = \text{máx } |f''(x)|$.

Seja $(x_i)_{i \geq 0}$ a sequência dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,...$$

Então a expressão de x_{n+1} tem sentido, $\forall n \geq 0$, todo $x_n \in J_o$ e existe $\alpha \in J_o$, tal que $x_n \to \alpha$, e, α é o único zero de f em J_o.

Se $\alpha \neq x_o + 2h_o$, α é uma raiz simples de f.

DEMONSTRAÇÃO: Como f'' é integrável, então

$$f'(x) - f'(x_o) = \int_{x_o}^{x} f''(x)\, dx ,$$

e assim,

$$|f'(x) - f'(x_o)| \leq |x - x_o|M \qquad (4.2.2)$$

Como $x_1 = x_o + h_o$, por 4.2.1, temos

$$|f'(x_1) - f'(x_o)| \leq |h_o|M \leq \frac{|f'(x_o)|}{2} \qquad (4.2.3)$$

Daí segue que

$$|f'(x_1)| \geq |f'(x_o)| - |f'(x_1) - f'(x_o)| \geq |f'(x_o)| - \frac{|f'(x_o)|}{2}$$

ou seja,

$$|f'(x_1)| \geq \frac{|f'(x_o)|}{2} \qquad (4.2.4)$$

Integrando por partes, temos que

$$\int_{x_o}^{x_1} (x_1 - x) \; f''(x) \; dx = f(x_1) \quad , \qquad (4.2.5)$$

pois, $\int_{x_o}^{x_1} (x_1 - x) \; f''(x) \; dx = -(x_1 - x_o) f'(x_o) + f(x_1) - f(x_o) = f(x_1)$.

Façamos $x = x_o + t \; h_o$; então

$$x_1 - x = (1 - t) h_o \quad \text{e} \quad dx = h_o \; dt \; .$$

Usando 4.2.5 temos

$$f(x_1) \leq \frac{|h_o|^2 \; M}{2} \quad , \qquad (4.2.6)$$

pois:

$$f(x_1) = h_0^2 \int_o^1 (1 - t) \; f''(x_o + t \; h_o) \; dt$$

e como $(1 - t) \geq 0$, segue que

$$|f(x_1)| \leq h_o^2 \int_o^1 (1-t) \; |f'(x_o + t \; h_o)| dt \leq \frac{|h_o|^2 \; M}{2} \; .$$

Seja $h_1 = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ e $x_2 = x_1 + h_1$.

Por 4.2.4 e 4.2.6 temos que

$$|h_1| \leq \frac{|h_o|^2 M}{|f'(x_o)|} \qquad (4.2.7)$$

Agora, usando 4.2.7 e 4.2.4 temos

$$\frac{M|h_1|}{|f'(x_1)|} \leq \frac{|h_o|^2 M^2}{|f'(x_o)|\ |f'(x_1)|} \leq \frac{|h_o|^2 M^2}{\frac{1}{2}\ |f'(x_o)|^2} ,$$

ou seja,

$$\frac{2\ M|h_1|}{|f'(x_1)|} \leq \left(\frac{2\ |h_o|\ M}{f'(x_o)}\right)^2 .$$

Por 4.2.1 , $\dfrac{2|h_o|\ M}{|f'(x_o)|} \leq 1$, e, portanto,

$$2\ |h_1|\ M \leq |f'(x_1)| \qquad (4.2.8)$$

Usando 4.2.7 e 4.2.1 temos

$$\frac{|h_1|}{|h_o|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2|h_o|M}{|f'(x_o)|}\right) \leq \frac{1}{2} ,$$

assim $|h_1| \leq \frac{1}{2}\ |h_o|$.

Como $J_o = [x_o, x_o + 2h_o]$, $x_1 = x_o + h_o$, $x_2 = x_1 + h_1$ e $|h_1| \leq \frac{1}{2}|h_o|$, então $x_2 \in J$.

Consideremos agora $x_{n+1} = x_n + h_n$ onde $h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

A relação 4.2.8 nos mostra que as hipóteses do teorema permanecem válidas se substituirmos x_o e h_o por x_1 e h_1, respectivamente, e dessa forma poderíamos fazê-lo para x_n e h_n, $n = 0,1,2,...$

Seja $J_n = [x_n, x_n + 2h_n]$, $n = 0,1,2,...$

Temos então uma sequência de intervalos $J_{n+1} \subset J_n$, $n = 0,1,2,...$, com o comprimento de J_{n+1} no máximo igual a metade do comprimento de J_n.

Portanto, $|h_n| \leq \frac{1}{2^n}|h_o|$.

Como $\frac{1}{2^n} \to 0$, quando $n \to +\infty$, temos que $|h_n| \to 0$.

Nese caso a sequência x_n, $n = 0,1,...$, converge para um ponto α; como $J_n \subset J_o$, $\forall n \geq 1$, então $x_n \in J_o$, $\forall n \geq 0$ e como J_o é fechado, segue que $\alpha \in J_o$.

Provaremos agora que α é uma raiz de f.

Multiplicando $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ por $f'(x_n)$, temos:

$$f'(x_n)x_{n+1} = f'(x_n)x_n - f(x_n).$$

Como $x_n \to \alpha$ e f é contínua em J_o, então $f'(\alpha).\alpha = f'(\alpha).\alpha - f(\alpha)$, de onde se conclue que $f(\alpha) = 0$.

Considerando-se $\alpha \neq x_o + 2h_o$, veremos que α é uma raiz simples de f.

Por 4.2.2 temos que para todo $x \in J_o$,

$$|f'(x) - f'(x_o)| \leq |x - x_o| M \leq 2|h_o| M .$$

Então, tomando $x \in J_o$, $x \neq x_o + 2h_o$, $|x - x_o| < 2|h_o|$, e por 4.2.1, temos

$$|f'(x) - f'(x_o)| < 2|h_o| M \leq |f'(x_o)| .$$

Portanto, $f'(x) \neq 0$ para todo x em J_o, $x \neq x_o + 2h_o$, e daí se conclui que, se $\alpha \neq x_o + 2h_o$, então α é uma raiz simples de f.

α é a única raiz de f em J_o, pois, sendo $f'(x) \neq 0$ em $J_o - \{x_o + 2h_o\}$, $f(x)$ é estritamente monótona em J_o.

4.2. DEDUÇÃO DA ORDEM DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON

Sejam $f : J = [a,b] \to R$ e $\alpha \in J$ uma raiz de f.

Suponhamos que $f'(x) \neq 0$ para $x \in J$ e que f'' e $f^{(3)}$ sejam contínuas em J.

Seja $\emptyset(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ e $(x_i)_{i \geq 0}$ a sequência definida por $x_{i+1} = \emptyset(x_i)$.

Suponhamos ainda que $f''(\alpha) \neq 0$ e que $x_i \to \alpha$.

Nessas condições, $\emptyset$ é de ordem 2.

De fato:

Sendo $\emptyset(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, temos que $\emptyset(\alpha) = \alpha$, $\emptyset'(\alpha) = 0$ e $\emptyset''(\alpha) = \dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \neq 0$.

Então, pelo teorema 1.1, $\emptyset$ é de ordem 2 e

$$\frac{e_{i+1}}{e_i^2} \rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \tag{4.2.1}$$

onde $e_i = x_i - \alpha$, $\forall i \geq 0$.

Todos os métodos que veremos a seguir são derivados do método de Newton.

4.3. MÉTODO DE OSTROWSKY, DE 3ª ORDEM

4.3.1. FÓRMULA:

$$y_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \;;$$

$$x_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(x_i)} \;.$$

4.3.2. DEDUÇÃO DA ORDEM DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

Suponhamos que $f \in C^3$, e que $f(\alpha) \cdot f'(\alpha) \neq 0$

De 4.2.1, temos que

$$\frac{y_i - \alpha}{(x_i - \alpha)^2} \to \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \qquad (4.3.2.a)$$

Por outro lado, como $y_i \to \alpha$ temos

$$f(y_i) = (y_i - \alpha) f'(\alpha) + O[(y_i - \alpha)^2] \qquad (4.3.2.b)$$

Usando 4.3.1 e 4.3.2.b, temos

$$f'(x_i)x_{i+1} = f'(x_i)y_i - f(y_i) \;;$$

então,

$$f'(x_i)(x_{i+1}-\alpha) = f'(x_i)(y_i-\alpha) - (y_i-\alpha)f'(\alpha) + O[y_i-\alpha)^2] \;,$$

e daí segue que,

$$f'(x_i)\,\frac{(x_{i+1}-\alpha)}{y_i-\alpha} = f'(x_i) - f'(\alpha) + O(y_i-\alpha) \;.$$

Pelo teorema do Valor Médio e 4.3.2.a, temos que

$$f'(x_i)\left(\frac{x_{i+1}-\alpha}{y_i-\alpha}\right) = f''(\xi)(x_i-\alpha) + O[(x_i-\alpha)^2] \;,$$

com ξ entre x_i e α.

Se $x_i \to \alpha$, então $f'(x_i)\,\dfrac{x_{i+1}-\alpha}{(y_i-\alpha)(x_i-\alpha)} \to f''(\alpha)$, e portanto,

$$\frac{x_{i+1}-\alpha}{(y_i-\alpha)(x_i-\alpha)} \to \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} . \qquad (4.3.2.c)$$

Por 4.3.2.a e 4.3.2.c, concluimos que:

$$\frac{x_{i+1}-\alpha}{(x_i-\alpha)^3} = \frac{y_i-\alpha}{(x_i-\alpha)^2} \cdot \frac{(x_{i+1}-\alpha)}{(y_i-\alpha)(x_i-\alpha)} \to \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 .$$

Portanto, $\dfrac{e_{i+1}}{e_i^3} \to \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2$, e, então, o método é de ordem 3.

4.4. MÉTODO DE KING

Este é um método de 4ª ordem, e requer somente duas avaliações da função, e uma avaliaçãc da derivada.

4.4.1 FÓRMULA:

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \quad \frac{f(x_n) + A\, f(w_n)}{f(x_n) + (A-2)f(w_n)} .$$

4.4.2. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

Seja $f \in C^\infty$ numa vizinhança de α .

Sejam $w_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ e

$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + A\ f(w_n)}{f(x_n) + B\ f(w_n)} ,$$

onde A e B são parâmetros.

Desenvolvendo f e f" em série de Taylor em torno de α, e, sendo $e_n = x_n - \alpha$, $A_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, temos que:

$$f(x_n) = f'(\alpha) \left[e_n + \frac{A_2}{2!} e_n^2 + \frac{A_3}{3!} e_n^3 + \frac{A_4}{4!} e_n^4 + \dots \right] \qquad (4.4.2.a)$$

e,

$$f'(x_n) = f'(\alpha) \left[1 + A_2\ e_n + \frac{A_3}{2} e_n^2 + \frac{A_4}{6} e_n^3 + \frac{A_5}{24} e_n^4 + \dots \right] \qquad (4.4.2.b)$$

Seja $e(w_n) = w_n - \alpha = e_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Então:

$$e(w_n) = \frac{A_2}{2} e_n^2 + \frac{1}{6} (2A_3 - 3A_2^2) e_n^3 + \frac{1}{24} (-14\ A_2A_3 + 12A_2^3 + 3A_4) e_n^4 \dots \qquad (4.4.2.c)$$

Agora, calculemos $f(w_n)$;

$$f(w_n) = f'(\alpha) \left[e(w_n) + \frac{A_2}{2} e^2\ (w_n) + \frac{A_3}{6} e^3 (w_n) + \frac{A_4}{24} e^4\ (w_n) + \dots \right]$$

Por 4.4.2.c temos que:

$$f(w_n) = f'(\alpha) \left[\frac{A_2}{2} e_n^2 + \frac{1}{6} (2\ A_3 - 3\ A_2^2)\ e_n^3 + \frac{1}{24} (-14\ A_2A_3 + 15\ A_2^3 + 3\ A_4) e_n^4 + \dots \right] \qquad (4.4.2.d)$$

Por 4.4.2.a, 4.4.2.b e 4.4.2.d, temos

$$f'(x_n)[f(x_n)+B\ f(w_n)] = (f'(\alpha))^2 \cdot \{e_n + \frac{1}{2}(B+3)A_2\ e_n^2 + \frac{1}{6}[(2B+4)A_3 + 3A_2^2]e_n^3 + \frac{1}{24}[(3B+5)A_4 + 10A_2A_3 + 3BA_2^3]e_n^4 + \frac{1}{120}[(4B+6)A_5 + 15A_2A_4 + 10A_3^2 + 20BA_2^2A_3 - 15BA_2^4]e_n^5 + \ldots\}$$

Por 4.4.2.a e 4.4.2.d, temos que

$$f(x_n) + A\ f(w_n) = f'(\alpha)\ \{e_n + \frac{1}{2}(A+1)A_2\ e_n^2 + \frac{1}{6}[(2A+1)A_3 - 3AA_2^2]e_n^3 + \frac{1}{24}[-14A_2A_3A + 15A_2^3A + (3A+1)A_4]e_n^4 + \frac{1}{120}[(4A-1)A_5 - 25AA_2A_4 - 20AA_3^2 + 120A_2^2A_3A - 90A_2^4A]e_n^5 + \ldots\}$$

Daí segue que:

$$f(w_n)[f(x_n) + A\ f(w_n)] = (f(\alpha))^2\ \{\frac{A_2}{2}\ e_n^3 + \frac{1}{4}(A+1)A_2^2\ e_n^4 + \frac{1}{6}(2A_3 - 3A_2^2)e_n^4 + \frac{1}{6}\left[((2A+1)A_3 - 3AA_2^2)\frac{A_2}{2}\right]e_n^5 + \left[\frac{1}{2}(A+1)A_2 \cdot \frac{1}{6}(2A_3 - 3A_2^2)\right]e_n^5 + \frac{1}{24}(-14A_2A_3 + 15A_2^3 + 3A_4)e_n^5 + \ldots\},$$

ou ainda:

$$f(w_n)[f(x_n)+A\ f(w_n)] = (f'(\alpha))^2 \{\frac{A_2}{2} e_n^3 + \left[\frac{1}{4}(A-1)A_2^2+\frac{1}{3}A_3\right]e_n^4+\frac{1}{24}[(8A-8)A_2A_3 + (9-12A)A_2^3+3A_4]e_n^5+\dots\} \quad (4.4.2.f)$$

Como

$$e_{n+1} = x_{n+1}-\alpha = e(w_n) - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f(x_n)+A\ f(w_n)}{f(x_n)+B\ f(w_n)} \quad ,$$

por 4.4.2.c, 4.4.2.d e 4.4.2.f temos:

$$e_{n+1}(f'(x_n)[f(x_n)+B\ f(x_n)]) = (f'(\alpha))^2\{\frac{1}{4}(B+A-2)A_2^2 e_n^4 + \frac{1}{24}[(8B-8A+14)\ A_2A_3 + (12A-6B-9)A_2^3]e_n^5 + \dots\}$$

Então,

$$e_{n+1} = \frac{1}{4}(B+A-2)A_2^2\ e_n^3 + \frac{1}{24}[(8B-8A+14)A_2A_3 + (-3\ B^2+(3A-21)B+21A-27)A_2^3]e_n^4 + \dots$$

Para que o método tenha convergência de 4ª ordem é necessário tomarmos $B = A-2$.

Assim:

$$e_{n+1} = \frac{1}{24}(-2A_2A_3+(3+6A)A_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \quad ,$$

e, então:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{e_{n+1}}{e_n^4} = \frac{1}{24}\left[- 2A_2A_3 + (3 + 6A)A_2^3\right] .$$

Portanto, o método é de 4ª ordem e pode ser expresso por

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ;$$

$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + A\ f(w_n)}{f(x_n) + (A-2)\ f(w_n)} ,$$

tendo como constante de erro assintótico $C = \frac{1}{24}(-2\ A_2A_3 + (3 + 6A)\ A_2^3)$.

4.5. MÉTODO DE B. NETA, DE 6ª ORDEM

4.5.1. FÓRMULA

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ;$$

$$z_n = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f(x_n) - \frac{1}{2}\ f(w_n)}{f(x_n) - \frac{5}{2}\ f(w_n)} ;$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) - f(w_n)}{f(x_n) - 3\ f(w_n)} .$$

OBSERVAÇÃO 4.5.1: Não faremos a dedução da ordem de convergência deste método, pois é análoga à dedução da ordem do método de King, visto em 4.4; observemos somente que z_n é determinado pelo método de King, com $A = -\frac{1}{2}$.

Agora, veremos outros dois métodos de Neta, um de ordem 14 e outro de ordem 16; ambos requerem quatro avaliações da função e uma avaliação da derivada, por iteração; sendo os dois subpassos iniciais dados pelos métodos de Newton e de King, respectivamente.

No método de ordem 14, o terceiro subpasso é dado pelo método de Neta visto em 4.5, e, o último subpasso é obtido por interpolação inversa; no método de ordem 16, os dois últimos subpassos também são obtidos por interpolação inversa.

4.6. MÉTODO DE B. NETA, DE ORDEM 14

4.6.1. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

Sejam $w_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;

$$z_n = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \; \frac{f(x_n) + A\, f(w_n)}{f(x_n) + (A-2)\, f(w_n)} \quad ;$$

$$t_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \; \frac{f(x_n) - f(w_n)}{f(x_n) - 3\, f(w_n)} \quad .$$

Agora, determinaremos x_{n+1} por interpolação inversa.

Seja

$$Q(f(x)) = a + b(f(x) - f(x_n)) + c(f(x) - f(x_n))^2 + d(f(x) - f(x_n))^3 + e(f(x) - f(x_n))^4 \quad ,$$

o polinômio de grau 4 que interpola a inversa de f nos pontos $f(x_n)$, $f(w_n)$, $f(z_n)$, $f(t_n)$ e satisfaz as seguintes condições:

$$Q(f(x_n)) = x_n \; ; \qquad Q'(f(x_n)) = \frac{1}{f'(x_n)} \; ;$$

$$Q(f(w_n)) = w_n \; ; \qquad Q(f(z_n)) = z_n \; ; \qquad (4.6.1.a)$$

$$Q(f(t_n)) = t_n \; .$$

Das duas primeiras igualdades de 4.6.1.a, segue que:

$$a = x_n \qquad e \qquad b = \frac{1}{f'(x_n)} \; .$$

Se usarmos a notação,

$$\delta = \delta_n - x_n \; , \qquad \delta = w, z, t$$

$$G_\delta = f(\delta_n) - f(x_n)$$

$$\emptyset_\delta = \frac{\delta}{G_\delta^2} - \frac{1}{G_\delta \; f'(x_n)} \; ,$$

as três últimas igualdades de (4.6.1.a) nos dão:

$$\begin{aligned} c + d\,G_w + e\,G_w^2 &= \emptyset_w \\ c + d\,G_z + e\,G_z^2 &= \emptyset_z \\ c + d\,G_t + e\,G_t^2 &= \emptyset_t \end{aligned} \qquad (4.6.1.b)$$

Resolvendo o sistema 4.6.1.b, temos:

$$e = \frac{\dfrac{\emptyset_t - \emptyset_z}{G_t - G_z} - \dfrac{\emptyset_w - \emptyset_z}{G_w - G_z}}{G_t - G_w}$$

$$d = \frac{\emptyset_t - \emptyset_z}{G_t - G_z} - e(G_t - G_z)$$

$$c = \emptyset_t - d\,G_t - e\,G_t^2 .$$

Agora, calculados os coeficientes a,b,c,d,e, podemos calcular x_{n+1}, sendo $x_{n+1} = Q(0)$.

Então,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + c\,f^2(x_n) - d\,f^3(x_n) + e\,f^4(x_n) .$$

4.6.2 DEDUÇÃO DA ORDEM DE CONVERGÊNCIA

Suponhamos válidas todas as condições impostas para a convergência do método de Newton, King, Neta (6ª ordem) e as hipóte ses do teorema 2.4.

Para simplificarmos a notação, denotaremos:

$$\begin{array}{llll} x_n \text{ por } x_o ; & w_n \text{ por } x_1 & & \\ z_n \text{ por } x_2 ; & t_n \text{ por } x_3 & & (4.6.2.a) \\ x_{n+1} \text{ por } x_4 . & & & \end{array}$$

Segundo a nomenclatura do capítulo 2, temos: $\gamma_o = 2$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ e $\gamma_3 = 1$.

Como w_n, z_n e t_n são determinados, respectivamente, pelos métodos de Newton, King e Neta (6ª ordem), cujas ordens são 2, 4, e 6 respectivamente, e, sendo $e_i = x_i - \alpha$, podemos escrever:

$$\begin{array}{l} e_1 \sim e_o^2 \\ e_2 \sim e_o^4 \\ e_3 \sim e_o^6 \end{array} \qquad (4.6.2.b)$$

Em 2.4.2 tínhamos que

$$e_{n+1} = M_n \prod_{j=0}^{n} e_j^{\gamma_j} , \qquad M_n \neq 0 .$$

Então:

$$e_4 \sim e_o^2 \, e_o^2 \, e_o^4 \, e_o^6 = e_o^{14} , \qquad (4.6.2.c)$$

e assim sucessivamente, $e_{4(n+1)} \sim e_{4n}$, $n \geq 0$.

Portanto, o método é de ordem 14.

OBSERVAÇÃO 4.6.1: Notemos que, usando a notação proposta em 4.6.2.a, a sequência determinada por esse método de Neta em estudo, é dada por elementos da forma x_{4n} , $n \geq 0$, fazendo sentido então, de 4.6.2.c, concluirmos que o método é de ordem 14.

4.7. MÉTODO DE B. NETA, DE ORDEM 16

4.7.1. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

Sejam $w_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ e

$$z_n = w_n - \frac{f(w_n)}{f'(x_n)} \, \frac{f(x_n) + A\, f(w_n)}{f(x_n) - (A-2)\, f(w_n)} .$$

Agora, determinaremos t_n por interpolação inversa.

Seja

$$T(f(x)) = b_o + b_1(f(x) - f(x_n)) + b_2(f(x) - f(x_n))^2 + b_3(f(x) - f(x_n))^3 ,$$

o polinômio cúbico que interpola a inversa de f nos pontos $f(x_n)$, $f(w_n)$ e $f(z_n)$, satisfazendo:

$$T(f(x_n)) = x_n$$

$$T'(f(x_n)) = \frac{1}{f'(x_n)}$$

$$T(f(w_n)) = w_n \quad \text{e} \quad T(f(z_n)) = z_n \ .$$

Das duas primeiras igualdades temos que $b_o = x_n$ e $b_1 = \dfrac{1}{f'(x_n)}$.

Usando a notação

$$\delta = \delta_n - x_n \, , \quad \delta = w, z$$

$$F_\delta = f(\delta_n) - f(x_n)$$

$$\phi_\delta = \frac{\delta}{F_\delta^2} - \frac{1}{F_\delta \cdot f'(x_n)} \quad ,$$

teremos

$$b_2 + b_3 F_w = \phi_w$$

$$b_2 + b_3 F_z = \phi_z \ .$$

Os coeficientes b_2 e b_3 são dados por $b_3 = \dfrac{\phi_w - \phi_z}{F_w - F_z}$ e $b_2 = \phi_w - b_3 F_w$.

Assim, determinados os coeficientes do polinômio, temos:

$$t_n = T(0) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + b_2 \, f^2(x_n) - b_3 \, f^3(x_n) \ .$$

Agora, x_{n+1} será calculado como no método de ordem 14.

4.7.2. DEDUÇÃO DA ORDEM DE CONVERGÊNCIA

Como em 4.6.2.a, denotaremos x_n por x_o, w_n por x_1,

z_n por x_2, t_n por x_3, x_{n+1} por x_4 e $e_n = x_n - \alpha$; segundo a nomenclatura do capítulo 2, temos:

$$\gamma_o = 2; \qquad \gamma_1 = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 1 .$$

Então, usando 2.4.2, e, sabendo que $e_1 \sim e_o^2$, $e_2 \sim e_o^4$, temos:

$$e_3 \sim e_o^2 \, e_o^2 \, e_o^4 = e_o^8 .$$

Como $x_{n+1} \equiv x_4$ foi determinado por interpolação inversa usando os pontos $f(x_o)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, e, sendo $\gamma_3 = 1$, usando novamente 2.4.2, temos que: $e_4 \sim e_o^2 \, e_o^2 \, e_o^4 \, e_o^8 = e_o^{16}$ e, assim sucessivamente, $e_{4(n+1)} \sim e_{4n}^{16}$, $n \geq 0$.

Novamente, observemos que a sequência que nos interessa é dada por pontos da forma x_{4n}, $n \geq 0$.

Portanto, o método é de ordem 16.

OBSERVAÇÃO 4.7.1.: Não existe teoremas do tipo Kantarovich para os métodos derivados do método de Newton.

CAPÍTULO V

Neste capítulo faremos uma análise dos métodos, do ponto de vista computacional, de tempo de convergência, e robustez.

Inicialmente apresentaremos as tabelas do tempo computacional necessário para a convergência de cada método, para cada uma das funções utilizadas, e, nessas tabelas usaremos a seguinte notação:

x_o : Aproximação inicial.

T : Tempo de convergência em segundos.

* : "Overflow".

** : Número de Iterações maior do que 30.

lp : "loop".

d : Diverge

Finalmente, apresentaremos as conclusões obtidas, e num apêndice, os gráficos das funções utilizadas.

NOTA: Os dados foram obtidos num microcomputador TK 82-C.

$f(x) = x^4$

	NEWTON	OSTROWSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRARR
x_o	T	T	T	T	T	T	T
0.1	15	10	7	7	10	5	10
-0.1	15	10	7	7	10	5	10
0.2	18	15	10	9	10	5	12
-0.2	18	15	10	9	10	5	12
0.3	23	18	10	9	15	5	12
-0.3	23	18	10	9	15	5	12
0.5	29	21	11	13	15	8	15
-0.5	29	21	11	13	15	8	15
1	34	29	14	17	10	13	20
-1	34	29	14	17	10	13	20
2	40	33	14	17	*	22	23
-2	40	33	14	17	*	22	23
5	48	39	20	*	*	*	27
-5	48	39	20	*	*	*	27
10	52	47	20	*	*	*	31
-10	52	47	20	*	*	*	31
100	59	65	26	*	*	*	43
-100	59	65	26	*	*	*	43
200	**	68	27	*	*	*	45
-200	**	68	27	*	*	*	45
1000	**	77	32	*	*	*	55
-1000	**	77	32	*	*	*	55
5000	**	**	42	*	*	*	61
-5000	**	**	42	*	*	*	61
10000	**	**	45	*	*	*	67
-10000	**	**	45	*	*	*	67

TABELA 1

$f(x) = 4x - \cos x - 1$

	NEWTON	OSTROWSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_o	T	T	T	T	T	T	T
0	10	8	8	11	12	12	10
0.45	7	8	5	6	6	6	6
0.47	7	4	5	6	6	6	6
0.48	7	4	5	6	6	12	6
0.49	7	4	5	6	6	6	6
1	10	8	8	11	22	12	10
4.6	15	11	13	15	12	12	13
4.712389	15	11	13	15	12	12	13
4.8	15	11	13	15	12	12	13
14	15	11	13	22	17	12	13
14.137167	15	11	13	18	17	12	13
14.3	15	11	13	18	22	12	13
15	12	11	13	18	17	12	13
16.9	14	11	12	20	17	17	16
17.2	14	11	12	15	34	12	13
17.27876	17	11	12	18	34	12	13
17.3	17	11	12	18	17	12	13
19	12	11	12	15	12	12	13
20	19	11	12	18	22	12	13
100	20	12	13	18	43	12	20
-100	18	15	13	24	17	12	19
1000	23	15	18	37	28	12	28
-1000	20	23	18	37	17	12	20
10000	26	15	18	29	17	12	28
-10000	18	16	23	24	17	12	33

TABELA 2

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2x^2 + 2}$$

	NEWTON	OSTROWSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_o	T	T	T	T	T	T	T
0.1	19	9	11	12	*	15	*
0.15	15	9	11	12	*	10	9
0.3	15	6	7	8	17	*	6
0.5	15	6	7	8	17	*	6
1.1	9	6	7	8	14	10	6
1.3	9	6	7	8	17	*	6
1.5	15	6	7	8	17	15	6
1.7	15	14	7	8	17	20	6
1.9	16	*	11	12	21	*	9
1.999	*	*	11	12	17	*	9
1.9967	*	*	11	12	17	*	9
2	24	*	11	12	21	*	9
2.5	15	*	*	*	*	*	11
2.7	22	*	*	*	*	*	9
2.8	19	*	11	12	*	*	9
2.9	*	*	11	12	*	*	9
3	*	*	11	12	*	*	11
10	*	*	*	20	*	*	*
20	*	*	*	*	*	*	*
100	*	*	*	*	*	*	*
-0.1	19	9	11	12	*	15	*
-0.15	15	9	11	12	*	10	9
-0.3	15	6	7	12	*	*	6
-1.1	8	6	7	8	14	10	6
-1.3	9	9	7	8	14	*	6
-1.5	15	9	7	8	17	15	6
-1.7	15	14	7	8	17	20	6
-1.9	16	*	11	12	17	*	6
-1.9999	*	*	11	12	17	*	6
-1.9967	*	*	11	12	17	*	6
-2	24	*	11	12	17	*	9
-2.5	15	*	*	*	*	*	11
-3	*	*	11	12	*	*	9
-10	*	*	*	*	*	*	*
-20	*	*	*	*	*	*	*
-100	*	*	*	*	*	*	*

TABELA 3

$f(x) = x^5 - 1$

	NEWTON	OSTROWSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_o	T	T	T	T	T	T	T
0.09	**	*	*	*	*	*	*
0.1	**	*	*	*	*	*	*
0.3	52	*	*	*	*	*	*
0.5	26	**	22	*	*	*	15
-0.09	**	*	*	*	*	*	*
-0.1	**	*	*	*	*	*	56
-0.3	53	*	*	*	*	*	*
-0.5	26	d	*	*	*	*	*
0.6	20	57	**	*	*	*	15
0.7	16	*	*	*	*	*	9
0.8	13	*	9	9	*	14	9
0.85	10	*	6	7	*	14	6
0.89	10	9	6	7	19	9	6
0.9	10	9	6	7	19	9	6
1.1	10	9	6	7	19	9	6
1.2	10	9	6	7	19	9	6
1.3	13	9	6	7	*	*	9
1.4	13	12	6	7	*	*	9
1.5	13	12	6	7	*	*	9
2	18	14	9	9	*	*	12
2.1	18	14	9	9	*	*	12
2.2	18	14	9	13	*	*	12
3	20	14	9	*	*	*	12
5	27	23	12	*	*	*	15
10	35	25	12	*	*	*	17
-10	52	**	30	*	*	*	*
20	40	27	16	*	*	*	18
-20	52	40	*	*	*	*	*
80	56	44	24	*	*	*	34
-80	**	*	*	*	*	*	*
100	58	47	24	*	*	*	34
-100	**	*	*	*	*	*	65
1000	**	75	36	*	*	*	52
-1000	**	**	*	*	*	*	82

TABELA 4

$f(x) = \ln|x|$

TABELA 5.

	NEWTON	OSTROVSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_0	T	T	T	T	T	T	T
-10	d	d	15	18	d	d	13
-8	d	d	15	18	d	d	13
-6	28	d	15	18	d	d	13
-5	19	d	15	18	d	d	13
-4	16	16	27	d	d	d	10
-3	19	20	12	13	29	14	10
-0.9	10	8	9	10	17	7	7
10^{-8}	41	39	lp	44	d	*	19
10^{-7}	36	35	lp	40	d	*	16
10^{-4}	28	28	lp	30	d	*	13
0.01	23	23	lp	25	29	14	10
0.1	16	16	lp	18	29	d	10
0.3	16	18	12	18	d	*	7
0.5	13	13	9	10	d	7	7
0.8	10	8	9	10	23	7	7
0.9	10	8	9	10	17	7	7
2	16	16	12	13	23	*	7
3	19	20	12	13	29	14	10
3.5	19	20	12	13	29	14	10
4	16	16	27	d	d	d	10
5	19	d	15	18	d	d	13
6	28	d	15	18	d	d	10
7	28	d	15	18	d	d	10
7.3	31	d	19	18	d	d	10
7.4	d	d	15	18	d	d	10
7.5	d	d	15	18	d	d	13
8	d	d	15	18	d	d	13
10	d	d	15	18	d	d	13
12	d	20	30	22	d	41	18
13	d	23	23	25	d	d	d
15	d	d	d	d	d	d	d
20	d	d	d	d	d	d	d

$f(x) = 0.5 * (e^{x} + e^{-x} - 4)$

	NEWTON	OSTROVSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_o	T	T	T	T	T	T	T
0.1	56	*	*	*	*	*	26
-0.1	56	*	*	*	*	*	26
0.2	36	*	90	*	*	*	19
-0.2	36	*	90	*	*	*	19
0.5	25	**	15	*	30	*	17
-0.5	25	**	15	*	30	*	17
1	16	11	10	12	*	15	10
-1	16	11	10	12	*	15	10
1.31	9	7	5	6	30	8	5
-1.31	9	7	5	6	30	8	5
1.5	13	7	10	12	30	15	10
-1.5	13	7	10	12	30	15	10
2	18	11	10	12	37	15	10
-2	18	11	10	12	37	15	10
3	27	14	13	18	*	*	15
-3	27	14	13	18	*	*	15
4	30	18	13	18	*	*	19
-4	30	18	13	18	*	*	19
10	58	23	17	*	*	*	26
-10	58	23	17	*	*	*	26
20	83	30	25	*	*	*	44
-20	83	30	25	*	*	*	44
25	126	45	31	*	*	*	49
-25	126	45	31	*	*	*	49
30	**	54	40	*	*	*	64
-30	**	54	40	*	*	*	64
50	**	**	65	*	*	*	*
-50	**	**	65	*	*	*	*
100	*	*	*	*	*	*	*
-100	*	*	*	*	*	*	*

TABELA 6

$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$

	NEWTON	OSTROVSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_0	T	T	T	T	T	T	T
$-\pi$	15	13	10	11	*	*	10
$-\frac{\pi}{2}-0.1$	13	13	14	21	*	14	*
$-\frac{\pi}{2}+0.1$	13	13	14	17	*	14	19
$-\frac{\pi}{3}$	15	13	10	17	*	7	10
$-\frac{\pi}{6}$	13	9	10	11	27	7	10
0	15	13	10	11	*	14	10
$\frac{\pi}{3}$	29	21	30	21	*	*	15
$\frac{\pi}{2}+0.1$	27	21	14	17	*	*	29
π	15	13	10	11	*	*	10
$\pi+0.5$	13	13	10	11	*	7	10
3.8	13	9	10	11	*	7	10
4	13	9	10	11	*	7	10
$\frac{3\pi}{2}+0.1$	15	13	14	17	*	14	19
5	13	13	14	21	*	14	14
2π	15	13	10	11	*	*	10

TABELA 7

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

	NEWTON	OSTROVSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_o	T	T	T	T	T	T	T
0.1	5	7	6	7	d	28	6
-0.1	5	7	6	7	d	27	6
0.2	7	7	6	7	d	23	9
-0.2	7	7	6	7	d	22	9
0.5	10	11	6	9	d	13	12
-0.5	10	11	6	9	d	12	13
0.9	d	d	15	12	d	d	d
-0.9	d	d	15	12	d	d	d
1.1	d	d	20	18	d	d	d
$\sqrt{2}$	d	d	45	20	d	6	9
$\sqrt{3}$	d	d	23	20	d	d	*
-1.1	d	d	20	18	d	d	d
$-\sqrt{2}$	d	d	44	20	d	6	10
$-\sqrt{3}$	d	d	23	20	d	d	*
2	d	d	23	20	d	d	d
-2	d	d	23	20	d	d	d
100	d	d	50	36	d	d	d
-100	d	d	50	36	d	d	d
500	d	d	32	28	d	d	d
-500	d	d	32	28	d	d	d

TABELA 8

$f(x) = x^4 - x^3$

	NEWTON	OSTROVSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_o	T	T	T	T	T	T	T
0.09	16	13	10	12	10	6	31
-0.09	16	13	10	13	10	6	31
0.1	16	11	10	12	10	7	31
-0.1	16	14	10	13	10	13	31
0.2	24	19	10	12	10	13	42
-0.2	24	19	10	13	10	13	45
0.5	27	23	14	16	15	13	52
-0.5	27	21	14	16	15	13	52
0.6	34	25	14	16	15	13	51
-0.6	34	25	14	16	15	13	48
0.7	42	25	10	12	15	13	22
-0.7	42	25	18	13	15	13	25
0.76	41	**	50	*	*	*	*
-0.76	41	**	50	*	*	*	*
0.78	32	61	33	*	*	18	*
0.8	18	46	23	10	*	11	60
0.9	11	11	7	10	15	*	10
1.1	16	11	7	10	15	*	10
1.2	16	13	7	12	15	*	*
1.5	16	11	10	12	15	13	*
1.8	16	14	10	12	*	13	*
2	18	17	10	12	*	22	*
-2	22	3-	18	21	*	25	*
8	31	25	17	*	*	*	*
-8	33	31	21	*	*	*	*
20	41	29	20	*	*	*	*
-20	72	43	27	*	*	*	*
40	48	35	23	*	*	*	*
-40	61	35	30	*	*	*	*
100	52	39	27	*	*	*	*
-100	56	47	33	*	*	*	*
1000	74	55	36	*	*	*	*
-1000	*	62	37	*	*	*	*
2000	*	60	36	*	*	*	*
-2000	*	69	37	*	*	*	*
10000	*	70	42	*	*	*	*
-10000	*	75	44	*	*	*	*

TABELA 9

$f(x) = \sqrt[3]{4x^2 - x^3}$

	NEWTON	OSTROVSKY	KING	NETA 6	NETA 14	NETA 16	JARRATT
x_o	T	T	T	T	T	T	T
-0.5	d	d	24	*	*	*	lp
-0.4	d	d	23	*	*	*	lp
-0.3	d	d	23	*	*	*	lp
-0.1	**	**	21	*	*	*	d
0.1	**	**	20	*	*	d	d
0.3	**	**	22	d	*	*	lp
0.4	**	lp	22	d	*	*	lp
0.5	**	**	24	*	*	*	lp
-1	**	**	20	*	*	*	**
1	**	d	**	*	*	*	**
1.1	**	lp	21	*	*	*	**
1.25	**	**	21	*	*	*	**
1.5	**	**	21	*	*	*	**
-1.1	**	d	22	*	*	*	**
-1.25	**	**	22	*	*	*	**
-1.5	**	**	22	*	*	*	**
2	lp	d	28	*	*	*	**
-2	**	lp	20	*	*	*	**
3.9	lp	**	21	*	*	d	lp
-3.9	lp	*	28	*	*	*	*
7	*	*	24	*	*	*	*
10	*	*	28	*	*	*	*

TABELA 10

MÉTODO	IE $f(x) = x^4$	IE $f(x) = 4x - \cos x - 1$	IE $f(x) = \frac{1-x^2}{2x^2+2}$	IE $f(x) = x^5 - 1$	IE $f(x) = \ln\|x\|$
NEWTON	0.04077	0.01155	0.03300	0.03300	0.01332
OSTROVSKY	0.03788	0.01144	0.03138	0.03138	0.00998
KING	0.03746	0.01320	0.03150	0.03806	0.01260
NETA 6	0.03143	0.01210	0.02756	0.02986	0.01194
NETA 14	0.01466	0.00879	0.01199	0.01388	0.00824
NETA 16	0.01400	0.00894	0.00972	0.01301	0.00792
JARRATT	0.03300	0.01295	0.03152	0.03799	0.01899

MÉTODO	IE $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 4)$	IE $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$	IE $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$	IE $f(x) = x^4 - x^3$	IE $f(x) = \sqrt[3]{4x^2 - x^3}$
NEWTON	0.00568	0.00568	0.00796	0.03465	0.00407
OSTROVSKY	0.00597	0.00600	0.01098	0.03662	0.00435
KING	0.00729	0.00729	0.00732	0.03465	0.00554
NETA 6	0.00716	0.00716	0.01378	0.02559	0.00497
NETA 14	0.00599	0.00586	0.01055	0.01319	0.00495
NETA 16	0.00616	0.00602	0.01026	0.01352	0.00486
JARRATT	0.00703	0.00703	0.00727	0.02949	0.00349

ÍNDICES DE EFICIÊNCIA

CONCLUSÃO

No que se refere ao tempo de convergência, para a maioria das funções utilizadas os melhores resultados foram obtidos com o método de King; e mesmo nos casos em que isso não ocorreu, esse método ainda deu resultados satisfatórios.

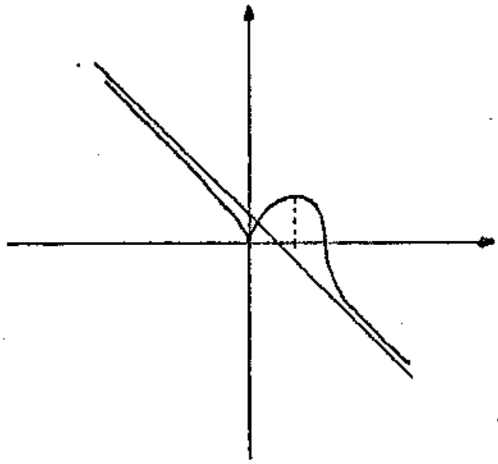
O método de Jarratt também se mostrou adequado apresentando geralmente resultados superiores aos do método de Newton.

Os métodos de Neta não deram resultados satisfatórios, o melhor foi o de ordem 6 e o pior o de ordem 14.

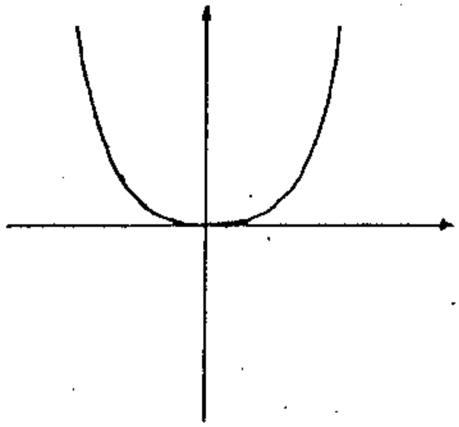
Também quanto ao raio de convergência, os melhores resultados foram obtidos com o método de King, mas os conseguidos com o de Jarratt ficaram próximos daqueles.

Os métodos de Neta de ordem 14 e 16 são muito pouco robustos, apresentando um número excessivo de casos de "overflow".

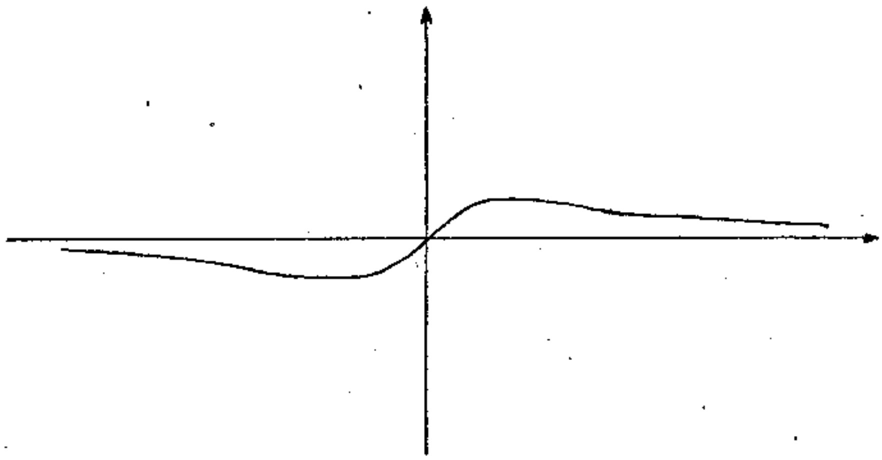
Uma vez determinados os índices de eficiência e comparados com os resultados obtidos computacionalmente, eles não parecem um bom indicador da eficiência de um método, pois alguns métodos apresentam um índice de eficiência razoável, mas computacionalmente apresentam um número muito grande de "overflow"; ainda, com um método pode-se necessitar um tempo pequeno para realizar uma iteração, mas um número grande de iterações para obter convergência, e isso não pode ser detectado "a priori" pelo índice de eficiência.



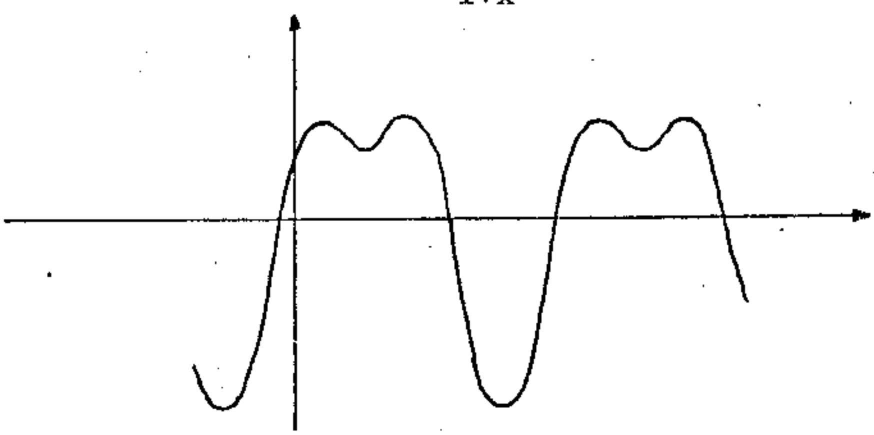
$f(x) = \sqrt[3]{4x^2-x^3}$



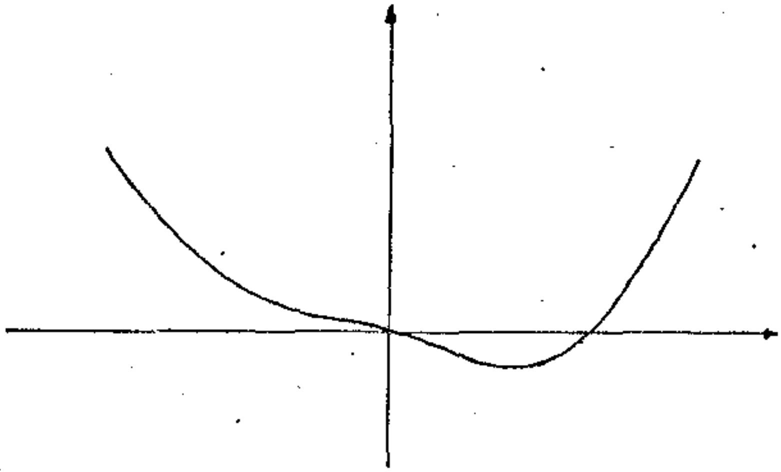
$f(x) = x^4$



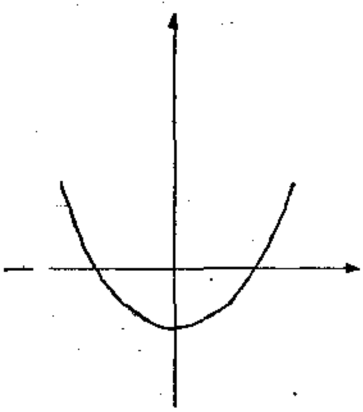
$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$



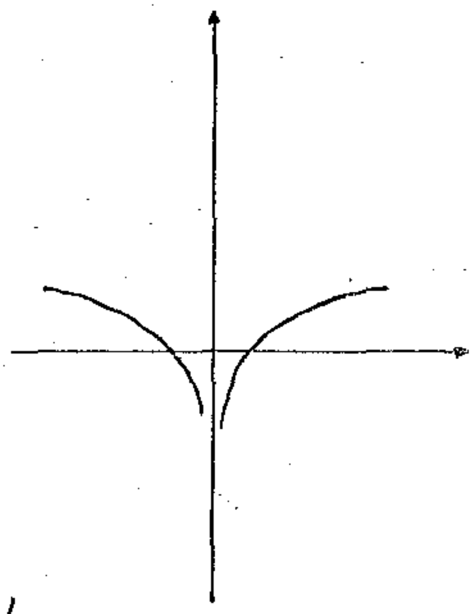
$f(x) = 2 \text{ sen } x + \cos 2x$



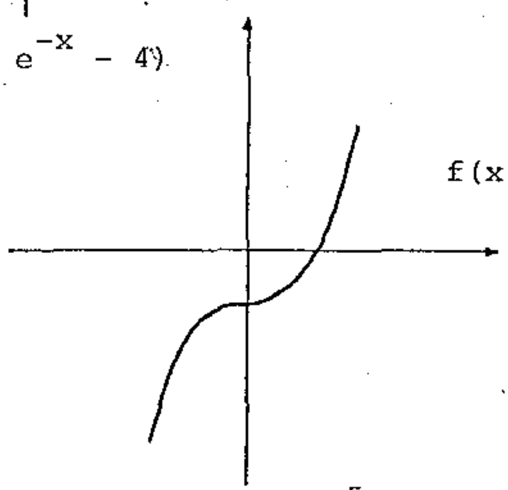
$f(x) = x^4 - x^3$



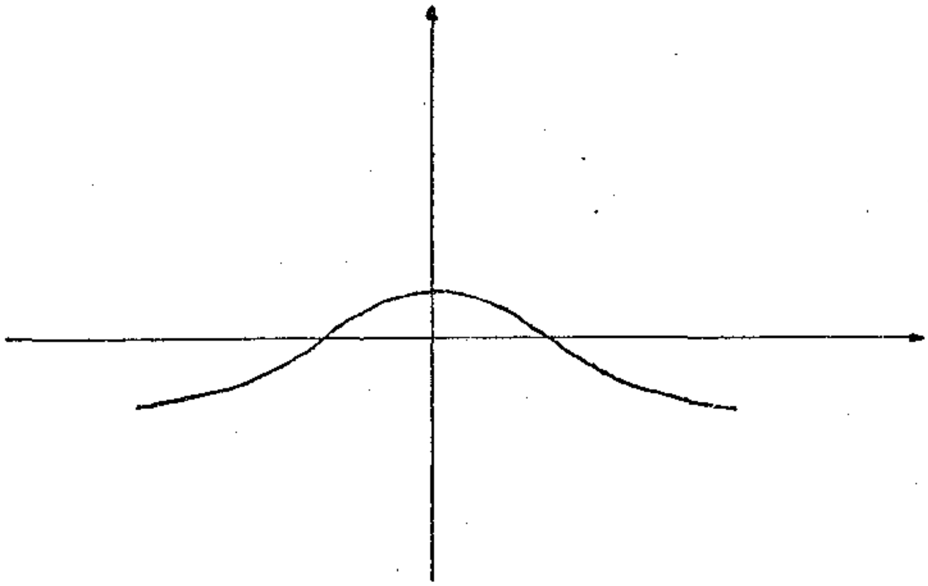
$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 4\right)$



$f(x) = \ell n|x|$



$f(x) = x^5 - 1$



$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2x^2 + 2}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] JARRATT, P.: Some efficient fourth-order multipoint methods for solving equations. Bit 9, (1969), pg. 119-124.

[2] KING, R.F.: A family of fourth-order for nonlinear equations. SIAM J. Num. Anal., volume 10, nº 5, October 1973, pg. 876-879.

[3] KUNZ, K.S.: Numerical Analysis. McGraw-Hill, 1957.

[4] NETA, B.: A sixty-order family of methods for nonlinear equations. Intern. J. Computer Math., 1979, Section B, volume 7, pg. 157-161.

[5] NETA, B.: On a family of multipoint methods for nonlinear equations. Intern. J. Computer Math., 1981, volume 9, pg. 353-361.

[6] OSTROVSKY, A.: Solution of equations and systems of equations. Academic Press, New York, 1966.

[7] RALSTON, A.: A first course in Numerical Analysis. New York, McGraw-Hill, 1965.

[8] TRAUB, J.F.: Iterative methods for the solutions of equations. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.