

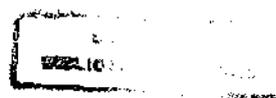
ASPECTOS GEOMÉTRICOS E TOPOLÓGICOS DA QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE CAMPO

Alex Itiro Shimabukuro

Prof. Dr. Márcio Antônio de Faria
Rosa
ORIENTADOR

IMECC-UNICAMP

Novembro de 1998



944.1.01.1998

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.	
T.	37203
F.	229/99
P.	R\$ 11,00
DATA	07/04/99
N.º CPO	

CM-00121872-5

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Shimabukuro, Alex Itiro

Sh62a Aspectos geométricos e topológicos da quantização de teorias de campo / Alex Itiro Shimabukuro -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Márcio Antônio de Faria Rosa

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos quanta. 2. Espaços fibrados (Matemática). 3. Topologia diferencial. 4. Teoria do nó. I. Rosa, Márcio Antônio de Faria. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

ASPECTOS GEOMÉTRICOS E TOPOLÓGICOS DA QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE CAMPO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Alex Itiro Shimabukuro e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de novembro de 1998

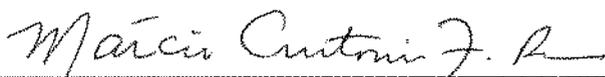


Prof. Dr. Márcio Antônio de Faria
Rosa
ORIENTADOR

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de DOUTOR em Matemática Aplicada.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 03 de novembro de 1998

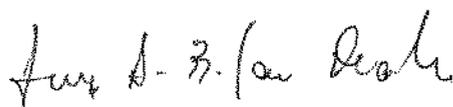
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MÁRCIO ANTONIO DE FÁRIA ROSA



Prof (a). Dr (a). ALBERTO VAZQUEZ SAA



Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof (a). Dr (a). SIDDHARTHA SEN



Prof (a). Dr (a). LUIZ AGOSTINHO FERREIRA

A Mário Schemberg,
(*in memoriam*).

A meus pais Kanitiro e Tiekó,
com todo meu amor!!!!

Num certo momento difícil por que passei durante este doutoramento, uma grande pessoa (e elas sempre aparecem...) falou-me mais ou menos assim: "... o que o estado espera de você não é uma tese genial..." De fato, seja o que for esta tese, encerra-se aqui muito mais do que uma gama imensa de teoremas, construções, etc... Talvez este ponto em que para nós culmina todo um período, venha a ser apenas mais um volume a engordar a biblioteca. Entretanto esta magnífica experiência, todos os enfrentamentos, o inquestionável amadurecimento em várias direções, isto tudo ancorará meus vários passos daqui ao por vir.

Neste sentido, o primeiro agradecimento (e anterior a tudo, até a esta tese) é para este grande povo brasileiro que, via os órgãos de fomento como a CAPES e o CNPq (dos quais fui bolsista), concederam-me a oportunidade de viver este processo e realizar este trabalho. Cabe a mim retornar a sociedade todo investimento feito. Pois, que este volume seja apenas um princípio.

Neste período, várias pessoas compartilharam os diversos momentos. Difícil seria mencionar todos e fazer jus ao vivenciado.

Meus velhos companheiros de todos os momentos, Er e Gi, Kiko, Ju, Júnior, Queta,... (e temos ainda muito chão!!!); os UNICAMPs: do DRCC, Biral (como pode um ser desse?!), Helião, Casca, Álvaro, Paulão, Mara, e turma..., dos vários cantos: Juan (alumbra-te hombre!!), Mazza (e os 88's), Soraia (muita força), Suzana, Silllll..., os amigos de 244: Rogérinho (parabéns!!), Ricardo, Terra (ainda temos muito a falar meu chapa), Adilson,..., companheiros cotidianos Kênia, Émerson e Rê (cujas palavras de ouro, e a preciosa presença, ainda que ausente, presente em silêncio-latente, apoiaram-me muito), os novos amigos de batalha: Wálter (este já entrou pra arrebentar), Rod (muita calma garoto), Marisa, Mitie, Ari, Eduardo, Ebenézer, Profa. Karina (muita força rapaziada!!!). Enfim um gigante-beijo a todos!!!!

Vários são os professores que, cada um a sua maneira, marcaram-me a passagem: o Grande Mestre Professor Caticha, aos eternos mestres Paulo Freire e Florestan Fernandes (cuja mensagem há de perpetuar), a Profa. Vera (mais uma vez na luta juntos, professora), Gilli e sua eterna disponibilidade no ensinar, professor Torriani (Maths. Rev.), Nathan e Luis do IFT, sempre receptivos, Gustavo (que me encontro em débito) que me apresentou ao grupo das tranças e ao Prof. Sen, os novos batalhadores da Física-Matemática, Alberto e Jaime (que já de princípio imprimem muita seriedade), o Prof. Waldyr e Escobar, sempre exemplares na determinação e obstinação no trabalhar, Profs. San Martín, Caio, Cabrera, Sacha, portas sempre abertas para que o conhecimento espalhe... Muito Obrigadíssimo!!!!

Participação muito especial teve as várias secretarias que conseguiram evitar e corrigir as imensas asneiras que eu insistia em fazer: o pessoal da pós principalmente ao anjo-Cidinha, o povo da pró-reitoria e do CNPq, que proporcionaram-me a ida e a volta de viagem, as meninas do Trinity College.... Estes são milagres !! Beijão!!!

Falando em viagem, tantas são as pessoas gigantes neste mundão: thanx-million to all common-room guys (Giovanna, Fabian, Alan, Bea, Rossana, Giovanni, Emil,...), viva el comandante-Herrera e sus mil-companeros-de-mil-cantos (Evita, Vasiliki, Olga,...), Kakuse-Mladen e Katarina olhos-luz (messetina, messetina yo-yo!!). Um agradecimento especial a duas pessoas: meu grande irmão Alfre, a quem devo muito desta tese, sua alegria e paixão que transbordam de si, e Steph (the blue-skeyes) céu-e-mar em seus olhos !! Muito amor a vocês!!

Muito obrigado a AMIC, por fazer-me voltar a cantar "canções amigas", a todos os irmãos queridos da "casinha", sempre companheiros, flores "... com esta estranha mania de ter fé na vida..." deste imenso jardim.

Um agradecimento muito especial aos meus familiares, principalmente a minhas irmãs Kátia e Mônica, tão diversas, cada uma com uma forma diferente de amar, mais ainda assim, tão intenso o amor. Nada melhor do que apre(e)nder a diversidade em casa. E ainda temos muito.....

Agora, gratidão especialíssima aos meus orientadores: Primeiro o Prof. Sidhartha Sen, que me recebeu, apresentou-me Chern-Simons, e além de me orientar, demonstrou uma grande dedicação e respeito pelas gerações vindouras, fora a contagiante paixão pelo trabalho. E o Marcião. Creio que ele não tem idéia de sua importância na minha formação. A magia em detalhes, a grandiosidade nas generalidades do conhecimento não-mesquinho (parafraseando Jay Gould), o apaixonante exercício de ver estas magníficas formas na natureza. Sem mencionar seu grande investimento em ENSINAR, sem esperar glórias e retornos, sempre com muita seriedade e magia. Trabalhar com o Marcião foi uma oportunidade ímpar que espero que outros venham a ter (Vida longa ao ensino público, gratuito e de qualidade !!!!).

Por fim, a Belém - Casa do Pão IX, que com sua maravilhosa equipe, ancorada pela irmã Eliana, espalha grande Luz aos quatro cantos, e ao Pai, pela divina criação, por ter nos dado "olhos" para vislumbrá-la (e o que é esta tese se não esta tentativa), pela dádiva de estarmos neste navegar em rio-Vida, com todas estas pessoas maravilhosas, circundado em tanta beleza, eterno aprender.

Que Deus abençoe a todos!!!

"...O mar e o vento formam um composto de forças. O navio é um composto de máquinas. As forças são máquinas infinitas, as máquinas são forças limitadas. Entre os dois organismos, um inesgotável, outro inteligente, trava-se o combate que se chama navegação.

Uma vontade no mecanismo faz contrapeso ao infinito. Também o infinito encerra um mecanismo. Os elementos sabem o que fazem e para onde vão. Não há força cega. Cabe ao homem espreitar as forças e descobrir-lhes o itinerário..."

(Victor Hugo, "Os Trabalhadores do Mar", tradução de Machado de Assis)

Índice

1 - PRÉ-QUANTIZAÇÃO E QUANTIZAÇÃO DE SISTEMAS CLÁSSICOS

Introdução	1
Sistemas Clássicos	3
Pré-Quantização Geométrica	8
Quantização Geométrica	14

2- APECTOS SOBRE A QUANTIZAÇÃO DE SISTEMAS DE ESTADOS COERENTES.

Sistemas de estados Coerentes	20
Construção Algébrica	27
Construção Geométrica	33

3 – TEORIA DE CHERN-SIMONS

Teoria de Calibre de Chern-Simons	43
Construção Algébrica	55
O Teorema de Índice, Anomalis e Polarização do Vácuo	60

4 – QUANTIZAÇÃO E GRUPOS QUÂNTICOS

Estados Coerentes e Grupos Quânticos	69
Incorporação dos Nós na Teoria de Chern-Simons	73

APÊNDICE

A - O Grupo de Holonomia	82
B – Divisores e Fibrados Lineares	83

REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA

88

Capítulo 1

PRÉ-QUANTIZAÇÃO E QUANTIZAÇÃO DE SISTEMAS

INTRODUÇÃO

A discussão sobre a quantização (primeira ou segunda) de sistemas físicos (clássicos ou primeiro-quantizados) coloca-nos dois questionamentos que gostaríamos de tratar. O primeiro concerne a codificação, o segundo a cognição.

Primeiramente gostaríamos de estabelecer uma linguagem e axiomatização na qual iremos nos basear para as discussões posteriores. Estas serão acerca da adequação ou não deste material básico na formalização e conseqüente intelecção de alguns sistemas físicos.

Portanto, o estudo consistirá de dois movimentos: um onde tentamos, a partir de princípios e “insights” básicos, extrair e codificar as informações sobre o universo quântico, e a seguir, retornar estes códigos, agora enquanto procedimentos, para o mundo físico (observável e/ou especulativo) visando não só por a prova, mas acima de tudo, termos um meio de refletir sobre alguns aspectos que concernem o “quanta”.

A pré-quantização ou a antiga teoria quântica (quantização de Bohr-Sommerfeld) introduz, na discussão da discretização dos níveis energéticos a variável de ação $J = \oint p \cdot dq$, a ser quantizada, onde p é o momento conjugado à coordenada canônica q . A integral fechada, chamada integral de fase, é tomada num período da partícula “quase-clássica” durante seu movimento (note que falamos ainda em movimento da partícula e portanto ainda não tratamos de uma teoria ondulatória).

A quantização da ação $\oint p \cdot dq = 2\pi\hbar(n + \frac{1}{2})$, leva-nos à quantização das órbitas ou dos níveis energéticos (fixamos a energia mais baixa como sendo $\pi\hbar$).

Por exemplo, um elétron atômico ligado, sendo a energia total

$$E = \frac{mv^2}{r} - \frac{Ze^2}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \quad (1.1)$$

e resolvendo para o momento radial p_r , temos:

$$J_r = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2mE + \frac{Ze^2}{r} - \frac{p_\phi^2}{r}} dr, \quad (1.2)$$

onde os limites de integração são respectivamente o raio mínimo e máximo (portanto, quando $p_r = m \dot{r} = 0$, decorre a noção de órbita fechada, neste caso).

Obtendo $J_r = -2\pi p_\phi + 2\pi Ze^2 \sqrt{\frac{m}{-2E}}$, e isolando para energia E , temos:

$$E = -\frac{m (Ze^2)^2}{2 \left(\frac{J_r}{2\pi} + p_\phi\right)^2} = -\frac{m (2\pi)^2 (Ze^2)^2}{2 (J_r + J_\phi)^2}, \quad (1.3)$$

onde $J_\phi = 2\pi p_\phi$.

Aplicando a regra de quantização $J_\phi = lh$ e $J_r = sh$, sendo l e s inteiros positivos (na verdade $J = s\hbar + k$, onde k é uma constante. Escolheu-se $k = 0$ a título ilustrativo (ver Bohn, etc.)), obtemos para a energia

$$E = -\frac{m (Ze^2)^2}{2 \hbar^2} \frac{1}{(l+s)^2} = -\frac{Rch}{n^2} \quad (1.4)$$

onde $n = l + s$ é o número quântico principal.

De forma geral, se escrevermos a ação $J = \int_a^1 p \dot{q} dt$, obtemos para pequenas variações $\delta J = \int_0^1 (\dot{q} \delta p - p \delta \dot{q}) dt + 1p(\dot{q} \delta t) + \delta q 1 \Big|_0^1$. Como para o período (ou, órbita estacionária) o último termo se anula, e, considerando $E(q, p)$ a energia total de forma que $-\frac{\partial E}{\partial q} = \frac{dp}{dt}$ e $\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{dq}{dt}$, podemos relacionar a variação da ação com a variação energética na forma $\delta I = \int_0^1 \delta E dt$.

Segue obviamente que se o sistema for tal que as órbitas são periódicas, independente de suas condições iniciais, neste caso a variação energética é constante e $\delta E = w\delta I$. Daí que, quantizando a ação, quantizamos os níveis energéticos e vice-versa.

Este método de quantização aplica-se para uma miríade de sistemas. Por hora, não entraremos no mérito de sua aplicabilidade ou não. Somente ressaltamos que suas imprecisões e ambigüidades são (parcialmente) corrigidas com a teoria ondulatória, ou quantização (propriamente dita), em contrapartida a pré-quantização.

Temos insistido em enfatizar a variável de ação na quantização energética, pois esta será fundamental no decorrer do trabalho. À parte a discussão sobre os níveis energéticos discretos, lembremos que a integral $\oint p dq$ é a área contida numa trajetória fechada da partícula, no espaço de fase clássico. Com a quantização, fixamos uma área mínima (a célula de Planck) de valor $2\pi\hbar$, correspondente à cada estado quântico (estacionário). Ainda, expressando tal área por $\Delta p \Delta x$, a quantização nos fornece uma relação de incerteza mínima (para $n = 0$), da ordem da constante de Planck.

Se por um lado temos expresso um princípio de incerteza (sendo Δp e Δx a acurácia nas medidas), por outro, temos um ponto de vista geométrico, que será fundamental no decorrer de nossa análise, a (pré) quantização geométrica.

A pré-quantização geométrica (que estudaremos no que segue) estabelece também um vínculo formal entre estes dois fatos (a incerteza na media e a célula mínima do espaço de fase). Necessitamos, no entanto, dos elementos da teoria matricial.

A transição da quantização de Bohr para a teoria matricial introduziu-nos um algoritmo algébrico de quantização, onde os observáveis clássicos seriam substituídos por operadores hermitianos sobre um espaço de Hilbert, bem como as trajetórias das partículas clássicas no espaço de fase, dariam lugar a funções diferenciáveis sobre o espaço de fase (vetores do espaço de Hilbert).

Precisamos então estabelecer as condições para tal transição lexicográfica.

Dirac, que concomitante a Heisenberg-Born-Jordan, houvera estabelecido os princípios da teoria matricial da Mecânica Quântica (no seu ver, teoria algébrica), enfatizou a quantização enquanto transição da álgebra comutativa dos observáveis clássicos para uma nova álgebra, a variáveis não comutativas. Nesta, o parêntese de Poisson dos observáveis clássicos corresponderiam ao comutador dos observáveis quânticos, e as transformações canônicas (com respeito às variáveis canônicas clássicas), corresponderiam a transformações unitárias, geradas pelos observáveis quânticos. Expressamos da seguinte forma:

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ um observável clássico, sendo M o espaço de fase, e seja \hat{f} o correspondente observável quântico, que age sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Então:

(Q1) o mapa $f \mapsto \hat{f}$ é linear

(Q2) se f for constante, \hat{f} age multiplicando (como elemento do corpo)

(Q3) se $\{f_1, f_2\} = f_3$, então $[\hat{f}_1, \hat{f}_2] = -i\hbar\hat{f}_3$,

(1.5)

sendo $[\cdot, \cdot]$ o comutador quântico.

Existem vários métodos de quantização, por exemplo de Weyl [Tak], Berezin [Ber].

Iremos, como já fora antecipado, estudar o método de quantização geométrico.

E baseados neste método, iremos discutir dum ponto de vista geométrico, a quantização de Sistemas de Estado Coerentes e a teoria de Chern-Simons, discussão estas que servirão de cenário para na verdade falarmos de segunda quantização geométrica, grupos quânticos e outros tópicos.

SISTEMAS CLÁSSICOS

VARIEDADES SIMPLÉTICAS

Antes de introduzirmos o formalismo quântico geométrico, precisamos descrever geometricamente um sistema clássico.

Um sistema mecânico clássico é descrito por uma variedade simplética (M, ω) , ie, uma variedade diferencial M (o espaço de fase) e uma 2-forma fechada não-degenerada ω definida em toda variedade M , ie,

$$(a) d\omega = 0 \quad (1.1)$$

$$(b) \forall X \neq 0, \exists Y \text{ tal que } \omega(X, Y) \neq 0, X, Y \in T_x M \text{ e em todo } x \in M.$$

A descrição de sistemas clássicos em termos de variedades simpléticas é encontrada em livros como [Arn]. Trataremos aqui de dois exemplos que nos serão úteis.

Ex.1- Espaços Vetoriais Simpléticos No caso em que M é um espaço vetorial $2n$ -dimensional, $M = \mathbb{R}^{2n}$, sendo $(q_i)_{i=1, \dots, n}$ n -coordenadas e $(p_i)_{i=1, \dots, n}$ n -momentos, temos que $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. É imediato ver que $d\omega = 0$ e que ω é não degenerada.

Note que se formarmos em cada ponto $x \in M$ os campos $\{\partial_{p_i} = X^i, \partial_{q_j} = Y^j\}_{i,j=1, \dots, n}$ como base de $T_x M$, ω é tal que, $\omega(X^i, X^j) = \omega(Y^i, Y^j) = 0, \forall i, j$; e $\omega(X^i, Y^i) = \delta_j^i$. Tal sistema de referência é chamado referencial simplético. Transformações lineares entre referências simpléticas formam o grupo simplético. Tal grupo formado por $\rho : V_x \rightarrow V_x (V_x = T_x M)$ tal que $\omega(\rho X, \rho Y) = \omega(X, Y)$.

Uma noção importante a ser introduzida é a de complemento simplético. Seja $F_x \subset V_x = T_x M$, o complemento simplético de F_x , denotado por F_x^\perp , é dado por: $F_x^\perp = \{X \in T_x M / \omega(X, Y) = 0, \forall Y \in F_x\}$.

Um subespaço $F_x \subset V_x$ é dito lagrangeano se $F_x^\perp = F_x$. Torna-se óbvio que subespaços lagrangeanos são formados (a menos de transformação simplética) por apenas vetores coordenados (∂_{q_i}) ou vetores momentos (∂_{p_i}).

Ex.2- O teorema de Darboux: Outro exemplo importante é quando $M = T^*Q$, fibrado cotangente sobre uma variedade real n -dimensional Q .

Seja $\{U_i\}$ uma cobertura de Q , tomamos como coordenadas locais de M (em T_q^*Q), o conjunto $\{q^i, p_j = dq^j\}_{i,j=1, \dots, n}$ sendo $\{q^i\}$ as coordenadas em U_i e dq^i a base de co-vetores sobre U_i . (duais à ∂_{q^i}).

A estrutura simplética é dada em termos das coordenadas locais por $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$.

Com efeito se $\xi \in T(T_q^*Q)_p$, ie ξ é um vetor tangente no ponto $p \in T^*Q_q$, temos que a derivada $\pi_* : T(T^*Q) \rightarrow TQ$ da projeção natural $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ leva o vetor ξ para $\pi_* \xi$ tangente à Q no ponto q . Definimos uma 1-forma (canônica) θ em T^*Q por $\theta(\xi) = p(\pi_* \xi)$ ($p \in T^*Q$).

Em coordenadas locais $\theta = \sum_i p_i dq^i$. Esta é notoriamente não -degenerada e, por construção, fechada.

A construção acima é intrínseca, ie, independe dos sistema de coordenadas em Q . θ é chamada 1-forma canônica.

Tipicamente, Q é o espaço de configuração de sistemas clássicos, e T^*Q o espaço de fase.

A importância de fibrado cotangente é fundamentada pelo teorema de Darboux que assevera que todas as variedades simpléticas são localmente descritas como um fibrado cotangente, ie, se (M, ω) for uma variedade simplética $2n$ -dimensional, para qualquer $m \in M$ existe um aberto U (contendo m) e um sistema de coordenadas $\{p_i, q^i\}$ em tal que $\omega = dp_i \wedge dq^i$ em U .

A denominação de tal teorema pode ser vista, por exemplo em [Woo].

Decorre que localmente podemos achar uma 1-forma θ tal que $\omega = d\theta$. Nem sempre existe tal 1-forma θ definida globalmente.

Por exemplo em variedades simpléticas sem bordo, não pode existir tal 1-forma global. Com efeito, se $\omega = d\theta$ globalmente, então,

$$\int_M \omega^n = \int_M \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n\text{-vezes}} = \int_M d(\theta \wedge \omega^{n-1}) = 0. \quad (1.7)$$

onde ω^n é o elemento de volume.

Mas $\int_M \omega^n$ não pode ser identicamente nulo; o que nos leva à contradição.

As coordenadas $\{p_i, q^i\}$ de M são chamadas canônicas. Estas não são únicas. De fato, o grupo simplético leva um sistema de coordenadas canônicas em outro.

Associado aos fibrados cotangentes existe outra noção importante, que são as foliações verticais.

Seja $M = T^*Q$ e tomemos o conjunto das hipersuperfícies de q^i 's constantes. O espaço tangente a tais hipersuperfícies são subespaços do espaço tangente TM .

Tal construção define uma distribuição, que é de forma genérica um sub-espaço de fibrado tangente.

No caso, a distribuição é uma foliação, a foliação vertical, por termos subvariedades em M que geram a distribuição.

Dizemos então que o fibrado cotangente é foliado por espaço cotangentes individuais (as superfícies de q constante).

Posteriormente veremos com mais acurácia as definições de foliações, distribuições e polarizações.

CAMPOS VETORIAIS HAMILTONIANOS

Dado que consideramos (M, ω) espaço de sistemas clássicos, $C^\infty(M)$ é o conjunto dos observáveis clássicos. Quando M é o fibrado cotangente dum espaço de configuração, $f \in C^\infty(M)$ é simplesmente uma função da posição e do momento. Os observáveis clássicos, além de serem as quantidades mensuráveis que adquirem valores para um dado estado do sistema, são também geradores de famílias uniparamétricas de transformações canônicas. Por exemplo, a função Hamiltoniana gera a evolução temporal, os componentes do momento linear e angular, as translações e rotações.

A ligação geométrica entre estes dois aspectos é construído como segue: Seja $f \in C^\infty(M)$ e seja X_f um campo vetorial dado por:

$$\omega(X_f)(Y) + df(Y) = 0 \quad (1.8)$$

X_f preserva ω no sentido que:

$$L_{X_f}\omega(Y, Z) = d\omega(X_f)(Y, Z) + d(\omega(X_f))(Y, Z) = -d(df)(Y, Z) = 0$$

onde L_{X_f} denota a derivada de Lie associada ao campo X_f .

Segue que o fluxo ρ_t de X_f é uma família uniparamétrica de difeomorfismos canônicos locais de M (X_f gera um difeomorfismo global somente no caso em que for completo).

Chamamos ρ_t e X_f o fluxo canônico e o campo vetorial Hamiltoniano gerado por f .

Em coordenadas locais temos:

$$\begin{aligned} \omega &= dp^i \wedge dq_i \\ df &= \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_j} dp_j \\ X_f &= \frac{\partial f}{\partial p_i} \partial p_i + \frac{\partial f}{\partial q_j} \partial q_j, \end{aligned} \quad (1.9)$$

e ρ_t é a solução da equação diferencial

$$q^i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}. \quad (1.10)$$

Por outro lado, se X for um campo vetorial que conserva ω , ie, $L_X\omega = 0$, então $d(\omega(X)) = 0$ (já que $d\omega = 0$), e portanto, pelo menos localmente, existe uma função f tal que $X = X_f$; f sendo determinada por X a menos de uma constante aditiva. Tais campos são chamados campos Hamiltonianos locais. Se, $X = X_f$ estiver definido globalmente para algum $f \in C^\infty(M)$, então f é dito Hamiltoniano. O conjunto dos campos vetoriais Hamiltonianos locais é denotado $V^{LH}(M)$ e $V^H(M)$ o conjunto dos campos vetoriais Hamiltonianos (globais). Obviamente $V^H(M) \subset V^{LH}(M)$.

Proposição: Se X, Y e $Z \in V^{LH}(M)$, então $[X, Y] = X_f$, onde $f = 2\omega(X, Y)$.

Já que $L_{X_f}\omega = 0$ e $d(\omega(Y)) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \omega([X, Y])(Z) &= L_X(\omega(Y))(Z) - (L_X\omega)(Y)(Z) \\ &= (d(\omega(Y))(X))(Z) + (d((\omega(Y))(x)))(Z) \\ &= -df(Z) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Decorre que $V^{LH}(M)$ é uma álgebra de Lie sob os parênteses de Lie e que $V^H(M)$ é um ideal da álgebra.

Exemplo: Os geradores do Grupo Simplético

Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e seja g uma forma quadrática em V . Definimos $f(x) = \frac{1}{2}g(x, x)$. O fluxo canônico associado a f é um subgrupo a um parâmetro de $SP(V, \omega)$. Em coordenadas se

$$f = -C_a^b q^a p_b - D_{ab} q^a q^b + \frac{1}{2} E^{ab} p_a p_b$$

Logo,

$$X_f = C_a^b \partial_{q_b} + C_a^b p_b \partial_{q_b} + E^{ab} p_a \partial_{q_b} + E^{ab} p_a \partial_{q_b} \quad (1.12)$$

$$R: \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C & D \\ E & -C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

A forma quadrática g é relacionada com a matriz R por:

$$g(X, Y) = 2\omega(X, RY).$$

Todas estas definições podem ser generalizadas se extendermos o corpo para os complexos

PARÊNTESES DE POISSON

Os parênteses de Poisson de $f, g \in C^\infty(M)$ é a função $[f, g] \in V_C(M)$ definida por:

$$\{f, g\} = X_f(g)$$

em coordenadas locais temos:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Temos as propriedades:

$$p/ f, g, h \in C^\infty(M)$$

$$a) \{f, g\} = -\{g, f\} \text{ (antisimetria)}$$

$$b) [X_f, X_g] = X_{[f, g]}$$

$$c) \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \text{ (id de Jacobi)}$$

(1.14)

$$X_f(g) = dg(X_f) = -(\omega(X_g))(X_f) = 2\omega(X_f, X_g)$$

Então decorre a anti-simetria do parênteses da antisimetria de ω .

Por inspeção verifica-se também a identidade de Jacobi.

A segunda decorre da propriedade de fechamento dos campos localmente Hamiltonianos com relação ao parênteses de Lie.

Cabe observar que a identidade de Jacobi é de fato equivalente à propriedade de fechamento de ω .

O parênteses de Poisson mune $C^\infty(M)$ de uma estrutura de álgebra de Lie de dimensão infinita (a álgebra dos observáveis clássicos) e $f \rightarrow X_f$ é um homomorfismo de álgebra de Lie de $(C^\infty(M), \{, \})$ em $(V_H(M), [,])$. O núcleo do Homomorfismo é o conjunto das funções constantes, de forma que $(V_H(M), [,])$. O núcleo do homomorfismo é o conjunto das funções constantes, de forma que $V_H(M) \sim C^\infty(M, \mathbf{R})$ (isomorfismo de Álgebra de Lie).

Podemos novamente estender naturalmente as definições para o corpo complexo.

PRÉ-QUANTIZAÇÃO GEOMÉTRICA FIBRADOS LINEARES COMPLEXOS

O que desejamos agora é estabelecer um método matemático para a descrição de quantização. Para quantizarmos um sistema mecânico-clássico, precisamos de uma forma de associarmos grandezas típicas da mecânica clássica, tais como momento, energia, momento angular, posição, etc., a operadores hermitianos sobre as funções de onda.

De forma geral temos grandezas clássicas descritas por funções sobre a variedade simplética (M, ω) , que serão associadas com operadores hermitianos que agem sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Vimos que os "observáveis clássicos" (em contraposição aos observáveis quânticos), geram famílias uniparamétricas de transformações canônicas. A esta transformação canônica sobre a variedade, iremos corresponder uma transformação unitária sobre \mathcal{H} . (Neste sentido, a quantização torna-se similar à teoria de representação em espaços de Hilbert), geradas pelos operadores hermitianos, os tais observáveis quânticos.

Ainda segundo as idéias básicas da quantização, ao parênteses de Poisson sobre as funções, equivalerá o comutador dos observáveis quânticos (sendo um homomorfismo Lie-Algébrico).

Vamos enunciar estes fatos da seguintes forma:

se $f \rightarrow \mathbf{R}$ for o "observável" clássico e \hat{f} o operador hermitiano associado então

- (1) $f \rightarrow \hat{f}$ é linear (sobre \mathbf{R})
- (2) se f é constante, então \hat{f} corresponde ao operador produto ($f \cdot \hat{I} = \hat{f}$)
- (3) o parênteses de Poisson $\{f_1, f_2\}$ é mapeado em $[\hat{f}_1, \hat{f}_2] = -i\hbar \{f_1, f_2\}$

(1.15)

Como já dissemos, as funções de onda são elementos do espaço de Hilbert (raias ou distribuições). Entretanto, conforme o nosso interesse objetivo, ie, conforme

o fenômeno específico ou a medida específica do sistema que desejamos descrever ou fazer, selecionamos um sub-conjunto do espaço de Hilbert, cuja base seja composta por auto-funções de determinados operadores $\left\{ \hat{f}_i \right\}$ (que correspondem às medidas ou fenômenos desejados). De fato, das regras de comutação dos operadores $\left\{ \hat{f}_i \right\}, i \in I$, como em (1.15) acima, podemos saber quais os operadores simultaneamente diagonalizáveis (mensuráveis) e daí escolhermos o conjunto de funções $\{ \Psi_i \}$, auto-funções destes operadores simultaneamente diagonalizáveis, que desejamos encontrar/trabalhar. Este conjunto é descrito geometricamente por seções de polarizações dum fibrado linear complexo sobre M . Desta forma, não nos basta a variedade simplética (M, ω) para descrevermos os fenômenos quânticos. Precisamos desta estrutura geométrica, os fibrados lineares complexos, para descrevermos os operadores $\left\{ \hat{f}_i \right\}$, associado às grandezas do sistema, e às funções de onda $\{ \Psi_i \}$, descrevendo a natureza do sistema.

Um fibrado de linha complexo é o caso particular 1-dimensional de fibrados vetoriais complexos .

Seja M uma variedade diferenciável genérica, e (V, \mathbb{C}) um espaço vetorial n -dimensional. Um fibrado vetorial (B, M, V, π) consiste de uma variedade diferenciável B espaço total, e uma projeção $\pi : B \rightarrow M$, tal que, se $\{U_i\}$ é cobertura de M a imagem do "pull-pack" da projeção de uma aberto U_i é difeomorfo ao produto $U_i \times V$. Isto é localmente, a variedade B se parece com $U_i \times V$. Temos então difeomorfismos $\{ \tau_i, U_i \}$ chamados trivializações locais, $\tau : U_i \times V (= \mathbb{C}^n)$ de forma que, ponto a ponto, ie, para cada $m \in M$, temos $\tau_m : \{m\} \times \mathbb{C}^n \rightarrow V^n = \pi^{-1}(m)$, de forma que V_m , a fibra sobre m , tem estrutura de espaço vetorial.

Observe que, da forma construída acima, o mapa composto $\pi \circ \tau_i : U_i \times \mathbb{C}^n$ é tal que $\pi \circ \tau_i(m, f) = m$.

No caso em que $n = 1$, ie, as fibras são difeomorfas à \mathbb{C} , temos os fibrados de linhas complexos, objetos estes que trataremos a partir de então.

A partir da coleção de difeomorfismos $\{ \tau_i, U_i \}$, construímos as funções de transição $c_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}, c_{ij} = \tau_j^{-1} \tau_i, U_i \cap U_j$,

Tais função $\{ c_{ij} \}$ têm as propriedades:

$$\begin{aligned} c_{ij}c_{ji} &= 1 \text{ sempre que } U_i \cap U_j \neq \phi & 1.16 \\ c_{ij}c_{jk}c_{ki} &= 1 \text{ sempre que } U_i \cap U_j \cap U_k \neq \phi \end{aligned} \tag{1.16}$$

De forma equivalente, a partir de uma cobertura $\{U_i\}$ de M e um conjunto de funções $\{c_{ij}\}$ definidas sobre cada intersecção não vazia, com as propriedades acima é possível construirmos um fibrado de linha L .

Basta considerarmos o espaço total como a união disjunta dos abertos $U_i \times \mathbb{C}$ módulo a relação de equivalência $(m_i, z_i) \sim (m_j, z_j)$ sempre que $(m_i, z_i) \in U_i \times \mathbb{C}$ e $(m_j, z_j) \in U_j \times \mathbb{C}$, $m_i = m_j$ e $z_i = c_{ij}(m_i)z_j$.

Portanto, os tipos de fibrados de linha são definidos pelo anel de funções $\{c_{ij} : U_i \cap U_j\}$ que tomamos. Por exemplo, se M for variedade complexa, tomando-se $\{c_{ij} \in O^*(U_i \cap U_j)\}$ onde $O^*(U_i)$ são as funções holomórfas não-nulas, construímos fibrados de linha holomórficas.

SEÇÕES, CONEXÕES E CURVATURA

Vamos voltar a tratar os fibrados vetoriais B de forma genérica.

Uma seção σ dum fibrado vetorial $\pi : B \rightarrow M$ sobre $U \subset M$ é uma mapa $C^\infty(M)$ $\sigma : U \rightarrow B$ tal que $\sigma(x) \in V_x (\sim \mathbb{C})$.

No caso de fibrados de linha, as seções serão mapas de cada ponto da variedade em \mathbb{C} (essencialmente), ie, $\sigma(x) \in V_x \sim \mathbb{C}_x$.

As seções farão "o papel" das funções de onda sobre a variedade M (que por sua vez descreve o espaço de fase do sistema clássico).

Portanto os operadores $\left\{ \hat{f}_i \right\}$ (descritos em 1.15) deverão ser operadores que agem no espaço das seções.

Operadores diferenciais sobre as seções são obtidos via uma conexão. Uma conexão ∇ num fibrado vetorial complexo $B \xrightarrow{\pi} M$ é uma mapa \mathbb{C} -linear $\nabla : \Lambda^0(B) \rightarrow \Lambda^1(B)$, onde Λ^i é o espaço das i -formas V -valorizadas, satisfazendo a regra de Leibniz:

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma$$

para quaisquer seções $\sigma \in \Lambda^0(B)$ e funções $f \in C^\infty(M)$.

Desta forma, uma conexão é uma maneira de diferenciarmos seções (em primeira ordem).

Se tomarmos um referencial $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ para B sobre $U \subset M$ ($\{e_i\}_x$ é base para cada fibra $V_x = \pi^{-1}(x)$), então dada uma conexão ∇ sobre B , podemos decompor ∇e_i em componentes, a saber:

$$\nabla e_i = \sum \theta_{ij} e_j = \sum \theta_{ij}(x) e_j(x) \tag{1.17}$$

A matriz $\theta = (\theta_{ij})$ de 1-formas é a matriz conexão de ∇ com respeito à $\{e_i\}$.

Uma seção genérica σ pode ser escrita como $\sum \sigma_i e_i$. Desta forma

$$\nabla\sigma = \sum_j (d\sigma_j + \sum_i \sigma_i \theta_{ij})$$

A escolha do referencial $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ e da matriz θ determinam completamente a conexão.

A matriz θ num ponto x_0 qualquer, depende da escolha de referencial numa vizinhança de x_0 (veja como definimos acima a escolha de $\{e_i\}$ sobre U).

Se $e' = \{e'_i\}$ for outro referencial tal que

$$e'_i(z) = \sum g_{ij}(z)e_j(z)$$

então $g_{ij}(z) \in SL_n(\mathbb{C})$ e,

$$\nabla e'_i = \sum dg_{ij}e_j + \sum g_{ik}\theta_{kj}e_j \quad (1.18)$$

tal que,

$$\theta e' = dgg^{-1} + g\theta_{\varepsilon}g^{-1}, (g = (g_{ij})).$$

Interessa-nos os fibrados de linha complexos.

Primeiro, definimos as seções unitárias por $e = \tau(\cdot, 1)$ (para fibrados vetoriais quaisquer $e_i(z) = \tau(z, e_i)$), sendo (U_i, τ_i) as trivializações locais, que são elementos não nulos de $C_B^\infty(M)$.

A conexão, com relação a seção unitária e , escreve-se: (eq(1.17))

$$\nabla e = \theta e$$

Se derivarmos na direção dum campo X definido na base temos:

$$\nabla_X e = \theta(X)e \quad (1.19)$$

E para uma seção (unitária ou não) qualquer $\sigma = \Psi e$, temos,

$$\nabla(\sigma) = \nabla(\Psi e) = d\Psi e + \Psi\theta e = (d + \theta)\Psi e \quad (1.20)$$

Ainda, em relação à uma troca de trivialização $\tau \rightarrow \tau'$, temos outro referencial $e' = \tau'(\cdot, 1)$, tal que $e'(z) = \xi(z)e(z)$ (como em (1.18)), e para o termo da conexão, temos:

$$\theta e' = d\xi(z)\xi(z)^{-1} + \theta e \quad (1.21)$$

onde $\xi(z) \in SL(1, \mathbb{C})$.

Definimos também o levantamento horizontal de uma curva $\gamma \in M$. Este será uma curva γ^* no fibrado B que se projeta em γ , ie, $\pi(\gamma^*) = \gamma$, e, cujos vetores tangentes à curva são horizontais. Denotamos, da mesma forma, por X^* o levantamento horizontal dum campo X tangente à γ .

A conexão pode também ser definida como a separação do espaço tangente TB do fibrado em uma parte vertical (com vetores tangentes à fibra) e uma parte horizontal. Define-se a 1-forma de conexão α de modo que, se Y for vetor horizontal $\alpha(Y) = 0$.

Ambas noções são equivalentes, e sua equivalência pode ser vista em [Sny]. Neste trabalho após longa manipulação podemos ler:

$$\nabla_X \sigma = 2\pi i \sigma^* \alpha(X) \sigma \quad (1.22)$$

onde ∇_X é a derivada covariante na direção dum campo X definido na base M , σ é uma seção e σ^* é o "pull-back" aplicado à 1-forma α .

Desta forma vemos que θ (que no primeiro sentido (1.17) define a conexão) é a 1-forma local (na base) da 1-forma de conexão α .

Estas várias noções de conexão permitem-nos ter uma visão geométrica da quantização de Bohr-Sommerfeld, que chamaremos de pré-quantização.

Os fibrados lineares com conexão ($L \rightarrow (M, \omega)$) serão nosso espaço ambiente, onde a variedade de base M será o nosso espaço de fase clássico, as seções do fibrado formarão o espaço de Hilbert das funções de onda.

A conexão está associada à derivada covariante. θ em teorias de calibre são os potenciais de calibre.

Nestes termos diremos que o fibrado linear L é a pré-quantização duma variedade simplética M se (M, ω) for fibrado com base M e:

$$d\alpha = -(2\pi\hbar)^{-1}\pi^*\omega \quad (1.23)$$

ie, a curvatura $d\alpha$ projecta-se na forma simplética ω . (\hbar é a constante de Planck). Tal fibrado linear existe se e somente se $(2\pi\hbar)^{-1}\omega$ definir uma classe de cohomologia de deRham inteira (sobre \mathbf{Z}). Expressada de outra forma:

C1- se a classe de $(2\pi\hbar)^{-1}\omega$ em $H^2(M, \mathbf{R})$ estiver na imagem de $H^2(M, \mathbf{Z})$.

O sentido físico desta, que é chamada, condição de pré-quantização ou condição de integrabilidade, é muito simples.

Como temos definido as funções de onda enquanto seções sobre M , imaginemos uma trajetória clássica fechada (um laço) sobre o espaço de fase M . O levantamento horizontal de tal trajetória é indicado na figura abaixo.

Se o levantamento é realizado por uma seção Ψ (ou $\{\Psi\}$ quando não tivermos uma seção globalmente definida, o que é mais usual), para que Ψ esteja bem definida é necessário que:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} \oint_{\gamma} \theta\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_S \omega\right) \mapsto \mathbf{Z}, \quad (1.24)$$

onde $\partial S = \gamma$.

Estas fases adquiridas pela função de onda numa trajetória fechada definem o grupo de holonomia.

A existência de tais fases não triviais explicam efeitos como Aharonov-Bohm e as fases de Berry (ver [Nak]).

Antes de definirmos mais precisamente do grupo de holonomia, e, uma vez que já definimos as funções de onda, precisamos estabelecer a álgebra de operadores:

Dada uma função f definida em (M, ω) queremos encontrar um operador linear \hat{f} sobre o espaço de seções.

Da mesma forma que f geram famílias uniparamétricas de transformações canônicas (ver (1.8)), ie, a f associa-se o campo vetorial X_f de forma que $L_{X_f}\omega = 0$

(L_{X_f} = derivada de Lie); esperamos definir um campo ξ_f no fibrado inteiro, de forma que preserve α . Lembrando, α é o "pull-back" de ω . Desta forma: $L_{\xi_f}\alpha = 0$.

Partindo-se deste fato, é possível mostrar [Sny] que:

$$\xi_f \Psi = (-i\hbar \nabla_{X_f} + f) \Psi \quad (1.25)$$

onde X_f é o campo vetorial hamiltoniano associada à f e ∇_{X_f} é derivada covariante definida anteriormente.

Desta forma, definimos o seguinte homomorfismo de álgebra de Lie:

$$f \rightarrow \hat{f} = \xi_f = -i\hbar \nabla_{X_f} + f \quad (1.26)$$

que satisfaz as condições requeridas em (1.15).

Uma descrição mas acurada do grupo de holonomia pode ser vista no apêndice I. Para o momento, interessa-nos a informação descrita acima, ie, a função de onda num ponto fica definida a menos de uma fase integral $\exp(\frac{i}{\hbar} \oint_{\gamma} \theta) = \exp(\frac{i}{\hbar} \int_S \omega)$.

Tomando-se a imagem dos vários possíveis laços $\{\gamma\}$ na base, definimos o grupo de holonomia $\{\exp(\frac{i}{\hbar} \oint_{\gamma} \theta)\}$.

A condição de quantização também é expressada em termos de tais fases como em (1.24).

Entretanto, as condições (1.23 e 1.24) de quantização, não estabelecem a unicidade de quantização. De fato, como a condição de quantização é expressada por $d\alpha = (2\pi\hbar)^{-1} \pi^* \omega$, podemos achar mais de um fibrado linear L_i com conexão ∇_i não equivalentes cuja curvatura $d\alpha$ projeta-se na forma simplética ω .

A saber, se, por exemplo (L, ∇) é um fibrado linear com conexão, se construirmos um outro fibrado $(L' = L \otimes F, \nabla')$, onde F é um fibrado de linha com conexão plana, o fibrado L' tem a mesma curvatura, expressa na base por ω .

Explicitamente, podemos verificar esta construção em termos das funções de transição. Temos visto que um conjunto de funções $\{c_{ij}\}$ definidas nos abertos $\{U_i \cap U_j\}$, onde $\{U_i\}$ é cobertura de M , satisfazendo (1.16) definem unicamente um fibrado de linha.

Vamos tomar em cada U_j um potencial simplético θ_j (a existência de tal potencial é garantida pelo teorema de Darboux (descrito no começo do capítulo)), e seja uma coleção de funções u_{jk} definidas nas intersecções não triviais $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ ($u_{jk} \in C^\infty(U_j \cap U_k)$) ou $O^*(U_j \cap U_k)$ conforme conveniência), tais que:

- i) $du_{jk} = \frac{i}{\hbar}(\theta_j - \theta_k)$, sempre que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$
- ii) $(2\pi\hbar)^{-1}(u_{jk} + u_{kl} + u_{lj}) \in \mathbb{Z}$, sempre que $U_j \cap U_k \cap U_l \neq \emptyset$

(1.27)

Tomando-se $c_{jk} = \exp(iu_{jk}/\hbar)$, então

$$\frac{dc_{jk}}{c_{jk}} = \frac{i}{\hbar} (\theta_j - \theta_k) \quad (1.28)$$

$$c_{jk}c_{kl}c_{lm} = \exp\left(\frac{2\pi}{i}(u_{jk} + u_{kl} + u_{lm})\right)$$

Tais $\{c_{jk}\}$ definidas exponenciando-se $\{u_{jk}\}$ são funções de transição dum fibrado de linha L tal que $\hbar^{-1}\theta$ determina uma conexão e $\hbar^{-1}\omega$ uma curvatura.

Existe entretanto uma liberdade de definição de L e ∇ (ou, de forma equivalente, θ).

Na equação (1.27), poderíamos trocar u_{jk} por $u_{jk} + y_{jk}$ onde y_{jk} são constantes tais que

$$y_{jk} = -y_{kj} \text{ e } (2\pi\hbar)^{-1}(y_{jk} + y_{kl} + y_{lj}) \in Z, \quad (1.29)$$

para toda intersecção $U_j \cap U_k \cap U_l \neq \emptyset$.

Desta forma, definimos as funções de transição $t_{jk} = \exp(iy_{jk}/\hbar)$, correspondentes a um fibrado de linha com curvatura nula F , e o fibrado total $L' = L \otimes F$.

Por fim precisamos apenas alguns resultados relacionando os fibrados de linha L como os construídos com a teoria de representação do grupo fundamental.

Logo após (1.26) relacionamos o grupo de holonomia com uma dada conexão.

Vemos que para cada laço $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, temos um elemento do grupo de holonomia $\exp i \oint_{\gamma} \theta$ onde θ é a conexão. Vemos então que o grupo de holonomia é representação do grupo fundamental de M (ver Ap) sobre o espaço de Hilbert de seções \mathcal{H} .

Vimos também que a liberdade que temos para escolher L' é relacionada como fibrados planos. Do teorema de Ambrose-Singer, sabemos que os grupos de holonomia de fibrados planos são discretos (Ap).

Portanto as representações discretas do grupo de holonomia no espaço de seção também classificam os fibrados de linha correspondentes à quantização de (M, ω) .

Iremos necessitar destas idéias.

QUANTIZAÇÃO GEOMÉTRICA POLARIZAÇÕES E DISTRIBUIÇÕES

O problema da pré-quantização desenvolvida anteriormente é que o espaço de Hilbert obtido é "demasiado grande" para representar o espaço de fase de sistemas quânticos fisicamente admissíveis.

Por exemplo, no caso dos fibrados cotangentes, o espaço de Hilbert obtido contém funções de ambas variáveis (p, q) posição e momento.

Devemos então limitarmo-nos a escolha de seções estas, que se restrinjam a algum sub-fibrado do fibrado linear. Para tal, escolheremos seções que são paralelas ao longo de uma polarização.

Iremos agora desenvolver com brevidade tais conceitos (para um estudo mais acurado, veja [Woo]).

DISTRIBUIÇÕES

Uma distribuição P de dimensão r numa variedade M , é um subfibrado de fibrado tangente TM , ie, é uma designação cada ponto m de M , um subespaço r -dimensional (a fibra) P_m de T_mM . É dita diferenciável se para cada ponto m , existir vizinhança $U \ni x$ e r -campos vectoriais diferenciáveis $\{X_1, \dots, X_r\}$ que formam uma base para P_m em todo ponto $m \in M$.

Um campo vectorial X pertence à P se $X_m \in P_m$ para todo $m \in M$. Denotaremos $V_p(M)$ o conjunto dos campos tangentes à P . Finalmente, P é dita involutiva se $[X, Y]$ pertencer à $V_p(M)$ sempre que dois campos X, Y pertencerem à $V_p(M)$.

A existência de campos vectoriais pertencentes a uma distribuição tais que ponto a ponto formam uma base para $V_p(M)$, nos garante que a dimensão da distribuição é constante. Tais distribuições são chamadas regulares e será o caso de agora o por vir. No caso de distribuições complexas trabalharemos também com distribuições de dimensão complexa constante.

Uma subvariedade conexa N de M é uma variedade integral da distribuição P se $f * (T_p(N)) = P_p$ para todo $p \in N$, onde f é o imersão de N em M .

Se não existir outra variedade integral de P contendo N , está é dita variedade integral maximal da distribuição P .

Se por um lado, gostaríamos de estabelecer o suporte para as seções admissíveis (no sentido físico), substituindo o espaço de Hilbert \mathcal{H} da pré-quantização pelo subespaço das seções polarizadas quadrado integráveis, por outro, havemos de observar duas dificuldades ao fazê-lo (ou para fazê-lo), a saber:

i) para que os operadores $\{\hat{f}\}$ correspondentes à $\{f\}$ sejam bem definidas sobre as seções polarizadas, ie, mapeiem seções polarizadas em seções polarizadas, o fluxo X_f deve preservar a polarização P .

Este fato vem de $\nabla_X(\hat{f}\sigma) = \hat{f}(\nabla_X\sigma) - i\hbar\nabla_{[X, X_f]}\sigma$, ou seja, para que $\hat{f}\sigma$ seja polarizada sempre que σ o for $[X, X_f]$ deve pertencer a $V_p(M)$ para $X \in V_p(M)$.

ii) pode ser que não existam seções polarizadas quadrado integráveis.

A primeira condição impõe restrições sobre o espaço de observáveis clássicos que podem ser quantizados. Por exemplo, para polarizações reais temos que f deve ser na forma $f = v^a(q)p_a + u(q)$ (ver [Woo]), v_a e u funções C^∞ da posição. No caso Kähler, f deve ser tal que X_f seja um campo de Killing.

A segunda condição nos fornece uma restrição sobre a estrutura geométrica da polarização.

No caso Kähler, precisamos que o potencial seja positivo-definido.

No que segue trataremos deste caso, ie, polarizações Kähler positivas.

O teorema de Frobenius nos garante a existência local de variedades maximais

de distribuições, ie, se P for uma distribuição numa variedade M , através de cada ponto $p \in M$, passa única variedade integral maximal N de P (ver [Kob]).

Uma distribuição integrável é chamada foliação, e as variedades integrais maximais da foliação são chamadas folhas.

A foliação P é redutível se o espaço das folhas for uma variedade Hausdorff.

Uma seção é uma subvariedade Σ de M que intercepta cada folha transversalmente em exatamente um ponto.

Das definições acima, vemos que as distribuições vêm ao encontro, enquanto objetos matemáticos, do que precisamos. Temos definido a foliação vertical tomando-se como superfícies integrais as superfícies onde as funções coordenadas $\{q\}$ sejam constantes. Desta forma a distribuição vertical fica definida em função de apenas um conjunto de variáveis $\{p\}$. Observe que sobre os campos definidos na distribuição, a forma simplética anula-se identicamente (a base neste caso é $\{\partial_{p_i}\}$).

Definimos, desta forma, uma polarização real duma variedade simplética (M, ω) como sendo uma foliação por subvariedades Lagrangeanas, ie, uma distribuição P sendo:

- (1) integrável: se $X, Y \in M$ então $[X, Y] \in M$,
- (2) Lagrangeana: ie, para cada $m \in M$, P_m é um subspaço Lagrangeano de $T_m M$.

(1.30)

A necessidade de definirmos as polarizações é que nem sempre nos convém trabalhar com as variáveis (p, q) . Por exemplo, é comum trabalharmos a representação de Fock, onde definimos variáveis como $(z = p + iq, \bar{z})$.

Na representação de Fock, trabalhamos com seções holomórficas, ie, as funções de onda são apenas funções de z , ie, $\Psi = \Psi(z)$.

Para definirmos de forma geral as coordenadas de Fock a partir de um espaço vetorial real, precisaremos definir a complexificação deste espaço e tomar então um subespaço cujas coordenadas sejam na forma requerida. Definiremos representações mais gerais, onde as de Fock incluem-se, complexificando o espaço de representação. Representações complexas aparecem de polarizações complexas.

Vamos lembrar primeiro alguns fatos de espaços vetoriais sobre \mathbb{C} .

Se (V, ω) for espaço vetorial $2n$ -dimensional (sobre \mathbb{R}), uma estrutura complexa J em V é um operador definido em V com as propriedades:

- i) $J^2 X = -X$
 - ii) $\omega(JX, JX') = \omega(X, X')$
 - iii) $\omega(X, JX) \geq 0$
- $X, X' \in V$

(1.31)

Desta forma (V, J) é espaço vetorial complexo com dimensão complexa n , que denotaremos por V_J .

Consideremos também a complexificação $V_{\mathbb{C}}$ de V (dimensão complexa de $V_{\mathbb{C}} = 2n$), para onde estende-se $\omega \rightarrow \omega_{\mathbb{C}}$ e $J \rightarrow J_{\mathbb{C}}$, de maneira natural. Em $V_{\mathbb{C}}$ a extensão complexa $J_{\mathbb{C}}$ de J tem os auto-valores i e $-i$, decorrente da definição.

Os respectivos auto espaços ω e $\bar{\omega}$ são sub-espaços Lagrangeanos com relação a $\omega_{\mathbb{C}}$

Em ω definimos um única forma bilinear simétrica hermitiana H por :

$$H(X, X') = \omega(X, JX') + i\omega(X, X') \quad (1.32)$$

Dentro de ω existe um subespaço $P_J = \{X - iJX\}$ lagrangeano com relação a ω . Reciprocamente um subespaço lagrangeano $P \subset V_{\mathbb{C}}$ tal que $P \cap \bar{P} = 0$ determina uma única estrutura complexa J tal que $P = P_J (= (P, J))$. O subespaço P_J define a representação de Fock.

Para ver a equivalência destas definições com as usuais na física, basta tomarmos por exemplo um referencial simplético $\{X^a, Y_b\}$ em (V, ω) , (g_{ab}) uma matriz não singular $n \times n$, de forma que:

$$\begin{aligned} JX^a &= g_{ab}Y_b \\ JY_a &= -g_{ab}X^b \end{aligned} \quad (1.33)$$

Desta forma as coordenadas em P_J escrevem-se $Z = X^a - ig_{ab}Y_b$.

Vimos acima que uma estrutura complexa em (V, ω) equivale a um subespaço lagrangeano $P \subset V_{\mathbb{C}}$ tal que $P \cap \bar{P} = 0$. Por outro lado, extremizam-se espaços vetoriais lagrangeanos reais $P \subset V_{\mathbb{C}}$ tais que $P = \bar{P}$.

No caso geral temos uma situação intermediária, onde $P \cap \bar{P}$ varia entre 0 e n .

Tendo definido estruturas complexas em espaços vetoriais, podemos transportar tais definições para o fibrado cotangente. Pelo teorema de Darboux, podemos também estender a variedades simpléticas quaisquer. Devemos entretanto tomar o cuidado com as mudanças de carta para que preservem a estrutura desejada. Por exemplo, se localmente temos trabalhado com coordenadas de Fock, desejamos que estas coordenadas possam ser definidas sobre toda variedade de forma compatível.

Definimos uma polarização complexa numa variedade simplética (M, ω) é uma distribuição P em M tal que:

- i) para cada $m \in M, P_m \subset (T_m M)_{\mathbb{C}}$ seja lagrangeana,
- ii) a dimensão de $D = P \cap \bar{P} \cap TM$ seja constante
- iii) P seja integrável.

(1.34)

Note que a condição, única a não aparecer na definição de polarizações reais, garante a rigidez acima mencionada.

Definimos também polarizações fortemente integráveis se $E = D^\perp = (P + \bar{P}) \cap TM$ for integrável.

As demais definições feitas com relação a polarizações reais estendem-se para o caso complexo

Como exemplo, seja o caso em que (M, J, ω) é variedade Kähler $2n$ -dimensional, com estrutura simplética ω , e estrutura complexa J compatível com ω em toda variedade M .

Existe um potencial K e coordenadas locais z^a ($a = 1, \dots, n$), tais que: $\omega = i\omega_{ab}dz^a \wedge d\bar{z}^b = i\partial\bar{\partial}K$ (da definição de variedades Kähler)

Existem duas polarizações naturais: a holomórfica P e a antiholomórfica \bar{P} , expandidas pelos vetores $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \bar{z}$ respectivamente.

Como (localmente) $\omega = d\theta$, decorre que $\theta = -i\partial K$. Já que θ aniquila vetores $\partial/\partial \bar{z}$, θ é um potencial adaptado à polarização P (reciprocamente $\bar{\theta}$ é adaptado à \bar{P}).

QUANTIZAÇÃO

Finalmente vamos estudar o método de quantização geométrica, propriamente dito.

Já temos definido as polarizações fortemente integráveis numa variedade simplética (M, ω) , e seja L um fibrado pré-quântico sobre M .

Definimos as seções polarizadas, então, como sendo seções diferenciáveis $\sigma : M \rightarrow B$ tal que $\nabla_X \sigma = 0$ para todo $X \in V_p M$.

No caso das polarizações reais, isto significa localmente que a seção, em função das coordenadas canônicas (p, q) , estão definidas somente em função de p (ou q).

Seções localmente polarizadas existem sempre, por construção, dado que a curvatura de ∇ se anula na restrição às direções em P .

Podemos representá-las explicitamente, lembrando que localmente existem coordenadas (p_i, q_j) (reais) e (z^k) (complexas) e uma função real K (o escalar de Kähler) tal que P é expandido por ∂_{p_i} e ∂_{z_k} e

$$\theta = p_a dq_a - i \frac{\partial K}{\partial z_a} dz_a - \frac{i}{2} \frac{\partial K}{\partial q_a} dq_a \quad (1.36)$$

é o potencial simplético adaptado à P .

Na trivialização local onde a forma de conexão é $\hbar^{-1}\theta$, as seções polarizadas são funções da forma $\Phi(q, z)$, holomórficas em z .

No caso Kähler $\theta = -\partial K$ e Φ é uma função holomórfica de z .

Neste caso, adicionando uma constante à K , podemos escrever a estrutura Hermitiana em B na forma

$$(\Phi, \cdot \Phi) = \bar{\Phi} \Phi e^{-K/\hbar} \quad (1.37)$$

(note que este produto interno é tomado sobre uma fibra).

Este é o material básico que necessitaremos para a nossa análise.

Como dissemos, este resumo não se pretendia um texto básico, de forma que, para melhor apreciação recomendamos [Woo], e [Sny].

Capítulo 2

ASPECTOS SOBRE A QUANTIZAÇÃO DE SISTEMAS DE ESTADOS COERENTES

SISTEMAS DE ESTADOS COERENTES O GRUPO DE WEYL-HEISENBERG

Com base no repertório teórico até então desenvolvido, gostaríamos de discutir algumas questões concernentes à quantização de Sistemas de Estados Coerentes.

Embora estes sejam usualmente apresentados com uma formulação fechada e consistente ([Per],[Woo]) mostraremos algumas sutilezas que podem vir a ganhar alguma relevância.

Vamos primeiro apresentar os Sistemas de Estados Coerentes no âmbito da teoria de representação do grupo de Weyl-Heisenberg.

Sem perda de generalidade, vamos considerar um espaço vetorial com forma simplética (V, ω) bidimensional, com base (p, q) . Seja \mathcal{H} o espaço de Hilbert das funções de onda (seções de fibrado linear complexo $L \rightarrow V$).

Temos definido os operadores \hat{p}, \hat{q} , correspondentes às funções coordenadas, com as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{p}, \hat{q}] &= \hat{h}, 2.1 \\ [\hat{p}, \hat{h}] &= [\hat{q}, \hat{h}] = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde \hat{h} é o termo central da álgebra.

Em geral \hat{h} é apresentado na forma $\hat{h} = i\hbar I$, sendo I a identidade, e \hbar a constante de Planck ($i = \sqrt{-1}$).

Todavia, cabe ressaltar que as representações irredutíveis do grupo de Weyl-Heisenberg dependem de forma estrita dos valores assumidos por \hat{h} em cada representação:

No que segue, e até que se torne relevante à generalização, fixaremos $\hat{h} = i\hbar I$, a título de ilustração.

O grupo de Weyl-Heisenberg é gerado pela álgebra de Lie acima descrita.

Usaremos W para indicar o grupo e ϖ para a álgebra.

Outra representação de ϖ muito utilizada, é a representação de Fock.

Nesta, consideramos a complexificação de ϖ (ϖ, \mathbf{C}), e tomamos o subespaço vetorial (que será essencialmente real, ou unidimensional sobre \mathbf{C}), com os operadores de criação e aniquilação (a^\dagger, a) como geradores, e as usuais relações de comutação

$$a = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}}, a^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}}, \quad (2.2)$$

$$[a, a^\dagger] = I, [a, I] = [a^\dagger, I] = 0.$$

Elementos genéricos de ϖ são descritos, nas bases (I, \hat{p}, \hat{q}) e (I, a, a^\dagger) por:

$x \in \varpi$,

$$x = isI + \frac{i}{\hbar}(P\hat{q} - Q\hat{p}) = isI + (\alpha a - \bar{\alpha} a^\dagger) \quad (2.3)$$

onde $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q + iP)$.

Desta forma, segue o comutador de dois elementos $x, y \in \varpi$, $x = (s, x_1, x_2)$, $y = (t, y_1, y_2)$:

$$[x, y] = iIB(x, y), \quad (2.4)$$

onde $B : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ é uma forma bilinear antisimétrica, dada por:

Desta forma, B é nada mais nada menos que a forma simplética ω no plano (x_1, x_2) , segundo a notação acima (perdoe-nos a mistura de notação mas o fazemos para tentar seguir a literatura usual da área).

Os elementos do grupo são obtidos exponenciando os elementos da álgebra, ie $g \in W$,

$$g = \exp(x) = \exp(isI)D(\alpha), \quad (2.6)$$

onde $D(\alpha) = \exp(\alpha a - \bar{\alpha} a^\dagger)$ (ver 2.2 e 2.3).

A representação de Weyl (exponencial da relação de comutação (2.4)) também será fundamental para nossas posteriores análises; a saber:

$$\exp A \exp B = \exp\left(\frac{1}{2}[A, B]\right) \exp(A + B) \quad (2.7)$$

ou

$$\exp A \exp B = \exp[A, B] \exp A \exp B \quad (2.8)$$

A análise da equivalência entre tais representações, ie, a representação exponencial da representação infinitesimal, (embora aparentemente óbvia) pode ser vista em [Car].

Para os operadores $D(\alpha)$, $D(\beta)$ obtemos, na representação de Weyl

$$\begin{aligned} D(\alpha)D(\beta) &= \exp(i \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta}))D(\alpha + \beta) \quad 2.9 \\ D(\alpha)D(\beta) &= \exp(2i \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta}))D(\alpha)D(\beta) \end{aligned} \quad (2.9)$$

O termo $\operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta})$ tem um sentido geométrico simples, representa a área do triângulo com vértices $(0, \alpha, \alpha + \beta)$. Esta noção será importante para a quantização do sistema.

As representações unitárias irredutíveis do grupo de Weyl-Heisenberg são caracterizadas pelo teorema de von Neumann (ou Stone-von-Neumann).

A saber, já vimos que a álgebra de Heisenberg é um espaço vetorial gerado por (I, \hat{p}, \hat{q}) munido de um produto-comutador. O subespaço Z gerado por I é chamado o centro da álgebra (o comutador anula-se em qualquer elemento do centro). Passando para a representação de Weyl, um elemento do grupo é um par (t, \vec{v}) onde t é um número real (o termo central) e \vec{v} um vetor em V (gerado por \hat{p}, \hat{q}) com o produto

$$(t, \vec{v})(t', \vec{v}') = (t + t' + \frac{1}{2}B(\vec{v}, \vec{v}'), \vec{v} + \vec{v}') \quad (2.10)$$

onde B é a forma bilinear antisimétrica (2,4).

O Teorema nos assevera que as representações irredutíveis do grupo de Heisenberg são caracterizadas pela representação da parte central da álgebra.

Para ser mais claro, vamos passar para a representação (T_λ, \mathcal{H}) do grupo W sobre \mathcal{H} (=Espaço de Hilbert). O termo central $(t, \vec{0})$ é mapeado em $\exp(2\pi i \lambda t)$, de forma que a parte central do produto $(t, \vec{v})(t', \vec{v}')$ é dada por:

$$T_\lambda |_Z: \{(t, \vec{v})(t', \vec{v}')\} \rightarrow \exp 2\pi i \lambda (t + t' + \frac{1}{2}B(\vec{v}, \vec{v}')) \quad (2.11)$$

O número real λ é arbitrário e é justamente λ quem fixa as representações irredutíveis. Esta representação fixada por λ é chamada representação carácter (no caso do centro Z).

O carácter de um grupo de Lie é uma função complexa χ em G tal que $\chi(g) = 1$ e $\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$ para $g, g' \in G$.

Note que representações conjugadas tem o mesmo carácter.

O teorema de von Neumann e Stone tem a seguinte classificação:

(a) Para todo $\lambda \neq 0$, existe, a menos de equivalência unitária, exatamente uma representação irredutível (π, \mathcal{H}) de W no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

(b) para $\lambda = 0$, temos a representação trivial no centro Z de W .

Infinitesimalmente temos também tal caracterização (dada pelo carácter infinitesimal).

Se escolhermos uma base canônica $\{h, p_i, q_i\}$ para a álgebra, uma representação $(\pi_\lambda, \mathcal{H})$, podemos expressar o caractere infinitesimal como segue:

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(p_i) &= \hat{p}_i, \pi_\lambda(q_i) = \hat{q}_i, \quad (2.12) \\ \left[\hat{p}_i, \hat{h} \right] &= \left[\hat{q}_i, \hat{h} \right] = 0, \\ \left[\hat{p}_i, \hat{q}_j \right] &= 2\pi\lambda\delta_{ij} = \pi_\lambda(h) \end{aligned}$$

Por exemplo, quando $\lambda = h$, sabemos que o valor $2\pi h$ está intimamente ligado com o tamanho da célula de Planck. Caso tenhamos $\lambda = 2\pi \frac{n}{k} h$, onde k é um múltiplo inteiro de h fixo positivo e n é inteiro existe uma equivalência de representações para vários n , dada por:

$$\begin{aligned} \exp\left(2\pi i \frac{h}{k}\right) &= \exp\left(2\pi i \frac{n}{k} h\right) \text{ para } n \in k\mathbb{Z} \quad (2.13) \\ \exp\left(2\pi i \frac{h}{k}\right) &\sim \exp\left(2\pi i \frac{n}{k} h\right) \text{ para } n \in \mathbb{Z}_k \end{aligned}$$

Representações em espaços de Hilbert da álgebra de Heisenberg podem ser achadas em [VII].

SISTEMAS DE ESTADOS COERENTES

Em particular estamos interessados na representação de estados coerentes, do grupo de Heisenberg.

Seja T_λ uma representação unitária irredutível de W associada (π_λ é a representação infinitesimal), e $|\Psi_0\rangle$ um vetor fixo de \mathcal{H} .

O vetor $|\Psi\rangle$ é estável com relação à ação dos elementos do centro $T((s, \vec{0}))$, isto é, o subgrupo de isotropia H para um arbitrário estado $|\Psi_0\rangle$ contém os elementos na forma $(s, \vec{0})$. Podemos, de forma genérica, representar um elemento $(t, \alpha a - \bar{\alpha} a^\dagger)$ na forma $T_\lambda((t, \alpha)) = \exp(i\lambda t)D(\alpha)$. Agindo no estado $|\Psi_0\rangle$, geramos para cada número complexo α um estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)|\Psi_0\rangle$, já que a parte central é uma fase irrelevante (daí o porque de ser do centro, o grupo de isotropia).

O sistema $\{|\alpha\rangle\}$ é chamado de Sistema de estados coerentes generalizado do tipo $\{T_\lambda(g), |\Psi_0\rangle\}$. Caso tomemos $|\Psi_0\rangle$ como sendo o vetor-vácuo $|0\rangle$, estamos tratando dos estados coerentes padrão.

O sistema de estados coerentes $\{|\alpha\rangle\}$ tem a propriedade de gerar o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Esta propriedade decorre do fato da representação ser irredutível. De fato, sistema é chamado "mais-que-completo" (em inglês-overcomplete). Esta

propriedade está ligada ao fato de não termos ortogonalidade mútua entre os vetores, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta \rangle &= \langle 0 | D(\alpha)^\dagger D(\beta) | 0 \rangle = \exp(i \operatorname{Im}(\beta \bar{\alpha})) \langle 0 | D(\beta - \alpha) | 0 \rangle \\ | \langle \alpha | \beta \rangle |^2 &= | \langle 0 | D(\beta - \alpha) | 0 \rangle |^2 = \rho(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esta amplitude $\rho(\beta - \alpha)$ pode não ser identicamente nula. Esta é uma questão central do problema. O fato do sistema ser mais-que-completo, nos leva a duas discussões básicas:

- i) Como expressar a resolução da identidade
- ii) Como achar um sistema completo a partir deste mais-que-completo

O problema da resolução da unidade às vezes é colocado como uma propriedade básica dos sistemas de estados coerentes (ver [Kla]).

A resolução da unidade é enunciada da seguinte forma:

Existe uma medida positiva $d\mu(\alpha)$ no α -plano tal que o operador identidade I admite a seguinte resolução da unidade:

$$I = \int d\mu(\alpha) | \alpha \rangle \langle \alpha | \quad (2.15)$$

A questão da mais-que-completude evidencia-se no fato dos projetores unidimensionais $| \alpha \rangle \langle \alpha |$ não serem mutualmente ortogonais, como usual na resolução da unidade.

Como já dissemos, queremos saber se podemos ou não achar uma base completa a partir desta base mais-que-completa, que, em sua resolução da unidade, apareçam projetores unidimensionais mutualmente ortogonais, ou seja, se podemos achar uma base ortogonal para tal sistema.

A solução deste problema foi anunciada por V. Neumann.

Antes de entrarmos nesta análise, vamos ver algumas propriedades dos estados coerentes. Duas propriedades, que muitas vezes aparecem enquanto definições dum estado coerente, são:

a) O conjunto de estados coerentes é formado por auto-estados do operador de destruição a , ie, $a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle$.

Note que, como a não é operador auto-adjunto e tão pouco limitado, seu espectro não tem de ser discreto (como não o é).

Esta propriedade é muito útil para a generalização dos estados coerentes, para o caso em que temos uma teoria com um grupo de simetria G semi-simples qualquer.

Esta propriedade decorre imediatamente de:

$$D(\alpha)^\dagger a D(\alpha) = a + \alpha,$$

quando aplicada ao estado de vácuo $| 0 \rangle$

b) O sistema de estados coerentes $\{ | \alpha \rangle \}$ é um sistema de estados que minimizam o princípio da incerteza, ie, $\Delta p_\alpha \Delta x_\alpha = \frac{\hbar}{2}$, para qualquer α .

Com isso, dizemos que os estados coerentes são os que mais se aproximam de estados clássicos.

Esta propriedade pode ser enfocada de uma outra forma se representarmos um estado $|\alpha\rangle$ nos auto-estados $\{|n\rangle\}$ do oscilador harmônico.

Para tal, expandimos $D(\alpha) = \exp(\alpha a - \bar{\alpha} a^\dagger)$ em série e aplicamos no estado de vácuo obtendo:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_0^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.16)$$

Um estado $|\alpha\rangle$, nesta representação, é então uma superposição ponderada. (por um coeficiente muito semelhante à distribuição de Poisson), de estados de energia. É, de fato, estados de superposição são mais próximos do mundo clássico, sem mencionar a inclusão dos estados altamente energéticos (a demonstração pode ser vista em [Per]).

Voltando à questão da (mais-que-) completeza, da irreducibilidade da representação do grupo de Weyl em \mathcal{H} sabemos que $\{|\alpha\rangle\}$ expande os estados em \mathcal{H} , sem ser, entretanto, mutuamente ortogonais.

Estados não-ortogonais (usuais) aparecem em física em problemas de espectro contínuo.

Por exemplo, o operador posição tem por base os vetores $\{|x\rangle\}$ cuja normalização é deltiforme. Da mesma forma, ondas planas e^{ikx} , são usualmente usadas para expressarmos estados livres, cujo espectro energético é contínuo.

Todavia, por ser um espaço de Hilbert sabemos da existência de uma base enumerável ortogonal. (por exemplo, pela expansão acima $|n\rangle$ é base). Queremos uma, no entanto que preserve a naturalidade da representação do Grupo de Weyl.

von-Neumann anunciou a existência de um subespaço com base enumerável $|\alpha_k\rangle$, tal que os vetores sejam mutuamente ortogonais, e que $\{|\alpha_k\rangle\}$ seja completo em \mathcal{H} .

Para construir $\{|\alpha_k\rangle\}$ consideramos um reticulado no α -plano, gerado pelos vetores w_1 e w_2 , i.e., $\alpha_k = \alpha_{mn} = mw_1 + nw_2$, tal que $\text{Im}(w_1 \bar{w}_2) \neq 0$ (condição de independência linear entre w_1 e w_2), para $m, n \in \mathbf{Z}$.

Temos, então, para estes reticulados o seguinte resultado:

i) O subsistema é mais que completo se a área da célula básica $\text{Im}(w_1 \bar{w}_2) = S < \pi$, e permanece mais-que-completo se for retirado um número finito de estados de $|\alpha_{mn}\rangle$.

ii) O subsistema não é completo se $S > \pi$

iii) O subsistema é completo se $S = \pi$, e permanece completo se um estado (e somente 1 estado) for removido do sistema.

(2.17)

Primeiramente vamos estudar o reticulado. A condição de completeza, como foi visto, relaciona-se com a área do paralelogramo formado pelos vetores w_1 e w_2 . Note que o conjunto $\{|\alpha_k\rangle\}$ tem a propriedade de serem gerados por operadores $D(\alpha_k)$ que comutam entre si, já que, como foi visto

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp i \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta})D(\alpha + \beta)$$

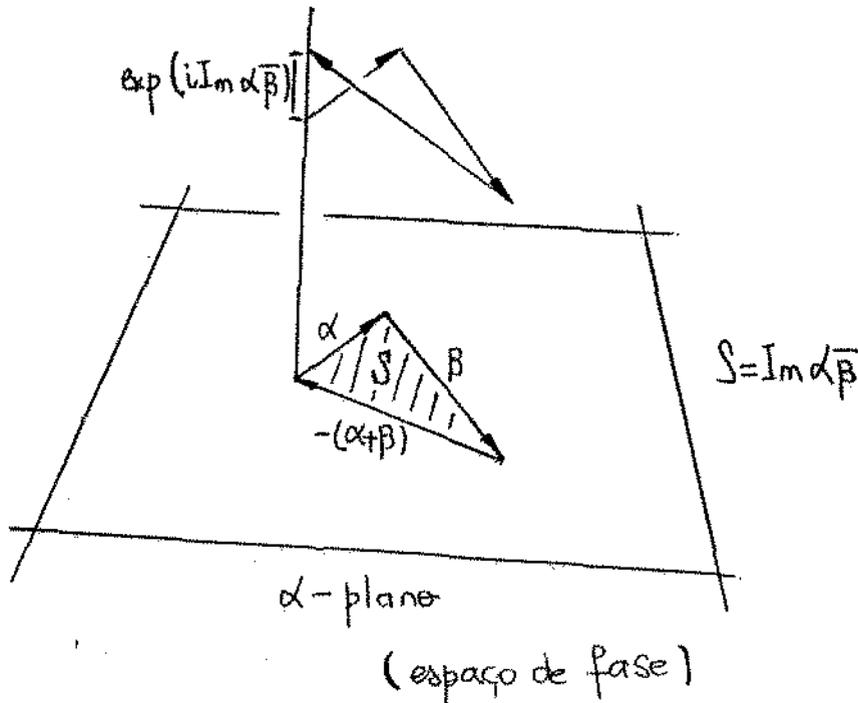
Note ainda que se expressarmos a equação de Weyl acima na forma:

$$D(\alpha)D(\beta)(D(\alpha - \beta))^{-1} = \exp i \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta}) \tag{2.18}$$

e recordando que sobre as coordenadas (x, p) os operadores geram translações no espaço de fase, vemos que equação à esquerda gera um ciclo fechado no espaço de fase. Portanto, a exponencial à esquerda age nas seções (funções de onda) como um elemento do grupo de holonomia.

Desta forma, a condição de existência de um reticulado equivale à própria condição de quantização de Bohr, numa interpretação geométrica.

(fig. 2.1)



Portanto o reticulado $\{\alpha_{mn}\}$ gera uma base enumerável $\{|\alpha_{mn}\rangle\}$, sendo que a enumerabilidade expressa uma condição de quantização.

Ainda, ao "reticularmos" o espaço de fase, estamos estabelecendo uma correspondência entre um estado quântico $|\alpha_{mn}\rangle$ por célula (considerando o vértice $mw_1 + nw_2$) indiciando a célula. Ora, visto que a área das células do reticulado é igual a $\pi\hbar$, estas são as células de Planck, e portanto, temos um estado

quântico por célula de Planck. Esta é a condição de gás ideal (partículas não interagentes) na mecânica estatística. Então, o fato dos estados coerentes serem "quase-clássicos", e tomando-os em equivalência com pontos do reticulado de von-Neumann, estando assim propriamente quantizando o sistema, cria-nos um "ambiente" adequado para falarmos de sistemas de muitos corpos não interagentes, ie, mecânica estatística.

Nesse ponto perguntamo-nos, se, aumentando a densidade de pontos por célula de Planck, ou equivalentemente, modificando as condições de quantização ou grupo de holonomia, poderíamos falar em interações?

Uma observação importante nesse estágio é que, embora, declarada completa a base $\{|\alpha_{mn}\rangle\}$, esta não gera estados $|\beta\rangle$ que não estejam no próprio conjunto $\{|\alpha_{mn}\rangle\}$.

Se tentarmos expandir um estado genérico $|\beta\rangle$ na base $\{|\alpha_{mn}\rangle\}$, ie, $|\beta\rangle = \sum b_{mn}|\alpha_{mn}\rangle$, aplicando-se o operador de destruição a , e, lembrando-se que os estados coerentes são auto-estados deste operador, temos :

$$\begin{aligned} a|\beta\rangle &= a\left(\sum b_{mn}|\alpha_{mn}\rangle\right) = \sum b_{mn}a|\alpha_{mn}\rangle \quad (2.19) \\ \beta|\beta\rangle &= \beta\left(\sum b_{mn}|\alpha_{mn}\rangle\right) = \left(\sum b_{mn}\alpha_{mn}|\alpha_{mn}\rangle\right) \end{aligned}$$

Ora, para que a igualdade seja satisfeita precisamos que os coeficientes $\alpha_{mn} = \beta$, ou seja que $|\beta\rangle$ faça parte do reticulado, reduzindo a igualdade à trivialidade.

Observados tais fatos, o que faremos então é tomarmos um sistema de estados coerentes gerados por um reticulado cuja área da célula básica $S = \text{Im}(w_1 \bar{w}_2)$ seja menor que π , por exemplo $S = \pi/k$, onde $k \in \mathbb{N}^*$.

Desta forma, estaremos populando uma célula de Planck com k estados (já que estamos tomando um estado $|\alpha_{mn}\rangle$ por célula de área $S = \pi/k$), e por outro lado, do ponto geométrico, violando a condição de quantização de Bohr-Sommerfeld. Estudaremos o significado da sobre-completude desse ponto de vista.

Vamos primeiro analisar dum ponto de vista analítico, para posteriormente fazê-lo geometricamente.

CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

Como já vimos, os estados coerentes surgem ao estudarmos a representação do Grupo de Weyl-Heisenberg em espaços de Hilbert. Por outro lado, precisamos agora estudar a representação do grupo de Weyl-Heisenberg em reticulados.

Cartier, em trabalho mencionado, fez, de forma muito própria esta análise.

Vamos descrever brevemente este trabalho.

Já vimos que o reticulado é sobre o espaço de fase. O espaço de fase, no presente trabalho, será (como tem sido) visto como um espaço vetorial V , com base (p, q) , munido com uma forma simplética bilinear, ie, $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Vimos

que a forma simplética, faz, na representação de Weyl, o papel do comutador (2.4) para as relações canônicas de comutação.

Vamos definir um reticulado L sobre V , como um sub-conjunto discreto de V , que o gera, enquanto espaço vetorial; ou, equivalentemente, o conjunto de vetores de V a coeficientes inteiros, sobre uma base (w_1, w_2) que gera V .

Sobre o reticulado L , a forma bilinear B assume valores inteiros, ie,

$$B : L \times L \rightarrow \mathbf{Z}. \tag{2.20}$$

A rede dual L' de L , é constituída por vetores $v \in V$ tais que $B(v, \lambda) \rightarrow \mathbf{Z}$ para todo $\lambda \in L$. Obviamente L' contém L .

Sem perda de generalidade, consideraremos $\dim V = 2$.

Quando $L' = L$ o reticulado é dito autodual, sendo o caso do reticulado de V. Neumann.

Temos visto que no caso da rede -ou reticulado (usaremos indiscriminadamente ambas terminologias)- de von Neumann, o conjunto de operadores $\{D(\alpha_{mn})\}$ comutam entre si (2.9 e 2.10). Desta forma, seria natural indagarmos por uma auto-função $|\Theta\rangle$ comum a tal conjunto de operadores.

Já que os operadores são determinados completamente pelo reticulado $\{\alpha_{mn}\}$ e, já que o reticulado é formado a partir de vetores unitários de base (w_1, w_2) , a vetor $|\Theta\rangle$ deve, de forma geral, ser caracterizada por dois números $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, tais que;

$$D(w_i) |\Theta_\varepsilon\rangle = \exp(i\pi\varepsilon_i) |\Theta_\varepsilon\rangle, \quad i = 1, 2. \tag{2.21}$$

Naturalmente $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ assumem valores reais módulo 2, correspondendo, portanto a pontos num toro bi-dimensional.

Ainda, cada ponto do toro fixa uma representação para a ação discreta do Grupo de Heisenberg-Weyl.

Considerando uma escolha $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, e chamando a correspondente auto-função de $|\Theta_\varepsilon\rangle$, podemos expressar os estados coerentes em função deste estado na forma:

$$|\Theta_\alpha\rangle = D(\alpha) |\Theta_\varepsilon\rangle, \tag{2.22}$$

e para $\alpha_{m_1, m_2} = \alpha_{\vec{m}} = m_1 w_1 + m_2 w_2, \vec{m} = (m_1, m_2)$

$$D(\alpha_{\vec{m}}) |\Theta_\varepsilon\rangle = \exp\left(i\pi F_\varepsilon\left(\vec{m}\right)\right) |\Theta_\varepsilon\rangle, \tag{2.23}$$

onde F_ε é uma função a valores reais (uma exposição precisa da função F que está intimamente com os caracteres da representação pode ser visto em [Car]. em geral esta deve ser uma função real definida módulo 2 satisfazendo a congruência $F(\lambda + \mu) = F(\lambda) + F(\mu) + mB(\lambda, \mu)$).

Observe que a equação anterior é uma equação de invariância. Logo, o subgrupo formado por operadores na forma $\{D(\alpha_m)\}$ estão contidos no subgrupo de isotropia da representação D . Desta forma, esta função $F_\varepsilon(\vec{m})$, caracterizada pela escolha dos valores $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, fixam a representação carácter associada.

Portanto, na construção feita, dois fatores fundamentais são: a escolha do reticulado, caracterizada pela escolha dos vetores base (w_1, w_2) , e a representação, caracterizada pelos valores $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Vamos agora expressar a relação acima na representação holomórfa (de Fock).

Esta representação equivale à polarização holomórfa, vista no capítulo anterior, onde as seções dependem apenas das coordenadas complexas $z (= \frac{x+ip}{\sqrt{2\hbar}})$.

Em tais coordenadas temos a ação dum elemento genérico $D(\alpha)$ do grupo W na forma:

$$D(\alpha)\Phi(z) = \exp\{-\pi\lambda(H(z, z)/2 + H(z, \alpha))\}\Phi(z + \alpha) \quad (2.24)$$

onde $H : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma anti-simétrica hermitiana (única) compatível com a complexificação do espaço vetorial V . De forma explícita:

$$H(z, z') = B(z, Jz') + iB(z, z'). \quad (2.25)$$

(J é estrutura complexa (ver (1.31), ou [Car])).

Expressando a equação de invariância (2.22 e 2.24) em tais coordenadas, temos:

$$\Phi(z + \alpha_m) = \Phi(z) \exp\{\pi\alpha(H(\alpha_m, \alpha_m)/2 + H(z, \alpha_m)) + i\pi F_\varepsilon(\alpha_m)\} \quad (2.26)$$

Esta equação tem como solução mais geral no espaço das funções inteiras a função Θ theta de Jacobi.

Lembremos que tudo isto se refere ao caso de reticulado auto-duais, ou, equivalentemente à rede de von Neumann.

Ocorre que, caso $L' > L$, ie, o reticulado dual L' seja maior que o reticulado L , a representação do grupo de Weyl-Heisenberg sofre significantes alterações.

E estas alterações são similares às que aparecem no caso de sistemas de estados coerentes mais que completos gerados por reticulados de densidade dada por $\text{Im}(w_1 \bar{w}_2) < \pi$.

Então vamos gerar, como já enunciado, um sistema de estados coerentes $\{|\alpha_{mn}\rangle\}$, onde, como antes, $\alpha_{mn} = mw'_1 + nw'_2$, onde $\text{Im}(w'_1 \bar{w}'_2) = \pi/k$, onde k é um inteiro positivo não nulo.

Para tal, podemos, por exemplo, fixar $w'_1 = w_1/k$ e $w'_2 = w_2$ onde (w_1, w_2) geram a rede de von Neumann, ie, $\text{Im}(w_1 \bar{w}_2) = \pi$ (eq.2.28)

Já vimos que o fator $\text{Im}(w'_1 \overline{w'_2})$ além de expressar uma área no espaço de fase, expressa também o comutador $B(w'_1, w'_2)$, sendo $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ a forma simplética que determina o comutador (ver 2.8, 2.17).

Sendo que w'_1, w'_2 são os geradores de L' , e já que temos nos restringido a analisar a representação do grupo sobre reticulados L e L' ; decorre que o termo $\text{Im}(w'_1 \overline{w'_2}) = \pi/k$ está fixando a representação (por ser um termo central do Grupo), da mesma forma que, no caso contínuo as representações irredutíveis do Grupo de Weyl-Heisemberg eram fixadas por $[p, q]$.

Ou seja, anteriormente, sendo (p, q) os geradores do grupo, e por permitirmos translações irrestritamente pequenas (infinitesimais), o termo central da álgebra era obtido por $[p, q]$. Agora, sendo que nossas translações fundamentais são finitas, os geradores são (w'_1, w'_2) e o termo central é $\text{Im}(w'_1 \overline{w'_2})$.

Observemos aqui que, caso quizéssemos recuperar a rede de von Neumann poderíamos tomar um subconjunto de $\{\alpha_{mn}\}$ formado por elementos na forma $\alpha_{mn} = mw'_1 + nw'_2$, onde $m \in k\mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

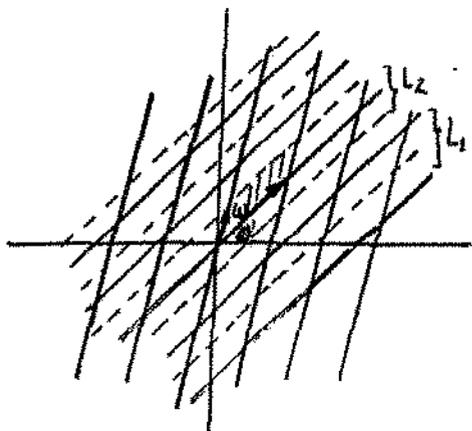
Na verdade existem $k + 1$ sub-reticulados em L' , cuja densidade equivale à de von Neumann, a saber:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{w'_1(1 + kn), w'_2m\} & (2.17) \\
 L_2 &= \{w'_1(2 + kn), w'_2m\} \\
 &\vdots \\
 L_{k-1} &= \{w'_1(k - 1 + kn), w'_2m\} \\
 L_k &= \{w'_1k(1 + n), w'_2m\} \\
 L_{k+1} &= \{w'_1n, w'_2km\}
 \end{aligned}$$

Concentremos nossas atenções aos k primeiros casos, $\{L_i\}_{i=1, \dots, k}$.

Todos estes casos tem a particularidade de preservar o tamanho do "passo" sobre o reticulado, como sendo de tamanho $(1, 1)$ com relação a base (w_1, w_2) .

Portanto, sobre um reticulado de passos (mínimos) $(1/k, 1)$ (com relação à (w_1, w_2)), tomamos as possíveis sub-reticulados de passo(mínimo) $(1, 1)$.



(fig. 2.2)

Ora, torna-se claro porque descartarmos o último caso.

Lembremos o significado deste reticulados todos. No caso de von Neumann do fato de retringirmo-nos a um reticulado, obtivemos uma equação funcional de invariância (a menos de fase) (eq. 2.23 e 2.26), cuja solução era uma função (Θ de Jacobi) invariante (a menos de uma fase) por translações sobre o reticulado, ou seja, por ação do subgrupo discreto $\{D(\alpha_{mn})\}$ onde $\alpha_{mn} = mw_1 + nw_2$.

No presente momento, estamos desejando a mesma invariância, porém num reticulado cujos passos mínimos são menores que os deslocamentos gerados pela ação do sub-grupo, cuja invariância é requerida.

Neste sentido poderíamos dizer que desejamos invariâncias por translações de tamanho $x \in k\mathbf{Z}$ sobre um reticulado de célula unitária (área 1).

Cabe ressaltar que, embora algebricamente equivalentes, fisicamente não equivalem os dois enunciados acima, já que a primeira invariância está intimamente ligada à quantização de Bohr-Sommerfeld, por ter densidade de um estado por célula de Planck.

Vamos, pois, transcrever formalmente as invariâncias de interesse.

Temos um grupo Γ de translações finitas, subgrupo do grupo de Weyl-Heisenberg, descrito por:

$$\Gamma = \{(1, a, b) \in W, a, b \in \mathbf{Z}\} \tag{2.28}$$

(note que o centro está fixo).

Tomemos um subgrupo deste acima, na forma:

$$\Gamma' = \{(1, ka, b) \in W, a, b \in \mathbf{Z}\}, \tag{2.29}$$

k inteiro positivo fixo.

O espaço das funções inteiras $f(z)$ invariantes com respeito à $D(\alpha_{mn})$, com $\exp(\alpha_{mn}a^\dagger - \alpha_{mn}^- a) \in \Gamma'$ é um espaço k -dimensional. (ver [Vil-III])

Este espaço é representação irredutível de outro subgrupo N_k de W , a saber:

$$N_k = \{(\lambda, a, 0) \in W, a \in \frac{\mathbf{Z}}{k}, \exp \lambda \in C_k\} \tag{2.30}$$

onde

$$C_k = \{\exp(2\pi im/k), m = 0, 1, \dots, k-1\}.$$

O gerador de tal grupo N_k é o elemento $T_{1/k} = (\frac{1}{k}, 0, 1)$.

Desta forma para gerar base para o espaço k -dimensional supra citado, basta tomarmos a função theta de Jacobi Θ usual, já que esta pertence ao espaço em questão, e, pela irreducibilidade da representação, agimos com $T_{1/k}$ k -vezes, ie,

$$\Theta_{a/k} = T_{1/k}^a \Theta = D(\frac{a}{k}, 0, 1)\Theta \tag{2.31}$$

Estas funções $\Theta_{a/k}$ são chamadas funções theta com característica a e nível k . Os detalhes podem ser achados em [Vil].

Recordemos que, no caso do reticulado de von Neumann, a equação de invariância (Eq. funcional 2.26) tinha por solução, uma única função theta de Jacobi.

No caso presente, a rede é mais densa que a de von Neumann, na verdade, comportando em si k reticulados de von Neumann distintos. Daí, ao buscarmos soluções da equação de invariância (2.26), obtermos k soluções independentes.

A cada função theta de Jacobi $\Theta_{a/k}$ com característica a equivale um reticulado de von Neumann.

Lembremos também que da Equação (2.23) a função theta de Jacobi gerava todo o sistema de estados coerentes $\{D(\alpha_{mn})|\Theta_\varepsilon \rangle = \exp(i\pi F_\varepsilon(\vec{m})|\Theta_\varepsilon \rangle\}$ desta forma para cada função theta de Jacobi $\Theta_{a/k}$ com característica, ie, para cada reticulado de von Neumann, temos um sistema de estados coerentes, e cada um desses sistemas de estados coerentes é um sistema completo.

Vamos discutir somente mais um aspecto da teoria de representação antes de discutirmos geometricamente a construção.

Temos visto que a função theta de Jacobi Θ encerra em si todo um espaço de Hilbert $\{\alpha_{mn}\}$. Não seria no mínimo estranho este fato?

Cartier [Car] elucidava-nos muito propriamente.

Equações de invariância como (2.26) têm como espaço de soluções distribuições sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} de representação irredutível do grupo de Weyl-Heisenberg.

Para provar tal fato faz-se uso do seguinte teorema:

Seja $\{\mathcal{H}, \varpi\}$ representação irredutível de W , não trivial no centro Z de W , e seja B um subespaço Lagrangeano (ver definição no cap. I) n -dimensional de V ($\dim V = 2n$). O conjunto de soluções da equação:

$$\varpi(X).f = 0,$$

para todo $X \in V$, é um subespaço unidimensional de $\mathcal{H}_{-\infty}$ (espaço dual à \mathcal{H}_{∞}).

Este Teorema é um teorema geral que no caso em questão aplica-se para o seguinte teorema de classificação:

Seja L um reticulado em V tal que B assumia valores inteiros em $L \times L$, e seja F qualquer solução da equação (2.23) (ver também a observação posterior). Seja L' a rede dual a L tal que $[L' : L] = e^2$.¹ Finalmente, seja (ϖ, \mathcal{H}) qualquer representação irredutível de W , tal que $\varpi(t) = \exp(2\pi i \lambda t).I$ para t pertencente ao centro de W .

a) A representação induzida $D_{L,F}$ relativa ao reticulado L , é isomorfa a soma direta de e cópias de (ϖ, \mathcal{H}) .

b) O conjunto de equações

$$\varpi(e_\nu).f = \exp(\pi i F(v)).f, \text{ para } v \in L,$$

é um espaço e -dimensional de $\mathcal{H}_{-\infty}$.

¹O índice $[L' : L] = e^2$ é igual ao determinante da matriz $\{B(v_i, v_j)\}$ onde $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ é base de V com relação a qual L é o conjunto de vetores a coeficientes inteiros. No caso em que $e = 1$, a rede é dita auto dual, caso do reticulado de Von Neumann.

Ou seja, as funções Θ residem no completamento do espaço expandido pelos vetores de base, os estados coerentes. Entretanto se considerarmos que os Estados Coerentes, vetores do espaço de Hilbert, são os objetos de realidade física, as funções theta de Jacobi Θ , estão a nos auxiliar a análise destas questões concernentes a mais-que-completude de Sistemas de Estados Coerentes e a natureza da quantização.

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Vamos analisar o que temos visto até então, porém dum ponto de vista geométrico.

Já vimos que o sistema de estados coerentes aparece naturalmente da ação do grupo de Weyl.

Seja, então, (V, ω) espaço vetorial simplético $2n$ - dimensional. Existe uma pré-quantização bem definida, a saber:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} (p_i dq^i - q^i dp_i) \tag{2.32}$$

sendo θ_0 um potencial simplético e $\omega = dp_i \wedge dq^i$ a curvatura.

Seja uma função linear em V na forma:

$$f(p, q) = v^i p_i - u_i q^i = 2\omega(X, W), \tag{2.33}$$

para $X = p_i \partial_{p_i} - q^j \partial_{q^j}$ e $W = u_i \partial_{p_i} + v^j \partial_{q^j}$.

O observável quântico correspondente à f é:

$$\hat{f} = -i\hbar(u_i \partial_{p_i} - v^j \partial_{q^j}) + \frac{1}{2} (v^i p_i - u_j q^j). \tag{2.34}$$

Seja ρ_W o fluxo gerado por f , passando por W . Então o operador \hat{W} correspondente à $\hat{\rho}_W$ ou seja, a exponencial da ação de \hat{f} é:

$$\left(\hat{W} \Psi \right) (X) = \Psi (X + W) \exp(-i\omega(W, X)/\hbar). \tag{2.35}$$

Tal ação define representação do grupo de Weyl-Heisenberg, descrito anteriormente como $V \times T$ ($T = S^1$), com produto na forma :

$$(W, w) (Z, z) = (W + Z, wz \exp(i\omega(W, Z)/\hbar)). \tag{2.36}$$

Sem maiores considerações, anunciamos que o espaço de seções holomórfas sobre V é o espaço de representação irredutível para a ação acima.

A saber, sendo (V, ω) espaço vetorial simplético, tomemos uma estrutura complexa J compatível com V . Sendo (p, q) o sistema canônico de coordenadas em V

tomemos $Z^i = g^{ij}p_j + iq^i$. Então Z^i 's são coordenadas holomorfas, e $K = \frac{1}{2}g_{ij}z^i \bar{z}^j$ é o (super)potencial Kahleriano tal que

$$\omega = dp_i \wedge dq^i = \frac{1}{2}g_{ij}dz^i \wedge d\bar{z}^j = i\partial \bar{\partial} K. \tag{2.37}$$

O potencial simplético $\theta = i\frac{1}{2}g_{ij}dz^i \bar{z}^j$ é adaptado à polarização P , determinando uma trivialização global de B na qual as seções polarizadas são seções holomorfas $\Phi(z)$.

Como a pré-quantização é bem definida, os potenciais θ_0 e θ se relacionam por transformação de calibre, $\theta_0 = \theta + \frac{1}{2}idK$.

Portanto, no calibre θ_0 , as funções de onda polarizadas são da forma:

$$\Psi(z, \bar{z}) = \Phi(z) \exp\left(-\frac{1}{4\hbar}g_{ij}z^i \bar{z}^j\right) \tag{2.38}$$

e o produto interno:

$$\langle \Psi, \Psi' \rangle = \int_M \Phi \bar{\Phi}' \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}g_{ij}z^i \bar{z}^j\right) dzd\bar{z} \tag{2.39}$$

Os operadores \hat{W} do grupo de Weyl-Heisenberg, agem sobre tais seções na forma:

$$\hat{W} \left(\Phi(z) \exp\left(-\frac{1}{4\hbar}z^i \bar{z}^j\right) \right) = \Phi(z+w) \exp\left(-\frac{1}{4\hbar}(2\bar{w}_i z^j + \bar{w}_i w^j + \bar{z}_i z^i)\right) \tag{2.40}$$

Portanto a representação do Grupo de Weyl-Heisenberg é irredutível (é trivial ver a ausência de subespaços invariantes).

Como já dissemos, a representação holomorfa é também chamada de representação de Fock.

Dentro deste contexto, tomando-se uma seção $\Psi_0 = \Phi = 1$ (estado de mais baixa energia), e denominando,

$$\Psi_W = (-\hat{W})\Psi_0 \tag{2.41}$$

geramos $\{\Psi_W\}$, o conjunto de estados coerentes.

Observe que para cada ponto de (u, v) temos uma seção Ψ_W .

Vamos considerar agora as equações (2.34) e (2.38).

Notamos que

$$\hat{W}\hat{Z} = \exp(i\omega(W, Z))\widehat{(W+Z)}, \tag{2.42}$$

sendo $\omega(W, Z)$ a fase do termo de holonomia referente ao levantamento do laço (caminho fechado) gerado por $\widehat{WZ(W+Z)^{-1}}$ (ver a eq. (2.18))

O fato deste termo ser o termo de fase de holonomia pode ser visto já que no calibre $\theta_0 = \frac{1}{2}p_i dq^i - q^i dp_i$ temos:

$$\int_0^{(u_i, \theta_i)} \theta_0 = \frac{1}{2}(v^i p_i - u_i q^i) = \omega(X, W) \tag{2.43}$$

onde $X = p_i \partial_{p_i} - q^j \partial_{q^j}$ e $W = u_i \partial_{p_i} + v^j \partial_{q^j}$ como em (2.33).

Ainda, do teorema de Ambrose-Singer (ap II), sabemos que o grupo de holonomia é gerado por contrações da curvatura ω com campos horizontais $\{X_i\}$..

Desta forma, a condição de integrabilidade é expressa em termos da ação do grupo de Weyl, na forma:

$$\omega(W, Z) \in 2\pi\hbar\mathbf{Z}. \tag{2.44}$$

Desta forma, tomando-se uma seção básica Ψ_0 como em (2.40), a condição de integrabilidade leva-nos a considerar um conjunto de seções $\{\Psi_{W_i}\}$, tal que os vetores $\{W_i\}$ satisfaçam a condição (2.42) acima.

A seleção deste conjunto de vetores $\{W_i\}$ equivale a escolha de um reticulado L em V , gerado por vetores de base (w_1, w_2) , como em (2.17).

Podemos agora transportar toda análise feita anteriormente para o ponto de vista geométrico. Esta analisava os reticulados mais-que-completos", ie , tratava de sistemas de estados coerentes gerados por reticulados no espaço de fase, de densidade maior que a do reticulado de von Neumann, ou seja $\text{Im}(w_1 \bar{w}_2) < \pi$.

Tomemos, por exemplo, (w_1, w_2) como antes, tais que $\text{Im}(w_1 \bar{w}_2) = \pi/k$, k sendo um inteiro positivo maior que zero.

Se quisermos gerar sistemas completos, ou como temos visto, um conjunto de vetores $\{W_i = a_i w_1 + b_j w_2\}$ tais que os "laços" gerados por quaisquer dois deles verifiquem a condição de quantização (2.43), somos levados a selecionar no reticulado $L' = \{nw_1 + mw_2, n, m \in \mathbf{Z}\}$ um subreticulado de densidade igual à de von Neumann. Ocorre que, como visto em (2.27), temos k maneiras de selecionar tal sub-reticulado.

E cada escolha equivale à uma quantização do sistema.

A interpretação geométrica destes reticulados e sub-reticulados é feita como segue:

Temos visto que ao tomarmos dois vetores (w_1, w_2) não colineares no plano complexo \mathbf{C} , estes estabelecem o reticulado $L(w_1, w_2)$. Sabemos que o espaço quociente $\mathbf{C}/L(w_1, w_2)$ é homeomórfico a um toro $T(= S^1 \times S^1)$.

Dois reticulados $L(w_1, w_2)$ e $L'(w'_1, w'_2)$ coincidem se os pontos de um pertencerem aos pontos de outro. Desta forma obtemos que dois reticulados coincidem se:

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

onde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$.

Vejam como ficam as parametrizações do toro vista em termos de (w_1, w_2) . Sejam dois atlas $\{U_i, \varphi_i\}, \{V_i, \psi_i\}$ com funções de transição holomorfas. A estrutura complexa é uma classe de equivalência entre tais atlas (e de forma geral para variedades complexas [Sin], [Na]). O par (w_1, w_2) define a estrutura complexa do toro.

Já vimos que pares (w_1, w_2) e (w'_1, w'_2) definem o mesmo reticulado de forem $SL(2, \mathbf{Z})$ -relacionados. Estes definem a mesma estrutura complexa sobre o toro se forem $PSL(2, \mathbf{Z}) (= SL(2, \mathbf{Z})/\mathbf{Z}_2)$ -relacionados (a menos de uma constante multiplicativa comum).

Vamos expressar tal equivalência em função de uma outra base $(1, \tau)$ relacionada com (w_1, w_2) . Definimos o módulo τ de (w_1, w_2) por $\tau = w_1/w_2$, e tomamos o par $(1, \tau)$ como geradores do reticulado.

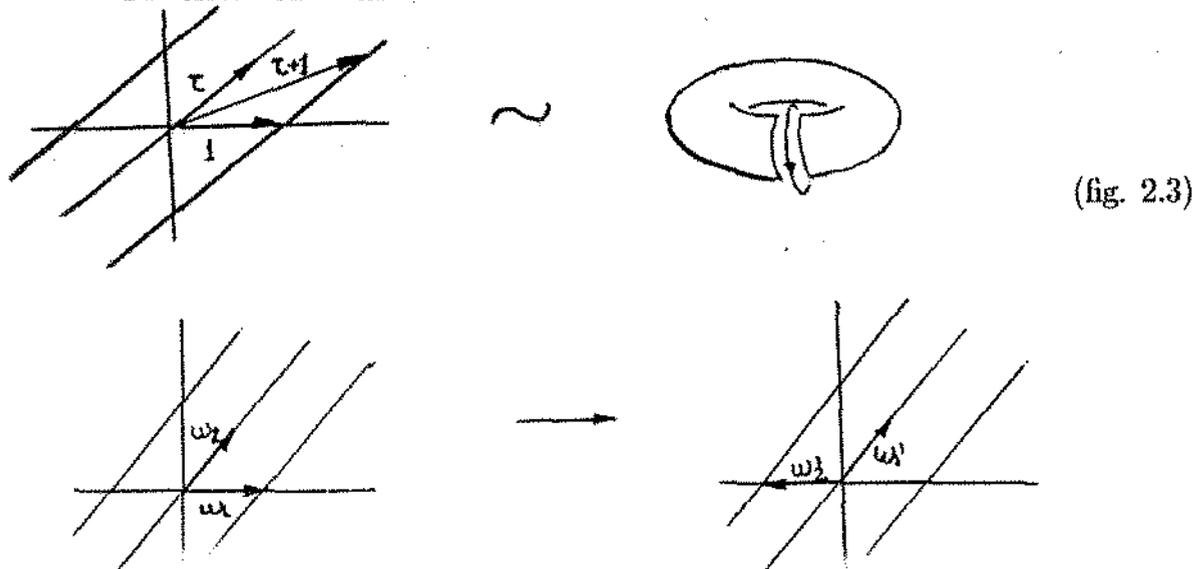
Sejam agora (w_1, w_2, τ) e (w'_1, w'_2, τ') duas bases. τ e τ' definem a mesma estrutura complexa (ie (w_1, w_2) e (w'_1, w'_2) são $PSL(2, \mathbf{Z})$) se:

$$\tau' = \frac{(a\tau + b)}{(c\tau + d)}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbf{Z}). \quad (2.46)$$

As transformações $\tau \rightarrow \tau'$ acima são as transformações modulares, e são geradas por $\tau \rightarrow \tau + 1$ (chamamos de transformação T) e $\tau \rightarrow -1/\tau$ (chamamos de transformação S).

Então, reticulados $(1, \tau)$ e $(1, \tau')$ definem a mesma estrutura complexa sobre o toro se forem relacionados por transformações modulares.

Pictoricamente temos:



(fig. 2.3)

Destá forma vemos que as transformações modulares são difeomorfismos globais sobre o toro.

Vimos em (2.26, 2.30 e 2.31) que, as funções Θ de Jacobi são as soluções das relações funcionais fundamentais que caracterizam os sistemas completos e mais-que-completos de estados coerentes sobre reticulados.

Geometricamente, as funções Θ de Jacobi são de fato seções sobre o toro C/L . Na verdade, as funções Θ de Jacobi caracterizam totalmente os fibrados lineares complexos sobre o toro. Em [Igu] (ver também [Gri]), é construído um homomorfismo sobrejetivo entre o conjunto das funções Θ de Jacobi sobre o toro C/L e o conjunto divisores $[D]$ de C/L , sendo os divisores uma outra forma de construir os fibrados lineares complexos (ap.II) (as funções Θ de Jacobi triviais o núcleo deste homomorfismo).

Ora, já que a questão da quantização contrange-nos a trabalhar sobre reticulados, e portanto toros, e sendo as funções Θ , seções (funções de onda) que classificam os fibrados holomórficos sobre estes, temos que a quantização do sistema nos leva a analisar os aspectos geométricos da representação do grupo de Heisenberg sobre o conjunto das funções Θ de Jacobi.

De forma geral, a ação do grupo de Heisenberg sobre as funções holomorfas em termos do parâmetro modular τ é na forma:

para $(\lambda, a, b) (\lambda', a', b') = (\lambda\lambda' \exp(2\pi i B(a, b')), a + a', b + b')$,
temos:

$$\begin{aligned} T(0, a, 0) f(z) &= \exp(i\pi a^2 \tau + 2\pi i a z) f(z + a\tau), \quad 2.47 \\ T(0, 0, b) f(z) &= f(z + b). \end{aligned}$$

Pois bem, por um lado, como vimos em (2.27, 2.30 e 2.31), no caso de termos um toro gerado por (w_1, w_2) tal que $\text{Im}(w_1 \bar{w}_2) = \pi/k^2$, sendo τ a estrutura complexa do toro, temos k funções Θ de Jacobi, formando base para representação de $N_k = \{g \in W, g = g(\lambda, a, 0), a \in \mathbb{Z}(\text{mod } k), \lambda \in C_k\}$, módulo L onde $C_k = \{\exp(2\pi i \frac{m}{k}), m = 0, 1, \dots, k-1\}$. O subgrupo N_k tem por gerador o elemento $T_{1/k} = (1, 1/k, 0)$. Ocorre que, em função das $(1, \tau)$, fazendo uso das equações (2.46, 2.47) acima, mostra-se que esta ação equivale exatamente a esta transformação (fig. 2.3) sobre o toro.

Por outro lado, como mencionado, a cada função Θ , corresponde um fibrado linear holomorfo sobre $T = C/L$.

Recordemos também que, caso fixemos uma curvatura ω , vimos em (1.29) que a liberdade que temos para escolhermos o fibrado linear (L_i, ω) é dada por $H^1(T, \mathcal{O}^*)$.

Ora, se sobre o toro montamos um fibrado com seções $\{\Theta_i\}_{i=1, \dots, k-1}$ este fibrado é uma coleção de fibrados $\{L_i, \omega\}$ sobre $M = T$. E o grupo, cuja base

²Se fixarmos por exemplo e sem perda de generalidade $|w_2| = 1$, temos equivalentemente $\text{Im } \tau = \pi/k$.

da representação é $\{\Theta_i\}_{i=1,\dots,k-1}$ age intercambiando os fibrados $\{L_i, \omega\}$. Ora, mas como foi visto no capítulo 1 cada fibrado é uma quantização.

Resumindo, vimos que a quantização levou-nos a trabalhar com reticulados cuja célula mínima é do tamanho da célula de Planck. Caso tomemos reticulados com densidade maior que esta obtemos um sistema com mais de uma quantização, ie, mais de um estado de vácuo, por exemplo k estados, gerando k espaços de Hilbert.

Algebricamente obtivemos estes k espaços representados por k funções Θ de Jacobi com característica.

Geometricamente, estas k funções equivalem a k fibrados de linha de mesma curvatura ω , no entanto inequivalentes. Esta inequivalência decorre do fato que, para mapearmos um fibrado no outro, agimos com um sub-grupo discreto do grupo de Weyl, equivalendo geometricamente a difeomorfismos globais no toro C/L , obtido do reticulado L .

Vamos agora precisar melhor o sentido geométrico da ação do grupo N_k sobre os fibrados $\{L_i\}$ diretamente.

Seja (L, θ) um fibrado linear holomorfo tal que localmente $d\theta = \omega$. Os fibrados lineares (L_i, θ_i) inequivalentes, tais que $d\theta_i = \omega$ (localmente) são equivalentes a fibrados na forma $\{L_i = L \otimes B_i\}$, onde B_i são fibrados sobre M com curvatura nula.

Cada Θ_i é uma seção sobre L_i . Como vimos em (2.17), o sistema de estados coerentes é gerado pela ação do grupo de Heisenberg restrito a vetores no reticulado. Ainda, cada translação no reticulado completo é mapeada em um laço no toro. Logo temos uma equivalência entre o grupo de Heisenberg no reticulado e o grupo de holonomia no toro, e portanto, o grupo de holonomia agindo sobre a seção Θ_i gerará todo espaço de Hilbert de interesse \mathcal{H}_i , o sistema de estados coerentes (2.22).

Sabemos também que o conjunto $\{\Theta_i\}$ forma representação irredutível para o grupo N_k .

Ainda, a cada Θ_i equivale um fibrado L_i e um sistema completo de estados coerentes \mathcal{H}_i . Logo, N_k age sobre o conjunto de fibrados $\{L_i\}$ intercambiando os fibrados, ou, equivalentemente, intercambiando os espaços \mathcal{H}_i .

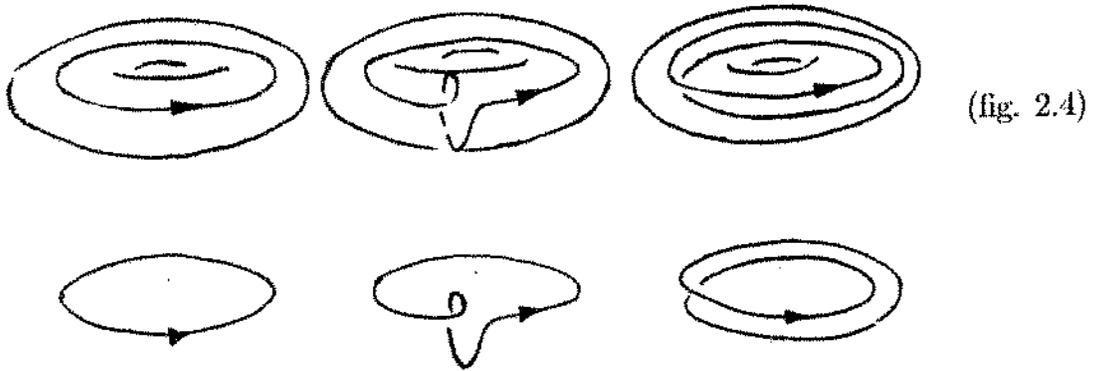
Intercambiar os espaços \mathcal{H}_i , significa trocar as representações do grupo de holonomia. Este fato deve obviamente equivaler às trocas do fibrado.

Por um lado sabemos que os fibrados L_i são na forma $L \otimes B_i$, e portanto, os grupo de holonomia de vem diferir apenas pela contribuição vinda de B_i . B_i são fibrados lineares com curvatura nula, e pelo teorema de Ambrose-Singer, os grupo de holonomia são discretos.

Por outro lado sabemos que os grupo de holonomia são imagens do grupo de homotopia da base. O grupo de homotopia é fixado escolhendo-se seu gerador, e uma vez que não existe escolha canônica para tal, diferentes representações do grupo de homotopia equivale a diferentes geradores. uma vez que não existe

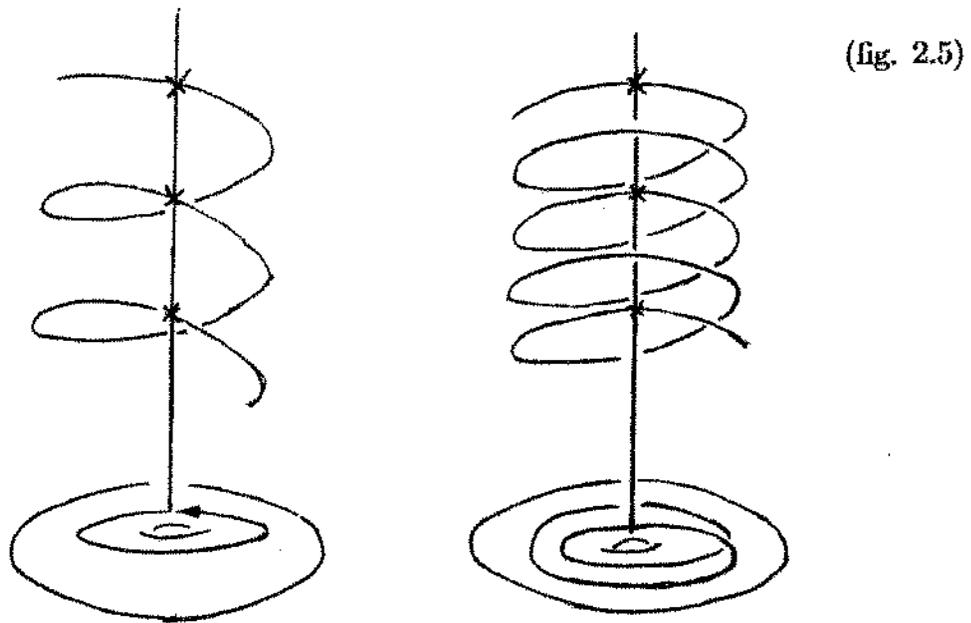
escolha canônica para tal.

Por exemplo, podemos tomar por gerador os laços



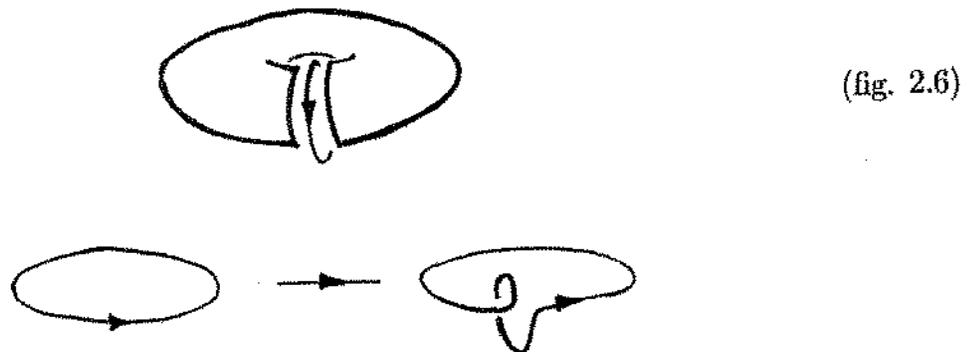
(fig. 2.4)

Desta forma, os diferentes grupos de holonomia discretos são imagens de diferentes escolhas da base. Pictoricamente temos:



(fig. 2.5)

De fato a ação de N_k equivale a deformação não trivial dos laços na base, vimos que os geradores N_k ($S_{1/k}, T_{1/k}$) são difeomorfismos globais. Ora podemos ver que as ações, equivalem a:



(fig. 2.6)

Desta forma o que na base representa intercambiar os laços, na construção geral estamos intercambiando fibrados, ou, intercambiando representações do grupo de holonomia, ou ainda, trocando de quantização do sistema clássico.

Vamos agora, interpretar fisicamente todos estes fatos.

Temos visto que para um sistema de estados coerentes mais-que-completo, oriundo de um reticulado com célula básica de tamanho $S = \pi/k$ temos k espaços de Hilbert gerado por k sistemas coerentes completos.

Estaria este fato em desacordo com os princípios Mecânicos Quânticos?

Isto é, que sistema é este?

Lembremos que, ao tomarmos uma célula básica de área $S = \pi/k$, estávamos populando uma célula de Planck (de área π) com k estados. Daí termos k espaço de Hilbert e operadores que agem (dentro da célula de Planck) intercambiando os espaços. Estes operadores, como foi visto em (2.14 e 2.17) estão associados com os núcleos $\langle \alpha | \beta \rangle$.

Seja a hamiltoniana de oscilador harmônico $H_0 = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2 - \hbar)$ sendo $|\Psi_0\rangle$ seu estado de mais baixa energia, ie, $H_0|\Psi_0\rangle = 0$. Se mapearmos $|\Psi_0\rangle$ em um estado coerente $|\alpha\rangle = D(\alpha)|\Psi_0\rangle$, e agirmos por conjugação em H_0 , na forma:

$$H_\alpha = D(\alpha)H_0D(\alpha)^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{p} - P)^2 + (\hat{q} - Q)^2 - \hbar \right\} \quad (2.48)$$

para $\alpha = P + iQ$,

temos que

$$H_\alpha|\alpha\rangle = 0 \quad (2.49)$$

Portanto os estados $|\alpha\rangle$ são estados de vácuo dos hamiltonianos H_α . Estas hamiltonianas são referentes a osciladores harmônicos centrados em (P, Q) .

Então, estamos populando uma célula de Planck com k -auto estados de vácuo de hamiltonianas conjugadas. Este panorama assemelha-se deveras com a construção de Atiyah que relaciona as anomalias quânticas com o teorema de índice (cap), onde estes estados de vácuo (para o caso em que H é o operador de Dirac) são polarizações do vácuo.

Estaríamos "quase"-segundo-quantizando o estado de vácuo?

"Quase" no sentido de não darmos origem a infinitos vácuos.

Vamos analisar esta questão.

Uma abordagem heurística de segunda quantização é feita como segue:

Numa teoria campo escalar, o campo $\phi(x, t)$ toma o lugar de variável $x(t)$, e descreve um sistema com um número infinito de graus de liberdade, já que, para cada tempo t , assume vários valores em cada ponto do espaço.

Temos a Lagrangeana L e a densidade de Lagrangeana \mathcal{L} que regem a física do problema, relacionando-se por:

$$\int L(\phi(t), \dot{\phi}(t)) dt = \int \int \mathcal{L}(\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t)) dx dt$$

Para quantizar o campo ϕ ponto a ponto, quantizamos antes valores médios de ϕ em pequenas células δV_r , ou seja, dividimos o espaço em células δV_r (veja a noção do reticulado aparecendo) e tomamos a média ϕ_r de $\phi(x)$ nesta célula. Além disso, a cada célula associamos uma Lagrangeana \mathcal{L}_r , que é a média da densidade do Lagrangeana \mathcal{L} na célula δV_r . O momento p_r canônico é dado por:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_r(t)} = \delta V_r \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{\phi}_r(t)} = \delta V_r \pi_r(t) \tag{2.50}$$

onde

$$\pi_r(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x, t)}. \tag{2.51}$$

Desta forma, das relações canônicas

$$\begin{aligned} [\phi_r(t), p_s(t)] &= i\hbar \delta_{rs}, \tag{2.52} \\ [\phi_r(t), \phi_s(t)] &= [p_r(t), p_s(t)] = 0 \end{aligned}$$

obtemos a quantização nas células

$$[\phi_r(t), \pi_s(t)] = i\hbar \delta_{rs} / \delta V_r. \tag{2.53}$$

No limite $\delta V_r \rightarrow 0$ obtemos a quantização canônica:

$$\begin{aligned} [\phi(x, t), \pi(x', t)] &= i\hbar \delta(x - x') \tag{2.54} \\ [\phi(x, t), \phi(x', t)] &= [\pi(x, t), \pi(x', t)] = 0. \end{aligned}$$

Notemos que a quantização na célula é equivalente à quantização de sistemas de estados coerentes mais que completos, cuja densidade é maior que um estado por célula de Planck (eq. 2.17).

Note também que não se trata simplesmente de aumentarmos os graus de liberdade, e sim adentrarmos em teorias de fenômenos abaixo de uma dimensão crítica.

Para finalizar, lembremos a apresentação da noção de quantização de uma teoria de muitos corpos. Denotamos \mathcal{H} o espaço de uma partícula e $\mathcal{H}^{\otimes n}$ n-vezes o produto tensorial de \mathcal{H} . Segundo [Wey], uma teoria de n -bósons idênticos é descrita pela simetrização $[\mathcal{H}^{\otimes n}]$ de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ (para férmions antimetrização).

A seções $\Psi(n_1, n_2, \dots)$ do espaço unitário $[\mathcal{H}^{\otimes n}]$ transformam-se como os monômios

$$\frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} \tag{2.55}$$

Esta apresentação chama-se redução simétrica de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ à $[\mathcal{H}^{\otimes n}]$.

Em [Wey] temos uma apresentação do método de segunda quantização como sendo um método equivalente (no que concerne a descrição da física de n -corpos) ao método de redução simétrica, porém sem necessariamente ter a prescrição no número n de corpos.

Observe que o método de redução simétrica, parece ter uma descrição apropriada em termos de fibrados complexos.

A saber se considerarmos a representação de Fock nas variáveis holomorfas z , de forma que $z^n / \sqrt{n!} = \langle z | n \rangle$ e considerando a expansão em série de um estado coerente, como em (2.16) temos que os estados coerentes estão definidos em $[\mathcal{H}^{\otimes n}]$, sendo portanto uma base adequada para tratar de problemas de muitos corpos.

De fato, uma observação que gostaríamos de deixar, feita em [Ku] onde, ao requerer um formalismo para uma teoria de muitos corpos lê-se:

"... The crucial property to be required for this Hilbert space is "continuous nature"; the "continuous nature" implies that the Hilbert space can be labeled by the point of a manifold possessing with a certain continuous property, thereby we can safely define the paths over which path integration should be performed. Such a Hilbert space can be indeed realized as a generalized coherent states (GCS)... "

No último capítulo voltaremos a abordar este aspecto.

Capítulo 3

TEORIA DE CHERN-SIMONS

TEORIA DE CALIBRE DE CHERN-SIMONS

Desde que Witten [Wit1,2,3] apresentou-nos a relação entre as teorias de calibre tipo Chern-Symons em três dimensões e: os modelos integráveis na rede, as teorias conformes de campo racionais em duas dimensões, a teoria de Donaldson, os polinômios de Jones da teoria de nós, o interesse em investigar a quantização das teorias de Chern-Simons tornou-se grande.

A teoria de Chern-Simons é dada pela ação:

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3) \quad (3.1)$$

onde M é uma variedade de dimensão 3.

Começaremos tratando aqui o caso em que $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ onde Σ é uma variedade 2-dimensional e $U(1)$ o grupo estrutural (o caso geral será discutido posteriormente).

Existem dois métodos canônicos para a quantização de sistemas vinculados.

Num deles, impomos primeiramente os vínculos e posteriormente quantizamos o espaço de fase físico. No outro, a quantização é efetuada anteriormente à imposição dos vínculos. Esta será a abordagem que iremos tratar.

A ação da teoria de Chern-Simons abeliana lê-se:

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M AdA \quad (3.2)$$

No caso em que $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, o operador de derivada exterior e os campos decompõem-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d &= dt\partial_t + \tilde{d} \quad 3.3 \\ A &= A_0 + \tilde{A} \end{aligned}$$

onde \sim indica as coordenadas de Σ .

Impondo o calibre $A_0 = 0$, temos para a ação

$$S = \frac{k}{4\pi} \int dt \int_{\Sigma} d^2x \epsilon^{ij} A_i \frac{d}{dt} a_j \quad (3.4)$$

Desta forma, sendo a lagrangeana linear nas derivadas temporais, temos os campos conjugados:

$$\{A_i(x), A_j(x')\} = \frac{2\pi}{k} \varepsilon_{ij} \delta^{(2)}(x - x') \quad (3.5)$$

Introduzimos agora uma estrutura complexa em Σ que nos fornece coordenadas locais (z, z') de forma que os campos são expressos nessas coordenadas por $A = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$. O parênteses de Poisson quantizado tem agora a forma:

$$\{A_z(z, \bar{z}), A_{\bar{z}}(z', \bar{z}')\} = \frac{\pi}{k} \delta^{(2)}(z - z') \quad (3.6)$$

Desta forma, temos uma realização holomorfa dos funcionais de $A_{\bar{z}}$, e portanto $A_{\bar{z}}$ deve agir neste espaço como multiplicação pela variável $A_{\bar{z}}$ e $A_z \equiv (\delta / \delta A_{\bar{z}})$ como diferenciação funcional. Vale ainda a identidade operatorial $A_z^\dagger = A_{\bar{z}}$ com relação ao produto interno:

$$(\Psi, \Psi') = \int \mathcal{D}(A_z, A_{\bar{z}}) \exp\left(-\frac{k}{4\pi} \int d^2z A_z A_{\bar{z}}\right) \Psi[A_{\bar{z}}] \overline{\Psi'[A_{\bar{z}}]}, \quad (3.7)$$

Tal formulação equivale, na mecânica quântica, aos operadores bosônicos a e a^\dagger , na representação holomorfa (de Fock-Bargman $(z, \frac{d}{dz})$).

Observe que a integração do expoente não é uma integral funcional e sim um potencial de Kähler, definido no espaço das conexões. Desta forma, temos um sistema quantizado holomorfamente, do ponto de vista geométrico (1.35 e 1.37), e não apenas pré-quantizado.

Queremos agora achar o espaço físico, impondo os vínculos. Para tal, impomos a invariância da nossa teoria pelas transformações de calibre residuais.

A simetria residual da teoria é dada pelo grupo das transformações de calibre que preservam a calibragem tempo-axial, ie, impomos a invariância por calibragem espacial na variedade Σ (sem considerar transformações dependentes do tempo).

Na verdade, somente um subgrupo destas transformações de calibre independentes do tempo serão vistas como simetrias de calibre. As transformações "largas" (finitas) serão analisadas à parte, estando o espectro da teoria no espaço de representação destes operadores, ao invés de ser invariante perante sua ação. Voltaremos a este assunto nos cálculos explícitos.

Queremos então encontrar o subespaço das funções de ondas físicas (admissíveis). Para tal, selecionamo-las pela restrição de que as densidades $\exp\left(-\frac{k}{4\pi} \int d^2z A_z A_{\bar{z}}\right) \Psi[A_{\bar{z}}] \overline{\Psi'[A_{\bar{z}}]}$ sejam invariantes por transformações de calibre.

As soluções irão gerar um espaço vetorial que será munido com um produto interno desde que a integração sobre a medida $\mathcal{D}(A_z, A_{\bar{z}})$ intercepte as órbitas (oriundas da ação por transformação de calibre) apenas uma única vez. Desta forma tanto as funções de onda como a medida já estarão definidas sobre o espaço modular.

Para realizarmos explicitamente o procedimento acima vamos, antes de mais nada, introduzir a parametrização de Atiyah para os campos de calibre [Ati]. Lembremos que os campos A são 1-formas sobre Σ Lie-valorizadas (sendo \mathcal{G} a álgebra de Lie do grupo G) e as transformações de calibre são mapas da variedade de base Σ , no grupo estrutural $G (= U(1))$ da teoria de calibre, tomando-se a representação adjunta do grupo.

Precisamos classificar as 1-formas \mathcal{G} -valorizadas sobre Σ , bem como as aplicações de Σ em $U(1)$.

Para classificar as 1-formas sobre Σ , vamos investigar os objetos duais, os 1-ciclos e o primeiro grupo de homologia.

O primeiro grupo de homologia de uma superfície de Riemann de genus g é gerado pelo sistema canônico de contornos fechados $\alpha_i, \beta_j, i, j = 0, 1, \dots, g$ com as intersecções indexadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \#(\alpha_i, \alpha_j) &= \#(\beta_i, \beta_j) = 0, \\ \#(\alpha_i, \beta_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{3.1}$$

(fig.3.1)



(ver [Gri]).

Desta forma, podemos achar uma base $\{w_i\}_{i=1, \dots, g}$ de 1-formas holomorfas tal que:

$$\int_{\alpha_i} w_j = \delta_{ij}, \quad \int_{\beta_i} w_j = \tau_{ij} \quad (3.2)$$

$$\int_{\Sigma} w_i(z) \overline{w_j(z)} = -\text{Im } \tau_{ij}$$

A matriz $\tau (= (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,g})$ é simétrica e tem a sua parte imaginária positiva. Desta forma a parametrização de Atiyah para os campos de calibre escreve-se

$$A_{\bar{z}} = (u_a u)^{-1} \partial_{\bar{z}} (u_a u), \quad (3.10)$$

onde $u : \Sigma \rightarrow U(1)^{\mathbb{C}}$ (complexificação de $U(1)$) é um mapa univ valorizado e u_a nos dá a projecção da 1-forma na base dos contornos não triviais $\{w_i\}$, ou seja

$$u_a = \exp \left(\pi \int^{\bar{z}} \overline{w(z)} (\text{Im } \tau)^{-1} a - \pi \bar{a} (\text{Im } \tau)^{-1} \int^z w(z) \right) \quad (3.11)$$

sendo $a = (a_i = \frac{1}{4\pi} \int w_i(z) A_{\bar{z}} = \text{coeficientes das projecções})_{i=0,\dots,g}$. Explicitamente:

$$A_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \chi(z, \bar{z}) + \pi a (\text{Im } \tau)^{-1} \overline{w(z)}, \quad (3.12)$$

sendo $\chi(z, \bar{z})$ um mapa analítico em Σ .

As transformações de calibre, sendo mapas de variedade de base Σ , no grupo estrutural $U(1)$ são homotopicamente equivalentes se induzirem mapas idênticos entre os grupos de cohomologia, ie

$$f_1 \sim f_2 : \Sigma \rightarrow U(1),$$

$$\text{se } f_1^* = f_2^* : H^k(\Sigma) \rightarrow H^k(U(1)).$$

Sendo $H_1(\Sigma) = \mathbb{Z}^{\oplus 2g}$ e $H_1(U(1)) = \mathbb{Z}$, as transformações de calibre são classificadas por um número inteiro sendo o índice de enovelamento ao longo de contornos homologicamente não triviais em Σ .

Portanto a forma geral de uma transformação de calibre terá uma parte analítica e outra gerada pelas 1-formas canónicas duais dos contornos canónicos $\{\alpha_i, \beta_j\}_{i,j=1,\dots,g}$, ie,

$$R(z, \bar{z}) = \exp \left(i\lambda(z, \bar{z}) + i\pi m (\text{Im } \tau)^{-1} \int_{z_0}^z (\bar{w} - w) - i\pi n (\text{Im } \tau)^{-1} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} (\tau \bar{w} - \bar{\tau} w) \right) \quad (3.13)$$

onde λ é um mapa real analítico de Σ , $n = (n_1, \dots, n_g)$, $m = (m_1, \dots, m_g)$, $n_i, m_j \in \mathbb{Z}$.

Feita a classificação, observamos que, por transformações de calibre $A_{\bar{z}} \rightarrow A_{\bar{z}} - R^{-1} \partial_{\bar{z}} R$, temos a separação:

$$\begin{aligned} \chi(z, \bar{z}) &\rightarrow \chi(z, \bar{z}) + \lambda(z, \bar{z}), \quad (3.14) \\ a &\rightarrow a + m + \tau.n. \end{aligned}$$

Portanto, as transformações de calibre preservam a parametrização dos campos de calibre, separados em uma parte analítica e outra multi-valorizada.

A transformação de calibre de χ e a são ditas pequenas e largas respectivamente. As transformações largas são de caráter nitidamente topológicos, sendo o espaço de representação (e não cada vetor individualmente) deste grupo finito, o objeto maior de nossa atenção. Como já havíamos salientado, estas transformações largas não serão vistas como simetrias das funções de onda e sim do espaço de soluções.

Vamos agora procurar as funções de ondas admissíveis, ie, aquelas definidas sobre o espaço modular, ou seja, as invariantes por transformações de calibre.

Notemos que o potencial de Kähler também se fatora em duas partes ortogonais, ie,

$$\exp\left(-\frac{k}{4\pi} \int A_z A_{\bar{z}}\right) = \exp\left(-\frac{k}{4\pi} \int \partial_z \bar{\chi} \partial_{\bar{z}} \chi\right) \exp\left(-k\pi \bar{a} (\text{Im } \tau)^{-1} a\right). \quad (3.15)$$

Portanto, as funções de onda admissíveis serão também fatorizadas na forma $\Psi(A_{\bar{z}}) = \Xi(\chi) \Phi(a)$. Na verdade, todo o processo de quantização, a partir da definição das variáveis (operadores) holomórficos, passando pelo comutador, até o estabelecimento das funções de onda, terá uma releitura fatorizada. Note que a parte do funcional Φ sobre a variável "topológica" a , aparenta mais uma função de onda mecânico quântica, definida sobre um reticulado num hiperplano (g -dimensional) complexo. Esta característica será discutida em análise posterior.

Para realizar explicitamente as funções de onda admissíveis, vamos analisar a "variação" que esperamos que tal função tenha quando submetidas à uma transformação de calibre. Já sabemos que podemos "fatorizar" a análise.

Analisando primeiramente a dependência na variável χ (sensível às pequenas transformações de calibre), observamos que a invariância da medida $\exp\left(-\frac{k}{4\pi} \int \partial_z \bar{\chi} \partial_{\bar{z}} \chi\right) \overline{\Xi(\chi)}$ por uma transformação infinitesimal $\varepsilon(z, \bar{z})$, requer que:

$$\Xi(\chi + \varepsilon) = \Xi(\chi) \exp\left(-\frac{k}{4\pi} \int \varepsilon \partial_z \partial_{\bar{z}} \chi\right). \quad (3.16)$$

Desta forma, temos que uma solução na forma:

$$\Xi(\chi) = \exp\left(\frac{k}{4\pi} \int \partial_z \chi \partial_{\bar{z}} \chi\right) \quad (3.17)$$

que por sua analiticidade é invariante também por transformações de calibre largas (na verdade insensível). Cabe aqui uma observação. Expandindo o funcional $\Xi(\chi + \varepsilon)$ em série (usando a derivação funcional), obtemos a Lei de Gauss, da invariância acima. Daí lembrarmos o fato da Lei de Gauss ser a asserção física da invariância de calibre das funções de onda.

Vamos agora analisar a parte do funcional definida sobre a variável a .

A invariância da medida $\exp(-\pi k \bar{a} (\text{Im } \tau)^{-1} a) \Phi(a) \overline{\Phi(\bar{a})}$ sobre as transformações de calibre largas pode ser fatorada holomorfaamente (ie, dependendo independentemente de a e \bar{a}) como segue:

$$\begin{aligned} & \Phi(a + m + n\tau) = \\ & \Phi(a) \exp \left\{ k\pi (m + n\bar{\tau}) \cdot (\text{Im } \tau)^{-1} a + \frac{1}{2} k\pi (m + n\bar{\tau}) (\text{Im } \tau)^{-1} (m + n\tau) + ikm \cdot n + i\phi_1 m + i\phi_2 n \right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde ϕ_1, ϕ_2 são fases vectoriais, ie, $\phi_i = (\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{ig})$ (compare os últimos três termos do expoente com 2.23), sendo necessário que k seja um inteiro (o argumento para que k seja inteiro pode ser obtido qualitativamente o que remete ao argumento de Dirac para preservar a invariância da teoria, ou diretamente como em [Lab]).

As funções inteiras em a mais gerais que verificam esta regra de transformação são combinações lineares das funções Θ de Jacobi de característica $p \in \mathbf{Z}_{2k}^{\text{fg}}$ e grau k (ver [VII]).

Com respeito ao produto interno, as funções Θ com características diferentes são ortogonais mutuamente. Na verdade, já temos que estas são distribuições sobre o espaço de Hilbert das conexões (no caso presente) ou (classes de equivalência de) divisores sobre fibrados lineares. No apêndice temos uma breve apresentação à teoria das funções Θ de Jacobi.

Temos então k^g funcionais mutuamente ortogonais. Estas compõem o espectro do grupo das transformações largas de calibre, como já havíamos mencionado.

A primeira observação a se fazer é que estas transformações discretas definem um reticulado sobre um espaço complexo \mathbf{C}^g . A interpretação deste reticulado será dada geometricamente via fibrados associados.

Este reticulado está indexado pelos números m, n (vetores \mathbf{Z} -valorizados) que são o grau de enovelamento em torno dos ciclos canônicos (α_i, β_j) não triviais.

O operador que intercambia os k^g vetores da base deverão ser então, operadores que transladam a variável (ou índice das funções) $a \rightarrow a + m + n\tau$, à medida que dermos (m, n) voltas nos ciclos não triviais. Além disso, o operador deve ser um observável natural da teoria topológica de campos, sendo portanto topologicamente invariante e invariante por transformações de calibre.

Tais operadores são os laços de Wilson $\exp(i \int_c A)$. Estes são operadores de holonomia em fibrados principais. Porém estes operadores de holonomia tem uma mudança da interpretação geométrica quando inseridos no contexto destas teorias quânticas de campo.

Observemos primeiro que da quantização dos campos A , os operadores de holonomia, que pertenciam a um subgrupo de grupo estrutural $U(1)$, passam a ter uma lei de comutação "quantizada", não mais abeliana:

$$\exp(i \int_C A) \exp(i \int_{C'} A) = \exp\left(i \frac{\pi}{k} \#(C, C')\right) \exp(i \int_{C+C'} A), \quad (3.19)$$

onde $\#(C, C')$ vem de integração do delta de Dirac (portanto efeito quântico), e mede quantas vezes os ciclos C e C' interceptam. Para obter a identidade acima, basta usar a expansão de Baker-Campbell-Hausdorff. Com isso temos

$$\exp(i \int_C A) \exp(i \int_{C'} A) = \exp(i \int_C A + i \int_{C'} A) + \frac{i}{2} \left[\int_C A, \int_{C'} A \right]. \quad (3.20)$$

Se $A = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ então:

$$\left[\int_C A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}, \int_{C'} A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z} \right] = \int_C \int_{C'} [A_z, A_{\bar{z}}] dz d\bar{z} \quad (3.21)$$

Dado que esperamos uma ação nas variáveis (a_i, \bar{a}_j) , iremos considerar apenas a projeção de $A_z, A_{\bar{z}}$ sobre as 1-formas canônicas duais aos ciclos homologicamente não triviais, ie,

$$\sum_j \sum_n \int_C \int_{C'} \left[\pi a_i (\text{Im } \tau)_{ij}^{-1} \bar{w}_j(z), \pi \bar{a}_m (\text{Im } \tau)_{mn}^{-1} w_n(z) \right] =$$

$$\sum_j \sum_n \int_C \int_{C'} \pi^2 \left[a_i (\text{Im } \tau)_{ij}^{-1}, \bar{a}_m \right] \bar{w}_j(z) (\text{Im } \tau)_{mn}^{-1} w_n(z)$$

Agora considerando que o potencial Kähler nas variáveis (a_i, \bar{a}_j) assume a forma $-k\pi a_i (\text{Im } \tau)_{ij}^{-1} \bar{a}_j$, devemos ter que $\left[a_i (\text{Im } \tau)_{ij}^{-1}, \bar{a}_m \right] = \delta_{jm} / \pi k$. Portanto:

$$\int_C \int_{C'} [A_z, A_{\bar{z}}] dz d\bar{z} = \sum_{j,n} \frac{\pi}{k} \int_C \int_{C'} \delta_{jm} (\text{Im } \tau)_{mn}^{-1} \bar{w}_j(z) w_n(z'). \quad (3.22)$$

Decompondo os ciclos C, C' nos canônicos α_i, β_j na forma $C = a_i \alpha_i + b_j \beta_j$, $C' = a'_i \alpha_i + b'_j \beta_j$ e considerando as relações (??) obtemos:

$$\int_C \int_{C'} [A_z, A_{\bar{z}}] dz d\bar{z} = \frac{\pi}{k} a_m b'_m = \frac{\pi}{k} \#(C, C'). \quad (3.23)$$

A quantização dos potenciais A_i s é portanto uma deformação (veja [Tak]) do produto do grupo (ou álgebra) de Lie $U(1)$. Inserimos uma estrutura simplética

(álgebra de Heisenberg) na álgebra de Lie do grupo $U(1)$. Esta deformação está intimamente ligada à representação dos grupo quânticos em Chern-Simons. No próximo capítulo abordaremos este assunto.

Vamos agora interpretar geometricamente todos estes resultados. Lembremos que temos primeiro, um fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M (= \Sigma \times \mathbf{R})$ aonde estão definidos as conexões $\{A\}$, e o fibrado linear L sobre o espaço de conexões definido para quantizarmos o sistema $\{A\}$. O fibrado linear é definido holomorficamente $L \xrightarrow{\pi} F$, onde F é o espaço das conexões, módulo transformações de calibre, ou o espaço modular. Vimos no entanto que as transformações de calibre pequenas, são as simetrias efetivas das nossas funções de onda, ou seções holomorfas, e transformações de calibre largas formam um grupo discreto, cujo espaço de representação tem por base as funções Θ de Jacobi com característica. Cabe lembrar que o que chamamos de transformações de calibre, que na linguagem dos fibrados são as funções de transição no fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$ sobre as 1-formas de conexão, no fibrado linear $L \xrightarrow{\pi} F$ não passa de translações nas coordenadas, já que a nossa base é o próprio espaço dos potenciais (ou 1-formas de conexão do fibrado principal associado à teoria de calibre).

Essas translações são oriundas da ação do grupo de Weyl-Heisenberg definido pela quantização do sistema. Vimos no capítulo anterior como definir holonomias a partir de fases geradas pela ação do grupo de Weyl-Heisenberg.

As fases geradas por transformações pequenas não afetam as seções, ao passo que as fases geradas pelas transformações largas tem relevância. Desta forma as transformações de calibre analíticas são mapeadas em laços triviais.

Em geral, o grupo de holonomia sofre sérias restrições se impormos as condições de integrabilidade, ou de quantização. Cabe ressaltar que no caso estamos tratando duma teoria segundo quantizada de campos, com a quantização "deltiforme".

Entretanto, a quantização deltiforme deu lugar a uma quantização finita, porém diferente da usual "mecânica quântica", a saber:

Tínhamos a quantização original

$$\left[A_z, A_{\bar{z}'} \right] = \frac{\pi}{k} \delta(z - z')$$

que pela análise das variáveis relevantes do sistema resultou em

$$\left[a_i (\text{Im } \tau)_{ij}^{-1}, \bar{a}_m \right] = \delta_{jm} / \pi k \quad (3.24)$$

sendo a_i, \bar{a}_j o número de enovelamento em torno dos ciclos canônicos de homologia não trivial α_i, β_j .

Desta forma vemos aqui que da mesma forma que, como no capítulo II, o grupo de homotopia da base têm uma importância fundamental na quantização do sistema. Para evitarmos a quantização deltiforme (a infinitas variáveis de campo), selecionamos as variáveis relevantes do sistema a partir de considerações topológicas do espaço de fase clássico. Cada escolha de a_i equivale a uma conexão num fibrado principal, que especifica qual a teoria de calibre na qual estamos

trabalhando, ie, qual o sistema físico em questão.

Creio que devemos reforçar melhor este aspecto. Acabamos de mencionar o papel fundamental do grupo de homotopia da variedade de base. Os ciclos canônicos não triviais $\{\alpha_i\}$ em M são fundamentais tanto no estabelecimento da relação de comutação expressa na forma de Weyl por:

$$\exp\left(i \int_C A\right) \exp\left(i \int_{C'} A\right) = \exp\left(i \frac{\pi}{k} \# \left(C, C'\right)\right) \exp\left(i \int_{C+C'} A\right),$$

como no estabelecimento das variáveis relevantes $\{a_i\}$. Obviamente estes dois fatos são correlacionados. Por um lado,

$$\int_C \int_{C'} [A_z, A_{\bar{z}}] dz d\bar{z} = \frac{\pi}{k} (m_i n'_i - n_i m'_i) = \frac{\pi}{k} \# \left(C, C'\right)$$

onde $C = m_i \alpha_i + n_j \beta_j$, $C' = m'_i \alpha_i + n'_j \beta_j$.

Por outro lado a expressão de Weyl estabelece uma relação de equivalência entre ciclos não triviais, dado que a lei de comutação $\frac{\pi}{k} \# \left(C, C'\right)$ fica bem estabelecida módulo k . Portanto, ao usarmos as equações $\int_{\alpha_i} w_j = \delta_{ij}$, $\int_{\beta_i} w_j = \tau_{ij}$, transpomos, por dualidade, tanto a quantização como a relação de equivalência ($C \sim C'$ se $(m, n) = (m', n') \pmod k$), para os coeficientes da expansão $a_i = \frac{1}{4\pi} \int w_i(z) A_{\bar{z}}$ de forma a obtermos os k geradores (e seus respectivos conjugados hermitianos) $\{a_i\}$ do grupo de Weyl discretizado:

$$\left[a_i (\text{Im } \tau)_{ij}^{-1}, \bar{a}_m \right] = \delta_{jm} / \pi k.$$

Da lei de quantização vimos que a relação de equivalência entre os ciclos $C = m_i \alpha_i + n_j \beta_j$, é estabelecida por $\frac{\pi}{k} \# \left(C, C'\right)$. Podemos pensar esta fórmula enquanto uma forma simplética no espaço dos ciclos. Cada ciclo haveria de ser um gerador de uma variável quântica, definida pelo procedimento acima descrito. Entretanto temos a tal relação de equivalência no espaço dos ciclos que nos restringe a trabalharmos com apenas $2k$ ciclos distintos, que definem as variáveis $\{a_i, \bar{a}_j\}$, quando transposta para o espaço das 1-formas canônicas.

Todos estes argumentos vem a revelar o efeito da topologia da base na definição do espaço modular a ser quantizado, e também na quantização.

Este fato poderia ser de se estranhar uma vez que, mesmo o fibrado linear estando definido sobre o espaço das conexões, é a estrutura topológica da base quem está definindo as variáveis relevantes a serem quantizadas neste espaço de conexões. Na verdade este fato está em completa analogia com o capítulo anterior. Neste vimos que diferentes laços na base geravam diferentes representações do grupo de homotopia sobre o espaço de holonomias. Cada representação gerava uma quantização inequivalente do sistema clássico. As quantizações eram definidas pelos fibrados lineares que por sua vez eram definidos pelas conexões $\{\theta_i\}$ dos fibrados de linha $\{L_i\}$. Ora, conexões definem os momentos mecânicos (a grosso modo $P_i = p + \theta_i$) que por sua vez definem o sistema físico. Neste caso

as conexões são dum fibrado principal. Portanto, os momento mecânicos no caso serão $P_i = p + eA_i$. Neste sentido usamos o mesmo princípio para estabelecer as variáveis de campo A_i estudando as imagens dos ciclos da base para definir o espaço de conexões $\{a_i\}$. Creio que esta análise física simplifica a compreensão do espaço modular.

Vamos construir um exemplo concreto. Adotemos $\Sigma = T$, ie, o genus da superfície é igual a 1.

Temos sobre $\Sigma = T$ um fibrado principal onde está definida uma conexão $\{A\}$. Consideremos o espaço de conexões ou seja uma coleção de fibrados principais com conexão sobre M .

Primeiramente lembremos que a lei de Gauss restringe-nos a trabalhar com as conexões planas. Lembremos que a lei de Gauss equivale a imposição de invariância por transformações de calibre infinitesimais, e que as transformações de calibre são caminhos sobre o espaço de conexões. Haveremos de levar em conta também as transformações na forma $a \rightarrow a + m + \tau n$ oriundas de imagens de caminhos fechados da base, em torno de ciclos não triviais. A topologia da base estabelece quais são estes caminhos não triviais. Dissemos no entanto que transformações de calibre são translações no espaço de conexões, imagem de translações na base.

Destas considerações poderíamos simplesmente considerar o espaço das conexões como um toro, de forma que translações sobre o toro são geradas por transformações de calibre infinitesimais (*ver (//)*), e as transformações largas equivalem a voltas em laços não triviais definidos sobre a superfície do toro. Lembrando-se que da relação $\frac{\pi}{k} \# (C, C')$ estabelecemos uma relação de equivalência entre ciclos e sendo a, m, n números de enovelamentos em torno dos ciclos canônicos α e β temos que as transformações de calibre largas são definidas módulo k , ou em \mathbb{Z}_k . portanto havemos de considerar apenas k destas voltas em torno de α e β , ou se preferir $2k$ ciclos $\{C_i\}_{i=1, \dots, 2k}$.

Para quantizarmos o sistema construímos fibrados lineares sobre o toro. Mas fibrados lineares sobre os toros estão em relação 1-1 com as funções theta de Jacobi, e as holonomias não triviais intercambiam as funções theta. As holonomias são definidas pelos laços de Wilson, ie, $\exp ni \oint_C A$. Desta forma temos os $2k$ ciclos indiciando as translações. Deve-se aqui fazer uma ressalva. Da mesma forma que no capítulo anterior tínhamos translações no interior da célula de Planck, que intercambiava as representações (codificadas nas funções Θ_i), ou os fibrados de linha (L_i, θ_i) , e translações sobre o reticulado cujos passos eram da ordem da célula de Planck, que preservavam as funções Θ_i ; neste caso temos também este panorama. Se transladarmos em torno do ciclo β (ou α) por um fator $n < k$, o operador acima fará um intercâmbio entre os modos-zero Θ_i . Translações maiores preservaram os modos. Esta análise bem como sua interpretação geométrica já foram feita no capítulo anterior.

Para finalizar esta seção, vamos considerar algumas generalizações do caso analisado. Primeiro vamos estudar os limites em que $k = 0$ e $k = \infty$. Em

seguida, o caso em que M é uma 3-variedade qualquer e G um grupo de Lie semi-simples em geral.

No caso acima k era fundamental para determinar a quantidade (o número) de sistemas físicos existentes na teoria (k sistemas associados respectivamente a k funções theta de Jacobi). Para $k = 0$ o termo de Chern-Simons é inexistente. Lembremos que k está associada à carga central da álgebra de Kac-Moody (em teorias de campos conforme). Portanto, o fato de k ser identicamente nulo indica a inexistência de efeitos de quantização (segunda) na sua teoria de campo. Desta forma, o termo de Chern-Simons estaria ligado automaticamente a efeitos quânticos da sua teoria. Desenvolveremos melhor esta análise no último capítulo. No limite em que k tende a infinito devemos primeiro ver que não temos a obstrução causada pelo termo $\frac{\pi}{k}(C, C')$. Isto é, teríamos infinitas representações inequivalentes, ou infinitos sistemas mecânicos quânticos, sendo portanto uma segunda quantização usual.

Para analisar a generalização em que M seja uma 3 variedade conexa e compacta genérica precisamos do conceito de "splitting de Heegaard" (ver [Nov]).

Sendo M uma 3-variedade fechada, conexa e compacta, podemos fazer uma cirurgia em M ao longo de uma superfície de Riemann Σ , de forma que M seja partida em duas variedades M_1 e M_2 , $M = M_1 \cup M_2$ de forma que $\partial M_1 = \Sigma = -\partial M_2$.

É claro que tal partição não é única.

Para descrever agora o formalismo desenvolvido até agora para este caso, vamos reescrever a ação da seguinte forma:

$$Z_k(M) = \int [DA_i] \exp [ikS(A_i)] \tag{3.25}$$

onde

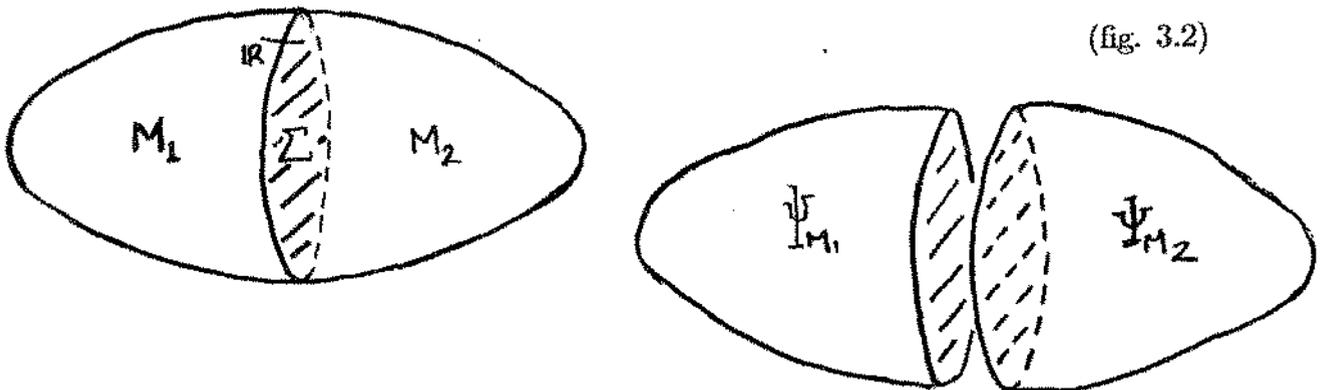
$$S(A_i) = \frac{1}{2\pi} \int_M A \wedge dA.$$

Agora escrevemos:

$$Z_k(M) = \int [DA_z DA_{\bar{z}}] \exp \left\{ -2\pi/k \left(\int_{\Sigma} d^2\sigma A_z A_{\bar{z}} \right) \right\} \Phi_{\partial M_1}(A_z) \Psi_{\partial M_2}(A_{\bar{z}}), \tag{3.26}$$

onde as coordenadas (z, \bar{z}) parametrizam a superfície de Riemann Σ ao longo da qual é feita a "colagem" de M_1 com M_2 .

$\Phi_{\partial M_1}(A_z)$ é um funcional da fronteira de M_1 e $\Psi_{\partial M_2}(A_{\bar{z}})$ um funcional da fronteira de M_2 .



Esta formulação, embora pareça ser estranha, provém das idéias gerais da teoria quântica de campo. Sabemos que amplitude de transição pode ser escrita na forma

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left[i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) \right] \tag{3.27}$$

$|q_i t_i\rangle$ são seções definidas sobre um aberto U_i da variedade espaço temporal, e $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ é o produto interno entre as seções, definido na fibra sobre a interseção $U_i \cap U_f$.

Ainda, a transição de amplitude vácuo-vácuo, na presença de fontes J , é proporcional à função de partição, ie,

$$\langle 0, -\infty | 0, +\infty \rangle^J \propto \int [\mathcal{D}\phi] \exp [iS(\phi, \partial\phi, J)] \tag{3.28}$$

No caso da ação ser a de Chern Simons, e sendo a integral tomada sobre o espaço modular das conexões chatas, não temos o termo de fonte. Além disso, dado que M é compacto, definimos as seções sobre as variedades M_1, M_2 (uma vez que não temos definido $-\infty$ e $+\infty$, ou se preferir, temos compactificado o espaço). O produto interno entre as seções é tomado em $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 \times \mathbb{R} = -\partial M_2 \times \mathbb{R}$. O fato de interseção poder se escrita na forma $\partial M_1 \times \mathbb{R}$ decorre do teorema de existência de vizinhança tubular.

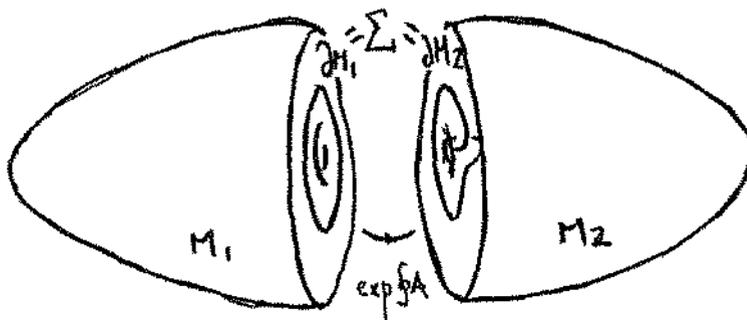
Assim sendo, medimos o emparelhamento dos espaços de Hilbert associado às fronteiras. Uma vez que as fronteiras são escritas na forma $\partial M_1 \times \mathbb{R}$ onde $\partial M_1 = \Sigma$ é uma superfície de Riemann de gênero g , conseguimos retornar à definição (3.2 e 3.4) desejada, que equivale à formulação desenvolvida operatorialmente e analisada do ponto de vista geométrico durante o capítulo.

Note que, neste caso, estamos ainda mais no âmago das idéias da teoria quântica de campos.

Se M for o nosso espaço de configuração, M_1 e M_2 são duas "partes" do universo que se encontram em configurações físicas diversas. Estas, no caso da teoria de Chern-Simons, são representadas por estados de vácuo. Temos, no entanto, uma transição de uma configuração à outra, na fronteira de M_1 e M_2 .

Se por exemplo, M_1 e M_2 encontram-se na configuração Θ_1 e Θ_2 respectivamente, (Θ_i são as funções theta de Jacobi, definida na fronteira $\partial M_1 = -\partial M_2 = \Sigma$) o operador que dá lugar ao termo de fonte J é o operador de vértice $\exp(\int A)$, que leva a configuração Θ_1 à Θ_2 , e o produto interno, mede, portanto, o valor esperado do operador de vértice (ou laço de Wilson).

Geometricamente, este operador gera um enovelamento em torno de um ciclo não trivial, sendo portanto um difeomorfismo global sobre Σ .



(fig. 3.3)

Vamos verificar agora a generalização da teoria para o caso em que G é um grupo de Lie semi-simples qualquer.

Já vimos que a invariância da teoria por calibre restringe-nos ao estudo das conexões planas. Cada conexão plana, pelo teorema de Ambrose-Singer, gera um grupo de holonomia discreto, e a superposição dos vários fibrados de holonomia gera o nosso espaço modular. Lembremos que sendo o grupo de holonomia discreto e da existência de um homomorfismo do grupo de recobrimento universal $\pi_1(\Sigma)$ no grupo de holonomia, (ver [Kob]), as conexões planas estão em correspondência 1-1 com representações do grupo fundamental no grupo estrutural G .

Sendo $\pi_1(\Sigma_g) = \mathbb{Z}^{2g}$, um grupo abeliano, devemos ter representações de $\pi_1(\Sigma)$ na subálgebra de Cartan de G (sobre \mathbb{C}).

Lembremos que para uma dada conexão chata, ie, para uma dada representação do grupo de holonomia na subálgebra de Cartan, sendo o grupo de holonomia discreto, sua imagem estabelece um reticulado na subálgebra de Cartan. Este reticulado, na forma $\theta \rightarrow \theta + 2\pi\alpha$ é tal que α é uma 1-forma com valores na rede de raízes. Para compreender tal argumento, basta recordar que no caso abeliano, o reticulado $a_i \rightarrow a_i + m_i + \tau_{ij}n_j$ é definido de forma que se munirmos o espaço vetorial gerado por (a_i, \bar{a}_j) com um produto interno, o reticulado é definido por elementos cujo produto interno (módulo rede recíproca) assumam valores inteiros. Neste caso o produto interno é em a forma de Killing, e a rede de raízes define por construção, um reticulado na fibra.

Ainda, o grupo de Weyl que mapeia uma escolha de raízes simples em outra funciona, neste caso, como transformação de calibre. Ou seja, a nossa escolha para o sistema simples de raízes será único.

Desta forma, numa primeira análise (sem a quantização) o nosso espaço modular é escrito na forma: $T \times T/W$ (para $\pi_1(\Sigma = T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$) onde T é o toro maximal e W é o grupo de Weyl.

Agora lembramos que a quantização na forma $[\theta_1^i, \theta_2^j] = \frac{\pi}{k} \delta_{ij}$, estabelece uma relação de equivalência entre a representação de $\pi_1(\Sigma)$ gerada por um i -ciclo (i vezes enovelado em torno de um ciclo não trivial) e um $i+k$ -ciclo.

Desta forma, nosso espaço de fase é compactificado na forma $T/W \rightarrow \Lambda^W/W \times k\Lambda^R$ onde Λ^W é a rede de pesos (lembrando que os pesos maximais estabelecem as representações da álgebra de Lie semi-simples) e Λ^R é o espaço de co-raízes.

ASPECTOS TOPOLÓGICOS DAS TEORIAS DE CALIBRE

Na seção anterior estudamos a quantização holomorfa das teorias de campo de Chern-Simons dum ponto de vista geométrico. Vimos que, para uma Lagrangeana com "carga topológica" k , numa teoria com base $M = \Sigma_g \times \mathbb{R}$ (onde Σ_g é uma superfície de Riemann de genus g) grupo $U(1)$, o espaço das soluções tem dimensão $(k)^g$.

Lembremos que as soluções são modos-zero, dado que a hamiltoniana de Chern-Simons é nula. Caberia então a pergunta: "Qual a razão de estudarmos uma teoria que a primeira vista, é fisicamente trivial, muito embora o requinte de sua elaboração formal?"

Nesta seção iremos discutir as várias aparições do "termo de Chern Simons" na literatura física, e embasados nos vários argumentos expostos tentaremos tecer, coerentemente "uma magnífica colcha dentre os vários retalhos".

Vamos começar a discussão com uma lagrangeana na forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \theta P$, onde $\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ é o termo de Yang-Mills e θP é dado por $P = \frac{-1}{16\pi^2} \text{tr} * F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ (θ é um parâmetro, que na teoria de Chern-Simons têm papel fundamental, como já foi visto).

O termo P , conhecido como termo de Chern-Pontyagin, e usual nas teorias de calibre quando analisada as soluções auto-duais da teoria ($F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu}$), é um termo de divergência total, podendo ser escrito na forma $P = \partial_\mu \Omega_0^\mu$ onde $\Omega_0^\mu = -1/16\pi^2 \text{tr} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} [A_\alpha F_{\beta\gamma} + \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma] = -1/16\pi^2 \text{tr} \{(A \wedge dA + A^3)^\mu\}$. O termo Ω_0^μ é a densidade de Chern Simons, objeto de nossas atenções no presente trabalho.

Sendo P um termo de divergência, a contribuição deste na ação é dada pelo termo de superfície $I_{CP} = \int d^4x P = \int ds_\mu \Omega_0^\mu$ onde ds_μ é o elemento de hipersuperfície 3-dimensional. Ainda, sendo P um termo de divergência sua presença não afeta as equações de movimento.

Mesmo assim, veremos que sua presença leva a questionamentos muito interessantes na análise desta teoria quântica dos campos de calibre.

Então, vamos começar o estudo pelo formalismo Hamiltoniano, ie, vamos estabelecer as variáveis canônicas. Fixemos como usual a calibragem de Weyl, $A^0 = 0$ [Fad]. Temos então:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \{ (E_k^a)^2 + (B_k^a)^2 \} \quad (3.29)$$

onde a é o índice Lie-algébrico, k índice espacial e

$$E_k = F_{k0} \text{ e } B_k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}. \quad (3.30)$$

Temos trabalhado com notação tensorial por comodidade.

A relação entre a "velocidade" $E_k (= -\partial_t A_k)$ e o momento canônico $\pi_k = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_t A_k)$, onde \mathcal{L} é a Lagrangeana de Yang-Mills mais o termo de Chern, é dada por:

$$\pi_k = -E_k + (\theta/8\pi^2) B_k^2, \quad (3.31)$$

de forma que podemos reescrever as equações de Hamilton na forma.

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \{ (\pi_k^a - (\theta/8\pi^2) B_k^a)^2 + (B_k^a)^2 \} \quad (3.32)$$

Usualmente tínhamos a Hamiltoniana de Yang-Mills na forma $H_{YM} = \frac{1}{2} \int d^3x \{(\pi_k^a)^2 + (B_k^a)^2\}$. Podemos relacionar estas duas Hamiltonianas por uma transformação unitária, a saber:

$$H_{YM} = \exp(-i\theta\omega_0(A))H \exp(i\theta\omega_0(A)) \quad (3.33)$$

onde $\omega_0(A)$ vem do termo temporal da densidade de Chern-Simons, ie,

$$\omega_0 \equiv \int d^3x \Omega_0^0(A) = -1/16\pi^2 \int d^3x \text{tr} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} [A_\alpha F_{\beta\gamma} + \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma] \quad (3.34)$$

Desta forma, se Ψ e Ψ_{YM} são auto-estados de H e H_{YM} respectivamente, estes estão inter-relacionados na forma $\Psi_{YM} = \exp(-i\theta\omega_0(A))\Psi$

Ora, vemos então que o termo topológico de Chern-Simons gera uma fase, fase esta que, se dum ponto de vista mecânico quântico é trivial, na teoria segundo quantizada é um objeto digno de análise acurada.

O termo de fase $\omega_0(A)$ nada mais é senão o termo de Chern-Simons em três dimensões que estivemos estudando. Para trazer a discussão anterior ao contexto atual, vamos recobrar que o termo de Chern-Simons não é um termo invariante por transformações de calibre. Na verdade, por uma transformação de calibre $A \rightarrow A_g$ temos que:

$$\begin{aligned} \omega_0(A_g) &= \omega_0(g^{-1}Ag - g^{-1}dg) \\ &= \omega_0(A) + \omega_0(g^{-1}\nabla g) \end{aligned}$$

A quantidade $\omega_0(g^{-1}\nabla g)$ é uma integral a valores em \mathbf{Z} , como já foi dito, caracterizado pela classe de homotopia da transformação de calibre (ver eq. 3.10, 3.11 e 3.14).

Esta variação por transformações de calibres levou-nos a definir sobre os funcionais $\Psi(A)$ uma transformação de calibre larga, que leva um estado de vácuo (modo-zero) em outro. Note que cada estado de vácuo deve dar origem a um espaço de Hilbert associado. Ainda, como já foi lembrado, a teoria de Chern-Simons aparece naturalmente quando no cálculo dos "instantons". Portanto é natural supor que este operador de transformações largas seja associado (ou o próprio) tunelamento entre os estados de vácuo (instantons). Entretanto não podemos falar em tunelamento em uma análise "mecânico quântica".

Bom, esta série de asserções serão tratadas com calma.

Vamos primeiro analisar o significado físico o geométrico da variância por transformações largas de calibre.

O calibre de Weyl $A_0 = 0$ é uma calibragem adequada para tratarmos o problema da quantização da teoria de campo (segunda quantização) no formalismo Hamiltoniano, ie, estabelecemos variáveis de campo análogas às variáveis canônicas (p, q) .

Relembrando algumas nuances desta calibragem, primeiro recordemos que para dado potencial A , sempre podemos achar um potencial equivalente por recalibragem $A \rightarrow A' = A_{g_0}$ tal que este potencial A' satisfaça a condição de Weyl, $A'_0 = 0$. Para tal, basta escolher $g_0 = T \exp \left\{ - \int_{-\infty}^t A_0(x, s) ds \right\}$ onde T é o ordenador temporal.

Ainda, além da matriz g_0 escolhida, todas as matrizes na forma $g(x) = g(\vec{x}) g_0(x)$, onde $g(\vec{x})$ é um elemento arbitrário do grupo das transformações de calibre, dependente somente da posição (coordenadas espaciais).

Portanto, a calibragem de Weyl somente reduz o grupo de calibre para matrizes dependentes apenas da posição.

O gerador das transformações de calibre para a teoria de Yang-Mills coincide com o componente temporal de $(D_\mu (F^{\mu\nu})_a)$ ou seja $\mathcal{C}(x) = \partial_k F_{0k} - [A_k, F_{0k}]$. A variação de calibragem é efetivada ao impormos o vínculo $\mathcal{C}(x) = 0$, ou em segunda quantização $\mathcal{C}(x) |\Psi\rangle = 0$, que entende-se por Lei de Gauss.

Vimos que o termo de Chern-Simons tem uma invariância por transformações de calibre infinitesimais, embora não o tenha pelas transformações largas.

Desta forma, a adição do termo de Chern Simons (ou a densidade de Chern Pontryagin), faz com que tenhamos uma "anomalia" na Lei de Gauss (ver [Fad], [Shi]), ou seja, teríamos uma violação na condição $[C_a(x), C_b(x')] = f_c^{ab} C_c(x) \delta(x-x')$, e esta violação poderia ser efetivada pela introdução de um dois-cociclo (veremos isto em breve, veja também a relação com grupos quânticos no último capítulo).

Retornando à análise dos auto-modos, havíamos visto que a introdução do termo topológico altera a escolha de variáveis canônicas, ie

$$(E_a, B_a) \rightarrow (\pi_a = -E_a + (\theta/8\pi^2)B_a, B_a)$$

Daí que se quisermos preservar a formulação canônica, teríamos a hamiltoniana de Yang-Mills H_{YM} , que se relaciona com H via transformação larga de calibragem $H_{YM} = \exp(-i\theta\omega_0(A))H \exp(i\theta\omega_0(A))$.

Da mesma forma devemos ter que os auto estado $\Psi_{YM}(A)$ de H_{YM} relacione-se com os auto estados $Y(A)$ de H por $\Psi_{YM} = \exp(-i\theta\omega_0(A))\Psi$. Desta forma $\Psi_{YM}(A)$ deve obedecer a seguinte lei de transformação:

$$U(g_n) \Psi_{YM}(A) = \Psi_{YM}(g_n^{-1} A g_n - g_n^{-1} d g_n) = e^{-in\theta} \Psi_{YM}(A) \quad (3.35)$$

onde g_n é um elemento do grupo das transformações de calibre homotopicamente não-trivial, cujo termo da subálgebra de Cartan é imagem do n -ésimo ciclo não trivial definido na base(??). Esta transformação é a mesma obedecida por $\omega_0(A)$, ou seja $\omega_0(A) \rightarrow \omega_0(A_{g_n}) = n$.

Caso Ψ_0 seja um estado de vácuo ($A = 0$), geramos então um conjunto $\{\Psi_{YM_i}^0\}_{i=0,1,\dots}$ de estado vácuo \mathbf{Z} -indiciados, cada um equivalente à um instanton classificado pela classe homotópica de $A^n = g_n^{-1} \nabla g_n$.

A quebra de simetria da Lei de Gauss causou, então uma quebra topológica de simetria dos estados de vácuo (em [Jac] contrasta-se tal quebra com as quebras espontâneas de simetria).

Os estados de vácuo \mathbf{Z} -indexados, bem como a análise do formalismo operacional, foi desenvolvido no capítulo anterior.

Antes de entrarmos em uma interpretação mais física (e, por incrível que possa parecer, mais formal) vamos apenas fazer alguns comentários concernentes à quantização deste sistema.

O fato de termos estabelecido um par de variáveis canônicas (π_a, B_a) outro que (E_a, E_a) pode ser analisado de várias maneiras. Sabemos que a escolha de variáveis canônicas em quantização geométrica equivale à uma escolha de conexão no fibrado linear complexo.

Ocorre que a quantização geométrica de teorias de calibre (segunda quantização) não tem uma interpretação tão simples. Por exemplo, canonicamente, a escolha de calibre de Weyl nos propicia a ver a variedade simplética M como sendo o espaço dos campos de calibre (E_a, A_a) . A invariância da teoria por calibragem nos permite termos uma seção global sobre o fibrado $(\Psi(A))$ invariante por transformação de calibre) e a quantização é bem estabelecida.

O que significa a quantização ser bem estabelecida neste caso?

Ora, já que os campos são invariantes por transformações de calibre, o espaço das soluções satisfaz $C(X)\Psi = 0$, e esta equação de vínculo estabelece o espaço dos estados do nosso sistema físico.

Agora, ao perdermos tal invariância, torna-se difícil o estabelecimento dos auto estados do sistema, ou seja, as seções do fibrado (não-globais).

Mas, como vimos, sabemos exatamente o efeito da perda da invariância de calibre, e podemos restringir a análise ao espaço das conexões planas, para estabelecermos os estados de vácuo e, a partir dele e achar os estados excitados na teoria de Yang-Mills, sem precisar estudar a quantização da variedade simplética dada pelas variáveis mixas (π_a, B_a) .

Ainda, se pensarmos no operador de Dirac, no primeiro caso, tendo uma teoria invariante por calibragem, o nosso operador $\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$ é bem definido, ao passo que ao perdermos a invariância, passamos a ter uma família de operadores de Dirac $\{\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu^n)\}_{n=0,1,\dots}$.

Desta forma torna-se claro o fato de relacionarmos cada escolha de um setor A_n , com um espaço de Hilbert.

Podemos ver agora o efeito desta análise, nos auto estados do operador de Dirac. Para tal precisaremos de um pouco mais de matemática. Mas, assevero, valerá a pena a empreitada!!

O TEOREMA DE ÍNDICE, ANOMALIAS E POLARIZAÇÕES DO VÁCUO

Do parágrafo anterior pode ter ficado a impressão de que ao introduzirmos um termo topológico na teoria de Yang-Mills, temos criado um cenário um pouco artificial.

Por outro lado, não nos parece tão ruim a idéia de termos uma quebra topológica de simetria, uma vez que conseguimos obter uma teoria com vários estados de vácuo, sem tratarmos perturbativamente o problema.

Pois, o que faremos agora é apresentar argumentos em defesa da naturalidade do termo topológico, ou da quebra de simetria, quando em teorias de campo.

Seja, pois, a lagrangeana de Yang-Mills clássica com interação com os campos espinoriais de matéria:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_M \text{tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + i \bar{\psi} (\gamma^\mu (\partial_\mu + eA_\mu)) \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (3.4) \\ &= \|F\|^2 + \langle \psi, \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi \rangle - m \|\psi\|^2 \end{aligned}$$

Aqui podemos aplicar o formalismo Hamiltoniano dado que as propriedades obtidas para a Lagrangeana livre, no calibre de Weyl, continuam.

Vamos primeiro analisar do ponto de vista de integrais de caminho.

Uma vez que, como foi anunciado, queremos estudar os efeitos topológicos sobre os auto-estados do termo de Dirac, vamos desprezar, para o momento e sem dano algum em nossa análise, o termo massivo.

A função de partição escrita na forma $Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp -i (\|F\|^2 + \langle \psi, \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi \rangle)$ fornece a quantização do nosso sistema.

A integral fermiônica é calculada pela expressão:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \{-i \langle \psi, \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi \rangle\} = \sqrt{\det (D_A^* D_A)} \quad (3.37)$$

(simbolicamente $\det(D) = \sqrt{\det D_A^* D_A}$),

de forma que a função de partição agora lê-se:

$$Z = \int \mathcal{D}A \sqrt{\det (D_A^* D_A)} \exp -i \|F\|^2 \quad (3.38)$$

Esta forma vêm de encontro a nossa análise já que a integral efetua-se sobre o espaço das conexões, já tão discutida.

O cálculo de determinantes de operadores elípticos é uma procedimento familiar das teorias de campo. É aqui que reside o problema de aparecimento de anomalias.

Ocorre que, ao efetuarmos uma transformação de calibre $A \rightarrow A_g$, embora o termo de Yang-Mills fique invariante, o termo fermiônico sofre alterações, ou seja,

$$\det (D_{A_g}^* D_{A_g}) \neq \det (D_A^* D_A). \tag{3.39}$$

Este disparate deve-se à dimensão infinita da matriz (ou da teoria), de forma que não podemos assumir que $\det AB = \det A \det B$ (se assim o pudéssemos, bastaria escrever $D_{A_g} = g^{-1} D_A g$ e teríamos a invariância).

É claro que o fenômeno das anomalias haveria de estar associado aos infinito (divergências) da teoria quântica de campos.

O ponto é que o determinante, para ser avaliado, necessita de regularização. Vamos supor que, por algum método de regularização tivéssemos calculado $\det D_A$. Queremos que:

- (i) $\det D_A$ seja função diferenciável de A
- (ii) $\det D_A$ seja invariante por transformações de calibre
- (iii) $\det D_A = 0$ em primeira ordem se e somente se $D_A^* D_A$ tenha exatamente um auto valor nulo.

A condição três é propriedade característica de determinantes em dimensão finita e é uma exigência mínima para qualquer regularização.

Ocorre que não existe tal função determinante com essas três propriedades. (ver Atiyah)

Vamos ver em um exemplo este problema, usando a regularização do núcleo de calor.

Seja a transformação de chiralidade infinitesimal:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x) + i\alpha(x) \gamma^{n+1} \psi(x) = \psi'(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(x) + i\alpha(x) \bar{\psi}(x) \gamma^{n+1} = \bar{\psi}'(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Então

$$\int dx \bar{\psi} D_A \psi \rightarrow \int dx \bar{\psi} D_A \psi + \int dx \alpha(x) \partial_\mu j_{n+1}^\mu(x) \tag{3.41}$$

onde j_{n+1}^μ é a corrente chiral associada à transformação de calibre

$$j_{n+1}^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^{n+1} \psi(x)$$

Na teoria clássica de campos esta corrente é conservativa, ou seja, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Aqui teremos uma violação desta identidade (de Ward-Takahashi quando vista em termos dos propagadores).

Devemos computar também a alteração na medida. Para tal, seja ψ_i (e $\bar{\psi}_i$) os auto estados do operador de Dirac, e vamos expandir ψ e $\psi' = \psi + i\alpha \gamma^{n+1} \psi$ (e seus respectivos conjugados) em termos de tal base:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum a_i \psi_i, \bar{\psi} = \sum \bar{b}_i \psi_i^\dagger \\ \psi' &= \sum a'_i \psi_i, \bar{\psi}' = \sum \bar{b}'_i \psi_i^\dagger \end{aligned} \tag{3.6}$$

Logo

$$\int \prod_i da_i d \bar{b}_i \rightarrow \int \prod_i da'_i d \bar{b}'_i \quad (3.7)$$

$$a'_i = \sum_j C_{ij} a_j, b'_i = \sum_j C_{ij} b_j$$

onde $C_{ij} = \langle \psi_i | 1 + i\alpha \gamma^n | \psi_j \rangle = \delta_{ij} + i\alpha \langle \psi_i | \gamma^n \psi_j \rangle$
 de forma que a medida e a ação efetiva agora têm a forma:

$$\prod da_i d \bar{b}_i = \prod da'_i d \bar{b}'_i \exp \left(-2i \int dx \alpha(x) \left(\sum_i \psi_i^\dagger(x) \gamma^{n+1} \psi_i(x) \right) \right) \quad (3.44)$$

$$\exp(-W[a]) = \int \prod_i da_i d \bar{b}_i \exp \left(-i \int dx \bar{\psi} D_A \psi \right) \quad (3.8)$$

$$= \exp \int \prod_i da'_i d \bar{b}'_i \exp \left(-i \int dx \bar{\psi} D_A \psi - \int \alpha \partial_\mu j^\mu - 2i \int dx \alpha(x) A(x) \right)$$

onde $A(x) = \sum_i \psi_i^\dagger(x) \gamma^{n+1} \psi_i(x)$

Logo temos a equação de anomalia para a corrente chiral.

$$\partial_\mu j_{n+1}^\mu(x) = 2iA(x) \quad (3.46)$$

Vamos agora relacionar a anomalia com o termo topológico.

Até então a questão da regularização não entrou em pleito. Ocorre que para calcular a integral do termo anômalo $\int dx A(x)$ precisamos de regularização.

Seja o cut-off Gaussiano (regularização do núcleo do calor) dado por:

$$\int dx A(x) = \int dx \sum_i \psi_i^\dagger(x) \gamma^{n+1} \psi_i(x) \exp \left[-(\lambda_i/M)^2 \right]_{M \rightarrow \infty} \quad (3.9)$$

$$= \sum \langle \psi_i | \gamma^{n+1} \exp[-iD_A/M]^2 | \psi_i \rangle_{M \rightarrow \infty}$$

onde λ_i são os auto valores associado aos auto vetores ψ_i .

Dentre os auto estados $\{\psi_i\}$ existe os auto-estados chirais, ou seja, $\{|\psi_i\rangle^x \equiv \gamma^{n+1} |\psi_i\rangle\}$ com auto valores $\{-\lambda_i\}$. (Decorre da anti-comutação de D_A com γ^{n+1}).

Logo $\langle \psi_i | \gamma^{n+1} | \psi_i \rangle = \langle \psi_i | \psi_i \rangle^x = 0$

Isso demonstra que a contribuição do termo anômalo vêm somente dos modos-zero (!!! as coisas começam a fazer sentido, não?!), já que para $\lambda_i \neq 0$

$$\langle \psi_i | \gamma^{n+1} \exp [-iD_A/M]^2 | \psi_i \rangle = \langle \psi_i | \gamma^{n+1} | \psi_i \rangle \exp [- (\lambda_i/M)^2]_{M \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.48)$$

Para enfocar a contribuição dos modos-zero precisamos somente recordar alguma matemática concernente ao operador de Dirac e o teorema de Índice.

Do ponto de vista formal, o operador de Dirac é um operador diferencial elíptico definido sobre os espinores. Para descrever esta ação precisamos definir o fibrado espinorial sobre uma variedade X , bem como definimos as funções de onda como seções dum fibrado linear complexo sobre X .

As fibras são, em geral, espaços de representação de algum grupo, no caso o grupo $Spin(n)$ recobrimento universal do grupo $SO(n)$.

Então, se X for variedade de base, e $SO(n)$ o grupo estrutural do fibrado das referências, se pudermos levantar $SO(n)$ para o seu recobrimento $Spin(n)$, X será chamada de variedade spin e a escolha de levantamento nos dará a estrutura espinorial. A existência de tais levantamentos é garantida se X for orientável e se o fibrado puder ser extendido para um fibrado com grupo estrutural $Spin(X)$.

Essas duas condições se traduzem no anulamento das duas primeiras classes de Stiefel-Whitney: $\omega_1(X) = 0$, implicando que X é orientável e $\omega_2(X) = 0$ implicando que as seções do fibrado spin são globalmente definidas.

O grupo $Spin(n)$ tem uma representação básica (os espinores físicos) chamada representação espinorial. Esta representação tem dimensão $2^{n/2}$ e $2^{(n-1)/2}$ para n par e n ímpar respectivamente.

Ocorre que para n para (que iremos tratar) a representação é redutível em 2 componentes irredutíveis $S = S^+ \oplus S^-$ com dimensões iguais $\dim S^\mp = 2^{(n/2-1)}$

Definimos os fibrados associados E e E^\mp a S, S^\mp por

$$\begin{aligned} E^+ &= \tilde{P} \times_{Spin(n)} S^+ \quad (3.10) \\ E^- &= \tilde{P} \times_{Spin(n)} S^- \\ E &= E^+ \oplus E^- \end{aligned}$$

e \tilde{P} é o recobrimento duplo do fibrado principal P com grupo $SO(n)$.

O operador de Dirac D age sobre as seções deste fibrado spin, ie $D : \Gamma(X, E) \rightarrow \Gamma(X, E)$.

Levando-se em conta a estrutura de espaço vetorial de fibra, temos os automorfismos locais gerados pelas matrizes $(2^{n/2} \times 2^{n/2}) \{ \gamma_i \}_{i=0, \dots, n}$. Estas satisfazem:

$$\begin{aligned} \{ \gamma_a, \gamma_b \} &= -2\delta_{ab} I \\ \gamma_{n+1} &= i^{n(n+1)/2} \gamma_1 \dots \gamma_n \\ \text{com } \gamma_{n+1}^2 &= I, \{ \gamma_{n+1}, \gamma_\mu \} = 0 \\ \text{onde } \{ \dots \} &\text{ é o anticomutador} \end{aligned}$$

O operador γ_{n+1} é o operador de chiralidade anticomuta com D . Com respeito à decomposição $E_X = E_X^+ \oplus E_X^-$, γ_{n+1} é diagonal e adquire a seguinte forma (p/ n = 4) $\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$.

Portanto $(1 \pm \gamma_5)/2$ nos fornece a projeção sobre os espaço E^\pm .

Temos ainda os operadores $\mathcal{D}^\pm = D(1 \pm \gamma_5)$ que fornece a restrição do operador de Dirac nos subespaço $\Gamma(X, E^\pm)$. Da anticomutação de D com γ_5 , deduzimos que:

$$\Gamma(X, E^+) \stackrel{\mathcal{D}^+}{=} \Gamma(X, E^-)$$

Os espinores harmônicos ψ_0 que satisfazem $D\psi_0 = 0$, têm uma decomposição natural com respeito à chiralidade $\psi_0 = \psi_0^+ \oplus \psi_0^-$. Da teoria de Hodge temos que $\ker \mathcal{D}^+ = \{\psi_0^+\}$ e $\ker \mathcal{D}^- = \{\psi_0^-\}$.

Definimos o índice do operador \mathcal{D}^+ (= índice de \mathcal{D}) por

$$\dim(\ker \mathcal{D}^+) - \dim(\ker \mathcal{D}^-) = n^+ - n^- \tag{3.50}$$

Portanto o índice está medindo a diferença entre o número de espinores harmônicos de quiralidade positiva e negativa.

Esta é exatamente a contribuição que estávamos buscando.

Vamos retorna à formula (3.47)

$$\int dx A(x) = \sum_i \langle \psi_i^+(x) | \gamma^{n+1} | \psi_i^-(x) \rangle \exp \left[- (\lambda^i / M)^2 \right]$$

Já havíamos notado que somente os modos-zero é que irão contribuir para o termo anômalo. Chamando tais termos de $|\psi_0\rangle$ e sabendo que $|\psi_0\rangle = |\psi_0^+\rangle + |\psi_0^-\rangle$, de forma que $\gamma^{n+1} |\psi_0^\pm\rangle = \pm |\psi_0^\pm\rangle$ temos

$$\int dx A(x) = \sum_i \langle \psi_0^+(x) | \psi_0^+(x) \rangle - \sum_i \langle \psi_0^-(x) | \psi_0^-(x) \rangle = n_+ - n_- = \text{ind. } \mathcal{D} \tag{3.51}$$

Cabe aqui uma ressalva. Na verdade a discussão sobre o teorema do índice acima foi feita para a teoria abeliana, ou seja, A são um formas com valores no Grupo $U(1)$.

No caso geral o operador \mathcal{D} agirá sobre seções de um fibrado vetorial com fibra $E \otimes V (= E_+ \otimes V + E_- \otimes V)$ onde V é o espaço de representação do fibrado associado ao grupo estrutural G da nossa teoria de calibre. Ou seja

$$\mathcal{D}^+ : \Gamma(M, E_+ \otimes V) \rightarrow \Gamma(M, E_- \otimes V). \tag{3.52}$$

Feito este aparte precisamos calcular o índice de \mathcal{D} . Nesta parte é que entra a teoria topológica. De forma geral, o índice de operadores elípticos tipo de Dirac é uma quantidade puramente topológica. Lembremos, então, que a variação na ação causada pela quebra de simetria chiral é medida por:

$$\partial_\mu j_{n+1}^\mu = -2i \sum_i \psi_i^\dagger(x) \gamma^{n+1} \psi_i(x)$$

e

$$\int dx A(x) = \text{índice } \mathcal{D} = n^+ - n^-$$

Caso a métrica Riemanniana da variedade de base for g , $R(g)$ for o tensor de curvatura, $F(A)$ for a 2-forma de curvatura da conexão A , temos que

$$\text{índice } \mathcal{D} = \int_M \Omega(R(g), F(A)) \tag{3.53}$$

onde Ω têm expressão puramente algébrica [Ati]. Por exemplo, se $\dim M = 4$

$$\Omega = \frac{\text{Tr} \Omega^2}{96\pi^2} - \frac{\text{Tr} F^2}{8\pi^2} \tag{3.54}$$

onde $\frac{\text{Tr} \Omega^2}{96\pi^2}$ é a anomalia gravitacional, uma matriz de 2-formas, construída a partir de R ; e $\text{Tr} F^2$ é a segunda-classe de Chern, ou, o termo anunciado de Chern-Pontryagin (a notação segue o trabalho citado [Ati]).

De forma geral, a contribuição dos termos de calibre pode ser expressa por:

$$n^+ - n^- = \int \partial_\mu j_{n+1}^\mu = \int \text{ch}_l(F) = \int \frac{1}{l!} \text{tr} \left(\frac{iF}{2\pi} \right)^l \tag{3.55}$$

onde $m = \dim M$ e $l = m/2$.

Chegamos à um ponto bom para a discussão. Temos visto que em teorias de calibre tipo Yang-Mills, com interação com os campos de matéria espinoriais ψ , ao tentarmos regularizar o determinante do operador de Dirac, necessariamente teremos uma quebra de invariância da teoria. Esta quebra de simetria é avaliada por uma alteração na Lagrangeana proporcional (para $\dim M = 4$) à exponencial da integral do termo de Chern-Pontryagin, no caso de quebrarmos a simetria chiral.

Mas, já havíamos visto também que a introdução dum termo de Chern-Pontryagin na teoria nos conduz a perda de simetria de calibre, de forma que obtemos:

i) estados de vácuo $\{|\psi_0^i\rangle\}$, indexados por $i \in \mathbf{Z}$

ii) a cada $i \in \mathbf{Z}$ temos associado um instanton gerado por $A_i = g_i^{-1} dg_i$, onde g^i é o representante da i -ésima classe de homotopia das transformações de calibre.

Agora vamos supor que tínhamos uma teoria invariante por calibragem com operador de Dirac $D = \gamma_\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)$ e queremos avaliar a perda de simetria chiral e de calibre no espaço dos espinores.

Vamos analisar um caso simplificado, a equação de Dirac Abelianas em duas dimensões $(0, 1)$. A lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\gamma_\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)) \psi$$

e as matrizes de Dirac por $\gamma_0 = \sigma^1, \gamma_1 = \sigma^2, \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1 = -i\sigma^3$ (σ^i são as matrizes de Pauli).

Os auto-estados a serem segundo quantizados satisfazem

$$H\psi_E = \alpha(p - eA)\psi_E = E\psi_E,$$

$$\alpha = -\sigma^3$$

(a presença de α já nos coloca na base chiral $\psi_E = \psi_E^+ + \psi_E^-$, como em (3.51))

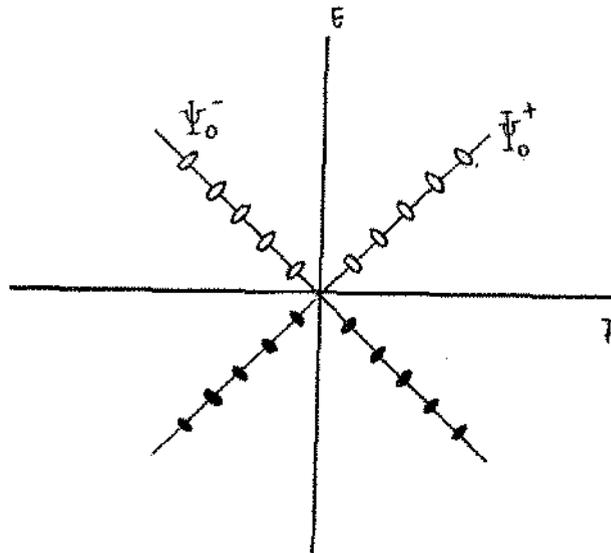
Temos as soluções

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \exp(ipx) \\ 0 \end{pmatrix}, E = p - eA$$

$$\psi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(ipx) \end{pmatrix}, E = -p + eA$$

A segunda quantização ordinária é feita preenchendo os estados de energia negativa (ordenamento normal), para acharmos o estado de vácuo.

Desta forma, para $A^0 = 0$ (condição em geral, de campos fracos no infinito) pictoricamente poderíamos representar a relação de dispersão de energia-momento, para os estados chirais de vácuo ψ_0^+ e ψ_0^- como segue:



(fig. 3.4)

onde os pontos escuros representam estados ocupados e pontos claros representam estados não-ocupados

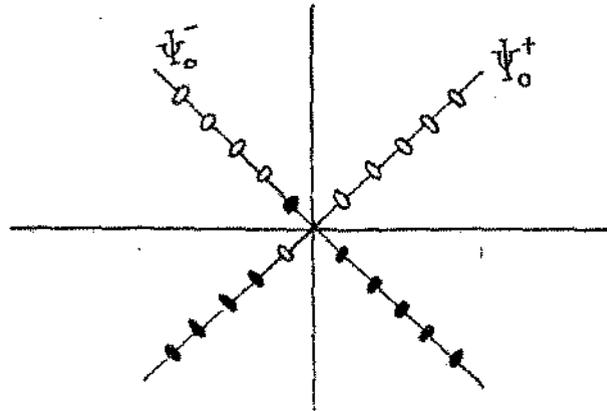
Vamos agora analisar o efeito do termo topológico. Aqui fica claro que, se o estado de vácuo original era obtido por $A_0 = 0$, com a introdução do termo de Chern, no caso $ch_1(F) = \frac{i}{2\pi}(\partial_t A_x - \partial_x A_t)dxdt = \frac{i}{2\pi}d(A_x dx + A_t dt)$, ao quebrarmos a invariância de calibre, devemos ter uma coleção de 1-formas de conexão $A_n = g_n^{-1}dg_n$ que caracterizarão outros estados de vácuo. Supondo o calibre de Weyl, $A_0 = 0$ podemos parametrizar $g_n = \exp(in\theta)$ donde $A_n = in\theta, n \in \mathbb{Z}$.

Desta forma temos uma família de operadores de Dirac $\{\partial - eA\} = \{\partial - en\}$.

Ao passarmos de um calibre para outro homotopicamente não equivalente por exemplo de $A_0 = 0$ para A_1 obtemos uma criação de par, ou seja, o estado de chiralidade positiva transita para um estado que possui uma carga negativa, e o

de quiralidade positiva transita para um estado com uma carga positiva de forma que a carga quiral é quebrada mas a carga total se conserva.

$$\begin{aligned} \psi_0^+ &\rightarrow \psi_0'^+ \\ \psi_0^- &\rightarrow \psi_0'^- \end{aligned}$$



(fig.3.5)

Esta análise é a chamada análise Hamiltoniana. Da mesma forma que podemos estudar os efeitos topológicos da segunda quantização tanto do ponto de vista de formalismo de integrais de caminho como o Hamiltoniano, aqui também temos duas apresentações do teorema de índice.

Vimos que de princípio, no formalismo de integrais de caminho, falávamos no determinante do operador de Dirac $\mathcal{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu - eA_\mu)$, e ao passarmos para o formalismo de Hamilton, eliminamos o termo temporal $\gamma^0 (\partial_0 - eA_0)$, e criamos uma família \mathbb{Z} -indexada.

Este procedimento é bem descrito em [Ati].

Sem perda de generalidade, consideremos uma família de operadores de Dirac na forma

$$D_t = -i \frac{d}{dx} + t, x \in S^1, 0 \leq t \leq k \in \mathbb{Z}_+$$

Cada operador tem seu espectro energético dado por $E_n(t) = n + t$.

Ocorre que ao passarmos de $E_0(0)$ para $E_0(k)$ tivemos um deslocamento espectral dado por k . Este é chamado de fluxo espectral (para maior apreciação ver [Ati]).

Observe que temos um operador que leva uma família à outra dado por:

$$D_t = \exp(-ikx) D_0^+ \exp(ikx) \tag{3.56}$$

Daqui fica claro como que o fluxo espectral é dado pelo envelhecimento que descreve as componentes do grupo das transformações de calibre $U(1)$ homotipicamente não equivalentes.

Para passarmos para o formalismo de integrais de caminho, ao invés de considerarmos t como parâmetro, incorporamo-lo no operador de Dirac (como $A_0 = 0$ em integrais de Feynmann). Desta forma \mathcal{D}^+ passa ser um operador em 2 variáveis (x, t) do toro:

$$\mathcal{D}^+ = \partial_t + D_t = \partial_t - i\partial_x + t. \tag{3.57}$$

Capítulo 4

QUANTIZAÇÃO E GRUPOS QUÂNTICOS

Um dos assuntos que tem estado em moda nos últimos anos é o conceito e aplicações dos grupos quânticos. Estes têm aparecido na literatura com representação em várias áreas da física, como modelos integráveis, teorias topológicas de campo, sistemas de estados coerentes, etc...

Neste capítulo iremos discutir alguns aspectos da representação dos grupos quânticos nos sistemas tratados até o presente momento.

De forma alguma, este pretende ser uma abordagem completa sobre tal tópico. Recomendaríamos alguns livros como [Char] ou [Kas] para um estudo acurado sobre os tais Grupos Quânticos.

ESTADOS COERENTES e GRUPOS QUÂNTICOS

Para introduzir a discussão sobre os grupos quânticos em Sistemas de Estados Coerentes, vamos discutir uma construção muito simples apresentada em [Har].

Seja (a, a^\dagger) os operadores usuais de criação e destruição de estados do oscilador harmônico, e seja $\{D(\alpha)\}$ os operadores de criação de estados coerentes estados coerentes como no capítulo II.

Lembrando,

$$D(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(P \hat{q} - Q \hat{p} \right)\right) = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a)$$

onde $a^\dagger = \sqrt{2\hbar}^{-1} \left(\hat{p} + i \hat{q} \right)$, $a = \sqrt{2\hbar}^{-1} \left(\hat{p} - i \hat{q} \right)$

e $\alpha = \sqrt{2\hbar}^{-1} (Q + iP)$.

Considerando $\alpha_{mn} = m + in$, vamos construir os seguintes operadores:

$$L_- = \frac{D(\alpha_{-m,-m}) - D(\alpha_{m,-m})}{q - q^{-1}}, \quad L = \frac{D(\alpha_{m,m}) - D(\alpha_{-m,m})}{q - q^{-1}}, \quad (4.1)$$

$$K = D(\alpha_{2m,0})$$

Para tais operadores temos:

$$\begin{aligned} [L, L_-] &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \\ KL_{\pm}K^{-1} &= q^{\pm 2}L_{\pm} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $q = \exp(im^2/\hbar)$.

Estas relações definem a álgebra quântica $U_q(sl(2))$.

Para tais operadores definidos na álgebra do grupo (group algebra), para uma certa escolha adequada de condições de contorno [Har], temos uma representação nos auto-estados do oscilador harmônico, a saber:

$$\begin{aligned} L_{\pm 1}|n, l\rangle &= \left[\frac{1}{2} \pm l \right] |n, l \pm 1\rangle \\ K|n, l\rangle &= q^{2l}|n, l\rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$.

Na verdade tal ação foi obtida sobre os níveis de Landau, donde temos que o índice l refere-se a degenerescência dos níveis energéticos do oscilador harmônico, concernente ao momento angular.

Se expressarmos os níveis energéticos em função dos polinômios de Hermite temos um panorama claro do que acontece. Escrevemos:

$$|n, l\rangle = \exp \left\{ 2\pi i \frac{l}{L_x} - \frac{1}{2l_B^2} (y - y_0)^2 \right\} H_n((y - y_0)/l_b) \quad (4.4)$$

então pela condição de contorno periódica, tem-se que $-y_0 = 2p_x l_b^2 l / L_x$, onde l_b é essencialmente a raiz quadrada da constante de Planck, l é o momento angular do elétron e L_x a componente na direção x . Algumas observações importantes a se fazer, notemos que o termo y_0 , a componente na direção y do centro do oscilador clássico definido no plano xy é uma quantia conservada, têm dependência com o termo l . Daí que ao transladarmos a pequenas distâncias, a priori proibitivas, temos a quebra de degenerescência. Digo transladar pois essencialmente L_{\pm} são operadores de translação.

Por outro lado, vamos ver a ação destes operadores sobre funções holomórficas quaisquer.

$$L_+ f(z) = \frac{D(\alpha_{m,m}) - D(\alpha_{-m,m})}{q - q^{-1}} f(z) = \frac{f(z + \alpha_{m,m}) - f(z + \alpha_{-m,m})}{\exp(im^2/\hbar) - \exp(-im^2/\hbar)} \quad (4.5)$$

Portanto para m pequeno, porém a valores discretos, este operador é um operador de diferenças (não muito bem definido, pois se expandirmos e considerarmos

só o primeiro termo da série, vemos que o numerador é linear em m , enquanto o denominador é quadrático em m).

Note ainda que para translações múltiplas inteiras da célula de Planck, ie, para $m^2 = n2\pi\hbar$ não teremos qualquer ação definida. Isto é, o efeito é de fato notável dentro da célula de Planck, ao passo que passos quantizados nos faz perder a ação e recuperar a degenerescência.

Estes operadores, uma vez que estão definidos em função dos operadores $D(\alpha)$ tem ação nos estados coerentes. Em particular, sobre o espaço de funções theta de Jacobi com característica $\{\Theta_a\}$. Note que as observações sobre as dimensões na qual as translações estão bem definidas está em completo acordo com a análise feita no capítulo II, ie, para translações no reticulado com célula mínima sendo a célula de Planck nas temos quebra de degenerescência, ie, temos apenas uma quantização ou uma função theta de Jacobi. Para movimentos dentro da célula de Planck temos a quantização não estando bem definida, de forma a necessitarmos das funções theta com característica, cada uma correspondendo a uma quantização do sistema

Para focalizarmos a ação destes operadores lembremos algumas propriedades da representação do grupo de Heisenberg sobre as funções theta de Jacobi. Temos que:

$$\Theta_{a/k} = T_{1/k}^a \Theta = D\left(\frac{a}{k}, 0, 1\right) \Theta$$

$$\Theta_{b/k} = S_{1/k}^b \Theta = D\left(0, \frac{b}{k}, 1\right) \Theta$$

No capítulo II consideramos translações a dimensões "sub-Planck" somente em uma direção. Lembremos que fixamos nossa célula básica do reticulado de dimensão $S = \text{Im}(w'_1 \bar{w}'_2) = \frac{\pi}{k}$, ($S = \pi$ equivaleria ao reticulado de von Neumann), fixando o tamanho de (w'_1, w'_2) de tal forma que estes relacionam-se com os geradores do reticulado de von Neumann (w_1, w_2) por $w'_1 = w_1$ e $w'_2 = \frac{w_2}{k}$. Desta forma no atual caso estamos modificando o passo de ambos geradores, o que não modifica em nada a análise feita até então. Desta forma a ação dos operadores $\{L_+, L_-, K\}$ nos fornece:

$$L_+^m \Theta_{a,b} = \frac{D\left(\frac{m}{k}, \frac{m}{k}, 0\right) - D\left(-\frac{m}{k}, \frac{m}{k}, 0\right)}{q - q^{-1}} \Theta_{a,b} = \frac{\exp(-2\pi i m a) \Theta_{a+m, b+m} - \exp(2\pi i a m) \Theta_{a-m, b+m}}{q - q^{-1}}$$

$$L_-^m \Theta_{a,b} = \frac{D\left(-\frac{m}{k}, -\frac{m}{k}, 0\right) - D\left(\frac{m}{k}, -\frac{m}{k}, 0\right)}{q - q^{-1}} \Theta_{a,b} = \frac{\exp(2\pi i m a) \Theta_{a-m, b-m} - \exp(-2\pi i a m) \Theta_{a+m, b-m}}{q - q^{-1}}$$

$$K^m \Theta_{a,b} = D\left(\frac{2m}{k}, 0, 0\right) \Theta_{a,b} = \exp(-4\pi i m a) \Theta_{a+2m, b}.$$

(4.6)

Para diagonalizarmos a ação de K , basta considerarmos como no primeiro capítulo passos inteiros na primeira (ou segunda) variável que define o reticulado de von Neumann.

Esta análise vem a embasar aquela feita no capítulo II. Cabe ressaltar que neste caso já havíamos uma simetria oculta que, se abordássemos de forma ingênua um problema qualquer de osciladores, a priori, não poderíamos estar relacionando esta quebra de degenerescência com o número quântico de momento angular l .

Levando essas simetrias internas em consideração, torna-se possível estender o uso do formalismo de estados coerentes para problemas de muitos corpos.

No capítulo II mencionamos um uso dos Sistemas de Estados Coerentes Generalizados (onde o espaço de fase é identificado com a variedade simplética $M = G/H =$ variedade bandeira, onde G é um grupo de Lie semi-simples e H é o toro maximal de G) em [Kur], onde o autor usa esse sistema de estados coerentes para fazer a quantização de um sistema de muitos corpos via integrais de caminho, caminhos estes definidos sobre M .

Nesse caso, abordava-se o problema de n férmions interagentes, via o método de Hartree-Fock dependente do tempo. Neste método o estado inicial é o chamado estado de determinante, onde os níveis referentes às n partículas encontram-se ocupados, ou seja $|\Psi_0\rangle = \prod_{i=1}^n a_i^\dagger |0\rangle$, estado este cujo valor esperado da Hamiltoniana é estacionário. As perturbações neste estado de muitas partículas são causadas por ocupação e desocupação de níveis diferentes, ie, $\delta\Psi_{jk} = \varepsilon_{jk} a_\mu^\dagger a_k$ (note que este é um operador tipo L^+ na representação de bósons acoplados da álgebra de Lie $su(2)$ ver[Mat]). O sistema como um todo tem ação do grupo unitário $U(n+m)$ sobre estados (a_μ^\dagger, a_i) , onde o índice $\mu = 1, \dots, m$ refere-se aos estados vazios, e o índice $i = 1, \dots, n$ refere-se aos estados ocupados. Desta forma $U(n)$ é o grupo de isotrofia do estado inicial, e consideraremos o espaço de base $M = U(m+n)/U(n)$. A quantização do sistema é feita via integrais de caminho no limite semi-clássico sobre os estados coerentes definidos sobre a variedade M , ie,

se o propagador escreve-se:

$$K(Z''t''|Z't') = \int \exp[iS/\hbar] \mathcal{D}\mu[Z(t)], \quad (4.7)$$

onde $S = \int Ldt = \int \langle Z(t) | i\hbar\partial_t - H | Z(t) \rangle$ é a ação e Z são as coordenadas da variedade M , no limite semiclassical tomamos a integral apenas sobre os estados estacionários:

$$K^{cl} = \sum \exp[iS^{cl}/\hbar] \quad (4.8)$$

Os estados estacionários são definidos exigindo-se que o termo de holonomia $\oint \langle Z | dZ \rangle$ assumam valores inteiros (ver [Nak] e [Sto]).

Desta forma estamos tomando a ação apenas nos estados devidamente (no sentido de Bohr-Sommerfeld) quantizados existe um problema neste caso de sobre-determinação de tais estados (ver detalhes em [Kur]). Vamos analisar então este

método. O grupo de simetria em questão referia-se ao número total de partículas do problema. Cada estado era um estado de n corpos. O fato destes serem interagentes nos levou a considerar cada estado de n corpos como um estado único, e portanto a simetria interna relacionava-se a estrutura na qual estes n corpos "organizavam-se". Vamos supor que o termo de holonomia assumia valores semi-inteiro, por exemplo \mathbb{Z}/k . Desta forma, para completar uma órbita de Bohr-Sommerfeld, precisaríamos circular k vezes em torno dum laço fechado na variedade. Na fibra teríamos k pontos marcados. Desta forma estaríamos distinguindo k configurações internas deste estado de n corpos. Desta forma quebraríamos a simetria deste estado. Além disto, para cada k teríamos uma definida quebra de simetria. Supomos ser possível achar a ação de "translações" finitas intercambiando estas configurações, estando ligadas algum grupo quântico, de forma semelhante ao caso anterior (construções triviais como $U_q(su(2))$ são imediatas, estando $su(2)$ ligado a perturbação como construído acima). É claro que esta é uma inferência não verificada, que pretendemos trabalhar sobre.

INCORPORAÇÃO DOS NÓS NA TEORIA DE CHERN-SIMONS

No início do capítulo anterior havíamos mencionado que a teoria de Chern-Simons houvera se notabilizado por também ter apresentado uma maneira de apresentar os polinômios de nós de Jones em teorias de calibre. Para tal, associava linhas de Wilson (quantizadas) com os tais nós. Os polinômios de Jones, bem como generalizações apareceriam com o cálculo de valores esperados de nós e elos.

Dada a Lagrangeana de Chern-Simons queremos então calcular o valor esperado das linhas de Wilson:

$$W = \prod \exp \left(i n_a \int_{C_a} A \right), \tag{4.9}$$

onde, como no capítulo anterior, C_a são ciclos homologicamente não triviais.

Caso ignoremos o caso em que $C_a = C_b$, de acordo com os calculos de Polyakov temos:

$$\langle W \rangle = \exp \left(2\pi i / k \sum_{a,b} n_a n_b \Phi(C_a, C_b) \right) \tag{4.10}$$

Witten atentou que, o aparecimento do número de enovelamento de Gauss, ilustra o fato da teoria de Chern-Simons levar a invariantes topológicos.

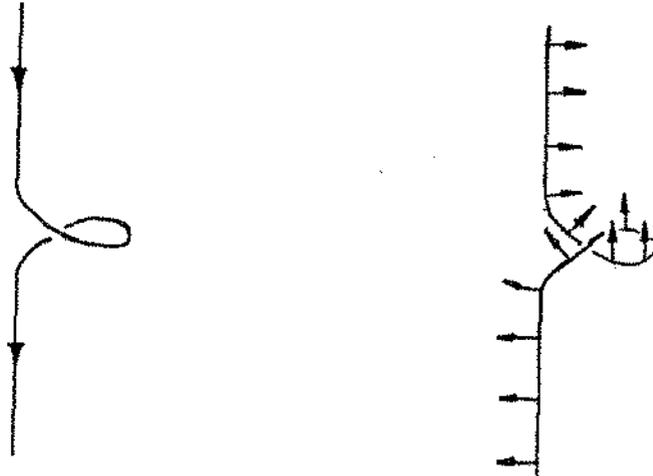
A questão é: e no caso em que $a = b$?

Este caso é o chamado caso de auto-enovelamento

A maneira anunciada em [Wit] para solucionar esta questão foi a introduzirmos um referencial móvel sobre as linhas de Wilson, projetando estes da variedade de fundo sobre as linhas.

Pictoricamente representamos da seguinte forma:

(fig. 4.1)



Ainda o caso abeliano, devemos obter-se que, após introduzirmos os referenciais nos nós, os valores esperados de duas linhas de Wilson que diferem entre si por 1 auto enovelamentos é expressa por:

$$\langle W \rangle \rightarrow \exp\left(2\pi i \frac{t}{k} \cdot n_a^2\right) \langle W \rangle . \tag{4.11}$$

Note que para n_a fixo, temos uma relação de equivalência no conjunto das linhas de Wilson, a saber t , o índice de enovelamento assume valores em \mathbb{Z} módulo k .

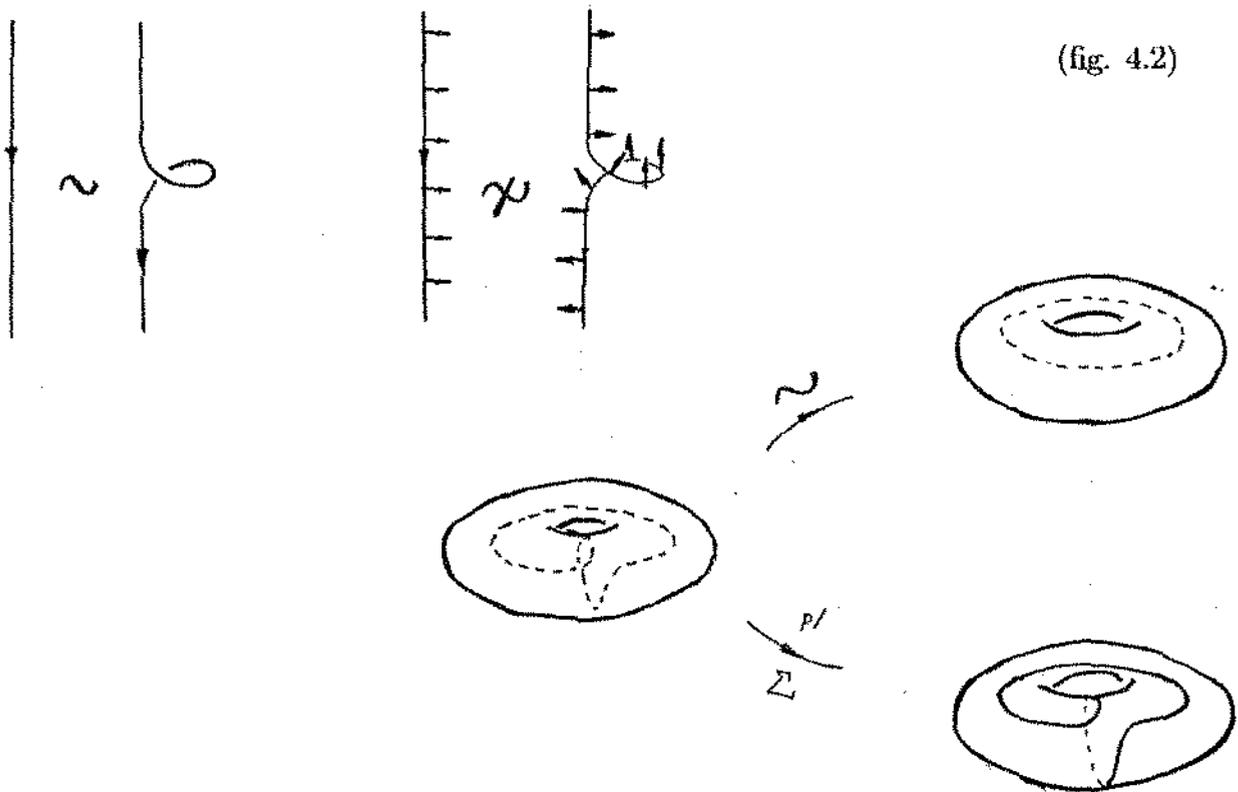
Vimos no capítulo anterior que o conjunto das linhas de Wilson relevantes na teoria operatorial é definido pela parametrização (a_i, \bar{a}_j) , onde, por construção, estes são geradores de representações do grupo de homotopia em $U(1)$, sendo, portanto cada a_i imagens de ciclos homotopicamente não equivalentes.

Vimos ainda que difeomorfismos globais sobre Σ mapeiam uma linha de Wilson em outra.

Este procedimento deve ser equivalente ao procedimento de inserir referenciais nas linhas de Wilson, projetados da variedade de fundo.

Devemos lembrar de um fato. A teoria de Chern-Simons é definida primeiramente em uma variedade M de dimensão 3. Para passarmos para a dimensão 2, escrevemos $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ (procedimento posteriormente generalizado). Para definirmos as linhas de Wilson sobre a variedade Σ , é preciso garantirmos que, para qualquer laço que seja, este seja deformável homotopicamente de M a Σ . Ora, mas isto está garantido pela própria escolha de calibre que nos garante a invariância desta linhas no sentido radial. Este procedimento de projeção, equivale a projetarmos referenciais da variedade de fundo sobre as laços de Wilson. da mesma forma que não existe forma canônica para projetarmos os laços, não temos escolha canônica de referencial.

Estando as linhas definidas na superfície de Riemann Σ , operamos sobre elas por difeomorfismos globais nas superfícies. É imediato ver que este procedimento equivale a enovelar as linhas.



Ainda da associação destes difeomorfismos com os operadores de translação $\exp(i \int_C A)$ e dos estados de vácuo, em funções dos quais será calculado o valor esperado, com as funções theta de Jacobi, obtemos também a relação acima por calculo direto. Por exemplo, se

$$C = a_i \alpha_i \rightarrow C' = (a_i + 1) \alpha_i$$

então

$$\left\langle \exp \left(i \int_C A \right) \right\rangle \rightarrow \left\langle \exp \left(i \int_{C'} A \right) \right\rangle = \left\langle \exp \left(i \int_C A + i \int_a A \right) \right\rangle \quad (4.12)$$

Calculando na base das funções $\{\Theta_{a/k}\}$, e levando em consideração as operações 2.23 e 2.30 obtemos os resultados esperados (a menos de normalização).

A inclusão das linhas de Wilson na teoria corresponde a inclusão de cargas estáticas. Esta inclusão altera as equações dos vínculos, que nos permitem quantizar o sistema.

No caso da lei de Gauss, teríamos:

$$k/8\pi\epsilon^{ij} F_{ij}^a(x) = \sum_{s=1}^r \delta^2(x - P_s) T_{(s)}^a, \quad (4.13)$$

onde P_s são os pontos onde se localizam as cargas estáticas, e $T_{(s)}^a$ são os geradores do grupo estrutural de Lie G , associados a uma certa representação da carga.

A quantização dos vínculos é delicada, uma vez que no lado direito da equação temos operadores ao passo que no lado esquerdo \mathbb{C} -números. Daí a inferência da presença dos grupos quânticos na teoria. De fato, se os campos $\{A_i\}$, solução da Lei de Gauss clássica, ao serem quantizados, forem substituídos por operadores, como é usual em todo processo de quantização, espera-se que estes operadores sejam compatíveis com o operador que aparece do lado esquerdo da equação.

Note no entanto que ao quantizar, independente do processo que estejamos tratando, haveremos de inserir uma estrutura algébrica extra no espaço de funções $\{A_i\}$. Esta estrutura deve estar em acordo com o caráter Lie algébrico manifestado no lado direito pelo fato de $T_{(s)}^a$ ser um gerador da álgebra de Lie da teoria de calibre, associado a uma certa representação R_s .

Lembremos que a Lei de Gauss equivale à asserção de invariância de calibre das funções de onda, ie, a nível quântico esta deve ser efetivada operacionalmente, a saber:

se $\{\hat{Q}_a\}$ são os geradores das transformações de calibre, então:

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{Q}_a(x), \hat{Q}_b(y) \right\} &= \epsilon_{ab}^c \delta(x - y) \hat{Q}_c \\ \hat{Q}_a | \Psi \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Entretanto, a inclusão das linhas de Wilson deve acarretar uma mudança em tal equação de invariância. De fato vimos que, embora as transformações pequenas de calibre sejam preservadas na teoria de Chern-Simons, temos uma quebra da invariância por transformações largas de calibre, como em (??). Por exemplo, no caso abeliano, a equação acima escreve-se na forma:

$$k/8\pi\epsilon^{ij}F_{ij}(x) = \sum_{s=1}^r \delta^2(x - P_s) \tau_{(s)}, \tag{4.15}$$

onde $\tau_{(s)}$ é o gerador do grupo $U(1)$, associado a representação R_s . Se escrevermos explicitamente a expressão acima temos:

$$k/8\pi\epsilon^{ij} \{(\partial_i A_j - \partial_j A_i) + [A_i, A_j]\} = \sum_{s=1}^r \delta^2(x - P_s) \tau_{(s)}. \tag{4.16}$$

Desta forma, se a parte funcional do lado direito da equação acima é satisfeito, vemos que a inclusão das linha de Wilson nos conduz a quantização dos campos de calibre $\{A_i\}$, expresso pela deformação da equação de comutação,

$$[A_i, A_j] = 0 \rightarrow [A_i, A_j] = \sum_{s=1}^r \delta^2(x - P_s) \tau_{(s)}. \tag{4.17}$$

De fato, o que obtivemos para os coeficientes $\{a_i\}$ foi uma lei de quantização vinculada a representações do grupo de Weyl-Heisenberg em $U(1)$.

É fácil inferir que esta deformação esta intimamente ligada à inserção de termos anômalos ,ie, termos de cociclo oriundos de extensões centrais, expresso por exemplo pela anomalia na Lei de Gauss $\{[Fad],[Shi]\}$ por:

$$[\widehat{Q}_a, \widehat{Q}_b] = if_{ab}^c \widehat{Q}_c(x) \delta^{(3)}(x - y) + \frac{1}{12\pi^2} d_{ab}^c \epsilon_{ijk} \partial_i A_j^c \partial_k \delta^{(3)}(x - y) \tag{4.18}$$

que também é um fenômeno típico da quantização de sistemas (ver cap. anterior).

Desta forma, torna-se imediato a associação de deformações em grupos quânticos com termos de cociclo, como na construção de Faddev, Takthadzian, Reshetikhin, et al... [Tak].

Este é o aspecto que queremos discutir.

Para quantizar as representações, Witten [Wit] descreve um procedimento como o que segue.

Primeiramente, as representações R_i de um grupo G passarão a ser consideradas objetos quânticos. Poderiam ser obtidas então da quantização de uma teoria clássica.

Para cada representação irredutível R_i dum grupo compacto G , o Teorema de Borel-Weil-Bott nos fornece uma forma canônica de exibir um problema clássico com tal grupo G como simetria, tal que a quantização deste sistema nos forneça de volta a representação R_i .

Tomamos então o espaço M das conexões de uma teoria de calibre com grupo estrutural G e base Σ . Em cada ponto $P_S \in \Sigma$, onde se encontra uma carga estática colamos uma cópia de G/H , onde H é o toro maximal em G . As variedades

G/H são chamadas variedades bandeira (flag manifolds ver [Kir]) e e são variedades munidas de estrutura simplética. Tomamos esta cópia de G/H colada no ponto P_S da variedade, de forma que a estrutura simplética seja apropriada a representação R_S do grupo. Estão, afirma Witten que no ponto marcado a equação de vínculos ganha termos $T_{(S)}^a$ (onde a é um índice Lie algébrico) tal que pelo teorema de Borel-Weyl-Bott teriam também expressão clássica equivalente.

O procedimento feito no capítulo anterior, operatorial, difere do descrito por Witten [Witt], tendo que, necessariamente, serem equivalentes, a menos que não descrevam o mesmo fato.

A quantização holomórfica da teoria de Chern-Simons ofereceu-nos uma maneira relativamente simples de vislumbrar parte destes aspectos.

É explícito (por construção) que os objetos quantizados são as representações, uma vez que nossas variáveis holomórficas relevantes na integração de caminho são os geradores $\{a_i, a_i^\dagger\}$, que são imagem de ciclos de homotopia. Diferentes índices i , corresponde a laços homotopicamente não equivalentes.

Seria possível comparar de forma imediata estas duas construções?

Primeiro lembremos que o objeto em estudo é a quantização dos campos $\{A_i\}$. No método de integrais de caminho, que difere do método Hamiltoniano, ao primeiro fato a fazer é criar o espaço modular ou o espaço das classes de equivalência entre campos relacionados por uma transformação de calibre, ie, $[A_i^g] = \{gA_i g^{-1} + gdg^{-1}\}$. É claro que aqui só estamos considerando as transformações de calibre "pequenas" (ver eq. 3.14).

Propomos considerar a seguinte construção:

Tomemos esta classe $\mathcal{A}_i = [A_i^g]$. Consideremos ela um conjunto e vamos quantizar este conjunto.

Notemos que os elementos de \mathcal{A}_i são elementos de $\Lambda^1(\Sigma) \otimes \mathcal{G}$ onde Σ é a variedade de base da teoria de calibre e \mathcal{A}_i a álgebra de Lie do grupo estrutural G .

Na verdade tomamos apenas os elementos de uma certa classe de cohomologia $H_1(\Sigma)$, uma vez que fixamos $A_i(x)$, e os elementos do grupo $g(x)$ são da mesma classe de cohomologia já que estamos considerando as transformações de calibre pequenas.

Por outro lado em \mathcal{G} consideraremos apenas uma órbita dum certo elemento pela ação adjunta de G . Desta forma teremos :

$$\mathcal{A}_i = [w(x)] \otimes G/H, \tag{4.19}$$

onde usamos o fato das órbitas em \mathcal{G} serem isomorfas a G/H (ver [Kir]).

Queremos achar estrutura simplética ω em \mathcal{A}_i . Vamos quebrar ω em $\omega_1 \otimes \omega_2$, onde esta quebra é relativa ao produto tensorial em \mathcal{A}_i .

Obtemos que se uma das formas ω_i for simétrica a outra deve ser anti-simétrica.

Por exemplo podemos tomar ω_2 a forma simplética induzida da forma simplética em G/H , que tem estrutura de variedade simplética. Como a parte central foi excuída de G , ω_2 deve estar restrita a subálgebra $\{\mathcal{G}_+, \mathcal{G}_-\}$ de \mathcal{G} onde \mathcal{G}_\pm são os espaços de vetores de raízes com respeito a decomposição de raízes. Epora saibamos que ω_2 antes de mais nada há de ser um cociclo na álgebra e que cociclos em álgebras semi-simples são triviais [Shi], ao podemos achar um cociclo não trivial agora da mesma forma que podemos munir G/H de estrutura simplética, e não G . Em termos Lie-algébricos seria equivalente (ver [Tak]) a passar de uma solução da equação de Yang-Baxter para uma solução da equação de Yang-Baxter modificada. Neste sentido em [Tak] foi construído uma dois forma r , tal que:

$$r = \sum_{\alpha \in \Delta_+} (x_{-\alpha} \otimes x_\alpha - x_\alpha \otimes x_{-\alpha}) \tag{4.20}$$

onde Δ_+ corresponde ao espaço de raízes positivas.

Note que ainda estamos nas soluções da equação de Yang-Baxter clássica não tendo estrutura de Grupos Quânticos. Isto é natural, pois estamos quantizando apenas um setor do espaço de conexões $\{A_i\}$.

Note ainda que esta estrutura está definida sobre cada fibra, portanto r deve depender diferencialmente de $x \in M$, ie, $r = r(x)$

Estivemos analisando apenas a parte Lie-algébrica da conexão ω . Lembremos que temos partido o funcional ω em duas partes $\omega = \omega_1 \otimes \omega_2$. Uma vez que ω_2 é estrutura simplética ω_1 deve ser um funcional simétrico definido em $\Lambda^1(\Sigma)$ constante em cada classe homotópica.

Mencionamos que r esta definida apenas para um setor do espaço de conexões. De fato, como vimos no capítulo, obtivemos vários setores de calibre referentes a imagem de ciclos homotopicamente não equivalentes da base.

Para quantizar outro setor, ie, outra classe de equivalência $[A_i^g]$ deveremos ter a mesma estrutura porém com a 2-forma r . Esta, entretanto não há de se referir a mesma representação do grupo G . De fato, como temos visto, cada setor de calibre equivale a uma órbita na representação co-adjunta do grupo. Diferentes órbitas referem-se a diferentes representações (neste ponto recomendamos fortemente a referência [Kir], cap 15, Teorema 3).

Desta forma estamos associando diferentes setores de calibre a diferentes representações do grupo. Ora, mas quem está fixando os setores de calibre são as classes de homologia da base, ou o par de ciclos representantes de cada classe de homologia. Com isso já obtivemos o resultado desejado.

A saber:

"Para cada setor de calibre temos uma quantização, ie, uma forma simplética $\omega_S(x)$, compatível com uma representação $R_{(S)}$ do grupo G . Diferentes setores de calibre fornecem diferentes quantizações correspondendo respectivamente a diferentes representações do grupo G . Cada setor de calibre está fixado pelas classes

de homologia da base Σ da sua teoria de calibre, ou seja por um par de ciclos de homologia não trivial.”

Obtivemos este resultado no caso em que, com relação a partição $\omega = \omega_1 \otimes \omega_2$, ω_1 é simétrico e constante em cada classe de homologia e ω_2 é anti-simétrico. Podemos inverter este raciocínio. Na verdade, podemos definir unicamente a cada ω_2 uma forma bilinear simétrica na álgebra de Lie \mathcal{G} .

Temos que formas bilineares simétricas invariantes, pelo lema de Schur têm de ser proporcionais a forma de Killing k definida na álgebra. Lembremos que embora a forma de Killing seja não degenerada na álgebra de Lie (semi-simples, no caso), a restrição sobre a subálgebra de Cartan anula-se identicamente. Lembrando-se que nas co-órbitas temos a estrutura simplética ω_2 , e estas excluem a sub-álgebra de Cartan, e lembrando-se a relação válida para variedades simpléticas $g(\cdot, \cdot) = 2\omega(\cdot, J\cdot)$ onde g é a métrica hermitiana e J a estrutura complexa (eq. 1.13), definimos J como um automorfismo que leva $\mathcal{G}^+ \xrightarrow{J} \mathcal{G}^-$.

Desta forma mapeamos a forma simplética na forma de Killing. A forma de Killing é invariante por automorfismos, sendo equivalente as transformações de calibre. Note que os automorfismos são conjugações, e portanto a forma de Killing está constante para cada classe de equivalência de representações.

Quanto a forma ω_1 , neste caso devemos tomar uma forma bilinear anti-simétrica constante nas classe de homologia. Ora para tal, basta tomar o número de enovelamentos $\#(\cdot, \cdot)$ como o construído em 3.8. Desta forma temos $\omega_{(S)} = \#(\cdot, \cdot) \otimes k_{(S)}(\cdot, \cdot)$ onde i é o índice da representação. Desta forma esta forma está extendida para todas as classe $[A_i^g]$, sendo portanto a forma simplética do sistema.

Esta construção equivale a construção feita no capítulo anterior, bem como a fórmula geral de cociclos obtida por [Shi], [Fad] e outros autores que usaram de técnicas de homologia para classificar os cociclos.

Bastaria tal construção para obtermos os estrutura de grupos quânticos nas teorias de calibre?

Na verdade devemos lembrar que o termo de Chern-Simons fixou um número k de representações com as quais nos restringimos a trabalhar. Tal restrição foi feita através de uma relação de equivalência no espaço dos ciclos incorporada na forma (no caso abeliano):

$$\exp\left(i \int_C A\right) \exp\left(i \int_{C'} A\right) = \exp\left(i \frac{\pi}{k} \#(C, C')\right) \exp\left(i \int_{C+C'} A\right)$$

Esta relação de equivalência estabelece uma relação de equivalência no espaço de representações. O anel de representações de uma álgebra de Lie $R(\mathcal{G})$ é isomórfico ao anel polinomial a coeficientes inteiros $P_{\mathbb{Z}}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ onde $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ são os pesos fundamentais referentes às representações fundamentais R_i (ver por exemplo [Sam]). Desta forma, para impormos esta restrição no espaço de representações devemos deformar o anel polinômial sobre \mathbb{Z} para um anel polinomial sobre outro corpo. Inferimos que esta deformação seja obtida na passagem $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_k$ dado que polinômios sobre \mathbb{Z}_k são naturais para definir q-variáveis (ver [Kas]), e fornecem

o resultado clássico obtido em representação de grupos quânticos, em particular por Verlinde em teoria conforme, e em geral para Chern-Simons, onde se assevera que o espaço de Hilbert (de representações) é isomorfo a $\Lambda^W / W \times k\Lambda^R$, onde Λ^W é o espaço de pesos, Λ^R o espaço de co-raízes e W o grupo de Weyl.

Este resultado nos permite inferir a teoria de representação de álgebras de Lie de dimensão infinita com extensões centrais (cociclos) que pretendemos investigar.

Devemos esperar então que seja possível estabelecer de forma racional as representações de grupos quânticos nos fibrados de linha, usados na quantização da teoria.

Apêndice

A - O Grupo de Holonomia

Iremos apresentar o grupo de holonomia para o caso de fibrados principais seguindo basicamente [Kob].

Seja $P(M, G, \Gamma)$ um fibrado principal com conexão Γ . Para cada ponto $x \in M$, seja $C(x)$ o espaço de laços em x .

Se τ e μ são elementos de $C(x)$, a curva composta $\mu.\tau$ (τ seguida de μ) é também elemento de $C(x)$.

Para cada $\tau \in C(x)$, o transporte paralelo ao longo de τ é um isomorfismo da fibra $\pi^{-1}(x)$ em si mesma. O conjunto de todos tais isomorfismos formam o grupo de holonomia de Γ com referência ao ponto x .

Seja $C^0(x)$ o subgrupo de $C(x)$ composto pelos laços contrateis. O subgrupo do grupo de holonomia consistindo dos transportes paralelos ao longo de $\tau \in C^0(x)$ é chamado de grupo restrito de holonomia de Γ (com referência à x). Denotaremos o grupo de holonomia e o grupo restrito de holonomia com referência ao ponto x , por $\Phi(x)$ e $\Phi^0(x)$.

Podemos também apresentar esses grupos como subgrupos do grupo estrutural G . Seja u um ponto de $\pi^{-1}(x)$. Para cada $\tau \in C(x)$, temos $a \in G$ (o grupo estrutural do fibrado) tal que $\tau(u) = ua$.

Se um laço $\mu \in C(x)$ determina $b \in G$, então a composta $\mu.\tau$ determina $b.a \in G$ (é imediato verificar que $\mu.\tau(u) = ub.a$).

O conjunto dos elementos $a \in G$ determinados por todos $\tau \in C(x)$ formam um subgrupo de G denotado $\Phi(x)$ é chamado grupo de holonomia de Γ com referência à x . Temos então apresentado duas construções do grupo de holonomia cuja equivalência é demonstrada por um isomorfismo entre $\Phi(x)$ e $\Phi(u)$ tal que faz comutar o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} C(x) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \Phi(x) & \rightarrow & \Phi(u) \end{array}$$

Outra maneira ainda de definir $\Phi(u)$ segue. Quando dois pontos u e v de P podem ser unidos por uma curva horizontal, temos a relação de equivalência $u \sim v$. Desta forma $\Phi(u)$ é igual ao conjunto dos elementos $a \in G$ tais que $u \sim ua$.

Temos então a seguinte proposição:

Proposição:

(a) Se $v = ua$, $a \in G$, então $\Phi(v) = \text{ad}(a)^{-1}(\Phi(u))$, i.e., os grupos de holonomia $\Phi(v)$ e $\Phi(u)$ são conjugados (o mesmo para $\Phi^0(v)$).

(b) Se dois pontos u e v de P puderem ser ligados por uma curva horizontal, então $\Phi(u) = \Phi(v)$ (da mesma forma para $\Phi^0(u)$)

Podemos provar que os grupos de holonomia são grupos de Lie. O subfibrado do fibrado principal $P(M, G)$, cujo grupo estrutural é o grupo de holonomia é chamado fibrado de holonomia.

Outra construção fundamental a ser anunciada aqui é o teorema de Ambrose-Singer.

Teorema:

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal, onde M é paracompacto e conexo. Seja Γ uma conexão em P , Ω a dois forma de curvatura, $\Phi(u)$ o grupo de holonomia relativo a $u \in P$ e $P(u)$ o fibrado de holonomia de Γ através de u . Então a álgebra de Lie de $\Phi(u)$ é igual ao subespaço de \mathfrak{g} , álgebra de Lie de G , gerada por todos os elementos da forma $\Omega_v(X, Y)$, onde $v \in P(u)$ e X, Y são vetores arbitrários em v .

Decorre do teorema acima que os grupos de holonomia para o caso em que Γ é uma conexão chata são discretos.

Desta forma se tomarmos os fibrados de holonomia para o caso em que Γ é chato a proposição acima nos mostra como inter-relacionam-se tais fibrados chatos (com grupos estruturais discretos conjugados).

B-Divisores e Fibrados Lineares

I-Divisores

Seja M uma variedade complexa e $U \subset M$, subconjunto aberto de M . Denotamos por $\mathcal{O}(U)$ o anel das funções holomórficas em U . Se $V(\neq \emptyset) \subset U$, existe o homomorfismo de restrição $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$.

Um elemento $f \in \mathcal{O}(U)$ é um divisor de zero de $\mathcal{O}(U)$ se e somente se for identicamente nula em alguma componente conexa de U ; portanto se f não é divisor de zero de U , f não é divisor de zero de nenhum aberto $V \subset U$.

Consideramos um conjunto $\{(U_i, f_i)\}$ onde $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta de M e $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ para todo i . Denotaremos $U_{i_1, \dots, i_p} = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}$, para interseções não nulas.

Vamos assumir que para $\{(U_i, f_i)\}$ são satisfeitas as condições:

i) f_i não é divisor de zero de $\mathcal{O}(U_i)$ para todo i .

ii) existe uma unidade f_{ij} de $\mathcal{O}(U_{ij})$ satisfazendo $f_i = f_{ij}f_j$ em cada U_{ij} .

Vamos supor que sejam também satisfeitas tais condições para $\{(V_i, g_i)\}$. Se existir uma unidade h_{ij} de $\mathcal{O}(U_i \cap V_j)$ satisfazendo $f_i = h_{ij}g_j$ em toda interseção não vazia $U_i \cap V_j$, diremos que $\{(U_i, f_i)\}$ e $\{(V_i, g_i)\}$ são equivalentes (é imediato ver que temos definido uma relação de equivalência). Se D for a classe de equivalência de $\{(U_i, f_i)\}$ dizemos que D é divisor positivo de M (esta definição será

representada como a definição de feixes para divisores).

Vamos supor que $\{U_i\}$ é um refinamento de $\{V_j\}$ por $i \rightarrow j_i$ e D o divisor positivo de M com $\{(V_j, g_j)\}$ como representante. Então, se denotarmos por f_i a restrição de g_{j_i} a U_i , teremos outro representante $\{(U_j, f_j)\}$ de D .

Por outro lado, qualquer número finito de coberturas abertas de M podem ter um refinamento aberto comum (uma cobertura aberta que seja um refinamento). Portanto se D, D' são divisores positivos de M , podemos assumir seus representantes na forma $\{(U_j, f_j)\}, \{(U_j, f'_j)\}$. Então $\{(U_j, f_j f'_j)\}$ define o divisor positivo $D + D'$ em M . Temos definida então uma estrutura de monóide no espaço dos divisores de M . Observando que a lei de cancelamento, $D + D' = D + D''$ se $D' = D''$, é satisfeita podemos mergulhar o monóide num grupo chamado grupo dos divisores (verifica-se todas as propriedades). A identidade 0 é um "divisor positivo" de M ; para qualquer cobertura aberta $\{U_i\}$ de M , temos $\{(U_i, 1)\}$ como representante. Esta estrutura de grupo torna-se natural se considerarmos o anel das funções meromórficas (não identicamente nulas) $\mathcal{M}^*(M)$ de forma que localmente as funções meromórficas são expressas como quocientes de funções holomórficas. Voltaremos a isso em breve.

Se D tiver um representante na forma $\{M, f\}$ (i.e., uma função holomórfica globalmente definida) podemos escrever $D = \{f\}$; f é única a menos de unidade de $\mathcal{O}(M)$.

Os divisores de uma variedade complexa M , têm uma estreita relação com os fibrados lineares sobre M .

Para tal apresentaremos os divisores de uma forma um pouco diferente, porém totalmente equivalente.

II-Divisores e feixes

Tomemos um representante de D , $\{(U_i, f_i)\}$. Dizemos que " $f_i = 0$ " é expressão local para D . O conjunto dos pontos onde anula-se em U_i a função f_i é uma hipersuperfície analítica de M , que chamaremos no que segue de V_i (não confundir com o aberto U_i). Vamos assumir que V_i seja irredutível. Temos para cada aberto U_i uma expressão local " $f_i = 0$ ", e portanto hipersuperfícies analíticas irredutíveis $\{V_i\}$.

Definimos desta forma o divisor D pela soma formal localmente finita

$$D = \sum a_i V_i$$

de hipersuperfícies analíticas irredutíveis de M .

Aqui, com localmente finita queremos expressar que para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança de p interceptando somente um número finito de V_i 's que aparecem na expressão de D .

No caso de termos uma hipersuperfície analítica $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$, onde cada V_i é irredutível, o divisor associado a V é $\sum V_i$.

Seja $V \subset M$ hipersuperfície analítica e seja $p \in V$, e seja f uma expressão local para V perto de p .

Para qualquer função holomórfica g definida perto de p definimos a ordem $ord_{V,p}(g)$ de g ao longo de V em p como sendo o maior inteiro a tal que no anel local $\mathcal{O}(M_p)$ (i.e., o anel das funções holomórfas na vizinhança de p) temos:

$$g = f^a \cdot h$$

De fato, a ordem de g é independente de \dot{p} (isto decorre do fato de que elementos relativamente primos de $\mathcal{O}(M_p)$ permanecem relativamente primos em anéis locais vizinhos, ver [Gri]).

Podemos definir então a ordem de g ao longo de V como sendo simplesmente a ordem de g ao longo de V em qualquer ponto $p \in V$.

Note que para quaisquer funções holomórficas g, h temos:

$$ord_V(gh) = ord_V(g) + ord_V(h).$$

Seja agora uma função meromórfica f escrita localmente como $f = g/h$, sendo g e h holomórficas e relativamente primas. Definimos para uma hipersuperfície irredutível V :

$$ord_V(f) = ord_V(g) - ord_V(h)$$

Dizemos que f tem um zero de ordem a se $ord_V(f) = a > 0$, e que f tem um pólo de ordem a ao longo de V se $ord_V(f) = -a < 0$.

Definimos um divisor (f) de uma função meromórfica f por:

$$(f) = \sum_V ord_V(f) \cdot V$$

Note que esta definição equivale a definição de divisores $D = \{f\}$ dada acima (com a devida atenção ao fato de f meromórfica).

Se escrevermos f localmente como g/h (g e h relativamente primos), temos que:

$$(f) = \sum_V ord_V(g) \cdot V + \sum_V ord_V(h) \cdot V = (f)_0 - (f)_\infty$$

Vamos agora retomar a primeira definição de divisores apresentada, agora para funções meromórficas, com uma única renomeação em termos de feixes (ver feixes em [Gri]).

Seja \mathcal{M}^* o feixe multiplicativo de funções meromórficas não identicamente nulas em M , e \mathcal{O}^* o sub-feixe de funções holomórficas (diferentes da função identicamente nula). Então um divisor D é uma seção global em M do feixe quociente $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$.

Uma seção global $\{f\}$ de $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ é dada por uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M e funções meromórficas f_α (não identicamente nulas) em U_α tais que:

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$$

para qualquer $V \subset M$.

Desta forma podemos associar $\{f\}$ ao divisor $D = \sum_V \text{ord}_V(f_\alpha) \cdot V$, se, para cada V tomamos α tal que $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$.

Por outro lado dado $D = \sum a_i V_i$, como apresentado anteriormente, podemos achar uma cobertura finita $\{U_\alpha\}$ de M , onde, para cada U_α , todo V_i que aparece na definição de D têm expressão local $g_{i\alpha} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Desta forma podemos escrever

$$f_\alpha = \prod g_{i\alpha}^{a_i} \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$$

de forma que obtemos uma seção global de $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$.

III-Divisores e Fibrados Lineares

Esta seção tratará de fibrados lineares holomórficos.

Já vimos no capítulo I que fibrados lineares holomórficos sobre uma variedade de base M podem ser descritos em termos de funções de transição $\{g_{\alpha\beta}\}$, para uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M , $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, tais que:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} &= 1 \\ g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} &= 1. \end{aligned}$$

As funções de transição são definidas a partir das trivializações locais $\{\varphi_\alpha\}$ por:

$$g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$$

Dois conjuntos de trivializações $\{\varphi_\alpha\}$ e $\{\varphi'_\alpha\}$ definem o mesmo fibrado se $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha \cdot f_\alpha$ para funções $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$.

Podemos também construir tais funções de transição da seguinte forma. Tomemos um divisor D com funções $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ definidas de acordo com a cobertura $\{U_\alpha\}$ de M . As funções

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$$

são holomórficas e não nulas em $U_\alpha \cap U_\beta$, satisfazendo as condições requeridas acima, de forma que definem fibrados lineares sobre M . Tais fibrados serão denotados por $[D]$ e ditos fibrados lineares associados a D .

Note que dois representantes $\{f_\alpha\}$ e $\{f'_\alpha\}$ do mesmo divisor D são iguais a menos de funções holomórficas não nulas, de forma que $f_\alpha = f'_\alpha h_\alpha$, $h_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$. Desta forma temos que

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \frac{h_\alpha}{h_\beta}$$

, de forma que $g_{\alpha\beta}$ e $g'_{\alpha\beta}$ definem duas trivializações do fibrado linear $[D]$.

Note que da correspondência dada por [] decorre a seguinte propriedade: se D e D' forem dois divisores dados por $\{f_\alpha\}$ e $\{f'_\alpha\}$ respectivamente então $D + D'$ é dado por $\{f_\alpha f'_\alpha\}$, de forma que $[D + D'] = [D] \otimes [D']$.

Desta forma temos de fato um homomorfismo do grupo dos divisores, apresentado na parte I deste apêndice e o grupo dos fibrados lineares [Woo]. Este último é isomorfo a $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ como foi visto no capítulo I. Note que divisores de funções $\{f\}$, i.e., divisores dados por uma função meromórfica globalmente definida em M pertencem ao núcleo desta aplicação, uma vez que as expressões locais f_α , sendo restrições $f|_{U_\alpha}$ de $f \in \mathcal{M}(M)$ no aberto U_α , são tais que $g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta = 1$, dando origem a um fibrado trivial.

No caso em que a variedade M seja um toro, caso em que temos tratado durante esta tese, temos também um homomorfismo entre o monóide de divisores e o anel de funções theta de Jacobi.

Referências :

- [Ari] G.M.D'ARIANO, M.G.RASETTI, in *Integrable System in Statistical Mechanics*, World Scientific Pub., Singapore, 1985
- [Arn] V.LARNOLD, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, MIR, Moscow, 1987
- [Ati1] M.ATTYAH, in *Lectures Notes in Physics*, Springer Verlag, 208, (313-322), 1984
- [Ati2] M.ATTYAH, in *Symposium on Anomalies, Geometry, Topology*, World Scientific Press, 22-32, 1985
- [Ati3] M.ATTYAH, *Soc. Math. de France, Astérisque*, 32-3, (47-72), 1976
- [Ber1] F.A.BEREZIN, *Comm. Math. Phys.*, 40, (153-174), 1975
- [Ber2] F.A.BEREZIN, *The Method of Second quantization*, Academic Press, New York, 1996
- [Bog1] N.N.BOGOLUBOV, D.V.SHIRKOV, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley Interscience, New York, 1959
- [Bog2] N.N.BOGOLUBOV, A.A.LOGUNOV, I.T.TODOROV, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, W.A.Benjamin, Inc., London, 1975
- [Bog3] N.N.BOGOLUBOV, A.A.LOGUNOV, A.LOKSAC, I.T.TODOROV, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1987
- [Boh] D.BOHN, *Quantum Theory*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1951
- [Bos] M.BOS, V.P.NAIR, *Phys. Letters B*, 223, (1), 1989
- [Car] P.CARTIER, in *Proc. Symp. Pure Math.*, vol9, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Am. Math. Soc., Providence, 1966.
- [Cel1] E.CELEGHINI, S. DE MARTINO, S.DE SIENA, G.VITIELLO, *Annals of Physics*, 241, (1), 1995
- [Cel2] E.CELEGHINI, R.GIACHETTI, E.SORACE, M.TARLINI, *J. Maths. Phys.*, 32(5), 1991
- [Cha] V.CHARI, A. PRESSLEY, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- [Eli1] *J. Math. Phys.* 32 (1), 1991
- [Eli2] S.ELITZUR, G.MOORE, A.SCHWIMMER, N.SEIBERG, *Nuclear Phys.B* 326, (108-134), 1989
- [Fad1] L.D.FADDEEV, *Phys. Letters B*, 145, (1,2), 1984

- [Fad2] L.D.FADDEEV, A.A.SLAVNOV, Gauge Fields, Introduction to Quantum (Theory, The Benjamin Cummings Publishing Company, Reading, 1980
- [Gep] D.GEPNER, E.WITTEN, Nuclear Phys. B, 278, (493), 1986
- [Gir1] H.O.GIROTTI, M.GOMES, J.L.DELYRA, R.S.MENDES, J.R.S.NASCIMENTO, Phys. rev. Letters, 69, (18), 1992
- [Gir2] H.O.GIROTTI, M.GOMES, A.J.SILVA, Phys. Letters B., 274, (357-362), 1992
- [Gri] P.GRIFFITHS, J.HARRIS, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, New York, 1978
- [Har] H. SATO, Mod. Phys. Letters A, 9, (5), 1994
- [Hay] T.HAYASHI, Com. Math. Phys., 127, (129-144), 1990
- [Igu] J.IGUSA, Theta Functions, Springer Verlag, Berlin, 1972
- [Imb] C.IMBIMBO, Phys. Letters B., 258, (3,4), 1991
- [Ior] A.IORIO, G.VITIELLO, Mod. Phys. Letters B, 8, (4) 1994
- [Jack1] S.DESER, R.JACKIW, S.TEMPLETON, Annals of Phys., 140, (372-411), 1982.
- [Jack2] G.V.DUNNE, R.JACKIW, C.A.TRUGENBERGER, Phys. Rev.D, 41, (2), 1990
- [Jack3] R.JACKIW, in Proceedings of Theoretical advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, YALE University, New Haven, Connecticut, 1985
- [Jac] N.JACOBSON, Lie Algebras, Dover, New York, 1979
- [Kac1] V.G. KAC, \checkmark Infinite Dimensional Lie Algebras (3rd ed), Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- [Kac2] V.G.KAC, D.H.PETERSON, Infinite Dim. Lie Algebra, Theta Functions and Modular Forms, in Advances in Maths. vol53, n.2, 1984.
- [Kas] C. KASSEL, Quantum Groups, Springer Verlag, Berlin, 1995
- [Kir] A.A.KIRILLOV, Elements of the Theory of Representations, Springer Verlag, Berlin, 1976
- [Kla1] J.R.KLAUDER, BO-S.SKAGERTAN, Coherent States-Applications in Physics and Mathematical Physics, World Scientific, Singapore, 1985
- [Kla2] J.R.KLAUDER, E.C.G.SUDARSHAN, Fundamentals of quantum Optics, W.A. Benjamin Inc., New York, 1968
- [Kob] S.KOBAYASHI, K.NOMIZU, Foundations of Differential Geometry voll., Interscience Pub., New York, 1963
- [Kur] H.KURATSUJI, T.SUZUKI, in Supplement of the Progress of Theoretical Phys., 74-75, 1983
- [Lab] J.M.F. LABASTIDA, A.V.RAMALLO, Phys. Letters B, 227, (1), 1989
- [Lau] L.D.LANDAU, E.M.LIFSHITZ, Quantum Mechanics, Pergamon Press, London, 1958.
- [Mer] E.MERZBACHER, Quantum Mechanics (2nd ed.), John Wiley & Sons, New York, 1970

- [Mun] D. MUNFORD, *Tata Lectures on Theta I, II*, Birkhäuser, Boston, 1983
- [Nak] M.NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics*, Inst. of Physics Publishing, Bristol, 1990
- [Nas] C.NASH, *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press, London, 1991
- [Per] A. PERELOMOV, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer Verlag, Berlin, 1986
- [Rei] F.REIF, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, Mc Graw-Hill, Singapore, 1965
- [Ryd] L.H.RYDER, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [She] M.SHENBERG, *Pensando a Física*, Nova Stella, São Paulo, 1988 (3a. ed.)
- [Sin] G. A. JONES, D.SINGERMAN, *Complex Functions-An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987
- [Sni] J. SNIATYCKI, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer Verlag, New York, 1980
- [Sto] M.STONE, *Nuclear Phys. B*, 327, (399-414), 1989
- [Tak] L.A.TAKHTAJAN, *Lectures on Quantum Groups*, in *Nankai Lectures on Math. Phys.-Introduction to Quantum Groups and Int. Mass. models of QFT*, Ed Mo-Lin Ge, Bao-Heng Zhao, 1990
- [Vil] N.Ja. VILENKIN, A.U. KLIMYK, *Representation of Lie Groups and Special Functions*, Vol. 1,2 & 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992
- [Wae] B.L.VAN DER WAERDEN (ed.by), *Sources of Quantum Mechanics*, Dover Pub., New York, 1968
- [Wey] H.WEYL, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Pub., New York, 1950
- [Wit1] E.WITTEN, *Com. Maths. Phys.*, 121, (351-399), 1989
- [Wit2] E.WITTEN, *Nuclear Phys.B* 322, (629-697), 1989
- [Wit3] E.WITTEN, *Nuclear Phys.B* 330, (285-346), 1990
- [Wit4] E.WITTEN, *LASSNS-HEP-89/38*, June 1989
- [Woo] N.WOODHOUSE, *Geometric Quantization*, Oxford University Press, Oxford, 1980